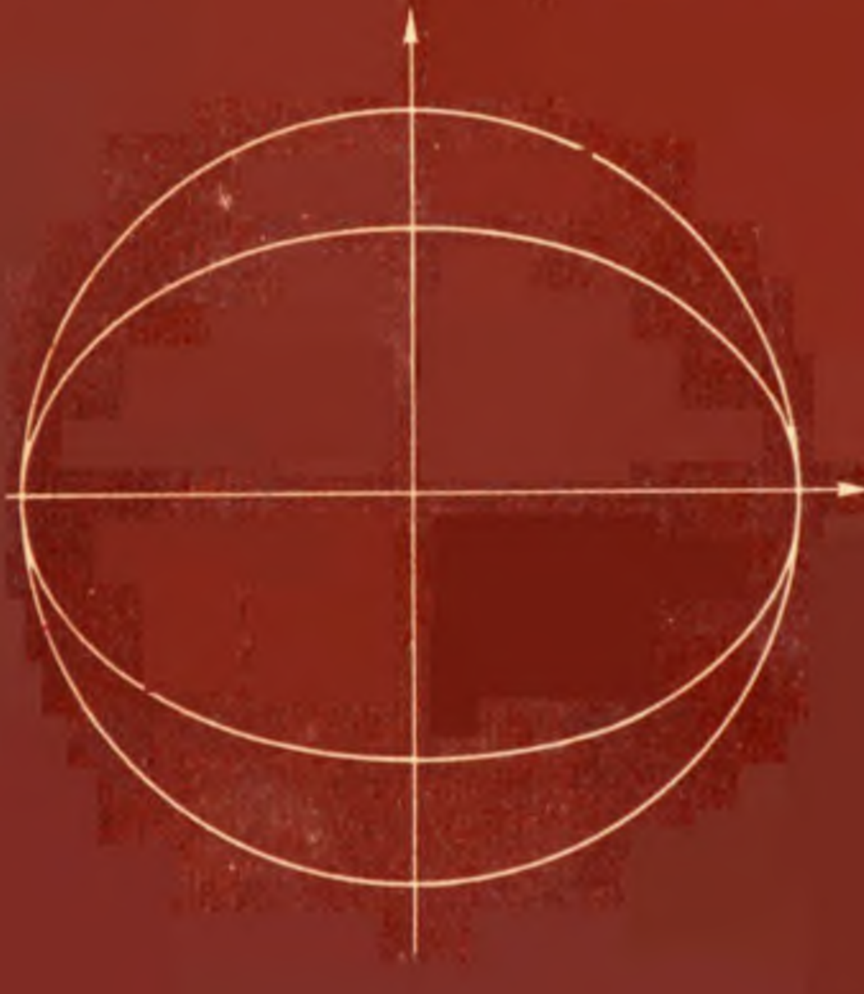
А. В. ПОГОРЕЛОВ

аналитик геометрия



А. В. ПОГОРЕЛОВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

СССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги олий ўқув юртларининг математика ва физика ихтисосликлари студентлари учун дарслик сифатида рухсат этган

ТОШКЕНТ — «ЎҚИТУВЧИ» — 1983

Дарслик университетларнинг физика-математика факультетлари учун тузилган программага мувофиқ ёзилган бўлиб, унда аналитик геометриянинг традицион масалалари — тўғри чизиқ ва текислик тенгламалари, иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар, чизиқли алмаштиришлар ва бошқалар баён этилган.

Бундан ташқари ҳар қайси бобда мустақил ечиш учун мисол ва масалалар жавоб ва кўрсатмалари билан берилган.

Дарсликдан педагогика институтларининг ва олий техника ўқув юртларининг студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

$П\frac{1702040000-195}{353(04)-83}$ 176 — 83

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг ушбу нашри олдингисидан аналитик геометрия курсининг илгари машқлар қаторига киритилган баъзи масалаларининг асосий текстга кўчирилганлиги билан фарқ қилади.

Китобнинг охирида машқларга доир кўрсатмалар берилган бўлиб, баъзи холларда эса машқларнинг тўлиқ ечимлари берилган.

РУСЧА ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг ушбу нашрида асосий текстга жузъий ўзгаришлар киритилган бўлиб, биринчи нашридан машқлар руйхати анча кенгайтирилганлиги билан фарқ қилади.

Маълумки, аналитик геометрия методларини ўзлаштиришнинг асосий воситаси масалалар ечишдан иборатдир. Шу сабабдан машқларни танлашга ва уларни тартиб билан жойлаштирилишига алоҳида эътибор берилди. Асосий текстнинг ҳар бир параграфи қатор машқлар билан якунланади. Уларни махсус равишда жойлаштирилиши ечимни излаш доирасини торайтиради, шу билан бирга айрим қийин машқларни ўқувчиларга енгиллаштириб беради.

Автор

МУҚАДДИМА

Аналитик геометрия қатъий доирали мазмунга эга бўлмай, ундаги муҳим томон текшириб ўрганиш эмас, балки методдан иборатдир.

Бу методнинг моҳияти шундаки, геометрик объектларга бирор стандарт усулда тенгламалар (тенгламалар системалари) шундай мос қўйилиб, фигураларда юз берадиган муносабатлар уларнинг тенгламаларида ўз ифодасини топади.

Чунончи, декарт координаталарини кўзда тутганда текисликдаги ҳар бир тўғри чизиққа бир қийматли равишда ушбу

$$ax + by + c = 0$$

чизиқли тенглама мос қўйилади.

Учта тўғри чизиқнинг битта нуқтада кесишиши бу тўғри чизиқларни ифодаловчи учта тенгламанинг биргаликда бўлиш шартида ўз ифодасини топади.

Аналитик геометрия методи билан турли-туман масалаларни ечишдаги универсал ёндашиш геометрик тадқиқотларнинг асосий методига айланди ва табиатшуносликнинг бошқа соҳалари — механика, физикада кенг татбиқ этиладиган бўлди.

Аналитик геометрия геометрияни алгебра ва анализ билан бирлаштирди, бу эса математиканинг шу учта бўлимининг ривожланишида самарали натижалар кўрсатди.

Аналитик геометриянинг асосий ғоялари Декарт билан боғлиқ бўлиб, у 1637 йилда ўзининг «Геометрия» номли асарида бу фан методининг асосларини баён қилди.

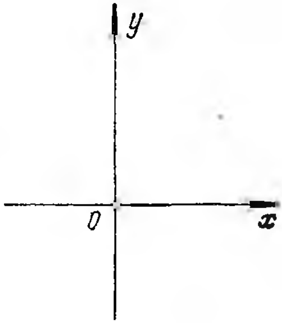
Лекцияларнинг китобхонга тақдим қилинаётган ушбу курсида аналитик геометрия методининг асослари энг содда геометрик объектларга нисбатан татбиқ қилинади. Ушбу курс университетларнинг физика-математика факультетлари программасига мослаб тузилган.

I боб

ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИБУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ

1-§. Текисликда координаталарни киритиш

Текисликда ўзаро перпендикуляр икки тўғри чизиқ Ox, Oy ни — *координаталар ўқларини* ўтказамиз (1-расм). Уларнинг кесишган O нуқтаси — *координаталар боши* ҳар бир ўқни иккита ярим ўққа ажратади. Ярим ўқлардан бирини *мусбат* деб ҳисоблаб, уни чизмада стрелка билан кўрсатамиз, иккинчисини эса *манфий* деб ҳисоблаймиз.



1- расм.

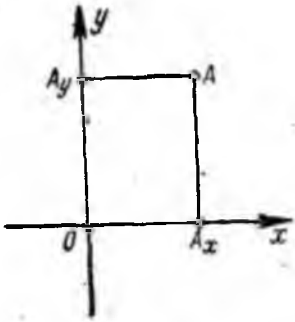
Текисликнинг ҳар бир A нуқтасига ушбу қоида асосида бир жуфт сонни — *нуқтанинг координаталарини* — (x) *абсциссани* ва (y) *ординатани* мос қўямиз.

A нуқта орқали *ординаталар ўқи* (Oy) га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз (2-расм). У *абсциссалар ўқи* (Ox) ни бирор A_x нуқтада кесади. A нуқтанинг абсциссаси деб шундай x сонни тушунамизки, унинг абсолют қиймати O дан A_x гача масофага тенг бўлиб, у A_x мусбат ярим ўққа тегишли бўлса мусбат, манфий ўққа тегишли бўлса манфий ҳисобланади. A_x нуқта O билан устма-уст тушса, x ни нолга тенг деб фараз қиламиз.

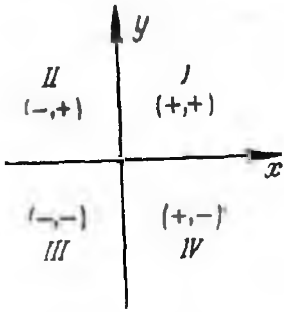
A нуқтанинг (y) ординатаси шу сингари аниқланади.

Нуқтанинг координаталарини унинг ҳарфий белгиси ёнига ёзамиз, масалан: A (x, y).

Координаталар ўқлари текисликни тўртта тўғри бурчакка — *квадрантларга* (I, II, III, IV) бўлади (3-расм). Битта квадрант чегарасида иккала координата ҳам ўз ишорасини сақлайди ва расмда кўрсатилган ишораларга эга бўлади.



2- расм.

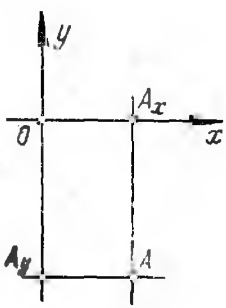


3- расм.

x ўқи (абсциссалар уқи) даги нуқталарнинг (y) ординаталари нолга тенг, *y ўқи* (ординаталар уқи) даги нуқталарнинг абсциссалари нолга тенг. Координаталар бошининг хам абсциссаси, хам ординатаси нолга тенг.

x ва y координаталар текисликда юқоридаги йусинда киритилса, биз уни *xy текислик* деб атаймиз. Бу текисликнинг координаталари x ва y дан иборат ихтиёрий нуқтасини баъзан (x, y) билан белгилаймиз.

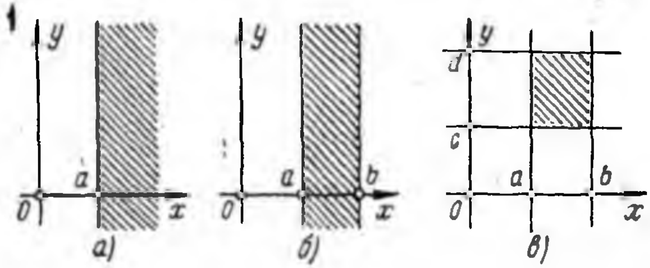
Ҳақиқий сонларнинг исталган x, y жуфти учун x, y текисликда ягона шундай A нуқта топиладики, унинг учун x — абсцисса, y эса ордината булади.



4- расм.

Ҳақиқатан хам, аниқликни кузда тутиб, $x > 0$ ва $y < 0$ булсин дейлик. Мусбат ярим уқ x да O нуктадан x масофада A_x нуқтани, манфий ярим уқ y да эса O дан $|y|$ масофада булган A нуқтани оламиз. A_x ва A_y нуқталардан мос равишда y ва x ўқларига параллел туғри чизиқлар утказамиз (4-расм). Бу туғри чизиқлар абсциссаси x ва ординатаси y дан иборат қандайдир A нуқтада кесишади, $x < 0$, $y > 0$; $x > 0$, $y > 0$ ва $x < 0$, $y < 0$ дан иборат, қолган ҳолларда исбот шу тартибда олиб борилади.

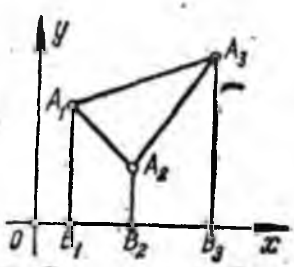
Энди тенгсизликлар ёрдамида аналитик усул билан xy текисликда соҳалар берилишининг бир неча муҳим ҳолларини таъкидлаб утайлик. xy текисликнинг $x > a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталари туплами $(a, 0)$ нуқтадан утиб ординаталар уқига параллел булган тўғри чизиқ билан чегараланган ярим ткеисликдан иборат (5-*а* расм). $a < x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами $a < x$ ва $x < b$ тенгсизликлар билан бериладиган ярим текисликларнинг кесишмаси (умумий қисми) дан иборат. Шундай қилиб, бу тўплам $(a, 0)$ ва $(b, 0)$ нуқталардан ўтиб y ўқига параллел бўлган иккита тўғри чизик орасидаги полосадан иборат (5 *б*-расм) $a < x < b$, $c < y < d$ ни қаноатлантирувчи нуқталар тўплам учлари (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) нукталардагч тўғри тўртбурчакдир (5 *в*-расм).



5- расм.

Пировардида ушбу масалани ечайлик. *Учлари $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ $A_3(x_3, y_3)$ нуқталардаги учбурчак юзи топилсин.* Айтилган учбурчак координаталар системаси xy га нисбатан 6-расмда кўрсатилгандек жойлашган бўлсин. Учбурчак шундай жойлашган тақдирда унинг юзи $B_1A_1A_3B_3$ трапеция юзи билан $B_1A_1A_2B_2$ ва $B_2A_2A_3B_3$ трапециялар юзлари йиғиндисининг айирмасига тенг:

$$S(A_1A_2A_3B_3) = S(B_1A_1A_3B_3) - [S(B_1A_1A_2B_2) + S(B_2A_2A_3B_3)].$$



6-расм.

$B_1A_1A_3B_3$ трапециянинг асослари y_1 ва y_3 га, унинг баландлиги эса $x_3 - x_1$ га тенг. Шунинг учун трапеция юзи:

$$S(B_1A_1A_3B_3) = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1).$$

Қолган икки трапеция юзларини шунинг сингари топамиз:

$$S(B_1A_1A_2B_2) = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1),$$

$$S(B_2A_2A_3B_3 = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2).$$

$A_1A_2A_3$ учбурчак юзи:

$$S(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(x_2y_3 - y_2x_1 + x_1y_2 - y_3x_2 + x_3y_1 - y_1x_3)$$

Бу формулани эсда сақлаш учун қулайроқ шаклда ёзиш мумкин:

$$S(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\}.$$

Бу формула гарчи учбурчак координаталар системасига нисбатан махсус жойлашган деган фаразда чиқарилган бўлса-да, формула учбурчакнинг исталганча жойлашиши учун ҳам ишоранинг аниқлигигача тўғри натижа беради. Буни биз сал кейинроқ исбот қиламиз (II боб, 5-§).

Машқлар

1. xy текисликнинг: а) $|x| = a$, б) $|x| = |y|$ бажариладиган нуқталари қаерда жойлашади?

2. xy текисликнинг: а) $|x| < a$, б) $|x| < a$, $|y| < b$ бажариладиган нуқталари қандай жойлашади?

3. x ўқи (y ўқи, координаталар боши) га нисбатан $A(x, y)$ нуқтага симметрик нуқтанинг координаталари топилсин.

4. Биринчи (иккинчи) координаталар бурчаги биссектрисасига симметрик бўлган $A(x, y)$ нуқтанинг координаталари топилсин.

5. Агар x ўқи сифатида y ўқи, y ўқи сифатида x ўқи қабул қилинса, $A(x, y)$ нуқтанинг координаталари қандай ўзгаради?

6. Координаталар ўқи йўналишларини ўзгартирмасдан координаталар бошини $A_0(x_0, y_0)$ нуқтага кўчирсак, $A(x, y)$ нуқтанинг координаталари қандай ўзгаради?

7. Квадрат диагоналларини координаталар ўқлари деб қабул қилиб, квадрат томонлари ўрталарининг координаталари топилсин.

8. Учта (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиши маълум. Бу нуқталардан қайси бири қолган иккитаси орасида ётишини қандай билиш мумкин?

2-§. Нуқталар орасидаги масофа

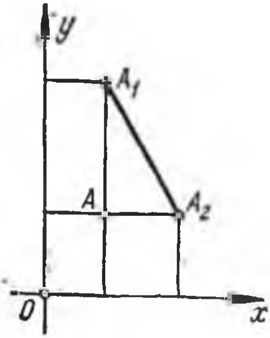
Фараз қилайлик, xy текисликда иккита x_1, y_1 координатали A_1 ва x_2, y_2 координатали A_2 нуқта берилган бўлсин. *A_1, A_2 нуқталар орасидаги масофани шу нуқталарнинг координаталари орқали ифода этайлик.*

Фараз этайлик, $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ бўлсин. A_1 ва A_2 нуқталар орқали координаталар ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказайлик (7-расм). A ва A_1 нуқталар орасидаги масофа $|y_1 - y_2|$ га, A ва A_2 нуқталар орасидаги масофа $|x_1 - x_2|$ га тенг. Тўғри бурчакли A_1AA_2 учбурчакка Пифагор теоремасини татбиқ этиб,

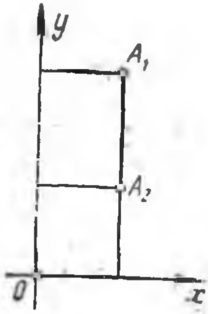
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2 \qquad (1)$$

ни ҳосил қиламиз, бунда d билан A_1 ва A_2 нуқталар орасидаги масофа белгиланган.

Гарчи нуқталар орасидаги масофани берувчи (1) формула $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ дан иборат фаразда чиқарилган бўлса-да, у бошқа ҳолларда ҳам ўз кучини сақлайди. Ҳақи-



7- расм.



8- расм.

қатан ҳам, $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ бўлса (8-расм), d масофа $|y_1 - y_2|$ га тенг. (1) формула ҳам ана шу натижани беради. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ бўлганда ҳам аҳвол шундай. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ҳолда A_1 ва A_2 нуқталар устма-уст тушади ва (1) формула $d = 0$ ни беради.

Машқ тариқасида *учлари* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *нуқталардан иборат учбурчакка ташқи чизилган айлана марказининг координаталарини топайлик.*

(x, y) — ташқи чизилган айлана маркази бўлсин, у учбурчак учларидан бир хил масофада туради. Бундан айлана марказининг изланган x, y координаталари учун ушбу

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

тенгламалар ҳосил қилинади ёки ўз-ўзидан равшин алмаштиришлардан сўнг:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2,$$

$$2(x_3 - x_1)x + 2(y_3 - y_1)y = x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Шундай қилиб, номаълум x, y координаталар учун иккита чизиқли тенглама ҳосил қилинди, улардан x, y ни топамиз.

Машқлар

1. x ўқида берилган иккита $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ нуқтадан баробар узоқлашган нуқта координаталари топилсин. A (о, a), B (b, о) мисол қаралсин.

2. Тенг томонли ABC учбурчакнинг иккита A, B учининг координаталари берилган. Учинчи учнинг координаталарини қандай топиш мумкин?

Мисол қаралсин: A (о, a), B (a, о).

3. $ABCD$ квадратнинг иккита қўшни A, B учи берилган. Қолган учларининг координаталари қандай топилади? A (a, о), B (о, b) мисол қаралсин.

4. ABC учбурчак тўғри бурчакли бўлиб, тўғри бурчагининг C учидан иборат бўлиши учун бу учбурчак учларининг координаталари қайси шартни қаноатлантириши керак?

5. ABC учбурчакнинг A бурчаги B бурчагидан катта бўлиши учун учбурчак учларининг координаталари қайси шартни қаноатлантириши керак?

6. $ABCD$ тўртбурчак ўз учларининг координаталари билан берилган. Унинг айланага ички чизилган ёки чизилмаганини қандай билиш мумкин?

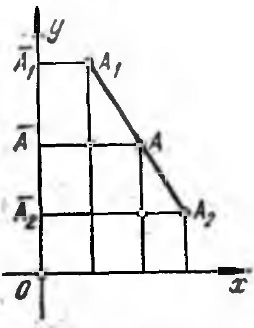
7. Исталган ҳақиқий a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 сонлар учун ушбу

$$\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}+\sqrt{(a_2-a)^2+(b_2-b)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

тенгсизликнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин. Бу тенгсизлик қандай геометрик фактга мос келади?

3-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Фараз этайлик, xy текисликда иккита $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нуқта берилган бўлсин. *A_1A_2 кесмани $\lambda_1:\lambda_2$ нисбатда бўлувчи A нуқтанинг координаталарини топайлик.*



9- расм.

Олинган A_1A_2 кесма x ўқига параллел эмас деб фараз қилайлик. A_1, A, A_2 нуқталарни y ўқига проекциялайлик (9- расм). Қуйидагиларга эгамиз:

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\bar{A}_1\bar{A}}{\bar{A}\bar{A}_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

$\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}$ нуқталарнинг ординаталари мос равишда A_2, A_1, A нуқталарнинг ординаталарига тенглиги сабабли:

$$\bar{A}_1\bar{A}=|y_1-y|, \qquad \bar{A}\bar{A}_2=|y-y_2|.$$

Демак,

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

$\bar{A}$ нуқта $\bar{A}_1$ билан $\bar{A}_2$ орасида ётганлиги сабабли y_1-y ва $y-y_2$ айирмаларнинг ишораси бир хил. Шунинг учун:

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Бундан ушбуни топамиз:

$$y=\frac{\lambda_2y_1+\lambda_1y_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (1)$$

Агар A_1A_2 кесма x уқига параллел булса, у ҳолда:

$$y_1 = y_2 = y.$$

Шу натижани (1) формула ҳам беради, шундай қилиб, бу формула A_1, A_2 нуқталарнинг ҳар қандай жойланишида ҳам ўз кучини саклайди.

A нуқтанинг абсциссаси шу сингари топилади. Унинг учун ушбу

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

формула ҳосил қилинади.

$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = t$ белгилашни киритайлик. Бу ҳолда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1 - t$. Демак, учлари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ нуқталарда бўлган кесманинг исталган C нуқтасининг координаталарини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$x = (1 - t)\, x_1 + t x_2, \quad y = (1 - t)\, y_1 + t y_2, \quad 0 < t < 1.$$

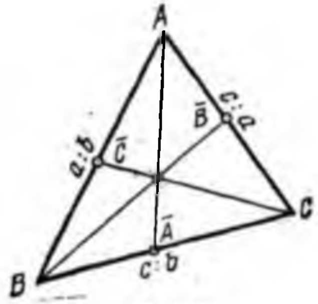
Энди $t < 0$ ва $t > 1$ ҳолларда $C(x, y)$ нуқтанинг қаерда бўлишини аниқлайлик. Бунинг учун $t < 0$ ҳолда формулаларимизни x_1, y_1 га нисбатан ечайлик:

$$x_1 = \frac{1 \cdot x + (-t)\, x_2}{1 - t},$$

$$y_1 = \frac{1 \cdot y + (-t)\, x_2}{1 - t}.$$

Булардан эса $A(x_1, y_1)$ нуқта CB кесмага тегишли эканлиги ва бу кесмани $(-t):1$ нисбатда бўлиб юбориши кўриниб турибди. Демак, $t < 0$ ҳолда формулаларимиз AB кесманинг A нуқта томонидаги давомига қарашли нуқтанинг координаталарини беради. $t > 1$ ҳолда бу формулалар AB кесманинг B нуқта томонидаги давомига қарашли нуқтанинг координаталарини бериши шундай исботланади.

Машқ тариқасида элементар геометрияда қараладиган Чева теоремасини исбот қилайлик. Бу теорема ушбу фактни билдиради: *агар учбурчак томонларини айланиб чиқиш тартибида* (10- расм) *унинг томонлари $a:b$, $c:a$, $b:c$ нисбатда бўлинса, у ҳолда учбурчак учларини қарама-қарши томонлардаги бўлиниш нуқталари билан туташтирувчи кесмалар битта нуқтада кесишади.*



10- расм.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лар ABC учбурчак учлари, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ лар эса унинг қарама-қарши томонлардаги бўлиниш нуқталари бўлсин (10- расм). $\bar{A}$ нуқтанинг координаталари:

$$x = \frac{bx_2 + cx_3}{b + c}, \qquad y = \frac{by_2 + cy_3}{b + c}.$$

Энди AA кесмани $(b+c):a$ нисбатда бўлайлик. Бўлиниш нуқтасининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \qquad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

Агар BB кесмани $(a+c):b$ нисбатда бўлсак, бўлиниш нуқтаси учун яна шу координаталарни ҳосил қиламиз. CC кесмани $(a+b):c$ нисбатда бўлишда ҳам яна ўша координаталар ҳосил қилинади. Демак, AA, BB, CC кесмалар умумий нуқтага эга. Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Элементар геометриядаги учбурчакнинг медианалари, биссектрисалари ва баландликларининг кесишиши ҳақида исбот қилинадиган теоремалар Чева теоремасининг хусусий ҳоли эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Машқлар

1. Параллелограмм учта учининг координаталари берилган (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Унинг тўртинчи учи ва марказининг координаталари топилсин.

2. Учбурчак учларининг координаталари берилган: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Унинг медианалари кесишган нуқтасининг координаталари топилсин.

3. Учбурчак томонлари ўрталарининг координаталари берилган: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Учбурчак учларининг координаталари топилсин.

4. Учлари (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) дан иборат учбурчак берилган. Шу учбурчакка ўхшаш ва ўхшаш равишда жойлашган учбурчак учларининг координаталари топилсин, бунда ўхшашлик коэффициенти λ га тенг, ўхшашлик маркази эса (x_0, y_0) нуқтадан иборат.

5. Агар A нуқта A_1, A_2 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқда ётиб, A_1A_2 кесмадан ташқарида ётса ва унинг A_1, A_2 нуқталаргача масофаларининг нисбати $\lambda_1:\lambda_2$ га тенг бўлса, бундай ҳолда A нуқта A_1A_2 кесмани *ташқи равишда бўлади* деб айтилади. A нуқтанинг координаталари A_1 ва A_2 нуқталар координаталари (x_1, y_1), (x_2, y_2) орқали ушбу формулалар бўйича ифодаланиши исботлансин:

$$x=\frac{\lambda_2x_1-\lambda_1x_2}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad y=\frac{\lambda_2y_1-\lambda_1y_2}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

6. Иккита кесма ўз охирларининг координаталари билан берилган. Чизмага мурожаат қилмасдан туриб, кесмаларнинг кесишиш ёки кесишмаслигини қандай билиш мумкин?

7. $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталарда жойлашган *иккита* μ_1, μ_2 массанинг *оғирлик маркази* деб A_1A_2 кесмани $\mu_2:\mu_1$ нисбатда бўлувчи A нуқтага айтилади. Шундай қилиб унинг координаталари:

$$x=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2}{\mu_1+\mu_2}, \quad y=\frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2}{\mu_1+\mu_2}.$$

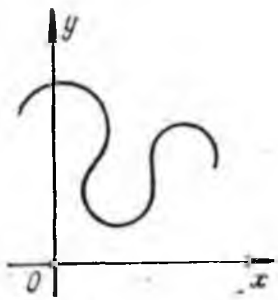
A_i нуқталарда жойлашган n та μ_i массанинг оғирлик маркази индукция бўйича топилади. Яъни, агар A'_n нуқта олдинги $n-1$ та масса маркази бўлса, барча n та массанинг оғирлик маркази ушбу иккита массанинг оғирлик маркази деб қаралади: уларнинг бири A_n нуқтада жойлашган μ_n, иккинчиси эса A'_n нуқтада жойлашган $\mu_1 \ldots + \mu_{n-1}$ массалардан иборат. $A_i(x_i, y_i)$ нуқталарда жойлашган μ_i массалар оғирлик марказининг координаталари учун ушбу формулалар исбот қилинсин:

$$x = \frac{\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n}{\mu_1 + \ldots + \mu_n}, \quad y = \frac{\mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n}{\mu_1 + \ldots + \mu_n}.$$

4- §. Эгри чизиқ тенгламаси ҳақида тушунча.

Айлана тенгламаси

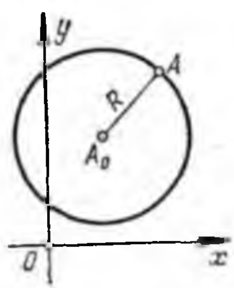
Фараз этайлик, xy текисликда бирор чизиқ ёки бошқача қилиб айтганда эгри чизиқ берилган бўлсин (11- расм). Агар $\varphi(x, y) = 0$ тенгламани эгри чизиқдаги исталган нуқтанинг (x, y) координаталари қаноатлантирса ва шу тенгламани қаноатлантирувчи сонларнинг исталган (x, y) жуфти эгри чизиқ нуқтасининг координаталарини билдирса, $(\varphi x, y) = 0$ *тенглама эгри чизиқнинг ноошкор тенгламаси* деб аталади. Эгри чизиқни унинг тенгламаси аниқлаб бериши равшан, шунинг учун эгри чизиқни унинг тенгламаси билан берилиши тўғрисида гапириш мумкин.



11- расм.

Аналитик геометрияда кўпинча иккита масала қаралади: 1) эгри чизиқнинг берилган геометрик хоссалари бўйича унинг тенгламасини тузиш; 2) эгри чизиқнинг берилган тенгламаси бўйича унинг геометрик хоссаларини аниқлаш. Бу масалаларни эгри чизиқларнинг энг соддаси — айланага нисбатан қараб чиқайлик.

Фараз этайлик, xy текисликдаги ихтиёрий нуқта A_0 (x_0, y_0) бўлсин, R эса исталган мусбат сон бўлсин. Маркази A_0 ва радиуси R дан иборат айлана тенгламасини тузайлик (12- расм).



12- расм.

Айланадаги ихтиёрий нуқта $A(x, y)$ бўлсин, унинг A_0 гача масофаси R га тенг. 2-§ га асосан A нуқтадан A_0 гача масофа квадрати $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ га тенг. Демак, айлананинг ҳар бир A нуқтасининг x, y координаталари ушбу

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0 \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Аксинча, x, y координаталари (1) тенгламани қаноатлантирган исталган A нуқта айланага тегишлидир, чунки унинг A_0 гача масофаси R га тенг.

Юқорида берилган таърифга мувофиқ (1) тенглама *маркази A_0 ва радиуси R дан иборат айлана тенгламасидир.*

Энди ушбу

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad (a^2+b^2-c>0)$$

тенглама билан берилган эгри чизиққа нисбатан иккинчи масалани кўриб чиқайлик.

Эгри чизиқ тенгламасини ушбу

$$(x+a)^2+(y+b)^2-\left(\sqrt{a^2+b^2-c}\right)^2=0$$

эквивалент кўринишида ёзиш мумкин. Бу тенгламадан кўриниб турибдики, эгри чизиқнинг ҳар бир (x, y) нуқтаси $(-a, -b)$ нуқтадан $\sqrt{a^2+b^2-c}$ га тенг бир хил масофада туради: демак, *эгри чизиқ маркази $(-a, -b)$ ва радиуси $\sqrt{a^2+b^2-c}$ бўлган айланадан иборат.*

Аналитик геометрия методининг татбиқини намоён этадиган *мисол* тариқасида ушбу масалани қараб чиқамиз. *Текислик нуқталарининг шундай геометрик ўрни топилсинки, уларнинг берилган иккита A ва B нуқталаригача масофаларининг нисбати ўзгармас ва $k \neq 1$ бўлсин.* (*Нуқталарнинг геометрик ўрни* деб шундай фигурага айтиладики, у берилган хоссага эга бўлган ҳамма нуқталардан тузилган бўлади. Қаралаётган ҳолда текисликдаги шундай нуқталар кўзда тутилганки, улар учун берилган иккита A ва B нуқталаргача олинган масофалар нисбати ўзгармасдир).

A ва B нуқталар орасидаги масофа $2a$ га тенг бўлсин. AB тўғри чизиқни x ўқи ва AB кесманинг ўртасини координаталарнинг тўғри бурчакли декарт системасининг боши деб қабул қиламиз. Аниқлик учун A нуқта мусбат ярим ўқ x га тегишли деб фараз қилайлик. Бу ҳолда A нуқтанинг координаталари $x=a$, $y=0$ ва B нуқтанинг координаталари $x=-a$, $y=0$. Фараз қилайлик, (x, y) геометрик ўриннинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Унинг A ва B нуқталаргача масофаларининг квадратлари $(x-a)^2+y^2$ ва $(x+a)^2+y^2$ га тенг. Геометрик ўрин тенгламаси:

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2$$

ёки

$$x^2+y^2+\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}ax+a^2=0.$$

Нуқталарнинг геометрик ўрни айланадан иборат (Апполоний айланаси).

Айлана тенгламасини тузишга мисол тариқасида ушбу масалани ҳам кўриб чиқамиз. Иккита айлананинг

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$$

тенгламалари ва $A(x_1, y_1)$ нуқта берилган. *Берилган айланаларнинг кесишиш нуқталаридан ва A нуқтадан ўтувчи айлана тенгламаси тузилсин.*

Бу масаланинг одатдаги усулда ечилиши берилган айланаларнинг кесишиш нуқталарини излаш ва сўнгра шу нуқталар билан берилган A нуқта орқали ўтувчи айлана тенгламасини тузишдан иборат. Масаланинг ихчамроқ ечимини келтирамиз.

Агар $\lambda+\mu\neq 0$ шарт бажарилса λ ва μ нинг исталган қийматларида ушбу

$$\lambda(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)=0$$

тенглама айланани беради. Бу айлана берилган икки айлананинг кесишган нуқталаридан ўтади, чунки бу нуқталарнинг координаталари тенгламанинг чап томонидаги иккала қўшилувчини ҳам нолга айлантиради. Агар λ, μ ни A нуқта координаталари шу тенгламани қаноатлантирадиган қилиб танлаб олинса, изланган айлана ҳосил қилинади. Бунинг учун λ, μ ни қуйидагича олиш етарли:

$$\lambda=x_1^2+y_1^2+a_2x_1+b_2y_1+c_2,$$

$$-\mu=x_1^2+y_1^2+a_1x_1+b_1y_1+c_1.$$

Геометрик мулоҳазалардан равшанки, A нуқта берилган айланаларнинг кесишган нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқда ётса, масаланинг ечими мавжуд бўлмайди. Бу факт аналитик жиҳатдан x^2+y^2 ҳад ҳосил қилинган тенгламага кирмаслигини кўрсатади.

