А.Қ.Ўринов

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

А.Қ. ЎРИНОВ

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

Тошкент
MUMTOZ SO'Z
2014

УЎК: 517.927
КБК: 22.193

Мазкур ўқув қўлланма оддий дифференциал тенгламалар учун классик ва ноклассик чегаравий масалалар ва уларнинг ечиш усуллари билан таништиришга багишланган. Унда каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ҳамда Фредгольм ва Вольтерра интеграл операторлари иштирок этган оддий дифференциал тенгламалар учун масалалар ҳам келтирилган. Бу ўқув қўлланмадан магистратуранинг "Математика"мутахассислиги ва бакалавриатнинг "Математика" ҳамда "Амалий математика ва информатика" йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар ва дифференциал тенгламалар билан шугулланувчи илмий тадқиқотчилар фойдаланиши мумкин.

Масъул муҳаррир:
Мўминов Ғ.М. – *физика - математика фанлари доктори.*

Тақризчилар:
Аҳмедов З.А. – *физика-математика фанлари номзоди, доцент;*
Эргашев Т.Г. – *физика-математика фанлари номзоди, доцент.*

Ўринов А.Қ.
Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар: ўқув қўлланма/ А.Қ.Ўринов. – Тошкент: MUMTOZ SO'Z, 2014. - 164 бет.

Фарғона давлат университети Илмий Кенгаши томонидан нашрга тавсия қилинган (2014 йил, 31 январь, № 5 баённома).

Фундаментал тадқиқотлар давлат илмий-техника дастурларининг Ф-4-59 лойиҳаси маблаги ҳисобига чоп этилди.

ISBN 978-9943-398-99-1

Сўзбоши

Устозим - профессор
Қўчқорбой Бойқўзиевнинг
хотирасига бағишлайман

Маълумки, олий таълимни икки босқичли қилиб ташкил этилганлиги, яъни бакалавриат ва магистратура босқичларидан иборатлиги олий малакали мутахассислар тайёрлаш сифатини кўтаришга хизмат қилмоқда. Ҳақиқатан ҳам, бакалавриатда маълум йўналиш бўйича у ёки бу касбни эгаллаш учун зарур бўлган фундаментал фанлар пухта ўрганилса, магистратурада шу йўналишга мос бирон бир мутахассисликни эгаллаш учун зарур бўлган фанларни чуқур ўзлаштириб, бу фанлар ривожининг ҳозирги замон даражасигача ўрганиш имкони мавжуддир. Мана шу нуқтаи назардан қараганда, магистратуранинг ҳар бир мутахассислик фанлари бўйича ўқув адабиётлари яратиш ҳозирги кунда таълимнинг долзарб вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда. Мазкур ўқув қўлланма бу вазифани бажаришдаги бир қадам бўлиб, магистратуранинг "Математика"(дифференциал тенгламалар) мутахассислиги стандартига мос ҳолда тузилган. Уни ёзишда муаллифнинг Фарғона давлат университетида олиб борган назарий ва амалий машғулотлари асос қилиб олинган.

Ўқув қўлланма тўрт бобдан иборат бўлиб, у оддий дифференциал тенгламалар учун классик ва ноклассик чегаравий масалаларни ва уларнинг ечиш усулларини ўрганишга бағишланган.

Биринчи бобда оддий дифференциал тенгламалар учун икки нуқтали чегаравий масалалар ўрганилган. Унда берилган тенглама учун икки нуқтали чегаравий масала тушунчаси, унинг Грин функциясини тузиш усуллари, масала ечимини топиш формуласи келтирилган ва мисоллар ёрдамида мустаҳкамланган.

Иккинчи боб оддий дифференциал тенгламалар учун нолокал шартли чегаравий масалаларни ўрганишга бағишланган бўлиб, бу ерда аввал Фредгольм ва Вольтерра интеграл тенгламалари ҳақидаги маълумотлар келтирилган. Сўнгра дифференциал тенгламалар учун Бицадзе-Самарский масаласи ва унинг умумлашмалари, биринчи ва иккинчи тур интеграл шартли масалалар баён қилинган ва уларнинг ечиш усуллари келтирилган.

Учинчи боб интегро-дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишга бағишланган бўлиб, Фредгольм ва Вольтерранинг интеграл операторлари ва каср тартибли дифференциал операторлар иштирок этган дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар баён қилинган ва уларнинг ечиш усуллари келтирилган. Бу бобда каср тартибли дифференциал оператор қатнашган тенгламалар учун Бицадзе -Самарский ва интеграл шартли масалалар ҳам ўрганилган.

Тўртинчи бобда оддий дифференциал тенгламалар учун спектрал масалалар ўрганилган. Бунда аввал Штурм-Лиувилл масалалари сўнгра эса нолокал чегаравий шартли спектрал масалалар қаралган. Боб сўнгида умумлашган спектрал масалалар баён қилинган ва уларнинг ечиш усуллари кўрсатилган.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, ушбу қўлланмада баён қилинган баъзи масалалар биринчи марта эълон қилинмоқда. Бундан ташқари, бу ерда ўрганилган баъзи масалалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ўрганишда фойдаланилиши мумкин.

Мазкур ўқув қўлланма қўлёзмасини ўқиб чиқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган физика-математика фанлари доктори Ғ.М.Мўминовга, физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар З.А.Аҳмедовга ва Т.Г.Эргашевга, ўқув қўлланмани нашрга тайёрлашда ёрдам берган ўқитувчилар А.И.Исмоиловга ва М.С.Азизовга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

Қўлланмадан бакалавриатнинг "Математика" , "Амалий математика ва информатика" йўналишларида таълим олаётган талабалар ва дифференциал тенгламалар билан шуғилланувчи илмий тадқиқотчилар ҳам фойдаланиши мумкин.

Муаллиф

I БОБ

АСОСИЙ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1.1-§. Чегаравий масалалар ҳақида умумий тушунча

Дифференциал тенгламалар учун қўйилган Коши (бошлангич) масаласини эслаб ўтайлик. Содда қилиб айтганда, Коши масаласи қаралаётган дифференциал тенгламанинг берилган нуқтадан ўтадиган интеграл чизиғини излашдан иборат эди. Агар дифференциал тенгламанинг бирор бир интеграл чизиғини берилган икки нуқтадан ўтиши талаб этилса, бу масала Коши масаласидан фарқ қилиб, берилган икки нуқтанинг ҳар бири учун алоҳида олинган Коши масаласи ечимга эга бўлса ҳам, бу масала ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун бу масала қисқача

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

каби ёзилади, бу ерда x_0, x_1, y_0, y_1-берилган сонлар бўлиб, $x_0 \neq x_1$. Бу масалани ўрганишда, агар қаралаётган дифференциал тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлса, у ечим $y(x_1) = y_1$ шартни ҳам қаноатлантирадими ёки йўқми? деган саволга жавоб бериш лозим бўлади. Бу ҳолда тегишли саволга бевосита текшириш билан жавоб бериш мумкин. Масалан, $y' = x^{-1}$, $x > 0$, $y(e) = 1$, $y(1) = 1$ масала ечимга эга эмас. Ҳақиқатан ҳам, берилган тенгламанинг умумий ечими $y = \ln x + C$ кўринишга эга бўлиб, ундан $y(e) = 1$ шартга кўра $1 = \ln e + C$, яъни $C = 0$, келиб чиқади. Демак, $y = \ln x$ ечим $y(e) = 1$ шартни қаноатлантиради. Аммо бу функция $y(1) = 1$ шартни қаноатлантирмайди, чунки $y(1) = \ln 1 = 0 \neq 1$. Демак, бу функцияга мос интеграл чизиқ (1.1) нуқтадан ўтмайди. Шунинг учун ўрганилаётган масала ечимга эга эмас. Аммо, юқоридаги мулоҳазалардан кўриниб турибдики, ушбу $y' = x^{-1}$, $x > 0$, $y(e) = 1$, $y(1) = 0$ масала ягона $y = \ln x$ ечимга эга.

Маълумки, иккинчи тартибли $y'' = f(x, y, y')$ дифференциал тенгламалар учун Коши (бошланғич) масаласи $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ шартлар билан қўйилади. Бу масала геометрик нуктаи назардан, берилган дифференциал тенгламанинг (x_0, y_0) нуктадан y_1 бурчак коэффициент билан ўтувчи интеграл чизиғини топишдан иборат. Қаралаётган тенглама учун $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ чегаравий шартли масала қўйилиши ҳам мумкин. Бу масалада тенгламанинг интеграл чизиғи (x_0, y_0) ва (x_1, y_1) нуқталардан ўтиши талаб қилинаётган бўлиб, бу нуқталардан бу интеграл чизиқ қандай бурчак коэффициент билан ўтиши аввалдан берилган эмас. Мисол сифатида ушбу

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$

масалани текширайлик. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ дан иборат, бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар. Бундан $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ечим $y = C_2 \sin x$ экани келиб чиқади. Агар $x_1 = k\pi$ (k - берилган ихтиёрий бутун сон) бўлса, $y(k\pi) = C_2 \sin k\pi = 0$ бўлади. Демак, бунда $y = C_2 \sin x$ функция C_2 - ихтиёрий сон бўлганда ҳам қаралаётган масаланинг ечими бўлади, яъни бунда масала чексиз кўп ечимга эга бўлади. Агар $x_1 \neq k\pi$ бўлса, $\sin x_1 \neq 0$ бўлиб, $y_1 = C_2 \sin x_1$ тенгликдан $C_2 = y_1 / \sin x_1$ келиб чиқади. Бу ҳолда қаралаётган масала $y = (y_1 / \sin x_1) \sin x$ кўринишдаги ягона ечимга эга бўлади. Хусусий ҳолда, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$ шартларни қаноатлантирадиган ечим фақатгина $y_1 = 0$ бўлганда мавжуд бўлиб, у $y(x) \equiv 0$ функциядан иборат бўлади.

Юқорида дифференциал тенгламалар учун қўйилган масала Коши масаласидан фарқ қиладиган масала бўлиб, уни *икки нуқтали чегаравий масала* ёки, тўғридан-тўғри, *чегаравий масала* деб юритилади.

1.2-§. Икки нуқтали чегаравий масала

Ушбу

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = \varphi(x), \qquad x \in (x_0, x_1) \tag{1.1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1 \tag{1.2}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи (1.1) тенглама учун *икки нуқтали чегаравий масала* деб аталади. Бунда (1.2)-*чегаравий шартлар* деб юритилади. (1.1) тенглама ва (1.2) тенгликларда x_0, x_1, y_0, y_1 - берилган сонлар, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\varphi(x)$ лар эса берилган фунциялар бўлиб, $x_0 < x_1$ ва $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\varphi(x) \in C[x_0, x_1]$.

$\{(1.1),\ (1.2)\}$ масалани номаълум функцияни алмаштириш билан соддалаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $y(x)$ номаълум функцияни

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

тенглик билан янги $z(x)$ номаълум функцияга алмаштирсак, (1.1) тенглама яна иккинчи тартибли қуйидаги кўринишдаги

$$z'' + p_1(x)\,z' + p_2(x)\,z = \psi(x)$$

чизиқли дифференциал тенгламага, (1.2) чегаравий шартлар эса $z(x_0) = 0$, $z(x_1) = 0$ кўринишга келади, бу ерда

$$\psi(x) = \varphi(x) - y_0 p_2(x) -$$

$$- [p_1(x) + (x - x_0)\,p_2(x)]\,(y_1 - y_0)\,(x_1 - x_0)^{-1}.$$

Кўпинча (1.1) тенгламани текширишга қулай бўлган бошқа кўринишда ёзилади. Агар (1.1) тенгламанинг икки томонини $\exp \int p_1(x)\,dx$ функцияга кўпайтириб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] + q(x)\,y = f(x), \qquad x \in (x_0, x_1) \tag{1.3}$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бу ерда

$$f(x) = p(x)\varphi(x), \quad q(x) = p(x)\cdot p_2(x), \quad p(x) = \exp\int p_1(x)\,dx.$$

Юқоридаги мулоҳазаларни эътиборга олиб, умумийликни чегараламаган ҳолда, $\{(1.1),\ (1.2)\}$ масала ўрнига (1.3) тенгламанинг

$$y(x_0) = 0, \qquad y(x_1) = 0 \tag{1.4}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш ҳақидаги чегаравий масаласини ўрганиш етарли деган хулосага келамиз.

Агар $f(x) \not\equiv 0$ бўлса, $\{(1.3),\ (1.4)\}$ масала *бир жинсли бўлмаган масала*, $f(x) \equiv 0$ бўлганда эса *бир жинсли масала* деб юритилади.

Юқорида баён қилинган масала (1.3) тенгламанинг ушбу

$$\begin{aligned} a_1 y(x_0) + b_1 y'(x_0) &= c_1, \\ a_2 y(x_1) + b_2 y'(x_1) &= c_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масаланинг хусусий холидир, бу ерда a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 -берилган ўзгармаслар бўлиб, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ ва $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Агар $c_1 = c_2 = 0$ бўлса, $\{(1.3),\ (1.5)\}$ масала *бир жинсли чегаравий шартли масала* дейилади, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлганда эса тегишли масала *бир жинсли бўлмаган чегаравий шартли масала* деб юритилади.

Демак, икки нуқтали чегаравий масалада берилган дифференциал тенглама қаралаётган кесма чегарасида нафақат номаълум функциянинг қиймати, балки унинг ҳосиласининг қиймати ёки ўзи ва ҳосиласининг бирор чизиқли комбинациясининг қиймати берилиши мумкин экан. Одатда (1.3) тенглама учун (1.4) шартлар билан қўйилган масала *биринчи чегаравий масала*, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ шартлар билан қўйилган масала *иккинчи чегаравий масала*, қолган ҳолларда эса *аралаш чегаравий масала* деб аталади.

1.3-§. Икки нуқтали чегаравий масаланинг Грин функцияси

Дифференциал тенгламалар учун бирор бир чегаравий масалани ўрганишда унга мос Грин функцияси муҳим аҳамиятга эга. Мисол сифатида $\{(1.3)\,,\ (1.4)\}$ чегаравий масаланинг Грин функцияси ва унинг хоссалари билан танишиб чиқамиз.

Таъриф. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи икки аргументли* $G(x,s)$ *функция* $\{(1.3)\,,\ (1.4)\}$ *чегаравий масаланинг Грин функцияси деб аталади:*

1^0. $G(x,s)$ *функция ихтиёрий тайинланган* $s\in(x_0,\ x_1)$ *учун* x *аргументи бўйича* $[x_0,\ x_1]$ *оралиқда узлуксиз;*

2^0. $G(x,s)$ *функция* x *аргументи бўйича* $(x_0,\ s)$ *ва* $(s,\ x_1)$ *оралиқларда ушбу*

$$[p(x)\,y']'_x+q(x)\,y=0,\qquad x\in(x_0,s)\cup(s,x_1)$$

бир жинсли тенгламани қаноатлантиради;

3^0. $G(x,s)$ *функция* $s\in(x_0,x_1)$ *бўлганда*

$$G(x_0,s)=0,\qquad G(x_1,s)=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

4^0. $G'_x(x,s)$ *функция* $x\neq s$ *да узлуксиз,* $x=s$ *бўлганда эса биринчи тур узилишга эга бўлиб, унинг сакраши* $1/p(s)$ *га тенг, яъни*

$$G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}$$

ёки

$$G'_x(s,s+0)-G'_x(s,s-0)=-\frac{1}{p(s)}.$$

Таърифланган Грин функцияси қуйидаги хоссаларга эга.

1. $G(x,s)$ *функция ўз аргументларига нисбатан симметрикдир.* Буни исботлаш учун

$$L[y]\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=f(x)\,,L[z]\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right)+qz=g(x)$$

белгилашларни киритамиз. Ихтиёрий $y \in C^2$, $z \in C^2$ функциялар учун

$$zL[y] - yL[z] = \frac{d}{dx}[p(zy' - yz')] = f(x)z - g(x)y \qquad (1.6)$$

Грин формуласи ўринли бўлади. Бу формулада $z = G(x,\xi)$ ва $y = G(x,s)$ десак, (x_0, x_1) ораликнинг ξ ва s нуқталаридан ташқари барча нуқталарида $L[y] = 0$ ва $L[z] = 0$ тенгликлар ўринли бўлиб, (1.6) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d}{dx}\{p(x)[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]\} = 0. \qquad (1.6')$$

Умумийликни чегараламаган ҳолда $s < \xi$ деб фараз қилиб, $[x_0,\ x_1]$ ораликни s ва ξ нуқталар ёрдамида уч бўлакка, яъни $[x_0,\ s]$, $[s,\ \xi]$, $[\xi,\ x_1]$ ораликларга бўлиб, сўнгра (1.6′) тенгликни бу ораликлар бўйича интеграллсак,

$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]|_{x_0}^{s-0} +$$

$$+p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]|_{s+0}^{\xi-0} +$$

$$+p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]|_{\xi+0}^{x_1} = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Грин функциясининг хоссаларини эътиборга олсак, бу ердан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]|_{\xi+0}^{s-0} +$$

$$+p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]|_{s+0}^{\xi-0} = 0$$

ёки

$$p(s)G(s,\xi)[G'_x(s-0,s) - G'_x(s+0,s)] -$$

$$-p(s)G(s,s)[G'_x(s,\xi) - G'_x(s,\xi)] +$$

$$+p(\xi)G(\xi,\xi)[G'_x(\xi,s) - G'_x(\xi,s)] -$$

$$-p(\xi)G(\xi,s)[G'_x(\xi-0,\xi) - G'_x(\xi+0,\xi)] = 0.$$

Бундан $G(x,s)$ функциянинг 4^0 хоссасига асосан

$$p(s)\,G(s,\xi)\left(\frac{-1}{p(s)}\right)-p(\xi)\,G(\xi,s)\left(\frac{-1}{p(\xi)}\right)=0$$

тенглик, яъни $G(s,\xi)=G(\xi,s)$ тенглик келиб чиқади. Демак, Грин функцияси ўз аргументларига нисбатан симметрик экан.

2. $\{(1.3),(1.4)\}$ *масаланинг* $G(x,s)$ *Грин функцияси мавжуд.* Грин функциясининг мавжудлигини уни бевосита тузиш билан исботлаймиз. Бунда Грин функциясининг мавжудлигини таъминлайдиган етарли шартлар ҳам келиб чиқади. *Ушбу*

$$[p(x)\,y']'+q(x)\,y=0 \tag{1.7}$$

бир жинсли тенгламанинг $y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$ *чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими фақатгина* $y\equiv 0$ *функциядан иборат бўлсин,* деб фараз қилайлик.

(1.7) тенгламанинг $y(x_0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган тривиал бўлмаган ечимини $y_1(x)$ деб белгилайлик. Бундай ечим мавжуд, чунки $p(x)$, $p'(x)$ ва $q(x)$ лар x_0 нуқта атрофида узлуксиз. Бу ечим, умуман олганда, иккинчи $y(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантирмайди. Аниқки, $y=C_1y_1(x)$ (бу ерда C_1 - ихтиёрий ўзгармас сон) функция (1.7) тенгламани ва $y(x_0)=0$ чегаравий шартни қаноатлантиради.

Худди шунга ўхшаш (1.7) тенгламанинг $y(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантирадиган тривиал бўлмаган $y_2(x)$ ечимини топамиз. $C_2y_2(x)$ функция ҳам $y(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантиради (бу ерда C_2-ихтиёрий ўзгармас сон).

Юқоридагиларни эътиборга олиб, Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1y_1(x), & x_0\leqslant x\leqslant s,\\ C_2y_2(x), & s\leqslant x\leqslant x_1.\end{cases}$$

Бу ердаги C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармасларни шундай танлаймизки, натижада $G(x,s)$-Грин функцияси 1^0 ва 4^0 шартларни ҳам қаноатлантирсин, яъни 1) $G(x,s)$ функция тайинланган

$s \in (x_0, x_1)$ учун x бўйича $[x_0, x_1]$оралиқда узлуксиз, хусусий ҳолда $x = s$ бўлганда ҳам узлуксиз:

$$C_1 y_1(s) - C_2 y_2(s) = 0 \tag{1.8}$$

ва 2) $G'_x(x, s)$ функция $x = s$ нуқтада узилишга эга бўлиб, унинг сакраши $1/p(s)$ га тенг:

$$C_2 y'_2(s) - C_1 y'_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{1.9}$$

Равшанки, $y_1(x)$ функция билан чизиқли боғлиқ бўлган функциялар $C_1 y_1(x)$ кўринишга эга бўлади. $y_1(x_1) \neq 0$ бўлганидан $C_1 y_1(x) \neq 0$ $(C_1 \neq 0)$ бўлади. Шу билан бирга $y_2(x_1) = 0$. Булардан $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функцияларнинг чизиқли эрклилиги келиб чиқади. Демак, уларга мос Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

текширилаётган $x = s$ нуқтада нолдан фарқли бўлади. Шунинг учун $\{(1.8), (1.9)\}$ системадан C_1 ва C_2 лар бир қийматли топилади:

$$C_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}, \qquad C_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)\,p(s)}$$

Буларни эътиборга олсак, Грин функцияси

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)\,y_1(x)}{W(s)\,p(s)}, & x_0 \leqslant x \leqslant s, \\[2ex] \dfrac{y_1(s)\,y_2(x)}{W(s)\,p(s)}, & s \leqslant x \leqslant x_1 \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функцияларга (1.6) формулани қўлласак,

$$\frac{d}{dx}\left[p\left(y_1 y'_2 - y_2 y'\right)\right] = 0, \quad x \in (x_0, x_1)$$

тенгликка эга бўламиз. $W(x) \neq 0$ ва $p(x) \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, охирги тенгликдан $W(x)\,p(x) = const \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ эканлиги келиб чиқади. $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимларни шундай танлаш мумкинки, натижада $W(x)\,p(x) = 1$, $x \in [x_0, x_1]$ тенглик ўринли бўлади. Демак, ўрганилаётган $\{(1.3),\ (1.4)\}$ масаланинг Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} y_2(s)\,y_1(x), & x_0 \leqslant x \leqslant s, \\ y_1(s)\,y_2(x), & s \leqslant x \leqslant x_1 \end{cases}$$

формула билан аниқланади. Бу формуладан қўйилган масала учун Грин функциясининг симметриклиги кўриниб турибди.

3. $\{(1.3), (1.4)\}$ *масаланинг* $G(x,s)$ *Грин функцияси ягона.* Бу хоссасининг исботини 1.5-§ да келтирамиз.

1-эслатма. Биз $(py')' + qy = 0$ тенгламанинг $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд эмас деб фараз қилдик. Бу шарт $\{(1.3), (1.4)\}$ масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини таъминлаш билан бирга, қўйилган масала Грин функциясининг ягоналигини ҳам таъминлайди.

2-эслатма. Агар ўрганилаётган чегаравий масалада (1.5) дан келиб чиқувчи бошқа чегаравий шартлар олинган бўлса, бу масаланинг Грин функциясидан ўша чегаравий шартга мос бир жинсли шартларни бажариши талаб қилинади.

3-эслатма. $\{(1.3),\ (1.4)\}$ масаланинг юқорида таърифланган $G(x,s)$ Грин функциясини баъзида $L(y) \equiv [p(x)\,y']' + q(x)y$ *дифференциал оператор (ифода)нинг (1.4) шартларни қаноатлантирувчи Грин функцияси* деб юритилади.

Юқорида қаралаётган чегаравий масалага мос бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга деб фараз қилиб, бу масала Грин функциясининг мавжудлигини ва ягоналигини исботладик. Одатда бундай Грин функцияси *оддий Грин функцияси* деб юритилади.

1.4-§. Грин функциясини тузишга доир мисоллар

Бу параграфда оддий Грин функциясини тузишга доир бир неча мисоллар келтирамиз.

1. Қуйидаги

$$y'' + y = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$$

чегаравий масаланинг Грин функциясини топайлик.

Ечиш. Берилган тенгламага мос бир жинсли $y'' + y = 0$ тенгламанинг умумий ечими $y = C_1 sinx + C_2 cosx$ кўринишга эга, бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар. Бундан $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $y_1 = C_1 \sin x$ ечимини топамиз. Сўнгра шу бир жинсли тенгламанинг $y(\pi/2) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $y_2 = C_2 \cos x$ ечимини топамиз. Булар асосида қўйилган масаланинг Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ C_2 \cos x, & s \leqslant x \leqslant (\pi/2). \end{cases}$$

Грин функцияси $x = s$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун

$$C_1 \sin s - C_2 \cos s = 0$$

муносабатга, ҳосиласи эса $x = s$ да узилишга эга бўлгани учун, $p(x) = 1$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$-C_2 \sin s - C_1 \cos s = 1$$

муносабатга эга бўламиз. Бу икки алгебраик тенгламалар системасидан $C_1 = -\cos s$, $C_2 = -\sin s$ тенгликлар келиб чиқади. Демак, қўйилган масаланинг Грин функцияси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\sin s \cos x, & s \leqslant x \leqslant (\pi/2). \end{cases}$$

2. Ушбу $L[y] \equiv y''$ дифференциал ифоданинг $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $y'' = 0$ тенгламанинг умумий ечими $y = C_1x + C_2$ эканлигини ва чегаравий шартларни эътиборга олиб, қуйилган масаланинг Грин функциясини

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1x, & x < s, \\ C_2(1-x), & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз.

$x = s$ нуқтада $G(x,s)$ функция узлуксиз, лекин унинг биринчи тартибли ҳосиласи $G'_x(x,s)$ узилишга эга бўлгани учун

$$\begin{cases} C_1s = C_2(1-s), \\ -C_2 - C_1 = p^{-1}(s) = 1 \end{cases}$$

тенгликлар ўринли. Бу алгебраик тенгламалар системасини ечиб $C_1 = s-1$, $C_2 = -s$ ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, & x < s, \\ (x-1)s, & s < x. \end{cases}$$

3. Ушбу $L[y] \equiv y''$ дифференциал ифоданинг $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш: $y'' = 0$ тенгламанинг $y = C_1x + C_2$ умумий ечимидан унинг $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ечими $y_1 = C_1x$, $y'(1) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ечими эса $y_2 = C_2$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун қўйилган масаланинг Грин функциясини

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1x, & x < s, \\ C_2, & s < x \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Грин функциясининг 1^0 ва 4^0 хоссасига асосан

$$\begin{cases} C_1 \cdot s = C_2, \\ -C_1 = 1 \end{cases}$$

тенгликлар ўринли. Улардан $C_1 = -1$, $C_2 = -s$ келиб чиқади.

Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} -x, & x < s, \\ -s, & s < x. \end{cases}$$

4. Ушбу $L[y] \equiv y''$ дифференциал ифоданинг $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини қуйидаги

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1(1+x), & x < s, \\ C_2(1-x), & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Натижада юқоридаги баён қилинган усул билан C_1 ва C_2 ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} C_1(1+s) = C_2(1-s), \\ -C_2 - C_1 = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани ечиб, $C_1 = (s-1)/2$ ва $C_1 = -(1+s)/2$ ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(s-1)(1+x), & x < s, \\ \dfrac{1}{2}(1+s)(x-1), & x > s. \end{cases}$$

5. Ушбу $L[y] \equiv y''$ дифференциал ифоданинг $y(0) = -y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $y'' = 0$ тенгламанинг умумий ечими $y = \alpha x + \beta$ кўринишга эга бўлгани учун қўйилган масаланинг Грин функциясини

$$G(x, s) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1, & x < s, \\ \alpha_2 x + \beta_2, & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз.

Бу функцияни чегаравий шартларга бўйсундирсак, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -(\alpha_2 + \beta_2)$ тенгликлар келиб чиқади. Грин функциясининг узлуксизлиги ва ҳосиласининг 1 - тур узилишга эгалиги шартларидан ушбу

$$\begin{cases} -\alpha_2 (1 + s) - \beta_2 = \alpha_2 s + \beta_2, \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системани ечиб, $\alpha_2 = (1/2)$, $\beta_2 = -(1 + 2s)/4$ ларни ҳосил қиламиз. Топилганларни ўрнига қўйиб, сўнгра ихчамлаштирсак, Грин функцияси учун

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(s - x) - \dfrac{1}{4}, & x < s, \\ \dfrac{1}{2}(x - s) - \dfrac{1}{4}, & s < x \end{cases}$$

ёки

$$G(x, s) = \frac{1}{2}|x - s| - \frac{1}{4}$$

ифодани топамиз.

1-эслатма. Бу масаладаги чегаравий шартлар (1.5) дан келиб чиқмайди. Улар номаълум функция ва унинг ҳосиласининг $[0, 1]$ оралиқ четки нуқталаридаги қийматларини боғламоқда. Бундай шартли масалалар билан кейинги бобларда тўлароқ танишамиз.

6. Ушбу $L[y] \equiv (xy')'$ дифференциал ифоданинг $|y(0)| < +\infty$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y]=0$ дифференциал тенглама умумий ечимининг кўриниши $y=\alpha\ln x+\beta$, $x>0$ бўлгани учун, Грин функциясини қуйидагича излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}\alpha_1\ln x+\beta_1, & x<s,\\ \alpha_2\ln x+\beta_2, & x>s.\end{cases}$$

Унда $|y(0)|<+\infty$ шартдан $\alpha_1=0$, $y(1)=0$ шартдан эса $\beta_2=0$ келиб чиқади. $x=s$ нуқтада $G(x,s)$ функциянинг узлуксизлигидан ва $G'_x(x,s)$ функциянинг узилишга эга эканлигидан, $p(x)=x$ бўлгани учун,

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_2\ln s,\\ \alpha_2 s^{-1}=s^{-1}\end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системадан $\alpha_2=1$, $\beta_1=\ln s$ ларни топамиз. Шундай қилиб, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\ln s, & x<s,\\ \ln x, & x>s.\end{cases}$$

7. Ушбу $L[y]\equiv(xy')'-(n^2/x)\,y$, $n\neq 0$ дифференциал ифоданинг $|y(0)|<+\infty$, $y(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини топинг.

Ечиш. x^n ва x^{-n} функциялар $L[y]=0$ тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлишига бевосита текшириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечими $y=\alpha x^n+\beta x^{-n}$ бўлади (бу ерда α ва β-ихтиёрий ўзгармаслар).

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}\alpha_1x^n+\beta_1x^{-n}, & x<s,\\ \alpha_2x^n+\beta_2x^{-n}, & x>s.\end{cases}$$

$|y(0)| < +\infty$ чегаравий шартдан $\beta_1 = 0$ тенглик, $y(1) = 0$ шартдан эса $\alpha_2 = -\beta_2$ тенглик келиб чиқади. Буларни эътиборга олсак, Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^n, & x < s, \\ \alpha_2 \left(x^n - x^{-n}\right), & x > s. \end{cases}$$

$x = s$ нуқтада $G(x,s)$ функциянинг узлуксизлигидан ва $G'_x(x,s)$ ҳосиланинг узилишга эгалигидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} \alpha_1 s^n - \alpha_2 \left(s^n - s^{-n}\right) = 0, \\ \alpha_2 n \left(s^{n-1} + s^{-n-1}\right) - n\alpha_1 s^{n-1} = s^{-1} \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, $\alpha_1 = \left(s^n - s^{-n}\right)/2n$, $\alpha_2 = s^n/2n$ ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидаги формула билан аниқланади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(s^n - s^{-n}\right) x^n, & x < s, \\ \dfrac{1}{2n}\left(x^n - x^{-n}\right) s^n, & x > s. \end{cases}$$

2-эслатма. 6 - ва 7-мисолларда биринчи чегаравий шартда номаълум функциянинг қиймати берилиши ўрнига, уни чегараланганлиги талаб қилинмоқда. Қаралаётган тенгламанинг ечимлари ичида баъзи нуқталарда чегараланмаган ечимлар мавжуд бўлган ҳолларда ана шундай шартлар олинади. Бундай шартли масалалар билан кейинги параграфларда тўлиқ танишамиз.

1.5-§. Икки нуқтали чегаравий масала ечимининг формуласи

1. Қуйидаги икки нуқтали чегаравий масалани қарайлик:

$$[p(x)\,y']' + q(x)\,y = f(x), \qquad x \in (x_0, x_1), \tag{1.10}$$

$$y(x_0) = 0, \qquad y(x_1) = 0. \tag{1.11}$$

Бу масаланинг ечими қуйидаги теорема асосида топилади.

Гильберт теоремаси. *Агар* $\{(1.10)\,,\,(1.11)\}$ *масаланинг* $G(x,s)$ *Грин функцияси маълум ва* $f\left(x\right)\in C\left[x_0,x_1\right]$ *бўлса, бу масаланинг ечими*

$$y(x)=\int\limits_{x_0}^{x_1}G\left(x,s\right)f\left(s\right)ds \tag{1.12}$$

формула билан аниқланади, аксинча, агар $y=y\left(x\right)$ *функция* $\{(1.10),(1.11)\}$ *масаланинг ечими бўлса, уни (1.12) кўринишда ифодалаш мумкин.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, (1.12) формула билан аниқланган $y(x)$ функция (1.11) чегаравий шартларни қаноатлантиради, чунки Грин функциясининг таърифига кўра $G\left(x_0,s\right)=G\left(x_1,s\right)=0$ бўлгани учун

$$y\left(x_0\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}G\left(x_0,s\right)f\left(s\right)ds=0,\quad y\left(x_1\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}G\left(x_1,s\right)f\left(s\right)ds=0.$$

Энди (1.12) формула билан аниқланган $y\left(x\right)$ функция (1.10) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал (1.12) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y(x)=\int\limits_{x_0}^{x}G\left(x,s\right)f\left(s\right)ds+\int\limits_{x}^{x_1}G\left(x,s\right)f\left(s\right)ds.$$

Бундан $y'\left(x\right)$, $y''\left(x\right)$ ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$y'\left(x\right)=\int\limits_{x_0}^{x}G'_x\left(x,s\right)f\left(s\right)ds+\int\limits_{x}^{x_1}G'_x\left(x,s\right)f\left(s\right)ds+$$

$$+G\left(x,x-0\right)f\left(x\right)-G\left(x,x+0\right)f\left(x\right)=$$

$$= \int_{x_0}^{x} G'_x(x,s) f(s)\,ds + \int_{x}^{x_1} G'_x(x,s) f(s)\,ds = \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s) f(s)\,ds;$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s) f(s)\,ds + \int_{x}^{x_1} G''_{xx}(x,s) f(s)\,ds +$$

$$+ \left[G'_x(x, x-0) - G'_x(x, x+0)\right] f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s) f(s)\,ds + \frac{1}{p(x)} f(x).$$

$y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ ларнинг қийматини (1.10) га қўямиз. Унда

$$[p(x)\,y']' + q(x)\,y =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[p(x)\,G''_{xx}(x,s) + p'(x)\,G'_x(x,s) + qG(x,s)\right] f(s)\,ds + f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left[p(x)\,G''_{xx}(x,s) + p'(x)\,G'_x(x,s) + qG(x,s)\right] f(s)\,ds +$$

$$+ \int_{x}^{x_1} \left[p(x)\,G''_{xx}(x,s) + p'(x)\,G'_x(x,s) + qG(x,s)\right] f(s)\,ds + f(x).$$

Интеграл остидаги ифодалар нолга тенглигини эътиборга олсак, охирги тенгликдан (1.10) тенглик келиб чиқади. Теореманинг биринчи қисми исботланди.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз, яъни $\{(1.10),(1.11)\}$ масаланинг ечими мавжуд бўлса, уни (1.12) формула билан ёзилишини исботлаймиз. $y(x)$ функция қўйилган $\{(1.10),(1.11)\}$ масаланинг ечими бўлсин. Бу масаланинг Грин функциясини $G(x,s)$ билан белгилайлик. (1.10) тенгламани $G(x,s)$ га,

$$[p(x)\,G'_x]' + q(x)\,G = 0, \quad x \in (x_0,s) \cup (s,x_1)$$

тенгламани $y(x)$ га кўпайтириб, биринчисидан иккинчисини айирсак,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'(x)G(x,s) - p(x)\,y(x)G'_x(x,s)\right] =$$

$$= G(x,s)\,f(x)\,, \; x \in (x_0,s) \cup (s,x_1)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликни $(x_0,s) \cup (s,x_1)$ ораликда интеграллаймиз:

$$[p(x)\,y'(x)G(x,s) - y(x)\,p(x)\,G'_x(x,s)]\big|_{x_0}^{s-0} +$$

$$+ [p(x)\,y'(x)G(x,s) - y(x)\,p(x)\,G'_x(x,s)]\big|_{s+0}^{x_1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(x)dx.$$

$y(x)$ ва $G(x,s)$ функциялар (1.11) чегаравий шартларни қаноатлантиришини $p(x)$ ва $y'(x)$, функциялар эса (x_0,x_1) ораликда узлуксизлигини эътиборга олсак, охирги тенгликдан

$$-y(s)\,p(s)\,G'_x(s-0,s) + y(s)\,p(s)\,G'_x(s+0,s) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)\,f(x)\,dx$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликни, $G'_x(x,s)$ функциянинг $x = s$ бўлгандаги хоссасига асосан,

$$y(s) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,s)\,f(x)\,dx$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ерда s ва x ўзгарувчилар ўринларини алмаштирсак,

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(s, x) f(s) \, ds$$

формула ҳосил бўлади.