Машқлар

1. Агар

1) $a=0$; 2) $b=0$; 3) $c=0$; 4) $a=0$, $b=0$; 5) $a=0$, $c=0$
6) $b=0$, $c=0$

бўлса, ушбу

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad (a^2+b^2-c>0)$$

айлананинг координаталар системасига нисбатан жойланишида қандай махсуслик бор?

2. Агар айлана тенгламасининг чап томонига доирадан ташқарида ётувчи исталган нуқтанинг координаталари қўйилса, шу нуқтадан айланага ўтказилган уринманинг квадрати ҳосил қилиниши исбот қилинсин.

3. *А нуқтанинг айланага нисбатан даражаси* деб шу нуқтадан ўтказилган кесувчининг айланадан ажратган кесмалари кўпайтмасига айтилиб, бу кўпайтма ташқи нуқталар учун «+» ишора ва ички нуқталар учун «—» ишора билан олинади.
Айлана тенгламаси

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

нинг чап томонига ихтиёрий нукта координаталарини қўйганда шу нуқтанинг айланага нисбатан даражасини ҳосил қилиши исбот қилинсин.

4. xy текисликда шундай нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсинки, уларнинг берилган иккита $F_1(c, 0)$ ва $F_2(-c, 0)$ нуқтагача масофалари йиғиндиси ўзгармас ва $2a$ га тенг бўлсин (*эллипс*). Тенгламани ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга келтириш мумкинлиги исбот қилинсин, бунда $b^2 = a^2 - c^2$.

5. xy текисликда шундай нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсинки, уларнинг берилган иккита $F_1(c, 0)$ ва $F_2(-c, 0)$; нуқтагача масофалари айирмаси ўзгармас ва $2a$ га тенг бўлсин (*гипербола*). Тенгламани ушбу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишга келтириш мумкинлиги исбот қилинсин, бунда $b^2 = c^2 - a^2$.

6. xy текисликдаги шундай нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсинки, улар $F(O, p)$ нуқта ва x ўқидан баробар узоқлашган бўлсин (*парабола*).

5- §. Эгри чизиқнинг параметрик шаклдаги тенгламаси

A нуқта эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қиляпти деб тасаввур этайлик. t моментда унинг координаталари $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ бўлсин. Эгри чизиққа тегишли ихтиёрий нуқта координаталарини t параметрнинг функциялари сифатида аниқловчи ушбу

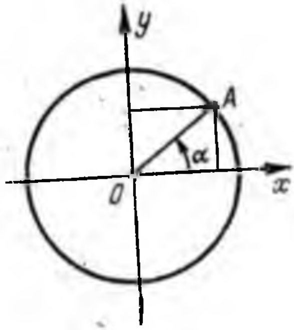
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

тенгламалар системаси *эгри чизиқнинг параметрик кўринишдаги тенгламалари* деб аталади.

t параметр вақтни билдириши шарт эмас, у нуқтанинг эгри чизиқдаги вазиятини характерлаб берувчи бошқа бир ихтиёрий катталикни ифодалаши ҳам мумкин.

Айланинг параметрик кўринишдаги тенгламасини тузайлик.

Айлананинг маркази координаталар бошида, унинг радиуси эса R га тенг бўлсин. A нуқтанинг айланадаги вазиятини OA радиуснинг мусбат ярим ўқ x билан ташкил қилган α бурчак билан тасвирлаймиз (13- расм). Равшанки, A нуқтанинг координаталари $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$ га тенг, демак, айлананинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:



13- расм.

$$x = R\cos\alpha, \;\; y = R\sin\alpha.$$

Эгри чизиқнинг параметрик кўринишдаги ушбу

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t) \qquad (1)$$

тенгламалари маълум бўлса, унинг ноошкор кўринишдаги

$$f(x, y) = 0$$

тенгламасини ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун (1) даги тенгламаларнинг биридан t ни топиб, иккинчисига қўйиш йўли билан бу параметрни йўқотиш мумкин.

Чунончи, параметрик кўринишдаги тенгламалари билан берилган айлананинг ноошкор кўринишдаги тенгламасини ҳосил қилиш учун иккала тенгликни квадратга кўтариб ҳадма-ҳад қўшиш етарли. Натижада таниш тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Эгри чизиқнинг параметрик кўринишдаги тенгламаларидан параметрни йўқотиш натижасида бу эгри чизиқ учун юқорида келтирилган таъриф маъносидаги ноошкор тенглама ҳамиша ҳам ҳосил қилинавермайди. Тенгламани эгри чизиққа тегишли бўлмаган нуқталар қаноатлантирадиган ҳоллар пайдо бўлиши мумкин. Шу муносабат билан иккита мисолни қарайлик.

Фараз қилайлик, γ чизиқ параметрик кўринишдаги

$$x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; 0 \leqslant t < 2\pi$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Агар бу тенгламаларни мос равишда a ва b га бўлиб, ҳадма-ҳад қўшсак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама ҳосил қилинади.

Равшанки, γ эгри чизиқдаги ҳамма нуқталар бу тенгламани қаноатлантиради. Аксинча, агар (x, y) нуқта бу тенгламани қаноатлантирса, шундай t бурчак топиладики, унинг учун $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, демак, текисликка тегишли бўлиб бу тенгламани қаноатлантирадиган ҳар қандай иккита γ эгри чизиққа тегишлидир.

Энди γ эгри чизиқ ушбу

$$x = a\operatorname{ch} t, \;\; y = b\operatorname{sh} t, \;\; -\infty < t < +\infty$$

тенгламалар билан берилган бўлсин, бунда

$$\operatorname{ch} t = (e^t + e^{-t})/2, \ \operatorname{sh} t = (e^t - e^{-t})/2.$$

Бу тенгламаларни мос равишда a ва b га булиб, сунгра квадратга кўтарсак ва ҳадма-ҳад айирсак, ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенглама хосил қилинади. γ эгри чизиқнинг нукталари бу тенгламани қаноатлантиради. Аммо тенгламани қаноатлантирадиган ҳар қандай нуқта ҳам γ га тегишли булавермайди. Масалан, $(-a, 0)$ нуқта шундай. Бу нуқта тенгламани қаноатлантиради, лекин эгри чизиққа қарашли эмас, чунки γ эгри чизиқда $a \operatorname{ch} t \neq -a$.

Аммо эгри чизиқнинг ноошкор тенгламаси баъзан кенгроқ маънода ишлатилиб, уни қаноатлантирадиган ҳар бир нуқтанинг ҳам эгри чизиққа тегишли бўлиши талаб қилинавермайди.

Машқлар

1. Параметрик кўринишдаги ушбу

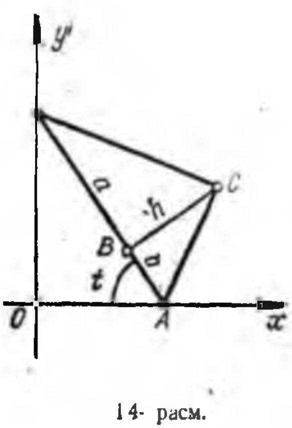
$$x = R\cos t + a, \ y = R\sin t + b$$

тенгламалар радиуси R маркази (a, b) нуқтада бўлган айланани ифода қилиши исбот қилинсин.

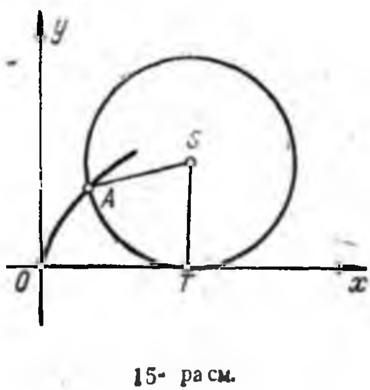
2. Узунлиги a бўлган кесманинг учлари координат ўқлар буйлаб сирпанади. Кесмани $\lambda : \mu$ нисбатда булувчи нуқтанинг ҳаракат натижасида чизган эгри чизиғининг тенгламаси тузилсин. Параметр сифатида кесманинг x уқи билан ташкил қилган бурчаги қабул қилинсин. $\lambda : \mu = 1$ булса, эгри чизиқ нимадан иборат?

3. Учбурчак икки учи билан координаталар ўқи буйлаб сирпанади. Бундай ҳаракат натижасида учбурчакнинг учинчи учи чизган эгри чизиғи тенгламаси тузилсин (14- расм).

4. x ўқи буйлаб ғилдираб борувчи R радиусли айлана нуқтаси чизган эгри чизиқ тенгламаси тузилсин (15- расм). Параметр сифатида айлана марказининг юрган йўли s кабул қилинсин. Бошланғич



14- расм.



15- расм.

моментда ($s = 0$) A нуқта координаталар боши билан устма-уст тушади деб ҳисоблансин.

5) Эгри чизиқ ушбу

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

тенглама билан берилган,

$t = y/x$ параметрни киритиш натижасида бу эгри чизиқ параметрик кўринишдаги ушбу тенгламаларни ҳосил қилишини исбот қилинг:

$$x = -\frac{d + et}{a + bt + ct^2},$$

$$y = -\frac{dt + et^2}{a + bt + ct^2}.$$

6-§. Эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталари

xy текисликда иккита эгри чизиқ берилган бўлсин: γ_1 эгри чизиқ ўзининг

$$f_1(x, y) = 0$$

тенгламаси билан, γ_2 эгри чизиқ эса

$$f_2(x, y) = 0$$

тенглама билан берилган.

γ_1 ва γ_2 эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини, яъни бу нуқталарнинг координаталарини топайлик.

Фараз этайлик, $A(x, y)$ нуқта γ_1, γ_2 эгри чизиқларининг кесишган нуқтаси бўлсин. A нуқта γ_1 чизиқда ётгани сабабли унинг координаталари $f_1(x, y) = 0$ тенгламани қаноатлантиради. A нуқта γ_2 чизиқда ётганлиги учун унинг координаталари $f_2(x, y) = 0$ тенгламани қаноатлантиради. Демак, γ_1 ва γ_2 чизиқларнинг исталган кесишиш нуқтасининг координаталари

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0$$

тенгламалар системасини қаноатлантиради.

Аксинча, тенгламаларнинг бу системасининг исталган ҳақиқий ечими чизиқлар кесишган нуқталаридан бирининг координаталарини беради.

Шунинг сингари агар γ_1 чизиқ

$$f_1(x, y) = 0$$

тенглама билан ва γ_2 чизиқ параметрик кўринишдаги

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ тенгламалар билан берилса, кесишиш нуқтасининг координаталари ушбу учта

$$f_1(x, y) = 0, \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

тенглама системасини қаноатлантиради.

Агар иккала чизиқ ҳам параметрик кўринишдаги ушбу

$$\gamma_1 : x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t);$$
$$\nu_2 : x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau)$$

тенгламалар билан берилса, кесишиш нуқталарининг x, y координаталари ушбу тўртта

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t),$$
$$x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau)$$

тенглама системасини қаноатлантиради.

Мисол. Ушбу айланаларнинг кесишган нуқталари топилсин:

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2by.$$

Тенгламаларни ҳадма-ҳад айириб, $ax = by$ ни топамиз. $y = ax/b$ ни биринчи тенгламага қўйиб,

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) x^2 - 2ax = 0$$

ни хосил киламиз. Бундан:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Уларга

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{2ba^2}{a^2 + b^2}$$

мос келади. Изланган кесишиш нуқталари (0, 0) ва

$$\left(\frac{2ab^2}{a^2 + b^2}, \ \frac{2ba^2}{a^2 + b^2}\right).$$

Чизиқларнинг кесишишига доир яна бир мисол келтирамиз. γ ва γ_2 чизиқлар берилган бўлсин. γ_1 чизиқ ноошкор кўринишдаги

$$F(x, y) = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин, бунда $f(x, y)$ — даражаси n дан ошмаган бирор кўпҳад, γ_2 чизиқ параметрик кўринишдаги

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

тенгламалар билан берилган бўлиб, бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ даражаси m дан ошмаган кўпҳад. Биз γ_1 ва γ_2 чизиқлар сони mn дан ошган кесишиш нуқталарига эга бўлсин деб фараз килайлик. Бундай холда γ_2 чизиқ бутунлай γ_1 чизиқда ётишлигини[1], яъни γ_2 нинг ҳамма нуқталари

$$f(x, y) = 0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатайлик.

---

[1] $\gamma_1 \in \gamma_1$. (*Тарж.*)

Дарҳақиқат, алгебраик $f(\varphi(t), \ \psi(t))=0$ тенгламанинг даражаси mn дан ошмайди ва mn дан ортиқ илдизга эга. Алгебрадан маълумки, бундай тенглама айниятдан иборат, яъни уни исталган t қаноатлантиради. Бу эса γ_2 чизиқнинг ҳар бир нуқтаси $f(x, y)=0$ тенгламани қаноатлантиради деган сўз; шуни исботлаш керак эди.

Машқлар

1. Айлананинг

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

тенгламасидаги a, b, c коэффициентлар айлана:

а) x ўқи билан кесишмаслиги;

б) x ўқи билан иккита нуқтада кесишиши;

в) x ўқига уриниши учун қандай шартни қаноатлантириши керак?

2. Айланаларнинг

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$$

тенгламаларидаги коэффициентлар бу айланаларнинг кесишиши, уриниши учун қандай шартни қаноатлантириши керак?

3. Ушбу иккита айлананинг кесишиш нуқталари топилсин:

а) $x^2+y^2=1$.

б) $x=\cos t+1$, $y=\sin t$.

4. Параметрик кўринишдаги

$$\left.\begin{matrix} x=s^2+1, \\ y=s, \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=t^2 \\ y=t+1 \end{matrix}\right\}$$

тенгламалари билан берилган иккита эгри чизиқнинг кесишиш нуқталари топилсин.

5. Ушбу

$$ax^2+by^2=c, \ Ax^6+By^6=C$$

эгри чизиқлар кесишган нуқталарининг координаталар ўқига нисбатан симметрик равишда жойланиши исбот қилинсин.

II боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1- §. Тўғри чизиқ тенгламасининг умумий кўриниши

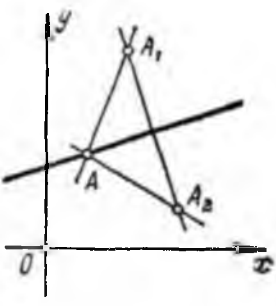
Тўғри чизиқ эгри чизиқлар ичида энг содда ва энг кўп ишлатиладиган чизиқдир.

Биз ҳозир *ҳар қандай тўғри чизиқ ушбу*

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама билан ифодаланишини исбот қиламиз, бунда a, b, c — *ўзгармаслар*. Аксинча, *агар a ва b лар бир вақтда нолга тенг бўлмаса, тенгламаси* (1) *дан иборат тўғри чизиқ мавжуд.*

Айтайлик, A_1 (a_1, b_1), A_2 (a_2, b_2) — берилган тўғри чизиққа нисбатан симметрик иккита нуқта бўлсин (16-расм). Бундай ҳолда тўғри чизиқнинг исталган $A(x, y)$ нуқтаси A_1 ва A_2 нуқталардан баравар узоқлашади ва аксинча, A_1 ва A_2 нуқталардан баравар узоқликда ётган A нуқта тўғри чизиққа тегишли бўлади. Бундан тўғри чизиқ тенгламаси:



16- расм

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + \\ +(y - b_2)^2.$$

Тенгламанинг ҳамма ҳадларини чап томонга ўтказиб, квадратларга кўтариб ва ўз-ўзидан равшан соддалаштиришларни амалга ошириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Даъвонинг биринчи қисми исботланди.

Энди унинг иккинчи қисмини исбот қилайлик. B_1 ва B_2 текисликнинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирувчи иккита нуқтаси бўлсин. $B_1 B_2$ тўғри чизиқ тенгламаси

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

бўлсин. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c = 0, \\ a_1x + b_1x + c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

икки тенглама системаси биргаликда; B_1 ва B_2 нуқталарнинг координаталари бу системани қаноатлантириши тайин гап.

Олинган B_1 ва B_2 нуқталар турлича эканлигидан уларнинг камида битта координаталари бир-бирига тенг эмас, масалан $y_1 \neq y_2$.

(2) даги биринчи тенгламани a_1, иккинчисини a га кўпайтириб ҳадма-ҳад айирсак,

$$(ba_1 - ab_1)\, y + (ca_1 - ac_1) = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама (2) даги тенгламалар натижасидир, шунинг учун уни $y = y_1$, $y = y_2$ қийматлар қаноатлантиради, Бу эса, фақатгина ушбу

$$ba_1 - ab_1 = 0, \ ca_1 - ac_1 = 0$$

тенгликлар ўринли бўлганда юз бера олади. Булардан:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Бу эса (2) даги тенгламаларнинг эквивалентлигини билдиради. Даъвонинг иккинчи қисми исбот бўлди.

1- бобдаги 3- § да (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ нуқталарининг қуйидагича тасвирланиши исбот қилинган эди:

$$x = (1 - t)\, x_1 + tx_2, \ y = (1 - t)\, y_1 + y + ty_2.$$

Демак, *ҳар қандай тўғри чизиқ ушбу*

$$x = at + b, \ y = ct + d, \ -\infty < t < \infty$$

кўринишдаги тенгламалар ёрдамида параметрик ифодаланади.

Аксинча, агар a ва c коэффициентлар бир вақтда нолга тенг бўлмаса, тенгламаларнинг исталган шундай системасини бирор тўғри чизиқнинг параметрик кўринишдаги тенгламалари деб қараш мумкин. Бу тўғри чизиқ ноошкор формада ушбу

$$(x - b)\, c - (y - d)\, a = 0$$

тенглама билан ифодаланади.

Машқлар

1. $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - c^2 = 0$ тенглама иккита тўғри чизиқни ифодалаши исбот қилинсин. Бу тўғри чизиқлардан ҳар бирининг тенгламаси алоҳида-алоҳида топилсин.

2. γ эгри чизиқ ушбу

$$\omega(x, y) = 0$$

тенглама билан берилган, бунда ω ҳарфи x ва y га нисбатан n- тартибли кўпҳад. Агар γ эгри чизиқ бирор тўғри чизиқ билан n тадан ортиқ кесишиш нуқтасига эга бўлса, унинг шу тўғри чизиқни ўз ичига тўлиқ олиши исбот қилинсин.

3. Агар иккита

$$ax + by + c = 0, \ Ax + By + C = 0$$

турли тўғри чизиқнинг коэффициентлари

$$Ab - aB = 0$$

шартни қаноатлантирса, бу тўғри чизиқларнинг параллеллиги исбот қилинсин.

4. Икки айлананинг *радикал ўқи* деб бу айланаларга нисбатан бир хил даражали нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади (I боб, 4- §, 3- машққа қаранг). Радикал ўқнинг тўғри чизиқ эканлиги кўрсатилсин. Айланалар кесишса, радикал ўқ кесишиш нуқталаридан ўтади.

5. Текисликдаги нуқталарнинг берилган икки нуқтагача масофалари квадратларининг айирмаси ўзгармас бўлган тўплами тўғри чизиқдан иборатлиги исбот қилинсин.

6. Маркази O, радиуси R дан иборат айланага нисбатан и н в е р с и я алмаштириши шундан иборатки, ҳар бир A нуқтага OA нурдаги A' нуқта $OA \cdot OA' = R^2$ тенгликнинг бажарилиш шарти билан мос қўйилади.

O нуқта координаталар бошида бўлсин. A' нуқта координаталари A нуқта координаталари орқали ушбу

$$x' = \frac{R^2x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{R^2y}{x^2 + y^2}$$

формулалар бўйича ифодаланиши исбот қилинсин.

7. Инверсияда айлананинг айлана ёки тўғри чизиққа алмашиши исбот қилинсин (иккинчи ҳол, яъни қайси ҳолда тўғри чизиққа алмашиш рўй беради?).

8. $ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа нисбатан $A(x_0, y_0)$ нуқтага симметрик бўлган A^* нуқтанинг координаталари топилсин.

9. Учта (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) нуқта фақат ушбу $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ учинчи тартибли детерминант нолга тенг бўлгандагина битта тўғри чизиқда ётиши исбот қилинсин.

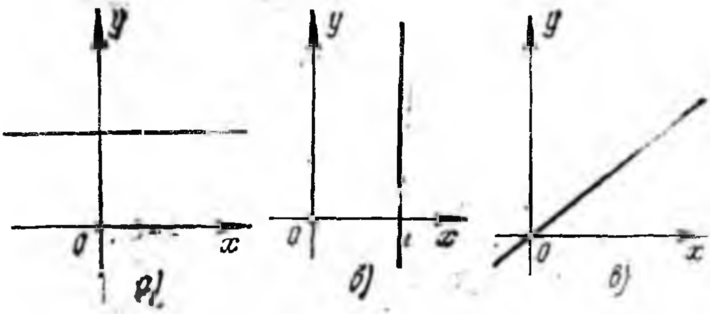
2- §. Тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан вазияти

Тенгламаси $ax + by + c = 0$ дан иборат тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан тутган вазиятини шу тенгламаларнинг хусусий ҳолларига боғлаган ҳолда аниқлайлик.

1. $a=0$. Бу ҳолда тўғри чизиқ тенглғмасини ушбу

$$y=-\frac{c}{b}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари бир хил ($-c/b$) ординатага эга, демак, *тўғри чизиқ x ўқига параллел* (17- расм, *а*). Жумладан $c=0$ *ҳолда тўғри чизиқ x ўқидан иборат.*



17- расм.

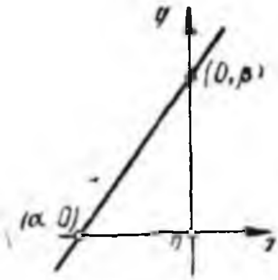
2. $b=0$. Бу ҳолда юқоридаги сингари қаралади, *Тўғри чизиқ y ўқига параллел* (17- расм, б) *ва* $c=0$ *да шу ўқ билан устма-уст тушади.*

3. $c=0$. Тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади, чунки унинг (0, 0) координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради (17- расм, *в*).

4. Энди тўғри чизиқ тенгламасидаги ҳамма коэффициентлар нолдан фарқли дейлик (равшанки, тўғри чизиқ координаталар бошидан ҳам ўтмайди ва x ўқига ҳам y ўқига ҳам параллел эмас). Бундай ҳолда тенгламани $1/c$ га бўлиб ва $-\frac{c}{a}=\alpha$, $-\frac{c}{b}=\beta$ деб фараз қилиб, уни ушбу кўринишга келтирамиз:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1. \tag{1}$$

Тўғри чизиқнинг бу кўринишдаги тенгламасидаги коэффициентларнинг маъноси содда: ишораларидан қатъи назар α ва β лар тўғри чизиқнинг координаталар ўқларидан



18-расм

ажратган кесмалари узунликларига тенг (18-расм). Ҳақиқатан ҳам, тўғри чизиқ $x(y=0)$ ўқини $(\alpha, 0)$ нуқтада y ўқини $(x=0)$ эса $(0, \beta)$ нуқтада кесади.

Машқлар

1. Қайси шарт бажарилганда

$$ax+by+c=0$$

тўғри чизиқ мусбат ярим ўқ x ни (манфий ярим ўқ x ни) кесади?

2. Қайси шарт бажарилганда

$$ax+by+c=0$$

тўғри чизиқ биринчи координат бурчагини кесиб ўтмайди?

3. Ушбу

$$ax+by+c=0,\ ax-by+c=0,\ b\neq 0$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг x ўқига нисбатан симметриклиги исбот қилинсин.

4. Ушбу

$$ax+by+c=0,\ ax+by-c=0$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг координаталар бошига нисбатан симметриклиги исбот қилинсин.

5. Ушбу *тўғри чизиқлар дастаси* берилган:

$$ax+by+c+\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0.$$

λ параметрнинг қайси қийматида тўғри чизиқ дастаси x ўқига (y ўқига) параллел, λ нинг қайси қийматида у координаталар бошидан ўтади?

6. Қайси шарт бажарилганда ушбу

$$ax+by+c=0$$

тўғри чизиқ координаталар ўқлари билан биргаликда тенг ёнли учбурчакни чегаралаб туради?

7. $ax+by+c=0$ тўғри чизиқ (бунда $a,\ b,\ c\neq 0$) ва координаталар ўқлари билан чегараланган учбурчак юзининг

$$S=\frac{1}{2}\frac{c^2}{|ab|}$$

га тенглиги исбот қилинсин.

8. Ушбу айлана берилган:

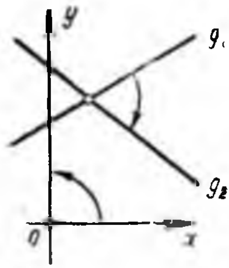
$$x^2+y^2+2ax+2by=0,$$

шу айлананинг координаталар ўқига параллел уринмалари топилсин.

3- §. Тўғри чизиқнинг y га нисбатан ечилган тенгламаси. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

y ўқига параллел бўлмаган исталган тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда бир йўналишда x усади, иккинчи йўналишда камаяди, x ўса борган йўналишни *мусбат йўналиш* деб атаймиз.

Фараз қилайлик, xy текисликда y ўқига параллел бўлмаган иккита тўғри чизиқ g_1 ва g_2 берилган бўлсин. g_2 тўғри чизиқнинг g_1 тўғри чизиқ билан ташкил қилган θ (g_1, g_2) бурчаги деб, g_1 нинг мусбат йўналишини буриб, g_2 нинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушириш учун керак бўлган ва абсолют қиймати π дан кичик бурчакка айтилади. Агар бунда g_1 тўғри чизиқни буриш мусбат ярим ўқ x ни мусбат ярим ўқ y билан устма-уст келтириш учун $\frac{\pi}{2}$ га тенг бурчакка буриш билан бир хил бўлса, бурчак мусбат ҳисобланади (19-расм).



19- расм.

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ўз-ўзидан равшан ушбу хоссаларга эга:

1) $\theta(g_1, g_2) = -\theta(g_2, g_1)$;

2) $\theta(g_1, g_2) = 0$ — фақат бу тўғри чизиқлар параллел ёки устма-уст тушган ҳолда.

3) $\theta(g_3, g_1) = \theta(g_3, g_2) + \theta(g_2, g_1)$.

Тенгламаси

$$ax + by + c = 0.$$

дан иборат тўғри чизиқ y ўқига параллел эмас деб фараз қилайлик ($b \neq 0$). Тенгламани $1/b$ га бўлиб ва $-a/b = k$, $-c/b = l$ деб фараз қилиб, уни ушбу кўринишга келтирамиз:

$$y = kx + l. \tag{1}$$

Тўғри чизиқнинг бу кўринишли тенгламасидаги коэффициентларининг геометрик маъноси содда:

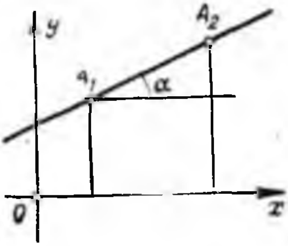
k — тўғри чизиқнинг x ўқи билан ташкил қилган α бурчагининг тангенси;

l — ишорасидан қатъи назар, тўғри чизиқнинг y ўқидан ажратган кесмаси.

Ҳақиқатан ҳам, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ — тўғри чизиқдаги иккита нуқта бўлсин (20- расм), бу ҳолда

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + l) - (kx_1 + l)}{x_2 - x_1} = k.$$

y ўқини тўғри чизиқ $(0, l)$ нуқтада кесиши равшан.



20- расм.

Энди xy текисликда икки тўғри чизиқ берилган бўлсин:

$$y = k_1x + l_1, \quad y = k_2x + l_2.$$

Иккинчи тўғри чизиқнинг биринчи тўғри чизиқ билан ташкил қилган θ бурчагини топайлик. Тўғри чизиқларнинг x ўқи билан ташкил қилган бурчакларини α_1 ва α_2 орқали белгилаб, тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг учинчи хоссасига асосан $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ ни ҳосил қиламиз. Аммо бурчак коэффициентлар; $k_1 = tg\,\alpha_1$, $k_2 = tg\,\alpha_2$, демак,

$$tg\,\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_2}.$$

Бундан θ бурчак аниқланади, чунки $[\theta] < \pi$.

Машқлар

1. Ушбу тўғри чизиқларнинг тўғри бурчак остида кесишиши исбот қилинсин.

$$ax + by + c = 0, \quad bx - ay + c' = 0.$$

2. Ушбу

$$y = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha \ \left(\text{бунда } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$$

тўғри чизиқ x ўқи билан қандай бурчак ташкил қилади?

3. Томони 1 бўлган тенг томонли учбурчак томонларидан бири билан шу томонга туширилган баландликни координаталар ўқлари сифатида қабул қилиб, томонлар тенгламалари тузилсин.

4. Қуйидаги тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг ички бурчаклари топилсин:

$$x - 2y = 0, \ 2x + y = 0, \ x + y = 1.$$

5. Қайси шарт бажарилганда $ax + by = 0$, $a_1x + b_1y = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак учун x ўқи биссектриса вазифасини бажаради?

6. Тўғри чизиқ $x = at + b$, $y = ct + d$ тенгламалар билан берилган. Унинг x ўқи билан ташкил қилган θ бурчаги учун ушбу формула исбот қилинсин:

$$tg\,\theta = \frac{c}{a}.$$

7. Параметрик кўринишдаги тенгламалари билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин:

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1t + b_1, \\ y = a_2t + b_2; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = c_1t + d_1, \\ y = c_2t + d_2. \end{array}\right\}$$

8. Ушбу

$$\pm ax \pm by + c = 0 \quad (a,\ b,\ c \neq 0)$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган тўртбурчакнинг ромблиги исбот қилинсин. Координаталар ўқлари унинг диагоналларидан иборат.

4- §. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти

xy текисликда икки тўғри чизиқ ўз тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Бу тўғри чизиқларнинг, а) параллел, б) перпендикуляр бўлишлиги учун уларнинг тенгламаларидаги коэффициентлари қандай шартни қаноатлантиришини аниқлайлик.

Бу тўғри чизиқлардан ҳеч бири y ўқига параллел эмас деб фараз қилайлик. Бундай ҳолда уларнинг тенгламаларини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = k_1x + l_1,$$
$$y = k_2x + l_2,$$

бунда

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ k_2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ифодасини назарга олиб, уларнинг *параллеллик шартини* ҳосил қиламиз:

$$k_1 - k_2 = 0$$

ёки

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{1}$$

Перпендикулярлик шарти:

$$1 + k_1k_2 = 0$$

ёки

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{2}$$

Ҳосил қилинган (1) ва (2) шартлар гарчи тўғри чизиқлардан бири ҳам y ўқига параллел бўлмаган фаразда чиқарилган бўлса-да, улар бу фараз бузилганда ҳам ўз кучини сақлайди.

Масалан, биринчи тўғри чизиқ y ўқига параллел бўлсин. Бу ҳолда $b_1 = 0$. Агар иккинчи тўғри чизиқ биринчи тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳам y ўқига параллелдир ва, демак, $b_2 = 0$. (1) шартнинг бажарилиши аён. Агар иккинчи тўғри чизиқ биринчисига перпендикуляр бўлса, унда у x ўқига параллел, демак, $a_2 = 0$. Бундай ҳолда (2) шартнинг бажарилиши аён.

Энди (1) шартнинг етарли эканлигини исботлайлик: *агар тўғри чизиқлар учун (1) шарт бажарилса, улар ё параллел, ёки устма-уст тушади.*

$b_1 \neq 0$ бўлсин дейлик. Бундай ҳолда (1) шартдан $b_2 \neq 0$ деган хулоса чиқади, чунки акс ҳол юз беради деб ($b_2 = 0$) фараз қилсак, $a_2 = 0$ бўлар эди, бу эса мумкин эмас. Қилинган фаразда

$$(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0) \tag{1}$$

даги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ ёки } k_1 = k_2,$$

бу эса тўғри чизиқларнинг x ўқи билан ташкил қилган бурчакларининг тенглигидан дарак беради. Демак, тўғри чизиқлар ё параллел, ёки устма-уст тушади.

Агар $b_1 = 0$ (демак, $a_1 \neq 0$) бўлса, (1) дан $b_2 = 0$ ҳосил қилинади. Шундай қилиб, иккала тўғри чизиқ ҳам y ўқига параллел: демак, улар ё бир-бирига параллел, ёки устма-уст тушади.

Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги учун (2) шартнинг етарлилигини исбот қилайлик.

Аввало $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ бўлсин дейлик. Бу ҳолда (2) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = 0$$

ёки

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Бу эса тўғри чизиқларнинг тўғри бурчак ташкил қилишини, яъни перпендикулярлигини билдиради.

Энди $b_1 = 0$ (демак, $a_1 \neq 0$) бўлса, (2) тенгликдан $a_2 = 0$ деган хулосани чиқарамиз. Шундай қилиб, биринчи тўғри чизиқ y ўқига параллел, иккинчиси эса x ўқига параллел, демак, улар бир-бирига перпендикулярдир.

$b_2 = 0$ бўлган ҳол шу сингари текширилади.

Машқлар.

1. Агар икки тўғри чизиқ координаталар ўқларидан бир хил узунликдаги кесмалар ажратса, улар ё бир-бирига параллел, ёки перпендикуляр бўлиши исбот қилинсин.

2. Параметрик кўринишдаги тенгламалари билан берилган ушбу тўғри чизиқларнинг параллеллик (перпендикулярлик) шарти топилсин:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1 t + a_1, \\ y = \beta_1 t + b_1; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \alpha_2 t + a_2, \\ y = \beta_2 t + b_2. \end{array}\right\}$$

3. Бири $ax + by + c = 0$ тенглама билан, иккинчи параметрик $x = \alpha t + \beta$, $y = \gamma t + \delta$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг паралеллик (перпендикулярлик) шарти топилсин.

4. Тўғри чизиқларнинг

$$a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

тенгламалар билан берилган оиласида (λ — оила параметри) $ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа параллел (перпендикуляр) бўлгани топилсин.

5- §. Тўғри чизиқ билан нуқтанинг ўзаро вазияти. Тўғри чизиқнинг нормал кўринишдаги тенгламаси

Айтайлик, xy текисликда A' (x', y') нуқта ва g тўғри чизиқ берилган бўлсин:

$$ax + by + c = 0.$$

Агар A' нуқта g тўғри чизиқда ётса, у ҳолда:

$$ax' + by' + c = 0.$$

A' нуқта тўғри чизиқда ётмаган деб фараз қилиб, қуйидаги ифоданинг геометрик маъносини ойдинлаштирайлик:

$$h(x', y') = ax' + by' + c.$$

Фараз қилайлик, A' (x', y') ва A'' (x'', y'') нуқталар g тўғри чизиқда ётмайдиган бўлсин. $A'A''$ кесмадаги исталган нуқтанинг координаталарини ушбу кўринишда ифодалаш мумкин:

$$x = tx' + (1 - t)\, x'', \quad y = ty' + (1 - t)\, y'', \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(I боб, 3- §). Шундай қилиб, $A'A''$ кесманинг исталган A нуқтаси учун:

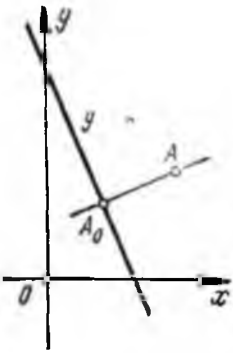
$$h(x,y) = th(x', y') + (1 - t)\, h(x'', y'') = h(t).$$

Агар A' ва A'' нуқталар битта ярим текисликка тегишли бўлса, $h(t)$ функция $[0,1]$ кесмада нолга тенг бўлмайди. Демак, $h(0) = h(x'', y'')$ билан $y(1) = h(x', y')$ нинг ишораси бир хил. Агар A' ва A'' турли ярим текисликларга тегишли бўлса, у ҳолда $h(t)$ функция $[0,1]$ кесмада нолга айланади ва чизиқли бўлгани сабабли кесманинг учларида қарама-қарши ишорали қийматларни қабул қилади, яъни $h(x'', y'')$ билан $h(x', y')$ нинг ишоралари тескари.

Хуллас, *ушбу ифода:*

$$ax' + by' + c$$

g тўғри чизиқ аниқланган ярим текисликларнинг бири учун мусбат, иккинчиси учун эса манфий. Энди $|ax' + by + c|$ нинг геометрик маъносини очиш мақсадида A' нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топамиз.



21- расм.

A' нуқтадан g тўғри чизиққа перпендикуляр туширамиз (21- расм). A_0 (x_0, y_0)—перпендикуляр асоси бўлсин. $A'A_0$ тўғри чизиқ тенгламасини

$$b(x - x') - a(y - y') = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу тенглама билан берилган тўғри чизиқ A' нуқтадан ўтиб, g га перпендикуляр. Бундан:

$$b(x_0 - x') - a(y_0 - y') = 0. \qquad (1)$$

Аммо A_0 нуқта g тўғри чизиқда ётади, шунинг учун

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Бундан:

$$ax' + by' + c = a(x' - x_0) + b(y' - y_0). \qquad (2)$$

(1), (2) тенгликлардан квадратга кўтариш ва қўшиш натижасида ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(ax' + by' + c)^2 = (a^2 + b^2)[(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2].$$

Шундай қилиб,

$$|ax' + by' + c| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\delta(x', y'),$$

бунда $\delta(x', y')$ билан $A'(x', y')$ нуқтадан g тўғри чизиққача масофа белгиланган.

Хуллас, *$|ax' + by' + c|$ га тенг миқдор (x', y') нуқтадан*

$$ax + by + c = 0$$

тўғри чизиққача бўлган масофага пропорционалдир. Жумладан, $a^2 + b^2 = 1$ бўлса, айтилган миқдор нуқтадан тўғри чизиққача масофага тенг. Бундай ҳолда тўғри чизиқ *нормал кўринишдаги* тенглама билан берилган деб айтадилар.

Равшанки, тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$ax + by + c = 0$$

ни нормал куринишга келтириш учун уни $+\sqrt{a^2+b^2}$ ёки $-\sqrt{a^2+b^2}$ га бўлиш керак.

Тўғри чизиқнинг нормал кўринишдаги тенгламасининг татбиқи сифатида уз учларининг координаталари билан берилган учбурчак юзи формуласини келтириб чиқарамиз: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$— учбурчак учлари бўлсин. Учбурчак юзи:

$$S = \frac{1}{2} h\,|BC|,$$

бунда h ҳарфи BC томонга туширилган баландликни билдиради:

$$|BC| = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{1/2}.$$

h ни топайлик. BC тўғри чизиқ тенгламаси:

$$(x - x_2)(y_2 - y_3) - (y - y_2)(x_2 - x_3) = 0.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенглама чизиқли ва B, C нукталар уни қаноатлантиради. Бу тўғри чизиқ тенгламасини нормал кўринишга келтирайлик; бунинг учун уни $[(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2]^{1/2}$ га бўламиз. Натижада:

$$\frac{(x - x_2)(y_2 - y_3) - (y - y_2)(x_2 - x_3)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} = 0.$$

Агар бу тенгламанинг чап томонига A нуктанинг координаталарини қўйсак, натижада учбурчакнинг A нуқтадан туширилган баландлиги ишоранинг аниқлигигача ҳосил қилинади. Демак, *учбурчак юзи:*

$$S = \frac{1}{2}\,|(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)|.$$

Машқлар

1. Учбурчак томонларининг тенгламалари ва уз координаталари билан нуқта берилган. Бу нуқтанинг учбурчак ичида ётиш-ётмаслигини қандай билиш мумкин?

2. Параллел бўлган $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги масофанинг

$$\left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

га тенглиги исбот қилинсин.

3. $ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа параллел ва ундан δ масофада турган тўғри чизиқлар тенгламалари тузилсин.

4. Агар кесишувчи икки тўғри чизиқ нормал кўринишдаги ушбу $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ тенгламалари билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчаклар биссектрисалари

$$(ax + by + c) \pm (a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

5. Берилган икки нуқтагача олинган масофалари берилган нисбатда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни иккита тўғри чизиқдан иборатлиги исбот қилинсин. Олинган тўғри чизиқлар нормал кўринишдаги тенгламалари билан берилган деб фараз қилиб ва масофалар нисбати $\lambda:\mu$ га тенг деб қабул килиб, бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари тузилсин.

6-§. Тўғри чизиққа оид асосий масалалар

$A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқнинг тенгламасини тузайлик.

Изланган тўғри чизиқ тенгламаси

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

бўлсин. Тўғри чизиқ A нуқтадан ўтганлиги учун:

$$ax_1 + by_1 + c = 0.$$

Бу тенгликдан C ни топиб (1) тенгламага қўйсак,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Равшанки, a, b нинг исталган қийматида ҳам бу тенглама билан бериладиган тўғри чизиқ A нуқтадан ўтади.

Берилган икки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

Тўғри чизиқ A_1 нуқтадан ўтганлиги учун унинг тенгламасини $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Аммо тўғри чизиқ A_2 нуқтадан ҳам ўтади, демак:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

бундан

$$\frac{a}{b} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

изланган тўғри чизиқ тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

$ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа параллел ва $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

$$ax + by + \lambda = 0$$

тенглама λ нинг исталган қийматида ҳам берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқни ифодалайди. λ ни шундай танлаймизки, бу тенгламани $x = x_1$, $y = y_1$ қаноатлантирсин: $ax_1 + by_1 + \lambda = 0$. Бундан $\lambda = -ax_1 - by_1$; изланган тенглама

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

дан иборат.

$A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтиб, $ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик. λ нинг исталган кийматида ҳам

$$bx - ay + \lambda = 0$$

тўғри чизиқ берилган тўғри чизиққа перпендикуляр. λ ни шундай танлаб оламизки, бу тенгламани $x = x_1$, $y = y_1$ қаноатлантирсин, натижада изланган тенглама ҳосил қилинади:

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0.$$

Берилган $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи ва x ўқи билан α бурчак ташкил қиладиган тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

Тўғри чизиқ тенгламасини $y = kx + l$ кўринишда ёзиш мумкин. k ва l коэффициентлар $\operatorname{tg}\alpha = k, y_1 = kx_1 + l$ шартлардан топилади. Изланган тенглама:

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\alpha.$$

Пировардида қуйидагини таъкидлаб ўтамиз: *берилган иккита*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасидан ўтувчи исталган тўғри чизиқ тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0. \qquad (2)$$

Ҳақиқатан ҳам, (2) тенглама бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар қандай λ, μ учун ҳам берилган икки тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасидан ўтадиган тўғри чизиқни ифодалайди, чунки бу нуқтанинг координаталари, равшанки (2) ни қаноатлантиради. Сўнгра берилган тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан фарқли қайси бир (x_1, y_1) нуқтани олмайлик, (2) тўғри чизиқ

$$\lambda = a_2x_1 + b_2y_2 + c_2,\ -\mu = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1$$

қийматларда (x_1, y_1) нуқтадан ўтади. Демак, берилган тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами (2) тенглама билан ифодаланувчи тўғри чизиқлар билан тўла қопланади.

Машқлар

1. $ax+by+c=0$ тўғри чизиққа параллел (перпендикуляр) ва $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ тўғри чизикларнинг кесишган нуқтасидан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

2. (x_1, y_1), (x_2, y_2) нуқталар қандай шарт бажарилганда $ax+by+c=0$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашади?

3. (x_0, y_0) нуқтадан ўтиб, (x_1, y_1), (x_2, y_2) нуқталардан баравар узоқлашган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

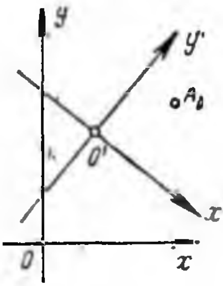
4. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) дан иборат учта нуқта фақат

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

шарт бажарилгандагина битта тўғри чизикда ётиши исбот қилинсин.

7-§. Координаталарни алмаштириш

Фараз қилайлик, текисликда координаталарнинг иккита системаси берилган бўлсин: xy ва $x'y'$ (22-расм). *Координаталарнинг бу системаларига нисбатан ихтиёрий нуқта координаталари орасидаги боғланишни аниқлайлик.*



22- расм.

Айтайлик,

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$$

тенгламалар xy координаталар системасида y' ва x' ўқларнинг нормал кўринишли тенгламалари бўлсин.

Тўғри чизиқнинг нормал кўринишли тенгламасидаги барча коэффициентлар ишорасини тескарига алмаштириш мумкин—тенглама аниқлаб берган геометрик образ (тўғри чизиқ) бунинг натижасида ўзгармайди. Шу сабабли, $x'y'$ координаталар системасининг биринчи квадрантидаги бирор $A(x_0, y_0)$ нуқта учун ушбу тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1>0,$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2>0$$

(акс ҳолда коэффициентлар ишораларини тескарига алмаштириш мумкин).

Биз ихтиёрий нуқтанинг $x'y'$ системага нисбатан x', y' координаталари ўша нуқтанинг xy системага нисбатан x, y координаталари орқали ушбу формулалар бўйича ифодаланади деб тасдиқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1, \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Масалан, биринчи формулани исбот қилайлик. Формуланинг чап ва ўнг томонларининг абсолют қиймати бир хил, чунки нуқтадан y' ўққача масофани билдиради. y' ўқ аниқлаб берган ярим текисликларнинг ҳар бирида формуланинг чап ва ўнг қисмлари ўз ишорасини сақлайди ва бу ярим текисликларнинг биридан иккинчисига ўтганда ишорани ўзгартиради. Аммо A_0 нуқта учун ишоралар бир хиллиги сабабли, улар текисликнинг исталган нуқтаси учун ҳам бир хил бўлади.

Иккинчи формула шунинг сингари исбот қилинади.

Лекин

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

иккита перпендикуляр тўгри чизиқнинг нормал кўринишдаги тенгламалари булгани сабабли, (1) формулалардаги a_1, b_1, a_2, b_2 коэффициентлар орасида қуйидаги муносабатлар мавжуд:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) даги формулаларнинг дастлабки иккитасини назарга олиб, a_1, b_1, a_2, b_2 коэффициентларни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$a_1 = \cos\alpha, \quad b_1 = \sin\alpha,$$
$$a_2 = \cos\alpha_1, \quad b_2 = \sin\alpha_1.$$

Энди (2) даги учинчи муносабатдан

$$\cos\alpha\ \cos\alpha_1 + \sin\alpha\ \sin\alpha_1 = \cos(\alpha - \alpha_1) = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бундан эса: $\alpha_1 = \alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Хуллас, координаталарни алмаштириш формулалари (1) ни ушбу икки кўринишнинг бирида ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha + c_2 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + c_2. \end{aligned}\right\}$$

Бу формулаларнинг биринчиси координаталарнинг $x'y'$ системасини xy системадан ҳаракат натижасида ҳосил қилиниши мумкин бўлган ҳамма ҳолларни ўз ичига олади. Формулаларнинг иккинчи системаси координаталарнинг $x' y'$ системасини xy системадан ҳаракатлантириш билан симметрик акслантириш натижасида ҳосил қилинади.

Координаталарни алмаштириш формулаларига кирган α, c_1, c_2 катталикларнинг геометрик маъноси содда: 2π ни такрорлайдиган $2k\pi$ дан қатъи назар, α харфи x' ўқнинг x билан ташкил қилган бурчакни, c_1, c_2 эса xy координаталар системаси бошининг $x'y'$ системага нисбатан координаталарини билдиради.

Координаталарни алмаштириш формулаларини бошқача изоҳлаш ҳам мумкин: уларни биз текисликни ўз-ўзига акслантириш формулалари сифатида караймиз, бундай акслантиришда x, y координатали нуқтага координаталарнинг *ўша системасининг ўзида* x', y' координатали нуқта мос қилиб қўйилади деб ҳисоблаймиз. Бу акслантириш масофаларни сақлаш хусусияти билан ажралиб туради, яъни исталган иккита A ва B нукта орасидаги масофа уларнинг образи бўлган A' ва B' нуқталар орасидаги масофага тенг. Шундай қилиб бу симметрик акслантириш *ҳаракатнинг ўзи* (асли ҳаракат) ёки *кўзгудан қайтиш қўшилган ҳаракатдан* иборат. Формулаларнинг биринчи системаси асли ҳаракатларга, формулалар системасининг иккинчиси эса кўзгудан қайтиш қўшилган ҳаракатларга мос келади.

Машқлар

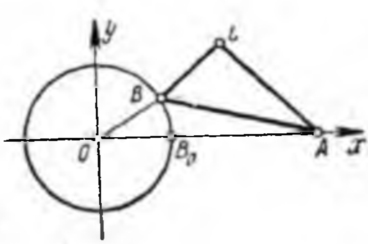
1. Координаталарнинг xy системасидан координаталарнинг x' y' системасига ўтиш формулалари тузилсин, бунда x' ва y' координаталар ўқлари ушбу тенгламалар билан берилган:

$$ax + by + c_1 = 0, \quad -bx + ay + c_2 = 0.$$

2. $x + y = 0$, $x - y = 0$ ни ифодаловчи тўғри чизиқларни янги координата ўқлари сифатида қабул қилиб, $x^2 - y^2 = a^2$ эгри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

3. $x'y'$ координаталар системаси xy координаталар системасидан уни бирор (x_0, y_0) нуқта атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинган. Координаталарни алмаштириш формулалари (1) бўйича x_0, y_0 топилсин.

4. $z = x + iy$ деб фараз қилсак, xy текисликдаги ҳар қандай ҳаракат комплекс ўзгарувчи z нинг чизиқли алмаштирилиши $z' = \omega z + c$ ёрдамида амалга оширилиши мумкин, бунда ω ва c комплекс сонлар ва $|\omega| = 1$. Шуни исбот қилинсин.

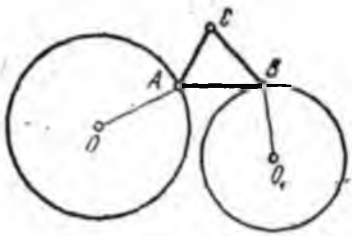


23- расм.

5. 23- расмда тасвирланган механизмга қарашли C нуқтанинг чизган эгри чизиғи тенгламаси топилсин. ABC учбурчак мустаҳкам A нуқта

x уқи бўйлаб сирпанади, B нуқта эса радиуси R, маркази координаталар бошида бўлган айлана бўйлаб ҳаракат қилади.

Е ч и л и ш и. B нуқта B_0 билан устма-уст тушган пайтда A, B, C нуқталарининг координаталари $(d, 0)$, $(R, 0)$, (a, b) дан иборат $z_0 = a + ib$ деб фараз қилайлик. C нуқтанинг исталган пайтда комплекс координатаси



24- расм.

$$z = \omega z_0 + c$$

га тенг. Аммо B нуқта ҳамиша $x^2 + y^2 = R^2$ айланада, A нуқта эса x ўқида қола боради. Демак,

$$|\omega R + c| = R, \quad \mathrm{Im}(\omega d + c) = 0.$$

Бундан

$$|\omega(R - z_0) + z| = R, \quad \mathrm{Im}(\omega(d - z_0) + z) = 0$$

ёки

$$|R - z_0|^2 + \omega(R - z_0)\bar{z} + \bar{\omega}(R - \bar{z}_0)z + |z|^2 = R^2.$$

$$\omega(d - z_0) - \bar{\omega}(d - \bar{z}_0) + z - \bar{z} = 0$$

(бу ерда Im—мавҳум қисм, $\bar{z}$, $\bar{\omega}$ эса z, ω га қўшма сонлар).

Бу тенгламаларни ω ва $\bar{\omega}$ га нисбатан ечиб ва $\omega\bar{\omega} = 1$ эканлигини назарга олиб, z қаноатлантирган тенгламани ҳосил қиламиз. Сўнгра z ўрнига $x + iy$ ни қўйиб изланган эгри чизиқ тенгламасини ҳосил қиламиз.

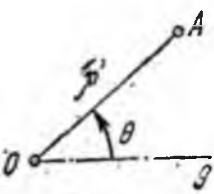
6. 24-расмда тасвирланган механизмга қарашли C нуқта чизган эгри чизиқнинг тенгламаси топилсин. ABC учбурчак мустаҳкам, унинг A ва B учлари айланалар бўйлаб ҳаракат қилади.

III боб

КОНУС КЕСИМЛАРИ

1-§. Қутб координаталар

Текисликнинг исталган O нуқтасидан g тўғри чизиқни ўтказамиз ва O нуқтада бурчакларни ҳисоблаш йўналишини белгилаб оламиз. Текисликнинг ҳар бир нуқтасига иккита ρ ва θ сонни мос келтириш мумкин: ρ билан A нуқтадан O гача масофани ва θ билан OA ярим тўғри чизиқнинг g ярим тўғри чизиқ билан ташкил қилган бурчагини белгилаймиз (25-расм).



25-расм.

ρ ва θ сонлар A нуқтанинг *қутб координаталари* дейилади. O нуқта *қутб*, g ярим тўғри чизиқ эса *қутб ўқи* дейилади.

Декарт координаталари билан иш кўрганимиз сингари, эгри чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламаси ҳақида гапириш мумкин, чунончи, агар эгри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг қутб координаталари ушбу

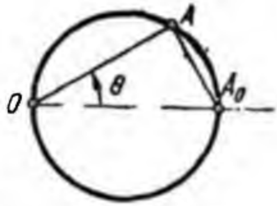
$$\varphi(\rho, \theta) = 0$$

тенгламани қаноатлантирса, бу *тенглама эгри чизиқнинг қутб координаталардаги тенгламаси* деб аталади. Аксинча, ρ, θ сонларнинг бу тенгламани қаноатлантирадиган исталган жуфти эгри чизиқ нуқталаридан бирининг қутб координаталари бўлади.

Мисол тариқасида қутбдан ўтган ва маркази қутб ўқидаги R радиусли айлананинг қутб координаталардаги тенгламасини тузайлик. Тўғри бурчакли OAA_0 учбурчакдан $OA = OA_0 \cos\theta$ ни ҳосил қиламиз (26-расм). Бу ердан айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\rho = 2R\cos\theta.$$

$\rho\theta$ текисликда декарт координаталари системаси xy ни киритамиз, бунинг учун қутб O ни декарт координаталари системасининг боши, қутб ўқини мусбат ярим ўқ x сифатида ва мусбат ярим ўқ y нинг мусбат йўналишини шундай танлаб оламизки, бурчакларнинг ҳисоблаш учун танлаб олинган йўналиш билан мувофиқ ҳолда қутб ўқи билан $+\frac{\pi}{2}$ бурчакни ҳосил қилсин.



26- расм.

Нуқтанинг қутб ва декарт координаталари орасида қуйидагича боғланишнинг мавжудлиги равшан:

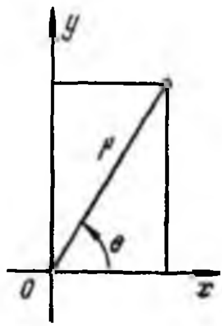
$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{1}$$

(27- расм).

Бу эгри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини билган ҳолда, унинг декарт координаталаридаги тенгламасини ва аксинча, ҳосил қилиш имконини беради.

Мисол тариқасида ихтиёрий тўғри чизиқнинг қутб системасидаги тенгламасини тузайлик. Тўғри чизиқнинг декарт координаталаридаги тенгламаси

$$ax + by + c = 0 \quad c < 0.$$



27- расм.

Бу тенгламага ρ билан θ ни x ва y ўрнига (1) формула бўйича киритсак, натижада:

$$\rho\,(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0.$$

Сўнгра ушбуларни фараз қилсак:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\rho_0$$

тўғри чизиқнинг ушбу кўринишдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\rho\cos(\alpha - \theta) = \rho_0.$$

Машқлар

1. Исталган айлананинг қутб системасидаги тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкинлиги исбот қилинсин:

$$\rho^2 + 2a\rho\cos(\alpha + \theta) + b = 0.$$

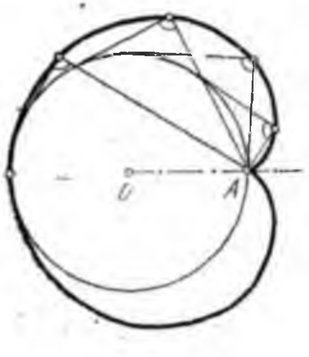
Айлана марказининг координаталари ρ_0, θ_0 ва радиуси R топилсин.

2. Нуқталар орасидаги масофани уларнинг кутб координаталари орқали ифодаланг.

3. Тўғри чизиқнинг кутб координаталаридаги тенгламаси

$$\rho \cos (\alpha - \theta) = \rho_0$$

да α ва ρ_0 нинг қандай геометрик маъноси бор?



28- расм.

4. Айланадаги A нуқтадан шу айлананинг уринмаларига туширилган перпендикуляр асослари геометрик ўрнининг кутб координаталардаги тенгламаси тузилсин (*кардиоида*, 28- расм). A нуқтани кутб деб ва кутб ўқи сифатида эса OA радиуснинг давоми қабул қилинсин.

5. *Бернулли лемнискатаси* деб аталувчи эгри чизиқ тенгламаси тузилсин. Берилган икки F_1 ва F_2 нуқта (фокус) гача масофаларининг кўпайтмаси ўзгармас ва $^1/_4\,|F_1F_2|^2$ га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни шу номни олган. Қутб сифатида фокусларни туташтирувчи кесма ўртаси, қутб ўқи сифатида эса фокуслардан бири орқали ўтувчи ярим тўғри чизиқ қабул қилинсин.

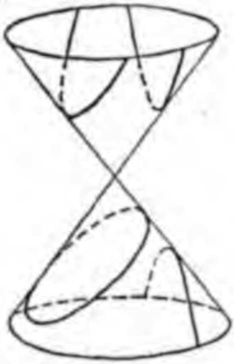
2- §. Конус кесимлари. Қутб координаталардаги тенгламалар

Доиравий конусни унинг учидан ўтмайдиган текислик билан кесиш натижасида ҳосил қилинган эгри чизиқ *конус кесими* дейилади (29- расм). Конус кесимлари қатор ажойиб хоссаларга эга. Уларнинг бири қуйидагидан иборат.

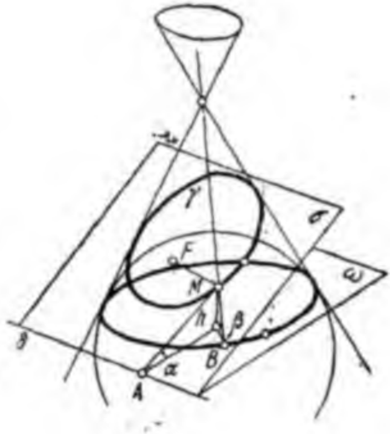
Айланадан бошқа ҳар қандай конус кесими шундай нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборатки, уларнинг берилган F нуқта ва берилган δ тўғри чизиққача масофаларининг нисбати ўзгармасдир.

F нуқта конус кесимининг *фокуси*, δ тўғри чизиқ эса *директрисаси* дейилади.

Бу хоссани исбот қилайлик. Айтайлик, σ текисликнинг конус билан кесишган эгри чизиғи γ бўлсин (30- расм). Конус ичига σ текисликка уринадиган сфера чизайлик; сферанинг текисликка уриниш нуқтасини F орқали белгилайлик. ω билан сферанинг конусга уриниш айланасини белгилайлик. γ эгри чизиқда ихтиёрий P нуқта оламиз. Бу P нуқта орқали конуснинг ясовчисини ўтказиб, унинг ω текислик билан кесишган нуқтасини B орқали белгилаймиз. Ниҳоят, P нуқтадан σ, ω текисликларнинг кесишган тўғри чизиғи δ га перпендикуляр туширамиз.



29- расм.



30- расм.

Ана шу γ чизиқнинг F нуқта билан δ тўғри чизиққа нисбатан юқорида айтилган хоссага эгалигини исбот қилиш талаб қилинади. Ҳақиқатан ҳам, $FP = BP$, чунки бу кесмалар сферага битта нуқтадан ўтказилган уринмалардир. Сўнгра $h(P)$ билан P нуқтадан ω текисликкача масофани белгиласак, у ҳолда:

$$AP = h(P)/\sin\alpha, \quad BP = h(P)/\sin\beta,$$

бунда α билан ω, δ текисликлар орасидаги бурчак ва β-конус ясовчиси билан ω текислик орасидаги бурчак белгиланган.

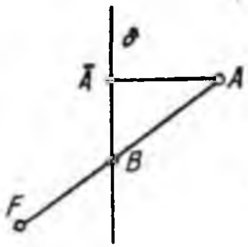
Булардан ушбу тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{AP}{FP} = \frac{AP}{BP} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

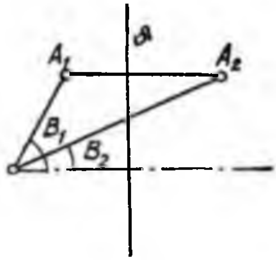
яъни $\frac{AP}{FP}$ нисбат P нуқтага боғлиқ эмас деган хулосага келамиз. Айтганимиз исбот қилинди.

Конус кесимидаги нуқтанинг фокус ва директрисагача масофаларининг нисбати λ нинг қийматига қараб эгри чизиқ *эллипс* ($\lambda < 1$), *парабола* ($\lambda = 1$) ва *гипербола* ($\lambda > 1$) деб аталади. λ сон конус кесимининг *эксцентриситети* дейилади.

F—конус кесимининг фокуси, δ—унинг директрисаси бўлсин (31- расм). Эллипс билан парабола ($\lambda \leqslant 1$) ҳоли учун эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари директрисадан бир тарафда жойлашади, чунончи: F фокус қаердан жой олса, бу нуқ-



31- расм.



32-расм.

талар ҳам ўша ердан жой олади. Ҳақиқатан ҳам, директрисанинг иккинчи тарафидаги нуқталар учун:

$$\frac{AF}{A\bar{A}} > \frac{AB}{A\bar{A}} \geqslant 1.$$

Гипербола билан иш кўрганда эса ($\lambda > 1$) директрисанинг иккала тарафида жойлашган нуқталар мавжуд. Гипербола икки тармоқдан иборат бўлиб, директриса уларни бир-биридан ажратиб туради.

$\rho\theta$ координаталар системасининг қутби сифатида конус кесимининг фокусини қабул қилиб, қутб ўқини эса шундай ўтказамизки, у директрисага перпендикуляр бўлсин ва унинг билан кесишадиган бўлсин. Координаталарнинг ана шундай қутб системасидан конус кесимининг тенгламасини тузамиз.

Фокусдан директрисагача масофа p бўлсин. Конус кесимидаги ихтиёрий A нуқтадан фокусгача масофа ρ га ва директрисагача масофа эса A ва F нуқталарнинг директрисадан бир тарафда ёки турли тарафда бўлишига қараб $P-\rho\cos\theta$ ёки $\rho\cos\theta - P$ га тенг. Булардан конус кесимининг тенгламасини ҳосил қиламиз: эллипс билан парабола учун:

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta} = \lambda \qquad (1)$$

ва гипербола учун:

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta} = \pm\lambda \qquad (2)$$

(«+» ишора гиперболанинг бир тармоғига, «—» ишора эса иккинчи тармоғига мос келади).

(1), (2) тенгламаларни ρ га нисбатан ечиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

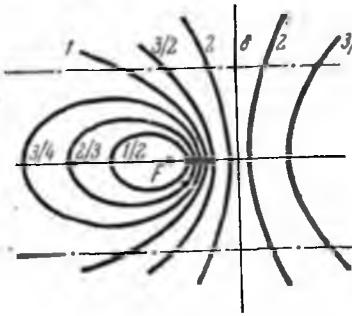
$$\rho = \frac{\lambda p}{1+\lambda \cos \theta},$$

бу *эллипс билан парабола тенгламаси* ва

$$\rho = \frac{\pm \lambda p}{1 \pm \lambda \cos \theta}$$

гипербола тенгламасидир.

Эксцентриситетнинг қабул қилган қийматларига қараб конус кесимининг кўриниши 33- расмда кўрсатилган.



33- расм.

Машқлар

1. Ушбу

$$\rho = \frac{c}{1 + a \cos \theta + b \sin \theta}$$

тенглама билан берилган эгри чизиқнинг конус кесимидан иборатлиги исботлансин. Қандай шарт бажарилганда эгри чизиқ эллипс, гипербола, парабола бўлади?

2. Учта нуқтаси $(\rho_1, 0)$, $(\rho_2, \pi/_2)$, (ρ_3, π) дан иборат ва фокуси координаталар системасининг бошидалиги маълум бўлган эллипс тенгламаси тузилсин.

3. Конус кесимининг F фокуси орқали ўтган тўғри чизиқ билан кесишган нуқталари A ва B бўлсин.

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$$

нинг тўғри чизиққа боғлиқ эмаслиги исбот қилинсин.

4. Параболани фокусга нисбатан инверсия алмаштиришга дуч келтирилганда кардиоида ҳосил бўлиши исбот қилинсин (1- §, 4- машққа қаранг).

3- §. Конус кесимларининг декарт координаталардаги каноник кўринишли тенгламалари

2- § да конус кесимларнинг $\rho\theta$ қутб координаталаридаги тенгламаларини ҳосил қилган эдик. Энди декарт координаталари системасига ўтамиз, бунинг учун қутб O ни координаталар боши ва қутб ўқини мусбат ярим ўқ x сифатида қабул қиламиз.

2-§ даги (1) ва (2) тенгламалардан исталган конус кесими учун ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\rho^2 = \lambda^2 (p - \rho \cos \theta)^2.$$

Бундан эса қутб ва декарт координаталар орасидаги боғланишни аниқловчи 1-§ формулаларини назарга олсак:

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 (p - x)^2$$

ёки

$$(1 - \lambda^2) x^2 + 2p\lambda^2 x + y^2 - \lambda^2 p^2 = 0 \qquad (1)$$

ни ҳосил қиламиз.

Координаталар бошини x ўқи бўйлаб кераклигича силжитиш натижасида бу тенглама анча соддалашади.

Аввал эллипс билан гиперболага тўғри келган ҳолни кўздан кечирайлик. Бу ҳолда (1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(1 - \lambda^2)\left(x + \frac{p\lambda^2}{1-\lambda^2}\right) + y^2 - \frac{p^2\lambda^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

Энди ушбу формулалар бўйича янги x', y' координаталарни киритайлик:

$$x + \frac{\lambda^2 p}{1-\lambda^2} = x', \; y = y',$$

бу эса координаталар бошини $\left(-\frac{\lambda^2 p}{1-\lambda^2}, 0\right)$ нуқтага кўчиришга мос келади. Эгри чизиқ тенгламаси бу ҳолда ушбу кўринишни олади:

$$(1 - \lambda^2) x'^2 + y'^2 - \frac{\lambda^2 p^2}{1 - \lambda^2} = 0$$

ёки қисқалик учун

$$\frac{\lambda^2 p^2}{(1-\lambda^2)^2} = a^2, \; \frac{\lambda^2 p^2}{|1-\lambda^2|} = b^2$$

деб фараз қилсак, ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз; *эллипс учун*:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

гипербола учун:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

a, b параметрлар эллипс (гипербола)нинг ярим ўқлари дейилади.