Қўйилган масаланинг Грин функцияси учун $G(x, s) = G(s, x)$ тенглик ўринли эканлигини эътиборга олсак, охирги тенгликдан (1.12) тенглик келиб чиқади.

Гильберт теоремаси тўлиғича исботланди.

2. Энди икки нуқтали чегаравий масала учун оддий Грин функциясининг ягоналигини исботлаш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, $\{(1.10), (1.11)\}$ масаланинг иккита $G_1(x, s)$ ва $G_2(x, s)$ оддий Грин функциялари мавжуд деб фараз қилсак, (1.12) формулага асосан, қўйилган масаланинг бу Грин функцияларига мос ечимларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G_1(x, s) f(s) \, ds, \qquad y_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G_2(x, s) f(s) \, ds.$$

Буларнинг айирмасидан иборат бўлган ушбу

$$y_1(x) - y_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] f(s) \, ds$$

функция бир жинсли тенгламани ва (1.11) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Маълумки бундай функция айнан нолга тенг, яъни

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] f(s) \, ds \equiv 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Бу айният ихтиёрий $f(x) \in C[x_0, x_1]$ функция учун бажарилганлиги учун, ундан $G_1(x,s) - G_2(x,s) \equiv 0$, яъни $G_1(x,s) \equiv G_2(x,s)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\{(1.10), (1.11)\}$ масаланинг оддий Грин функцияси ягона экан.

1.6-§. Умумлашган Грин функцияси

Биз аввалги мавзуларда

$$L[y] \equiv [p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0, \quad x \in (x_0, x_1),$$

$$y(x_0) = 0, \qquad y(x_1) = 0$$

масала тривиал бўлмаган ечимга эга эмас деб фараз қилдик. Кўп ҳолларда бу масаланинг тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлади, яъни шундай $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$ функция топиладики, $L[y_0(x)] = 0$, $y_0(x_0) = 0$, $y_0(x_1) = 0$ тенгликлар ўринли бўлади. Бу ҳолда оддий Грин функциясини тузиш мумкин бўлмай, *умумлашган Грин функцияси* деб аталадиган функцияни тузишга тўғри келади. Кейинги мулоҳазаларда $y_0(x)$ деб юқорида эслатилган масаланинг тривиалмас ечимини белгилаб, умумлашган Грин функциясининг таърифини келтирамиз.

Таъриф. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи икки аргументли $G(x,s)$ функция $\{(1.10), (1.11)\}$ масаланинг умумлашган Грин функцияси дейилади:*

1^0. *$G(x,s)$ функция ихтиёрий тайинланган $s \in (x_0, x_1)$ учун x аргументи бўйича $[x_0, x_1]$ оралиқда узлуксиз;*

2^0. *$G(x,s)$ функция x аргументи бўйича (x_0, s) ва (s, x_1) оралиқларда бир жинсли бўлмаган ушбу*

$$L[y] = y_0(x)\, y_0(s), \qquad x \in (x_0, s) \cup (s, x_1) \tag{1.13}$$

тенгламани қаноатлантиради;

3^0. *$G(x,s)$ функция $s \in (x_0, x_1)$ бўлганда*

$$G(x_0, s) = 0, \quad G(x_1, s) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

4^0. $G'_x(x,s)$ *функция* $x \neq s$ *да узлуксиз,* $x = s$ *бўлганда эса сакрашга эга бўлиб,*

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$$

ёки

$$G'_x(s,s+0) - G'_x(s,s-0) = -\frac{1}{p(s)}$$

тенгликлар ўринли;

5^0. $G(x,s)$ *функция* $[x_0, x_1]$ *интервалда* $y_0(x)$ *ечим билан ортогонал, яъни*

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\, y_0(x)\, dx = 0.$$

Умумлашган Грин функциясини тузиш оддий Грин функциясини тузиш каби бажарилади. $y_0(x)$ функция $L[y] = 0$ тенгламани ва $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган нормалланган, яъни $\int_{x_0}^{x_1} y_0^2(x)\, dx = 1$ тенгликни қаноатлантирувчи тривиалмас ечим бўлсин. $y_1(x)$ эса бир жинсли бўлмаган (1.13) тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлсин. Унда (1.13) тенгламанинг умумий ечимини

$$y(x) = y_1(x) + \alpha y_0(x) + \beta z(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $z(x)$ функция $L[y] = 0$ бир жинсли тенгламанинг $y_0(x)$ функция билан чизиқли боғлиқ бўлмаган бирор ечими. $z(x)$ ечимни

$$p(x)\left[y_0(x)\, z'(x) - z(x)\, y_0'(x)\right] = 1$$

тенгликни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкин.

Юқоридагиларга асосланиб, умумлашган Грин функциясини ушбу кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases} y_1(x)+\alpha_1 y_0(x)+\beta_1 z(x), & x<t, \\ y_1(x)+\alpha_2 y_0(x)+\beta_2 z(x), & x>t. \end{cases}$$

Бу ерда β_1 ва β_2 номаълум ўзгармаслар чегаравий шартлардан фойдаланиб аниқланади. $G(x,s)$ функциянинг $x=s$ нуқтада узлуксизлигидан α_2 миқдор α_1 миқдор орқали ифодаланади. Шундай қилиб, Грин функциясида фақат α_1 номаълум қолади. Уни топиш учун 5^0 шартдан фойдаланиш лозим.

$\{(1.10), (1.11)\}$ масаланинг *умумлашган Грин функцияси ҳам симметрикдир, яъни* $G(x,s)=G(s,x)$. Ҳақиқатдан ҳам, ушбу

$$L[G(x,s)]=y_0(x)\,y_0(s), \quad x\in(x_0,s)\cup(s,x_1)$$

тенгликни $G(x,t)$ га,

$$L[G(x,t)]=y_0(x)\,y_0(t), \quad x\in(x_0,t)\cup(t,x_1)$$

тенгликни эса $G(x,s)$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб айирамиз. Сўнгра $s<t$ деб фараз қилиб, Грин формуласидан ва Грин функциясининг хоссаларидан фойдаланиб, ҳосил бўлган тенгликни x бўйича $(x_0,s)\cup(s,t)\cup(t,x_1)$ оралиқда интеграллаймиз. Натижада ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$p(x)\left[G(x,s)\,G'_x(x,t)-G(x,t)\,G'_x(x,t)\right]\Big|_{x_0}^{s-0}+$$
$$+p(x)\left[G(x,s)\,G'_x(x,t)-G(x,t)\,G'_x(x,s)\right]\Big|_{s+0}^{t-0}+$$
$$+p(x)\left[G(x,s)\,G'_x(x,t)-G(x,t)\,G'_x(x,s)\right]\Big|_{t+0}^{x_1}=$$
$$=y_0(s)\int_{x_0}^{x_1}G(x,s)\,y_0(x)\,dx-y_0(t)\int_{x_0}^{x_1}G(x,t)\,y_0(x)\,dx=0$$

3^0– ва 5^0– хоссаларни эътиборга олсак, бу тенгликдан

$$p(x)\left[G(x,s)\,G'_x(x,t)-G(x,t)\,G'_x(x,s)\right]\Big|_{s+0}^{s-0}+$$

$$+p(x)\,[G(x,s)\,G'_x(x,t) - G(x,t)\,G'_x(x,s)]|_{t+0}^{t-0} = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан, 1^0 ва 4^0 хоссаларни эътиборга олиб, $G(t,s) = G(s,t)$ тенгликни, яъни $G(x,s)$ функция симметрик эканлигини келтириб чиқариш қийин эмас.

Умумлашган Грин функцияси ҳам ягонадир.

Теорема. *Агар* $\{(1.10), (1.11)\}$ *чегаравий масалага мос бир жинсли масала тривиалмас ечимга эга бўлса, бир жинслимас масала ечимга эга бўлиши учун* $f(x)$ *ва* $y_0(x)$ *функциялар ўзаро ортогонал бўлиши зарур.*

Исбот. (1.6) тенгликда $z = y_0(x)$ десак, $g(x) \equiv 0$ бўлади. Буни эътиборга олиб, (1.6) ни $[x_0, x_1]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$p(x)\,[y'(x)\,y_0(x) - y(x)\,y'_0(0)]|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,y_0(x)\,dx.$$

$y(x)$ ва $y_0(x)$ функциялар (1.11) чегаравий шартларни қаноатлантиришини эътиборга олсак, охирги тенгликдан теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

Қаралаётган чегаравий масаланинг умумлашган Грин функцияси $G(x,s)$ мавжуд бўлганда Гильберт теоремаси қуйидагича баён килинади: *агар* $f(x) \in C[x_0, x_1]$ *ва* $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,y_0(x)\,dx = 0$ *шартлар бажарилган бўлса,* $\{(1.10), (1.11)\}$ *чегаравий масаланинг ечими* (1.12) *тенглик билан аниқланади ва аксинча.*

Энди умумлашган Грин функциясини тузишга доир мисоллар келтирамиз.

1. $L[y] \equiv \left[\left((1-x^2)\,y'\right)\right]' - h^2(1-x^2)^{-1}y$ дифференциал ифоданинг $|y(-1)| < +\infty$, $|y(1)| < +\infty$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг, бу ерда $h = const$.

Ечиш. Дастлаб $h > 0$ деб фараз қилайлик. У ҳолда $C_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{h/2}$ функция $L[y] = 0$ тенгламанинг $x = -1$ да чегараланган ечими бўлади. Худди шунга ўхшаш, бу тенгламанинг $x = +1$ да чегараланган ечим $C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{h/2}$ функциядан иборат бўлади. Буларга асосланиб, Грин функциясини

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{h/2}, & x < s, \\ C_2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{h/2}, & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. $x = s$ да $G(x,s)$ функциянинг узлуксизлигидан ва $G'_x(x,s)$ ҳосиланинг эса биринчи тур узилишга эга эканлигидан фойдаланиб, ушбу

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{h/2} = C_2\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{h/2}, \\ -C_2\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{h}{2}-1}\cdot\dfrac{2}{(1+s)^2} - \\ -C_1\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{h}{2}-1}\cdot\dfrac{2}{(1-s)^2} = \dfrac{1}{1-s^2} \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани ечиб,

$$C_1 = \frac{-1}{2h}\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{h/2}, \quad C_2 = \frac{-1}{2h}\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{h/2}$$

ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2h}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{h/2}, & x < s, \\ \dfrac{-1}{2h}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{h/2}, & x > s \end{cases}$$

кўринишга эга.

Бу усул $h = 0$ бўлганда ярамайди, чунки $h = 0$ бўлганда $L\,[y] = 0$ тенглама $y = 1/\sqrt{2}$ тривиалмас нормалланган ечимга эга бўлиб, бу ечим чегаравий шартларни ҳам қаноатлантиради.

Бу ҳолда оддий Грин функцияси мавжуд эмас. Шунинг учун умумлашган Грин функциясини тузишимиз керак. Бунинг учун

$$\left[\left(1 - x^2\right) y'\right]' = (1/2),$$

бир жинслимас тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = -\frac{1}{4}\ln\left(1 - x^2\right) + \frac{\alpha}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \beta,$$

бу ерда α ва β лар ихтиёрий ўзгармас сонлар. Бунга асосланиб, Грин функциясини қуйидагича излаймиз:

$$G\,(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\ln\left(1 - x^2\right) + \dfrac{\alpha_1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \beta_1, & x < s, \\ -\dfrac{1}{4}\ln\left(1 - x^2\right) + \dfrac{\alpha_2}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

$|y\,(-1)| < +\infty$ шартдан $\alpha_1 = (1/2)$ тенглик, $|y\,(1)| < +\infty$ шартдан эса $\alpha_2 = (-1/2)$ тенглик келиб чиқади. α_1 ва α_2 ларнинг бу қийматларини эътиборга олсак, $G(x,s)$ функция қуйидаги кўринишни олади:

$$G\,(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\ln\,(1 - x) + \beta_1, & x < s, \\ -\dfrac{1}{2}\ln\,(1 + x) + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Грин функциясининг узлуксизлигидан ушбу

$$-\frac{1}{2}\ln\,(1 - s) + \beta_1 = -\frac{1}{2}\ln\,(1 + s) + \beta_2$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\ln\,(1 + s) + C, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}\ln\,(1 - s) + C$$

ларни топиб, Грин функциясини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$G(x,s)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\ln\left[(1-x)(1+s)\right]+C, & x<s, \\ -\frac{1}{2}\ln\left[(1+x)(1-s)\right]+C, & x>s. \end{cases} \tag{1.14}$$

Бу ердаги ихтиёрий ўзгармас C ни Грин функциясининг 5^0 хоссасига мос келувчи ушбу

$$\int_{-1}^{1} G(x,s)\,\frac{1}{\sqrt{2}}dx=0$$

шартдан аниқлаймиз:

$$0=\int_{-1}^{1} G(x,s)dx=\int_{-1}^{s}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left[(1-x)(1+s)\right]+C\right\}dx+$$

$$+\int_{s}^{1}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left[(1+x)(1-s)\right]+C\right\}dx=$$

$$=-\ln 2+\frac{1+s}{2}+\frac{1}{2}(1-s)\ln(1-s)-$$

$$-\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)+C(s+1)+\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-s)-\frac{1}{2}\ln(1-s)(1-s)-\ln 2+C(1-s).$$

Натижада $1-2\ln 2+2C=0$ тенгламага келамиз. Уни ечиб, $C=\ln 2-(1/2)$ ни топамиз. Демак, қўйилган масаланинг умумлашган Грин функцияси (1.14) формула билан берилиб, унда $C=\ln 2-(1/2)$ бўлади.

2. Ушбу $L[y] = y''$ дифференциал ифоданинг $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$ шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $y = (1/\sqrt{2})$ функция $L[y] = 0$ тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас функция бўлгани учун умумлашган Грин функциясини тузишга тўғри келади. Бунинг учун $y'' = (1/2)$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бундай ечим осонгина топилади: $y = (1/4)x^2 + \alpha x + \beta$. Демак, умумлашган Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} (1/4)x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, & x < s, \\ (1/4)x^2 + \alpha_2 x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Чегаравий шартлардан ва Грин функциясининг узлуксизлигидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \\ \alpha_2 - \alpha_1 = -1, \\ \beta_1 - \beta_2 = s(\alpha_2 - \alpha_1) \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системани ҳосил қиламиз.

Бу системани ечиб, $\alpha_1 = (1-s)/2$, $\alpha_2 = -(1+s)/2$, $\beta_1 = \beta_2 - s$ тенгликларга эга бўламиз. Шунинг учун

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1-s}{2}x - s + \beta_2, & x < s, \\ \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1+s}{2}x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Бу ердаги β_2 ни Грин функцияси учун 5^0 шартдан топамиз:

$$0 = \int_{-1}^{1} G(x,s)\,dx = \int_{-1}^{s} \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1-s}{2}x - s + \beta_2\right] dx +$$

$$+\int_s^1 \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1+s}{2}x + \beta_2\right] dx = -\frac{1}{3} + 2\beta_2 - s - \frac{s^2}{2}.$$

β_2 га нисбатан биринчи тартибли бўлган бу тенгламани ечиб, уни бир қийматли топамиз:

$$\beta_2 = \frac{s^2}{4} + \frac{s}{2} + \frac{1}{6}.$$

Буни эътиборга олсак, изланаётган Грин функцияси учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-s)^2 + \frac{x-s}{2} + \frac{1}{6}, & x < s, \\ \frac{1}{4}(x-s)^2 + \frac{s-x}{2} + \frac{1}{6}, & x > s. \end{cases}$$

3. $L[y] \equiv y''$ дифференциал ифоданинг $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Бу ерда оддий Грин функцияси мавжуд эмас. Чунки $y = 1$ функция $y'' = 0$ тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантиради. Демак, биз умумлашган Грин функцияси тузишимиз зарур.

$y'' = 1$ тенгламанинг умумий ечими $y = (1/2)x^2 + \alpha x + \beta$ кўринишга эга, бу ерда α ва β ихтиёрий ўзгармаслар. Шунинг учун Грин функцияси қуйидаги кўринишда изланади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 + \alpha_2 x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Равшанки, чегаравий шартлардан $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ келиб чиқади. Грин функциясининг узлуксизлигидан $\beta_1 - \beta_2 = -s$ ни топамиз.

Бу ҳолда Грин функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-s+\beta_2, & x<s,\\ \frac{1}{2}x^2-x+\beta_2, & x>s.\end{cases}$$

Бу ердаги β_2 Грин функцияси учун 5^0 шартдан топилади:

$$0=\int\limits_0^1 G(x,s)\,dx=\int\limits_0^s\left(\frac{1}{2}x^2-s+\beta_2\right)dx+$$

$$+\int\limits_s^1\left(\frac{1}{2}x^2-x+\beta_2\right)dx=\beta_2-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{3}.$$

Бундан $\beta_2=(s^2/2)+(1/3)$. Демак, Грин функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x^2+s^2\right)-s+\frac{1}{3}, & x<s,\\ \frac{1}{2}\left(x^2+s^2\right)-x+\frac{1}{3}, & x>s.\end{cases}$$

1.7-§. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

1. Умумий тушунчалар. Юқори тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалани ечишда янги қийинчиликлар деярли келиб чиқмайди. Шунинг учун бир типик мисолни текшириш билан чегараланамиз. Қуйидаги

$$L[y]\equiv y^{(4)}(x)=f(x), \qquad x\in(x_0,x_1) \tag{1.15}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин.

$L[y]\equiv y^{(4)}(x)$ дифференциал ифоданинг

$$y(x_0)=0,\quad y(x_1)=0,\quad y'(x_0)=0,\quad y'(x_1)=0 \tag{1.16}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функцияси қуйидагича таърифланади:

Таъриф. *Икки аргументли $G(x,s)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1^0. *$G(x,s)$, $G'_x(x,s)$ ва $G''_{xx}(x,s)$ функциялар s нинг (x_0,x_1) оралиқдаги барча қийматларида x аргументи бўйича узлуксиз;*

2^0. *$G(x,s)$ функция (1.16) чегаравий шартларни бажаради;*

3^0. *$G'''_{xxx}(x,s)$ ҳосила x нинг (x_0,s) ва (s,x_1) оралиқлардаги барча қийматларида узлуксиз, лекин $x=s$ нуқтада биринчи тур узилишга эга бўлиб, унинг сакраши 1 га тенг, яъни*

$$\left[G'''_{xxx}(s+0,s)-G'''_{xxx}(s-0,s)\right]=1$$

ёки

$$\left[G'''_{xxx}(s,s+0)-G'''_{xxx}(s,s-0)\right]=-1.$$

4^0. *$G(x,s)$ функция (x_0,s) ва (s,x_1) оралиқларда $y^{(4)}(x)=0$ тенгламани қаноатлантиради.*

У ҳолда $G(x,s)$ функция $L[y]\equiv y^{(4)}(x)$ дифференциал операторнинг (1.16) *чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функцияси дейилади.*

Грин функциясининг энг характерли хусусиятларидан бири унинг учун Гильберт теоремасининг ўринлилигидир, яъни агар *$y(x)$ функция (1.15) тенгламани ва (1.16) чегаравий шартларни қаноатлантирса, уни*

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,s)f(s)\,ds \tag{1.17}$$

кўринишда ифодалаш мумкин ва, аксинча, (1.17) формула билан берилган $y(x)$ функция (1.15) тенглама ва (1.16) чегаравий шартларни қаноатлантиради (бу ерда $f(x)$ $[x_0,x_1]$ оралиқда аниқланган узлуксиз функция).

Эслатиб ўтамизки, (1.16) чегаравий шартлар ўрнига умумий чегаравий шартлар, масалан, қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} g_1\left[y\left(x_0\right), y'\left(x_0\right), y''\left(x_0\right), y'''\left(x_0\right)\right] = 0,\\ g_2\left[y\left(x_0\right), y'\left(x_0\right), y''\left(x_0\right), y'''\left(x_0\right)\right] = 0,\\ h_1\left[y\left(x_1\right), y'\left(x_1\right), y''\left(x_1\right), y'''\left(x_1\right)\right] = 0,\\ h_2\left[y\left(x_1\right), y'\left(x_1\right), y''\left(x_1\right), y'''\left(x_1\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

чегаравий шартлар олиниши ҳам мумкин. Бу шартлардан $g_1 \equiv y\left(x_0\right)$, $g_2 \equiv y'\left(x_0\right)$, $h_1 \equiv y'\left(x_1\right)$, $h_2 \equiv y'\left(x_1\right)$ бўлганда (1.16) чегаравий шартлар келиб чиқади.

2.Тўртинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Грин функциясини тузишга доир мисоллар.

1. $L[y] \equiv y^{(4)}(x)$ дифференциал операторнинг $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y''(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Энг аввал $L[y] = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, у қуйидаги кўринишга эга:

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Бундан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $L[y] = 0$ бир жинсли тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечим $y(x) \equiv 0$ бўлади. Шунинг учун оддий Грин функциясини тузамиз.

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_3x + \alpha_4, & x < s,\\ \beta_1x^3 + \beta_2x^2 + \beta_3x + \beta_4, & x > s. \end{cases}$$

Чегарвий шартлардан ушбу

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0,\\ \alpha_2 = 0,\\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0,\\ 6\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системадан $\beta_2 = -3\beta_1$ ва $\beta_4 = 2\beta_1 - \beta_3$ ларни топамиз. Демак, Грин функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \alpha_3 x, & x < s, \\ \beta_1\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) + \beta_3(x-1), & x > s. \end{cases}$$

Грин функцияси учун биринчи ва учинчи шартларга кўра ушбу алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \alpha_1 s^3 + \alpha_3 s = \beta_1\left(s^3 - 3s^2 + 2\right) + \beta_3(s-1), \\ 3\alpha_1 s^2 + \alpha_3 = \beta_1\left(3s^2 - 6s\right) + \beta_3, \\ 6\alpha_1 s = \beta_1(6s-6), \\ 6\beta_1 - 6\alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\alpha_1 = \frac{s-1}{6}; \quad \alpha_3 = \frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{3}; \quad \beta_1 = \frac{s}{6}; \quad \beta_3 = \frac{s^3+2s}{6}.$$

Топилганларни ўрнига қўйсак, ўрганилаётган масаланинг Грин функцияси тўла аниқланади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s-1}{6}x^3 + \left(\dfrac{s^3}{6} - \dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s}{3}\right)x, & x < s, \\ \dfrac{x-1}{6}s^3 + \left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3}\right)s, & x > s. \end{cases}$$

2. $L[y] \equiv y^{(4)}(x)$ дифференциал операторнинг $y'(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y'(1) = 0$, $y'''(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Маълумки, $y^{(4)}(x) = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$ кўринишда ёзилади. У ҳолда $y'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$, $y''(x) = 6C_1x + 2C_2$, $y'''(x) = 6C_1$ бўлади. Буларни ва чегаравий шартларни эътиборга олиб, $C_3 = 0$, $C_1 = 0$, $3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ тенгликларга эга бўламиз. Демак, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. У ҳолда $y^{(4)}(x) = 0$ тенгламанинг бир жинсли чегарвий шартларни қаноатлантирувчи ечими $y(x) = C_4$ бўлади. Агар $C_4 = 0$ бўлса, тривиал ечимга, $C_4 \neq 0$ бўлса, тривиал бўлмаган ечимга эга бўламиз. Шунинг учун умумлашган Грин функциясини тузиш лозим бўлади. $y(x) = C_4 \neq 0$ ечимни нормаллаштирсак, $y_0(x) = 1$ келиб чиқади. Энди $L[y] = y_0(x)\, y_0(s)$, яъни $y^{(IV)}(x) = 1$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y(x) = \frac{x^4}{4!} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Демак, умумлашган Грин функциясини қуйидаги

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4!} + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, & x < s, \\ \dfrac{x^4}{4!} + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4, & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз: Бу функцияни чегаравий шартларга бўйсундирсак, $a_3 = 0$, $a_1 = 0$ тенгликлар ва

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3!} + 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 0, \\ 1 + 6b_1 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси келиб чиқади. Охирги системани ечиб, b_1 ва b_3 ларни топамиз: $b_1 = -(1/6)$, $b_3 = (1/3) - 2b_2$. Шунга кўра умумлашган Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4!} + a_2 x^2 + a_4, & x < s, \\ \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^3}{6} + \left(x^2 - 2x\right) b_2 + \dfrac{x}{3} + b_4, & x > s. \end{cases}$$

Буни умумлашган Грин функцияси таърифининг биринчи шартларига бўйсундириб,

$$\begin{cases} a_2 s^2 + a_4 = -\dfrac{s^3}{6} + \dfrac{s}{3} + \left(s^2 - 2s\right) b_2 + b_4, \\ 2a_2 s = -\dfrac{s^2}{2} + \dfrac{1}{3} + (2s - 2)\, b_2, \\ 2a_2 = -s + 2b_2 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$a_2 = \frac{s^2}{4} - \frac{s}{2} + \frac{1}{6}; \quad b_2 = \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6}, \quad a_4 = b_4 - \frac{s^3}{6}.$$

Буларни ўрнига қўйсак, умумлашган Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{s^2 x^2}{4} - \dfrac{x^2 s}{2} - \dfrac{s^3}{6} + b_4, & x < s, \\ \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^2 s^2}{4} - \dfrac{s^2 x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + b_4, & x > s \end{cases}$$

кўринишга келади. b_4 номаълумни топиш учун умумлашган Грин функциясининг нормалланган $y_0(x) = 1$ ечим билан ортогонал бўлиш шартидан фойдаланамиз, яъни

$$\int_0^1 G(x,s)\, dx = 0$$

тенгликдан фойдаланамиз. $G(x,s)$ ни бу шартга қўйиб,

$$b_4 = \frac{s^4}{24} + \frac{s^2}{6} - \frac{1}{45}$$

ни топамиз. b_4 нинг бу қийматини $G(x,s)$ функциянинг охирги формуласига қўйсак, ўрганилаётган масаланинг умумлашган

Грин функцияси ҳосил бўлади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x^4+s^4}{24}+\dfrac{x^2s^2}{4}-\dfrac{s^3}{6}+\dfrac{x^2+s^2}{6}-\dfrac{x^2s}{2}-\dfrac{1}{45}, & x<s,\\ \dfrac{s^4+x^4}{24}+\dfrac{s^2x^2}{4}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{s^2+x^2}{6}-\dfrac{s^2x}{2}-\dfrac{1}{45}, & x>s.\end{cases}$$

1.8-§. Чегарада бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

Агар $p(x)$ *ва* $f(x)$ *функциялар* $[0,1]$ *оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб,* $p(0)=0$ *бўлса, ушбу*

$$L[y]\equiv-[p(x)\,y'(x)]'=f(x),\quad x\in(0,1)\tag{1.19}$$

тенглама чегарада бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. Бунда кўпинча $p(x)$ функция учун $p(x)\geqslant p_0x^\alpha$, $p_0=const>0$, $\alpha>0$ тенгсизлик бажарилади деб қаралади.

(1.19) дифференциал тенглама учун қуйидаги чегаравий шартлар билан қўйилган масалалар қаралади:

агар $0\leqslant\alpha<1$ бўлса,

$$y(0)=y(1)=0;\tag{1.20}$$

агар $1\leqslant\alpha<2$ бўлса,

$$|y(0)|<\infty,\qquad y(1)=0.\tag{1.21}$$

$\{(1.19),(1.20)\}$ масалани қарайлик. *Агар* $\{(1.19),(1.20)\}$ *масаланинг ечимини*

$$y(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)\,f(s)\,ds$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу формуладаги $G(x,s)$ *функция* $\{(1.19),(1.20)\}$ *масаланинг Грин функцияси дейилади.*

$G(x,s)$ функцияни тузишга киришамиз. Бунинг учун (1.19) тенгламанинг умумий ечимини топамиз. (1.19) ни интеграллаб,

$$-y(x) = \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \int_0^s f(t)\,dt + C_1 \int_0^x \frac{ds}{p(s)} + C_2$$

тенгликка ёки бу ерда Дирихле формуласидан фойдаланиб,

$$-y(x) = \int_0^x f(t)\,dt \int_t^x \frac{ds}{p(s)} + C_1 \int_0^x \frac{ds}{p(s)} + C_2 \qquad (1.22)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $y(0) = 0$ чегаравий шартга асосан $C_2 = 0$ тенглик, $y(1) = 0$ чегаравий шартга асосан эса

$$b(1)\,C_1 = -\int_0^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)}$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда

$$b(x) = \int_0^x \frac{ds}{p(s)}.$$

Топилганларни (1.22) га қўямиз:

$$-y(x) = \int_0^x f(t)\,dt \int_t^x \frac{ds}{p(s)} - \frac{b(x)}{b(1)} \int_0^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)}. \qquad (\star)$$

Бу ердаги $[0,1]$ оралиқ бўйича интегрални $[0,x]$ ва $[x,1]$ оралиқлар бўйича интегралларга ажратсак ва

$$\int_t^1 \frac{ds}{p(s)} = \int_0^1 \frac{ds}{p(s)} - \int_0^t \frac{ds}{p(s)} = b(1) - b(t),$$

$$\int_x^t \frac{ds}{p(s)} = \int_0^x \frac{ds}{p(s)} - \int_0^t \frac{ds}{p(s)} = b(x) - b(t)$$

тенгликларни эътиборга олсак, $(\star)$ тенглик

$$-y(x) = \int_0^x f(t)\left[b(x) - b(t)\right] dt -$$

$$-\left(\int_0^x + \int_x^1\right) f(t)\,\frac{b(x)}{b(1)}\left[b(1) - b(t)\right] dt =$$

$$= -\int_0^x f(t)\,\frac{b(t)}{b(1)}\left[b(1) - b(x)\right] dt - \int_x^1 f(t)\,\frac{b(x)}{b(1)}\left[b(1) - b(x)\right] dt$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b(x)}{b(1)}[b(1) - b(x)], & x < t, \\ \dfrac{b(t)}{b(1)}\left[b(1) - b(x)\right], & x > t \end{cases}$$

белгилаш киритсак, охирги тенгликни қуйидаги

$$y(x) = \int_0^t G(x,t)\, f(t)\, dt$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади. У ҳолда юқоридаги таърифга асосан $G(x,s)$ функция $\{(1.19),(1.20)\}$ масала учун Грин функцияси бўлади. Бу ерда

$$b(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}, \qquad b(1) - b(x) = \int_x^1 \frac{ds}{p(s)}$$

тенгликларни эътиборга олсак, Грин функциясининг қуйидагича кўринишига эга бўламиз:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b(1)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{ds}{p(s)} \int_t^1 \dfrac{ds}{p(s)}, & x < t, \\ \dfrac{1}{b(1)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{ds}{p(s)} \int_x^1 \dfrac{ds}{p(s)}, & x > t. \end{cases} \tag{1.23}$$

Бу Грин функцияси қуйидаги хоссаларга эга эканлиги осонгина исботланади:

1) Грин функцияси $\{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ квадратда узлуксиз;

2) $x \neq t$ бўлганда $(p G_x)_x{}' = 0$ тенглик бажарилади;

3) Грин функцияси (1.20) шартларни қаноатлантиради;

4) $G_x(t+0,t) - G_x \ (t-0,t) = -[1/p(t)]$.

Энди $\{(1.19), (1.21)\}$ масаланинг ечимини топамиз. (1.19) тенгламанинг умумий ечими (1.22) формула билан аниқланади. Ундан $|y(0)| < +\infty$ чегаравий шартга асосан $C_1 = 0$ тенглик, $y(1) = 0$ чегаравий шартга асосан эса

$$C_2 = -\int_0^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)}$$

тенглик келиб чиқади.

Топилганларни (1.22) га қўйиб,

$$-y(x) = \int_0^x f(t)\,dt \int_t^x \frac{ds}{p(s)} - \int_0^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)} =$$

$$= -\int_0^x f(t)\,dt \int_x^1 \frac{ds}{p(s)} - \int_x^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)} = -\int_0^1 G(x,t) f(t)\,dt$$

тенгликка эга бўламиз, бу ердаги $G(x,t)$ функция

$$G(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^1 \dfrac{ds}{p(s)}, & x < t, \\ \int\limits_x^1 \dfrac{ds}{p(s)}, & x > t \end{cases}$$

кўринишга эга бўлиб, у $\{(1.19)\,,\ (1.21)\}$ масаланинг Грин функцияси бўлади. Бу функциянинг хоссаларига тўхталамиз:

1) Грин функцияси $\{(x,t) : 0 < \delta \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ тўғри тўртбурчакда узлуксиз (бу ерда $\delta = const > 0$);

2) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2(x,t)dxdt < +\infty$ тенгсизлик ўринли.

Бу тенгсизликни исботлаймиз:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x G^2(x,t)\,dt + \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 G^2(x,t)\,dt.$$

Бу ерда иккинчи қўшилувчида интеграллаш тартибини ўзгартириб, сўнгра x ни t билан, t ни эса x билан алмаштирсак ва $G(x,t) = G(t,x)$ тенгликни эътиборга олсак,

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2(x,t)\,dxdt = 2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x G(x,t)\,dt$$

тенглик келиб чиқади. У ҳолда

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2(x,t)\,dx\,dt = 2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x G^2(x,t)\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left[\int\limits_x^1 \frac{ds}{p(s)}\right]^2 dt = 2\int\limits_0^1 x\left(\int\limits_x^1 \frac{ds}{p(s)}\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^1 x\left(\int\limits_x^1 \frac{ds}{p_0 s^\alpha}\right)^2 dx = \frac{2}{p_0^2(1-\alpha)^2}\int\limits_0^1 x\left(1-x^{1-\alpha}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{p_0^2(1-\alpha)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3-\alpha} + \frac{1}{2(2-\alpha)}\right] < +\infty;$$

3) $x \neq t$ бўлганда $\left(pG'_x\right)_x{}' = 0$ тенглик бажарилади;

4) Грин функцияси (1.21) чегаравий шартларни бажаради;

5) $G'_x\,(t+0,t) - G'_x\,(t-0,t) = -\left[1/p\,(t)\right]$.

Охирги 3), 4) ва 5) хоссалар ҳам Грин функциясининг формуласидан фойдаланиб қийинчиликсиз исботланади.

1.9-§. Кесманинг икки четида бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

Агар $p(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[-1,1]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $p(-1) = p(+1) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$L\,[y] \equiv -[p\,(x)\;y'(x)]' = f\,(x)\,, \quad x \in (-1,1) \tag{1.24}$$

тенглама $[-1,1]$ кесманинг иккала четида бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. Бу тенглама учун чегаравий масалалар $p(x)$ функциянинг $x = \pm 1$ нуқталарда нолга айланиш тартибига боғлиқ ҳолда қўйилиб, кўпинча $p\,(x) \geqslant p_0(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $p_0 = const > 0$, $0 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 2$ деб олинади. Бунда (1.24) дифференциал тенглама учун қуйидаги шартлар билан чегаравий масалалар қўйиш мумкин:

1) $y\,(-1) = 0$, $y\,(1) = 0$, агар $0 < \alpha, \beta < 1$ бўлса;

2) $|y\,(-1)| < +\infty$, $y\,(1) = 0$, агар $1 < \alpha < 2$; $0 < \beta < 1$ бўлса;

3) $|y\,(-1)| = 0$, $|y\,(1)| < +\infty$, агар $0 < \alpha < 1$; $1 < \beta < 2$ бўлса;

4) $|y(-1)| < +\infty$, $|y(1)| < +\infty$, агар $1 < \alpha, \beta < 2$ бўлса.

Бу ерда 4) ҳолни қараймиз, яъни $1 < \alpha, \beta < 2$ деб фараз қилиб, $L[y] = 0$ тенгламанинг $|y(\pm 1)| < +\infty$ шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини топиш масаласини қараймиз. Бу масала тривиалмас $y(x) = C \neq 0$ ечимга эга бўлгани учун умумлашган Грин функцияси тузилади. Бунинг учун $y(x) = C$ ечимни нормаллаштирамиз. Бу ҳолда $y_0(x) = \left(1/\sqrt{2}\right)$ бўлиб,

$$L[y] \equiv -[p(x)y'(x)]' = (1/2)$$

бир жинслимас тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_{a}^{x} \frac{s + C_1}{p(s)} ds + C_2,$$

бу ерда C_1 ва C_2 - ихтиёрий ўзгармаслар.

Масаланинг Грин функциясини ушбу кўринишда излаймиз:

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x} \frac{s + A_1}{p(s)} ds + A_2, & x > t, \\ \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} \frac{s + B_1}{p(s)} ds + B_2, & x > t. \end{cases}$$

$|G(x,t)| < +\infty$ бўлганлиги учун $A_1 = -1$, $B_1 = 1$ бўлади. Грин функциясининг $x = t$ да узлуксизлигидан

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{t} \frac{s - 1}{p(s)} ds + A_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} \frac{s + 1}{p(s)} ds + B_2$$

тенглик келиб чиқади Бу тенгликка асосан

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} \frac{s + 1}{p(s)} ds + \gamma, B_2 = \frac{1}{2}\int_{1}^{t} \frac{s - 1}{p(s)} ds + \gamma,$$

деб олиш мумкин, бу ерда γ- қандайдир ўзгармас сон.

Топилганларни Грин функциясининг формуласига қўямиз:

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{1}^{x}\dfrac{s-1}{p(s)}ds+\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{t}\dfrac{s+1}{p(s)}ds+\gamma, & x>t,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{x}\dfrac{s+1}{p(s)}ds+\dfrac{1}{2}\int_{1}^{t}\dfrac{s-1}{p(s)}ds+\gamma, & x<t.\end{cases}$$

Номалум ўзгармас γ ни $\int\limits_{-1}^{1}G(x,t)\,dx=0$ шартдан топамиз:

$$\int_{-1}^{t}\left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}ds+\frac{1}{2}\int_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}ds+\gamma\right]dx+\int_{t}^{1}\left[\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}ds+\gamma\right]dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}dx\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}ds+\frac{t+1}{2}\int_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}ds+$$

$$+(t+1)\gamma+\frac{1}{2}\int_{t}^{1}dx\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds+\frac{1-t}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}ds+\gamma(1-t)=0.$$

Демак,

$$-2\gamma=\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}dx\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}ds+\frac{t+1}{2}\int_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t}^{1}dx\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds+\frac{1-t}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}ds.$$

Такрорий интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$-2\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t} \frac{(s+1)\ (t-s)}{p(s)}ds + \frac{t+1}{2}\int\limits_{1}^{t} \frac{s-1}{p(s)}ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t} \frac{(s-1)\ (t-s)}{p(s)}ds + \frac{1-t}{2}\int\limits_{-1}^{t} \frac{s+1}{p(s)}ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t} \frac{(s+1)\ (1-s)}{p(s)}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t} \frac{(s-1)\ (1+s)}{p(s)}ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+s)\ (1-s)}{p(s)}ds = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1-s^2}{p(s)}ds.$$

Бу тенгликдан γ бир қийматли топилади:

$$\gamma = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{s^2-1}{p(s)}ds.$$

Демак, қаралаётган масаланинг умумлашган Грин функцияси

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{1}^{x} \frac{s-1}{p(s)}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t} \frac{s+1}{p(s)}ds + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{s^2-1}{p(s)}ds, & x > t, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{x} \frac{s+1}{p(s)}ds + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t} \frac{s-1}{p(s)}ds + \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{s^2-1}{p(s)}ds, & x < t \end{cases}$$

формула билан аниқланади.

Энди бу Грин функциясининг хоссаларига тўхталамиз.

1) $G(x,t)$ *функция ўз аргументларига нисбатан симметрикдир.* Бу бевосита $G(x,t)$ нинг формуласидан кўриниб турибди.

2) $G^2(x,t)$ *функция* $\{(x,t): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq t \leq 1\}$ *соҳада интегралланувчи.*

Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G^2(x,t)\,dx\,dt = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} G^2(x,t)\,dt =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left[\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds + \frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}ds + \gamma\right]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left[\left(\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds\right)^2 + \left(\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}ds\right)^2 + 4\gamma^2\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left[\left(\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}ds\right)^2 dt + \left(\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}ds\right)^2 dt + 4\gamma^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (x+1) \left[\left(\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}\right)^2 dx + \left(\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}ds\right)^2\right] + 12\gamma^2.$$

$p(x) \geqslant p_0\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ва $1 < \alpha, \beta < 2$ тенгсизликларга кўра, охирги тенгсизликнинг ўнг томони чегаралангандир. Хосса исбот этилди.

3) $|G(\pm 1, t)| < +\infty$;

4) $G_x(t+0,t) - G_x(t-0,t) = -[1/p(t)]$;

5) $x \neq t$ бўлганда $[p(x)\,G'_x]'_x = (1/2)$ тенглик ўринли;

Бу хоссаларнинг исботини ҳам Грин функциясининг формуласидан фойдаланиб қийинчиликсиз кўрсатиш мумкин.

1.10-§. Чегарада бузиладиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

1. Масаланинг қўйилиши. Бизга қуйидаги

$$L\left[y\right] \equiv (-1)^n \left[p\left(x\right) y^{(n)}(x)\right]^{(n)} = f\left(x\right), \quad x \in (0,1) \tag{1.25}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин, бу ерда n – берилган натурал сон, $p(x)$ ва $f(x)$ лар эса $[0.1]$ ораликда аникланган ва узлуксиз функциялар бўлиб, $p(0) = 0$, $0 < x \leqslant 1$ да эса $p(x) \geqslant p_0 x^\alpha$ тенгсизлик ўринли, бунда $p_0 = const > 0$, $0 < \alpha < 2n$.

Бу тенглама учун чегаравий шартлар α нинг қийматига қараб турлича қўйилади. Чегаравий шартлар, масалан, $0 < \alpha < n$ бўлганда

$$\begin{aligned} & y^{(j)}\left(0\right) = 0, && j = \overline{0, n - [\alpha] - 1}; \\ & \left|y^{(k)}\left(0\right)\right| < +\infty, && k = \overline{n - [\alpha]\,, n - 1}; \\ & y^{(m)}\left(1\right) = 0, && m = \overline{0, n - 1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

кўринишда, $n < \alpha < 2n$ бўлганда эса

$$\begin{aligned} & \left|y^{(j)}\left(0\right)\right| < +\infty, && j = \overline{0, (n-1) + (n - [\alpha])}; \\ & y^{(m)}\left(1\right) = 0, && m = \overline{0, n - 1} \end{aligned} \tag{1.27}$$

кўринишда қўйилиши мумкин.

(1.25) тенглама учун (1.26) ва (1.27) шартлар билан берилган чегаравий масалалар [1] монографияда батафсил ўрганилган.

Агар (1.25) тенглама учун у ёки бу шартлар билан қўйилган чегаравий масаланинг ечими

$$y\left(x\right) = \int\limits_0^1 G\left(x, t\right) f\left(t\right) dt$$

формула билан аниқланса, у ҳолда $G\left(x, t\right)$ *функция ўша масаланинг Грин функцияси дейилади.*

Биз қуйида юқоридаги масалаларга батафсил тўхталмаймиз. Аммо бир неча мисолларда 4-тартибли дифференциал тенгламалар учун Грин функциясини тузиш билан шуғулланамиз.

2. Чегарада бузиладиган 4-тартибли дифференциал тенгламалар учун Грин функциясини тузишга доир мисоллар.

1. Ушбу $L[y] \equiv (x^\alpha y'')''$, $0 < \alpha < 1$ дифференциал операторнинг $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y] = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \frac{C_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{C_2 x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + C_3 x + C_4. \tag{1.28}$$

Агар $L[y] = 0$ тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими фақат $y(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда оддий Грин функцияси тузилади. Буни текширайлик. (1.28) функцияни чегаравий шартларга бўйсундирсак, $C_4 = 0$, $C_3 = 0$, $C_1 + C_2 = 0$, $C_1(1-\alpha) - C_2\alpha = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Булардан эса $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ ларга эга бўламиз. Демак, чегаравий шартларни фақат тривиал ечим, яъни $y(x) \equiv 0$ функция қаноатлантиради. Шунинг учун оддий Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{a_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{a_2 x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + a_3 x + a_4, & x < s; \\ \dfrac{b_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{b_2 x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3 x + b_4, & x > s. \end{cases} \tag{1.29}$$

Чегаравий шартларга кўра $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Буни ҳисобга олсак, Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{a_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{a_2 x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & x < s, \\ b_3 x + b_4, & x > s \end{cases}$$

кўринишга келади. Грин функцияси учун биринчи ва учинчи шартларга асосан $x = s$ бўлганда

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + a_2 \dfrac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} = b_3 s + b_4, \\ a_1 \dfrac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha} + a_2 \dfrac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} = b_3, \\ a_1\, s^{1-\alpha} + a_2 s^{-\alpha} = 0, \\ -a_1(1-\alpha)\, s^{-\alpha} + a_2 \alpha s^{-\alpha-1} = s^{-\alpha} \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$a_1 = -1; \quad a_2 = s, b_3 = \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, \quad b_4 = -\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Топилганларни (1.29) га қўйиб 1-масаланинг Грин функциясини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{s \cdot x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & x < s, \\ -\dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{x \cdot s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & x > s. \end{cases}$$

2. Ушбу $L[y] \equiv (x^\alpha y'')''$, $1 < \alpha < 2$ дифференциал операторнинг $y(0) = 0$, $|y'(0)| < +\infty$, $y(1) = y''(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y] = 0$ тенгламанинг умумий ечими (1.28) кўринишга эга. Ундан чегаравий шартларга асосан $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ келиб чиқади. Демак, оддий Грин функциясини тузиш лозим.

Грин функциясини (1.29) кўринишда излаймиз. (1.29) дан чегаравий шартларга асосан $a_4 = 0$, $a_2 = 0$ тенгликлар ва

$$\begin{cases} b_1 \dfrac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + b_2 \dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3 + b_4 = 0, \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади.

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$b_1 = -b_2, \qquad b_4 = \frac{2b_1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} - b_3.$$

У ҳолда Грин функциясининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{a_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + a_3 x, & x < s, \\ \dfrac{b_1 x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} - \dfrac{b_1 x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + & \\ +b_3 x + \dfrac{2b_1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} - b_3, & x > s. \end{cases} \qquad (*)$$

$x = s$ бўлганда бу функцияни Грин функцияси учун биринчи ва учинчи шартларга бўйсундирсак,

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + a_3 s = \dfrac{b_1 s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} - \dfrac{b_1 s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \\ \qquad + b_3 s - b_3 + \dfrac{2b_1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}, \\ \dfrac{a_1 s^{2-\alpha}}{2-\alpha} + a_3 = \dfrac{b_1 s^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \dfrac{b_1 s^{1-\alpha}}{1-\alpha} + b_3, \\ a_1 s^{1-\alpha} = b_1 s^{1-\alpha} - b_1 s^{-\alpha}, \\ b_1 (1-\alpha) s^{-\alpha} + b_1 \alpha s^{-(\alpha+1)} - a_1 (1-\alpha) s^{-\alpha} = s^{-\alpha} \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системани ечиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$a_3 = \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{2s}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)},$$

$$a_1 = s-1, \quad b_1 = s, \quad b_3 = \frac{2s}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Топилганларни (*) формулага қўйсак, 2-масаланинг Грин функцияси учун формула келиб чиқади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(s-1)\,x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}-\dfrac{s^{2-\alpha}x}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+\\ +\dfrac{x\,s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\dfrac{2\,s\,x}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}, & x<s,\\ \dfrac{(x-1)\,s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}-\dfrac{s\,x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+\\ +\dfrac{s\,x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\dfrac{2\,s\,x}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}, & x>s.\end{cases}$$

3. $L[y]\equiv(x^\alpha y'')''$ дифференциал операторнинг $(1<\alpha<2)$ $y(0)=0$, $|y'(0)|<+\infty$; $y''(1)=0$, $y'''(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечими (1.28) кўринишга эга. Ундан чегаравий шартларга асосан $C_1=0$, $C_2=0$, $C_4=0$ C_3 – ихтиёрий сон эканлиги келиб чиқади. Демак, $L[y]=0$ тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас $y(x)=C_3x$ ечими мавжуд, бу ерда $C_3\neq0$. Шунинг учун умумлашган Грин функцясини тузамиз. Бунинг учун аввал $y=C_3x$ функцияни нормаллаштириб, $y_0(x)=\sqrt{3}x$ функцияга эга бўламиз. Сўнгра $L[y]=\sqrt{3}x\sqrt{3}s=3xs$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y=\frac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+\frac{C_1x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\frac{C_2x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+C_3x+C_4.$$

Шунинг учун умумлашган Грин функцияси қуйдаги кўринишда изланади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+\dfrac{a_1x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ +\dfrac{a_2x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+a_3x+a_4, & x<s,\\ \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(2-\alpha)}+\dfrac{b_1x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ +\dfrac{b_2x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+b_3x+b_4, & x>s.\end{cases}$$

Чегаравий шартлардан $a_4=0$, $a_2=0$, $b_1=-3s/2$, $b_2=s$ тенгликлар келиб чиқади. Буларни $G(x,s)$ нинг юкоридаги формуласига қўйсак, умумлашган Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+\dfrac{a_1x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+a_3x, & x<s,\\ \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}-\dfrac{3sx^{3-\alpha}}{2(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ +\dfrac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+b_3x+b_4, & x>s.\end{cases}$$

Умумлашган Грин функцияси учун $x=s$ даги шартлардан

$$\begin{cases}\dfrac{a_1s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+a_3s=\dfrac{-3s^{4-\alpha}}{2(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ \qquad+\dfrac{s^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+b_3s+b_4,\\ a_1\dfrac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha}+a_3=\dfrac{-3s^{3-\alpha}}{2(2-\alpha)}+\dfrac{s^{2-\alpha}}{1-\alpha}+b_3,\\ a_1s^{1-\alpha}=(-3/2)s^{2-\alpha}+s^{1-\alpha}\end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системани ечиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$a_1 = 1 - \frac{3s}{2}, \quad a_3 = \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3, \quad b_4 = \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Энди топилганларни Грин функцияси ифодасига қўйиб,

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)} - \dfrac{3sx^{3-\alpha}}{2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \\ + \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{xs^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3 x, & x < s, \\ \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)} - \dfrac{3sx^{3-\alpha}}{2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \\ + \dfrac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + b_3 x, & x > s \end{cases}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формуладаги b_3 ни умумлашган Грин функциясининг $y_0(x) = \sqrt{3}x$ функция билан ортогоналлик шартидан, яъни

$$\int_0^1 G(x,s)x\,dx = 0$$

муносабатдан топамиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида

$$b_3 = \frac{18(3\alpha - 11)s}{(7-\alpha)\prod\limits_{k=1}^{5}(k-\alpha)} - \frac{3s^{3-\alpha}}{2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{s^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Энди b_3 нинг қийматини $G(x,s)$ функциянинг охирги формуласига қўйиб, 3-масаланинг умумлашган Грин функциясини ҳосил қиламиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{sx^{5-\alpha}+xs^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)} - \dfrac{3\left(sx^{3-\alpha}+xs^{3-\alpha}\right)}{2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \\ + \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{xs^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \\ + \dfrac{18sx(3\alpha-11)}{(7-\alpha)\prod\limits_{k=1}^{5}(k-\alpha)}, & x < s, \\ \dfrac{sx^{5-\alpha}+xs^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)} - \dfrac{3\left(xs^{3-\alpha}+sx^{3-\alpha}\right)}{2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \\ + \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \dfrac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \\ - \dfrac{18sx(3\alpha-11)}{(7-\alpha)\prod\limits_{k=1}^{5}(k-\alpha)}, & x > s. \end{cases}$$

Эслатиб ўтамизки, мазкур бобни тайёрлашда асосан дифференциал тенгламалар назарияси ривожланишига улкан ҳисса қўшган забардаст олим, улуғ устоз, профессор Қ.Б.Бойқўзиевнинг 1983 йили "Ўқитувчи" нашриёти томонидан чоп этилган "Дифференциал тенгламалар" китобидан [2] фойдаланилди.

II БОБ

НОЛОКАЛ ШАРТЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

2.1-§. Интеграл тенгламалар ҳақидаги асосий маълумотлар

Номаълум функция интеграл ишораси остида бўлган тенгламалар интеграл тенгламалар деб аталади.

Механика, математик физика ва техниканинг кўп масалалари ушбу

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (2.1)$$

кўринишдаги интеграл тенгламларни текширишга олиб келинади, бу ерда $\varphi(x)$-номаълум функция, $K(x,y)$ ва $f(x)$ функциялар эса мос равишда $\{a \leqslant x \leqslant b,\quad a \leqslant y \leqslant b\}$ ва $a \leqslant x \leqslant b$ (a,b -ўзгармас сонлар бўлиб, $a < b$) ёпиқ тўпламларда берилган узлуксиз ҳақикий функциялар.

(2.1) тенглама *чизиқли интеграл тенглама* ёки *иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси* дейилади. $f(x)$ функция (2.1) интеграл тенгламанинг *озод ҳади*, $K(x,y)$-унинг *ядроси*, сонли λ кўпайтувчи эса тенгламанинг *параметри* дейилади.

(2.1) интеграл тенглама $f(x) \equiv 0$ бўлган ҳолда, яъни

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0 \qquad (2.2)$$

тенглама *бир жинсли интеграл тенглама, $f(x) \not\equiv 0$ бўлган ҳолда эса бир жинсли бўлмаган интеграл тенглама* дейилади.

Қуйидаги бир жинсли интеграл тенглама

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y,x)\,\psi(y)\,dy = 0 \tag{2.3}$$

(2.2) тенгламага *қўшма интеграл тенглама* дейилади.

Текшириб кўриш қийин эмаски, агар иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасининг умумий ечими $\Phi(x)$ мавжуд бўлса, у

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + \varphi(x) \tag{2.4}$$

кўринишга эга бўлади, бунда $\varphi_0(x)$ - бир жинсли (2.2) тенгламанинг умумий ечими, $\varphi(x)$ эса бир жинслимас (2.1) тенгламанинг хусусий ечимларидан бири.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\Phi(x)$ ва $\varphi(x)$ мос равишда бир жинсли бўлмаган (2.1) тенгламанинг умумий ва хусусий ечимлари бўлса, буларнинг айирмаси $\varphi_0(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$ бир жинсли (2.2) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Бундан дарҳол (2.4) тенглик келиб чиқади.

Қуйидаги белгилашни киритайлик:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b |K(x,y)|dy = M.$$

Агар λ параметр қуйидаги тенгсизликни

$$|\lambda| < \frac{1}{M} \tag{2.5}$$

қаноатлантирса, (2.1) тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, уни кетма-кет яқинлашиш усули билан топиш мумкин.

(2.1) интеграл тенгламада $K(x,y)$ ядро $\{(x,\, y) : a \leq x \leq b,$ $a \leq x \leq b\}$ квадратда узлуксиз бўлса, қуйидаги фикр ўринли бўлади [11, 12].

Фредгольм альтернативаси. *Агар (2.1) тенгламага мос бир жинсли (2.2) тенглама λ нинг ҳар бир тайин қиймати учун фақат тривиал (айнан нолга тенг) ечимга эга бўлса, (2.1) тенглама ихтиёрий узлуксиз $f(x)$ озод ҳад учун ягона ечимга эга бўлади; агарда бир жинсли (2.2) тенглама тривиалмас ечимларга эга бўлса, (2.2) тенглама ҳам ва унга қўшма (2.3) бир жинсли тенглама ҳам бир хил чекли сондаги чизиқли боғлиқ бўлмаган тривиалмас ечимларга эга бўлади; у ҳолда (2.1) тенглама ихтиёрий узлуксиз $f(x)$ озод ҳад учун ечимга эга бўлавермайди; (2.1) тенгламанинг ечимга эга бўлиши учун $f(x)$ озод ҳад узлуксиз ва бир жинсли қўшма (2.3) тенгламанинг барча ечимларига ортогонал бўлиши зарур ва етарлидир, яъни*

$$\int_a^b f(x)\,\psi_j(x)dx = 0, \qquad j = 1, 2, ..., k, \tag{2.6}$$

бунда $\psi_j(x)$, $j = 1, 2, ..., k$ - (2.3) бир жинсли тенгламанинг барча чизиқли боғлиқ бўлмаган тривиалмас ечимлари.

Равшанки, тривиал функция бир жинсли (2.2) тенгламанинг ва унга қўшма бўлган (2.3) тенгламанинг ечими бўлади. λ параметрнинг бир жинсли (2.2) тенглама тривиалмас $\varphi(x)$ ечимга эга бўлган қиймати $K(x, y)$ ядронинг ёки (2.1) тенгламанинг *хос сони*, $\varphi(x)$ функция эса шу ядро ёки тенгламанинг λ хос сонига мос *хос функцияси* дейилади.

Ушбу

$$K_1(x, y) = K(x, y), \;\; K_j(x, y) = \int_a^b K(x, t)\,K_{j-1}(t, y)\,dt, \;\; j = 2, 3, ...$$

рекуррент муносабатлар билан аниқланган $K_j(x, y)$ функциялар (2.1) *тенгламанинг итерацияланган (такрорланган) ядролари* дейилади.

Агар $K(x,y)$ ядро $\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$ соҳада узлуксиз ва (2.5) тенгсизлик бажарилган бўлса, у ҳолда бу соҳада

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,y) \tag{2.7}$$

қатор текис яқинлашади. (2.7) қаторнинг йиғиндиси (2.1) тенгламанинг ёки $K(x,y)$ ядронинг *резольвентаси* ёки *ҳал қилувчи ядроси* дейилади ва $R(x,y;\lambda)$ каби белгиланади, яъни

$$R(x,y;\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,y). \tag{2.8}$$

Агар (2.1) тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлса, бу ечим $R(x,y;\lambda)$ резольвента ёрдамида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y;\lambda)\, f(y)\, dy \tag{2.9}$$

кўринишда аниқланади.

(2.1) тенгламанинг $K(x,y)$ ядроси ушбу тенгсизликни

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy = M^2 < +\infty \tag{2.10}$$

ёки қуйидаги тенгликни

$$K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.11}$$

қаноатлантирса, уни мос равишда *квадрати билан жамланувчи ёки кучсиз махсусликка эга бўлган ядро* дейилади, бу ерда $H(x,y)$ - $\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$ соҳада узлуксиз бўлган функция.

(2.1) интеграл тенгламанинг ядроси (2.10) ёки (2.11) шартларни бажарганда ҳам Фредгольм альтернативаси ўринли бўлиб, (2.1) тенгламанинг ечими (2.9) тенглик билан аниқланади.

Агар (2.1) тенгламада интеграл чегараларидан биттаси, масалан, юқори чегара ўзгарувчи бўлса, яъни тенглама

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)dy = f(x) \qquad x > a$$

кўринишда бўлса, уни *Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгамаси* дейилади.

Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгамаси, унинг ядроси $K(x,y)$ ва озод ҳади $f(x)$ узлуксиз бўлганда, λ параметрнинг ҳар бир чекли қиймати учун ягона ечимга эга бўлади.

Бундай тенгламалар учун яқинланшиш усули қўлланганда итерацияланган ядролар

$$K_1(x,y) = K(x,y), \quad K_j(x,y) = \int_y^x K(x,t)K_{j-1}(t,y)dt, \ j = 2, 3, \ldots$$

кўринишда аниқланиб, (2.7) қатор λ нинг ихтиёрий чекли қийматида абсолют ва текис яқинлашади. Унинг йиғиндиси бу ерда ҳам тенгламанинг резольвентаси деб аталиб, $R(x,y;\lambda)$ каби белгиланади ва тенгламанинг ечими

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,y;\lambda)\, f(y)\, dy$$

формула билан аниқланади.

Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламасининг $K(x,y)$ ядроси (2.10) ва (2.11) шартларни каноатлантирганда ҳам юқоридаги фикрлар ўринли бўлаверади.

Эслатиб ўтамизки, агар $K(x, y)$ - ядро мазкур параграфда келтирилган шартларни бажарувчи функция бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$ ва $\int\limits_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$ ифодалар мос равишда Фредгольм ва Вольтерранинг *интеграл оператори* деб номланади.

2.2-§. Бицадзе-Самарский масалалари

Қуйидаги оддий дифференциал тенгламани қарайлик:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \quad x \in (a, b), \tag{2.12}$$

бу ерда $y = y(x)$ - номаълум функция, $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ лар эса $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз функциялар бўлиб, $p_0(x) \neq 0$.

Маълумки, (2.12) дифференциал тенглама учун $[a, b]$ оралиқда қўйиладиган чегаравий масалаларда қаралаётган оралиқ учларида, яъни $x = a$ ва $x = b$ нуқталарда номаълум функциянинг ёки унинг ҳосиласининг қиймати ёки улардан ташкил топган қандайдир чизиқли комбинациянинг қиймати берилар эди. Бу чегаравий шартларнинг хусусияти шундан иборатки, ҳар бир шартда номаълум функциянинг ва унинг ҳосиласининг фақат $x = a$ нуқтадаги ёки $x = b$ нуқтадаги қиймати иштирок этади. Одатда бундай шартлар *локал (маҳаллий) шартлар* дейилади, уларга мос масалалар эса баъзида *локал чегаравий масалалар* деб юритилади.

Дифференциал тенгламалар учун локал бўлмаган шартли, яъни *нолокал шартли* масалалар қўйиш ва ўрганиш ҳам мумкин. Масалан, 1.4-§ нинг 5-мисолида $L[u] \equiv y''$ оператор учун қўйилган $y(0) = -y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$ шартлар нолокалдир, чунки бу чегаравий шартлардан бирида номаълум функциянинг, иккинчисида эса унинг ҳосиласининг икки чегаравий нуқталардаги қийматлари иштирок этмоқда.

Нолокал шартларда номаълум функциянинг ёки унинг ҳосиласининг нафақат чегаравий нуқталардаги қийматлари, балки қаралаётган оралиқнинг ички нуқталаридаги қийматлари ҳам иштирок этиши мумкин. Шунга қарамай, бошланғич шартлардан фарқлаш мақсадида, нолокал шартларни ҳам чегаравий шартлар деб ҳисоблаймиз. Бунга мос равишда, нолокал шартли масалаларни *нолокал чегаравий масалалар* ёки тўғридан-тўғри *нолокал масалалар* деб атаймиз.

Нолокал шартли масалалардан бир тури *Бицадзе-Самарский масалалари* бўлиб, унда берилган нолокал шартлар функциянинг ёки унинг ҳосиласининг қаралаётган оралиқнинг чегаравий ва ички нуқталаридаги қийматларини боғлайди [3].

Соддалик учун қуйидаги масалани қарайлик:

$$y''(x) = f\,(x)\,, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.13}$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y\,(0) = k_0, \qquad y\,(1) = ky\,(\xi) + k_1 \tag{2.14}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k, k_0, k_1, ξ - берилган сонлар бўлиб, $0 < \xi < 1$.

Агар $k = 0$ бўлса, бу масаладан (2.13) тенгламанинг $y(0) = k_0$, $y\,(1) = k_1$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала келиб чиқади. Агар $k \neq 0$ бўлса, бу масаланинг (2.14) шартларидан иккинчиси номаълум функциянинг $[0, 1]$ оралиқнинг четки $x = 1$ ва ички $x = \xi \in (0, 1)$ нуқталаридаги қийматлари орасидаги боғланишни ифодалайди. Одатда бундай шартлар *Бицадзе-Самарский шартлари* деб аталиб, улар нолокалдир.

Бу масалани ечишда (2.13) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини аниқловчи қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \int\limits_0^x (x - t) f(t) dt, \tag{2.15}$$

бу ерда c_0, c_1 - ихтиёрий ўзгармаслар.

(2.15) функцияни (2.14) шартларнинг биринчисига бўйсунтирсак, $c_0 = k_0$ келиб чиқади. Сўнгра (2.15) формуладан фойдаланиб, $y(1)$ ва $y(\xi)$ ларни топамиз:

$$y(1) = c_0+c_1+\int\limits_0^1 (1-t)\,f(t)dt, \quad y(\xi) = c_0+c_1\xi+\int\limits_0^\xi (\xi-t)\,f(t)dt.$$

Буларни (2.14) шартларнинг иккинчисига қўйиб, масалан $k = 1$ бўлганда, c_1 ни бир қийматли топамиз:

$$c_1 = \left[k_1 + \int\limits_0^\xi (\xi-1)f(t)dt + \int\limits_\xi^1 (t-1)f(t)dt\right](1-\xi)^{-1}.$$

c_0 ва c_1 ларнинг топилган қийматларини (2.15) формулага қўйиб, $\{(2.13),\ (2.14)\}$ масаланинг $k = 1$ бўлгандаги ечимига эга бўламиз:

$$y(x) = k_0 + \int\limits_0^x (x-t)\,f(t)\,dt+$$

$$+\frac{x}{1-\xi}\left[k_1 + \int\limits_0^\xi (\xi-1)\,f(t)\,dt + \int\limits_\xi^1 (t-1)\,f(t)\,dt\right].$$

Бу ечимни топиш жараёнидан келиб чиқадики, у ягонадир. Демак, $\{(2.13),(2.14)\}$ масала $k = 1$ бўлганда коррект қўйилган. Бу масалани k нинг бошқа қийматларида ҳам ўрганиш мумкин.

Энди юқорида ўрганилган масаладаги (2.14) шартлар ўрнига

$$y(0) = k_0, \qquad y'(1) = y'(\xi) + k_1 \tag{2.16}$$

шартлар олинган масалани қарайлик.

Бу ерда ҳам (2.13) тенгламанинг (2.15) умумий ечимидан фойдаланамиз. Аниқки, $c_0 = k_0$. (2.15) формуладан $y'(1)$ ва $y'(\xi)$

ларни топамиз:

$$y'(1) = c_1 + \int_0^1 f(t)dt, \qquad y'(\xi) = c_1 + \int_0^\xi f(t)dt. \tag{2.17}$$

Буларни (2.16) шартларнинг иккинчисига қўйсак,

$$\int_\xi^1 f(t)dt = k_1 \tag{2.18}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $\{(2.13)\,,(2.16)\}$ масала ечимга эга бўлиши учун (2.18) шарт бажарилиши зарур экан.

Юқоридагилардан келиб чиқадики, агар (2.18) шарт бажарилмаса, $\{(2.13),(2.16)\}$ масала ечимга эга эмас, (2.18) шарт бажарилганда эса у

$$y(x) = k_0 + c_1 x + \int_0^x (x-t)\,f(t)dt \tag{2.19}$$

кўринишдаги чексиз кўп ечимларга эга бўлади, бу ерда c_1- ихтиёрий ўзгармас сон. Демак, $\{(2.13)\,,(2.16)\}$ масала коррект қўйилган эмас.

Бицадзе-Самарский масалаларини чегарада бузиладиган дифференциал тенгламалар учун ҳам қўйиш мумкин. Мисол сифатида, $[xy'(x)]' - (n^2/x)y(x) = 0$ *дифференциал тенгламанинг* $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) < +\infty, \qquad y(1) = y(\xi) + k_1 \tag{2.20}$$

шартларни каноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалани қарайлик, бу ерда n, ξ, k_1 - берилган сонлар бўлиб, $n \in N$, $\xi \in (0,1)$.

Бу ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y(x) = c_1x^n + c_2x^{-n}$ кўринишга эга бўлиб, c_1 ва c_2 - ихтиёрий ўзгармаслар. Бундан (2.20) шартларнинг биринчисига асосан $c_2 = 0$ келиб чиқади. Буни эътиборга олиб, умумий ечимдан $y(1) = c_1$, $y(\xi) = c_1\xi^n$ ларни топамиз. Буларни (2.20) чегаравий шартларнинг иккинчисига қўйсак, $c_1 = c_1\xi^n + k_1$ тенгликка, бундан эса $c_1 = k_1/(1-\xi^n)$ га эга бўламиз. Демак, қаралаётган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у $y(x) = k_1(1-\xi_n)^{-1}x^n$ функциядан иборат экан.