Параболани ($\lambda = 1$) олган ҳолда (1) тенглама ушбу кўринишни қабул қилади:

$$2px + y^2 - p^2 = 0$$

ёки

$$y^2 - 2p\left(-x + \frac{p}{2}\right) = 0;$$

янги

$$x' = -x + \frac{p}{2}, \quad y' = y$$

координаталарни киритиш натижасида тенглама

$$y'^2 - 2px' = 0$$

кўринишга келтирилади.

Конус кесимларининг x', y' координаталарга нисбатан ҳосил қилинган тенгламалари *каноник тенгламалар* дейилади.

Машқлар

1. Фокуси (x_0, y_0) ва директрисаси $ax + by + c = 0$ дан иборат конус кесими тенгламасининг ушбу кўринишга эгалиги исбот қилинсин:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - k^2\ (ax + by + c)^2 = 0.$$

k^2 нинг қандай қийматлари учун бу конус кесими эллипс, парабола, гиперболадан иборат?

2. Фараз қилайлик, K — исталган конус кесими ва F унинг фокуси бўлсин. Конус кесимидаги исталган A нуқтадан F фокусгача масофаси нуқтанинг x, y координаталари орқали чизиқли ифодаланишини яъни

$$AF = \alpha x + \beta y + \nu,$$

эканлигини исбот қилинг, бунда α, β, γ, ўзгармас миқдорлар.

3. Ҳар қандай тўғри чизиқ конус кесими билан иккитадан ортиқ бўлмаган нуқтада кесишиши исбот қилинсин.

4. Берилган икки нуқтагача масофаларининг йиғиндиси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс эканлиги исбот қилинсин (I боб, 4-§, 4-машққа қаранг.)

5. Берилган икки нуқтагача масофаларининг айирмаси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни гипербола эканлиги исбот қилинсин? (I боб, 4-§, 5-машққа қаранг).

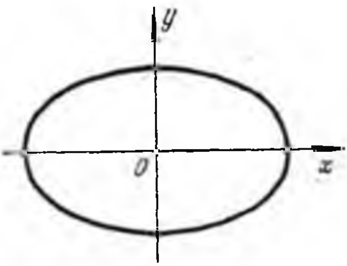
6. Берилган иккита K_1 ва K_2 айланага уринувчи айланалар марказларининг геометрик ўрни нимадан иборат? K_1 ва K_2 айланаларнинг ўзаро жойланишида юз берадиган ҳолларни ҳамда айланалардан бирининг ўрнига тўғри чизиқ олинган ҳолни текширинг.

4-§. Конус кесимларининг шаклини текшириш

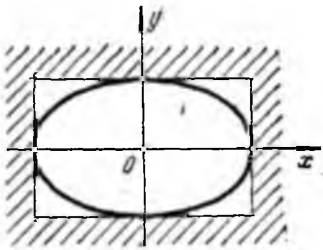
Э л л и п с (34- расм):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Координаталар ўқлари эллипснинг симметрия ўқлари координаталар боши эса симметрия маркази бўлишини таъкидлаб ўтайлик. Ҳақиқатан ҳам, агар (x,y)нуқта эллипсга тегишли бўлса, унга координата ўқларига нисбатан $(-x, y)$,



34- расм.



35- расм.

$(x, -y)$ нуқталар ва шунингдек, координаталар бошига нисбатан симметрик $(-x, -y)$ нуқта ҳам эллипсга тегишлидир, чунки улар (x,y) билан бир вақтда эллипс тенгламасини қаноатлантиради. Эллипснинг симметрия ўқлари билан кесишган нуқталари *эллипснинг учлари* дейилади.

Эллипс томонлари $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$ дан иборат тўғри тўртбурчак ичида ётади, бу тўртбурчак эллипс учларида унга ўтказилган уринмалардан ташкил топган (35- расм). Ҳақиқатан ҳам, агар (x,y) нуқта тўғри тўртбурчакдан ташқарида олинса, иккита $|x|>a$, $|y|>b$ тенгсизликдан камида биттаси бажарилмайди, натижада $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, ва демак, нуқта эллипсга тегишли бўла олмайди.

Айниқса аёний мулоҳазалар асосида айланани бир маромда қиса бориш натижасида эллипс ҳосил қилинади. Текисликда айлана чизайлик:

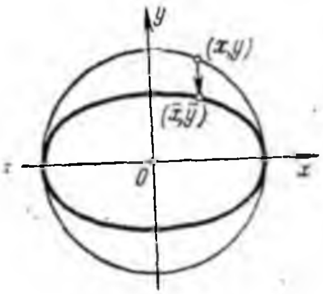
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad (1)$$

Энди xy текислик x ўқига нисбатан бир маромда шундай қисила борсинки, натижада (x,y) нуқта (x,y) нуқтага алмашиниб, бунда $\overline{X}=x$, $\overline{У}=\frac{b}{a}y$ бўлсин. Бу ҳолда (1) айлана қандайдир эгри чизиққа алмашинади (36- расм). Унинг исталган нуқтасининг координаталари

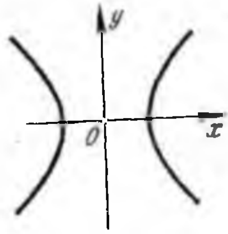
$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}=1$$

тенгламани қаноатлантиради. Бу эгри чизиқ эллипсдир.

Гипербола (37-расм):



36- расм.



37- расм.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

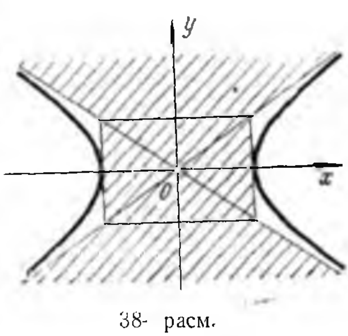
Айнан эллипсга доир мулоҳазаларни ишлатиб, координат ўқларнинг гипербола учун симметрия ўқлари ва координаталар бошининг симметрия маркази бўлиши тўғрисида хулоса чиқарамиз.

Гипербола y ўқига нисбатан симметрик жойлашган иккита тармоқдан иборат бўлиб, улар: а) тўғри туртбурчак $|x|<a$, $|y|<b$ дан ташқарида ва б) бу тўртбурчак диагоналлари (ҳамда уларнинг давомидан ҳосил қилинган) иккита бурчак ичида жойлашгандир (38-расм).

Ҳақиқатан ҳам, тўғри тўртбурчак ичида $|x|<a$, демак,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1,$$

яъни тўғри тўртбурчак ичида гиперболанинг нуқталари йўқ, 38- расмда текисликнинг штрихланган бошқа қисмида ҳам гиперболанинг нуқталари йўқ, чунки $\frac{b}{a}<\frac{|y|}{|x|}$, бундан эса: $\frac{|x|}{a}<\frac{|y|}{b}$, демак:



38- расм.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<0<1.$$

Гиперболанинг яна бир хоссасини кўрсатиб ўтайлик. Агар (x,y) нуқта гипербола бўйлаб координаталар бошидан чегарасиз узоқлаша борса $(x^2+y^2\to\infty)$, бу нуқтанинг тўғри тўртбурчак диагоналларидан биригача масофаси нолга интилади: бу диагоналларнинг

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

тенгламалар билан ифодаланиши равшандир. Ҳақиқатан ҳам, $\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|$ ва $\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|$ дан иборат миқдорлар гиперболадаги (x,y) нуқтадан бу тўғри чизиқларгача масофаларга пропорционалдир (II боб, 5-§). Бу миқдорлар кўпайтмаси:

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|=\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|=1.$$

Агар тўғри тўртбурчак диагоналларидан биригача масофа нолга интилади деган даъвомиз нотўғри бўлганда эди, бу тақдирда шундай λ ва гиперболанинг истаганча шундай узоқлашган нуқталари мавжуд бўлар эдики, улар учун:

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|>\lambda,\ \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|>\lambda.$$

Аммо $\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|=1$, шу сабабдан бундай нуқталар учун:

$$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|<\frac{1}{\lambda},\ \left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|<\frac{1}{\lambda}.$$

Бу тенгсизликларни квадратга кўтариб ва қўшиб;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<\frac{1}{\lambda^2}$$

ни ҳосил қиламиз, бу эса $x^2+y^2\to\infty$ деган фаразга зидлик қилади. Даъвоимиз исбот бўлди.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

дан иборат тўғри чизиқлар гиперболанинг *асимптоталари* дейилади. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

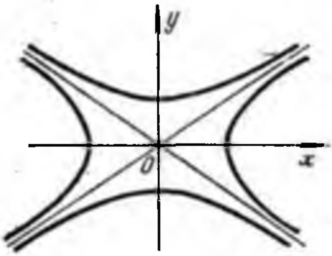
гипербола қаралган

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

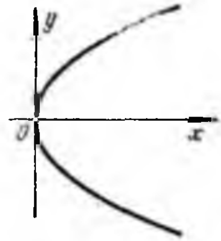
гиперболага нисбатан *қўшма гипербола* дейилади. Бу гипербола ҳам ўша асимптоталарга эга, лекин асимптоталардан ҳосил қилинган қўшимча вертикал бурчаклардан жой олади (39- расм).

Парабола (40- расм):

$$y^2 - 2px = 0$$



39- расм.



40- расм.

учун x ўқи симметрия ўқидир, чунки (x,y) нуқта билан бир қаторда x ўқига симметрик бўлган $(x, -y)$ нуқта ҳам параболага тегишли. Параболанинг симметрия ўқи билан кесишган нуқтаси унинг *учи* дейилади. Шундай қилиб, қаралган ҳолда параболанинг учи координаталар бошидан иборат.

Машқлар

1. Ҳар қандай эллипс айлананинг проекцияси эканлиги исбот қилинсин.

2. Гипербола нуқтасидан асимптоталаргача масофалар кўпайтмасининг ўзгармас эканлиги (нуқтага боғлиқ эмаслиги) исбот қилинсин.

3. Асимптоталари

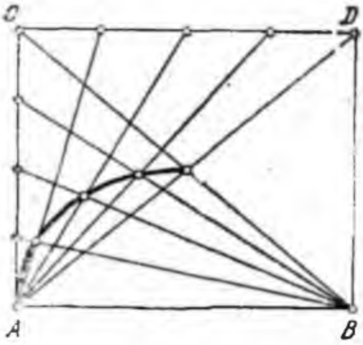
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

дан иборат ҳар қандай гипербола тенгламасини

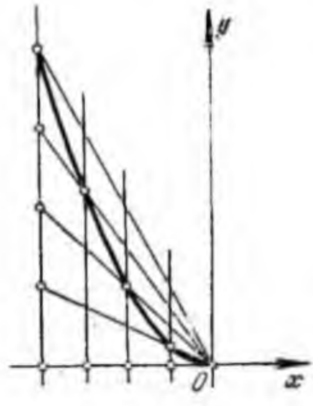
$$(a_1x + b_1y + c_1) \quad (a_2x + b_2y + c_2) = \text{const}$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги исбот қилинсин.

4. Эллипсни ясашнинг ушбу усули асослансин. Тўғри тўртбурчакнинг CD ва AC томонларини сони бир хил бўлган тенг кесмаларга бўлиб юборилади (41- расм). Бўлиниш нуқталарини A ва B билан



41- расм.



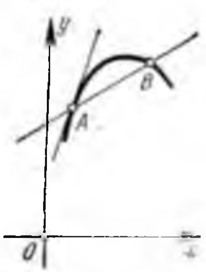
42- расм.

бирлаштирилади. Белгилаб чиқилган кесишиш нуқталари катта ўқи AB дан иборат эллипсда ётади. Кичик ярим ўқ тўғри тўртбурчак баландлигининг ярмига тенг.

5. Параболанинг 42- расмда кўрсатилган ясаш усули асослансин.

5- §. Конус кесимига уринма

Эгри чизиқнинг A нуқтасидаги *уринмаси* деб AB кесувчининг B нуқта A гача чексиз яқинлаша борганлиги лимит вазиятига айтилади (43-расм).



43- расм

Эгри чизиқ $y = f\ (x)$ тенглама билан берилган бўлсин. Эгри чизиққа $A\ (x_0, y_0)$ нуқтадаги уринманинг тенгламасини тузайлик. Фараз қилайлик, $B\ (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ нуқта A га яқин нуқта бўлсин. Кесувчи тенгламаси:

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,(x - x_0).$$

$B \to A$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$; натижада *уринма тенгламасини* ҳосил қиламиз:

$$y - y_0 = f'\ (x_0)\,(x - x_0). \qquad (1)$$

Агар эгри чизиқ $x = \varphi\,(y)$ тенглама билан берилса, (x_0, y_0) нуқтадаги уринма тенгламаси

$$x - x_0 = \varphi'\ (y_0)(y - y_0) \qquad (2)$$

кўринишда бўлади.

Конус кесимига уринма тенгламасини тузайлик.

Парабола. Унинг тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Уринма тенгламасининг бу ҳолда (2) кўриниши қуйидагича:

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0).$$

ёки

$$yy_0 - y_0^2 + px_0 - px = 0.$$

Аммо (x_0, y_0) нуқта параболада ётганлиги сабабли $y_0^2 - 2px_0 = 0$; шунинг учун уринма тенгламаси охирида ушбу кўринишни қабул қилади:

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Эллипс (гипербола). Айтайлик, (x_0, y_0) — эллипс нуқтаси бўлиб, $y_0 \neq 0$ бўлсин. Бу нуқта атрофида эллипсни

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

тенглама билан бериш мумкин, бунда квадрат илдиз олдидаги ишора y_0 ишораси билан бир хил. Уринманинг (1) кўринишдаги тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0),$$

ёки

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0).$$

Бу тенгламани y_0/b^2 га кўпайтириб ва ҳамма ҳадларни тенгликнинг чап томонига ўтказиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

ёки

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

чунки

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Эллипснинг ҳар бир (x_0, y_0) нуқтаси атрофида ($x_0 \neq 0$ шартда) уни

$$x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

тенглама билан ифодалаш мумкин. Квадрат илдиз ишораси x_0 ишораси билан бир хил қилиб олинади. Юқоридаги муҳокамалар асосида (2) формула ёрдамида уринма тенгламасига келамиз:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Эллипснинг ҳар бир нуқтасида x_0 ва y_0 ва бир вақтнинг ўзида нолга тенг бўла олмаслигидан исталган (x_0, y_0) нуқтада уринмасининг тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

уринмасининг тенгламаси шунинг сингари ҳосил қилинади:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Конус кесимининг уринмаси унинг билан фақат битта умумий нуқтага (уриниш нуқтасига) эгалигини исбот қилайлик. Ҳақиқатан ҳам, мисол учун эллипсни олайлик:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(x_0, y_0) нуқтадаги уринма тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Эллипснинг унинг уринмаси билан кесишган нуқталарини излаймиз. Тенгламалардан x ни йўқотиб, y га нисбатан тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{a^2}{x_0^2}\left(\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2-1=0$$

ёки

$$y^2 \frac{a^2}{b^2 x_0^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)-2y\frac{a^2}{x_0^2}\frac{y_0}{b^2}+\frac{a^2}{x_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=0.$$

Аммо (x_0, y_0) нуқта эллипсда ётади, демак $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$; энди y га нисбатан ушбу кўринишни қабул қилади:

$$\frac{a^2}{b^2 x_0^2}(y^2-2yy_0+y_0^2)=0.$$

Бу тенглама бир-бирига тенг иккита $y = y_0$ илдизга эга. Шунинг сингари эллипс ва унинг уринмаларининг тенгламаларидан y ни йўқотиб $x = x_0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб эллипс ўз уринмаси билан битта умумий (x_0, y_0) нуқтага — уриниш нуқтасига эга. Гипербола билан парабола учун ҳам исбот шунинг сингари бўлади.

Уринманинг конус кесими билан фақат битта умумий нуқтага эга бўлиш хоссасига асосланиб, ихтиёрий нуқта орқали ўтадиган иккита уринма тенгламаларини чиройли усулда келтириб чиқариш мумкин. Чунончи, эллипсни олайлик:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Эллипсда ётмаган (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган уринмалар тенгламасини тузайлик. (x,y)— ихтиёрий нуқта бўлсин. (x_0, y_0) ва (x, y) нуқталардан ўтувчи g тўғри чизиқдаги исталган (x', y') нуқтанинг координаталарини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$x' = \frac{x_0+tx}{1+t},$$

$$y' = \frac{y_0+ty}{1+t}.$$

Бу g тўғри чизиқнинг эллипс билан кесишган нуқталарининг координаталарини излаймиз. Ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+2t\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\right)+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=(1+t)^2$$

ёки

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)+2t\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

t га нисбатан бу квадрат тенгламанинг илдизлари каррали, яъни унинг дискриминанти нолга тенг бўлгандагина (x,y) нуқта уринмага тегишлидир. Шундай қилиб, уринмалар тенгламаларини ҳосил қилиш учун тенглама дискриминантини нолга тенглаштириш керак:

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2=0.$$

Гипербола ва парабола учун шунга ўхшаш шарт ҳосил бўлади. Тенгламаси $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ дан иборат тўғри чизиқнинг уриниш нуқтасидан ўтишини таъкидлаб ўтамиз.

Машқлар

1. Гипербола уринмаси асимптоталар билан кесишиб юзи ўзгармас учбурчак ҳосил қилиши исбот қилинсин.

2. Қандай шарт бажарилганда $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсга уринади? Томонлари эллипсга уринган тўғри бурчакларнинг (x_0, y_0) учлари айлана чизиши исбот қилинсин?

3. Томонлари параболага уринган тўғри бурчаклар учларининг директрисада ётиши ва уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқнинг фокусдан ўтиши исбот қилинсин.

4. Конус кесимига уриниб, $\alpha\lambda+\beta y+\nu=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган иккита уринманинг тенгламаси чиқарилсин.

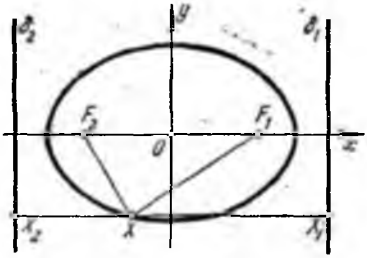
5. Гиперболага ўтказилган уринманинг асимптоталар орасидаги кесмаси уриниш нуқтасида тенг иккига бўлиниши исбот қилинсин.

6- §. Конус кесимларининг фокал хоссалари

Таъриф бўйича конус кесими фокус ва директрисага эга. *Эллипс билан гиперболанинг яна биттадан фокус ва биттадан директрисага эгалигини* исбот қилайлик. Ҳақиқатан ҳам, конус кесими эллипсдан иборат бўлсин. Унинг координаталар ўқларига нисбатан каноник ҳолатда, яъни одатдагича жойланишида унинг δ_1 директрисаси y ўқига параллел, F_1 фокуси эса x ўқида жойлашади (44- расм). Эллипс тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Бундай жойланишида эллипс y ўқига симметрик бўлгани учун, унинг y ўқига нисбатан F_1 фокусга нисбатан F_2 фокуси, δ_1 директрисага нисбатан δ_2 директрисаси бор. Шунинг сингари муҳокамалар юргизиб, гиперболада ҳам иккита фокус билан иккита директриса борлиги исботланади.



44- расм.

Энди *эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан унинг фокусларигача масофалари йиғиндисининг ўзгармас* эканини, яъни бу йиғиндининг нуқтага боғлиқ эмаслигини кўрсатайлик. Ҳа-

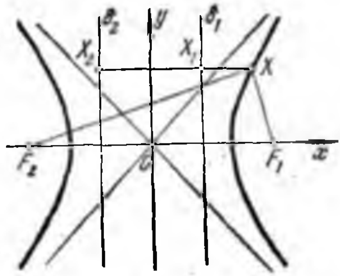
ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий X нуқта учун (44- расм):

$$\frac{XF_1}{XX_1}=\lambda, \quad \frac{XF_2}{XX_2}=\lambda.$$

Булардан:

$$XF_1+XF_2=\lambda\,(X_1X_2)=\mathrm{const}$$

Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан унинг фокусларгача масофалари айирмасининг ўзгармас эканлиги шунинг сингари исбот қилинади (45- расм).



45- расм

Эллипс ва гипербола каноник ҳолатда жойлашган деб фараз қилиб, уларнинг фокусларини топайлик.

Эллипс тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Айтайлик, унинг марказидан фокусларигача масофа c бўлсин. $(0,b)$ учдан фокусларгача масофалар йиғиндиси $2\sqrt{b^2+c^2}$ га ва $(a,\ 0)$ учдан фокусларгача масофалар йиғиндиси эса $2\ a$ га тенг. Бундан

$$\sqrt{b^2+c^2}=a;\ \text{демак,}\ c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Гипербола тенгламаси: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

Гиперболадаги c абсциссали[1)] нуқтадан фокусларгача масофалар айирмасини (a,o) нуқтадан фокусларгача масофалар айирмаси билан солиштирамиз. Натижада гипербола фокусларидан унинг марказигача олинган c масофа учун формула ҳосил қилинади:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Эллипснинг ушбу оптик хоссасини таъкидлаб ўтамиз. *Эллипснинг бир фокусидан чиққан ёруғлик нурлари эллипсдан кўзгу қайтишдан (аксланишдан) сўнг иккинчи фокусдан ўтади*. Бошқача айтганда, агар $A\ (x_0,\ y_0)$ эллипс нуқтаси бўлса, AF_1 ва AF_2 кесмалар A нуқтадаги уринма билан бир хил бурчаклар ташкил қилади.

Бу хоссани исбот қилиш учун фокусдан уринмагача олинган масофанинг уриниш нуқтаси A гача масофага нис-

1) Бунда c — гипербола марказидан фокусларгача масофа.

батининг F_1 ёки F_2 фокуслардан қайси бирининг олиниши-га боғлиқ эмаслигини исботлаш етарли.

F_1 $(e,0)$ фокусдан уриниш нуқтаси A (x_0, y_0) гача масофанинг квадратини ҳисоблайлик:

$$AF_1^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = (x_0 - c)^2 + \left(b^2 - \frac{x_0^2 b^2}{a^2}\right) = x_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a_2}\right) - 2cx_0 + b^2 + c^2.$$

Энди $a^2 = b^2 + c^2$ ни эътиборга олсак:

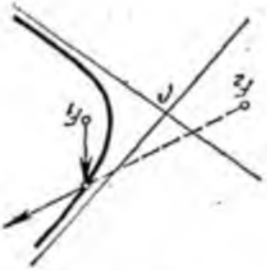
$$AF_1^2 = \frac{x_0^2 c^2}{a^2} - 2cx_0 + a^2 = \left(\frac{cx_0}{a} - a\right)^2.$$

F_1 $(e,0)$ фокусдан A (x_0,y_0) нуқтадаги уринмагача масофа $h_1 = k\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|$ га тенг, бунда k — уринма тенгламасини нормал кўринишга келтирадиган кўпайтувчи.

Булардан:

$$\frac{h_1}{AF_1} = \frac{k}{a}.$$

Иккинчи фокус F_2 $(-c_1, 0)$ учун худди шундай нисбат ҳосил қилинади. Хосса исбот қилинди.



46- расм.

Гипербола шунга ухшаш оптик хоссага эга: *бир фокусдан чиққан ёруғлик нурлари гиперболадан кўзгу қайтишдан сўнг иккинчи фокусдан чиққандек туюлади* (46- расм).

Параболанинг оптик хоссаси: *парабола фокусидан чиққан нурлар параболадан кўзгу қайтишдан сўнг унинг ўқига параллел ҳолда тарқалади.*

Машқлар

1. Эллипс фокусларини ясашнинг ушбу усулини асослаб беринг. Кичик ўқнинг учидан радиуси катта ярим ўққа тенг айланани чизамиз. Бу айлананинг эллипс катта ўқи билан кесишган нуқталари эллипс фокуслари бўлади.

2. Гиперболанинг оптик хоссаси исбот қилинсин.

3. Каноник ҳолатда жойлашган параболанинг фокуси топилсин.

4. Каноник ҳолатда жойлашган конус кесимларининг директрисалари топилсин.

5. Ушбу кўринишдаги

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

тенглама билан берилган барча k_λ конус кесимларининг фокусдош, яъни умумий фокусларга эга булиши исбот қилинсин. Бунда λ — оила параметрини ва k_λ — оиланинг узини билдиради.

6. xy текисликнинг координата ўқларга тегишли бўлмаган ҳар бир нуқтасидан k_λ оилага қарашли иккита конус кесими — эллипс ва гипербола ўтиши (5- машқ) исбот қилинсин.

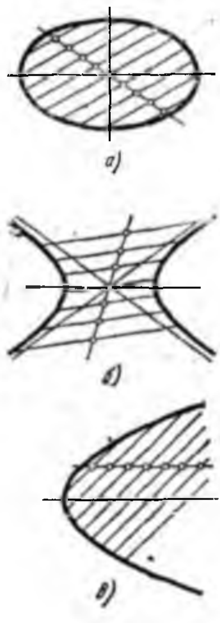
7. k_λ оилага тегишли ва (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи эллипс билан гиперболанинг бу нуқтада тўғри бурчак остида кесишишини, яъни (x_0, y_0) нуқтада уларга ўтказилган уринмаларнинг перпендикулярлиги исбот қилинсин.

7-§. Конус кесимларининг диаметрлари

Эллипс (гипербола)нинг диаметри деб, унинг марказидан утувчи исталган туғри чизиққа айтилади. Параболанинг диаметри деб, унинг уқига параллел булган исталган тўғри чизиққа айтилади, жумладан уқнинг узи ҳам диаметрдир.

Ихтиёрий туғри чизиқ конус кесимини иккитадан ортиқ нуқтада кесмайди. Кесишиш нуқтаси иккита булса, учлари уларнинг кесишиш нуқталаридан иборат кесма *ватар* дейилади. Конус кесимлари ушбу хоссага эга.

Конус кесими параллел ватарларининг ўрталари диаметрда ётади (47- расм).



47- расм.

Ватарлар симметрия ўқига перпендикуляр булса, бу хосса уз-узидан равшан. Бу ҳолда ватарларнинг ўрталари шу уқда ётади.

Умумий ҳолни қарайлик. Координаталар уқларига параллел бўлмаган параллел тўғри чизиқлар оиласини

$$y = kx + b, \quad k \neq 0$$

кўринишдаги тенгламалар билан бериш мумкин, бунда k — ҳамма туғри чизиқлар учун бир хил.

Эллипс ва гипербола тенгламаларини қуйидагича ёзиш натижасида бирлаштириб юбориш мумкин:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0.$$

Ватарларнинг учлари ушбу тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\alpha x^2 + \beta y^3 - 1 = 0, \; y = kx + b.$$

Биринчи тенгламада y урнига $kx+b$ ни қуйиб, ватар учларининг координаталари x_1, x_2 қаноатлантирган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(\alpha+\beta k^2)x^2+2\beta kbx+\beta b^2-1=0.$$

Квадрат тенглама илдизларининг хоссасига асосан:

$$x_1+x_2=-\frac{2\beta kb}{\alpha+\beta k^2}.$$

Демак, ватар уртасининг абсциссаси:

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{\beta kb}{\alpha+\beta k^2}.$$

x_c ни ватар тенгламаси $y=kx+b$ га қуйиб, y_c ординатани топамиз:

$$y_c=-\frac{\beta k^2 b}{\alpha+\beta k^2}+b=\frac{\alpha b}{\alpha+\beta k^2}.$$

Бундан:

$$y_c=-\frac{\alpha}{\beta k}x_c.$$

Шундай қилиб, $y=kx+b$ ватарларнинг урталари координаталар боши — эллипс (гипербола) марказидан утадиган туғри чизиқда ётади. Унинг бурчак коэффициенти

$$k'=-\frac{\alpha}{\beta k}.$$

$$y=k'x$$

диаметр ватарларга параллел булган

$$y=kx$$

диаметрга нисбатан *қушма* дейилади.

Диаметрларнинг қушма булишлик хоссаси ўзаролик муносабатидир, чунки $y=k'x$ га қушма диаметрнинг бурчак коэффициенти $-\frac{\alpha}{\beta k'}$ га тенг.

Парабола ҳолини курайлик. Ватарлар учларининг координаталари тенгламаларнинг ушбу системасини қаноатлантиради:

$$y^2-2px=0,\ y=kx+b.$$

x ни йуқотиб, ватар учларининг ординатаси учун тенгламани топамиз:

$$y^2-\frac{2py}{k}+\frac{2pb}{k}=0.$$

Юқоридаги сингари бу тенгламадан:

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}.$$

Демак,

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} = \text{const}.$$

Ватарларнинг ўрталари x ўқи (яъни парабола ўқи) га параллел тўғри чизиқда ётади.

Қўшма диаметрларнинг яна бир хоссасини таъкидлаб ўтайлик. *Агар диаметр конус кесими билан кесишса, уриниш нуқталаридаги уринмалар қўшма диаметрга параллел бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, (x_0, y_0) нуқта $y = kx$ диаметрнинг эллипс (гипербола) $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ билан кесишган нуқтаси бўлсин. (x_0, y_0) нуқтадаги уринма тенгламаси: $\alpha x x_0 + \beta y y_0 - 1 = 0$. Унинг бурчак коэффициенти $k' = -\frac{\alpha x_0}{\beta y_0}$. Аммо (x_0, y_0) нуқта $y = kx$ диаметрда ётади, шунинг учун $y = kx_0$. Демак,

$$k' = -\frac{\alpha}{\beta k}$$

ва шуни исботламоқчи эдик.

Машқлар

1.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипс уринмаларининг бурчак коэффициентлари k га тенг. Уриниш нуқталари топилсин.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг ватари (x_0, y_0) нуқтада тенг иккига бўлинади. Ватарнинг бурчак коэффициенти топилсин.

4. Эллипсни ушбу параметрик кўринишдаги

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$

тенгламалар билан ифодалаш мумкинлиги исбот қилинсин. Қўшма диаметрлар учларига мос келадиган t параметрнинг қийматлари қандай шартни қаноатлантиради? Эллипснинг қўшма диаметрлари квадратларининг йиғиндиси ўзгармаслиги исбот қилинсин (Аполлоний теоремаси). Гипербола учун тегишли теорема айтилсин ва исбот қилинсин.

4. Ҳар қандай эллипсни доира проекцияси деб қараш мумкинлиги исбот қилинсин. Бунга асосланиб қўшма диаметрлар охирида эллипсга ўтказилган уринмалардан ташкил топган параллелограмм юзининг ўзгармас эканлиги исботлансин.

5. Учлари $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг қўшма диаметрларининг охи-

рида булган исталган параллелограмм юзининг $2ab$ га тенглиги исбот қилинсин.

6. Айланага ички чизилган барча туртбурчаклар ичида квадратнинг юзи энг катта булиши маълум фактдир. Эллипсга ички чизилган туртбурчаклардан эса юзи энг каттаси учлари қушма диаметрлар охирларида булган параллелограммлиги исбот қилинсин.

7. Ярим уқлари a, b дан иборат эллипс юзининг πab га тенглиги исбот қилинсин.

8. Эллипсга ички учбурчакни унинг ҳар бир учидаги уринма қарама-қарши томонга параллел буладиган қилиб чизиш мумкинми? Бу ишни бажаришда қандай эркинлик бор? Эллипснинг ярим уқлари a ва b булса, учбурчак юзи нимага тенг?

8- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар

Иккинчи тартибли эгри чизиқ деб текислик нуқталарининг шундай геометрик урнига айтиладики, уларнинг координаталари ушбу

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \qquad (1)$$

куринишдаги тенгламани қаноатлантиради. Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқлидир.

Бу *таърифнинг координаталар системасини танлашга нисбатан инвариантлиги равшан*, чунки нуқтанинг исталган бошқа системадаги координаталари унинг xy системадаги координаталари билан чизиқли формулалар билан боғлангандир: демак тенглама координаталарнинг исталган бошқа системасида ҳам (1) даги куринишга эгадир.

Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг геометрия нуқтаи назаридан нимадан иборатлигини ойдинлаштириб олайлик.

Эгри чизиқ учун координаталарнинг xy система билан ушбу

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$y = - x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

формулалар воситасида боғланган координаталарнинг яъни $x'y'$ системасига утайлик.

Эгри чизиқнинг (1) куринишини сақлаган тенгламасида $x'y'$ купайтма олдидаги коэффициент қуйидагича булади:

$$2a'_{12} =$$
$$= 2a_{11} \cos\alpha \sin\alpha - 2a_{22} \sin\alpha \cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$
$$= (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha + 2a_{12} \cos 2\alpha.$$

α бурчакни ҳамиша шундай танлаб олиш мумкинки, бу коэффициент нолга тенг булади. Шунга асосан умумийликка зарар келтирмасдан дастлабки (1) тенгламада $a_{12} = 0$ деб ҳисоблаш мумкин.

Энди икки ҳолни ажратайлик.

А ҳол: a_{11}, a_{22} коэффициентларнинг иккаласи ҳам нолдан фарқли.

В ҳол: a_{11}, a_{22} коэффициентлардан бири нолга тенг, умумийликни чегараламасдан $a_{11} = 0$ деб ҳисоблаймиз.

А ҳолда ушбу алмаштириш воситасида

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}},$$

координаталарнинг янги x' y' системасига ўтамиз. Натижада (1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c = 0. \tag{2}$$

Энди бу ерда рўй берадиган хусусий ҳолларни кўздан кечирамиз:

$A_1: c \neq 0$, a_{11}, a_{22} ларнинг ишоралари бир хил, лекин c ишорасига тескари. Эгри чизиқнинг эллипслиги равшан.