Энди $y^{(IV)}(x) = 120x$ *дифференциал тенгламанинг* $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$\begin{aligned} &y(0) = 1, \qquad && y'(0) = y'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{16}, \\ &y''(1) = 2, \qquad && y'''(1) = -y'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 32 \end{aligned} \tag{2.21}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топайлик.

Бу ерда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y(x) = x^5 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4.$$

Бу функцияни (2.21) шартларга қўйиб,

$$c_4 = 1,\ c_3 - \frac{3}{4}c_1 - c_2 = 1,\ 3c_1 + c_2 = -9,\ c_1 = -4$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан эса $c_1 = -4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$ ларни топамиз. Демак, масаланинг ечими ягона ва у $y(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 + x + 1$ функциядан иборат.

Эслатиб ўтамизки, бу масалада берилган (2.21) шартларнинг биринчи ва учинчиси локал шартлар, иккинчиси ва тўртинчиси эса Бицадзе-Самарский шартлари бўлиб, нолокалдир. Демак, масала ҳам нолокал.

Юқорида ўрганилган масалалар ечимини топишда ҳар доим қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан фойдаланилди. Бицадзе-Самарский масалалари ечимини топишнинг бу усулидан ташқари Грин функциялари усули ҳам мавжуд. Қуйидаги масалани шу усул билан ечамиз:

$$-[x^{\alpha}y'(x)]' = f(x),\ 0 < x < 1 \tag{2.22}$$

дифференциал тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y\,(0) = k_0, \qquad y\,(1) = y\,(\xi) + k_1, \tag{2.23}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_0, k_1, α, ξ - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\alpha, \xi = const \in (0, 1)$, $f(x)$ эса берилган узлуксиз функция.

$\{(2.22), (2.23)\}$ масалани Грин функциялари усули билан ечиш учун уни бир жинсли чегаравий шартли масалага келтириб оламиз. Бунинг учун $\{(2.22), (2.23)\}$ масалада қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$z(x) = y(x) - k_0 - [y(\xi) + k_1 - k_0]\,x.$$

Натижада, $\{(2.22)\,,(2.23)\}$ нолокал масала

$$-[x^{\alpha}z'\,(x)]' = f_1\,(x)\,,\ 0 < x < 1, \tag{2.24}$$

$$z(0) = 0,\ z(1) = 0 \tag{2.25}$$

локал чегаравий масалага алмашади, бу ерда

$$f_1\,(x) = f\,(x) + \alpha\,[y\,(\xi) + k_1 - k_0]\,x^{\alpha-1}.$$

Агар $y(\xi)$ ни маълум деб фараз қилсак, $f_1(x)$ - маълум функция бўлиб, $\{(2.24)\,,(2.25)\}$ чегаравий масаланинг ечими

$$z(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)f_1(t)dt \tag{2.26}$$

формула билан аниқланади, бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} x^{1-\alpha}(1-t^{1-\alpha})(1-\alpha)^{-1}, & x < t, \\ t^{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right)(1-\alpha)^{-1}, & x > t \end{cases}$$

-қаралаётган масаланинг Грин функцияси (1.8-§ га қаранг).

(2.26) га $z(x)$ ва $f_1(x)$ функцияларнинг ифодаларини қўйсак,

$$y(x) = k_0 + [y(\xi) + k_1 - k_0]\, x +$$

$$+ \int_0^1 G(x,t)\{f(t) + \alpha\,[y(\xi) + k_1 - k_0]\, t^{\alpha-1}\}dt$$

тенглик келиб чиқади. Бу ердан $G(x,t)$ функциянинг кўринишини эътиборга олиб, баъзи ҳисоблашлардан сўнг

$$y(x) = k_0 + [y(\xi) + k_1 - k_0]\, x^{1-\alpha} + \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt \qquad (2.27)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (2.27) да $x = \xi$ деб,

$$y(\xi)\left(1 - \xi^{1-\alpha}\right) = k_0 + (k_1 - k_0)\, \xi^{1-\alpha} + \int_0^1 G(\xi,t)\, f(t)\, dt \qquad (2.28)$$

тенгликка эга бўламиз.

$y(\xi)$ нинг коэффициенти $(1 - \xi^{1-\alpha}) \neq 0$ бўлгани учун (2.28) дан $y(\xi)$ бир қийматли топилади. Топилган $y(\xi)$ ни (2.27) тенгликка қўйиб, ўрганилаётган масала ечимига эга бўламиз.

Маълумки, ҳар доим ҳам берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини аниқ кўринишда топиб бўлавермайди. Демак, ҳар қандай дифференциал тенглама учун қўйилган чегаравий масаланинг Грин функциясини аниқ кўринишда топиб бўлавермайди. Бундай вақтда юқорида кўриб ўтилган иккала усулдан ҳам фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда берилган дифференциал тенглама учун қўйилган нолокал масала ечимининг мавжудлигини, берилган дифференциал тенгламанинг бирор хусусий ҳолига мос келувчи чегаравий масаладан (агар бу масаланинг Грин функцияси маълум бўлса) фойдаланиб кўрсатиш мумкин. Айтилганларни исботлаш мақсадида

$$y''(x) + xy'(x) - xy(x) = x, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.29}$$

дифференциал тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = (1/2)y(\xi) + 1, \quad y(1) = 2 \tag{2.30}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалани қарайлик.

Аввал $\{(2.29),(2.30)\}$ масала ечимининг ягоналигини исботлаб оламиз. Бунинг учун унга мос бир жинсли масала, яъни

$$y''(x) + xy'(x) - xy(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{2.31}$$

$$y(0) = (1/2)y(\xi), \quad y(1) = 0 \tag{2.32}$$

масала фақат тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатиш етарли.

Тескаридан фараз қилайлик, яъни $\{(2.31), (2.32)\}$ масаланинг $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [0,1]$ ечими мавжуд бўлсин дейлик. У ҳолда, $y_0(x) \in C[0,1]$ бўлгани учун, Вейерштрасс теоремасига асосан,

$$\sup_{[0,1]} |y_0(x)| = |y_0(x_0)| > 0, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

бўлади. $y(0) = 0,5y(\xi)$ ва $y(1) = 0$ бўлгани учун $x_0 \neq 0$ ва $x_0 \neq 1$. Демак, $x_0 \in (0,1)$. У ҳолда, $y_0(x) \in C^2(0,1)$ бўлгани учун $y_0(x_0)$ сон $y_0(x)$ функциянинг мусбат максимуми ёки манфий минимуми бўлади. Агар $y_0(x_0)$ мусбат максимум (манфий минимум) бўлса,

$$y_0''(x_0) \leqslant 0\,(\geqslant 0), \qquad y_0'(x_0) = 0,$$

$$(-x_0)y(x_0) < 0(> 0)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Буларни эътиборга олсак,

$$y_0''(x_0) + x_0 y_0'(x_0) - x_0 y_0(x_0) < 0 \quad (> 0)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (2.31) га зиддир.

Юқоридагилардан келиб чиқадики, $\{(2.31),(2.32)\}$ масаланинг $[0,1]$ оралиқда узлуксиз бўлган $y_0(x) \not\equiv 0$ ечими бу оралиқнинг хеч бир нуқтасида абсолют қиймати бўйича энг катта мусбат кийматга эришмайди. Бу эса Вейерштрасс теоремасига зиддир. Бу қарама-қаршилик $y_0(x) \not\equiv 0$ деган фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$.

Энди $\{(2.29),\ (2.30)\}$ масала ечимининг мавжудлигини исботлашга ўтамиз. Бунинг учун аввал $\{(2.29),\ (2.30)\}$ масалада

$$z(x) = y(x) + [1 + 0,5y(\xi)](x-1) - 2x \tag{2.33}$$

алмаштириш бажариб, уни бир жинсли локал шартли ушбу

$$z''(x) + xz'(x) - xz(x) = f_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.34}$$

$$z(0) = 0, \qquad z(1) = 0 \tag{2.35}$$

масалага келтириб оламиз, бу ерда $f_1(x) = x+x^2+y(\xi)(x-0,5x^2)$.

Ҳосил бўлган $\{(2.34),(2.35)\}$ масалага тўғридан тўғри Грин усулини қўллаб бўлмайди, чунки унинг Грин функцияси бизга маълум эмас. Шунинг учун (2.34) дифференциал тенгламани

$$z''(x) = f_2(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{2.36}$$

кўринишда ёзиб олиб, $\{(2.35),(2.36)\}$ масаланинг Грин функциясидан фойдаланамиз, бу ерда $f_2(x) = x+x^2+y(\xi)(x-0,5x^2) - xz' + xz$.

Агар $f_2(x)$ ни вақтинча маълум функция деб ҳисобласак, $\{(2.35),(2.36)\}$ масаланинг ечими

$$z(x) = \int\limits_0^1 G(x,t) f_2(t) dt \tag{2.37}$$

кўринишида аниқланади, бу ерда (1.4- § даги 2-мисолга қаранг)

$$G(x,t)=\begin{cases}(t-1)x, & x<t,\\ (x-1)t, & x>t.\end{cases}$$

(2.37) формулага аввал $f_2(x)$ функция ифодасини, сўнгра $z(x)$ нинг ифодасини қўйсак, баъзи ҳисоблашлардан сўнг

$$y(x)=1+\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}y(\xi)(1-x)-\int\limits_0^1 G(x,t)\,t\,[y'(t)-y(t)]\,dt$$

тенгликка эга бўламиз.

$y'(t)$ иштирок этаётган интегрални бўлаклаб интегралласак ва $G(x,0)=G(x,1)=0$ эканлигини инобатга олсак, охирги тенгликдан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$y(x)=1+\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}y(\xi)(1-x)+$$
$$+\int\limits_0^1\left[(t+1)G(x,t)+tG'_t(x,t)\right]y(t)\,dt. \qquad (2.38)$$

(2.38) да $x=\xi$ деб,

$$3(1+\xi)y(\xi)=6+7\xi-\xi^3+6\int\limits_0^1\left[(t+1)G(\xi,t)+tG'_t(\xi,t)\right]y(t)\,dt \qquad (2.39)$$

тенгликка эга бўламиз.

$\xi\in(0,1)$ бўлганлиги учун (2.39) да $y(\xi)$ нинг коэффициенти нолдан фарқли. Шунинг учун $y(\xi)$ ундан бир қийматли топилади. Топилган $y(\xi)$ ни (2.38) қўйиб, $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x)+\int\limits_0^1 G_1(x,t)\,y(t)\,dt=f_0(x) \qquad (2.40)$$

кўринишидаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда

$$G_1(x,t) = -\left[(1+t)G(\xi,t) + tG'_t(\xi,t)\right]\left(1+\frac{1-x}{1+\xi}\right),$$

$$f_0(x) = 1+\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1-x}{1+\xi}\left(1+\frac{7}{6}\xi-\frac{1}{6}\xi^3\right)$$

бўлиб, $f_0(x)$ - узлуксиз функция, $G_1(x,t)$ эса $t \neq x$ да узлуксиз ва $t = x$ да чекли сакрашга эга бўлган функция.

{(2.31),(2.32)} бир жинсли масалага

$$y(x)+\int_0^1 G_1(x,t)y(t)dt = 0 \qquad (2.40')$$

бир жинсли интеграл тенглама мос келади. {(2.31),(2.32)} масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун (2.40′) интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан (2.40) бир жинслимас интеграл тенгламанинг ечими мавжуд, ягона ва уни

$$y(x) = f_0(x)-\int_0^1 R(x,t)f_0(t)dt \qquad (2.41)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $R(x,t)$ функция $G_1(x,t)$ ядронинг резольвентаси.

$f_0(x)$ ва $R(x,t)$ $[G_1(x,t)]$ функцияларнинг хоссаларига асосан охирги тенгликдан келиб чиқадики, топилган $y(x)$ функция $C[0,1]\cap C^2(0,1)$ синфга тегишли. Бундан ташқари (2.41) [(2.40)] тенгликни келтириб чиқариш жараёнидан келиб чиқадики, топилган $y(x)$ функция (2.29) тенгламани қаноатлантиради.

Изоҳ. Юқорида қўрилган масалаларда нолокал шарт фақат қаралаётган оралиқнинг бир четки нуктаси ёрдамида берилди.

Лекин нолокал шартларни оралиқнинг иккала четки нукталари ёрдамида ҳам бериш мумкин.

2.3-§. Бицадзе - Самарский масаласининг умумлашмалари

Аввалги параграфда берилган дифференциал тенглама учун қўйилган Бицадзе-Самарский шартларида номаълум функциянинг тенглама қаралаётган оралиқнинг четки ва ички нуқталаридаги қийматлари боғланган эди. Бу ерда қуйидагича савол пайдо бўлади: *Бицадзе-Самарский шартларида номаълум функциянинг қийматлари олинаётган ички нуқталар биттадан ортиқ бўлиши мумкинми?* Бу ерда шу саволга жавоб берамиз.

1. Ички нуқталар сони чекли бўлган ҳол. Бицадзе-Самарский шартларида номаълум функциянинг қаралаётган оралиқнинг бир неча ички нуқталаридаги қийматлари иштирок этиши ҳам мумкин. Масалан, (2.16) даги иккинчи ва (2.30) даги биринчи шартлар ўрнига мос равишда

$$y(1) = a_1y(\xi_1) + a_2y(\xi_2) + ... + a_ny(\xi_n) + k_1, \tag{2.42}$$

$$y(0) = b_1y(\eta_1) + b_2y(\eta_2) + ... + b_my(\eta_m) + k_0$$

шартлар олиниши мумкин, бу ерда $n, m \in N$ ва k_0, k_1, a_j, ξ_j, b_i, η_i - берилган сонлар бўлиб, ξ_j, $\eta_i \in (0,1)$ $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$.

Фикримизнинг исботи сифатида

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.43}$$

дифференциал тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз ва* $y(0) = k_0$, (2.42) *шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалани* қарайлик, бу ерда $\lambda = const$.

Аввал масаланинг ечими ягоналигини исботлаймиз.

Бунинг учун (2.43) дифференциал тенгламанинг

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = a_1y(\xi_1) + a_2y(\xi_2) + ... + a_ny(\xi_n) \tag{2.44}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими фақат тривиал функция бўлишини исботлаш керак.

Агар $\{(2.43),(2.44)\}$ масаланинг ечими $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [0,1]$ деб фараз қилсак, $\sup\limits_{[0,1]} |y_0(x)| = |y_0(x_0)| > 0$, $x_0 \in [0,1]$ деган хулосага эга бўламиз. Худди $\{(2.31),(2.32)\}$ масаладаги каби мулоҳазалар юритиб, кўрсатиш мумкинки, $\lambda > 0$ да $x_0 \notin (0,1)$ бўлади. Буни ва $y_0(0) = 0$ тенгликни эътиборга олсак, $x_0 = 1$ эканлиги, яъни $\forall x \in [0,1)$ учун $|y_0(x)| < |y_0(1)|$ эканлиги келиб чиқади. У холда, (2.44) тенгликларнинг иккинчисидан

$$|y_0(1)| = |a_1 y_0(\xi_1) + a_2 y_0(\xi_2) + \ldots + a_n y_0(\xi_n)| < |y_0(1)| \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

яъни $|y_0(1)| < |y_0(1)| \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ кўринишдаги тенгсизликка эга бўламиз. Агар $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ бўлса, охирги тенгсизликдан $|y_0(1)| < |y_0(1)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Демак, бунда $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [0,1]$ деган фаразимиз нотўғри, яъни $\{(2.43),(2.44)\}$ масала фақат тривиал ечимга эга.

Энди $\lambda = 0$ бўлсин. Унда (2.43) тенгламанинг умумий ечими $y_0(x) = c_0 + c_1 x$ бўлади. $y(0) = 0$ шартдан $c_0 = 0$ келиб чиқади. (2.44) шартларнинг иккинчисидан эса

$$c_1 [1 - (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n)] = 0$$

тенглик келиб чиқади. Агар $(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n) \neq 1$ бўлса, $c_1 = 0$ бўлиб, $\{(2.43),(2.44)\}$ масала тривиал ечимга эга бўлади.

Юқоридагилардан келиб чиқадики, агар

$$\lambda > 0, \qquad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant 1$$

ёки

$$\lambda = 0, \qquad a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n \neq 1 \tag{2.45}$$

шартлар бажарилса, $\{(2.42), (2.43), y(0) = k_0\}$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

Масала ечими мавжудлигини (2.45) шартлар бажарилган ҳолда кўрсатамиз. Бунда (2.43) дифференциал тенгламанинг $y(x) = c_0 + c_1 x$ умумий ечимини $y(0) = k_0$ ва (2.42) шартларга қўйсак, $c_0 = k_0$ ва $c_1 = c_1 [a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n] + k_1$ тенгликлар келиб чиқади. (2.45) шартларнинг иккинчисига асосан охирги тенгликдан номаълум c_1 бир қийматли топилади. c_0 ва c_1 ларнинг топилган қийматларини умумий ечимга қўйиб, ўрганилаётган масала ечимига эга бўламиз.

2. Ички нуқталар сони саноқли бўлган ҳол.

$$y''(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{2.46}$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = k_0, \qquad y(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y(\xi_n) + k_1 \tag{2.47}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалани қарайлик, бу ерда k_0, k_1, a_n, ξ_n $(n \in N)$-берилган сонлар бўлиб, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < .... < 1$.

(2.46) тенгламанинг умумий ечимидан фойдаланамиз:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \int_0^x (x - t) f(t)\, dt, \tag{2.48}$$

бу ерда c_0 ва c_1 ихтиёрий ўзгармаслар.

Бу функцияни (2.47) шартларга қўйсак, $c_0 = k_0$ тенглик ва

$$k_0 + c_1 + \int_0^1 (1 - t) f(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[k_0 + c_1\xi_n + \int_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt \right] + k_1 \tag{2.49}$$

тенглик келиб чиқиб, c_1 ни (2.49)дан аниқлаш зарур бўлади.

Фараз қилайлик, $k_0 \neq 0$, $f(x) \in C[0,1]$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $0 < \xi_n < 1$, $f(x) \in C[0,1]$ бўлгани учун

$$|a_n \xi_n| < |a_n|, \qquad \left| a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt \right| \leqslant |a_n| M \xi_n^2 < M |a_n|$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt$$

қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун, Риман теоремасига асосан, (2.49) тенгликнинг ўнг томонидаги қаторни ҳадлаб йиғиш мумкин, яъни уни

$$k_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Буни эътборга олсак, (2.49) тенгликдан

$$\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n\right] c_1 = -k_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right] +$$
$$+ \int\limits_0^1 (t-1) f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt \qquad (2.50)$$

тенглик келиб чиқади.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ қаторнинг йиғиндиси 1 дан фаркли бўлса, (2.50) тенгликдан номаълум c_1 бир қийматли топилади ва уни (2.48) га қўйиб, ўрганилаётган масаланинг ечимига эга бўламиз.

Энди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи, аммо $\forall \quad n \in N$ сон учун $|a_n| \leqslant a = const < +\infty$, тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда, агар $k_0 = 0$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ қатор яқинлашувчи бўлса,

$$|a_n\xi_n| \leqslant a\xi_n, \qquad \left|a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt\right| \leqslant aM\xi_n^2 < aM\xi_n$$

тенгсизликларга асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n \qquad \text{ва} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt$$

қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлади.

Буларни ва $c_0 = k_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (2.49) тенгликдаги қаторга Риман теоремасини қўлласак,

$$\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n\right] c_1 = \int\limits_0^1 (t-1) f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\xi_n} (\xi_n - t) f(t)\, dt \tag{2.51}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n \neq 1$ тенгсизлик бажарилган бўлса, (2.51) тенгликдан c_1 номаълум бир қийматли топилади ва уни (2.48) га қўйиб, ўрганилаётган масаланинг ечимига эга бўламиз.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди.

Теорема. *Агар $f(x) \in C[0,1]$ бўлиб, қуйидаги шартлар гуруҳларидан бири бажарилса, $\{(2.46),\ (2.47)\}$ масала ягона ечимга эга бўлади:*

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n \neq 1;$

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty,$ аммо $k_0 = 0,$ $|a_n| < a = const,$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n < +\infty,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n \neq 1.$

2.4-§. Интеграл шартли масалалар

Аввалги параграфларда ўрганилган масалалардаги Бицадзе-Самарский шартларида қаралаётган оралиқ ичидан олинаётган ξ_n нуқталар тўплами чекли ёки саноқли эди. Бу нуқталар тўплами континуум қувватга эга бўлган ҳолда Бицадзе-Самарский шарти қандай берилади? деган савол туғилади. Қуйидаги масала бу саволга бериладиган жавобларнинг биридир:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad 0 < x < 1 \qquad (2.52)$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва* $y(0) = k_0$,

$$y(1) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dt + k_1 \qquad (2.53)$$

шартларни қаноатлантрувчи ечими топилсин, бу ерда k_0, k_1, α, β-берилган сонлар бўлиб, $0 < \alpha < \beta < 1$.

(2.53) шартдан кўриниб турибдики, $y(x)$ номаълум функциянинг $x = 1$ нуқтадаги қиймати шу функциянинг $[\alpha, \beta]$ $(\subset [0, 1])$ кесманинг нуқталаридаги қийматлари билан интеграл амали орқали боғланмоқда. Демак, (2.53) шартда номаълум функциянинг $(0, 1)$ кесма ичидаги континуум қувватли тўпламдаги қийматлари иштирок этмоқда. Агар (2.53) даги интегрални $[\alpha, \beta]$ оралиқда $y(x)$ функция учун тузилган интеграл йиғиндининг лимити сифатида қаралса, у ҳолда (2.53) ни (2.47) даги Бицадзе-Самарский шартининг умумлашмаси деб қараш мумкин.

Масала ечимини топишга ўтамиз. (2.52) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \qquad (2.54)$$

кўринишга эга. бу ерда c_1ва c_2 - ихтиёрий ўзгармаслар. Бу функцияни $y(0) = k_0$ ва (2.53) шартларга қўйсак, c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = k_0, \\ c_1\left(e - e^{\beta} + e^{\alpha}\right) + c_2\left(e^2 - \frac{1}{2}e^{2\beta} + \frac{1}{2}e^{2\alpha}\right) = k_1 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз.

Бу системанинг асосий детерминанти

$$\left(e^2 - e\right) + \left(e^{\beta} - e^{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2\beta} - e^{2\alpha}\right) \neq 0$$

бўлгани учун (буни мустақил исботланг), ундан c_1 ва c_2 номаълумлар бир қийматли топилади. Топилган c_1 ва c_2 ларни (2.54) га қўйиб, ўрганилаётган масаланинг ечимига эга бўламиз.

1-изоҳ. (2.53) шартдаги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қилсак, шундай $\xi \in [\alpha, \beta]$ сон топиладики, унинг учун $\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)dt = y(\xi)(\beta - \alpha)$ тенглик ўринли бўлиб, (2.53) интеграл шарт Бицадзе-Самарский шартига алмашади. Шунинг учун баъзида интеграл шартли масалани Бицадзе-Самарский масаласига келтириб ўрганиш ҳам мумкин. Лекин бу усулни ҳар доим ҳам қўллаб бўлмайди, чунки бу ердаги $\xi \in [\alpha, \beta]$ нуқта аниқ бўлмаганлиги учун Бицадзе-Самарский масаласини ечишда ξ га нисбатан ҳосил бўладиган қўшимча шартларнинг бажарилишини текшириш қийин бўлиши мумкин.

2-изоҳ. Юқорида ўрганилган масалани (2.53) шарт ўрнига

$$y(1) = \int\limits_{0}^{\beta} y(t)dt + k_1, \qquad \beta \in (0,1), \tag{2.55}$$

$$y(1) = \int\limits_{\alpha}^{1} y(t)\,dt + k_1, \qquad \alpha \in (0,1), \tag{2.56}$$

$$y(1) = \int_0^1 y(t)\,dt + k_1 \tag{2.57}$$

шартларнинг бирини олган ҳолда ҳам ўрганиш мумкин.

3-изоҳ. $\{(2.52), (2.53), y(0) = k_0\}$ масалада $y(0) = k_0$ шарт

$$y(0) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} y(t)dt + k_0, \qquad \alpha_1, \beta_1 \in (0,1), \;\; \alpha_1 \neq \alpha, \;\; \beta_1 \neq \beta, \tag{2.58}$$

$$y(0) = \int_0^{\beta_1} y(t)dt + k_0, \qquad \beta_1 \in (0,1), \tag{2.55'}$$

$$y(0) = \int_{\alpha_1}^{1} y(t)dt + k_0, \qquad \alpha_1 \in (0,1), \tag{2.56'}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(t)dt + k_0 \tag{2.57'}$$

шартларнинг бири билан алмаштирилиши мумкин.

(2.56) ва (2.57) ((2.55′) ва (2.57′)) шартларда номаълум функциянинг $x = 1$ $(x = 0)$ нуқтадаги қиймати икки марта қатнашмоқда, яъни чап томонда у ошкор равишда, ўнг томонда эса интеграл ёрдамида ошкормас равишда иштирок этмоқда. Агар улардан чапдагисини ташласак, янги нолокал шарт, яъни

$$\int_\alpha^1 y(t)\,dt = k_1, \;\; 0 \leqslant \alpha < 1; \qquad \int_0^{\beta_1} y(t)dt = k_0, \;\; 0 < \beta_1 \leqslant 1 \tag{2.59}$$

кўринишдаги нолокал шарт келиб чиқиб, бундай шартли масалаларни ҳам юқоридаги усулда ўрганиш мумкин.

Одатда (2.53), (2.55)-(2.59), (2.55′) – (2.57′) нолокал шартлар *интеграл шартлар* деб аталиб, (2.59)- *биринчи тур интеграл шартлар,* (2.53), (2.55) - (2.58), (2.55′)-(2.57′) лар эса *иккинчи тур интеграл шартлар* деб аталади. Шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, (2.53) [(2.55)-(2.57)], (2.58) [(2.55′) – (2.57′)] ва (2.59) шартлар мос равишда уларга нисбатан умумий бўлган ушбу

$$y(1) = k\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,y(t)\,dt + k_1, \qquad 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1;$$

$$y(0) = k\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,y(t)\,dt + k_0,$$

$$\int_{\alpha}^{1} g(t)\,y(t)\,dt = k_1,\ 0 \leqslant \alpha < 1 \qquad \left[\int_{0}^{\beta} g(t)y(t)dt = k_0,\ 0 < \beta \leqslant 1\right]$$

кўринишдаги шартларнинг хусусий ҳолидир, бу ерда k, k_0 ва k_1 - берилган сонлар, $g(t)$ эса берилган функция. Дифференциал тенгламалар учун бундай шартлар ёрдамида қўйилган масалалар ҳам юқоридаги усулда ўрганилиши мумкин.

Бу параграф сўнгида биринчи тур интеграл шартли қуйидаги масалани ўрганамиз:

$$y''(x) - (1+x)y(x) = 0, \qquad 0 < x < 1 \qquad (2.60)$$

дифференциал тенгламанинг [0, 1] *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = k_0, \qquad \int_{0}^{1} y(x)dx = k_1 \qquad (2.61)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд ва ягона эканлиги исботлансин, бу ерда k_0 ва k_1 - ихтиёрий берилган сонлар.

Ечиш. Аввал қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. *Ушбу масала фақат тривиал ечимга эга:*

$$y''(x)-(1+x)y(x)=0,\ 0<x<1;\ y(0)=0,\ \int\limits_0^1 y(x)dx=0. \quad (2.62)$$

Исбот. (2.62) даги интеграл шартдан келиб чиқадики, ёки $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ ёки $(0,\ 1]$ оралиқда ҳеч бўлмаса битта ξ_1 нуқта мавжудки, $y(\xi_1)=0$ бўлади. Охирги ҳолда, (2.62) га асосан,

$$y''(x)-(1+x)y(x)=0, \quad 0<x<\xi_1; \quad y(0)=0, \quad y(\xi_1)=0 \quad (2.63)$$

масалага эга бўламиз.

Бу масала фақат $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\xi_1]$ ечимга эга. Ҳақиқатан ҳам, агар (2.63) масаланинг $y(x)\not\equiv 0$ ечими мавжуд деб фараз қилсак, Вейерштрасс теоремасига кўра, $\sup\limits_{[0,\xi_1]}|y(x)|=|y(x_0)|>0$, $x_0\in[0,\xi_1]$ бўлади. $y(0)=y(\xi_1)=0$ бўлгани учун $x_0\neq 0$, $x_0\neq\xi_1$. Демак, $x_0\in(0,\xi_1)$. У ҳолда, $x=x_0$ нуқтада $y(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эга бўлади. Агар $y(x_0)>0$ (<0) бўлса, $y''(x_0)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $(1+x_0)y(x_0)>0$ (<0) бўлиб, $y''(x_0)-(1+x_0)y(x_0)<0$ (>0) тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (2.63) даги тенгламага зид. Бу қарама-қаршилик $y(x)\not\equiv 0$, $x\in[0,\xi_1]$ деган фаразимиз нотўғрилигини кўрсатади. Демак, (2.63) масаланинг ечими $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\ \xi_1]$.

Агар $\xi_1=1$ бўлса, $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\ 1]$ бўлиб, теорема исбот бўлади. Агар $\xi_1\in(0,\ 1)$ бўлса, $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,\ \xi_1]$ тенгликни эътиборга олсак, (2.62) тенгликлардан

$$\left.\begin{aligned} &y''(x)-(1+x)y(x)=0, \qquad \xi_1<x<1;\\ &y(\xi_1)=0; \qquad \int\limits_{\xi_1}^1 y(x)dx=0 \end{aligned}\right\} \quad (2.64)$$

масала келиб чиқади. Худди (2.62) масала устида юритилган мулоҳазаларни такрорлаб, (2.64) шартлардан фойдаланиб, шундай $\xi_2 \in (\xi_1, 1]$ нуқта мавжудки, $y(x) \equiv 0$, $x \in [\xi_1, \xi_2]$ деган хулосага келамиз.

Агар $\xi_2 = 1$ бўлса теорема исбот бўлади. Акс ҳолда $y(x) \equiv 0$, $x \in [\xi_1, \xi_2]$ тенгликка асосан (2.64) тенгликлардан

$$\left.\begin{aligned} & y''(x) - (1 + x)y(x) = 0, \qquad \xi_2 < x < 1, \\ & y(\xi_2) = 0, \qquad \int\limits_{\xi_2}^{1} y(x)dx = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.65)$$

муносабатлар келиб чиқади.

Юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаб, (2.65) муносабатлардан фойдаланиб, шундай $\xi_3 \in (\xi_2, 1]$ нуқта топамизки, $y(x) \equiv 0$, $x \in [\xi_2, \xi_3]$ бўлади. Агар $\xi_3 = 1$ бўлса, теорема исбот бўлади, акс ҳолда юқоридаги жараённи давом эттирамиз.

Натижада ёки чекли қадамлардан сўнг $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ эканлигини топамиз ёки $[0, 1]$ оралиқда ичма-ич ётувчи шундай $[0, \xi_1] \subset [0, \xi_2] \subset \ldots \subset [0, \xi_n] \subset \ldots$ кесмалар кетма-кетлигига эга бўламизки, улар учун $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, \xi_n]$, $n \in N$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 1$ муносабатлар ўринли бўлади. $y(x) \in C[0, 1]$ эканлигини эътиборга олсак, охирги муносабатлардан $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ тенглик келиб чиқади. Демак, (2.62) масала фақат тривиал ечимга эга. 1-теорема исбот бўлди.

2-теорема. *Агар* $\{(2.60), (2.61)\}$ *масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.*

Исбот. Фараз қилайлик, $\{(2.60), (2.61)\}$ масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда уларнинг айирмаси бўлган $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция (2.62) масаланинг ечими бўлади. Аммо, 1-теоремага асосан бу масала фақат $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ ечимга эга. Демак, $y_1(x) \equiv y_2(x)$, $x \in [0, 1]$. Теорема исботланди.

3-теорема. $\{(2.60), (2.61)\}$ *масаланинг ечими мавжуд.*

Исбот. (2.60) дифференциал тенгламада x ни t га алмаштириб, сўнгра уни t бўйича $[0, x]$ оралиқда икки марта интеграллаб, $y(0) = k_0$ шартни ҳисобга олсак,

$$y(x) = k_0 + y'(0)x + \int_0^x (x - t)(1 + t)y(t)dt \tag{2.66}$$

тенгликка эга бўламиз.

(2.66) ни (2.61) шартга қўйиб, баъзи ҳисоблашлардан кейин $y'(0)$ ни

$$y'(0) = 2(k_1 - k_0) - \int_0^1 (1 - t)^2(1 + t)y(t)dt.$$

кўринишда топамиз. Буни (2.66) тенгликка қўйиб,

$$K(x, t) = \begin{cases} t(1 + t)(2x - xt - 1), & x > t, \\ x(1 + t)(1 - t)^2, & x < t \end{cases}$$

белгилаш киритсак, $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан

$$y(x) + \int_0^1 K(x, t)y(t)dt = k_0 + 2(k_1 - k_0)x \tag{2.67}$$

кўринишдаги интеграл тенгламага эга бўламиз.

(2.67) - Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламаси бўлиб, у {(2.60), (2.61)} масалага эквивалентдир. (2.67) га мос бир жинсли

$$y(x) + \int_0^1 K(x, t)y(t)dt = 0 \tag{2.68}$$

интеграл тенглама, (2.62) бир жинсли масалага мос келади (эквивалент). (2.62) масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун

(2.68) интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан бир жинсли бўлмаган (2.67) интеграл тенгламанинг ягона ечими мавжуд. Бу ечимни $K(x,\, t)$ ядронинг резольвентаси $R(x,\, t)$ ёрдамида

$$y(x) = k_0 + 2(k_1 - k_0)x - \int_0^1 R(x,\, t)[k_0 + 2(k_1 - k_0)t]dt \qquad (2.69)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Кўрсатиш қийин эмаски, (2.69) функция $C[0,\, 1] \cap C^2(0,\, 1)$ синфга тегишли. (2.67) интеграл тенглама $\{(2.60),\, (2.61)\}$ масалага эквивалент бўлганлиги учун, (2.69) функция $\{(2.60),\, (2.61)\}$ масаланинг ҳам ечими бўлади. 3-теорема исботланди.

2.5-§. Интеграл шартли масаланинг бир умумлашмаси ҳақида

Аввалги мавзуда ўрганилган масалалардаги шартларда битта интеграл иштирок этган эди. Бу параграфда битта шартдаги интеграллар сони чекли ёки саноқли бўлиши мумкинлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда ушбу

$$y''(x) = f\,(x)\,, \qquad 0 < x < 1 \qquad (2.70)$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = k_0, \qquad y\,(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} y(x)dx + k_1 \qquad (2.71)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалани қараймиз, бу ерда k_0, a_n, α_n, β_n, k_1 - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < ... < \alpha_n < \beta_n < ... < 1$.

Агар $y(x) \in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олиб, (2.71) шартларда иштирок этаётган интегралларга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлласак, ҳар бир $[\alpha_n, \beta_n]$, $n \in N$ ораликда шундай $\xi_n \in [\alpha_n, \beta_n]$ нуқта мавжуд бўладики, бу нуқта учун

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} y(x)dx = y(\xi_n)(\beta_n - \alpha_n), \; n \in N$$

тенгликлар ўринли бўлиб, (2.71) шартлар (2.47) кўринишни олади. Шунинг учун у ердаги теорема шартлари бажарилганда $\{(2.70), (2.71)\}$ масала ҳам ягона ечимга эга бўлади. Аммо бу ерда ξ_n лар аниқ бўлмаганлиги учун $\{(2.46), (2.47)\}$ масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг ξ_n га боғлиқ шартларини текшириш қийин бўлади. Бу ерда қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Агар* $f(x) \in C[0,1]$ *бўлиб, қуйидаги шартлар гуруҳларидан бири бажарилса,* $\{(2.70), (2.71)\}$ *масала ягона ечимга эга бўлади:*

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\beta_n^2 - \alpha_n^2) \neq 2;$

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty,$ аммо $|a_n| < a = const,$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < +\infty \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\left(\beta_n^2 - \alpha_n^2\right) \neq 2.$

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун ҳам (2.70) тенгламанинг

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt \tag{2.72}$$

умумий ечимидан фойдаланамиз, бу ерда c_0 ва c_1 ихтиёрий ўзгармаслар. Бу функцияни (2.71) шартларга қўйсак, $c_0 = k_0$ ва

$$k_0 + c_1 + \int\limits_0^1 (1-t)\, f(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \left[k_0 + c_1 x + \int\limits_0^x (x-t)\, f(t)\, dt \right] dx + k_1 \qquad (2.73)$$

тенгликлар келиб чиқиб, c_1 ни (2.73) тенгликдан аниқлаш зарур бўлади. (2.73) тенгликни, унинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$k_0 + c_1 + \int\limits_0^1 (1-t) f(t) dt = k_1 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[k_0(\beta_n - \alpha_n) + \frac{1}{2} c_1 (\beta_n^2 - \alpha_n^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\alpha_n} (\beta_n - \alpha_n)(\beta_n + \alpha_n - 2t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} (\beta_n - t)^2 f(t) dt \right]. \qquad (2.74)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ бўлсин. У ҳолда

$$|a_n(\beta_n - \alpha_n)| \leqslant |a_n|, \qquad \left| a_n \left(\beta_n^2 - \alpha_n^2 \right) \right| \leqslant |a_n|,$$

$$\left| a_n \int\limits_0^{\alpha_n} (\beta_n - \alpha_n)(\beta_n + \alpha_n - 2t) f(t) dt + \right.$$

$$\left. + a_n \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} (\beta_n - t)^2 f(t) dt \right| < 3 |a_n| \sup_{[0,1]} |f(x)|$$

тенгсизликлар ўринли бўлгани учун (2.74) даги қатор ва унинг ҳадларидан тузилган қаторлар абсалют яқинлашади.

Шунинг учун (2.74) тенгликдан

$$c_1\left[1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\beta_n^2-\alpha_n^2\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\int\limits_0^{\alpha_n}\left(\beta_n-\alpha_n\right)\left(\beta_n+\alpha_n-2t\right)f\left(t\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\beta_n-t\right)^2f\left(t\right)dt\right]+k_1-$$

$$-k_0\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\beta_n-\alpha_n\right)\right]+\int\limits_0^1\left(t-1\right)f\left(t\right)dt \qquad (2.75)$$

тенглик келиб чиқади. Теореманинг 1) шартларидан иккинчисига асосан бу ердан c_1 бир қийматли топилади.

Энди теореманинг 2) шартлари бажарилган бўлсин. У ҳолда $|a_n|<a$, $0<\beta_n,\alpha_n<1$ бўлганлиги учун

$$\left|a_n\left(\beta_n^2-\alpha_n^2\right)\right|\leqslant a\left(\beta_n-\alpha_n\right),$$

$$\left|a_n\int\limits_0^{\alpha_n}\left(\beta_n-\alpha_n\right)\left(\beta_n+\alpha_n-2t\right)f(t)dt+a_n\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\beta_n-t\right)^2f(t)dt\right|<$$

$$<3a\left(\beta_n-\alpha_n\right)\sup_{[0,1]}|f(x)|$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Буларни ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n-\alpha_n\right)<+\infty$$

эканлигини эътиборга олсак, (2.75) даги қатор ва унинг ҳадларидан тузилган қаторлар абсолют яқинлашади. Шунинг учун (2.74) ни (2.75) кўринишда ёзиб, c_1 ни бир қийматли топиш мумкин. c_0 ва c_1 ларнинг топилган қийматларини (2.72) га қўйиб, масала ечимига эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

1-изоҳ. $\{(2.70), (2.71)\}$ масалани ўрганиш жараёни ва (2.75) тенгликдан келиб чиқадики, агар (2.71) шартдаги интеграллар сони чекли бўлса, яъни (2.71) шартларнинг иккинчиси ўрнига

$$y(1) = \sum_{n=1}^{m} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} y(x)\,dx + k_1 \qquad m = const \in N$$

шарт олинса, қўйилган масала ечимга эга бўлиши учун, $f(x) \in C[0,1]$ ва $\sum\limits_{n=1}^{m} a_n (\beta_n^2 - \alpha_n^2) \neq 2$ шартларнинг бажарилиши етарли бўлади.

2-изоҳ. Бу ерда ўрганилган масалаларни умумий ечимини топиш мумкин бўлган мураккаброқ тенгламалар учун ҳам қўйиш ва ўрганиш мумкин.

III БОБ

ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

3.1-§. Ёрдамчи маълумотлар

Функциянинг каср тартибли интеграли ва ҳосиласи тушунчаларини киритишда Гёльдер шарти ва функциянинг абсолют узлуксизлиги тушунчалари кенг фойдаланилади.

1. Гёльдер шарти. Функцияларнинг $H^{\alpha}(\Delta)$ синфи. *$f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган бўлсин. Агар $[a,b]$ оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 сонлар учун*

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq K\,|x_1-x_2|^{\alpha} \qquad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда Гёльдер шартини (қисқача, H^{α} шартни) қаноатлантиради дейилади, бундаги α, K-мусбат ўзгармас сонлар бўлиб, $0<\alpha\leq 1$. Одатда K-Гёльдер ўзгармаси, α-Гёльдер кўрсаткичи деб аталади.

Агар $f(x)$ функциянинг (a,b) оралиқда узлуксиз ва чегараланган ҳосиласи мавжуд бўлса, бу функция $[a,b]$ оралиқда H^1 шартни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, (a,b) оралиқда $f'(x)$ ҳосила узлуксиз бўлганлиги учун, чекли орттирмалар ҳақида теоремага асосан, шу оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 $(x_1<x_2)$ сонлар учун шундай $x_0\in(x_1,x_2)$ сон топиладики,

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_0)\ (x_1-x_2)$$

тенглик ўринли бўлади. $|f'(x_0)|\leq K$ эканлигини эътиборга олсак, бу тенгликдан дарҳол ушбу

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq K\,|x_1-x_2|$$

тенгсизлик, яъни H^1 шартнинг бажарилиши келиб чиқади. Баъзида H^1 шартни *Липшиц шарти* деб ҳам юритилади.

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $\alpha > 1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ўзгармасдир. Ҳақиқатан ҳам, бунда таърифга асосан $[a,b]$ оралиқдан олинган ихтиёрий x ва x_0 $(x \neq x_0)$ сонлар учун

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq K\,|x - x_0|^{\alpha-1}$$

тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликда $\alpha > 1$ эканлигини эътиборга олиб, $x \to x_0$ да лимитга ўтсак, $f'(x_0) = 0$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликда x_0 - (a,b) оралиқдан олинган ихтиёрий сон бўлгани учун ундан $f(x) \equiv const$ тенглик келиб чиқади.

2. Абсолют узлуксиз функциялар синфи. Одатда $[a,b]$ оралиқда абсолют узлуксиз функциялар синфи $AC([a,b])$ билан белгиланади. Маълумки, $[a,b]$ оралиқда абсолют узлуксиз функциялар синфи шу оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи функцияларнинг бошланғичлари синфи билан устма-уст тушади, яъни

$$f(x) \in AC([a,b]) \Leftrightarrow f(x) = C + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad \int_a^b |\varphi(t)|dt < +\infty.$$

Демак, абсолют узлуксиз функциялар (a,b) оралиқнинг деярли барча нуқталарида интегралланувчи $f'(x)$ ҳосилага эга.

Агар функция Липшиц шартини бажарса, у албатта абсолют узлуксиз бўлади, яъни $H^1([a,b]) \subset AC([a,b])$. Бунинг тескариси эса ҳар доим ҳам ўринли бўлавермайди. Ҳақиқатан ҳам, $f(x) = (x-a)^\alpha \in AC([a,b])$, аммо $\alpha \in (0,1)$ бўлганда эса $(x-a)^\alpha \notin H^1([a,b])$. Чунки $x_2 = a$, x_1 эса a га етарлича яқин сон бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - a)^\alpha - (a-a)^\alpha| = |x_1 - a|^\alpha \nleq |x_1 - a|.$$

Худди юқоридаги каби, $AC^n([a,b])$, $n \in N$ орқали $(n-1)$-тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи, $(n-1)$-тартибли ҳосиласи эса абсолют узлуксиз бўлган функциялар синфини белгилаймиз. Аниқки, $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$. Бундан ташқари

$$f(x) \in AC^n([a,b]) \Leftrightarrow f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} +$$

$$+ \int\limits_a^x dx_1 \int\limits_a^{x_1} dx_2 \cdots \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(t)\,dt, \qquad \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt < +\infty$$

Шуни таъкидлаб ўтамизки, кейинги параграфларда келтирилган масала, лемма ва теоремаларга ҳавола (мурожаат)лар мавжудлиги учун уларни кетма-кет номерлаб борамиз. Бунда 3.n – белги учинчи бобдаги n– масалани (леммани ёки теоремани) билдиради.

3.2-§. Каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг хоссалари

1. Каср тартибли интеграллар. Математик анализ курсидан маълумки, n-каррали интеграл учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\int\limits_a^x dx_1 \int\limits_a^{x_1} dx_2 ... \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \; n \in N,$$

$$\int\limits_x^b dx_1 \int\limits_{x_1}^b dx_2 ... \int\limits_{x_{n-1}}^b \varphi(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_x^b (t-x)^{n-1}\varphi(t)dt, \; n \in N. \tag{3.1}$$

(3.1) тенгликларнинг ўнг томонидаги интеграллар n нинг мусбат каср қийматлари учун ҳам яқинлашувчи бўлади. Буни ва $(n-1)! = \Gamma(n)$ эканлигини эътиборга олиб, (3.1) тенгликларга мос равишда каср тартибли интегралларни қуйидагича киритиш мумкин.

Таъриф. *α - мусбат каср сон ва $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ $(a < b < +\infty)$ бўлсин. Ушбу*

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt,\ \alpha>0, \\ D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)dt,\ \alpha>0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

кўринишдаги ифодалар Риман-Лиувилл маънносидаги α (каср) тартибли интеграллар дейилади [13, 15].

(3.2) формулалардан кўринадики, $\alpha = n \in N$ бўлганда $D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)$ ва $D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)$ белгилар (3.1) тенгликларни ифодалаб, $\varphi(x)$ функциянинг n (натурал) каррали интегралларини аниқлайди.

$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)$ ва $D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)$ функциялар (a, b) оралиқнинг деярли барча нуқталарида аниқланган бўлиб, $L_1(a,b)$ синфга тегишли.

Агар $0 < \alpha_1,\ \alpha_2 < \infty$ бўлса, деярли ҳамма $x \in (a,b)$ учун

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}\varphi(x) = D_{ax}^{-\alpha_1}D_{ax}^{-\alpha_2}\varphi(x) = D_{ax}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\varphi(x), \\ D_{xb}^{-\alpha_2}D_{xb}^{-\alpha_1}\varphi(x) = D_{xb}^{-\alpha_1}D_{xb}^{-\alpha_2}\varphi(x) = D_{xb}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\varphi(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}D_{ax}^{-\alpha_2}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha_1-1}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\ \Gamma(\alpha_2)}\int\limits_a^x\left(\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha_1-1}\varphi(s)\,ds\right)(x-t)^{\alpha_2-1}dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\ \Gamma(\alpha_2)}\int\limits_a^x \varphi(s)\,ds\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}dt. \tag{3.4}$$

Охирги ички интегралда $t = s + (x - s)\ \tau$ алмаштириш бажариш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}ds =$$

$$= (x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1 \tau^{\alpha_1-1}(1-\tau)^{\alpha_2-1}d\tau =$$

$$= B(\alpha_1,\alpha_2)(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} = \frac{\Gamma(\alpha_1)\ \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Буни ва (3.2) белгилашларни эътибрга олсак, (3,4) тенгликдан (3.3) тенгликларнинг биринчиси келиб чиқади.

(3.3) тенгликларнинг иккинчиси ҳам шундай исботланади.

Таъриф сифатида

$$D^0_{ax}\varphi(x) \equiv \varphi(x), \qquad D^0_{xb}\varphi(x) \equiv \varphi(x) \tag{3.5}$$

деб қабул қиламиз.

Агар $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $\varepsilon\,(>0)$ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирса, (3.5) тенгликлар (3.2) тенгликлардан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, (3.2) тенгликларнинг биринчисини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$D^{-\alpha}_{ax}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varphi(x)\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt.$$

$\varphi(x)$ функция $\varepsilon\,(>0)$ тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирганлиги учун $\varphi(t)-\varphi(x) = K(x,t)(x-t)^{\varepsilon}$ тенглик ўринли, бу ерда $K(x,t)$-узлуксиз функция. Буни эътиборга олиб ва иккинчи интегрални ҳисоблаб, охирги тенгликни

$$D^{-\alpha}_{ax}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x K(x,t)(x-t)^{\alpha+\varepsilon-1}dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\varphi(x)(x-a)^{\alpha} \tag{3.6}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ердаги биринчи интеграл $\forall\alpha \geqslant 0$ учун узлуксиз функция бўлиб, у чегаралангандир. Буни ва

$$\lim_{\alpha\to 0}\Gamma(\alpha) = +\infty, \qquad \lim_{\alpha\to 0}\Gamma(1+\alpha) = 1$$

тенгликларни эътиборга олиб, (3.6) тенгликда ($x > a$ деган фараз билан) $\alpha \to 0$ да лимитга ўтсак, $\lim\limits_{\alpha\to 0} D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) = \varphi(x)$, яъни $D_{ax}^{0}\varphi(x) = \varphi(x)$ тенгликка эга бўламиз.

2. Каср тартибли ҳосилалар.

Таъриф. *$0 < \alpha = const < 1$ ва $\varphi(x)$ эса $[a,b]$ оралиқда аниқланган функция бўлсин. Ушбу*

$$D_{ax}^{\alpha}\,\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1,$$

$$D_{xb}^{\alpha}\,\varphi(x) \equiv -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{3.7}$$

кўринишдаги ифодалар $\varphi(x)$ функциянинг Лиувилл маъносидаги α (каср) тартибли ҳосилалари дейилади [13, 15].

3.1-лемма. *Агар $\alpha \in (0,1)$ ва $\varphi(x) \in AC([a,b])$ бўлса, $[a,b]$ оралиқнинг деярли барча нуқталарида $\varphi(x)$ функциянинг α (каср) тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиб, қуйидаги формулалар ўринли бўлади:*

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{\varphi'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \qquad 0<\alpha<1,$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right], \qquad 0<\alpha<1.$$

Мисол. $\varphi(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ бўлсин. У ҳолда (3.7) тенгликларга асосан

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\alpha-1}\,dt.$$

Интеграл ўзгарувчисини $t = a + (x-a)\,z$ формула билан алмаштирсак,

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}B(\alpha,1-\alpha) = 0$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $(x-a)^{\alpha-1}$ функция α (каср) тартибли ҳосила учун ўзгармас сон вазифасини бажаради.

Энди $\alpha \geqslant 1$ бўлиб, $[\alpha]$ - унинг бутун қисми, $\{\alpha\}$ - эса каср қисми бўлсин. Агар α - бутун сон бўлса, берилган $\varphi(x)$ функциянинг α тартибли ҳосилалари сифатида оддий ҳосилаларни оламиз, яъни

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) \equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\varphi(x),\ D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) \equiv (-1)^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\varphi(x),\ \alpha = 1,2,... \tag{3.8}$$

Агар α - бутун сон бўлмаса, берилган $\varphi(x)$ функциянинг α тартибли ҳосилалари сифатида қуйидагиларни қабул қиламиз:

$$\begin{aligned} D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) &\equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{ax}^{\{\alpha\}}\varphi(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D_{ax}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x), \\ D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) &\equiv \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{xb}^{\{\alpha\}}\varphi(x) \equiv \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D_{xb}^{\{\alpha\}-1}\varphi(x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9) ҳосилалар мавжуд бўлиши учун

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}} \in AC^{([\alpha])}([a,b]), \qquad \int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\{\alpha\}}} \in AC^{([\alpha])}([a,b])$$

бўлиши, бунинг учун эса $\varphi(x) \in AC^{([\alpha])}([a,b])$ бўлиши етарли.

(3.7), (3.8) ва (3.9) тенгликларни эътиборга олсак, умумий холда, агар $\alpha > 0$ ва $n = [\alpha] + 1$ бўлса, берилган $\varphi(x)$ функциянинг α тартибли ҳосиласи дейилганда

$$\begin{aligned} D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) &\equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x), \\ D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) &\equiv (-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{xb}^{\alpha-n}\varphi(x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

тенгликлар орқали ифодаланувчи функцияларни тушунамиз.

Умумийликни чегараламай, $\varphi(x)$ функциянинг 0 - тартибли ҳосиласи сифатида, (3.8) тенгликларга мос равишда, (3.5) тенгликларни қабул қиламиз. Бу тенгликларни (3.7) формулалар ёрдамида келтириб чиқаришни 3-бандда кўрсатамиз.

$\alpha(> 0)$ каср тартибли интеграллар кўринишида ифодаланувчи функциялар синфини $D_{ax}^{-\alpha}(L_p)$ билан белгилайлик, яъни

$$D_{ax}^{-\alpha}(L_p) = \{f(x) : f(x) = D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x),\ \varphi(x) \in L_p(a,b), 1 \leqslant p < \infty\}.$$

У ҳолда қуйидаги теоремалар ўринли [13].

3.1-теорема. *$f(x)$ функция $D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$ синфга тегишли бўлиши учун $f_{n-\alpha}(x) = D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x) \in AC^{(n)}([a,b])$, $\varphi_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $n = [\alpha] + 1$.*

3.2-теорема. *$\alpha > 0$ бўлсин. У ҳолда*

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) = \varphi(x)$$

тенглик барча $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ функциялар учун,

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{3.11}$$

тенглик эса барча

$$\varphi(x) \in D_{ax}^{-\alpha}(L_1) \tag{3.12}$$

функциялар учун бажарилади.

Агар (3.12) ўрнига $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, (3.11) тенглик умуман олганда нотўғри бўлади ва у қуйидаги формула билан алмашади:

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a),$$

бу ерда $n = [\alpha] + 1$, $\varphi_{n-\alpha}(x) = D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x)$.

3. Каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг хоссалари. (3.2) тенгликлар билан аниқланувчи $D_{ax}^{-\alpha}$ ва $D_{xb}^{-\alpha}$ ифодалар, умумий ҳолда, *каср тартибли интеграл операторлар,* (3.10) тенгликлар билан аниқланувчи D_{ax}^{α} ва D_{xb}^{α} ифодалар эса *каср тартибли дифференциал операторлар* дейилади, бу ерда $\alpha \in (0, +\infty)$. Бу таърифдан ва (3.10) тенгликлардан кўринадики, *каср тартибли дифференциал операторларни бутун тартибли дифференциал оператор ва каср тартибли интеграл операторнинг суперпозицияси* сифатида ёзиш мумкин экан. 3.2-теоремадан келиб чиқадики, агар $\alpha > 0$ бўлса, $L_1(a,b)$ синфда D_{ax}^{α} оператор $D_{ax}^{-\alpha}$ операторга, $D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$ синфда эса $D_{ax}^{-\alpha}$ оператор D_{ax}^{α} операторга тескаридир. Бундан ташқари бу операторлар кўплаб *хоссаларга* эга бўлиб, бу ерда биз уларнинг биттасини келтирамиз.

3.2-лемма [11, 15]. *$[a,b]$ оралиқда $\omega(t)$- камаймайдиган мусбат узлуксиз функция, $\varphi(t)$ эса узлуксиз функция бўлсин. Агар $\alpha \in (0,1)$ бўлиб, (a,b) оралиқнинг $t = x_0$ нуқтасида $\varphi(t)$ функция мусбат максимум (манфий минимум)га эришса ва бу нуқтанинг етарли кичик атрофида $\omega(t)\varphi(t)$ кўпайтма $\gamma(> \alpha)$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x)|_{x=x_0} > 0 \qquad \left(D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x)|_{x=x_0} < 0\right). \tag{3.13}$$

Исбот. (3.7) тенгликларнинг биринчисига асосан

$$\Gamma(1-\alpha)\, D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x) \equiv \Gamma(1-\alpha)\frac{d}{dx}\left[D_{ax}^{-(1-\alpha)}\omega(x)\varphi(x)\right] =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Қуйидаги тенглик x га нисбатан текис бажарилиши аниқ:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Бу тенгликни эътиборга олиб, $\Gamma(1-\alpha)\, D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x)$ ифода таркибида қуйидаги шакл алмаштиришларни бажариш мумкин:

$$\Gamma(1-\alpha)\, D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\omega(x-\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} - \alpha\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\omega(x-\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon)-\omega(x)\varphi(x)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\omega(x)\varphi(x)}{(x-t)^{\alpha}}\right\} +$$

$$+\alpha\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(x)\varphi(x)-\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt. \tag{3.14}$$

Энди $\omega(x-\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon)-\omega(x)\varphi(x) = \varepsilon^{\gamma}O(1)$, $\omega(x)\varphi(x) - -\omega(t)\varphi(t) = (x-t)^{\gamma}O(1)$ тенгликларни ва $\gamma > \varepsilon$ эканлигини эътиборга олиб, (3.14) да $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(1-\alpha)\, D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\varphi(x) \equiv \frac{\omega(x)\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}} +$$

$$+\alpha \int\limits_a^x \frac{\omega(x)\varphi(x)-\omega(t)\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt = \frac{\omega(x)\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}+$$

$$+\alpha \int\limits_a^{x-\delta} \frac{\omega(x)\varphi(x)-\omega(t)\varphi(t)}{(x-a)^{1+\alpha}}dt+\alpha \int\limits_{x-\delta}^{x} \frac{\omega(x)\varphi(x)-\omega(t)\varphi(t)}{(x-a)^{1+\alpha}}dt,$$

бу ерда δ - етарлича кичик мусбат сон. Бу тенгликда $x = x_0$ деб, $\omega(x_0)\varphi(x_0) > 0(< 0)$, $\omega(x_0)\varphi(x_0) - \omega(t)\varphi(t) \geq 0(\leq 0)$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (3.13) тенгсизлик дарҳол келиб чиқади. 3.2-лемма исботланди.

Одатда 3.2-лемма *каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципи* деб аталади.

Агар $\omega(t)$- $[a,b]$ *оралиқда ўсмайдиган мусбат узлуксиз функция* бўлса, юқорида исботланган экстремум принципида айтилган тасдиқ D^{α}_{xb} *оператор учун ҳам ўринли бўлади.*

1-изоҳ. (3.15) тенгликдан $\omega(x) \equiv 1$ бўлганда $\gamma(> \alpha)$ тартибли Гёльдер шартини қанотлантирувчи $\varphi(x)$ функциянинг $\alpha \in (0,1)$ тартибли ҳосиласи учун

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int\limits_a^x \frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right\} \qquad (3.15)$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Худди шу каби бундай функция учун

$$D^{\alpha}_{xb}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \alpha\int\limits_x^b \frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}dt\right\} \qquad (3.16)$$

тенглик ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.

2-изоҳ. (3.15) ва (3.16) тенгликлардан $\alpha \to 0$ да (3.5) тенгликлар келиб чиқади.

3.3-§. Интегро-дифференциал тенгламалар ҳақида асосий тушунчалар

Номаълум функция дифференциал (ҳосила) ва интеграл белгилари остида қатнашган тенглама интегро-дифференциал тенглама дейилади. n - тартибли чизиқли интегро-дифференциал тенгламаларнинг энг содда вакили қуйидаги

$$p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+p_{n-1}(x)y'(x)+$$
$$+p_n(x)y(x)+P\left[y\right]=f\left(x\right), \qquad x\in(a,b)$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда $a,b\in R$, $a<b$, $y=y(x)$ - номаълум функция, $f\left(x\right)$ ва $p_j\left(x\right)$ $\left(j=\overline{0,n}\right)$ лар эса $[a,b]$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $p_0\left(x\right)\not\equiv 0$, $x\in[a,b]$; $P[y]$ эса қандайдир чизиқли интеграл ёки каср (n дан кичик) тартибли дифференциал оператор.

Агар $P[y]$ Фредгольмнинг интеграл оператори бўлса,

$$p_0\left(x\right)y^{(n)}(x)+p_1\left(x\right)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}\left(x\right)y'(x)+p_n\left(x\right)y(x)+$$
$$+\int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f\left(x\right) \qquad x\in(a,b) \qquad (3.17)$$

кўринишдаги *интегро-дифференциал тенгламага* эга бўламиз, бу ерда $K\left(x,t\right)-\Delta=\left\{(x,t):a\leq x\leq b,a\leq t\leq b\right\}$ тўртбурчакда қаралувчи функция.

(3.17) тенгламада $K\left(x,t\right)\not\equiv 0$, $(x,t)\in\bar{\Delta}$ бўлиши шарт, акс ҳолда (3.17) дифференциал тенглама бўлиб қолади.

Агар (3.17) тенгламада $K\left(x,t\right)\equiv 0$, $t\in[x,b]$ бўлса, Вольтерранинг интеграл оператори қатнашган

$$p_0\left(x\right)y^{(n)}(x)+p_1\left(x\right)y^{(n-1)}\left(x\right)+\cdots+p_{n-1}\left(x\right)y'(x)+p_n\left(x\right)y(x)+$$
$$+\int_a^x K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f\left(x\right),x\in(a,b) \qquad (3.18)$$

кўринишдаги *интегро-дифференциал тенгламага* эга бўламиз.

(3.18) кўринишдаги интегро - дифференциал тенгламани $[a, +\infty)$ оралиқда ҳам қараш мумкин.

$P[y]$ - каср тартибли интеграл ёки дифференциал оператор бўлса,

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x)+$$

$$+p_n(x)\,y(x) + w(x)D^{\alpha}_{ax}\,\omega(x)\,y\ (x) = f(x), \quad x \in (a, b) \qquad (3.19)$$

кўринишдаги *интегро-дифференциал тенгламага* эга бўламиз, бу ерда $w(x)$ ва $\omega(x)$ берилган функциялар бўлиб, $w(x) \not\equiv 0$, $\omega(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$; $\alpha \in (0, n)$ - бутун бўлмаган берилган сон.

(3.17), (3.18) ва (3.19) интегро-дифференциал тенгламалар учун *бошланғич масала* қуйидагича баён қилинади: (3.17) [(3.18) *ёки* (3.19)] *тенгламанинг* $[a, b]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(a) = k_0, \quad y'(a) = k_1, ..., y^{(n-1)}(a) = k_{n-1}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_j = const$, $j = \overline{0, n-1}$ - берилган сонлар.

Агар (3.18) ва (3.19) тенгламалар $[a, +\infty)$ оралиқда қаралаётган бўлса, у ҳолда унинг юқоридаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда топилиши талаб қилинади.

Изоҳ. (3.18) ва (3.19) интегро-дифференциал тенгламаларда

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt \ \text{ ва } \ D^{\alpha}_{ax}\omega(x)y(x)$$

операторлар ўрнига мос равишда

$$\int_x^b K(x,t)y(t)dt \ \text{ ва } \ D^{\alpha}_{xb}\omega(x)y(x)$$

операторларни олиш ҳам мумкин.

Интегро-дифференциал тенгламалар учун бошланғич масалалар ечимларини топишнинг кўплаб усуллари мавжуд бўлиб, қуйида уларнинг бири билан мисоллар ёрдамида танишамиз.

3.1-масала.

$$y''(x) + \frac{1}{7}\sin x\, y'(x) + \frac{1}{7}y(x) +$$
$$+\frac{1}{7}\int_0^1 \sin(x-t)\, y(t)\, dt = \cos x,\;\; x \in (0,1) \tag{3.20}$$

тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2 \tag{3.21}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (3.20) тенгламада x ни z билан алмаштириб, ҳосил бўлган тенгликни z бўйича $[0,x]$ оралиқда интеграллаймиз. Бунда (3.21) бошланғич шартларни ҳисобга олсак,

$$y'(x) + \frac{1}{7}\sin x y(x) + \frac{1}{7}\int_0^x (1-\cos z)\, y(z) dz +$$

$$+\frac{1}{7}\int_0^1 [\cos z - \cos(x-z)] y(z)\, dz = 2 + \sin x$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламани ҳам юқоридаги каби $[0,x]$ оралиқда интеграллаб ва $y(0) = 1$ шартни эътиборга олиб,

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt + \frac{1}{7}\int_0^x dt \int_0^t (1-\cos z)\, y(z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{7}\int_0^1 [x\cos t - \sin(x-t) - \sin t]\, y(t)\, dt = 2(x+1) - \cos x$$

тенгламага эга бўламиз.

Бу ердаги такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, $\{(3.20),(3.21)\}$ масалага (ечимининг мавжуд бўлиши маъносида) тенг кучли бўлган

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^x [\sin t + (x-t)(1-\cos t)] y(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{7}\int_0^1 [x\cos t - \sin(x-t) - \sin t] y(t)\, dt = 2(x+1) - \cos x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда, агар

$$K(x,t) = \begin{cases} x - t + t\cos t - \sin(x-t), & x \geqslant t, \\ x\cos t - \sin(x-t) - \sin t, & x \leqslant t \end{cases} \tag{3.22}$$

белгилашни киритсак, охирги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^1 K(x,t)\, y(t)\, dt = 2(x+1) - \cos x, \quad x \in (0,1). \tag{3.23}$$

(3.23)-$y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи турдаги Фредгольм интеграл тенгламасидир. $x,\ t \in [0,1]$ эканлигини ва $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (3.22) дан $\sup|K(x,t)| < 3$ тенгсизлик келиб чиқади.

Аниқки, (3.23) интеграл тенгламанинг параметри $\lambda = (1/7)$ сон $[\sup|K(x,t)|]^{-1}$ дан кичик, яъни $(1/7) < (1/3)$. Буни ва

$K(x,t)$ ядро $x \neq t$ да узлуксиз, $x = t$ да эса чекли сакрашга эга эканлигини ҳамда (3.23) тенгламанинг ўнг томони узлуксиз функция эканлигини эътиборга олсак, 2.1-§ да таъкидланган Фредгольм альтернативасига асосан (3.23) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягонадир.

Фараз қилайлик, $y_0(x)$ функция (3.23) тенгламанинг ечими бўлсин, яъни

$$y_0(x) + \frac{1}{7}\int_0^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt = 2(x+1) - \cos x$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликни

$$y_0(x) = -\frac{1}{7}\int_0^x K(x,t)\, y_0(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{7}\int_x^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt + 2(x+1) - \cos x$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. (3.22) ни ҳисобга олсак, охирги тенглик

$$y_0(x) = -\frac{1}{7}\int_0^x [x - t + t\cos t - \sin(x-t)]\, y_0(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{7}\int_x^1 [x\cos t - \sin t - \sin(x-t)]\, y_0(t)\, dt + 2(x+1) - \cos x$$

кўринишни олади. Бу тенгликдан фойдаланиб ва $y_0(x) \in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олиб, бевосита ҳисоблаш билан кўрсатиш мумкинки, $y_0(x) \in C^2[0,1]$. Буни ва (3.23) интеграл тенглама $\{(3.20),(3.21)\}$ масалага эквивалентлигини ҳисобга олсак, (3.23) интеграл тенгламанинг ечими $\{(3.20),(3.21)\}$ масаланинг ҳам ечими бўлиши келиб чиқади.

3.2-масала.

$$y''(x) + xy'(x) + x^3 y(x) + \int_0^x (1+t^2)\, y(t)\, dt = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (0,1)$$

тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва* (3.21) *бошлангич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.*

Ечиш. Бу ерда ҳам берилган тенгламада x ни z билан алмаштириб, сўнгра z бўйича $[0,x]$ оралиқда икки марта интеграллаб,

$$y(x) + \int_0^x \left[t + (t^3-1)(x-t) + \frac{1}{2}(1+t^2)(x-t)^2\right] y(t)\, dt =$$

$$= (1+x)\ln(1+x) + x, \qquad x \in (0,1) \qquad (3.24)$$

кўринишдаги Вольтерра типидаги иккинчи тур интеграл тенгламага келамиз. оосил бўлган (3.24) интеграл тенгламанинг ядроси бўлган

$$K(x,t) = t + (t^3-1)(x-t) + \frac{1}{2}(1+t^2)(x-t)^2$$

функция $\{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ квадратда узлуксиз ва иккинчи тартибли ҳосилаларга эга, тенгламанинг ўнг томони бўлган $f(x) = (1+x)\ln(1+x) + x$ функция эса $[0,1]$ оралиқда узлуксиз ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга. Шунинг учун, Вольтерра типидаги интеграл тенгламалар ҳақида 2.1-§ да айтилганларга асосан (3.24) тенгламанинг $y_0(x) \in C^2[0,1]$ ечими мавжуд ва у 3.2-масаланинг ҳам ечими бўлади.

3.4-§. Интеграл оператор қатнашган интегро-дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

Аввалги параграфда интегро-дифференциал тенгламаларга қўйиладиган бошланғич масалалар ва уларни ўрганишнинг бир усули билан танишдик. Худди оддий дифференциал тенгламалар каби интегро-дифференциал тенгламалар учун ҳам чегаравий масалалар қўйилиши мумкин. Бу параграфда биз бундай чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва уларнинг ечиш усуллари билан мисоллар ёрдамида танишамиз.

3.3-масала.

$$y''(x)+\frac{1}{7}x^2y'(x)+\frac{3}{7}xy(x)+$$

$$+\frac{12}{7}\int\limits_0^1(x-t)^2y(t)dt=6x,\qquad x\in(0,1)\qquad(3.25)$$

тенгламанинг $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0)=1,\qquad y(1)=2\qquad(3.26)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Бу масалани икки хил усул билан ўрганиш мумкин.