$A_2: c \neq 0$, a_{11}, a_{22} ларнинг ишоралари тескари. Эгри чизиқ — гиперболадир

$A_3: c \neq 0$, a_{11}, a_{22}, c ларнинг ишоралари бир хил. Тенгламани битта ҳам ҳақиқий нуқта қаноатлантирмайди. Эгри чизиқ *мавҳум* деб аталади.

$A_4: c = 0$, a_{11} билан a_{22} нинг ишоралари турли. Эгри чизиқ иккита тўғри чизиққа ажралади, чунки (2) тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left(x' - \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)\left(x' + \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right) = 0.$$

$A_5: c = 0$, a_{11} билан a_{22} ларнинг ишоралари бир хил. Тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left(x' = i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)\left(x' + i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right) = 0.$$

Эгри чизиқ ҳақиқий (0, 0) нуқтада кесишадиган иккита мавҳум тўғри чизиққа ажралади.

Энди В ҳолни қарайлик. Бу ҳолда янги $x'y'$ системага ушбу

$$x' = x, \; y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}$$

алмаштириш ёрдамида ўтиб, эгри чизиқ тенгламасини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$2a_1x' + a_{22}y'^2 + c = 0. \tag{3}$$

Энди ўз навбатида қуйидаги учта хусусий ҳолни ажратайлик: $B_1: a_1 \neq 0$. Эгри чизиқ — параболадир, чунки янги

$$x'' = x' + \frac{c}{2a_1}, \quad y'' = y'$$

координаталар ёрдамида (3) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$2a_1x'' + a_{22}y''^2 = 0.$$

$B_2: a_1 = 0$, a_{22} ва c ларнинг ишоралари қарама-қарши. Эгри чизиқ иккита параллел тўғри чизиққа ажралади.

$$y \pm \sqrt{-\frac{c}{a_{22}}} = 0.$$

$B_3: a_1 = 0$, a_{22} ва c ларнинг ишоралари бир хил. Эгри чизиқ кесишмайдиган иккита мавҳум тўғри чизиққа ажралади:

$$y \pm i\sqrt{\frac{c}{a_{22}}} = 0.$$

$B_4: a_1 = 0$, $c = 0$. Эгри чизиқ — устма-уст тушган иккита тўғри чизиқдан иборат.

Шундай қилиб, *иккинчи тартибли ҳақиқий эгри чизиқ ё конус кесими (эллипс, гипербола, парабола) дан ёки бир жуфт тўғри чизиқдан иборат (бу тўғри чизиқлар устма-уст тушиши ҳам мумкин).*

Машқлар

1. Иккинчи тартибли

$$(ax + by + c)^2 - (a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0$$

эгри чизиқнинг (хусусий ҳолда устма-уст тушадиган) бир жуфт тўғри чизиққа ажралиши исбот қилинсин.

2. Маълумки, эллипс xy текисликнинг чегараланган қисмида жойлашади. Шунга асосланиб, ($ax + by$ ва $\alpha x + \beta y$ ифодалар эркли бўлиб, $k > 0$ бўлганда) $(ax + by + c)^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = k^2$ иккинчи тартибли эгри чизиқнинг эллипсдан иборатлиги исбот қилинсин.

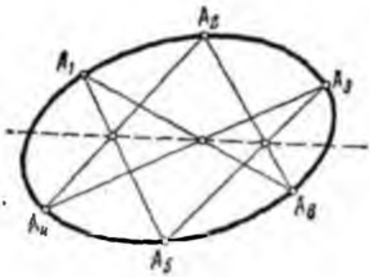
3. Агар $ax + by$ ва $\alpha x + \beta y$ ифодалар эркли бўлса, иккинчи тартибли $(ax + by + c)(\alpha x + \beta y + \gamma) = k \neq 0$ эгри чизиқ гиперболадан иборатлиги исбот қилинсин.

4. Агар тенгламада $ax + by$ ва $\alpha x + \beta y$ ифодалар эркли бўлса, $(ax + by + c)^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = k \neq 0$ тенглама билан ифодаланган эгри чизиқнинг гиперболадан иборатлиги исбот қилинсин.

5. Агар бирор тўғри чизиқ иккинчи тартибли эгри чизиқни учта нуқтада кесиб ўтса, эгри чизиқ (хусусий ҳолда устма-уст тушадиган) бир жуфт тўғри чизиққа ажралиши исбот қилинсин.

6. Ҳар бири иккита тўғри чизиққа ажралмайдиган иккинчи тартибли иккита эгри чизиқ бешта умумий нуқтага эга бўлса, уларнинг устма-уст тушиши исбот қилинсин.

7. Агар эгри чизиқ $\varphi_3(x, \varphi)=0$ тенглама билан берилиб, бунда $\varphi_3(x, y)$ ифода x ва y га нисбатан учинчи даражали кўпҳад бўлса, *y — учинчи тартибли эгри чизиқ* дейилади. Агар учинчи тартибли γ эгри чизик иккинчи тартибли ажралмайдиган γ_2 эгри чизиқ билан еттита умумий нуқтага эга бўлса, бу ҳолда γ_3 чизиқ γ_2 (эгри) чизиқ ва тўғри чизиққа ажралиши исбот қилинсин.



48- расм.

8. Айтайлик, γ — иккинчи тартибли эгри чизиқ, $A_1, \ldots, A_6$ унга ички чизилган олтибурчак учлари, $\alpha_{ij}(x, y)=0$ эса A_i ва A_j учларни туташтирувчи томонларнинг тенгламалари бўлсин (48- расм). Тенгламаси $\alpha_{24}\alpha_{16}\alpha_{35} - \lambda\alpha_{34}\alpha_{26}\alpha_{15}=0$ дан иборат учинчи тартибли эгри чизиқ γ эгри чизиқ билан олтита A_i нуқтада кесишиши исбот қилинсин. λ параметрни муносиб равишда танлаб олинса, учинчи тартибли эгри чизиқнинг γ эгри чизиққа ва тўғри чизиққа ажралиши исбот қилинсин.

9. *Паскаль теоремаси* исбот қилинсин: α_{15} билан α_{24}, α_{34} билан α_{16}, α_{26} билан α_{35} тўғри чизикларнинг кесишган учта нуқтаси битта тўғри чизиқда ётади (48- расм).

IV боб

ВЕКТОРЛАР

1- §. Векторларни қўшиш ва айириш

Вектор деганда йўналишли кесмани тушунамиз (49- расм). Вектор йўналиши стрелка билан кўрсатилади. A нуқта векторнинг *боши*, B эса унинг *охири* дейилади.

Бири иккинчисидан параллел кўчириш натижасида ҳосил қилиниши мумкин бўлган икки вектор *тенг векторлар* деб аталади (50- расм) Агар a вектор b га тенг бўлса, равшанки, b вектор a га тенг бўлади. Агар a вектор b га b эса c га тенг бўлса, a вектор c га тенг бўлади.

49-расм.

50- расм.

Агар икки вектор параллел бўлиб, ўзлари уларга тенг ва боши умумий бўлган векторларнинг учлари бошга нисбатан бир томонда (турли томонда) жойлашса, бундай векторлар *бир хил (қарама-қарши) йўналган* деб аталади.

Векторни тасвирлаган кесма узунлиги векторнинг *абсолют қиймати* дейилади.

Боши билан охири устма-уст тушган вектор *ноль вектор* дейилади.

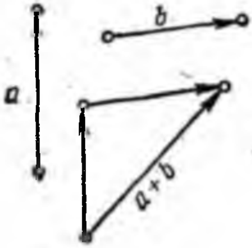
Векторлар учун *қўшиш* ва *айириш* амаллари киритилади: икки a ва b векторнинг *йиғиндиси* деб, a ва b ёки уларга тенг векторлардан 51-расмда тасвирланган усулда ҳосил қилинган $a+b$ векторга айтилади.

Векторларни қўшиш амали коммутатив хоссага эга, яъни исталган a ва b векторлар учун:

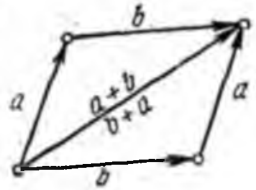
$$a+b=b+a. \qquad \text{(52- расм)}$$

Векторларни қўшиш ассоциатив хоссага эга, яъни исталган a, b, c векторлар учун

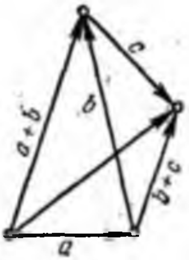
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$



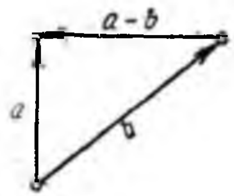
51- расм.



52- расм.



53- расм.



54- расм.

Бу ва олдинги хосса векторларни қўшиш амалининг таърифидан келиб чиқади (53- расм).

Бир ҳолни таъкидлаб ўтайлик: агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар параллел бўлса, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ вектор, башарти у нолга тенг бўлмаса, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларга параллел бўлади ва улардан қайси бирининг абсолют қиймати каттароқ бўлса, ўша вектор йўналиши билан бир хил йўналгандир. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторнинг абсолют қиймати эса, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар бир хил йўналган ҳолда уларнинг абсолют қийматлари йиғиндисига тенг ва $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар қарама-қарши йўналган ҳолда эса абсолют қийматлар айирмасига тенг.

Векторларни *айириш* амали қўшишга тескари амал сифатида киритилади: a ва b векторларнинг *айирмаси* деб $\boldsymbol{b}$ га қўшганда a га тенг бўладиган $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ векторга айтилади. Геометрик нуқтаи назардан қараганда бундай айирма $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлардан ёки уларга тенг векторлардан 54- расмда кўрсатилган усулда ҳосил қилинади.

Исталган икки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *вектор учун ушбу тенгсизлик ўринлидир:*

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

(учбурчак тенгсизлиги); геометрик жиҳатдан олинган векторлар нопараллел ҳол учун бу тенгсизлик учбурчакда икки томон йиғиндисининг учинчи томондан катталигини ифода қилади. Бу тенгсизлик ихтиёрий сонда олинган векторлар учун ҳам ўринли экани аён:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\ldots+\boldsymbol{l}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+\ldots+|\boldsymbol{l}|.$$

Машқлар

1. Умумий боши мунтазам n бурчак марказида бўлиб, охирлари эса унинг учларидан n та вектор йиғиндисининг нолга тенглиги исбот қилинсин.

2. Учта векторнинг боши 0 дан, охирлари эса ABC учбурчакнинг учларидан иборат. 0 нуқта учбурчак медианалари кесишган нуқтасидан иборат бўлган ҳолдагина

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$$

тенгликнинг ўринли бўлиши исбот қилинсин.

3. Ушбу айният исбот қилинсин:

$$2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2.$$

Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар нолдан фарқли ва нопараллел бўлса, бу тенглик қайси геометрик фактга мос келади?

4. Учбурчак тенгсизлигидаги тенглик ишораси фақат иккала вектор бир хил йўналган ҳол учун ёки векторлардан бири нолга тенг ҳол учун юз бера олиши исбот қилинсин.

5. Агар умумий 0 бошли $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ векторларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиб, бу векторлар битта текисликда ётмаса, 0 нуқта орқали ўтувчи α текислик қандай бўлмасин, шундай векторлар топиладики, улар α текисликнинг турли тарафида жойлашиши исбот қилинсин.

6. $\boldsymbol{r}_{mn}$ вектор xy текисликда ётади ва унинг учи (x_0, y_0) нуқтада, охири эса $(m\delta, n\delta)$ нуқтада жойлашган, бунда m ва n — бутун сонлар бўлиб, абсолют қиймат жиҳатдан мос равишда M ва N дан ошмайди. Боши (0,0) нуқтадан ва охири (x_0, y_0) нуқтадан иборат вектор орқали ифодалаб барча $\boldsymbol{r}_{mn}$ векторлар йиғиндиси топилсин.

7. xy текисликдаги чекли F фигура учун координаталар боши симметрия маркази бўлиб хизмат қилади. Боши умумий ва охирлари F фигуранинг бутун сонли нуқталаридан иборат векторлар йиғиндиси фақат векторлар умумий бошининг координаталар бошидан иборат бўлган ҳолда нолга тенг бўлиши (F фигура камида битта бутун сонли нуқтага эга, яъни координаталари бутун сонлардан иборат нуқтага эга деб фараз қилинади) исбот қилинсин.

8. Параллелепипед диагоналлари орқали тасвирланган векторларни унинг қирралари орқали тасвирланган векторлар орқали ифодаланг.

2- §. Векторни сонга кўпайтириш

Векторлар учун сонга кўпайтириш амали қуйидагича таърифланади: $\boldsymbol{a}$ вектор билан λ соннинг *кўпайтмаси* деб шундай $\boldsymbol{a}\lambda=\lambda\boldsymbol{a}$ векторга айтиладики, унинг абсолют қиймати $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$ га тенг бўлиб, йўналиши эса λ нинг мусбат ($\lambda > 0$) ёки манфий ($\lambda < 0$) бўлишига қараб, $\boldsymbol{a}$ нинг йўналиши билан бир хил ёки унга қарама-қарши бўлади. $\lambda = 0$ ёки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ҳолда $\lambda\boldsymbol{a}$ ни ноль-векторга тенг деб ҳисоблаймиз.

Векторни сонга кўпайтириш ассоциативлик ва иккита дистрибутивлик хоссасига эга, яъни исталган λ, μ сонлар ва $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар учун:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} \qquad \text{(ассоциативлик)},$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} &= \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a},\\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(дистрибутивлик)}.$$

Бу хоссаларни исбот қилайлик.

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ ва $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ векторлар $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$ га тенг бўлган бир хил абсолют қийматларга эга. Бу векторларнинг йўналишлари эса бир хил ишорали λ, μ учун устма-уст тушади ва λ билан μ турли ишорали ҳолда — қарама-қарши. Шундай қилиб, $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ ва $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ векторларнинг абсолют қийматлари тенг ва бир хил йўналган, демак улар ўзаро тенгдир. Агар сонларнинг камида биттаси ёки $\boldsymbol{a}$ вектор нолга тенг бўлса, иккала вектор ҳам нолга тенг. Шунинг учун улар бир-бирига тенгдир. Ассоциативлик исбот қилинди.

Энди дистрибутивликнинг биринчи хоссаси:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$$

ни исбот қилайлик: λ, μ сонлардан бири ёки $\boldsymbol{a}$ вектор нолга тенг ҳолда бу тенглик ўз-ўзидан равшан. Шунинг учун λ, μ, $\boldsymbol{a}$ ни нолдан фарқли деб ҳисоблаш мумкин.

Агар λ билан μ нинг ишоралари бир хил бўлса, $\lambda\boldsymbol{a}$ ва $\mu\boldsymbol{a}$ векторлар бир хил йўналгандир. Шунинг учун $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ нинг абсолют қиймати $|\lambda\boldsymbol{a}| + |\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda|\boldsymbol{a} + |\mu|\boldsymbol{a} = (|\lambda| + |\mu|)\,|\boldsymbol{a}|$ га тенг. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ векторнинг абсолют қиймати эса $|\lambda+\mu|\,|\boldsymbol{a}| = (|\lambda| + |\mu|)\,|\boldsymbol{a}|$ га тенг. Демак, $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ ва $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ векторларнинг абсолют қийматлари тенг. Уларнинг йўналишлари ҳам бир хил; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ ҳолда уларнинг йўналишлари $\boldsymbol{a}$ нинг йўналиши билан бир хил ва $\lambda < 0$, $\mu < 0$ ҳолда эса унга қарама-қарши. λ билан μ нинг ишоралари турли бўлган ҳол шунинг сингари текширилади.

Дистрибутивликнинг иккинчи хоссаси

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$

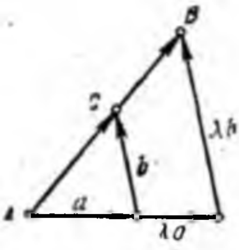
ни исбот қиламиз.

λ сон ёки векторлардан бири нолга тенг ҳол учун хосса ўз-ўзидан равшан. Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар параллел бўлса $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$ деб фараз қилиш мумкин. Дистрибутивликнинг иккинчи хоссаси биринчисининг натижаси бўлиб қолади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lambda(1+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\mu\boldsymbol{a}.$$

Бундан:

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$



55- расм.

Энди $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ нопараллел бўлсин. Бунда $\lambda > 0$ учун $\overrightarrow{AB}$ вектор (55-расм) бир томондан $\lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ ни, иккинчи томондан эса $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ га тенг $\lambda\,\overrightarrow{AC}$ ни тасвирлайди. $\lambda > 0$ ҳолда иккала вектор йўналишлари ҳам тескарисига алмашинади.

Машқлар

1. Агар $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ векторлар берилиб, камида биттаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ сонлар мавжуд бўлмаган ҳолда ушбу

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots = 0$$

тенглик юз берса, бу векторлар *чизиқли (боғланмаган) эркли* дейилади.

Икки вектор нолдан фарқли ва нопараллел бўлган ҳолда ва шу ҳолдагина чизиқли эркли бўлиши исбот қилинсин.

Уч вектор нолдан фарқли ва уларга параллел текислик мавжуд бўлмаган ҳолда ва фақат шу ҳолда чизиқли эркли бўлиши исбот қилинсин.

2. Битта текисликда ётувчи ҳар қандай учта вектор ҳамиша чизиқли боғлиқ бўлиши исбот қилинсин.

3. Текисликдаги иккита $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ вектор чизиқли эркли бўлса, бу текисликдаги исталган $\boldsymbol{r}$ вектор $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ векторлар орқали чизиқли ифода қилинади:

$$\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2,$$

бунда λ_1, λ_2 сонлар ягона равишда (бир қийматли) аниқланиши исбот қилинсин.

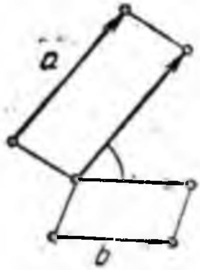
4. Учта $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ вектор чизиқли эркли бўлса, исталган $\boldsymbol{r}$ вектор улар орқали ягона равишда $\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3$ кўринишда ифода қилиниши исбот қилинсин.

3- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги *бурчак* деб, мос равишда шу векторларга тенг ва бошлари умумий бўлган векторлар орасидаги бурчакка айтилади (56- расм).

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, шу векторлар абсолют қийматлари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг бўлган $\boldsymbol{ab}$ сонга айтилади.

Скаляр кўпайтма ўз-ўзидан равшан ва унинг таърифидан бевосита келиб чиқадиган ушбу хоссаларга эга:



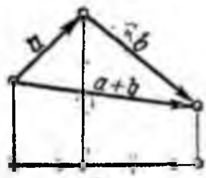
56- расм.

1) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;
2) $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$;
3) $(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$;
4) $|\boldsymbol{e}| = 1$ *бўлган ҳолда*

$$(\lambda \boldsymbol{e})(\mu \boldsymbol{e}) = \lambda\mu;$$

5) *$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси векторлар перпендикуляр бўлган ҳолда ёки векторларнинг бири нолга тенг ҳолдагина нолга тенг бўлади.*

$\boldsymbol{a}$ векторнинг тўғри чизиққа *проекцияси* деб шундай $\bar{\boldsymbol{a}}$ векторга айтиладики, унинг боши $\boldsymbol{a}$ вектор бошининг проекциясидан, охири эса $\boldsymbol{a}$ вектор охирининг проекциясидан иборат. Равшанки, *тенг векторлар тенг проекцияларга эга, векторлар йиғиндисининг проекцияси проекциялар йиғиндисига тенг* (57- расм).



57- расм.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{b}$ векторга скаляр кўпайтмаси $\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{b}$ векторни ўз ичига олган тўғри чизиққа туширилган проекцияси билан $\boldsymbol{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмасига тенг. Исботи равшан, бунинг учун $\boldsymbol{ab}$ билан $\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ нинг тенг абсолют қийматларга эгалигини ва бир хил ишорали бўлишини эътиборга олсак етарли.

Скаляр кўпайтма дистрибутивлик хоссасига эга: исталган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{в}$, $\boldsymbol{c}$ вектор учун ушбу ифода ўринли:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

Векторлардан бири нолга тенг ҳолда бу тасдиқ равшан. Энди учала вектор ҳам нолдан фарқли бўлсин. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ векторларнинг $\boldsymbol{c}$ векторни ўз ичига олган тўғри чизиқдаги проекциялари $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\overline{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}$ бўлсин дейлик. Натижада ушбуларга эгамиз:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \overline{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}\boldsymbol{c} = (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} = \bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.$$

Энди бирлик e вектор c га параллел деб фараз қилайлик. Бу чоғда $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ векторларни қуйидагича тасвирлаш мумкин. $\bar{a}=\lambda e$, $\bar{b}=\mu e$, $c=\nu e$; ушбуларга эгамиз:

$$(\bar{a}+\bar{b})\,c=(\lambda e+\mu e)\,\nu e=(\lambda+\mu)\,\nu,$$
$$\bar{a}c+\bar{b}c=\lambda e\nu e+\mu e\nu e=\lambda\nu+\mu\nu.$$

Булардан $(\bar{a}+\bar{b})\,c=\bar{a}c+\bar{b}c$, демак,

$$(a+b)\,c=ac+bc.$$

Пировардида ушбуни исбот қилайлик: *агар* a, b, c*—нолдан фарқли учта вектор бўлиб, улар битта текисликка параллел бўлмаса, у ҳолда учта*

$$ra=0,\ rb=0,\ rc=0$$

тенгликдан $r=0$ *деган хулоса чиқади.*

Ҳақиқатан ҳам, $r\neq 0$ ҳолда кўрсатилган учта тенгликдан a, b, c векторларнинг r га перпендикулярлиги ҳақида хулоса чиқарамиз, шу сабабдан улар r га перпендикуляр бўлган текисликка параллел деган натижа чиқади, бу эса фаразимизга зиддир.

Машқлар

1. Айтайлик, A_1, A_2, ..., A_n нуқталар n бурчакнинг учлари бўлсин:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}=0.$$

Буларга асосланиб ушбу тенгликлар исбот қилинсин:

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=0,$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}=0.$$

2. Агар a ва b нолдан фарқли ва нопараллел исталган иккита вектор бўлса, ушбу $\lambda^2a^2+2\mu\lambda(a+b)+\mu b^2\geqslant 0$ муносабат ўринли бўлади ва ундаги тенглик ишораси фақат $\lambda=0$, $\mu=0$ учун ўринли бўлиши исбот қилинсин.

3. Битта текисликка параллел исталган учта r_1, r_2, r_3 вектор учун ушбу тенгликнинг ўринли экани исбот қилинсин:

$$\begin{vmatrix} r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3\\ r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3\\ r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3\end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

4. Учта r_1, r_2, r_3 вектор учун (1) шарт бажарилган ҳолдагина улар чизиқли боғлиқ бўлиши исбот қилинсин.

5. Исталган тўртта r_1, r_2, r_3, r_4 вектор учун ушбу муносабатнинг ўринли эканлиги исбот килинсин:

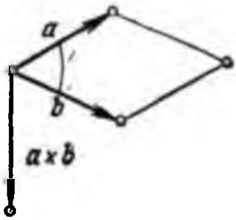
$$\begin{vmatrix} r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3 & r_1r_4 \\ r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3 & r_2r_4 \\ r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3 & r_3r_4 \\ r_4r_1 & r_4r_2 & r_4r_3 & r_4r_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Фараз килайлик, l_1, l_2, l_3, l_4 лар битта нуқтадан чиққан тўртта нур бўлиб, l_i, l_j нурлар орасидаги бурчак α_{ij} бўлсин. Ушбу айниятнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\ \cos\alpha_{21} & 1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & 1 & \cos\alpha_{34} \\ \cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4- §. Векторларнинг вектор кўпайтмаси

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг *вектор кўпайтмаси* деб қуйидагича таърифланадиган $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ векторга айтилади: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторларнинг камида биттаси нолга тенг ёки улар параллел бўлса: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ бўлади. Қолган ҳолларда бу вектор абсолют қиймат жиҳатдан $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг ва бу параллелограмм юзига перпендикуляр бўла туриб шундай йўналганки, $\boldsymbol{a}$ дан $\boldsymbol{b}$ томонга қараб айланиш билан $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ нинг йўналиши «ўнг винт» ни ҳосил қилади (58-расм).



58- расм.

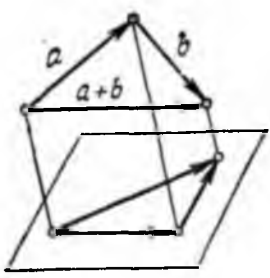
Вектор кўпайтманинг таърифидан бевосита ушбу хоссалар келиб чиқади:

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, бунда θ *ҳарфи* $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ *векторлар орасидаги бурчакни билдиради;*

3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг *текисликдаги проекцияси* деб, боши $\boldsymbol{a}$ вектор проекцияси ва охири шу вектор охири проекциясидан иборат $\boldsymbol{a}'$ векторга айтилади. Равшанки, тенг векторларнинг проекциялари ҳам тенг ва векторлар йиғиндисининг проекцияси проекциялар йиғиндисига тенгдир (59- расм).

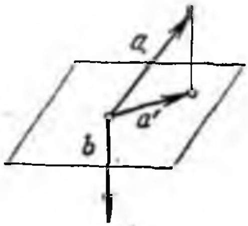


59- расм.

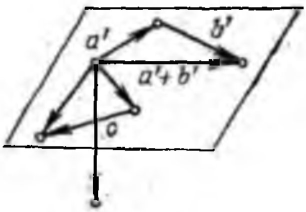
Айтайлик, иккита $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вектор берилган бўлсин. $\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{b}$ векторга перпендикуляр бўлган текисликдаги проекциясини $\boldsymbol{a}'$ билан белгилайлик (60-расм). Бу ҳолда:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}.$$

Бу тенгликнинг исботи равшан. Ҳақиқатан ҳам, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}$ векторларнинг абсолют қийматлари тенг бўлиб, улар бир хил йўналгандир.



60- расм



61- расм.

Вектор кўпайтма дистрибутивлик хоссасига эга, яъни исталган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор учун:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}. \tag{1}$$

$\boldsymbol{c} = 0$ ҳол учун тенгликнинг ўринли бўлиши равшан. Сўнгра (1) тенгликни $|\boldsymbol{c}| = 1$ ҳол учун исботлаб беришнинг етарли экани ҳам аён, чунки умумий ҳолда унинг кучга эгалиги юқоридаги 3-хоссадан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $|\boldsymbol{c}| = 1$ бўлсин, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг $\boldsymbol{c}$ векторга перпендикуляр текисликдаги проекцияларини $\boldsymbol{a}'$ ва $\boldsymbol{b}'$ билан белгилайлик (61-расм). Бундай ҳолда $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$ ва $(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') \times \boldsymbol{c}$ векторлар мос равишда $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ ва $\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$ векторларни $90°$ ли бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинади. Демак:

$$\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}.$$

Лекин:

$$\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \ \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$
$$(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

бўлгани учун

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$

шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Исталган иккита $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ вектор учун ўринли бўлган ушбу

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2$$

содда айниятни таъкидлаб ўтайлик.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак θ бўлса, у ҳолда:

$$(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\theta)^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2,$$

бундан эса талаб қилинган тенгликнинг тўғрилиги бевосита кўриниб турибди.

Машқлар

1. Агар $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлар $\boldsymbol{c}$ векторга перпендикуляр бўлса,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = 0$$

бўлиши исбот қилинсин.

2. Агар $\boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{c}$ га перпендикуляр, $\boldsymbol{a}$ вектор эса $\boldsymbol{c}$ га параллел бўлса,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})$$

бўлиши исбот қилинсин.

3. Исталган $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторга перпендикуляр $\boldsymbol{b}$ вектор учун ушбу

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})$$

тенгликнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин.

4. Исталган учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор учун ушбу

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$$

тенгликнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин.

5. Ён қирралари l га ва учларидаги бурчаклари α, β, γ га тенг уч ёқли пирамида асосининг юзи топилсин.

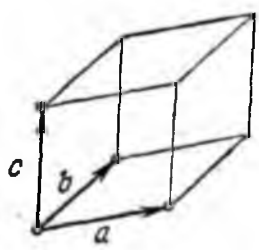
5-§. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* деб ушбу

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1}$$

сонга айтилади.

Агар *векторлардан бири нолга тенг ёки уларнинг учаласи ҳам битта текисликка параллел бўлса, улар аралаш кўпайтмасининг нолга тенг бўлиши равшан.*



62- расм

Нолдан фарқли ва битта текисликка нопараллел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси улардан ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лардан) ясалган параллелепипеднинг ҳажмига тенг (62- расм).

Ҳақиқатан ҳам, параллелепипеднинг $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ векторлардан ясалган асосининг юзи S билан ва асосга перпендикуляр бўлган бирлик вектор e билан белгиланса, $a \times b = Se$ муносабат ўринли булади. Сўнгра, ec дан иборат скаляр купайтманинг ишораси эътиборга олинмаса, бу купайтма параллелепипеднинг кўрсатилган асосига туширилган баландлигига тенг. Демак, (abc) купайтманинг ишорасини эътиборга олинмаса, бу кўпайтма a, b, c, векторлардан ясалган параллелепипед ҳажмига тенг.

Аралаш кўпайтма ушбу хоссага эга:

$$(abc) = a\,(b \times c). \tag{2}$$

Бу тенгликнинг туғрилигини билиш учун унинг ўнг ва чап томонидаги ифодаларнинг абсолют қийматлари тенг ва ишоралари бир хил эканлигига ишонч ҳосил қилиш етарли.

Аралаш кўпайтманинг таърифи (1) дан ва (2) хоссадан ушбу хулоса келиб чиқади: *купайтмада исталган икки купайтувчининг ўрни алмашинса, унинг ишораси тескарисига алмашинади. Иккита купайтувчиси нолга тенг бўлган хусусий ҳолда аралаш кўпайтма нолга тенг.*

Машқлар

1). $((a \times b) \times c)\, d = (a \times b)\,(c \times d)$ тенгликнинг тўғрилигини эътиборга олиб ушбу

$$(a \times b)\,(c \times d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}$$

айният исбот қилинсин.

2. Ушбу

$$(a \times b)\,(c \times b) = (ac)\, b^2 - (ab)\,(bc)$$

айниятдан фойдаланиб, сферик тригонометриянинг

$$\sin\alpha \sin\gamma \cos B = \cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha$$

формуласи исбот қилинсин, бунда α, β, γ — бирлик сферадаги учбурчак томонлари, B — эса бу учбурчакнинг β томони қаршисидаги бурчаги.

3. Ушбу

$$(a \times b) \times (c \times d) = b\,(acd) - a\,(bcd)$$

айният исбот қилинсин.

4. Исталган тўртта a, b, c, d вектор учун ушбу

$$b\,(acd) - a\,(bcd) + d\,(cab) - c\,(dab) = 0$$

тенглик (айният)нинг туғрилиги кўрсатилсин.

5. Фараз қилайлик, e_1, e_2, e_3 — исталган учта вектор бўлиб, аммо уларнинг аралаш купайтмаси нолдан фарқли булсин:

$$(e\ e_1\, e_2\, e_3) \neq 0.$$

Бундай ҳолда ҳар қандай r векторни қуйидагича

$$r=\frac{(re_2e_3)e_1}{e_1e_2e_3}+\frac{(re_3e_1)e_2}{(e_1e_2e_3)}+\frac{(re_1e_2)e_3}{(e_1e_2e_3)}$$

ифодалаш мумкинлиги исбот қилинсин.

6. Ушбу

$$(rab)=\gamma,\ (rbc)=\alpha,\ (rca)=\beta$$

вектор тенгламалардан тузилган системада a, b, c векторлар берилган бўлиб, $(abc)\neq 0$ шартни қаноатлантиради, r эса изланган вектор. Шу система ечимини ушбу

$$r=\frac{1}{(abc)}(a\alpha+b\beta+c\gamma).$$

шаклда ифодаланиши исбот қилинсин.

7. Агар e_1, e_2, e_3 ва r исталган тўртта вектор бўлиб, улар биттагина $(e_1e_2e_3)\neq 0$ шартни қаноатлантирса, ушбу

$$r=\frac{(e_1\times e_2)(re_3)}{(e_1e_2e_3)}+\frac{(e_2\times e_3)(re_1)}{(e_1e_2e_3)}+\frac{(e_3\times e_1)(re_2)}{(e_1e_2e_3)}$$

айниятнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин.

8. Учта

$$ax=\alpha,\ bx=\beta,\ cx=\gamma$$

векторли тенгламадан тузилган системада a, b, c векторлар берилган бўлиб, x изланган вектор бўлса, $(abc)\neq 0$ шартда система ечимини ушбу

$$x=\frac{(a\times b)\gamma+(b\times c)\alpha+(c\times a)\beta}{(abc)}$$

шаклда ифодалаш мумкинлиги исбот қилинсин.

6-§. Векторнинг берилган базисга нисбатан координаталари

Фараз этайлик, e_1, e_2, e_3 — нолдан фарқли ва битта текисликка нопараллел учта вектор бўлсин. Бундай ҳолда исталган векторни ягона равишда қуйидагича

$$r=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3 \tag{1}$$

ифодалаш мумкин.

λ_1, λ_2, λ_3 сонлар *r векторнинг e_1, e_2, e_3 базисга* нисбатан *координаталари* дейилади.