1-усул. Берилган тенгламани $[0,x]$ оралиқда интеграллаймиз. Натижада $y(0)=1$ ва $y'(0)$ эса номаълум эканлигини ҳисобга олиб,

$$y'(x)+\frac{x^2}{7}y(x)+\frac{1}{7}\int\limits_0^x ty(t)dt+\frac{4}{7}\int\limits_0^1\left[(x-t)^3+t^3\right]y(t)dt=y'(0)+3x^2$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани яна $[0,x]$ оралиқда интеграллаб, $y(0) = 1$ чегаравий шартни инобатга олсак,

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^x xty(t) + \frac{1}{7}\int_0^1 \left[(x-t)^4 - t^4 + 4t^3x\right]y(t)dt =$$

$$= y'(0)x + x^3 + 1 \qquad (3.27)$$

тенглик келиб чиқади. (3.27) да $x = 1$ деб ва $y(1) = 2$ эканлигини ҳисобга олсак, $y'(0)$ ни қуйидаги кўринишда топамиз:

$$y'(0) = \frac{1}{7}\int_0^x \left(1 - 3t + 6t^2\right) y(t)dt.$$

$y'(0)$ нинг бу ифодасини (3.27) га қўйсак,

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^x xty(t)dt +$$

$$+\frac{1}{7}\int_0^1 x\left(x^3 - 4x^2t + 6xt^2 - 6t^2 + 3t - 1\right)y(t)dt = x^3 + 1$$

тенгламага эга бўламиз. Агар

$$K(x,t) = \begin{cases} x\left(x^3 - 4x^2t + 6xt^2 - 6t^2 + 4t - 1\right), & x \geq t; \\ x\left(x^3 - 4x^2t + 6xt^2 - 6t^2 + 3t - 1\right), & x \leq t \end{cases}$$

белгилаш киритсак, охирги тенгламани ушбу

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^1 K(x,t)y(t)dt = x^3 + 1, \qquad x \in [0,1] \qquad (3.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади. (3.28) $y(x)$ функцияга нисбатан Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасидир.

$K(x,t)$ функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$K(x,t) = \begin{cases} x\,(1-x)\left[(1-x)-(x-2t)^2-2(1-t)^2\right], & x \geq t; \\ -x\,(1-x)\left[(x-2t)^2+2(1-t)^2\right]+ & \\ +x\left[(1-x)^2-t\right], & x < t. \end{cases}$$

Бундан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $\sup|K(x,t)| < 6$. У ҳолда $(1/7) < (1/\sup|K(x,t)|)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу тенгсизликни, $K(x,t)$ функциянинг бўлакли узлуксиз ва чегараланганлигини ҳамда x^3+1 - узлуксиз функция эканлигини эътиборга олсак, 2.1-§ да келтирилган Фредгольм альтернативасига асосан (3.28) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона эканлиги келиб чиқади. (3.28) интеграл тенгламанинг ечими икки марта узлуксиз дифференциалланувчилиги ва 3.3-масаланинг ҳам ечими бўлиши 3.1-масаладагидек исботланади.

2-усул. Бу усулни *Грин функциялари усули* деб аталади. Уни берилган тенгламанинг бирор хусусий ҳоли учун берилган чегаравий шартлар билан қўйилган чегаравий масаланинг Грин функцияси мавжуд бўлган ҳолда қўллаш мумкин. Бу ерда берилган тенгламанинг хусусий ҳоли бўлган $y''(x) = 0$ тенглама учун (3.26) шартлар билан қўйилган масаланинг Грин функциясидан фойдаланиш мумкин. Бу функция

$$G(x,t) = \begin{cases} x\,(t-1), & x \leq t; \\ (x-1)\,t, & x \geq t \end{cases}$$

кўринишга эга бўлиб, $G(x,0) = G(x,1) = 0$ тенгликлар ўринлидир (1.4 параграфдаги 2-мисолга қаранг).

$\{(3.25),(3.26)\}$ масалани $z(x) = y(x) - x - 1$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли чегаравий шартли қуйидаги

$$z''(x) + \frac{1}{7}x^2 z'(x) + \frac{3}{7}xz(x) +$$

$$+\frac{12}{7}\int_0^1 (x-t)^2 z(t)dt = -\frac{1}{7}(22x^2 - 59x + 7) \tag{3.29}$$

$$z(0) = 0, \qquad z(1) = 0 \tag{3.30}$$

масалага келтириб оламиз. (3.29) тенгламани

$$z''(x) = f(x) \tag{3.31}$$

кўринишда ёзиб оламиз ва $\{(3.30),(3.31)\}$ масалани қараймиз, бу ерда

$$f(x) = -\frac{1}{7}\left(22x^2 - 59x + 7\right) -$$

$$-\frac{1}{7}x^2 z'(x) - \frac{3}{7}xz(x) - \frac{12}{7}\int_0^1 (x-t)^2 z(t)\,dt.$$

Агар вақтинча $f(x)$ ни маълум функция деб фараз қилсак, $\{(3.30),(3.31)\}$ масаланинг ечими

$$z(x) = \int_0^1 G(x,t)\,f(t)\,dt$$

формула билан аниқланади. Бу тенгликка аввал $f(x)$ функциянинг, сўнгра эса $z(x)$ функциянинг ифодасини қўйсак,

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^1 G(x,t)\left[t^2 y'(t) + 3y(t) + 12\int_0^1 (t-\xi)^2 y(\xi)\,d\xi\right] dt =$$

$$= 1 + 2x - x^3 \tag{3.32}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердаги $y'(t)$ иштирок этган ҳадни бўлаклаб интеграллаб ҳамда такрорий интеграл иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини алмаштариб, $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан ушбу

$$y(x) + \frac{1}{7}\int_0^1 K_1(x,t)y\,(t)\,dt = 1 + 2x + -x^3 \qquad (3.33)$$

кўринишдаги интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$K_1\,(x,t) = (3-2t)\,G(x,t) - t^2G'_t(x,t) + 12\int_0^1 G(x,\xi)(\xi-t)^2d\xi.$$

(3.33)-иккинчи турдаги Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, {(3.25),(3.26)} масалага (ечимга эга бўлиш маъносида) эквивалентдир. Унинг ягона ечими мавжудлиги худди 1-усулдагидек тадқиқ қилинади.

(3.25) тенгламадаги $[0,1]$ оралиқ бўйича интеграл ўрнига $[0,x]$ оралиқ бўйича интеграл иштирок этган ҳолда ҳам 3.3-масала юқорида қўлланилган икки усул билан ўрганилиши мумкин. Қаралаётган тенгламанинг интегралли қисми махсус кўринишларга эга бўлган ҳолларда масалани ечишга бошқа усулларни ҳам қўллаш мумкин.

3.5-§. Каср тартибли дифференциал оператор қатнашган интегро-дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар

Бу параграфда берилган интегро-дифференциал тенгламанинг таркибида каср тартибли дифференциал оператор иштирок этган ҳолда чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва уларнинг ечиш усуллари билан танишамиз. Аслида бундай тенгламалар *каср тартибли дифференциал тенгламалар* деб аталувчи тенгламаларнинг хусусий ҳолидир.

3.4-масала.

$$y''\,(x) + p_1\,(x)\,y'\,(x) + p_2\,(x)\,y\,(x) +$$

$$+p_3(x)\, D^{\alpha}_{ax}\omega(x)\, y(x) = f(x)\,, \qquad x \in (a,b) \tag{3.34}$$

тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва

$$y(a) = k_1, \qquad y(b) = k_2 \tag{3.35}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда α, a, b, k_1, k_2 берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $0 < \alpha < 1$, $a < b$; $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ лар эса $[a,b]$ ораликда аниқланган берилган функциялар бўлиб, $p_3(x) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$; D^{α}_{ax} - (3.7) кўринишдаги каср тартибли дифференциал оператор. (3.34) кўринишдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда D^{α}_{ax} каср тартибли дифференциал операторлар учун экстремум принципидан фойдаланишга тўғри келади.

3.3-лемма. *Агар $\omega(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $p_2(x) \leq 0$, $p_3(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ тенгсизликлар ўринли, $\omega(x)$ эса $\gamma\,(> \alpha)$ тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи камаймайдиган мусбат функция бўлса, у ҳолда*

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) + p_3(x)\, D^{\alpha}_{ax}\omega(x)\, y(x) = 0 \tag{3.36}$$

интегро-дифференциал тенгламанинг ечими (a,b) оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, яъни (3.36) тенгламанинг ечими $x_0 \in (a,b)$ нуқтада мусбат максимум (манфий минимум) га эга бўлсин дейлик. У ҳолда

$$y''(x_0) \leq 0\,(\geq 0)\,, \qquad y'(x_0) = 0, \qquad y(x_0) > 0\,(< 0)\,,$$

$$D^{\alpha}_{ax}\omega(x)\, y(x)\big|_{x=x_0} > 0\,(< 0)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Буларни эътиборга олсак,

$$[y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) + p_3(x)D^{\alpha}_{ax}\omega(x)y(x)]|_{x=x_0} < 0(> 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (3.36) тенгликка зид. Демак, фаразимиз нотўғри. Лемма исботланди.

3.3-теорема. *Агар 3.3-лемма шартлари бажарилган бўлса, $\{(3.34),(3.35)\}$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун (3.36) тенгламанинг

$$y(a) = 0, \qquad y(b) = 0 \tag{3.37}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими фақат $y(x) \equiv 0$ эканлигини исботлаш етарли. Тескаридан фараз қилайлик, яъни $\{(3.36),(3.37)\}$ масала қандайдир $y_0(x) \not\equiv 0$ $x \in [a,b]$ ечимга эга бўлсин. У холда, $y_0(x) \in C[a,b]$ бўлгани учун Вейерштрасс теоремасига асосан, $[a,b]$ оралиқда шундай x_0 сон мавжуд бўладики, $\sup\limits_{[a,b]}|y_0(x)| = |y_0(x_0)| > 0$ муносабат ўринли бўлади. (3.37) га асосан $x_0 \neq a$ ва $x_0 \neq b$. Унда $a < x_0 < b$ бўлади. Демак, x_0 нуктада $y(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эришади. 3.3-леммага асосан эса буни бўлиши мумкин эмас.Бу қарама-қаршилик фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади.Демак, $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$. 3.3-теорема исбот бўлди.

$\{(3.34),(3.35)\}$ масаланинг ечими мавжудлигини исботлашга ўтамиз. Шу мақсадда (3.34) тенгламани $[a,x]$ оралиқ буйича интеграллаймиз ва

$$y'(x) = \frac{d}{dx}y(x), \quad D_{ax}^{\alpha}\omega(x)y(x) = \frac{d}{dx}D_{ax}^{\alpha-1}\omega(x)y(x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}\omega(t)y(t)\,dt$$

лар иштирок этган хадларни бўлаклаб интеграллаймиз. Сўнгра $y(a) = k_1$ эканлигини эътиборга олиб ва ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$y'(x) + p_1(x)y(x) + \int\limits_a^x \Big\{p_2(t) - p'_1(t) + \frac{\omega(t)}{\Gamma(1-\alpha)}\,[p_3(x)(x-t)^{-\alpha} -$$

$$-\int_t^x p'_3(z)(z-t)^{-\alpha}dz\Big]\Big\}\,y(t)dt = \int_a^x f(t)dt + y'(a) + k_1p_1(a),$$

бу ерда $y'(a)$ - номаълум сон.

Бу тенгликни яна $[a,x]$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$y\left(x\right)+\int_a^x \Big\{p_1(t)+\left[p_2(t)-p_1'(t)\right](x-t)+$$

$$+\frac{\omega\left(t\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\int_t^x p_3\left(z\right)\left(z-t\right)^{-\alpha}\left(1+x-z\right)dz\Big\}y\left(t\right)dt=$$

$$=\int_a^x (x-t)f(t)dt + y'(a)(x-a) + k_1p_1(a)(x-a) + k_1. \qquad (3.38)$$

(3.38) тенгликда $x=b$ деб ва $y\left(b\right)=k_2$ эканлигини ҳисобга олсак, номаълум $y'(a)$ ни қуйидаги кўринишда топамиз:

$$y'\left(a\right)=\Bigg[k_2-k_1-\int_a^b \{p_1\left(t\right)+\left[p_2\left(t\right)-p_1'\left(t\right)\right]\left(b-t\right)+$$

$$+\frac{\omega\left(t\right)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b p_3\left(\xi\right)\left(\xi-t\right)^{-\alpha}\left(1+b-\xi\right)d\xi\Big\}\,y\left(t\right)dt+$$

$$+\int_a^b \left(b-t\right)f\left(t\right)dt\Bigg]\left(b-a\right)^{-1}-k_1p_1\left(a\right).$$

$y'(a)$ нинг бу ифодасини (3.38) тенгликка қўйиб, уни

$$y\left(x\right)+\int_a^b K_1\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f_1\left(x\right) \qquad (3.39)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $K_1(x,t)$-$\{(x,\, t) : a \le x \le b,$ $a \le t \le b\}$ тўртбурчакда чегараланган ва бўлакли узлуксиз бўлган маълум функция, $f_1(x)$ эса $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган маълум функция.

(3.39) $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи турдаги Фредгольм интеграл тенгламасидир. Агар $\{(3.36),(3.37)\}$ бир жинсли масалани қарасак,

$$y(x) + \int_a^b K_1(x,t)\, y(t)\, dt = 0 \tag{3.40}$$

кўринишдаги бир жинсли интеграл тенгламага эга бўламиз. $\{(3.36),(3.37)\}$ масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун (3.40) тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан (3.39) тенглама ягона ечимга эга бўлади. Агар $f(x) \in C[a,b]$, $p_1(x) \in C^1[a,b]$, $p_2(x)$, $p_3(x) \in C^2[a,b]$ бўлса, (3.39) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C^2[a,b]$ бўлади. У ҳолда, $\{(3.34),(3.35)\}$ масала ва (3.39) тенглама эквивалент бўлганлиги учун, (3.39) тенгламанинг ечими $\{(3.36),(3.37)\}$ масаланиг ҳам ечими бўлади. 3.4-масала тўла ҳал бўлди.

3.6-§. Каср тартибли дифференциал оператор қатнашган интегро-дифференциал тенгламалар учун Бицадзе - Самарский масалалари

Бу мавзу билан мисоллар ёрдамида танишамиз.

3.5-масала. (3.34) *тенгламанинг* $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$y(a) = k_1, \qquad y(b) = qy(\xi) + k_2, \tag{3.41}$$

бу ерда k_1, k_2, q, ξ, берилган сонлар бўлиб, $\xi \in (a,b)$.

Эслатиб ўтамизки, $q = 0$ да бу масаладан аввалги мавзудаги 3.4-масала келиб чиқади. Агар $q \neq 0$ бўлса, (3.41) шартларнинг иккинчиси номаълум функциянинг $[a, b]$ оралиқнинг четки $x = b$ ва ички $x = \xi$ нуқталаридаги қийматлари орасидаги муносабатни ифодалайди, демак, у Бицадзе-Самарский шартидир.

3.4-теорема. *Агар 3.3-лемма шартлари бажарилган ва* $|q| \leqslant 1$ *бўлса, 3.5-масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун 3.5-масалага мос бир жинсли масала ечимини, яъни (3.36) тенгламанинг

$$y(a) = 0, \qquad y(b) = qy(\xi) \tag{3.42}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими фақат $y(x) \equiv 0$ бўлишини исботлаш етарли. Тескаридан фараз қилайлик, яъни $\{(3.36),(3.42)\}$ масала $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$ ечимга эга бўлсин. 3.3-леммага асосан, $y_0(x)$ функция (a, b) оралиқда мусбат максимумга ва манфий минимумга эришмайди. Буни эътиборга олсак, Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{[a,b]} |y_0(x)| > 0$ бўлиб, у $[a, b]$ оралиқнинг четки нуқталарида эришилади. $y(a) = 0$ бўлгани учун $\sup\limits_{[a,b]} |y_0(x)|$ қиймат $x = b$ нуқтада эришилади. Демак, $\forall\xi \in [a, b)$ учун $|y(\xi)| < |y(b)|$ тенгсизлик ўринли бўлади. Буни ва $|q| \leqslant 1$ тенгсизликни эътиборга олсак, (3.42) шартларнинг иккинчисидан $|y(b)| = |qy(\xi)| < |y(b)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Бу қарама-қаршилик $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$ деган фаразимиз нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Бундан 3.4-теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

3.5-теорема. *Агар 3.3-лемма шартлари бажарилган ва*

$$f(x) \in C[a, b],\ p_1(x) \in C^1[a, b],\ p_2(x), p_3(x) \in C^2[a, b] \tag{3.43}$$

бўлса, 3.5-масала ягона ечимга эга бўлади.

Исбот. 3.5-масаланинг $y(x)$ ечими мавжуд деб фараз қилайлик. У ҳолда (3.34) айният ўринли бўлади.$y(a) = k_1$ шартни эътиборга олиб, (3.34) айниятни $[a, x]$ ораликда икки марта интеграллаб, (3.38) тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x) = \int_a^b K_2(x,t)\, y(t)\, dt + f_2(x) + y'(a)(x-a), \tag{3.44}$$

бу ерда $K_2(x, t)$ ва $f_2(x)$-маълум функциялар бўлиб, (3.39) тенгламадаги $K_1(x,t)$ ва $f_2(x)$ функциялар каби хоссаларга эга.

(3.44) тенгликдан $x = b$ ва $x = \xi$ деб, $y(b)$ ва $y(\xi)$ ни топамиз:

$$y(b) = \int_a^b K_2(b,t)\, y(t)\, dt + f_2(b) + y'(a)(b-a), \tag{3.45}$$

$$y(\xi) = \int_a^\xi K_2(\xi,t)\, y(t)\, dt + f_2(\xi) + y'(a)(\xi-a).$$

Буларни (3.41) шартларнинг иккинчисига қўямиз:

$$[b-a-q(\xi-a)]y'(a) =$$

$$= k_2 - \int_a^b K_2(b,t)y(t)dt + q\int_a^\xi K_2(\xi,t)y(t)dt - f_2(b) + qf_2(\xi).$$

$b - a - q(\xi - a) \neq 0$ бўлганлиги учун бу тенгликдан $y'(a)$ бир қийматли топилади. Топилган $y'(a)$ ни (3.44) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг, $y(x)$ га нисбатан Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасига эга бўламиз. Ҳосил бўлган интеграл тенглама 3.5-масалага эквивалент бўлганлиги учун унинг бир қийматли ва қўшимча шартларсиз ечимга эга бўлиши 3.5-масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади. (3.43) шартлар ҳосил бўлган интеграл тенгламанинг ечими $C^2[0,1]$ $C^2[0,1]$ синфга тегишли бўлишини гаъминлайди.

1-изоҳ. 3.5-масала (3.41) шартларнинг иккинчиси

$$y(b) = q_1 y(\xi_1) + q_2 y(\xi_2) + \ldots + q_n y(\xi_n)$$

шарт билан алмаштирилганда ҳам юқоридагидек ўрганилади, бу ерда q_j, ξ_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – берилган сонлар бўлиб, $\xi_j \in (a,b)$, $j = \overline{1,n}$ ва $\sum\limits_{j=1}^{n} |q_j| \leqslant 1$.

2-изоҳ. 3.4- ва 3.5- параграфларда ўрганилган масалаларда (3.34) тенглама ўрнига қуйидаги тенгламаларни

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) + p_3(x)\, D_{xb}^{\beta}\gamma(x)\, y(x) = f(x),$$

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) +$$
$$+ p_3(x)\, D_{ax}^{\alpha}\omega(x)\, y(x) + p_4(x)\, D_{xb}^{\beta}\gamma(x)\, y(x) = f(x)$$

ҳам олиш мумкин, бу ерда $p_j(x)$ $\left(j = \overline{1,4}\right)$, $\omega(x)$, $\gamma(x)$ - берилган функциялар, $\alpha, \beta \in (0,1)$ - берилган ҳақиқий сонлар.

3.7-§. Каср тартибли дифференциал оператор иштирок этган интегро-дифференциал тенгламалар учун интеграл шартли масалалар

Бу мавзуни ҳам мисоллар ёрдамида баён қиламиз.

1. Аввал иккинчи тур интеграл шартли масалани қараймиз.

3.6-масала. (3.34) *тенгламанинг* $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$y(a) = k_1, \qquad y(b) = q\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(x)\,dx + k_2, \tag{3.46}$$

бу ерда k_1, k_2, q, α, β -берилган сонлар бўлиб,$a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$.

(3.46) дан кўриниб турибдики $q = 0$ да 3.6-масаладан 3.4-масала келиб чиқади. Агар $0 < |q| \leqslant 1$ ва $a < \alpha < \beta < b$ бўлса, у ҳолда (3.46) шартларнинг иккинчисини ундаги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қилиб, $y(b) = qy(\xi) + k_2$ кўринишда ёзиб олиш мумкин бўлади, бу ерда ξ - (a, b) оралиқдаги қандайдир тайинланган сон. Демак, бу ҳолда, 3.6-масала 3.5-масалага келади ва аввалги параграфдагидек ўрганилади. $0 < |q| < 1$ ва $[\alpha, \beta] = [a, b]$ бўлган ҳолда ҳам 3.6-масала 3.5-масалага келтириб ўрганилиши мумкин.

Юқоридагиларни эътиборга олган ҳолда 3.6-масалани $q = 1$, $\alpha = a$, $\beta = b$ бўлган ҳолда, яъни (3.46) шартлар

$$y(a) = k_1, \qquad y(b) = \int_a^b y(x)\,dx + k_2 \tag{3.47}$$

кўринишга эга бўлган ҳолда ўрганамиз.

Бу масаланинг ечими мавжуд ва ягоналигини кўрсатиш учун худди 3.4-масаладаги каби, (3.34) тенгламани $[a, x]$ оралиқда икки марта интеграллаб ва $y(0) = k_1$ шартни эътиборга олиб, (3.44) ва (3.45) тенгликларга эга бўламиз. (3.44) дан қуйидаги тенгликни топамиз:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \int_a^b dx \int_a^b K_2(x,t)y(t)dt + \int_a^b f_2(x)dx + \frac{1}{2}y'(a)(b-a)^2.$$

Буни ва (3.45) ни (3.47) шартларнинг иккинчисига қўйиб,

$$\frac{1}{2}y'(a)(b-a)(2-b+a) =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K_2(x,t)\,dx - K_2(b,t)\right] y(t)dt - f_2(b) + \int_a^b f_2(x)\,dx + k_2$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $b - a \neq 2$ бўлса $y'(a)$ номаълум сон охирги тенгликдан бир қийматли топилади. Уни (3.44) га қўйиб, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг $y(x)$ га нисбатан (3.39) кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз. Агар берилганларга қўйилган баъзи шартларда $|K_1(x,t)| < 1$ бўлса, у ҳолда бу тенглама, демак, 3.6-масала ягона ечимга эга бўлади.

Изоҳ. 3.6-масалани (3.46) шартларнинг иккинчиси

$$y(b) = q_1 \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} y(x)\,dx + q_2 \int\limits_{\alpha_2}^{\beta 2} y(x)\,dx + ...+ q_n \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} y(x)\,dx + k_2$$

шарт билан алмаштирилган ҳолда ҳам ўрганиш мумкин, бу ерда k_2, q_j, α_j, β_j, $j = \overline{1,2}$- берилган сонлар бўлиб, $[\alpha_j, \beta_j] \in [a,b]$, $j = \overline{1,2}$; $[\alpha_j, \beta_j] \cap [\alpha_m, \beta_m] = \varnothing$, $j, m = \overline{1,2}$, $j \neq m$.

2. Биринчи тур интеграл шартли масалани қарайлик.

3.7-масала. (3.34) *тенгламанинг* $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$y(a) = k_1, \qquad \int\limits_a^b y(x)\,dx = k_2, \tag{3.48}$$

бу ерда k_1 ва k_2 - берилган сонлар.

3.6-теорема. *Агар 3.3-лемма шартлари бажарилган бўлса, 3.7-масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бунинг учун 3.7-масалага мос бир жинсли масала, яъни (3.34) тенгламанинг

$$y(a) = 0, \qquad \int\limits_a^b y(x)\,dx = 0 \tag{3.49}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала фақат тривиал ечимга эга эканлигини исботлаш етарли.

Агар $y(x) \geqslant 0 \, (\leqslant 0)$, $x \in [a, b]$ деб фараз қилсак, (3.49) шартларнинг иккинчисидан бирданига $y(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$ келиб чиқади. Акс ҳолда, $y(x) \in C[a. b]$ бўлгани учун (3.39) даги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ қилиб, шундай $\xi_1 \in (a, b]$ нуқтага эга бўламизки, $y(\xi_1) = 0$ тенглик ўринли бўлади. Агар $\xi_1 = b$ бўлса, у ҳолда $\{(3.36). (3.49)\}$ масала 3.4-масалага мос бир жинсли масала бўлиб, у фақат $y(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$ ечимга эга. Фараз қилайлик, $\xi_1 \neq b$, яъни $a < \xi_1 < b$. Бунда $\{(3.36), y(a) = 0, \, y(\xi_1) = 0\}$ масалага эга бўламиз. $\{(3.36), (3.37)\}$ масалада исботланганига асосан бу масала $[a, \xi_1]$ оралиқда фақат тривиал ечимга эга. Буни эътиборга олсак, $\{(3.36), (3.49)\}$ масаладан қуйидаги масала келиб чиқади:

$$\left.\begin{array}{ll} y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) + & \\ +p_3(x)\, D^{\alpha}_{\xi_1 x}\omega(x)\, y(x) = 0, & x \in (\xi_1, b), \\ y(\xi_1) = 0, & \displaystyle\int\limits_{\xi_1}^{b} y(x)\, dx = 0. \end{array}\right\} \qquad (3.50)$$

Бу ерда ҳам $\{(3.36),(3.49)\}$ масалада юритилган мулоҳазаларни такрорлаб, ёки $y(x) \equiv 0$, $x \in [\xi_1, b]$ эканлигини ёки шундай $\xi_2 \in (\xi_1, b]$ нукта мавжудки, $y(\xi_2) = 0$ бўлишини топамиз. Охирги ҳолда (3.50) масаладан

$$\left.\begin{array}{ll} y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) + & \\ +p_3(x)\, D^{\alpha}_{\xi_2 x}\omega(x)\, y(x) = 0, & x \in (\xi_2, b), \\ y(\xi_1) = 0, & \displaystyle\int\limits_{\xi_2}^{b} y(x)\, dx = 0 \end{array}\right\}$$

масала келиб чиқади. Бу масалага юқорида қўлланилган усулни кетма-кет қўллаб, n - қадамда ёки $y(x) \equiv 0 \; x \in [a, b]$ эканлигини ёки (a, b) да шундай $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots < \xi_n$ нуқталар мавжудки, $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{n-1}, \xi_n]$ оралиқларда $y(x) \equiv 0$ эканлигини, яъни $y(x) \equiv 0$, $x \in [a, \xi_n]$ эканлигини топамиз. Охирги ҳолда бу жараённи чексиз давом эттириб, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = b$ ва $y(x) \in C[a, b]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$ деган тасдиққа келамиз. Теорема исбот бўлди.

3.7-теорема. *Агар 3.3-лемма шартлари ва (3.43) шартлар бажарилган бўлса, 3.7-масаланинг ягона ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш ҳам 3.4-масала ечими мавжудлигини исботлашга ўхшаш бўлиб, берилган тенгламани $[a, x]$ оралиқда икки марта интеграллаб ва $y(a) = k_1$ шартни эътиборга олиб, (3.44) тенгликка келамиз. Бу тенгликни $[a, b]$ оралиқда интеграллаб, (3.48) шартларнинг иккинчисига асосан

$$\int_a^b y(t)\left\{\int_a^b K_2(x,t)dx\right\}dt + \int_a^b f_2(x)dx + \frac{1}{2}y'(a)(b-a)^2 = k_2$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан $y'(a)$ ни топиб, уни (3.44) тенгликка қўйиб, баъзи ҳисоблашлардан сўнг, $y(x)$ функцияга нисбатан Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасига эга бўламиз. Ҳосил бўлган интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги, демак, 3.7-масала ечимининг мавжудлиги 3.4-масала охирида юритилган мулоҳазаларни такрорлаб исботланади.

Эслатиб ўтамизки, (3.34) тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларида (3.38) тенгламадан $y(x)$ функция [$y'(a)$ ни маълум деб ҳисоблаймиз] аниқ формула билан топилади. Бунда қўйилган масаланинг тадқиқоти бироз енгиллашади. Қуйида шунга доир икки масалани кўриб ўтамиз.

3.8-масала.

$$y'' - \lambda D_{0x}^{\alpha} y(x) = 6x, \qquad 0 < x < 1 \tag{3.51}$$

тенгламанинг $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва*

$$y(0) = 1, \qquad \int_0^1 y(x)\,dx = 2 \tag{3.52}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда α ва λ берилган сонлар бўлиб, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$.

3.8-масала 3.7-масаланинг хусусий ҳолидир. $\lambda > 0$ бўлганлиги учун унинг ечими биттадан ортиқ эмаслиги 3.6-теоремадан келиб чиқади. Шунинг учун масала ечимининг мавжудлигини исботлаш билан шуғулланамиз.

$y(0) = 1$ чегаравий шартни ва

$$D_{0x}^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt$$

тенгликни эътиборга олиб, (3.51) тенгламани $[0, x]$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$y'(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt = 3x^2 + y'(0),$$

бу ерда $y'(0)$ - хозирча номаълум сон.

Бу тенгламани яна $[0, x]$ оралиқда интеграллаб ва ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$y(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} y(t) dt = x^3 + 1 + y'(0)x \qquad (3.53)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Агар $\beta = 2 - \alpha$ белгилаш киритсак, (3.53) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} y(t) dt = x^3 + 1 + y'(0)x.$$

$\beta > 0$ бўлганлиги учун бу тенглама ягона ечимга эга [13] ва у

$$y(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\beta \left[\lambda (x-t)^\beta\right] \cdot \left[t^3 + 1 + y'(0)t\right] dt \qquad (3.54)$$

кўринишда аниқланади, бу ерда $E_\alpha(z)$- Миттаг-Леффлер функцияси:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + 1).$$

(3.54) тенгликни $[0, 1]$ оралиқ бўйича интеграллаб ва (3.52) шартларнинг иккинчисини инобатга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\int_0^1 E_\beta \left[\lambda(1-t)^\beta\right] \left[t^3 + 1 + y'(0)\, t\right] dt = 2. \tag{3.55}$$

$\lambda > 0$ бўлгани учун $\int_0^1 t E_\beta \left[\lambda(1-t)^\beta\right] dt > 0$. Буни эътиборга олсак, охирги тенгликдан $y'(0)$ бир қийматли топилади:

$$y'(0) = \frac{2 - \int_0^1 E_\beta \left[\lambda(1-t)^\beta\right] (t^3 + 1)\, dt}{\int_0^1 t\, E_\beta \left[\lambda(1-t)^\beta\right] dt}.$$

Буни (3.54) га қўйиб, 3.8-масаланинг ечимига эга бўламиз.

Эслатиб ўтамизки, бу масала ечимининг ягоналигини алоҳида исботлаш зарур эмас. Чунки бу ерда ечимнинг ягоналиги (3.53) ва (3.55) тенгламалар ечимининг ягоналигидан бевосита келиб чиқади. Қолаверса, бу масала ечимининг мавжудлигини исботлашда ечимнинг ягоналигидан фойдаланишга эҳтиёж туғулмайди.

3.9-масала. *(3.51) тенгламанинг* $[0, 1]$ *оралиқда узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = \int_0^1 y(x)\, dx + 2, \tag{3.56}$$

бу ерда α ва λ - берилган сонлар бўлиб, $1 < \alpha < 2$, $\lambda > 0$.

Ечиш. $1 < \alpha < 2$ бўлганда D_{0x}^{α} оператор

$$D_{0x}^{\alpha} y\,(x) = \frac{1}{\Gamma(2-a)} \frac{d^2}{dx^2} \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, y\,(t)\, dt$$

кўринишга эга бўлади. Бу ердаги интегрални бўлаклаб интеграллаб, $y\,(0) = 1$ шартни эътиборга олсак, $D_{0x}^{\alpha} y\,(x)$ ни

$$D_{0x}^{\alpha} y\,(x) = \frac{1}{\Gamma(2-a)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, y'\,(t)\, dt + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-a)}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади. Буни (3.51) тенгламага қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгламани $[0, x]$ оралиқ бўйича интеграллисак, $y'\,(x)$ га нисбатан

$$y'\,(x) - \frac{\lambda}{\Gamma\,(2-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha} y'\,(t)\, dt =$$

$$= 3x^2 + y'\,(0) + \frac{\lambda x^{1-\alpha}}{\Gamma\,(2-\alpha)} \qquad (3.57)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу-(3.53) кўринишдаги тенглама бўлиб, унинг ечими (3.54) га асосан

$$y'\,(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x E_{\beta}\left[\lambda\,(x-t)^{\beta}\right] \left[3t^2 + y'(0) + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right] dt \qquad (3.58)$$

кўринишда аниқланади. Буни яна $[0, x]$ оралиқ бўйича интеграллаб ва $y(0) = 1$ эканлигини ҳамда интеграл остидаги функциялар интегралланувчи эканлигини эътиборга олсак, $y(x)$ қуйидагича топилади:

$$y\,(x) = \int\limits_0^x E_{\beta}\left[\lambda(x-t)^{\beta}\right] \left[3t^2 + y'(0) + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right] dt + 1. \qquad (3.59)$$

(3.59) тенгликдан келиб чиқадики,

$$y(1) = \int_0^1 E_\beta\left[\lambda(1-t)^\beta\right]\left[3t^2 + y'(0) + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right]dt + 1,$$

$$\int_0^1 y(x)\,dx = y'(0)\int_0^1\left\{\int_0^x E_\beta\left[\lambda(x-t)^\beta\right]dt\right\}dx +$$

$$+\int_0^1\left[3t^2 + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right]\left\{\int_t^1 E_\beta\left[\lambda(x-t)^\beta\right]dx\right\}dt + 1.$$

Буларни (3.56) шартларнинг иккинчисига қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$y'(0)\int_0^1\left\{E_\beta\left[\lambda(1-x)^\beta\right] - \int_0^x E_\beta\left[\lambda(x-t)^\beta\right]dt\right\}dx = 2+$$

$$\int_0^1\left[3t^2 + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right]\left\{E_\beta\left[\lambda(1-t)^\beta\right] - \int_t^1 E_\beta\left[\lambda(x-t)^\beta\right]dx\right\}dt. \tag{3.60}$$

$\lambda > 0$, $\beta > 0$, $x \in [0,1]$ эканлигини эътиборга олиб ва $E_\beta\left(\lambda z^\beta\right)$ функциянинг ёйилмасидан фойдаланиб, кўрсатиш мумкинки, $y'(0)$ нинг коэффициенти нолдан фаркли, яъни

$$\int_0^1\left\{E_\beta\left[\lambda(1-x)^\beta\right] - \int_0^x E_\beta\left[\lambda(x-t)^\beta\right]dt\right\}dx \neq 0.$$

Шунинг учун (3.60) тенгликдан $y'(0)$ номаълум бир қийматли топилади. Бу ердан топилган $y'(0)$ ни (3.59) га қўйиб, 3.9-масала ечимига эга бўламиз. Бу ечимнинг ягоналиги (3.57), (3.58) ва (3.60) тенгламалар ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

Изоҳ. 3.9-масала ечимининг ягоналигини 3.3-леммадан фойдаланиб исботлаб бўлмайди. Чунки бу ерда $1 < \alpha < 2$ бўлиб, D_{0x}^{α} операторга 3.2-леммани қўллаб бўлмайди.

3.8-§. Каср тартибли дифференциал оператор қатнашган интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли бир масала ҳақида

Ушбу дифференциал тенгламани (a, b) оралиқда қарайлик:

$$y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)+\sum_{k=1}^{n} e_k(x)D_{ax}^{\alpha_k} f_k(x)y(x)=0, \quad (3.61)$$

бу ерда a, b, a_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a<b$, $0<\alpha_k<1$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$; $f_k(x)$ ва $e_k(x)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$-$[a,b]$ оралиқда аниқланган функциялар бўлиб, $e_k(x)$ ва $f_k(x)$ функциялар k нинг ҳеч бўлмаса битта қиймати учун айнан нолга тенг эмас.

$0<\alpha_k<1$ бўлгани учун $D_{0x}^{\alpha_k}$ - каср тартибли дифференциал оператор бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланади:

$$D_{0x}^{\alpha_k} f_k\left(x\right)y\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(1-a_k)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \left(x-t\right)^{-\alpha_k} f_k\left(t\right)y\left(t\right)dt. \quad (3.62)$$

3.10-масала. *(3.61) тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$y\left(a\right)=k_1, \qquad y\left(b\right)=\sum_{s=1}^{m} q_s\int\limits_{\alpha_s}^{\beta_s} y\left(x\right)dx+k_2, \quad (3.63)$$

бу ерда k_1, k_2, α_s, β_s, q_s-берилган сонлар бўлиб, $a<\alpha_s<\beta_s<b$, $[\alpha_j,\beta_j]\cap[\alpha_s,\beta_s]=\varnothing$, $s,j=\overline{1,m}$; $s\neq j$.

3.4-лемма. *Агар* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $e_k(x)$, $f_k(x) \in C[a,b]$ *ва* $f_k(x) \in C^1(a,b)$, $k = \overline{1,n}$ *бўлиб,*

$$p_2(x) \leqslant 0, e_k(x) < 0, f_k(x) > 0, f_k'(x) \geqslant 0, x \in (a,b), k = \overline{1,n} \quad (3.64)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 3.10-масаланинг $k_1 = k_2 = 0$ *бўлгандаги ечими* (a,b) *оралиқда мусбат максимумга ва манфий минимумга эришмайди.*

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, яъни 3.10-масаланинг ечими $k_1 = k_2 = 0$ бўлганда $x = x_0 \in (a,b)$ нуқтада мусбат максимумга (манфий минимумга) эришсин. У ҳолда, $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи функцияларнинг, берилган $f_k(x)$ функциянинг ҳамда $D_{ax}^{\alpha_k}$ каср тартибли дифференциал операторнинг хоссаларига асосан

$$y''(x_0) \leqslant 0 (\geqslant 0), \quad y'(x_0) = 0, \sum_{k=1}^{n} \left[D_{ax}^{\alpha_k} f_k(x) y(x) \right] \Big|_{x=x_0} > 0 \,(< 0) .$$

муносабатлар ўринли бўлади. Буларни ва (3.64) тенгсизликларни эътиборга олсак,

$$y''(x_0) + p_1(x_0) y'(x_0) + p_2(x_0) y(x_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} e_k(x_0) \left[D_{ax}^{\alpha_k} f_k(x) y(x) \right] \Big|_{x=x_0} < 0 \;(> 0)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (3.61) тенгламага зиддир.

Демак, фаразимиз нотўғри. Лемманинг хулосаси тўғри.

3.10-теорема. *Агар 3.4-лемма шартлари бажарилган бўлиб,*

$$\sum_{s=1}^{m} |q_s| (\beta_s - \alpha_s) \leqslant 1 \quad (3.65)$$

тенгсизлик ҳам бажарилса, 3.10-масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Бунинг учун бир жинсли масала, яъни $k_1 = k_2 = 0$ бўлгандаги масала фақат тривиал ечимга эга бўлишини исботлаш етарли. Фараз қилайлик, бир жинсли масала $y_0(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $\sup\limits_{[a,b]} |y_0(x)| = |y_0(x_0)| > 0$, $x_0 \in [a, b]$. 3.4-леммага асосан $y_0(x)$ ечим (a, b) интервалда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди. Буни ва $y_0(a) = 0$ тенгликни эътиборга олсак, $x_0 = b$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\forall x \in [a, b)$ учун $|y_0(x)| < |y_0(b)|$ тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликни, (3.65) шартни ва $k_2 = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, (3.63) тенгликларнинг иккинчисидан

$$|y_0(b)| = \left| \sum_{s=1}^{m} q_s \int_{\alpha_s}^{\beta_s} y_0(x)\, dx \right| < |y_0(b)| \sum_{s=1}^{m} |q_s| (\beta_s - \alpha_s) \leqslant |y_0(b)|,$$

яъни $|y_0(b)| < |y_0(b)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Бу карама-қаршилик фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. 3.10-теорема исботланди.

3.11-теорема. *Агар 3.10-теорема шартлари ва қуйидаги шартлар бажарилса, 3.10-масала ягона ечимга эга бўлади:*

$$2(b-a) \neq \sum_{s=1}^{m} q_s (\beta_s - \alpha_s)(\beta_s + \alpha_s - 2a), \tag{3.66}$$

$$f_k(x), p_2(x) \in C^1[a, b];\ p_1(x), e_k(x) \in C^2[a, b],\ k = \overline{1, n}. \tag{3.67}$$

Исбот. (3.61) тенгламада x ни t га алмаштириб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликни t бўйича $[a, x]$ оралиқда интеграллаб ва $y(a) = k_1$ шартни ҳисобга олиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$y'(x) + p_1(x)\, y(x) + \int_a^x G_0(x, t)\, y(t)\, dt = p_1(a)\, k_1 + y'(a), \tag{3.68}$$

бу ерда $y'(a)$ - ҳозирча номаълум сон.

$$G_0(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\Gamma^{-1}(1-\alpha_k)f_k(t)\times$$

$$\times\left[e_k(x)(x-t)^{-\alpha_k}-\int_t^x e'_k(z)(z-t)^{-\alpha_k}dz\right]-p'_1(t)+p_2(t).$$

(3.68) да x ни ξ билан алмаштириб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликни ξ бўйича $[a,x]$ ораликда интеграллаймиз:

$$y(x)+\int_a^x G_1(x,\xi)y(\xi)d\xi=[p_1(a)k_1+y'(a)](x-a)+k_1, \quad (3.69)$$

бу ерда

$$G_1(x,\xi)=p_1(x)+\int_\xi^x G_0(t,\xi)dt.$$

(3.69) тенгликдан қуйдагиларни топамиз:

$$y(b)=-\int_a^b G_1(b,\xi)y(\xi)d\xi+[p_1(a)k_1+y'(a)](b-a)+k_1,$$

$$\int_{\alpha_s}^{\beta_s}y(x)dx=-\int_a^{\alpha_s}y(\xi)d\xi\int_{\alpha_s}^{\beta_s}G_1(x,\xi)dx-$$

$$-\int_{\alpha_s}^{\beta_s}y(\xi)d\xi\int_\xi^{\beta_s}G_1(x,\xi)dx+$$

$$+\frac{1}{2}[p_1(a)k_1+y'(a)](\beta_s-\alpha_s)(\beta_s+\alpha_s-2a)+k_1(\beta_s-\alpha_s).$$

Буларни (3.63) шартларнинг иккинчисига қўйиб ва $y'(a)$ нинг коэффициентларини йиғиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$y'(a)\left[b-a-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}q_s(\beta_s-\alpha_s)(\beta_s+\alpha_s-2a)\right]=$$

$$=k_2-k_1+k_1\sum_{s=1}^{m}q_s\left[\beta_s-\alpha_s+\frac{1}{2}p_1(a)(\beta_s-\alpha_s)(\beta_s+\alpha_s-2a)\right]-$$

$$-k_1p_1(a)(b-a)\int_a^b G_1(b,\xi)\,y(\xi)\,d\xi- \qquad (3.70)$$

$$-\sum_{s=1}^{m}q_s\left[\int_a^{\alpha_s}y(\xi)d\xi\int_{\alpha_s}^{\beta_s}G_1(x,\xi)\,dx+\int_{\alpha_s}^{\beta_s}y(\xi)\,d\xi\int_{\xi}^{\beta_s}G_1(x,\xi)\,dx\right].$$

(3.66) шартга асосан (3.70) тенгликда $y'(a)$ нинг коэффициенти нолдан фарқли. Демак, (3.70) дан $y'(a)$ бир қийматли топилади. $y'(a)$ нинг топилган қийматини (3.69) га қўйиб, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг, $y(x)$ га нисбатан Фредгольмнинг қуйидаги иккинчи тур интеграл тенгламасига эга бўламиз,

$$y(x)+\int_a^b G_2(x.\xi)\,y(\xi)\,d\xi=w(x), \qquad (3.71)$$

бу ерда $w(x)$ ва $G_2(x,\xi)$ - маълум функциялар бўлиб, $w(x)\in C[a,b]$, $G_2(x,\xi)$ эса $\{(x,\xi): a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant\xi\leqslant b\}$ соҳанинг $\xi=x$, $\xi=\alpha_k$, $\xi=\beta_k$, $k=\overline{1,n}$ тўғри чизиқлардан ташқаридаги нуқталарида узлуксиз, бу чизиқлардаги нуқталарида эса биринчи тур сакрашга эга.

(3.71) тенглама 3.10-масалага эквивалент бўлиб, бир жинсли масала ушбу

$$y(x) + \int_a^b G_2(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (3.72)$$

бир жинсли тенгламага мос келади. Бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун (3.72) бир жинсли тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан (3.71) бир жинсли бўлмаган тенглама ягона ечимга эга бўлади.

(3.67) шартларни эътиборга олиб, (3.69) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, унинг ечими $C[a,b] \cap C^2[a,b]$ синфга тегишли. Шунинг учун (3.71) интеграл тенгламанинг ечими 3.10-масаланинг ҳам ечими бўлади. 3.11-теорема исботланди.

Изоҳ. 3.10 масалани (3.61) тенглама ўрнига ушбу

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} e_k(x)\, D_{ax}^{\alpha_k} f_k(x)\, y(x) + \sum_{k=1}^{l} \tilde{e}_k(x)\, D_{bx}^{\tilde{\alpha}_k} \tilde{f}_k(x)\, y(x) = 0$$

тенглама олинганда ҳам ўрганиш мумкин, бу ерда $e_k(x)$, $f_k(x)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $\tilde{e}_k(x), \tilde{f}_k(x)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ - берилган функциялар, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_l$ лар эса $(0,1)$ ораликдан олинган ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

IV БОБ

СПЕКТРАЛ МАСАЛАЛАР

4.1-§. Спектрал масалалар ҳақида умумий тушунча

Қуйидаги чегаравий масалани қарайлик:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \tag{4.1}$$

бу ерда λ-сонли параметр.

Аниқки, (4.1) масала λ параметрнинг ихтиёрий қийматида тривиал $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ ечимга эга. Лекин λ параметрнинг баъзи қийматларида (4.1) масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши ҳам мумкин. Масалан, $\lambda = \pi^2$ бўлганда (4.1) масала $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ тривиал ечимдан ташқари тривиал бўлмаган $y_1(x) = \sin(\pi x)$ ечимга ҳам эгадир. Шунинг учун λ параметрнинг қандай қийматларида (4.1) масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади? деган савол туғилади. Буни текшириб кўрайлик. Бунда учта ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

1) $\lambda < 0$ бўлсин. Бу ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}, \tag{4.2}$$

бу ерда c_1 ва c_2 ихтиёрий ўзгармаслар.

Бу функцияни $y(0) = 0$ ва $y(1) = 0$ чегаравий шартларга бўйсундирсак, c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. $\lambda < 0$ бўлгани учун бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга. У ҳолда (4.2) формулага асосан (4.1) масала ҳам фақат $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ ечимга эга бўлади.

2) $\lambda = 0$ бўлсин. Бунда қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y(x) = c_1 + c_2x$ кўринишга эга бўлади. Бу ечимни чегаравий шартларга қўйсак, $c_1 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, яъни $c_1 = c_2 = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Демак, (4.1) масаланинг ечими $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$.

3) $\lambda > 0$ бўлсин. Бунда ўрганилаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \tag{4.3}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда c_1 ва c_2 ихтиёрий ўзгармаслар. (4.3) ни $y(0) = 0$ шартга қўйсак, $c_1 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $y(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Бу функцияни $y(1) = 0$ шартга бўйсундирсак,

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \tag{4.4}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$, яъни $\lambda \neq n^2\pi^2$, $n \in N$ бўлса, (4.4) тенгликдан $c_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\lambda \neq n^2\pi^2$, $n \in N$ бўлганда (4.1) масала фақат $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ ечимга эга.

Агар $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, яъни $\lambda = n^2\pi^2$, $n \in N$ бўлса, (4.4) тенглик $c_2 \neq 0$ бўлганда ҳам бажарилаверади. Шунинг учун бу ҳолда $c_2 \neq 0$ ва $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in N$ десак, (4.1) масаланинг $y_n(x) = c_2 \sin(n\pi x)$, $n \in N$ кўринишдаги тривиалмас ечимларига эга бўламиз, бу ердаги c_2 ўзгармас сон ҳар бир $n \in N$ учун ҳар хил танланиши мумкин.

Шундай қилиб, (4.1) масала λ параметрнинг фақатгина $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in N$ қийматларида $y_n(x) = a_n \sin(n\pi x)$, $n \in N$ кўринишдаги тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлар экан, бу ерда $a_n = const \neq 0$-ихтиёрий сон.

Энди бизга аниқланиш соҳаси $[a, b]$ оралиқ бўлган $y(x)$ функция ёрдамида тузилган

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x)$$

дифференциал ифода ва $y(x)$ функциянинг ҳамда унинг $(n-1)$ -тартибгача ҳосилаларининг $x=a$ ва $x=b$ нуқталардаги қийматлари ёрдамида тузилган

$$E_m[y] \equiv \alpha_0^{(m)} y(a) + \alpha_1^{(m)} y'(a) + \ldots + \alpha_{n-1}^{(m)} y^{(n-1)}(a) +$$

$$+\beta_0^{(m)} y(b) + \beta_1^{(m)} y'(b) + \ldots + \beta_{n-1}^{(m)} y^{(n-1)}(b), \qquad m=\overline{1,n}$$

кўринишдаги чизиқли боғлиқ бўлмаган n-та алгебраик ифода берилган бўлсин, бу ерда $p_j(x), j=\overline{0,n}$ - берилган функциялар, $\alpha_k^{(m)}$, $\beta_k^{(m)}$, $k=\overline{0,n-1}$, $m=\overline{1,n}$-берилган сонлар.

$\rho(x)$ - $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз функция, λ эса қандайдир сонли параметр бўлсин. У ҳолда, худди (4.1) масалага ўхшаб, қуйидагича масалани ҳам ўрганиш мумкин бўлади: *λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда*

$$L[y] = -\lambda\rho(x)y(x), \qquad x\in(a,b) \tag{А}$$

дифференциал тенгламанинг $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва

$$E_m[y]=0, \qquad m=\overline{1,n} \tag{Б}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.

Одатда бундай тарзда қўйилган масалалар *спектрал масалалар* деб аталади. λ параметрнинг $\{(\text{А})(\text{Б})\}$ масала тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлган қийматлари, бу масаланинг *хос қийматлари (сонлари)* деб, бу қийматларга мос тривиал бўлмаган ечимлар эса *хос функциялари* деб аталади.

Маълумки, (А) кўринишдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганишда чегаравий шартлар нафақат (Б) кўринишда, балки бошқа кўринишларда ҳам берилиши мумкин. Шунга мос равишда спектрал масалаларда чегаравий шартлар (Б) дан бошқачароқ берилиши ҳам мумкин.

Бу бобда турли кўринишдаги чегаравий шартлар ёрдамида қўйилган спектрал масалалар билан танишиб чиқамиз. Бунда юқорида киритилган тушунчаларни сақлаб қоламиз.

4.2-§. Штурм-Лиувилл масаласи

λ параметрнинг (4.1) масала тривиалмас ечимларга эга бўладиган қийматларини топиш ҳақидаги масала қуйида баён қилинадиган спектрал масаланинг содда бир хусусий ҳолидир.

Штурм-Лиувилл масаласи. *λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'(x)\right] + \left[\lambda\rho(x) + q(x)\right]y(x) = 0, \qquad 0 < x < l \tag{4.5}$$

дифференциал тенгламанинг

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \qquad \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0 \tag{4.6}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин, бу ерда $p(x), q(x), \rho(x)$-берилган функциялар, $l, \alpha, \beta, \gamma. \delta$ эса берилган сонлар бўлиб, $p(x) \geqslant p_0 = const > 0$, $\rho(x) \neq 0$, $x \in [0, l]$; $p(x) \in C^1[0, l]$ $\rho(x)$, $q(x) \in C[0, l]$; $l > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Бу масала λ параметрнинг ҳар қандай қийматида ҳам айнан нолдан фарқли, яъни тривиалмас ечимга эга бўлавермайди. λ параметрнинг $\{(4.5), (4.6)\}$ масала тривиалмас ечимларга эга бўлган қийматлари, 4.1-§ да номланганидек, масаланинг *хос қийматлари (сонлари)* деб, бу қийматларга мос тривиалмас ечимлар эса *хос функциялари* деб аталади.

$\{(4.5), (4.6)\}$ масала хос функциялари ва хос қийматларининг асосий хоссаларини кўриб ўтамиз.

1) *ҳар бир λ_k хос қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида $y_k(x)$ хос функция мос келади, яъни λ_k га иккита $y_k(x)$ ва $\widetilde{y_k}(x)$ хос функциялар мос келса, у ҳолда $y_k(x) = c\,\widetilde{y_k}(x)$ тенглик ўринли бўлади,* бунда c - ўзгармас сон.

Исбот. Фаразимизга асосан $y_k(x)$ ва $\widetilde{y_k}(x)$функциялар учун

$$\alpha y_k(0) + \beta {y'}_k(0) = 0,$$
$$\alpha \widetilde{y_k}(0) + \beta \widetilde{{y'}_k}(0) = 0$$

тенгликлар ўринли. Бу ерда $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ бўлгани учун (4.5) тенглама $y_k(x)$ ва $\widetilde{y_k}(x)$ ечимларининг Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} y_k & \widetilde{y_k} \\ {y'}_k & \widetilde{y_k} \end{vmatrix}$$

$x = 0$ нуқтада нолга тенг бўлади. Шунинг учун, $y_k(x)$ ва $\widetilde{y_k}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқдир.

Юқорида айтиб ўтилган c кўпайтувчини шундай танлаш мумкинки,

$$\int_0^1 \rho(x) y_k^2(x) dx = 1 \tag{4.7}$$

тенглик ўринли бўлади. Одатда бу шартни қаноатлантирувчи хос функциялар *нормалланган функция* дейилади.

2) *Турли хос қийматларга мос келувчи хос функциялар* $[0, l]$ *кесмада* $\rho(x)$ *вазн билан ортогонал бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x){y'}_k(x)\right] + \left[\lambda_k \rho(x) + q(x)\right] y_k(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x){y'}_m(x)\right] + \left[\lambda_m \rho(x) + q(x)\right] y_m(x) = 0.$$

Бу тенгликларнинг биринчисини $y_m(x)$ га, иккинчисини эса $y_k(x)$ га кўпайтириб, сўнгра ҳадлаб айирсак, қуйидагига эга бўламиз;

$$y_m \frac{d}{dx}\left[p(x){y'}_k(x)\right] - y_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x){y'}_m(x)\right] +$$
$$+(\lambda_k - \lambda_m)\rho(x) y_k(x) y_m(x) = 0,$$

яъни

$$(\lambda_k - \lambda_m)\rho(x)y_k(x)y_m(x) = \frac{d}{dx}p(x)\left[y_m(x)y'_k(x) - y_k(x)y'_m(x)\right].$$

Бу тенгликни x бўйича 0 дан l гача интеграллаймиз:

$$(\lambda_k - \lambda_m)\int\limits_0^l \rho(x)y_k(x)y_m(x)dx =$$

$$= p(x)\left[y_m(x)y'_k(x) - y_k(x)y'_m(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}. \qquad (4.8)$$

(4.6) чегаравий шартларга биноан

$$\begin{cases} \alpha\, y_m(0) + \beta y'_m(0) = 0, \\ \alpha\, y_k(0) + \beta\, y'_k(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\, y_m(l) + \delta\, y'_m(l) = 0, \\ \gamma\, y_k(l) + \delta\, y'_k(l) = 0 \end{cases}$$

тенгликлар ўринли. $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ бўлгани учун бу тенгликлардан $y_m(0)\,y'_k(0) - y_k(0)\,y'_m(0) = 0$, $y_m(l)\,y'_k(l) - -y_k(l)\,y'_m(l) = 0$ муносабатлар келиб чиқади. Буларни эътиборга олсак, (4.8) тенгликнинг ўнг томондаги ифода нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$(\lambda_k - \lambda_m)\int\limits_0^l \rho(x)y_k(x)y_m(x)dx = 0.$$

У ҳолда $\lambda_k \neq \lambda_m$ бўлгани учун,

$$\int\limits_0^l \rho(x)y_k(x)y_m(x)dx = 0.$$

3) $q \leqslant 0$, $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$ *бўлганда барча хос қийматлар ҳақиқий ва мусбат бўлади.*

Исбот. Бу хоссани исботлаш учун λ_k хос қийматга мос $y_k(x)$ хос функцияни нормалланган деб ҳисоблаймиз. $y_k(x)$- хос функция бўлгани сабабли

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'_k(x)\right] + q(x)y_k(x) = -\lambda_k p(x)y_k(x).$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $y_k(x)$ га кўпайтириб, сўнгра 0 дан l гача интеграллаймиз. Натижада (4.7) тенгликни эътиборга олсак, қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\lambda_k = -\int_0^l \left\{ \frac{d}{dx}[p(x)y_k'(x)] + q(x)y_k(x) \right\} y_k(x)dx.$$

Бундан, биринчи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаб, ушбу

$$\lambda_k = \int_0^l \left\{p\left(x\right)\left[y'_k\left(x\right)\right]^2 - q\left(x\right)\left[y_k\left(x\right)\right]^2\right\} dx-$$

$$- \left[p\left(x\right) y_k\left(x\right) y_k'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=1} \qquad (4.9)$$

тенгликка эга бўламиз. (4.6) ва $p(x) \geq p_0 > 0$, $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$ шартлардан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, интеграл ташқарисидаги ифода мусбат эмас, яъни

$$[p(x)y_k(x)y_k'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} \leqslant 0.$$

Буни ва $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \leqslant 0$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (4.9) тенгликдан дарҳол $\{(4.5), (4.6)\}$ масала хос қийматларининг мусбат эканлиги келиб чиқади. Хосса исбот бўлди.

Бу ерда исботланган 3) хосса, масалан, татбиқда энг кўп учрайдиган 1) $y(0) = 0$, $y(l) = 0$; 2) $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$; 3) $y'(0) - h_1y(0) = 0$, $y'(l) + h_2y(l) = 0$, $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$ чегаравий шартлар билан берилган масалаларнинг хос қийматлари учун ўринли бўлади.

Юқорида келтирилган таърифларга асосан, $\lambda = (n\pi)^2$, $n \in N$ лар (4.1) масаланинг хос сонлари, $y_n = a_n \sin(n\pi x)$, $n \in N$ лар эса унинг хос функциялари бўлади. Бу хос сонлар ва хос функциялар ҳақиқатан ҳам юқорида санаб ўтилган 1)- 3) хоссаларга эга эканлигини текшириб чиқиш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, 1) ва 4) хоссаларнинг бажарилиши аниқ. 2) хоссани текширайлик. $\rho(x) \equiv 1$ бўлгани учун , $\lambda_n = (n\pi)^2$ хос сонларга мос келувчи хос функциялар ортогоналлиги

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = 0 \quad n, m \in N, n \neq m$$

тенгликдан келиб чиқади.

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{2}, \qquad n \in N$$

тенгликдан эса $a_n = \sqrt{2}$ деб олинган $y_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n \in N$ хос функциялар системаси ортонормал бўлиши келиб чиқади.

4.3-§. Штурм-Лиувилл масаласини ечишга доир мисоллар

Бу параграфда бир неча Штурм-Лиувилл масалаларининг хос сонлари ва хос функцияларини топамиз. Бунда ўрганиладиган масала шартини тўла баён қилиш ўрнига қисқалик учун масалада қаралаётган дифференциал тенглама ва чегаравий шартларни келтирамиз холос.

1-масала. $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < l$; $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$, $l > 0$.

Маълумки, қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги тенгламалар билан аниқланади:

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{агар} \quad \lambda < 0 \quad \text{бўлса}, \\ c_1 + c_2 x, & \text{агар} \quad \lambda = 0 \quad \text{бўлса}, \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, & \text{агар} \quad \lambda > 0 \quad \text{бўлса}. \end{cases} \quad (4.10)$$

(4.10) дан хосила олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y'(x) = \begin{cases} \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{агар} \quad \lambda < 0 \text{ бўлса,} \\ c_2, & \text{агар} \quad \lambda = 0 \text{ бўлса,} \\ -\sqrt{\lambda}_1 c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2 \cos\sqrt{\lambda}x, & \text{агар} \quad \lambda > 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \tag{4.11}$$

(4.11) функцияни $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$ чегаравий шартларга қўямиз. Натижада

1) $\lambda < 0$ бўлганда $c_1 - c_2 = 0$, $c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$ алгебрик тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламалардан эса $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$.

2) $\lambda = 0$ бўлганда $c_2 = 0$ тенглик ўринли бўлиб, c_1- ихтиёрийлигича қолади. Буни эътиборга олсак, қаралаётган масала $y = c_1$ ечимга эга эканлиги келиб чиқади. Агар $c_1 \neq 0$ бўлса, бу ечим тривиалмас бўлади. Демак, $\lambda = 0$ қаралаётган масала учун хос сон экан.

3) $\lambda > 0$ бўлганда $c_2 = 0$, $-\sqrt{\lambda}c_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ тенгликларга эга бўламиз. $c_1 = 0$ бўлса, масаланинг тривиал ечимига эга бўламиз. $c_1 \neq 0$ десак, охирги тенгликдан $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ тенгликка келамиз. Бундан $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, $n \in N$ ёки $\lambda = (n\pi/l)^2$, $n \in N$ ни топамиз. Демак, $\lambda = (n\pi/l)^2$, $n \in N$ сонлар қаралаётган масаланинг хос сонлари экан. Бунда $c_2 = 0$ эканлигини эътиборга олиб ва ҳар бир n учун $c_2 = a_n$ деб олсак, (4.10)га асосан $y_n(x) = a_n \cos(\pi n x/l)$, $n \in N$ хос функцияларга эга бўламиз. Топилган хос сонлар ва хос функциялар формулаларида $n = 0$ бўлиши ҳам мумкин десак, улар $\lambda = 0$ ҳолдаги хос сон ва хос функцияни ҳам ўз ичига олади.

2-масала. $y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < l;\ y(0) = 0,\ y'(l) = 0,\ l > 0.$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими (4.10) кўринишга, унинг ҳосиласи эса (4.11) кўринишга эга. $\lambda < 0$ бўлганда (4.10) ва (4.11) формулалардан чегаравий шартларга асосан $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$ алгебрик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга бўлиб, ўрганилаётган масала $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$

ечимга эга бўлади. Агар $\lambda = 0$ бўлса, $y(0) = 0$ шартга асосан (4.10) дан $c_1 = 0$ тенглик, $y'(l) = 0$ шартга асосан эса (4.11) дан $c_2 = 0$ тенглик келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$. $\lambda < 0$ бўлганда (4.10) ва (4.11) формулалардан чегаравий шартларга асосан $c_1 = 0$, $\sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$ тенгликлар келиб чиқади. $c_2 \neq 0$ десак, $\cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$ бўлади. Бундан $\sqrt{\lambda} l = \pm(\pi/2) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ келиб чиқади. $\sqrt{\lambda} l$ мусбат эканлигини эътиборга олсак, $\sqrt{\lambda} l = (2n-1)\pi/2$, $n \in N$ бўлади. Демак, $\lambda_n = [(2n-1)\pi/2l]^2$, $n \in N$ сонлар ўрганилаётган масаланинг хос сонлари экан. Уларга мос хос функциялар эса, $c_1 = 0$ тенглик ва (4.10) формулага асосан, $y_n(x) = a_n \sin\left[(2n-1)\pi x/2l\right]^2$, $n \in N$ лардан иборат.

3-масала. $x^2 y'' + (0,25 - \lambda) y = 0, 1 < x < e; y(1) = 0, y(e) = 0.$

Берилган дифференциал тенглама Эйлер тенгламаси бўлиб, у $x = e^t$ алмаштириш билан $y''_{tt} - y'_t + (0,25 - \lambda) y = 0$ кўринишга келади. Охирги дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси $k(k-1) + (0,25 - \lambda) = 0$ бўлиб, $k_{1,2} = (1/2) \pm \sqrt{\lambda}$ ечимларга эга. Бу ерда уч ҳолни кўрамиз.

1) $\lambda = 0$. Унда $k_1 = k_2 = (1/2)$ бўлиб, берилган дифференциал тенглама умумий ечимининг кўриниши $y(x) = (c_1 + c_2 t) e^{0,5t}$, яъни $y(x) = \sqrt{x}(c_1 + c_2 \ln x)$ бўлади. Бу фунцияни чегаравий шартларга қўйсак, $c_1 = 0$, $(c_1 + c_2)\sqrt{e} = 0$, яъни $c_1 = c_2 = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [1,\ e]$.

2) $\lambda > 0$. Унда $k_1 = (1/2) + \sqrt{\lambda}$, $k_2 = (1/2) - \sqrt{\lambda}$ бўлиб, умумий ечим $y(x) = \sqrt{x}(c_1 x^{\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-\sqrt{\lambda}})$ кўринишга эга бўлади. Чегаравий шартларга асосан охирги тенгликдан $c_1 + c_2 = 0$, $\sqrt{e}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0$ алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [1,\ e]$.

3) $\lambda < 0$. Бу ҳолда $k_1 = (1/2) + i\sqrt{-\lambda}$, $k_2 = (1/2) - i\sqrt{-\lambda}$ бўлиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг кўриниши $y(x) = [c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} t) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} t)] e^{0,5t}$ бўлади, яъни $y(x) = \sqrt{x}\left[c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \ln x)\right]$. Бундан чегаравий шартларга асосан $c_1 = 0$ ва $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$ тенглик-

ларга эга бўламиз. Биз тривиал бўлмаган ечимни кидираётганимиз учун $c_2 \neq 0$ деб фараз қилсак, $\sin\sqrt{-\lambda} = 0$ бўлиши келиб чиқади. Бундан эса $\sqrt{-\lambda} = n\pi$, $n \in N$, яъни $\lambda = -(n\pi)^2$, $n \in N$ га эга бўламиз. Буни ва $c_1 = 0$ эканлигини эътиборга олсак, $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $n \in N$ лар қўйилган масаланинг хос сонлари, $y_n(x) = a_n\sqrt{x}\sin(n\pi\ln x)$, $n \in N$ лар эса хос функциялари эканлиги келиб чиқади.

4-масала. $x^2y'' - \lambda y' = 0,\ 0 < x < l;\ y(1) = 0,\ y(l) = 0,\ l > 1.$

Бу ерда берилган дифференциал тенглама ҳам Эйлер тенгламасидир. Унинг умумий ечими 3-мисолдаги каби топилади:

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,(c_1 + c_2\ln x)\,, & \text{агар } \lambda = (-1/4)\,, \quad \text{бўлса,} \\ \sqrt{x}\left(c_1 x^{\sqrt{\lambda+1/4}} + c_2 x^{-\sqrt{\lambda+1/4}}\right), & \text{агар } \lambda > (-1/4)\,, \text{ бўлса,} \\ \sqrt{x}\left[c_1\cos(\sqrt{-\lambda-1/4}\ln x) + \right. & \\ \left. + c_2\sin\left(\sqrt{-\lambda-1/4}\ln x\right)\right], & \text{агар } \lambda < (-1/4)\,, \quad \text{бўлса.} \end{cases} \tag{4.12}$$

$\lambda = (-1/4)$ ва $\lambda > (-1/4)$ бўлганда (4.12) ни чегаравий шартларга қўйсак, мос равишда фақат тривиал ечимга эга бўлган қуйидаги

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\ln l = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 l^{\sqrt{\lambda+1/4}} + c_2 l^{-\sqrt{\lambda+1/4}} = 0 \end{cases}$$

алгебрик тенгламалар системалари келиб чиқади. Бу ҳолларда $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$. $\lambda < (-1/4)$ бўлганда эса чегаравий шартлар ва (4.12) формуладан $c_1 = 0$, $c_2\sin(\sqrt{-\lambda-1/4}\ln l) = 0$ тенгликлар келиб чиқади. $c_2 \neq 0$ десак, $\sin(\sqrt{-\lambda-1/4}\ln l) = 0$, яъни $\sqrt{-\lambda-1/4}\ln l = n\pi$, $n \in Z$ бўлади. Бу ерда $\sqrt{-\lambda-1/4}\ln l > 0$ бўлгани учун $\lambda = -(n\pi/\ln l)^2 - (1/4)$, $n \in N$. Буни ва $c_1 = 0$, $\forall c_2 \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, (4.12) формуладан масаланинг хос сонлари $\lambda_n = -(n\pi/\ln l)^2 - (1/4)$, $n \in N$ лардан, хос функциялари эса $y_n(x) = a_n\sqrt{x}\sin(n\pi\ln x/\ln l)$, $n \in N$ лардан иборат эканлиги келиб чиқади.