Аввало, (1) кўринишли ифодаланишнинг ягоналигини исбот қилайлик. Бошқача тасвирлаш мумкин деб фараз қилайлик:

$$r=\lambda_1'e_1+\lambda_2'e_2+\lambda_3'e_3.$$

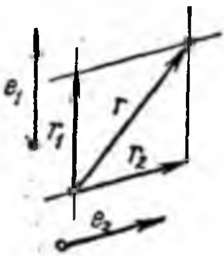
У ҳолда:

$$(\lambda_1-\lambda_1')e_1+(\lambda_2-\lambda_2')e_2+(\lambda_3-\lambda_3')e_3=0.$$

Бу тенгликни $e_2 \times e_3$ векторга скаляр кўпайтирайлик. Натижада

$$(\lambda_1 - \lambda_1')(e_1 e_2 e_3) = 0$$

ни ҳосил қилинади. Аммо $(e_1 e_2 e_3) \neq 0$, демак, $\lambda_1 - \lambda_1' = 0$. Шунга ўхшаш: $\lambda_2 - \lambda_2' = 0$, $\lambda_3 - \lambda_3' = 0$. (1) кўринишдаги тасвирлашнинг ягоналиги исбот қилинди.



63- расм.

Энди (1) ифодалаш имкониятининг мавжудлигини исбот қилайлик. Аввало r вектор e_1, e_2, e_3 векторларнинг бирига, масалан, e_1 га параллел деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$r = \pm \frac{|r|}{|e_1|} e_1 = \lambda e_1,$$

бунда r билан e_1 бир хил йўналганда «+» ишора ва қарама-қарши йўналганда «—» ишора олинади.

Энди r вектор e_1, e_2 векторлар билан бирга битта текисликка параллел, лекин e_1 ва e_2 га нопараллел, r вектор охирларидан e_1, e_2 векторларга параллел тўғри чизиқлар ўтказайлик (63-расм). Натижада:

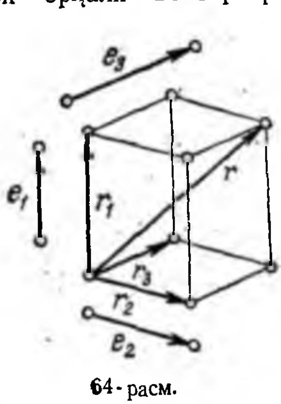
$$r = r_1 + r_2.$$

Аммо исботланганга кўра: $r_1 = \lambda_1 e_1$, $r_2 = \lambda_2 e_2$. Демак

$$r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

Ниҳоят, r вектор уч жуфт e_1, e_2; e_2, e_3; e_3, e_1 векторларнинг биронта ҳам жуфти билан биргаликда битта текисликка параллел бўлмасин дейлик. r векторнинг охирлари орқали векторларнинг ҳалиги жуфтларига параллел текисликлар ўтказайлик (64-расм). Натижада $r = r_1 + r_2 + r_3$, аммо исботга асосан:

$$r_1 = \lambda_1 e_1, \quad r_2 = \lambda_2 e_2, \quad r_3 = \lambda_3 e_3.$$



64-расм.

r векторни (1) кўринишда ифодалашнинг имкони мавжудлиги ҳамма ҳоллар учун исбот қилинди.

Базис векторлар учта бирлик вектордан иборат ва улар жуфт-жуфти билан ортогонал бўлган ҳолда векторнинг координаталари содда маънога эга.

Ҳақиқатан ҳам, $r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ тенгликни кетма-кет e_1, e_2, e_3 га скаляр кўпайтириб, $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$ билан $e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = 0$ ни эътиборга олсак, ушбуларни ҳосил киламиз:

$$\lambda_1 = re_1, \ \lambda_2 = re_2, \ \lambda_3 = re_3.$$

Айтайлик, r нинг координаталари λ_1, λ_2, λ_3 ва r' вектор координаталари λ_1', λ_2', λ_3' бўлсин. $r \pm r'$ вектор координаталарини топайлик. Ушбуларга эгамиз:

$$r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \quad r' = \lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2 + \lambda_3' e_3.$$

Булардан: $r \pm r' = (\lambda_1 \pm \lambda_1') e_1 + (\lambda_2 \pm \lambda_2') e_2 + (\lambda_3 \pm \lambda_3') e_3$. Демак, $\lambda_1 \pm \lambda_1'$, $\lambda_2 \pm \lambda_2'$, $\lambda_3 \pm \lambda_3'$ сонлар *$r \pm r'$ векторнинг координаталаридир.*

λr векторнинг $\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \lambda\lambda_3$ дан иборат координаталарга эгалиги ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади. Бундан эса *параллел векторлар пропорционал координаталарга эга*, деган хулоса чиқарамиз.

Фараз қилайлик, e_1, e_2, e_3 базис учта бирлик ва жуфт-жуфти билан ортогонал векторлардан иборат бўлиб, уларнинг аралаш кўпайтмаси $+1$ га тенг бўлсин. *Координаталари мос равишда* λ_1, λ_2, λ_3 ва λ_1', λ_2', λ_3' *дан иборат r ва r' векторларнинг скаляр кўпайтмасини топайлик.* Қуйидагиларга эгамиз:

$$r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \quad r' = \lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2 + \lambda_3' e_3.$$

Бундан: $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$, $e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = 0$ ни эътиборга олиб,

$$rr' = \lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 \lambda_2' + \lambda_3 \lambda_3'$$

ни ҳосил қиламиз.

$r \times r'$ вектор координаталарини топайлик. r, r' векторлар учун (2) кўринишли ифодаларни ва $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$ муносабатларни эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r \times r' = (\lambda_2 \lambda_3' - \lambda_3 \lambda_2') e_1 + (\lambda_3 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_3') e_2 + \\ + (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') e_3.$$

Демак, $r \times r'$ вектор координаталари:

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2' & \lambda_3' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3' & \lambda_1' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1' & \lambda_2' \end{vmatrix}.$$

Ниҳоят, ушбу учта

$$\boldsymbol{r}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \ \boldsymbol{r}'(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3), \ \boldsymbol{r}''(\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3)$$

векторнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаб чиқайлик. Қуйидагиларга эгамиз:

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'') = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'' =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix} \lambda''_1 + \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda'_3 & \lambda'_1 \end{vmatrix} \lambda''_2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 \end{vmatrix} \lambda''_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 & \lambda''_3 \end{vmatrix}.$$

Машқлар

1. $\boldsymbol{r}$ векторнинг $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ базисга нисбатан координаталарининг ушбу $\lambda_1 = \dfrac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$, $\lambda_2 = \dfrac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$, $\lambda_3 = \dfrac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$ тенгликлар орқали ифодаланиши исбот қилинсин:

2. $\boldsymbol{r}$ векторнинг $(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)$, $(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)$ дан иборат базисга нисбатан координаталари $\lambda_1 = \dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$, $\lambda_2 = \dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$, $\lambda_3 = \dfrac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}$ га тенг бўлиши исбот қилинсин.

3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларни ортогонал базис бўйича ёйиб, детерминантларни кўпайтириш теоремаси ёрдамида ушбу

$$(\boldsymbol{abc})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{aa} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{bb} & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{cc} & \boldsymbol{cc} \end{vmatrix}$$

айният исбот қилинсин.

4. Ушбу

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{abc})^2$$

айният исбот қилинсин.

5. Ён қирралари a, b, c ва учидаги ясси бурчаклари α, β, γ дан иборат уч ёқли пирамида ҳажмининг қуйидагича

$$V = \frac{1}{6} abc \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{1/2}$$

ҳисобланиши исбот қилинсин.

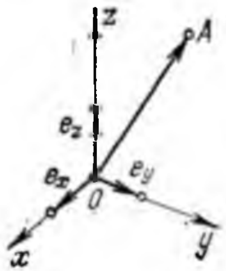
6. Ён қирралари a, b, c, ва шу қирралар ёнидаги икки ёқли бурчаклари A, B, C дан иборат уч ёқли пирамида ҳажми учун формула чиқарилсин.

V боб

ФАЗОДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ

1-§. Умумий декарт координаталари

Фазонинг ихтиёрий О нуқтасидан битта текисликда ётмайдиган учта тўғри чизиқ: Ox, Oy, Oz ни ўтказиб, уларга нолдан фарқли учта e_x, e_y, e_z векторни мос равишда қўйиб чиқамиз (65-расм). Олдинги бобдаги 6-§ га асосан исталган $\overrightarrow{OA}$ векторни ягона равишда қуйидагича ифодалаш мумкин:



65 - расм.

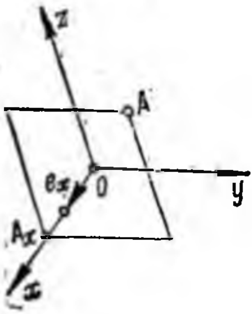
$$\overrightarrow{OA} = xe_x + ye_y + ze_z.$$

x, y, z *сонлар* A нуқтанинг *умумий декарт координаталари* деб аталади.

Ox, O_y, O_z тўғри чизиқлар *координаталар ўқлари* дейилади: Ox ни x ўқи, Oy ни y ўқи, Oz ни z ўқи деб аталади. O_{xy}. O_{yz}. O_{xz} текисликлар *координат текисликлар* дейилади: O_{xy} ни xy текислик, Oyz ни yz, Oxz ни xz текислик деб аталади.

Координаталар ўқларининг ҳар бирини О нуқта (*координаталар боши*) иккита ярим ўққа ажратади. e_x, e_y, e_z векторлар томон йўналган ярим ўқлар *мусбат ярим ўқлар* ва қолганлари эса *манфий ярим ўқлар* деб аталади. Координаталарнинг шу йўсинда киритилган системаси $(e_x, e_y, e_z) > 0$ ҳолда *ўнг* ва $(e_x, e_y, e_z) < 0$ ҳолда эса *чап* система дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан A нуқтанинг координаталари қуйидагича ҳосил қилинади. A нуқта орқали yz текисликка параллел қилиб текислик ўтказамиз. Бу текислик x ўқини бирор A_x нуқтада кесиб ўтади (66-расм). Бундай тақдирда A нуқтанинг x координатаси абсолют қиймат жиҳатдан узунлик бирлиги $|e_x|$ билан OA кесмани ўлчаш натижасига тенг бўлиб, A нуқта мусбат ярим ўқ x га тегишли бўлган ҳолда у мусбат ва манфий ярим ўқ x га тегишли ҳолда эса манфийдир. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\overrightarrow{OA}$ вектор координаталарининг e_x, e_y, e_z базисга нисбатан қандай тариқада аниқланишини эсга олиш етарли.



56- расм.

Нуқтанинг қолган иккита y,z координаталари шу тариқа аниқланади.

Координат ўқлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, векторлар эса бирлик векторлардан иборат бўлса, координаталар бу ҳолда *тўғри бурчакли декарт координаталари* деб аталади.

Текисликда умумий декарт координаталари шу сингари киритилади; О нуқта (координаталар боши) дан иккита ихтиёрий Ox, Oy тўғри чизиқлар (координат ўқлар) ўтказиб, бу ўқларга мос равишда нолдан фаркли e_x, e_y векторларни қўямиз. Бундай ҳолда текисликка тегишли ихтиёрий A нуқтанинг умумий декарт координаталари $\overrightarrow{OA}$ векторнинг e_x, e_y базисга нисбатан координаталари сифатида аниқланади.

Агар координат ўқлар перпендикуляр ва e_x, e_y лар бирлик векторлардан иборат бўлса, ҳозиргина аниқланган координаталар I боб, 1-§ да киритилган координаталардан фарқ қилмайди ва *тўғри бурчакли декарт координаталари* деб аталади.

Бундан буён биз одатда тўғри бурчакли декарт координаталаридан фойдаланамиз. Умумий декарт координаталаридан фойдаланиладиган барча ҳолларда алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Машқлар

1. Агар фазо координаталари учун а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $z = 0$; г) $x = 0$, $y = 0$; д) $y = 0$, $z = 0$; е) $z = 0$, $x = 0$ шартлар бажарилса, бу нуқталар қандай жойлашади?

2. Фазонинг нечта нуқтаси ушбу шартларни қаноатлантиради?

$$|x| = a,\ |y| = b,\ |z| = c, \text{ бунда } abc \neq 0?$$

3. Фазо нуқталарининг координаталари ушбу шартларни қаноатлантиради:

$$|x| < a, |y| < b, |z| < a.$$

Бу нуқталар қаерда жойлашади?

4. A — параллелепипеднинг бирор учи ва A_1, A_2, A_3 эса унинг A га қўшни учлари, яъни A дан чиққан кирраларини билдиради деб фараз қилайлик. A учни координаталар боши сифатида, базис векторларнинг охирлари сифатида эса A_1, A_2, A_3 учларни қабул қилиб, параллелепипед барча учларининг координаталари топилсин.

5. x, y, z нуқта A_0 (a, b, c) нуктани координаталар боши билан туташтирувчи тўғри чизиқ атрофида $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бурчакка айлантиради. Ҳосил қилинган (x', y', z') нуқтанинг координаталари топилсин. Координаталар системаси тўғри бурчакли.

6. α бурчак ихтиёрий бўлган ҳол учун 5-масала ечилсин.

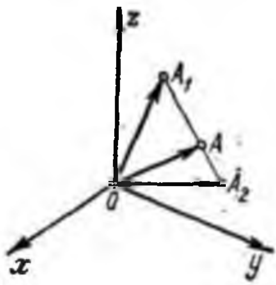
2-§. Фазода аналитик геометриянинг энг содда масалалари

Фараз этайлик, фазода умумий декарт координаталари киритилган бўлиб, A_1 (x_1, y_1, z_1) ва A_2 (x_2, y_2, z_2) — фазодаги ихтиёрий иккита нуқта бўлсин. *$A_1 A_2$ кесмани $\lambda_1 : \lambda_2$ нисбатда бўлувчи A нуқта координаталарини топайлик* (67-расм). $\overrightarrow{A_1A}$ ва $\overrightarrow{AA_2}$ векторлар бир хил йўналган бўлиб, уларнинг нисбати $\lambda_1 : \lambda_2$ га тенг. Демак,

$$\lambda_2 \overrightarrow{A_1A} - \lambda_1 \overrightarrow{AA_2} = O$$

ёки

$$\lambda_2 (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1}) - \lambda_1 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA}) = 0.$$



67- расм.

Бундан:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\lambda_2 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

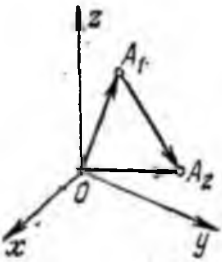
Лекин A (x, y, z) нуқтанинг координаталари $\overrightarrow{OA}$ вектор координаталари демакдир, шунинг учун:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Координаталар системаси тўғри бурчакли бўлсин, A_1 ва *A_2 нуқталар орасидаги масофани бу нуқталар координаталари орқали ифода қилайлик.*

A_1 ва A_2 нуқталар орасидаги масофа $\overrightarrow{A_1 A_2}$ вектор абсолют қийматига тенг (68-расм). Қуйидагига эгамиз:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = e_x (x_2 - x_1) + e_y (y_2 - y_1) + e_z (z_2 - z_1).$$



68- расм.

Бундан:

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

xy текислигидаги учбурчак юзини учларининг координаталари орқали ифода қилайлик:

$$A_1(x_1, y_1, 0),\ A_2(x_2, y_2, 0)\ A_3(x_3, y_3, 0).$$

$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ векторларнинг абсолют қиймати $A_1A_2A_3$ учбурчак юзининг икки бараварига тенг:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = e_z \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Демак учбурчак юзи:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Энди $A_1A_2A_3A_4$ тетраэдр ҳажмини учларининг координаталари орқали ифода қилайлик.

$\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторлар аралаш кўпайтмасининг ишораси аниқлигида шу векторлардан ясалган параллелепипед ҳажмига тенг: демак бу кўпайтма $A_1A_2A_3A_4$ тетраэдр ҳажмининг олти бараварига тенг. Бундан:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Машқлар

1. Икки нуқта орасидаги масофа умумий декарт координаталарда ифода қилинсин; бу ерда мусбат ярим ўқлар жуфт-жуфт бўлиб α, β, γ бурчаклар ҳосил қилади, базис векторлар e_x, e_y, e_z эса бирлик векторлар деб фараз қилинади.

2. Учлари $(a, 0, 0)$ $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, 0, 0)$ координаталардан иборат тетраэдрга ташқи чизилган сфера маркази топилсин.

3. Тетраэдр қарама-қарши қирраларининг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқларнинг битта нуқтада кесишиши исбот қилинсин. Бу нуқта координаталари тетраэдр учлари координаталари орқали ифода қилинсин.

4. Тетраэдр учларини уларга қарама-қарши турган ёқлар оғирлик марказлари билан туташтирувчи тўғри чизиқларнинг битта нуқтада кетишиши исбот қилинсин. Бу нуқта координаталари тетраэдр учларининг координаталари орқали ифода қилинсин.

5. Фараз қилайлик. $A_i\ (x_i,\ y_i,\ z_i)$ — тетраэдр учлари бўлсин координаталари

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$
$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4,$$
$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4$$

дан иборат нуқталарнинг $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ шартлар бажарилган ҳолда тетраэдр ичида жойлашиши исбот қилинсин.

6. Умумий ҳолатдаги учбурчак юзини унинг учларининг координаталари орқали ифода қилинг. Координаталар системаси тўғри бурчакли.

7. Тетраэдр ҳажмининг тетраэдр учлари координаталари орқали қуйидагича ифодаланиши исбот қилинсин:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Тўртта $A_i\ (x_i,\ y_i,\ z_i)$ нуқтанинг битта текисликда ётишлиги учун ушбу

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли бўлиши исбот қилинсин.

3-§. Фазода сирт ва эгри чизиқ тенгламалари

Бизга сирт берилган бўлсин (69-расм). Агар

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \tag{1}$$

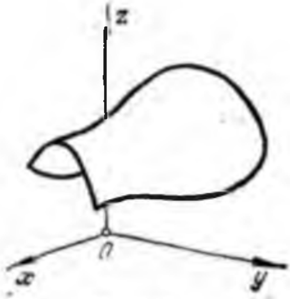
тенгламани сиртдаги ҳар бир нуқтанинг координаталари қаноатлантирса, бу тенглама *сиртнинг ноошкор шаклда берилган тенгламаси* деб аталади. Аксинча, (1) тенгламани қаноатлантирувчи x, y, z сонларнинг исталган учлик, сирт нуқталаридан бирининг координаталари бўлади.

Сирт нуқталари координаталарини иккита u, v параметр сифатида ифодаловчи тенгламалар системаси:

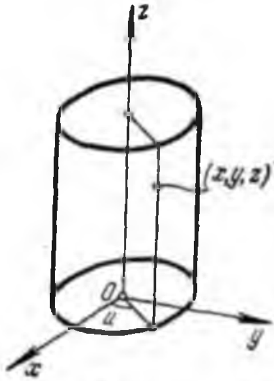
$$x = f_1\ (u, v), \qquad y = f_2\,(u, v), \qquad z = f_3\,(u, v) \tag{2}$$

сиртнинг параметрик кўринишдаги *тенгламалари* деб аталади.

(2) тенгламалардан u, v параметрларни йўқотиб сиртнинг ноошкор кўринишдаги тенгламасини ҳосил қилиш мумкин.



69- расм.



70- расм.

Ихтиёрий сферанинг тўғри бурчакли декарт координаталари x, y, z орқали ифодаланган тенгламасини тузайлик.

(x_0, y_0, z_0) — сфера маркази ва R — унинг радиуси бўлсин. Сферанинг ҳар бир x, y, z нуқтаси марказдан R масофада туради, демак, ушбу тенгламани қаноатлантиради:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0. \qquad (3)$$

Аксинча, (3) тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай (x, y, z) нуқта (x_0, y_0, z_0) нуқтадан R масофада туради, шу сабабли у сферага тегишлидир. Таърифга асосан (3) тенглама сфера тенгламасидир.

Ўқи Oz ва радиуси R га тенг доиравий цилиндр тенгламасини тузайлик (70-расм).

Цилиндр устидаги (x, y, z) нуқта вазиятини аниқловчи u, v параметрлар сифатида z (v) координатани ва z ўқи ҳамда (x, y, z) нуқта орқали ўтувчи текисликнинг xz текислиги билан ташкил қилган (u) бурчагини олайлик. Бу ҳолда ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$x=R\cos u, \qquad y=R\sin u, \qquad z=v$$

—*булар цилиндрнинг параметрик кўринишдаги тенгламаларидир.*

Олдинги иккита тенгламани квадратга кўтариб ва ҳадма-ҳад қўшиб, *цилиндрнинг ноошкор тенгламасини* ҳосил қиламиз:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Фазода бирор эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу эгри чизиқдаги хар бир нуқтанинг координаталари тенгламалар системаси

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

ни қаноатлантирса, бу тенгламалар эгри чизиқнинг *ноошкор кўринишдаги тенгламалари* дейилади ва аксинча, сонларнинг шу иккита тенгламани қаноатлантирувчи исталган учлиги, эгри чизиқдаги бирор нуқта координаталари бўлади.

Эгри чизиқдаги нуқталар координаталарини бирор параметрнинг функциялари сифатида ифодаловчи тенгламалар системаси:

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

эгри чизиқнинг параметрик кўринишдаги *тенгламалари* дейилади.

Икки сирт одатда эгри чизиқ бўйлаб кесишади. Равшанки, агар иккита сирт $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилса, улар кесишган эгри чизиқ тенгламалар системаси билан ифода қилинади:

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0.$$

Фазодаги ихтиёрий айлананинг тенгламасини тузайлик. Исталган айланани иккита сферанинг кесишмаси деб қараш мумкин. Демак, исталган айлана ушбу тенгламалар системаси билан ифодаланиши мумкин:

$$\left.\begin{aligned} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - R_2^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эгри чизиқ ва сирт одатда айрим нуқталарда кесишади. Агар сирт $f(x, y, z) = 0$ тенглама ва эгри чизиқ $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилса, эгри чизиқ ва сиртнинг кесишган нуқталари учта тенглама системасини қаноатлантиради.

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Бу системани ечиб, кесишиш нукталарининг координаталарини топамиз.

Машқлар

1. Ушбу кўринишдаги

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

тенглама билан берилган сиртнинг $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ шартда сфера экани исбот килинсин. Унинг маркази, координаталари ва радиуси топилсин.

2. Айлана иккита сфера кесишмаси сифатида берилган:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0, \\ f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_2x + 2b_2y + 2c_2z + d_2 = 0. \end{array}\right\}$$

Бу айлана орқали ўтувчи исталган сфера ушбу

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) = 0$$

тенглама билан берилиши мумкинлиги исбот қилинсин.

3. $\varphi(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглама билан бериладиган сиртнинг цилиндрик сирт эканлиги исбот қилинсин. Бу цилиндрик сирт z ўқига параллел тўғри чизиқлардан ҳосил қилинган.

4. Ўқи Oz, учи 0 ва учидаги бурчаги 2α дан иборат доиравий конуснинг тенгламаси тузилсин.

5. Учлари γ_1 ва γ_2 эгри чизиқларга қарашли кесма ўртаси чизган сиртнинг тенгламаси тузилсин, бунда γ_1, γ_2 чизиқлар ушбу тенгламалар билан берилган:

$$\gamma_1: \left.\begin{array}{l} z = ax^2, \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \gamma_2: \left.\begin{array}{l} z = by^2. \\ x = 0. \end{array}\right\}$$

6. Тўғри чизиқ доимо yz текислигига параллел ҳолда қола туриб ҳаракат қилади ва иккита γ_1, γ_2 эгри чизиқ билан кесиша боради:

$$\gamma_1: \left.\begin{array}{l} z = f(x), \\ y = a \end{array}\right\} \qquad \gamma_2: \left.\begin{array}{l} z = \varphi(x) \\ y = b \end{array}\right\} \qquad (a \neq b).$$

Бу тўғри чизиқ чизган сирт тенгламаси тузилсин.

7. Ушбу

$$z = \varphi(x), \qquad y = 0, \qquad (x > 0)$$

эгри чизиқни Oz ўқи атрофида айлантиришдан

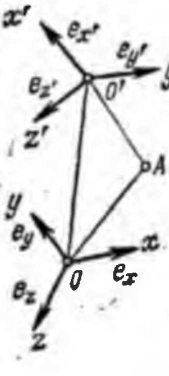
$$z = \varphi(\sqrt{x_2 + y_2})$$

кўринишли тенглама билан ифодаланадиган сиртни чизиши исбот қилинсин.

8. Ясовчилари z ўқига параллел бўлиб, ушбу $z = f(x)$, $z = \varphi(y)$ эгри чизиқлардан ўтувчи цилиндрик сиртнинг

$$f(x) - \varphi(y) = 0$$

тенглама билан берилиши исбот қилинсин.



71- расм.

4- §. Координаталарни алмаштириш

Фазода иккита умумий декарт координаталари системаси $x\ y\ z$ ва $x'\ y'\ z'$ киритилган бўлсин (71- расм). *Ихтиёрий A нуқтанинг $x'\ y'\ z'$ системасидаги координаталарини унинг xyz системадаги кординаталари орқали ифода қилайлик.*

Қуйидагиларга эгамиз:

$$\overrightarrow{O'A} = x'e_{x'} + y'e_{y'} + z'e_{z'},$$

$$\overrightarrow{O'O} = x_0'e_{x'} + y_0'e_{y'} + z_0'e_{z'},$$

$$\overrightarrow{OA} = x e_x + y e_y + z e_z,$$

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = (x_0' e_{x'} + y_0' e_{y'} + z_0' e_{z'}) + (x e_x + y e_y + z e_z).$$

e_x, e_y, e_z векторлар $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$ векторлари орқали бир қийматли ифодаланади.

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \alpha_{11} e_{x'} + \alpha_{12} e_{y'} + \alpha_{13} e_{z'}, \\ e_y &= \alpha_{21} e_{x'} + \alpha_{22} e_{y'} + \alpha_{23} e_{3'}, \\ e_z &= \alpha_{31} e_{x'} + \alpha_{32} e_{y'} + \alpha_{33} e_{z'}, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

бунда α_{ij} кооэффициентлар e_x, e_y, e_z векторларнинг базисга нисбатан координаталаридир.

Бу ифодаларни $\overrightarrow{O'A}$ учун ёзилган формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'A} = {} & (x_0 + \alpha_{11} x + \alpha_{21} y + \alpha_{31} z) e_{x'} + \\ & + (y_0 + \alpha_{12} x + \alpha_{22} y + \alpha_{32} z) e_{y'} + \\ & + (z_0 + \alpha_{13} x + \alpha_{23} y + \alpha_{33} z) e_{z'}. \end{aligned}$$

Бу формулада қавслар ичидаги коэффициентлар маъноси: улар $\overrightarrow{O'A}$ векторнинг $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$ базисга нисбатан координаталаридир, яъни A нуқтанинг x' y' z' системага нисбатан координаталарини билдиради. Излаган формулаларимиз ҳосил қилинади:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_{11} x + \alpha_{21} y + \alpha_{31} z + x_0', \\ y' &= \alpha_{12} x + \alpha_{22} y + \alpha_{32} z + y_0', \\ z' &= \alpha_{13} x + \alpha_{23} y + \alpha_{33} z + z_0'. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Бу формуладаги коэффициентларнинг маъноси: α_{11}, α_{12}, α_{13} сонлар e_x нинг $e_{y'}$, $e_{z'}$ базисга нисбатан координаталари; α_{21}, α_{22}, α_{23} эса e_y векторнинг координаталари; α_{31}, α_{32}, α_{33} лар e_z вектор координаталари x_0', y_0', z_0' лар O нуқтанинг $x'y'z'$ системадаги координаталари.

Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{22} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

детерминантнинг нолдан фарқли эканини эътиборга олайлик.

Ҳақиқатан ҳам,

$$(e_x e_y e_z) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} (e_{x'} e_{y'} e_{z'})$$

тўғрилигини текшириб кўриш мумкин. Аммо $e_x e_y e_z \neq 0$, шунинг учун $\Delta \neq 0$.

Бир-бирига узлуксиз равишда алмаштирилиши мумкин бўлган $x'y'z'$ координаталарнинг ҳамма системаси учун Δ детерминант бир хил ишорага эга. (Координаталар системасини узлуксиз равишда ўзгаради деганда 0 бош ва $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$ базиснинг узлуксиз ўзгариши тушунилади.) Ҳақиқатан ҳам, $(e_x\ e_y\ e_z)$ кўпайтма нолдан фарқли, шунинг учун ҳам Δ нолдан фарқли. Бундан ташқари Δ нинг узлуксиз ўзгариши сабабли у турли ишорали қийматларни қабул қила олмайди.

(2) даги формулалар системаси $\Delta \neq 0$ шартда қуйидагича талқин қилинади: улар координаталарнинг $x'y'z'$ системасидан боши $(x_0,\ y_0',\ z_0)$ нуқтада ва базис векторлари $x'y'z'$ системанинг базис векторлари орқали (1) формулалар воситасида ифодаланадиган xyz системага ўтишни билдиради.

Координаталарнинг иккала системаси xyz ва $x'y'z'$ ҳам тўғри бурчакли бўлса, (2) формулалардаги коэффициенлар *ортогоналлик шартларини* қаноатлантиради:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\ &\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \quad \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

бу муносабатларни ҳосил қилиш учун (1) формулалардан ва базисларнинг ортогоналлигини ифодаловчи шартлардан фойдаланилади:

$$e_x^2 = e_x^2 = e_z^2 = 1, \quad e_x e_y = e_y e_z = e_z e_x = 0,$$
$$e_{x'}^2 = e_{y'}^2 = e_{z'}^2 = 1, \quad e_{x'} e_{y'} = e_{y'} e_{z'} = e_{z'} e_{x'} = 0.$$

Аксинча, (2) формулалар (3) шартлар бажарилган ҳолда ҳамиша шундай талқин қилиниши мумкин: бу формулалар координаталарнинг бирор $x'y'z'$ системадан боши $(x_0,\ y_0',\ z_0)$ нуқтада жойлашган ва базис векторлари (1) формулалар билан ифодаланадиган тўғри бурчакли координаталарнинг xyz системасига ўтишни билдиради. (3) шартларга асосан e_x, e_y, e_z базис векторлари бирлик ва жуфт-жуфт ортогоналдир.

Таъкидлаб ўтайлик: координаталарнинг иккала системаси ҳам (яъни xyz ва $x'y'z'$ тўғри бурчакли декарт системаси бўлса) $\Delta = \pm 1$ дир ва шунинг билан бирга ҳаракат натижасида иккала системани устма-уст келтириш мумкин бўлган ҳолда $\Delta = 1$. Агар уларни устма-уст келтириш учун кўзгудан қайтиш алмаштиришини ишлатмаслик иложи топилмаганда: $\Delta = -1$.

Машқлар

1. xy текислик $x'y'$ текислик билан устма-уст тушган ҳолда координаталарни алмаштириш формулалари қайси кўринишни олади?

2. Координаталар бирор системасида сферанинг
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = c$ тенглама билан берилганлиги маълум. Координаталар ўқлари орасидаги бурчаклар топилсин.

3. Координаталарнинг боши 0 умумий бўлган иккита xyz ва $x'y'z'$ система берилган бўлсин. Бу ерда e_1, e_2, e_3 биринчи система базиси, $e_1 \times e_2$, $e_2 \times e_3$, $e_3 \times e_1$ векторлар эса иккинчи система базиси деб фараз қилайлик. Системаларнинг биридан иккинчисига ўтиш формулалари тузилсин.

4. Координаталарнинг тўғри бурчакли бир декарт системаси xyz дан, боши ўша система боши билан бир хил бўлган бошқа $x'y'z'$ декарт системасига ўтишни уч босқичда бажариш мумкин:

$$\mathrm{I}\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z_1 &= z; \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{II}\quad \left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= y_1\cos\theta - z_1\sin\theta, \\ z_2 &= y_1\sin\theta + z_1\cos\theta; \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{III}\quad \left.\begin{aligned} x' &= x_2\cos\varphi - y_2\sin\psi, \\ y' &= x\sin\varphi + y_2\cos\psi, \\ z' &= z_2. \end{aligned}\right\}$$

φ, θ, ψ бурчаклар *Эйлер бурчаклари* дейилади. Уларнинг геометрик маъноси аниқлансин.

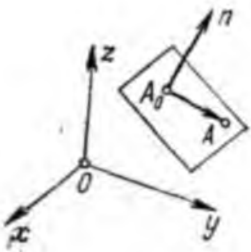
VI боб

ТЕКИСЛИК ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1- §. Текислик тенгламаси

Ихтиёрий текислик тенгламасини тўғри бурчакли декарт координаталари хуz системасида тузайлик.

Айтайлик, A_0 (x_0, y_0, z_0) текисликнинг бирор нуқтаси, $\boldsymbol{n}$ — нолдан фарқли ва текисликка перпендикуляр вектор бўлсин. Бу ҳолда текисликнинг ҳар қандай A (x, y, z) нуқтаси учун $\overrightarrow{A_0A}$ ва $\boldsymbol{n}$ векторлар перпендикуляр бўлади (72- расм). Демак:



72- расм.

$$\overrightarrow{A_0A}\cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{1}$$

Айтайлик, a, b, c сонлар $\boldsymbol{n}$ векторнинг $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ базисга нисбатан координаталари бўлсин. $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, шунинг учун (1) дан

$$a\ (x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\ (z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Бу талаб қилинган тенгламадир.

Шундай қилиб, *исталган текисликнинг x, y, z координаталарга нисбатан тенгламаси чизиқлидир.*

Декарт координаталарининг битта системасидан иккинчисига ўтиш чизиқли формулалар орқали ифодаланганлиги сабабли, текислик декарт координаталарининг ҳар қандай системасига нисбатан ҳам чизиқли тенглама билан ифодаланади (фақат тўғри бурчакли системада эмас).

Энди *исталган*

$$ax + by + cz + d = 0$$

тенгламанинг бирор текислик тенгламаси бўлишини исбот қилайлик.

Фараз қилайлик, x_0, y_0, z_0 — берилган тенгламанинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0,$$

демак, тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Фараз қилайлик, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ базисга нисбатан a, b, c координатали вектор $\boldsymbol{n}$ бўлсин, x_0, y_0, z_0 координатали нуқта A_0 ва x, y, z координатали нуқта эса A бўлсин. Бу ҳолда (3) тенгламани эквивалент шаклда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Демак A_0 нуқтадан ўтиб $\boldsymbol{n}$ векторга перпендикуляр бўлган текисликнинг ҳамма нуқталари (фақатгина шулар) берилган тенгламани қаноатлантиради. Демак, тенглама шу текислик тенгламасидир.

Текислик тенгламасидаги x, y, z олдидаги коэффициентларнинг текисликка перпендикуляр бўлган векторнинг $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ базисга нисбатан координаталари эканлигини эътиборга олиб қўямиз.

Машқлар

1. Текисликка нисбатан симметрик жойлашган иккита (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) нуқта берилган. Текислик тенгламаси тузилсин.

2. Ушбу

$$ax + by + cz + d_1 = 0,$$
$$ax + by + cz + d_2 = 0, \qquad d_1 \neq d_2.$$

текисликларнинг параллеллиги (кесишмаслиги) исбот қилинсин.

3. Координаталари ушбу

$$(ax + by + cz + d)^2 - \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни нимадан иборат?

4. Ушбу

$$f(x, y, z) + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$f(x, y, z) + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган эгри чизиқнинг яссилиги, яъни унинг ҳамма нуқталарининг бирор текисликка тегишли эканини исбот қилинсин.

5. Учта текислик ўзларининг тенгламалари билан берилган:

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$
$$\lambda (ax + by + cz) + \mu(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k = 0.$$

Буларнинг $k \neq \lambda d + \mu\delta$ шарт бажарилган ҳолда умумий нуқталарга эга эмаслиги исбот қилинсин.

6. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x = \beta y + \delta = 0$$

иккита сферанинг кесишмаси бўлган айлана оркали ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

7. Инверсия алмаштириши натижасида сфера ё сферага, ёки текисликка ўтказилиши исбот қилинсин.

8. Иккита

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

текисликнинг кесишган тўғри чизиғи орқали ўтувчи ҳар қандай текислик тенгламасини ушбу

$$\lambda (ax + by + cz + d) + \mu(\alpha x + \rho y + \gamma z + \delta) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги кўрсатилсин.

9. Берилган учта (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ нуқта орқали ўтувчи текисликнинг ушбу

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

2- §. Текисликнинг координаталар системасига нисбатан жойлашиши

Текислик тенгламасининг у ёки бу хусусий кўринишига эга бўлишига қараб, текисликнинг координаталар системасига нисбатан жойланишидаги хусусиятларни аниқлаб олайлик.

1. $a = 0$, $b = 0$. n (текисликка перпендикуляр) вектор z ўқига параллел. Текисликнинг ўзи xy текислигига параллел ва $\alpha = 0$ бўлган хусусий ҳолда xy текислик билан устма-уст тушади.

2. $b = 0$, $c = 0$. Текисликнинг ўзи yz текислигига параллел, $d = 0$ ҳолда эса yz текислик билан устма-уст тушади.

3. $c = 0$, $a = 0$. Текислик xz текислигига параллел ва $d = 0$ ҳолда у билан устма-уст тушади.

4. $a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$. $\boldsymbol{n}$ вектор x ўқига перпендикуляр: $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{n}=0$. Текислик x ўқига параллел ва $d=0$ бўлган хусусий ҳолда x ўқи орқали ўтади.

5. $a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0$. Текислик y ўқига параллел ва $d=0$ ҳолда y ўқи орқали ўтади.

6. $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c=0$. Текислик z ўқига параллел ва $d=0$ ҳолда z ўқи орқали ўтади.

7. $d=0$. Текислик координаталар бошидан ўтади (унинг 0, 0, 0 координаталари текислик тенгламасини қаноатлантиради).

Агар барча коэффициентлар нолдан фарқли бўлса, тенгламани $-d$ га бўлиш мумкин. Бунда

$$-\frac{d}{a}=\alpha,\ -\frac{d}{b}=\beta,\ -\frac{d}{c}=\gamma$$

деб фараз қилиб текислик тенгламасини ушбу шаклда ҳосил қиламиз:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1. \tag{1}$$

Агар ишораларига эътибор бермасак, α, β, γ сонлар текисликнинг координаталар ўқларидан ажратган кесмаларига тенгдир. Ҳақиқатан ҳам, x ўқини ($y=0$, $z=0$) текислик (α, 0, 0,) нуқтада, y ўқини (0, β, 0) нуқтада z ўқини эса (0, 0, γ) нуқтада кесади. (1) тенглама текисликнинг ўқларидан ажратган *кесмаларига нисбатан* (ёзилган) *тенгламаси* дейилади.

Пировардида, xy ($c\neq 0$) текисликка перпендикуляр бўлмаган исталган текислик

$$z=px+qy+l$$

кўринишдаги тенглама билан ифодаланишини таъкидлаб ўтамиз.

Машқлар

1. $ax+by+cz+d=0$ текислик қайси шарт бажарилганда мусбат ярим ўқ x ни (y ни, z ни) кесиб ўтади?

2. Координат текисликлар ва $ax+by+cz+d=0$ текислик билан чегараланган тетраэдр ҳажми топилсин, бу ерда $abcd\neq 0$ деб фараз қилинади.

3. Фазо нуқталари учун

$$|x|+|y|+|z|<a$$

шарт бажарилади. Бу нуқталарнинг маркази координаталар бошидан иборат ва учлари координат ўқларида жойлашган октаэдр жойлашганлиги исбот қилинсин.

4. σ текислик тўғри бурчакли декарт координаталарига нисбатан

$$ax + by + cz + d = 0$$

тенглама билан берилган, xy текисликка нисбатан σ га симметрик бўлган σ' текислик тенгламаси тузилсин (координаталар боши 0).

5. Текисликларнинг λ параметрга боғлиқ оиласи берилган:

$$ax + by + cz + d + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Оилада z ўқига параллел текислик топилсин.

6. Текисликлар оиласи;

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + + d_2) + \mu(a_3x + d_3y + + c_3z + d_3) = 0$$

да xy текислигига параллел бўлган текислик топилсин.

Оила параметрлари λ ва μ дир.

3- §. Текисликнинг нормал шаклдаги тенгламаси

Агар A (x, y, z) нуқта

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

текисликка тегишли бўлса, унинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантиради.

Агар A нуқта текисликка тегишли бўлмаса

$$ax + by + cz + d$$

ифоданинг қандай геометрик маъноси борлигини аниқлайлик.

A нуқтадан текисликка перпендикуляр туширайлик. A_0 (x_0, y_0, z_0) перпендикуляр асоси бўлсин. A_0 нуқта текисликда ётганлиги учун

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Бундан:

$$ax + by + cz + d = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \\ = \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_0A} = \pm|\boldsymbol{n}|\,\delta;$$

бу ерда $\boldsymbol{n}$ — текисликка туширилган перпендикуляр унинг координаталари a, b, c, δ эса A нуқтанинг текисликкача масофасидир.

Шундай қилиб,

$$ax + by + cz + d$$

ифода текисликдан бир тарафда мусбат ва иккинчи тарафда манфий бўлиб, абсолют қиймат жиҳатдан эса A

нуқтанинг текисликкача масофасига пропорционал. Пропорционаллик *коэффициенти*:

$$\pm|n| = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Агар текислик тенгламасида

$$a^2+b^2+c^2=1$$

бўлса,

$$ax+by+cz+d$$

ифода, башарти унинг ишорасига эътибор берилмаса, нуқтанинг текисликкача масофасига тенгдир. Бундай ҳолда текислик *нормал шаклдаги тенгламаси билан берилган* дейилади.

Текисликнинг нормал шаклдаги тенгламасини ҳосил қилиш учун уни

$$\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

га бўлиш етарли.

Машқлар

1. Тўғри бурчакли декарт системасида берилган

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$ax+by+cz+d'=0$$

текисликлар (бунда $d \neq d'$ умумий нуқталарга эга эмас, демак улар параллел). Бу текисликлар орасидаги масофа топилсин.

2. $ax+by+d=0$ текислик z ўқига параллел, z ўқининг бу текисликдан бўлган масофаси топилсин.

3. Берилган икки текисликкача олинган масофалари берилган нисбатда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни нимадан иборат?

4. $ax+by+cz+d=0$ текисликка параллел ва ундан δ масофада турган текисликларнинг тенгламалари тузилсин.

5. Агар фазо нуқталари

$$|ax+by+cz+d| < \delta^2$$

шартни қоноатлантирса, улар фазода параллел

$$ax+by+cz\pm\delta^2=0$$

текисликлар орасида жойлашиши исбот қилинсин.

6. Тетраэдр ёқларини ўз ичига олган текисликлар тенгламалари ва ўз координаталари билан M нуқта берилган. M нуқтанинг тетраэдр ичида ётиш-ётмаслигини қандай билиш мумкин?

7. Агар янги координат текисликлар эски системада ушбу

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, декарт координаталарининг янги системасига ўтиш формулалари тузилсин.

4-§. Текисликларнинг ўзаро вазияти

Ушбу иккита текислик берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Қайси шартлар бажарилган ҳолда бу текисликлар ўзаро: а) *параллел*: б) *перпендикуляр бўлишилигини аниқлаб олайлик.*

a_1, b_1, c_1 сонлар биринчи текисликка перпендикуляр $\boldsymbol{n}_1$ векторнинг координаталари ва a_2, b_2, c_2 сонлар эса иккинчи текисликка перпендикуляр $\boldsymbol{n}_2$ векторнинг координаталаридан иборатлиги сабабли, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ векторлар параллел, яъни бу векторларнинг координаталари пропорционал $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ бўлган ҳолда текисликлар параллел бўлади.

Шу билан бирга бу шартлар текисликларнинг параллеллиги учун ҳам етарли бўлади (башарти улар устма-уст тушмаса).

(1) текисликларнинг перпендикуляр бўлиши учун кўрсатилган $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ векторларнинг перпендикулярлиги зарур ва етарлидир, бу эса нолга тенг бўлмаган векторлар учун ушбу

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0 \quad \text{ёки} \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

шартга эквивалент.

Энди (1) тенгламалар билан ихтиёрий иккита текислик берилган бўлсин. *Бу текисликлар ташкил қилган бурчакни топайлик:*

$\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ векторлар орасидаги θ бурчак текисликлар ташкил қилган бурчаклардан бирига тенг. $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ векторлар орасидаги бурчакни топиш осон:

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = |\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2| \cos\theta.$$

Бундан:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Турлича бўлган учта текислик берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) текисликлар ё битта нуқтада кесишади, ёки бирор тўғри чизиққа параллел, жумладан тўғри чизиқ орқали ўтади.

Агар (2) текисликлар битта нуқтада кесишса, (2) тенгламалар системаси ягона ечимга эгадир. Алгебрадан маълумки, бу система детерминанти нолдан фарқли булган қолдагина юз беради:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Буни бошқача усулда ҳам тушунтириш мумкин. Текисликлар ягона битта нуқтада кесишса, $\boldsymbol{n}_1$ (a_1, b_1, c_1), $\boldsymbol{n}_2$ (a_2, b_2, c_2), $\boldsymbol{n}_3$ (a_3, b_3, c_3) векторлар битта текисликка параллел була олмайди (акс ҳолда битта нуқтада кесишган текисликлар тўғри чизиқ бўйлаб кесишган булар эди), демак уларнинг Δ детерминантга тенг булган аралаш кўпайтмаси нолдан фарқлидир.

(2) текисликлар $\Delta = 0$ ҳолда бирор тўғри чизиққа параллел булади, бу эса $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ векторларнинг бирор текисликка параллеллигидан дарак беради. Агар бундай вазиятда (2) система биргаликда ечимга эга булса, текисликлар тўғри чизиқлар бўйлаб кесишади.

Машқлар

1. $ax + by + cz + d = 0$ текисликнинг координат ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари топилсин.

2. $z = px + qy + l$ текисликнинг xy текислиги билан ташкил қилган бурчаги топилсин.

3. $z = px + qy + l$ текисликдаги фигура юзи билан унинг xy текислигига туширилган $\bar{F}$ проекцияси орасида ушбу

$$S(F) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, S(\bar{F})$$

боғланиш мавжудлиги исбот қилинсин.

4. Қандай шарт бажарилганда $ax + by + cz + d = 0$ текислик x ва y ўқларини бир хил бурчак остида кесади? Қандай шарт бажарилганда xy ва z ўқларнинг учаласини ҳам бир хил бурчак остида кесиб ўтади?

5. (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтиб, $ax + by + cz + d = 0$ текисликка параллел булган текислик

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

6. (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтиб, ушбу

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

текисликларга перпендикуляр булган текисликнинг

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама билан берилиши исбот қилинсин.

7. Ушбу $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ дастага қарашли текисликлар орасидан $ax + by + cz + d = 0$ текисликка перпендикуляр булган текислик топилсин.

8. Битта тўғри чизиққа параллел булмаган учта текислик тенгламалари

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

дан иборат дейлик. Бу текисликларнинг кесишган нуктасидан утувчи хар қандай текислик ушбу

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \\ + \lambda_3(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0$$

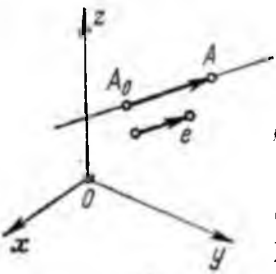
куринишдаги тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

5- §. Тўғри чизиқ тенгламалари

Ҳар қандай туғри чизиқ икки текисликнинг кесишмаси сифатида берилиши мумкин. Демак, *ҳар қандай туғри чизиқ*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

тенгламалар билан берилиши мумкин, буларнинг биринчиси битта текисликни, иккинчиси эса иккинчи текисликни ифода қилади. Аксинча, *бундай иккита эркли тенгламаларнинг биргаликда бўлган системаси қандайдир, тўғри чизиқ тенгламалари булади.*



73- расм.

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ — туғри чизиқдаги белгиланган бирор нуқта, $A(x, y, z)$ — туғри чизиқдаги ихтиёрий нуқта ва $\boldsymbol{e}(k, l, m)$ — тўғри чизиққа параллел ва нолдан фарқли вектор булсин (73- расм).

Бундай ҳолда $\overrightarrow{A_0A}$ ва $\boldsymbol{e}$ векторлар параллел, демак, уларнинг координаталари пропорционал:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}. \qquad (2)$$

Тўғри чизиқнинг бу шаклдаги тенгламалари ***каноник тенгламалар*** деб аталиб, у (1) нинг хусусий ҳолидан иборат, чунки (2) ни (1) га мос бўлган ушбу эквивалент шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}, \qquad \frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Тўғри чизиқ (1) тенгламалар билан берилган бўлсин. Унинг каноник тенгламаларини ёзайлик. Бунинг учун тўғри чизиқда бирор A_0 нуқтани ва тўғри чизиққа параллел $\boldsymbol{e}$ векторни топиш етарли.

Тўғри чизиққа параллел ҳар қандай $\boldsymbol{e}(k, l, m)$ вектор (1) текисликларнинг ҳар бирига параллел бўлади, ва аксинча. Демак, k, l, m сонлар ушбу

$$\begin{aligned} a_1k+b_1l+c_1m=0,\\ a_2k+b_2l+c_2m=0 \end{aligned} \tag{3}$$

тенгламаларни қаноатлантиради.

Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларида иштирок этувчи x_0, y_0, z_0 сифатида (1) системанинг исталган ечимини ва k, l, m сифатида эса (3) нинг исталган ечимини қабул қилиш мумкин. Масалан:

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \quad l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}, \quad m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларидан унинг параметрик тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун каноник тенгламалардаги учта нисбатнинг умумий қийматини t га тенг деб фараз қилсак *тўғри чизиқнинг ушбу параметрик тенгламаларини* ҳосил қиламиз:

$$x=kt+x_0, \qquad y=lt+y_0, \qquad z=mt+z_0.$$

Каноник тенгламаларидаги коэффициентлардан баъзиларининг нолга тенг бўлишига қараб, тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан жойлашишидаги хусусиятларни аниқлаб олайлик.

$\boldsymbol{e}(k, l, m)$ векторнинг тўғри чизиққа нисбатан параллеллиги сабабли, $m=0$ да тўғри чизиқ xy текислигига параллел ($\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e}_z=0$), $l=0$ да тўғри чизиқ текислигига параллел, $k=0$ да эса yz текислигига параллел бўлади.

$k=0$ ва $l=0$ ҳолда тўғри чизиқ z ўқига параллел, $l=0$ ва $m=0$ да тўғри чизиқ x ўқига параллел, $k=0$ ва $m=0$ да y ўқига параллел бўлади.

Пировардида қуйидагини таъкидлаб ўтайлик: (1) ва (2) кўринишли тенгламалар билан тўғри чизиқ умумий декарт координаталарида (фақат тўғри бурчакли координаталардагина эмас) берилиши мумкин.

Машқлар

1. Қандай шарт бажарилганда каноник шаклдаги (2) тенгламалари билан берилган тўғри чизиқ x (y, z) ўқини кесиб ўтади? Қайси шартда тўғри чизиқ xy (yz, zx) текислигига параллел бўлади?

2. Бир-бирига жуфт-жуфт параллел бўлмаган учта текисликдан баравар узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тўғри чизиқдан иборатлиги исбот қилинсин.

3. Учбурчакнинг учларидан баравар узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тўғри чизиқдан иборатлиги исбот қилинсин.

4. $z = axy$ сиртнинг ҳар бир нуқтасидан ўтиб, ўзининг ҳамма нуқталари билан бирга шу сирт устида ётувчи иккита тўғри чизиқ мавжудлиги исбот қилинсин.

5. Агар ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ва} \quad \left.\begin{aligned} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

эканлиги исбот қилинсин.

6- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг, икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти

Ушбу тенгламалар билан берилган текислик ва тўғри чизиқни олайлик:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

(a, b, c) вектор текисликка перпендикуляр, (k, l, m) вектор эса тўғри чизиққа параллел, шу сабабли, *бу векторлар перпендикуляр, яъни*

$$ak + bl + cm = 0$$

бўлган ҳолда тўғри чизиқ билан текислик бир-бирига параллел бўлади.

Шу билан бирга тўғри чизиқда ётувчи (x_0, y_0, z_0) нуқта текислик тенгламасини қаноатлантирса,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

тўғри чизиқ текисликда ётади.

Агар (a, b, c) *ва* (k, l, m) *векторлар параллел, яъни*

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} \tag{2}$$

бўлса, тўғри чизиқ билан текислик параллел бўлади.

Агар тўғри чизиқ иккита

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

текисликнинг кесишмаси сифатида берилса, бу ҳолда ҳам тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун координаталари

$$k = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad l = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

дан иборат векторнинг тўғри чизиққа параллеллигини эътиборга олиб (1) ва (2) шартлардан фойдаланиш етарли.

Каноник кўринишдаги тенгламалари билан берилган иккита

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x'}{k'} = \frac{y - y'}{l'} = \frac{z - z'}{m'} \\ \frac{x - x''}{k''} = \frac{y - y''}{l''} = \frac{z - z''}{m''} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

тўғри чизиқни олайлик.

(k', l', m') вектор биринчи тўғри чизиққа, (k'', l'', m'') вектор эса иккинчи тўғри чизиққа параллел бўлганлиги сабабли ушбу

$$\frac{k'}{k''} = \frac{l'}{l''} = \frac{m'}{m''},$$

шартлар бажарилган ҳолда (3) *тўғри чизиқлар параллел бўлади.*

Жумладан, биринчи тўғри чизиқдаги нуқта, масалан, нуқта иккинчи тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантирса, яъни

$$\frac{x' - x''}{k''} = \frac{y' - y''}{l''} = \frac{z' - z''}{m''}$$

бўлса, тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

(k', l', m') ва (k'', l'', m'') *векторлар перпендикуляр, яъни*

$$k'l'' + l'l'' + m'm'' = 0$$

бўлса, тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади.

Агар икки тўғри чизиқ ўзларининг юқорида қараб чиқилган кўринишдаги тенгламаларининг бирортаси билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчакни топиш қийин эмас. Бунинг учун тўғри чизиқларга параллел бўлган векторлар орасидаги бурчакни топиш етарли. Чунончи, тўғри чизиқлар каноник шаклдаги (3) тенгламалари билан берилган бўлса, улар ташкил қилган бурчаклардан бири учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\cos\theta = \frac{k'k'' + l'l'' + m'm''}{\sqrt{k'^2 + l'^2 + m'^2}\sqrt{k''^2 + l''^2 + m''^2}}.$$

Машқлар

1. (3) кўринишдаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар учун ушбу

$$\begin{vmatrix} x' - x'' & y' - y'' & z' - z'' \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix} = 0$$

шарт бажарилса, тўғри чизиқлар параллел бўлиши ёки кесишиши исбот қилинсин.

2. Каноник шаклдаги тенгламалари билан берилган иккита айқаш тўғри чизиқ орасидаги масофа топилсин.

3.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқ ва $ax + by + cz + d = 0$ текисликнинг параллеллик (перпендикулярлик) шарти топилсин.

4. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_2x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ва } \left.\begin{aligned} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқларнинг параллеллик (перпендикулярлик) шарти топилсин.

5. Учи (x_0, y_0, z_0) нуқтада бўлган ва ясовчилари $ax + by + cz + d = 0$ текисликни α бурчак остида кесиб ўтувчи конус сиртининг тенгламаси ёзилсин.

6. (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтадиган ва ушбу

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

текисликларга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

7. Учи $(0, 0, 2R)$ нуқтада ва ўзи ушбу

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

сферанинг $ax+by+cz+d=0$ текислик билан кесишиш чизиғи орқали ўтувчи конус сиртнинг тенгламаси тузилсин.

Бу конус сиртнинг xy текислик билан кесишиш чизиғи нимадан иборатлиги аниқлансин.

8. *Сферанинг стереографик проекцияси* деб, унинг ихтиёрий нуқтасидан шу нуқтага диаметрал қарама-қарши бўлган нуқтадаги уринма текисликка туширилган проекциясига айтилади. Стереографик проекциялаш натижасида сферадаги айланаларга проекция текислигида айланалар ва тўғри чизиқларнинг мос келиши исбот қилинсин.

7- §. Тўғри чизиқ ва текисликка оид асосий масалалар

(x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ихтиёрий текислик тенгламаси тузилсин.

Ҳар қандай текислик ушбу

$$ax+by+cz+d=0$$

кўринишдаги тенглама билан берилади. (x_0, y_0, z_0) нуқта текисликка тегишли бўлгани учун:

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0,$$

бундан изланган текислик тенгламаси:

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

ёки

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Исталган a, b, c лар учун ҳам (x_0, y_0, z_0) нуқта бу тенгламани қаноатлантиради.

(x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ тенгламалари тузилсин.

Изланган тенглама:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгламани (x_0, y_0, z_0) координаталар қаноатлантиради, демак, бу тенглама (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ифодалайди. k, l, m сонларга (учови ҳам бирдан нолга тенг бўлмаган) ихтиёрий қийматлар бера бориб ихтиёрий йўналишдаги тўғри чизиқни ҳосил қиламиз.

Берилган икки (x', y', z'), (x'', y'', z'') нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламалари тузилсин.

Тўғри чизиқ тенгламаларини ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}.$$

Иккинчи нуқта тўғри чизиқда ётади, демак,

$$\frac{x''-x'}{k}=\frac{y''-y'}{l}=\frac{z''-z'}{m}.$$

Натижада k, l, m ни йўқотиш имкони туғилади, биз ушбу

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Битта тўғри чизиқда ётмаган учта $A'(x', y', z')$, $A''(x'', y'', z'')$, $A'''(x''' y''', z''')$ нуқтадан ўтадиган текислик тенгламаси тузилсин.

Изланган текисликнинг ихтиёрий нуқтаси $A(x, y, z)$ бўлсин. Учта

$$\overrightarrow{A'A},\ \overrightarrow{A'A''},\ \overrightarrow{A'A'''}$$

вектор битта текисликда ётади. Демак,

$$(\overrightarrow{A'A},\ \overrightarrow{A'A''},\ \overrightarrow{A'A'''})=0.$$

Бундан изланган тенглама ҳосил қилинади:

$$\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ x''-x' & y''-y' & z''-z' \\ x'''-x' & y'''-y' & z'''-z' \end{vmatrix}=0.$$

Берилган (x_0, y_0, z_0), нуқтадан ўтадиган ва

$$ax+by+cz+d=0$$

текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

Изланган тенглама:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Ҳақиқатан хам, бу текислик берилган нуқтадан ўтади ва берилган текисликка параллелдир.

Берилган (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтиб, берилган

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$$

тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Изланган тенглама:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

(x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтиб,

$$ax+by+cz+d=0$$

текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ушбу

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

тенгламалар билан берилади.

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр ва (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи текислик ушбу

$$k(x-x_0)+l(y-y_0)+m(z-z_0)=0$$

тенглама билан берилади.

(x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтиб иккита

$$\frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'} \text{ ва } \frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m''}$$

тўғри чизиққа параллел бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

(k', l', m') ва (k'', l'', m'') векторлар текисликка параллел бўлгани учун уларнинг вектор кўпайтмаси текисликка перпендикулярдир. Бундан изланган тенглама:

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix} m' & k' \\ m'' & k'' \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} k' & l' \\ k'' & l'' \end{vmatrix}=0$$

ёки

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix}=0.$$

Машқлар

1. Тенгламалари каноник шаклда берилган, иккита айқаш тўғри чизиқдан баравар узоқлашган текислик тенгламаси тузилсин.

2. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқ орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг қуйидаги

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

кўринишдаги тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

3.
$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$$

тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган (x_0, y_0, z_0) нуқта орқали ўтувчи текисликнинг ушбу

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix}=0$$

тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

4. Берилган

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқларни кесиб ўтадиган исталган тўғри чизиқнинг ушбу

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$
$$\lambda'(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)+\mu'(a_4x+b_4y+c_4z+d_4)=0$$

тенгламалар билан ифодаланиши исбот қилинсин.

5. Координаталар бошидан ўтиб, $\varphi(x, y)=0$, $z=1$ дан иборат эгри чизиқ билан кесишувчи тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган конус сиртини ушбу

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$$

тенгламалар билан ифодаланишини исбот қилинг.

VII боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

1- §. Координаталарнинг махсус системаси

Иккинчи тартибли сирт деб фазо нуқталарининг шундай тупламига айтиладики, уларнинг координаталари ушбу

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{23}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

куринишли тенгламани қаноатлантиради.

Бу таърифнинг координаталар системасини танлаб олишга нисбатан инвариантлиги равшан. Ҳақиқатан ҳам, координаталарнинг исталган бошқа бирор x' y' z' системасига нисбатан сирт тенгламаси x, y, z урнига x', y', z' нинг чизиқли ифодаларини қуйиш натижасида ҳосил қилинади, бинобарин, у тенглама x' y' z' га нисбатан ҳам (1) куринишга эга булади.

Исталган текислик иккинчи тартибли сиртни иккинчи тартибли эгри чизиқ буйича кесади. Ҳақиқатан ҳам, сирт таърифи координаталар системасининг танлаб олишга нисбатан инвариантлиги сабабли, кесувчи текислик xy $(z = 0)$ текисликдан иборат деб ҳисоблаш мумкин. Бу текисликнинг эса сирт иккинчи тартибли

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$$

эгри чизиқ буйича кесиши аён.

Жумладан, уқи z дан иборат

$$\lambda z^2 = x^2 + y^2$$

доиравий туғри конус иккинчи тартибли сиртдир, бинобарин у исталган текислик билан иккинчи тартибли эгри чизиқ буйича кесишади. Агар кесувчи текислик конус учидан утмаса, кесимда бир жуфт туғри чизиқнинг ҳосил булиши мумкин эмас. Эллипс, гипербола ёки парабола ҳосил булиши ҳоли қолади, холос.

Иккинчи тартибли сиртнинг геометрик хоссаларини текшириш учун унинг тенгламасини шундай координаталар системасида ёзиш табиийки, натижада тенглама иложи борича содда бўлсин.

Биз *ҳозир координаталарнинг шундай системасини курсатамизки, унда сиртнинг тенгламаси анча соддалашади,* яъни сирт тенгламасида yz, xz ва xy олдидаги коэффициентлар нолга айланади.

Фазонинг координаталар бошидан фарқли ҳамма нуқталарида

$$F(A) = \frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

тенглик ёрдамида аниқланган $F(A)$ функцияни кўздан кечирайлик.

Бирлик сферада ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) бу функция чегараланганди́р, бинобарин, у бирор A_0 нуқтада абсолют минимумга эришади. Лекин у координаталар бошидан чиқадиган *исталган* нур бўйлаб ўзгармас қийматга эга ($F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = F(x, y, z)$), шу сабабдан F функция A_0 нуқтада қийматларининг абсолют минимумига бирлик сферадагина эмас, балки бутун фазога нисбатан эришади.

O нуқтани координаталар боши сифатида сақлаб ва OA_0 нурни z ярим тўғри чизиқ сифатида қабул қилиб, янги декарт координаталари x' y' z' ни киритамиз. Маълумки, x, y, z ва x', y', z' координаталар орасидаги боғланиш ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned}\right|$$

кўринишдаги формулалар билан ифодаланади.

Сиртнинг янги x', y', z' координаталардаги тенгламаси x, y, z ни (2) формулалар бўйича x', y', z' га алмаштириш натижасида ҳосил бўлади ва бу тенглама ушбу кўринишга эгадир:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' +$$
$$+ 2a'_{13}x'z' + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Янги координаталарга нисбатан F функция қуйидаги

$$F(A) = \frac{a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

кўринишга эга бўлиб, F нинг эски ифодасидаги x, y, z ни x', y', z' га (2) формулалар бўйича алмаштириш натижасида ҳосил қилинади. Махраж шакл жиҳатдан ўзгармайди, чунки у A нуқтанинг координаталар бошигача масофасининг квадратини билдиради, бу масофа эса иккала системада ҳам бир хил ифода қилинади.

x' y' z' координаталар системасининг танлаб олинишига биноан F функциянинг минимумига $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 1$ бўлганда эришилади. Шунинг учун F нинг ифодасида $x' = 0$, $z' = 1$ деб фараз қилсак, битта ўзгарувчининг функцияси ҳосил бўлади:

$$f(y') = \frac{a_2 y'^2 + 2a_{23} y' + a_{33}}{1 + y'^2},$$

бу эса $y' = 0$ қийматда минимумга эришади. Демак, $y' = 0$ бўлганда

$$\frac{df(y')}{dy'} = 0.$$

Аммо:

$$\left.\frac{df(y')}{dy'}\right|_{y'=0} = 2a'_{23}.$$

Шундай қилиб, сирт тенгламасида $y'z'$ олдидаги коэффициент нолга тенг, $x'z'$ олдидаги коэффициентнинг нолга тенглиги шунга ухшаш кўрсатилади.

Демак, координаталарнинг x' y' z' системасида сиртнинг тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$a_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{14}x' + 2a_{24}y' +$$
$$+ 2a_{34}z' + a_{33}z'^2 + a'_{44} = 0.$$

Энди янги x'', y'', z'' координаталарни

$$\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta + y''\sin\theta, \\ y' &= -x''\sin\theta + y''\cos\theta, \\ z' &= z'' \end{aligned}$$

формулалар бўйича киритсак, иккинчи тартибли эгри чизиқларни текширган ҳолдаги сингари (III боб, 8- §), θ бурчакни хоҳлаганча равишда танлаб олиш йўли билан x'' y'' олдидаги коэффициентни ҳам нолга айлантириб юборишга эришиш мумкин.

Шундай қилиб, *шундай тўғри бурчакли декарт координаталари системаси мавжудки, сиртнинг унга нисбатан тенгламаси ушбу кўринишга эгадир*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

2- §. Иккинчи тартибли сиртларни синфларга ажратиш

Олдинги параграфда кўрсатганимиздек, тўғри бурчакли декарт координаталарининг тегишли системасига ўтиш йўли билан иккинчи тартибли сирт тенгламасини ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \quad (1)$$

Учта асосий ҳолни ажратамиз:

A:(1) тенгламада координаталар квадратлари олдидаги учала коэффициент ҳам нолдан фарқли;

B: иккита коэффициент нолдан фарқли, учинчиси, масалан a_{33} нолга тенг: $a_{33} = 0$.

C: битта коэффициент, масалан, a_{33} нолдан фарқли, қолган иккитаси нолга тенг.

A ҳолда координаталарнинг янги

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \qquad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \qquad z' = z + \frac{a_3}{a_{33}},$$

системасига ўтамиз, бу координаталар бошини кўчиришга мос келади. Сўнгра формулалар бўйича сирт тенгламасини

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + \delta = 0$$

кўринишга келтирамиз.

A ҳол ўз навбатида тўртта хусусий ҳолга бўлинади:

$A_1: \delta = 0$. Сирт конусдан иборат бўлиб, α, β, γ — бир хил ишорали бўлганда бу *конус мавҳум* ва α, β, γ сонлар ичида турли ишоралилари мавжуд бўлган ҳолда бу *конус ҳақиқий*.

$A_2: \delta \neq 0$, α, β, γ — бир хил ишорали. Сирт эллипсоиддан иборат бўлиб, α, β, γ, δ — бир хил ишорали бўлган ҳолда у *мавҳум* ва δ нинг ишораси α, β, γ нинг ишорасига тескари бўлган ҳолда у *ҳақиқий эллипсоиддир*.