5-масала. $y''' + y'' + \lambda(y' + y) = 0,\ \ y(0) = y''(0) = 0,\ y(1) = 0.$

Ечиш. Бу масалани $\lambda > 0$ деган фараз билан ўрганамиз. Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасининг кўриниши $(k+1)(k^2+\lambda) = 0$ бўлиб, $k_1 = -1$, $k_2 = i\sqrt{\lambda}$, $k_3 = -i\sqrt{\lambda}$ илдизларга эга. У ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_3\sin(\sqrt{\lambda}x) \tag{4.13}$$

кўринишда аниқланади. Бундан $y'(x)$ ва $y''(x)$ ларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= -c_1e^{-x} - \sqrt{\lambda}c_2\sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}c_3\cos(\sqrt{\lambda}x), \\ y''(x) &= c_1e^{-x} - \lambda c_2\cos(\sqrt{\lambda}x) - \lambda c_3\sin(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

(4.13) ва (4.14) ларни чегаравий шартларга қўямиз: $c_1+c_2 = 0$, $c_1 - \lambda c_2 = 0$, $c_1e^{-1} + c_2\cos\sqrt{\lambda} + c_3\sin\sqrt{\lambda} = 0$. Дастлабки икки тенгламадан $c_1 = c_2 = 0$ келиб чиқади. Буни эътиборга олсак ва $c_3 \neq 0$ десак, $\sin\sqrt{\lambda} = 0$ тенгламага эга бўламиз. Демак, $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n \in N$, яъни $\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in N$ бўлганда қаралаётган масала тривиал бўлмаган $y_n(x) = a_n\sin(n\pi x)$, $n \in N$ ечимларга эга бўлар экан, бу ерда $a_n \neq 0$ - ихтиёрий сон, $n \in N$.

6-масала. $y^{(IV)} + \lambda y = 0,\ y(0) = y''(0) = 0,\ y'(1) = y'''(1) = 0.$

Ечиш. Бу масалани $\lambda < 0$ фараз билан ўрганамиз. Берилган дифференциал тенглама характеристик тенгламасининг кўриниши $k^4 + \lambda = 0$ бўлиб, у $k_1 = \mu$, $k_2 = -\mu$, $k_3 = i\mu$, $k_4 = -i\mu$ ечимларга эга, бу ерда $\mu = \sqrt[4]{-\lambda}$. Шунинг учун берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = c_1e^{\mu x} + c_2e^{-\mu x} + c_3\cos(\mu x) + c_4\sin(\mu x) \tag{4.15}$$

функциядан иборат. Бундан ҳосилалар олиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \mu c_1e^{\mu x} - \mu c_2e^{-\mu x} - \mu c_3\sin(\mu x) + \mu c_4\cos(\mu x), \\ y''(x) &= \mu^2c_1e^{\mu x} + \mu^2c_2e^{-\mu x} - \mu^2c_3\cos(\mu x) - \mu^2c_4\sin(\mu x), \\ y'''(x) &= \mu^3c_1e^{\mu x} - \mu^3c_2e^{-\mu x} + \mu^3c_3\sin(\mu x) - \mu^3c_4\cos(\mu x). \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

$y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ ва $y'''(x)$ ларни чегаравий шартларга қўйиб,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} - c_3 \sin\mu + c_4 \cos\mu = 0, \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} + c_3 \sin\mu - c_4 \cos\mu = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системанинг дастлабки икки тенгламасидан $c_3 = 0$, $c_1 = -c_2$ тенгликлар келиб чиқади. Буларни эътиборга олсак, охирги икки тенгламалардан $c_1 = c_2 = 0$, $c_4 \cos\mu = 0$ тенгликларга эга бўламиз. $c_4 \neq 0$ десак, $\cos\mu = 0$ бўлади. Демак, μ сон $\cos\mu = 0$ тенгламанинг ечими бўлганда, яъни $\mu = (2n-1)\pi/2$, $n \in N$ бўлганда, қаралаётган масала $y(x) = c_4 \sin[(2n-1)\pi x/2]$, $n \in N$ кўринишдаги тривиалмас ечимларга эга бўлади. $\mu = \sqrt[4]{-\lambda}$ тенгликни ҳисобга олсак, ўрганилаётган масаланинг хос сонлари $\lambda_n = -[(2n-1)\pi/2]^4$ лардан иборат эканлиги, хос функциялари эса $y_n(x) = a_n \cos[(2n-1)\pi x/2]$ лар эканлиги келиб чиқади, бу ерда $a_n \neq 0$ - ихтиёрий сон, $n \in N$.

4.4-§. Чегарада бузиладигин дифференциал тенгламалар учун спектрал масалалар

Эслатиб ўтамизки, ўрганилаётган дифференциал тенгламанинг ечими ёки ечимининг ҳосиласи қаралаётган ораликнинг четларида чегараланмаган бўлса, бу тенглама учун (4.6) шартлар билан Штурм-Лиувилл масаласини қўйиб бўлмайди. Бундай вақтларда чегаравий шартлар бошқачароқ, масалан,

$$|y(0)| < +\infty \quad \text{ёки} \quad \lim_{x\to 0} f(x)y'(x) = 0 \tag{4.17}$$

ва бошқа кўринишларда берилади. Бунда ҳам λ параметрнинг ўрганилаётган масала шартларини қаноатлантирувчи тривиалмас ечимлари мавжуд бўлган қийматлари шу масаланинг *хос* *қийматлари (сонлари)*, уларга мос тривиалмас ечимлар *хос функциялари* деб аталаверади. Одатда (4.17) кўринишдаги чегаравий шартлар чегарада бузиладиган дифференциал тенгламалар учун масалаларни қўйишда ишлатилади. Буни мисолларда кўриб ўтамиз.

1-масала. *λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда*

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{4.18}$$

дифференциал тенгламанинг $|y(0)| < +\infty, y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин, бу ерда $0 < \nu = const \notin Z$.

Ечиш. $\lambda = 0$ бўлганда (4.18) тенгламанинг умумий ечими $y(x) = c_1x^\nu + c_2e^{-\nu}$ бўлиб, чегаравий шартлардан $c_1 = c_2 = 0$ келиб чиқади. Демак, $\lambda = 0$ бўлганда $y(x) \equiv 0$, $x \in [0,\ 1]$ бўлади. Шунинг учун $\lambda = 0$ ўрганилаётган масала учун хос сон эмас.

$\lambda \neq 0$ да (4.18) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

Бу Бессел тенгламаси [5], бўлиб унинг умумий ечими

$$y(x) = c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x) \tag{4.19}$$

кўринишга эга, бу ерда $J_{\pm\nu}(x)$-биринчи тур Бессел функцияси:

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x/2)^{2n\pm\nu}}{\Gamma(\pm\nu + n + 1)n!},$$

$\Gamma(z)$ - Эйлернинг гамма функцияси, c_1, c_2 - ихтиёрий сонлар.

Формуласидан кўриниб турибдики, $x = 0$ да $J_\nu(x)$ чегараланган, $J_{-\nu}(x)$ эса чегараланмаган. Шунинг учун $|y(0)| < +\infty$ чегаравий шартга асосан (4.19) да $c_2 = 0$ деб олиш зарур. Демак, $y(x) = c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Бу функцияни $y(1) = 0$ шартга бўйсундирсак, $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$ тенгламага эга бўламиз. Маълумки [5], агар

$\nu > -1$ бўлса, $J_\nu(z) = 0$ тенглама саноқли сондаги қарама-қарши ишорали ҳақиқий илдизларга эга бўлади. Бу тенгламанинг n-мусбат илдизини α_n билан белгиласак, $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$ тенгламадан $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n \in N$ илдизларга эга бўламиз. Булар 1- масаланинг хос сонлари бўлиб, уларга мос хос функциялар $y_n(x) = a_n J_\nu(\alpha_n x)$, $n \in N$ лар бўлади. бу ерда $a_n = const \neq 0$-ихтиёрий сон.

2-масала. *λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда*

$$x(1-x)y'' + [(1/2) + \beta - (1+2\beta)x]\, y' + \lambda y = 0, \ 0 < x < 1 \quad (4.20)$$

дифференциал тенгламанинг (бу ерда $0 < \beta < 1/2$)

$$\lim_{y \to 0} \left[x^{\beta+1/2} y'(x)\right] = 0, \qquad y(1) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин.

Ечиш. (4.20) - Гаусснинг гипергеометрик тенгламаси [4] бўлиб, унинг $(0,1)$ оралиқда аниқланган умумий ечими

$$y(x) = c_1 F\left(\beta+\omega, \beta-\omega, \beta+\frac{1}{2}; x\right) +$$

$$+c_2 x^{(1/2)-\beta} F\left(\frac{1}{2}+\omega, \frac{1}{2}-\omega, \frac{3}{2}-\beta; x\right) \quad (4.21)$$

кўринишга эга, бу ерда $\omega = \sqrt{\beta^2+\lambda}$, $F(a,b,c;x)$ - Гаусснинг гипергеометрик функцияси:

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \cdot n!} x^n,$$

$(a_n) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$-Похгаммер белгиси [4].

(4.21) функцияни дифференциаллаб, сўнгра

$$\frac{d}{dx} F(a,b,c;x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1}F\left(a,b,c;x\right)\right]=(c-1)x^{c-2}F(a,b,c-1;x)$$

формулалардан фойдалансак [4],

$$y'(x)=\left[2(\beta^2-\omega^2)/(1+2\beta)\right]c_1\times$$

$$\times F\left(\beta+\omega+1,\beta-\omega+1,\beta+3/2;x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-2\beta\right)c_2x^{-\beta-(1/2)}F(\frac{1}{2}+\omega,\frac{1}{2}-\omega,\frac{1}{2}-\beta;x)$$

тенглик келиб чиқди. Бу тенгликни $x^{\beta+1/2}$ га кўпайтириб,

$$x^{\beta+(1/2)}y'(x)=\left[2(\beta^2-\omega^2)/(1+2\beta)\right]\times$$

$$\times c_1x^{\beta+(1/2)}F\left(\beta+\omega+1,\beta-\omega+1,\beta+3/2;x\right)+$$

$$+\left[(1/2)-\beta\right]c_2F\left[(1/2)+\omega,(1/2)-\omega,(1/2)-\beta;x\right]$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенгликдан $\lim\limits_{x\to0}\left[x^{\beta+(1/2)}y'(x)\right]=0$ чегаравий шартга ва $F\left(a,b,c;0\right)=1$ тенгликка асосан $c_2=0$ эканлиги келиб чиқади. Буни эътиборга олиб, (4.21) функцияни $y(1)=0$ чегаравий шартга бўйсундириб, $c_1F(\beta+\omega,\ \beta-\omega,\ \beta+1/2;1)=0$ тенгликка келамиз. Биз тривиал бўлмаган ечимни қидираётганлигимиз учун $c_1\neq0$. Унда $F(\beta+\omega,\beta-\omega,\beta+1/2;1)=0$. Бу тенгликка

$$F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

формулаларни [4] кетма-кет қўлласак, $\sin\left(\omega\pi\right)=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тригонометрик тенглама ечимларининг формуласидан, $\omega\geqslant0$ эканини эътиборга олиб, $\omega=n-(1/2)$, $n\in N$, яъни $\sqrt{\beta^2+\lambda}=n-(1/2)$, $n\in N$ тенгликларни топамиз. Бу тенгликлардан келиб чиқадики, $\lambda_n=[n-(1/2)]^2-\beta^2$, $n\in N$ лар 2- масаланинг хос сонларидан иборатдир. (4.21) формулада

$\lambda = \lambda_n = [n - (1/2)]^2 - \beta^2$, $c_1 = a_n$, $c_2 = 0$ деб ва $\omega = \sqrt{\beta^2 + \lambda} = n - (1/2)$ тенгликни эътиборга олиб,

$$y_n(x) = a_n F[\beta - (1/2) + n, \beta + (1/2) - n, \beta - (1/2); x], \quad n \in N$$

хос функцияларга эга бўламиз. Агар

$$P^{\mu}_{\nu}(z) = 2^{\mu}(z^2 - 1)^{-\mu/2} F\left[1 + \nu - \mu, -\nu - \mu, 1 - \mu; (1 - z)/2\right]$$

формуладан фойдалансак [4], топилган хос функцияларни

$$y_n(x) = b_n[x(1 - x)]^{(1-2\beta)/4} P^{(1/2)-\beta}_{n-1}(1 - 2x), \quad n \in N$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $b_n \neq 0$ - ихтиёрий сон, $P^{\mu}_{\nu}(x)$ эса Лежандр функцияси [4].

4.5-§. Нолокал шартли спектрал масалалар

Маълумки, у ёки бу дифференциал тенглама учун (4.6) ёки унинг хусусий ҳоллари ёрдамида қўйилган чегаравий масала *локал чегаравий масала* дейилади. 4.4-§ да кўрилган чегаравий масалалар ҳам локалдир. Чегаравий масалалар каби спектрал масалалар ҳам нолокал шартлар ёрдамида қўйилиши мумкин. Бу ҳолда ҳам λ параметрнинг ўрганилаётган масалада топилиши талаб этилган қийматлари *хос сонлар*, масаланинг унга мос тривиалмас ечимлари *хос функциялар* деб аталаверади. Шундай спектрал масалаларга мисоллар келтирамиз.

1-масала. *λ парметрнинг шундай қийматлари топилсинки, $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = y(1)$, $y'(1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими мавжуд бўлсин.*

Ечиш. Одатда бу ерда берилган чегаравий шартларнинг биринчиси *даврийлик шартлари* деб аталади. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими ва унинг ҳосиласи (4.10) ва (4.11) кўринишларга эга. Агар $\lambda = 0$ бўлса, (4.10), (4.11) формулалар ва чегаравий шартлар $c_1 = c_1 + c_2$, $c_2 = 0$ тенгликларни беради. Бундан $c_2 = 0$, c_1 эса ихтиёрий сон эканлиги келиб чиқади. Буларни ва $\lambda = 0$ ни умумий ечимга қўйиб, ўзгармас сон аниқлигида $y(x) \equiv 1$ функцияга эга бўламиз. Демак, $\lambda_0 = 0$ 1-масаланинг хос сони, $y_0(x) \equiv 1$ эса хос функцияси бўлади.

Энди $\lambda > 0$ ҳолни қараймиз. (4.10) формуладан, $y(0) = c_1$, $y(1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \sin\sqrt{\lambda}$ тенгликлар келиб чиқади. (4.11) формуладан $y'(1) = -\sqrt{\lambda}c_1 \sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}c_2 \cos\sqrt{\lambda}$ тенгликни оламиз. Топилганларни чегаравий шартларга қўйсак, c_1 ва c_2 ларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1(1 - \cos\sqrt{\lambda}) - c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0, \\ c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади.

Ўрганилаётган 1-масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун (4.22) система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши керак. Бунинг учун бу системанинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши зарур, яъни

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Демак,

$$-\sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda} = 0,$$

яъни $1 - \cos\sqrt{\lambda} = 0$ тенгламага эгамиз. Бу тенглама $\sqrt{\lambda} = 2n\pi$, $n \in N$ кўринишдаги мусбат ечимларга эга. У ҳолда ўрганилаётган масаланинг хос сонлари $\lambda_n = (2n\pi)^2$, $n \in N$ бўлади. Бу хос сонларни (4.22) га қўйиб, хосил бўлган алгебраик тенгламалар системасининг тривиал бўлмаган ечимларини топамиз. $\lambda = \lambda_n = (2n\pi)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ бўлганда (4.22) система

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу система, масалан, тривиал бўлмаган $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ечимга эга. Буни ва $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$ ларни умумий ечимга қўйиб, ўзгармас сон аниқлигида, $y_n(x) = \cos(2n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$ хос функцияларга эга бўламиз.

Ўрганилаётган масала $\lambda < 0$ бўлганда хос сонларга эга бўлмайди (буни мустақил исботланг).

2-масала.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi;$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi/2) = y(\pi).$$

Ечиш. Эслатиб ўтамизки, бу ерда берилган иккинчи чегаравий шарт *Бицадзе-Самарский шартидир.* Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлган (4.10) функцияни $\lambda \leqslant 0$ бўлганда чегаравий шартларга қўйиб, $c_1 = c_2 = 0$, яъни $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас (буни мустақил исботланг).

$\lambda > 0$ бўлсин. Унда (4.10) умумий ечимни чегаравий шартларга бўйсундирсак, $c_1 = 0$, $c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}/2) = c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda})$ тенгликларга эга бўламиз. $c_2 \neq 0$ деб, охиргидан $\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2) = \sin(\pi\sqrt{\lambda})$ кўринишдаги тригонометрик тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани $\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2)\left[1 - 2\cos(\pi\sqrt{\lambda}/2)\right] = 0$ кўринишида ёзсак, у $\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2) = 0$, $\cos(\pi\sqrt{\lambda}/2) = (1/2)$ тенгламаларга ажрайди. Бу тригонометрик тенгламаларни ечиб, ўрганилаётган масаланинг $\lambda_n^{(1)} = 4n^2$, $\lambda_n^{(2)} = [(12n-2)/3]^2$, $\lambda_n^{(3)} = [(12n-10)/3]^2$, $n \in N$ хос сонларига эга бўламиз. Бу хос сонларни ва $c_1 = 0$ ни (4.10) умумий ечимга қўйиб,

$$y_n^{(1)}(x) = a_n^{(1)} \sin(2nx), \quad y_n^{(2)}(x) = a_n^{(2)} \sin\left[(12n-2)x/3\right],$$

$$y_n^{(3)}(x) = a_n^{(3)} \sin\left[(12n-10)x/3\right], \quad n \in N$$

кўринишдаги хос функцияларга эга бўламиз.

3-масала.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < 1;$$

$$y(0) = 0, \qquad \int_0^1 y(x)dx = 0.$$

Ечиш. Бу ерда *интеграл шартли* масала қаралмоқда. $\lambda > 0$ бўлсин. У ҳолда (4.10) формула ва $y(0) = 0$ шартга асосан $c_1 = 0$ бўлади. Демак, $y(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Буни масаланинг интеграл шартига қўйсак, $c_2 \lambda^{-(1/2)}(-\cos\sqrt{\lambda} + 1) = 0$ тенглик келиб чиқади. Бу ердан, $c_2 \neq 0$ деб ва $\lambda > 0$ эканлигини ҳисобга олиб, $\cos\sqrt{\lambda} = 1$ тригонометрик тенгламага эга бўламиз. Уни ечиб, $\sqrt{\lambda} = 2n\pi$, $n \in N$ ни топамиз. Демак, 3-масаланинг хос сонлари $\lambda_n = (2n\pi)^2$, $n \in N$, хос функциялари эса $y_n(x) = a_n \sin(2n\pi x)$, $n \in N$ лардан иборат экан.

$\lambda = 0$ бўлса, (4.10) га асосан умумий ечим $y = c_1 + c_2 x$ бўлади. Буни $y(0) = 0$ шартга қўйсак, $c_1 = 0$ эканлиги, интеграл шартга қўйсак эса, $c_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, яъни $\lambda = 0$ - хос сон эмас.

$\lambda < 0$ бўлсин. Унда умумий ечим $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$ бўлади. Буни масала шартларига қўйсак, c_1 ва c_2 ларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1(e^{\sqrt{-\lambda}} - 1) - c_2(e^{-\sqrt{-\lambda}} - 1) = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системанинг асосий детерминанти $2 - e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} \neq 0$. Демак, бу система фақат $c_1 = c_2 = 0$ ечимга эга. Унда $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Шунинг учун $\lambda < 0$ бўлганда хос сон мавжуд эмас.

4-масала.

$$y''' + y'' + \lambda(y' + y) = 0, \qquad 0 < x < 1;$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = y''(1).$$

Ечиш. Бу масалани $\lambda > 0$ деган фараз билан ўрганамиз. Ўрганилаётган тенгламанинг умумий ечими (4.13) кўринишга, унинг ҳосилалари эса (4.14) кўринишларга эга. Уларни масала шартларига қўйсак, $-c_1 + c_3\sqrt{\lambda} = 0$, $c_2 \cos\sqrt{\lambda} + c_3 \sin\sqrt{\lambda} = 0$, $c_1 + c_2 = 0$ тенгликларга эга бўламиз. Бу тенгликларнинг дастлабки иккисидан c_2 ва c_3 ларни c_1 орқали топамиз: $c_2 = -c_1$,

$c_3 = c_1/\sqrt{\lambda}$. Буларни $c_2 \cos\sqrt{\lambda} + c_3 \sin\sqrt{\lambda} = 0$ тенгликка қўйиб, $c_1 \neq 0$ деган фараз қилсак, $\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$, яъни $tg\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама саноқли сондаги ҳақиқий илдизларга эга бўлиб, унинг n - чи мусбат илдизини μ_n билан белгилайлик.

У ҳолда, юқоридагиларга асосан, қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: $\lambda = \lambda_n = \mu_n^2$, $n \in N$ бўлганда 4-масала

$$y_n(x) = a_n \left(e^{-x} - \cos\mu_n x + \frac{1}{\mu_n} \sin\mu_n x \right), \quad n \in N$$

кўринишдаги ечимларга эга, бу ерда $a_n \neq 0$-ихтиёрий сон.

5-масала.

$$y^{(IV)} + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < 1;$$

$$y(0) = y(1/2), \quad y''(0) = y''(1/2), \quad y'(1) = y'''(1) = 0, \quad \lambda < 0.$$

Ечиш. Берилган тенгламанинг умумий ечими (4.15) кўринишга, унинг ҳосилалари эса (4.16) кўринишларга эга. Уларни масала шартларига қўйсак, c_1, c_2, c_3, ва c_4 ларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = c_1 e^{\mu/2} + c_2 e^{-\mu/2} + c_3 \cos(\mu/2) + c_4 \sin(\mu/2), \\ c_1 + c_2 - c_3 = c_1 e^{\mu/2} + c_2 e^{-\mu/2} - c_3 \cos(\mu/2) - c_4 \sin(\mu/2), \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} - c_3 \sin\mu + c_4 \cos\mu = 0, \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} + c_3 \sin\mu - c_4 \cos\mu = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системенинг дастлабки икки тенгламасини ҳадлаб қўшиб ва ҳадлаб айириб,

$$\begin{cases} c_1 \left(1 - e^{\mu/2}\right) + c_2 \left(1 - e^{-\mu/2}\right) = 0, \\ c_3 [1 - \cos(\mu/2)] - c_4 \sin(\mu/2) = 0, \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} - c_3 \sin\mu + c_4 \cos\mu = 0, \\ c_1 e^{\mu} - c_2 e^{-\mu} + c_3 \sin\mu - c_4 \cos\mu = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системанинг дастлабки икки тенгламасидан $c_1 = c_2 e^{-\mu/2}$, $c_3 = c_4 ctg(\mu/4)$ ларни топиб, уларни охирги икки тенгламага қўямиз:

$$\begin{cases} c_2\left(e^{\mu/2} - e^{-\mu}\right) + c_4\left[\cos\mu - \sin\mu\cdot ctg(\mu/4)\right] = 0,\\ c_2\left(e^{\mu/2} - e^{-\mu}\right) - c_4\left[\cos\mu - \sin\mu\cdot ctg(\mu/4)\right] = 0.\end{cases}$$

Бу тенгламаларни ҳадлаб қўшиб, $c_2 = 0$ эканлигини, ҳадлаб айириб эса, $c_4 \neq 0$ фараз билан, $\cos\mu - \sin\mu\cdot ctg(\mu/4) = 0$, яъни $\sin(\mu/4)\cos\mu - \sin\mu\cos(\mu/4) = 0$ ёки $\sin(3\mu/4) = 0$ тенгликка эга бўламиз. Маълумки, охирги тенглик $\mu = 4n\pi/3$, $n \in N$ сонлар учун ўринли бўлади. Бу ердан $\mu = \sqrt[4]{-\lambda}$ эканлигини эътиборга олиб, ўрганилаётган масаланинг хос сонларига эга бўламиз: $\lambda_n = -(4n\pi/3)^4$, $n \in N$.

(4.15) формулада $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = ctg(\mu/4)\cdot c_4$, $c_4 = a_n \neq 0$, $\mu = 4n\pi/3$, $n \in N$ деб, бу хос сонларга мос хос функциялар

$$y_n(x) = a_n[\cos(4n\pi x/3)\cdot ctg(n\pi/3) + \sin(4n\pi x/3)] =$$

$$= \bar{a}_n\cdot\cos[n\pi(4x-1)/3], \quad n \in N$$

лардан иборатлигини топамиз, бу ерда a_n, $\bar{a}_n \neq 0$ - ихтиёрий сонлар.

4.6-§. Умумлашган спектрал масалалар

Юқоридаги параграфларда кўриб ўтилган масалаларда спектрал параметр λ фақат берилган дифференциал тенгламада қатнашиб, у чегаравий шартларда ошкор қатнашмади. Баъзида спектрал параметр ўрганилаётган масаланинг тенгламасида ҳам, чегаравий шартларида ҳам ошкор қатнашади. Бундай масалаларни оддий спектрал масалалардан фарқлаш учун *умумлашган спектрал масалалар* деб юритилади. Бу масалаларда ҳам λ параметрнинг топилган қийматлари ва унга мос функциялар тегишли масаланинг *хос сонлари* ва *хос функциялари* деб аталаверади. Мисоллар келтирамиз.

1-масала.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi;$$

$$y(\pi) = 0, \qquad y'(0) = \sqrt{\lambda \operatorname{sign} \lambda}\, y(0).$$

Ечиш. $\lambda < 0$ бўлсин. Унда берилган тенгламанинг умумий ечими ва унинг ҳосиласини аниқловчи (4.10) ва (4.11) формулаларга асосан қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$y(0) = c_1 + c_2, y'(0) = \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2), \quad y(\pi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}$$

Буларни чегаравий шартларга қўйиб,

$$\sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = \sqrt{-\lambda}(c_1 + c_2), \qquad c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан $c_1 = c_2 = 0$ келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$, яъни $\lambda < 0$ бўлганда масала хос сонга эга эмас.

$\lambda = 0$-хос сон эмаслигини кўрсатиш ҳам қийин эмас.

$\lambda > 0$ бўлсин. Унда (4.10) ва (4.11) формулаларга асосан $y(0) = c_1, y'(0) = \sqrt{\lambda} c_2, \quad y(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi)$. Булар ва чегаравий шартлардан c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан

$$c_1 - c_2 = 0, \quad c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \tag{4.23}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу система фақатгина $c_1 = c_2 \neq 0$ ва $\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ бўлганда тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади. Охирги тенглик $tg(\sqrt{\lambda}\pi) = -1$ бўлганда ўринли бўлади. Бундан $\sqrt{\lambda}\pi = -(\pi/4) + n\pi$, $n \in N$, яъни $\lambda = (n - 1/4)^2$, $n \in N$ эканлиги келиб чиқади. λ нинг бу қийматларини (4.10) формулага қўйиб, $c_1 = c_2$ эканлигини эътиборга олсак, ўрганилаётган масаланинг

$$y_n(x) = a_n \left\{\cos\left[(n - 1/4)x\right] + \sin\left[(n - 1/4)x\right]\right\} =$$

$$= \tilde{a}_n \sin\left[(n - 1/4)x + \pi/4\right], \quad n \in N$$

тривиал бўлмаган ечимларига эга бўламиз. бу ерда a_n, $\tilde{a_n} \neq 0$ ихтиёрий сонлар. Демак, $\lambda_n = (n - 1/4)^2, n \in N$ лар масаланинг хос сонлари экан.

2-масала

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi;$$

$$y'(0) = \sqrt{\lambda sign \lambda} \cdot y(0), \qquad y'(\pi) = \sqrt{\lambda sign \lambda}\, y(\pi).$$

Ечиш. Бу ерда ҳам (4.10) формуладан фойдаланамиз.

$\lambda < 0$ бўлганда хос сон йўқлигини кўрсатиш қийин эмас.

$\lambda = 0$ эса хос сон бўлиб, унга ўзгармас сон аниқлигида $y_0(x) = 1$ хос функция мос келади.

$\lambda > 0$ бўлганда (4.10) формула ва чегаравий шартлардан c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 \left[\sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \cos(\pi\sqrt{\lambda})\right] + c_2 \left[\sin(\pi\sqrt{\lambda}) - \cos(\pi\sqrt{\lambda})\right] = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу системанинг асосий детерминанти $2\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ бўлганда, у тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади. Охиргидан $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n \in N$, яъни $\lambda = n^2, n \in N$ келиб чиқади. Демак, $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n \in N$ бўлганда ўрганилаётган масала тривиал бўлмаган ечимга эга. Буни ва $c_1 = c_2$ тенгликни эътиборга олиб, (4.10) формуладан тривиал бўлмаган ечимларни топамиз:

$$y_n(x) = a_n(\cos nx + \sin nx) =$$

$$= \sqrt{2} a_n \sin(nx + \pi/4), \qquad a_n = const \neq 0, \qquad n \in N.$$

Юқоридагиларни умумлаштириб, ўрганилаётган масаланинг хос сонлари $\lambda_n = n^2$, $\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ лардан, хос функциялари эса $y_n(x) = b_n \sin(nx + \pi/4)$, $n = 0, 1, 2, ...$ лардан иборат деган хулосага келамиз, бу ерда $b_n = const \neq 0$-ихтиёрий сон.

3-масала. $y'' = \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \pi;$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = \sqrt{\lambda sign\lambda}\, y(\pi/2).$$

Ечиш. Бу масалани ечишда ҳам (4.10) формуладан фойдаланамиз. $\lambda \leqslant 0$ бўлганда масаланинг хос сони йўқ (текширинг!).

$\lambda > 0$ бўлганда (4.10) ва (4.11) формулалардан $y(0) = c_1$, $y'(0) = \sqrt{\lambda}c_2$, $y(\pi/2) = c_1\cos(\pi\sqrt{\lambda}/2) + c_2\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2)$ тенгликлар келиб чиқади. Буларни масала шартларига қўямиз: $c_1 = 0$, $c_2\sqrt{\lambda} = c_2\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2)$. $c_2 \neq 0$ деб фараз қилиб, охирги тенгликдан $\sin(\pi\sqrt{\lambda}/2) = 1$ тригонометрик тенгламага келамиз. Бу тригонометрик тенгламани ечиб, ўрганилаётган масаланинг хос сонларига эга бўламиз: $\lambda_n = (4n+1)^2$, $n = 1, 2, ...$ Уларга мос хос функциялар $y_n(x) = a_n \cdot \sin\left[(4n+1)x\right]$, $n = 1, 2, ...$ кўринишдаги тривиалмас функциялардан иборатдир.

4-масала.

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1;$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = \lambda\int_0^1 y(x)dx; \quad \lambda \geqslant 1.$$

Ечиш. Бу ерда интеграл шартли масалага эгамиз. Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2 - 2k + \lambda = 0$ бўлиб, $k_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\lambda - 1}$ ечимларга эга. У ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$y(x) = \begin{cases} (c_1 + c_2x)e^x, & \lambda = 1 \text{ бўлганда,} \\ \left[c_1\cos(x\sqrt{\lambda-1}) + c_2\sin(x\sqrt{\lambda-1})\right]e^x, & \lambda > 1 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Умумий ечим ва чегаравий шартлардан фойдаланиб, $\lambda = 1$-хос сон эмаслигини кўрсатиш қийин эмас.

$\lambda > 1$ бўлсин. Унда умумий ечим ва $y(0) = 0$ шартдан $c_1 = 0$ келиб чиқади. Демак, $y(x) = c_2e^x\sin(x\sqrt{\lambda - 1})$. Буни масаланинг иккинчи (интеграл) шартига қўйиб ва

$$\int e^x \sin(kx)dx = e^x (\sin kx - k\cos kx) \,/\, \left(1 + k^2\right)$$

формуладан фойдаланиб,

$$c_2 e \sin\sqrt{\lambda - 1} =$$

$$= c_2(e\sin\sqrt{\lambda-1} - e\sqrt{\lambda-1}\cos\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda-1}),$$

яъни

$$c_2\sqrt{\lambda-1}\left(1 - e\cos\sqrt{\lambda-1}\right) = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан $c_2 \neq 0$ деб фараз қилиб ва $\lambda > 1$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\cos\sqrt{\lambda-1} = e^{-1}$$

тригонометрик тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг ечимларидан фойдаланиб, масаланинг қуйидаги икки кўринишдаги

$$\lambda_n^{(1)} = 1 + \left[2(n-1)\pi + \arccos e^{-1}\right]^2, \quad n \in N;$$

$$\lambda_n^{(2)} = 1 + \left[2n\pi - \arccos e^{-1}\right]^2, \quad n \in N$$

хос сонларини топамиз. Буларга мос хос функциялар эса

$$y_n^{(1)}(x) = a_n^{(1)} e^x \sin\left[\left(2(n-1)\pi + \arccos e^{-1}\right)x\right], \quad n \in N;$$

$$y_n^{(2)}(x) = a_n^{(2)} e^x \sin\left[\left(2n\pi - \arccos e^{-1}\right)x\right], \quad n \in N$$

тенгликлар билан аниқланади, бу ерда $a_n^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{1,2}$; $n \in N$- ихтиёрий сонлар.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Байкузиев К. Основные смешанные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными. - Ташкент: Фан, 1984. -250 с.

2. Бойқузиев Қ.Б. Дифференциал тенгламалар. - Тошкент: Ўқитувчи, 1983. -192 б.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. -М.: Наука, 1981. -448 с.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. -М.: Наука, 1965. -296 с.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функция Бесселя. Функция параболического цилиндра. Ортогональние многочлены. -М.: Наука, 1966. -296 с.

6. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальних уравнений. - Фрунзе, 1957. -328 с.

7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976. -576 с.

8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. -М.: Наука, 1969. -528 с.

9. Нахушев А.М. Уравнения математической физики. -М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

10. Салоҳитдинов М.С. , Насритдинов Ғ.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. -Тошкент: Ўқитувчи, 1982. -448 б.

11. Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари. -Тошкент: Ўзбекистон, 2002. -448 б.

12. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. -Toshkent: Yangiyul poligraph service, 2007. -256 b.

13. Самко С.Г. , Килбас А.А. , Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987. -688 с.

14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том IV, часть вторая. -М.: Наука, 1981. -552 с.

15. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. -М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

16. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1970. -96 с.

МУНДАРИЖА

I БОБ
АСОСИЙ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

II БОБ
НОЛОКАЛ ШАРТЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

III БОБ
ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

IV БОБ
СПЕКТРАЛ МАСАЛАЛАР

Ўқув услубий нашр

АҲМАДЖОН ҚЎШАҚОВИЧ ЎРИНОВ

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

Муҳаррир: А.Исмоилов
Техник муҳаррир: Б.Болтабоев
Саҳифаловчи дизайнер: М.Азизов

"MUMTOZ SO'Z"
маъсулияти чекланган жамияти нашриёти.
1500114, Тошкент шаҳри, Навоий, 69
Тел: 241-81-20

Босишга 03.06.2014 й. да рухсат этилди. Бичими 60x84 $^{1}/_{32}$
Офсет қоғоз. "Times" гарнитураси.
Шартли б.т. 10,25. Нашр-ҳисоб т. 10,0. Адади 200 нусха.

Буюртма № 07-14.

"MUMTOZ SO'Z"
маъсулияти чекланган жамиятининг
матбаа бўлимида чоп этилди.
1500114, Тошкент шаҳри, Навоий, 69
Тел: 241-81-20

ISBN 978 9943-398-99-1

9 789943 398991