$A_3: \delta \neq 0$ тўртта α, β, γ, δ коэффициентдан иккитаси бир хил ишорали, қолган иккитаси эса тескари ишорали бўлса, сирт *бир паллали гиперболоид*.

$A_4: \delta \neq 0$, олдинги учта коэффициентдан бирининг ишораси қолганлари ишораларига тескари. Сирт — *икки паллали гиперболоид*.

B ҳолда сирт тенгламасини

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \qquad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \qquad z' = z$$

формулалар бўйича янги координаталарга ўтиб тенгламани

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + 2pz' + q = 0$$

кўринишга келтирамиз.

Бу ҳол ўз навбатида учта хусусий ҳолга бўлинади.

$B_1: p = 0,\ q = 0$. *Сирт бир жуфт текисликка ажралади:*

$$x' \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\, y' = 0;$$

α ва β сонлар бир хил бўлганда текисликлар *мавҳум* ва α, β турли ишорали бўлган ҳолда — *ҳақиқий.*

$B_2: p = 0,\ q \neq 0$. Сирт цилиндрдан иборат бўлиб, α, β ва q бир хил ишорали бўлганда бу цилиндр *мавҳум* ва турли ишорали коэффициентлар мавжуд ҳолда *ҳақиқийдир.* Жумладан, α ва β бир хил ишорали бўлса, *эллиптик цилиндр* ва α, β — турли ишорали бўлса, *гиперболик цилиндр* ҳосил бўлади.

$B_3: p \neq 0$. *Параболоидлар.* Янги координаталарга ўтамиз:

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' + \frac{q}{2p}.$$

Сирт тенгламаси

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + 2pz'' = 0$$

кўринишини олади, α ва β бир хил ишорали бўлганда *эллиптик параболоид* ва α, β — турли ишорали ҳолда — *гиперболик параболоид* ҳосил қилинади.

С ҳолда янги x', y', z' координаталарга ўтамиз:
Бунда сирт тенгламаси

$$\gamma' z'^2 + px + qy + r = 0$$

кўринишини олади ва қуйидаги хусусий ҳолларни ажратиш мумкин.

$C_1: p = 0,\ q = 0$. *Сирт ўзаро параллел бир жуфт параллел текисликка ажралиб,* γ ва r бир хил ишорали бўлганда бу текисликлар *мавҳум*, γ, r — турли ишорали бўлган ҳолда эса *ҳақиқий* ва ниҳоят, $r — 0$ да текисликлар *устма-уст тушади.*

$C_2: p$ ёки q коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли. z ўқининг йўналишини сақлаган ҳолда $px + qy + r = 0$ текисликни $y'z'$ текислиги сифатида қабул қиламиз. Бунда тенглама

$$\gamma z'^2 + \delta x' = 0$$

кўринишни қабул қилади. *Сирт параболик цилиндрдан иборат.*

Машқлар

1. xy текислигидаги

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

эгри чизиқ эллипс (гипербола, парабола)дан иборат. Иккинчи тартибли:

$$z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a$$

сирт нимадан иборат?

2. Иккинчи тартибли

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2=0$$

сиртнинг бир жуфт текисликка ажралиб кетиши исбот қилинсин.

3. Ушбу

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0 \qquad (1)$$

сиртнинг

$$z=ax+by+c$$

текислик билан кесишган чизиғининг xy текислигидаги проекциясини ҳосил қилиш учун $z=ax+by+c$ ни (1) тенгламага қўйиш кераклиги исбот қилинсин.

4. Иккинчи тартибли сиртни параллел текисликлар билан кесганда ҳосил қилинган кесимларнинг ўхшашлиги ва ўхшаш жойлашганлиги исбот қилинсин.

5. Берилган нуқтадан ўтиб, иккинчи тартибли эгри чизиқ билан кесишадиган тўғри чизиқлардан ҳосил қилинган конус сиртнинг иккинчи тартибли сирт эканлиги исбот қилинсин.

6. Фараз қилайлик:

$$f(x,\ y,\ z)=0, \qquad \varphi(x,\ y,\ z)=0$$

тенгламалар иккинчи тартибли иккита сирт тенгламаси бўлсин. x_0, y_0, z_0 нуқтадан ва берилган сиртлар кесишган чизиғи орқали ўтувчи иккинчи тартибли сиртнинг

$$f(x,\ y,\ z)\,\varphi(x_0,\ y_0,\ z_0)-\varphi(x,\ y,\ z)\,f(x_0,\ y_0,\ z_0)=0$$

тенглама билан ифодаланиши исбот қилинсин.

7. Ушбу

$$\left.\begin{aligned}(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1)=0,\\ (a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\frac{1}{\lambda}(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2)=0\end{aligned}\right\}$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқнинг ушбу

$$\begin{aligned}&(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)\ (a_2x+b_2y+c_2z+d_2)-\\ &-(a_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1)\ (a_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2)=0\end{aligned}$$

сирт устида тўла-тўкис ётиши исбот қилинсин.

8. Берилган учта нопараллел ва кесишмайдиган тўғри чизиқни кесадиган тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган сиртнинг нимадан иборатлиги аниқлансин.

9. z ўқи атрофида ушбу

$$\left.\begin{aligned}z=ax+b,\\ z=cy+d\end{aligned}\right\} \qquad (a,\ b,\ c,\ d\neq 0)$$

тўғри чизиқни айлантириш натижасида ҳосил қилинган сирт тенгламаси тузилсин.

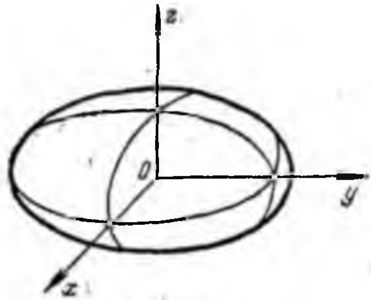
3- §. Эллипсоид

Эллипсоид (74- расм) тенгламаси

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$$

ни δ га бўлиб ва $\delta/\alpha = -a^2$, $\delta/\beta = -b^2$, $\delta/\gamma = -c^2$ деб фараз қилиб ушбу кўринишга келтирамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 = 0. \quad (1)$$



74- расм.

a, b, c — эллипсоиднинг *ярим ўқлари* дейилади.

Координат текисликларнинг эллипсоид учун симметрия текисликлари ва координаталар боши эса симметрия маркази бўлиши ~~(1)~~ тенгламадан кўриниб турибди.

Эллипснинг айланадан бир текисда қисилиши натижасида ҳосил қилинғани сингари, исталган эллипсоид сферани ўзаро перпендикуляр иккита текисликка нисбатан бир текисда қисила бориши натижасида ҳосил қилинади. Ҳақиқатан ҳам, агар a — эллипсоид ярим ўқларининг каттаси бўлса, бу эллипсоид ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 = 0$$

сферани $\frac{c}{a}$ га тенг бўлган қисилиш коэффициенти билан xy текисликка нисбатан ва xz текисликка $\frac{b}{a}$ га тенг қисилиш коэффициенти билан бир текисда қисила бориш натижасида ҳосил қилиниши мумкин.

Эллипсоиднинг иккита ярим ўқи тенг, масалан, $a = b$ бўлса, у *айланма эллипсоид* дейилади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

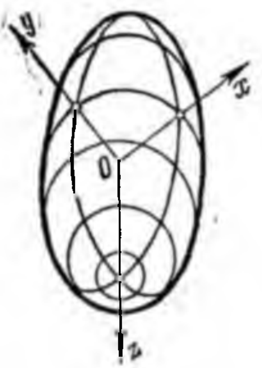
Бу эллипсоидни xy текисликка параллел бўлган ҳар қандай $z = h$ текислик билан кесиб, маркази z ўқида бўлган айланани ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) a^2, \qquad z = h.$$

Демак, *қаралаётган ҳолда эллипсоид xz текисликда ётган эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

ни z ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади (75- расм).



75-расм.

Учала ярим ўқлари ҳам тенг бўлган эллипсоид сферадан иборатдир.

Эллипсоиднинг ихтиёрий текислик билан кесишган чизиги эллипс бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, бу чизиқ иккинчи тартибли эгри чизиқдир. Аммо бу чизиқ чеклидир (эллипсоиднинг чеклилигидан), шунинг учун у на гипербола, на парабола, на бир жуфт тўғри чизиқдир. Демак, кесишиш чизиғи — эллипсдир.

Машқлар

1. $a<c$ шартда айланма

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

эллипсоид шундай нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборатки, фокуслардан берилган икки нуқтагача булган масофаларнинг йиғиндиси узгармас булади. Эллипсоид фокуслари топилсин.

2. Эллипсоид берилган бўлсин:

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\sigma=0.$$

Агар ушбу

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta-\lambda\ (x^2+y^2+z^2+\mu)=0$$

сирт бир жуфт текисликка ажралса, бу текисликлар эллипсоидни айланалар бўйича кесади. Шу мулоҳазага суяниб, эллипсларнинг доиравий кесимларини топиш усули асослансин.

3. Фазонинг ушбу:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталари қаерда жойлашади?

4. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ни параметрик тенгламалар билан қуйидагича ифодаланиши исбот қилинсин:

$$x = a\cos u \cos v, \qquad y = b\cos u \sin v, \qquad z = c\sin u.$$

5. Агар $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

бўлса, сирт нимадан иборат

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = 1?$$

4- §. Гиперболоидлар

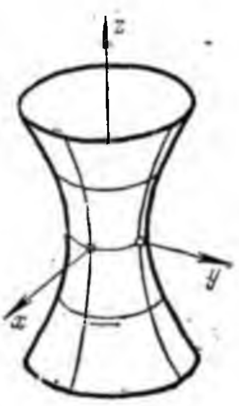
Эллипсоид берилган холда иш кўрганимиз сингари, гиперболоидлар тенгламасини ушбу кўринишга келтириш мумкин: бир паллали гиперболоид учун (76- расм)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

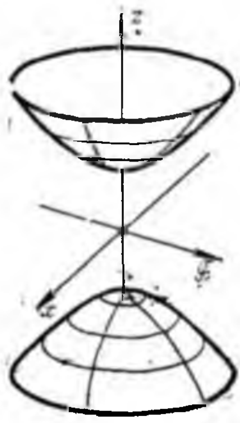
ва икки паллали гиперболоид учун (77- расм):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Иккала гиперболоид учун ҳам координат текисликлар *симметрия текисликлари* ва координаталар боши эса *симметрия маркази* бўлади.



76- расм.



77- расм.

Ярим ўқлари a ва b тенг бўлса, гиперболоид *айланма гиперболоид* дейилиб: бир паллали гиперболоидни кўзда тутганда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad y=0$$

дан иборат гиперболани ва икки паллали гиперболоидни кўзда тутганда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, \qquad y=0$$

дан иборат гиперболани z ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади.

Умумий гиперболоид ($a \neq b$) айланма гиперболоидни ($a=b$) xz текислигига нисбатан $\frac{b}{a}$ нисбатда қисиш (ёки чўзиш) йўли билан ҳосил қилиниши мумкин.

Гиперболоидларни ҳар қандай текислик билан кесганда ҳам турли конус кесимлари ҳосил бўлиши мумкин. Масалан, xy текислигига параллел $z=h$ текисликлар бир паллали

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

гиперболоидни

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}-1=0, \; z=h$$

эллипслар бўйича, xz текислигига параллел $y=h$ ($|h|\neq b$) текисликлар эса

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1+\frac{h^2}{b^2}=0, \; y=h$$

гиперболалар бўйича кесади. $y=b$ текислик гиперболоидни иккита

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \; y=b$$

тўғри чизиқ бўйича кесади.

Машқлар

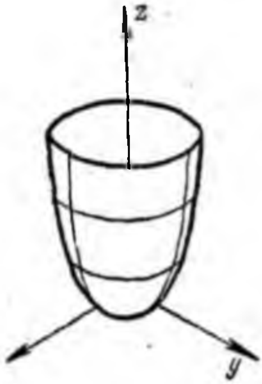
1. Гиперболоиднинг доиравий кесимлари топилсин:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

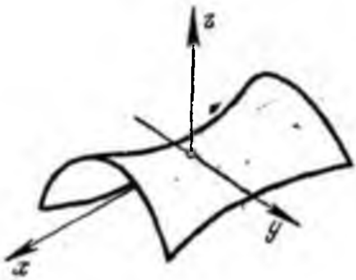
2. Фазонинг координат текисликларга тегишли бўлмаган ҳар (и) нуқтаси орқали сиртларнинг ушбу

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

оиласидан учта сирт: эллипсоид, бир паллали гиперболоид ва икки паллали гиперболоид (ўтиши исбот қилинсин), бу ерда λ— оила параметри.



78- расм.



79- расм.

5- §. Параболоидлар

Параболоидлар тенгламалари эллиптик параболоид учун (78- расм) ушбу

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

кўринишга ва гиперболик параболоид учун (79- расм)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

кўринишга келтирилади.

xz ва yz текисликлар параболоидларнинг симметрия текисликларидир. Уларнинг кесишган чизиғи (z ўқи) *параболоид ўқи* ва ўқнинг параболоид сирт билан кесишиш нуқтаси эса *параболоид учи* дейилади.

$a=b$ ҳолда эллиптик параболоид *айланма параболоид* дейилиб у

$$z=\frac{x^2}{a^2},\ y=0$$

параболани z ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади.

Умумий эллиптик параболоидни айланма параболоид:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

ни xz текисликка нисбатан қисиш (чўзиш) йўли билан ҳосил қилиш мумкин.

Иккала (эллиптик ва гиперболик) параболоидни ҳам xz ва yz дан иборат координат текисликлар билан кесганда кесимда бир-бирига тенг ва параллел жойлашган параболалар ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $x = h$ текисликлар эллиптик параболоидни ушбу

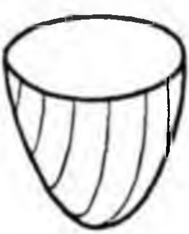
$$z - \frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}, \qquad x = h$$

параболалар бўйича кесади.

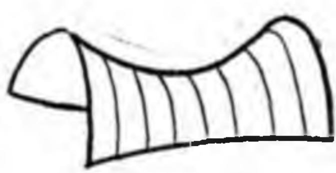
Агар бу параболалардан ҳар бирини z ўқи йўналишида $\frac{h^2}{a^2}$ кесмага силжитсак, натижада битта $z = \frac{y^2}{b^2}$, $x = h$ параболанинг ўзини ҳосил қиламиз.

Бу мулоҳазаларга асосланиб, эллиптик параболоиднинг $z = \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$ *дан иборат парабола учининг* $z = \frac{x^2}{a^2}$, $y = 0$ *парабола бўйича ҳаракат қила бориш шарти билан параллел силжитиш натижасида вужудга келади, деган хулоса чиқади* (80-расм).

Гиперболик параболоид ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади (81-расм). xy текислигига параллел (xy текислигининг ўзидан бошқа) текисликлар эллиптик параболоидни эллипслар ва гиперболик параболоидни эса гиперболалар бўйича кесиб ўтади. xy текислик гиперболик параболоидни иккита тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади.



80- расм.



81- расм.

Машқлар

1. Айланма эллиптик параболоиднинг бирор текислик ва айни вақтда нуқта (фокус) дан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат бўлиши исбот қилинсин. Эллиптик параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

нинг фокуси топилсин.

2. Ҳеч қандай текислик эллиптик параболоидни гиперболалар, гиперболик параболоидни эса эллипслар бўйича кесмаслиги исбот қилинсин.

6-§. Конус ва цилиндрлар

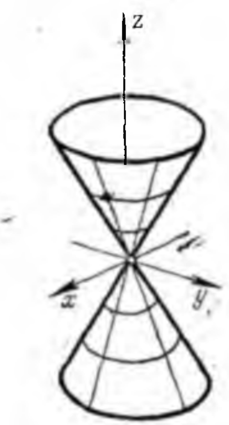
Иккинчи тартибли конус ва цилиндрларнинг тенгламаларини ушбу шаклда ёзиш мумкин.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{(конус, 82-расм)},$$

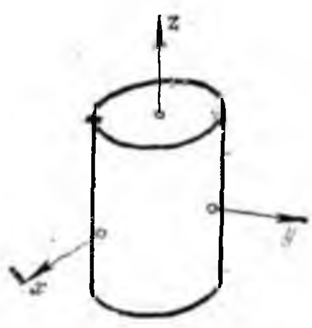
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{(эллиптик цилиндр, 83-расм)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{(гиперболик цилиндр, 84-расм)},$$

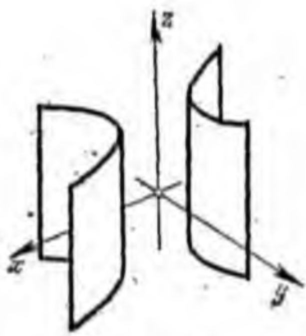
$$\frac{x^2}{a^2} - py = 0 \qquad \text{(параболик цилиндр, 85-расм)}.$$



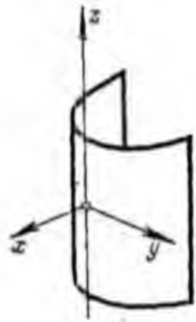
82- расм.



83- расм.



84- расм.



85- расм.

Ҳар қандай конусни доиравий

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

конусни xz текисликка нисбатан қисиш (чўзиш) натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Эллиптик, гиперболик, параболик цилиндрлар xy текисликни эллипс, гипербола бўйича кесади ва бу цилиндрлар z ўқига параллел бўлиб эгри чизиқлар билан кесишадиган тўғри чизиқлардан ҳосил бўлади.

Ҳар қандай цилиндр доиравий цилиндрни бир текисда xz текисликка қисиш (чўзиш) натижасида ҳосил қилинади.

Пировардида бир палалли ва икки паллали:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0$$

гиперболоидларнинг *асимптотик конус* деб аталадиган

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

конус билан табиий равишда боғланганлигини таъкидлаб ўтайлик.

z ўқи орқали ўтувчи ҳар бир текислик гиперболоидларни гиперболалар, конусни эса шу гиперболаларнинг асимптоталари бўлган иккита ясовчи бўйича кесиб ўтади. Жумладан, xz $(y=0)$ текислик гиперболоидларни

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0$$

гиперболалар, конусни эса гиперболаларнинг асимптоталари бўлган иккита

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тўғри чизиқ бўйича кесади.

Машқлар.

1. Учи координаталар боши, ўқи $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ ва учидаги бурчаги 2α бўлган доиравий конус тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкинлиги исбот қилинсин:

$$\frac{(\lambda x + \mu y + \nu c)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\ (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} = (\cos\alpha)^2.$$

2. Радиуси R ва ўқи $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ бўлган доиравий цилиндр тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкинлиги кўрсатилсин:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \frac{(\lambda x + \mu y + \nu z)^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

7-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқли ясовчилари

Конус ва цилиндрлар тўғри чизиқли ясовчиларни ўз ичига олган бирдан-бир сиртлардан эмас. Маълум бўлишича, бир паллали гиперболоид билан гиперболик параболоид ҳам шу хоссага эга экан.

Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$z = \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \qquad 1 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \tag{1}$$

тенгламалар билан берилган ҳар бир g_λ *тўғри чизиқ гиперболик параболоид:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{2}$$

ни устида ётади, чунки (1) тенгламаларни қаноатлантирувчи (x, y, z) нуқта (2) тенгламани қаноатлантиради, (2) эса (1) дан ҳадма-ҳад кўпайтириш натижасида ҳосил қилинади.

Гиперболик параболоид устида g_λ *оиладан ташқари тўғри чизиқларнинг яна битта* g_λ *оиласи жойлашади:*

$$z = \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \qquad 1 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Шунинг сингари *бир паллали гиперболоид*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

устида тўғри чизиқли ясовчиларнинг иккита оиласи жойлашади:

$$g_\lambda: \ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

$$g_\lambda': \ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

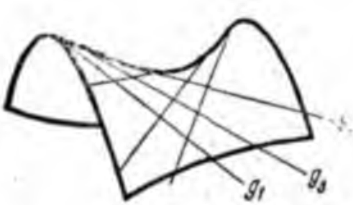
Иккала ҳолда (гиперболик параболоид ва бир паллали гиперболоид) ҳам *битта оилага қарашли тўғри чизиқли ясовчилар кесишмайди, турли оилага қарашли тўғри чизиқлар эса кесишади*

Гиперболик параболоид билан бир паллали гиперболоидда тўғри чизиқли ясовчиларнинг мавжудлиги бу сиртларни ҳосил қилишнинг янги усулини бериш имкониятини туғдиради; бир оилага қарашли учта тўғри чизиқли ясовчини оламиз: g_1, g_2, g_3. Бундай ҳолда иккинчи оилага тегишли ҳар бир тўғри чизиқли ясовчи g юқоридаги g_1, g_2, g_3 ни кесади. Демак, сирт берилган учта тўғри чизиқни кесадиган тўғри чизиқлардан ташкил топади (86-расм).

Бир паллали айланма гиперболоид масаласига келганда, унинг исталган тўғри чизиқли ясовчисининг сирт ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳам ҳосил бўлишини таъкидлаб ўтамиз (87-расм).

Иккинчи тартибли бошқа сиртларда ҳам тўғри чизиқли ясовчиларнинг мавжуд бўлишини пировардида айтиб ўтайлик, бироқ бу сиртларда улар — мавҳум. Масалан,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$



86- расм

87- расм

эллипсоид устида мавҳум тўғри чизиқларнинг

$$g_\lambda: \frac{x}{a} + i\frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - i\frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

$$g'_\lambda: \frac{x}{a} + i\frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - i\frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

иккита оиласи жойлашади.

Машқлар

1. Гиперболик параболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + z = 0$ нинг x_0, y_0, z_0 нуқтаси орқали ўтадиган $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{z+z_0}{2} = 0$ текисликнинг параболоид билан турли оилага қарашли иккита тўғри чизиқли ясовчи бўйича кесишганлиги исбот қилинсин.

2. Гиперболик параболоид $z = axy$ нинг тўғри чизиқли ясовчилари топилсин.

3. xy текисликка параллел ва берилган иккита айқаш тўғри чизиқ билан кесишадиган тўғри чизиқлардан ҳосил қилинган сирт тенгламаси тузилсин.

8-§. Иккинчи тартибли сиртнинг диаметрлари ва диаметрал текисликлари

Одатда тўғри чизиқ иккинчи тартибли сирт билан иккита нуқтада кесишади. Кесишиш нуқталари иккита бўлса, охирлари кесишиш нуқталаридан иборат кесма *ватар* дейилади.

Иккинчи тартибли сирт ватарларнинг ўрталари текислик (диаметрал текислик) да ётади.

Шуни исбот қилайлик. 1-§ да исбот қилинганидек, координаталарнинг шундай системаси борки, унда сиртнинг тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 1. \quad (1)$$

Ватарлар $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ тўғри чизиққа параллел бўлсин дейлик, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ билан ихтиёрий ватар ўрталарининг координаталарини белгилайлик. У ҳолда, ватар охирларининг координаталаридан бирига $x = \bar{x} + \lambda t$, $y = \bar{y} + \mu t$, $z = \bar{z} + \nu t$ ва иккинчисига $x = \bar{x} - \lambda t$, $y = \bar{y} - \mu t$, $z = \bar{z} - \nu t$ мос келади.

Ватар охирлари сиртга тегишлилиги сабабли, уларнинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантиради. Бундан:

$$a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + a_{33}\bar{z}^2 + 2a_1\bar{y} + 2a_2\bar{y} + 2a_3\bar{z} + a +$$
$$+ 2t(\lambda a_{11}\bar{x} + \mu a_{22}\bar{y} + \nu a_{33}\bar{z} + \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3) +$$
$$+ t^2(a_{11}\lambda^2 + a_{22}\mu^2 + a_{33}\nu^2) = 0.$$

Бу тенглик t нинг қайси ($+$ ёки $-$) ишора билан олинишига боғлиқ эмаслиги учун t олдидаги коэффициент нолга тенг бўлади:

$$\lambda(a_{11}\bar{x} + a_1) + \mu(a_{22}\bar{y} + a_2) + \nu(a_{33}\bar{z} + a_3) = 0. \quad (2)$$

Шундай қилиб, ватарлар ўрталарининг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантиради. Шуни исбот қилишимиз керак эди.

Агар сирт марказга эга бўлса, диаметрал текисликнинг марказдан ўтиши равшандир.

Параболоидни олган ҳолда ($a_{33} = 0$) ҳамма диаметрал текисликлар параболоид ўқига (z ўқига) параллел бўлади.

Эллиптик (гиперболик) цилиндр чексиз кўп марказга эга бўлиб, улар цилиндр ўқида ётади. Шунинг учун цилиндрнинг ҳар бир диаметрал текислиги унинг ўқи орқали ўтади. Бу мулоҳаза диаметрал текисликлар тенгламасида ҳам ўз ифодасини топган. Параболик цилиндрнинг ҳамма диаметрал текисликлари ўзаро параллелдир.

Конуснинг диаметрал текисликлари унинг учидан ўтади.

Диаметрал текисликларнинг ушбу умумий хоссаси ўринли: *α текисликка параллел ватарларга мос келган диаметрал текисликлар ё бирор тўғри чизиқ бўйича кесишади ёки улар ўзаро параллел бўлади. g тўғри чизиққа параллел ватарларга мос келган диаметрал текислик α текисликка параллел.*

Буни исбот қилайлик. Фараз қилайлик, $\boldsymbol{e}$ (λ, μ, ν) ва $\boldsymbol{e}'$ (λ', μ', ν') нолдан фарқли ва α текисликдаги нопараллел иккита вектор бўлсин. Бундай ҳолда шу текисликдаги исталган векторни $\boldsymbol{e}_\xi$ $(\xi\lambda + \xi'\lambda', \xi\mu + \xi'\mu', \xi\nu + \xi'\nu')$ кўринишида тасвирлаш мумкин. $\boldsymbol{e}$ векторга параллел бўлган векторларга мос диаметрал текислик ушбу тенглама билан ифодаланади:

$$\xi\{\lambda(a_{11}x + a_1) + \mu(a_{22}y + a_2) + \nu(a_{33}z + a_3)\} +$$
$$+ \xi'\{\lambda'(a_{11}x + a_1) + \mu'(a_{22}y + a_2) + \nu'(a_{33}z + a_3)\} = 0;$$

демак, ξ, ξ' дан иборат исталган сонларни олганда ҳам бу диаметрал текислик ушбу текисликлар кесишган ҳолда уларнинг кесишган тўғри чизиғи орқали ўтади:

$$\lambda(a_{11}x + a_1) + \mu(a_{22}y + a_2) + \nu(a_{33}z + a_3) = 0, \quad (3)$$
$$\lambda'(a_{11}x + a_1) + \mu'(a_{22}y + a_2) + \nu'(a_{33}z + a_3) = 0$$

ва (3) текисликлар параллел бўлган ҳолда эса диаметрал текислик шу (3) текисликларга параллел бўлади. Айтайлик, (3) текисликлар кесишадиган бўлсин ва $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ — кесишиш тўғри чизиғига параллел вектор бўлсин. Бундай холда $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ векторнинг (3) текисликларга параллеллик шарти қуйидагича ифодаланади:

$$\lambda''\lambda a_{11} + \mu''\mu a_{22} + \nu''\nu a_{33} = 0,$$
$$\lambda''\lambda' a_{11} + \mu''\mu' a_{22} + \nu''\nu' a_{33} = 0. \quad (4)$$

$(\lambda'', \mu'', \nu'')$ векторга параллел ватарларга мос келган диаметрал текисликка ушбу тенглама мос келади:

$$\lambda''(a_{11}x + a_1) + \mu''(a_{22}y + a_2) + \nu''(a_{33}z + a_3) = 0.$$

(4) шартлардан бу текисликнинг $\boldsymbol{e}(\lambda, \mu, \nu)$, $\boldsymbol{e}'(\lambda', \mu', \nu'')$ векторларга параллеллиги келиб чиқади, демак, уларни ўз ичига олган α текисликка ҳам параллел деган хулоса чиқади.

VIII боб

УМУМИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР ВА СИРТЛАРНИ ТЕКШИРИШ

1-§. Квадратик формани янги ўзгарувчиларга алмаштириш

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси* деб шу ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли бўлган иккинчи даражали

$$\sum a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

кўпхадга айтилади.

Форманинг *дискриминанти* деб унинг коэффициентларидан тузилган

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{1n}a_{n2}\dots a_{nn}\end{vmatrix}$$

детерминантга айтилади.

Квадратик формада ўзгарувчиларни қуйидаги формулалар бўйича алмаштирайлик:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'1+\alpha_{12}x'_2+\dots+\alpha_{1n}x'_n,\\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\dots+\alpha_{2n}x'_1,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x_n &= \alpha_{n1}x'_1+\alpha_{n2}x'_2+\dots+\alpha_{nn}x'_n. \end{aligned}$$

Натижада, x'_l ўзгарувчиларига нисбатан янги квадратик формани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j} a_{ij}\left(\sum_k \alpha_{ik}x'_k\right)\left(\sum_l \alpha_{jl}x'_l\right)=$$

$$=\sum_{k,l}\left(\sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\right)x'_kx'_l=\sum_{k,l} a'_{kl}x'_kx'_l,$$

бунда
$$a'_{kl}=\sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Ҳосил қилинган форма дискриминанти D' нинг нимага тенглигини аниқлайлик. Фараз қилайлик:

$$\sum_i a_{ij}\alpha_{ik}=b_{jk}, \tag{1}$$

Бунда

$$a'_{kl} = \sum_j b_{jk}\alpha_{jl},$$

демак,

$$D' = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аммо (1) формулаларга асосан:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб:

$$D' = D \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2,$$

яъни *алмашинган форманинг дискриминанти дастлабки форма дискриминанти билан алмаштириш детерминанти квадратнинг кўпайтмасига тенг.*

Машқлар

1. Ушбу

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)\ (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4)$$

квадратик форма дискриминантининг нолга тенглиги исбот қилинсин.

2. x_1, x_2, x_3, x_4 ўзгарувчилар квадратик формаси

$$\left(\sum_i a_i\ x_i\right)^2 + \left(\sum_i b_i\ x_i\right)^2 + \left(\sum_i c_i\ x_i\right)^2 + \left(\sum_i d_i\ x_i\right)^2$$

нинг дискриминанти хисоблансин.

2-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртлар тенгламаларининг координаталарини алмаштиришга нисбатан инвариантлари

Тўғри бурчакли декарт координаталарининг бирор системасида иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган бўлсин;

$$a_{11}x^2 + 2\ a_{12}xy + \dots + a_{44} = 0. \tag{1}$$

Бу сиртнинг тўғри бурчакли исталган бошқа декарт координаталари x' y' z' системасидаги тенгламаси (1) тенгламада x, y, z ўрнига уларнинг x', y', z' орқали ифодаларини V бобнинг 4-§ даги формулаларига биноан алмаштириш натижасида ҳосил қилинади:

$$x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + \alpha_1,$$
$$y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + \alpha_2,$$
$$z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + \alpha_3.$$

Натижада сирт тенгламаси қуйидагича булади:

$$a'_{11}\ x'^2 + 2\ a'_{12}\ x'y' + \ldots + a'_{44} = 0.$$

Агар константа (ўзгармас) булмаган $\varphi\ (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{44})$ функциянинг қийматлари сирт тенгламаси ёзилган координаталар системасига боғлиқ булмаса, яъни

$$\varphi\ (a_{11},\ a_{12},\ \ldots\ ,\ a_{44}) = \varphi\ (a'_{11},\ a'_{12},\ \ldots\ ,\ a'_{44})$$

тенглик исталган x', y', z' учун ҳам бажарилаверса, $\varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44})$ функция *сирт тенгламасининг координаталарни* алмаштиришга нисбатан *инвариант* деб аталади.

Сирт тенгламасининг асосий инвариантларидан бирини ҳозир топамиз.

Координаталарнинг янги системаси x' y' z' га ўтиш билан бир қаторда ушбу квадратик:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 - \\ - \lambda\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

формани янги x'_1, x'_2, x'_3 ўзгарувчиларга қуйидаги формулалар буйича алмаштирамиз:

$$x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3,$$
$$x_2 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3,$$
$$x_3 = \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{33}x'_3.$$

Бу квадратик форманинг $\lambda\ (x_2^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ҳадгача булган биринчи қисми бундай алмаштириш натижасида ушбу

$$a'_{11}x'^2_{2} + a'_{22}x'^2_2 + a'_{33}x'^2_3 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + 2a'_{23}x'_2x'_3 + 2a'_{31}x'_3x'_1,$$

куринишни олади ва сирт тенгламаси x' $y'z'$ системага ўтгандан кейин қандай қийматлар қабул қилса, бу ердаги a'_{ij} коэффициентлар ҳам худди ўша қийматларга тенг булади. Квадратик форманинг иккинчи қисми, яъни $\lambda\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ифода α_{ij} коэффициентлар ортогоналлик шартини қаноатлантирилгани сабабли $\lambda(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)$ га алмашинади (V боб, 4-§).

(2) алмаштириш детерминанти $+1$ га тенг бўлгани учун, квадратик формулаларнинг детерминантлари алмаштиришдан олдин ҳам ундан кейин ҳам бир-бирига тенгдир. Демак, *ушбу*

$$I(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

детерминант исталган λ да ҳам сирт тенгламасининг инварианти бўлади.

$I(\lambda)$ детерминант λ га нисбатан кўпҳаддан иборат бўлади:

$$I(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2 I_1-\lambda I_2+I_3,$$

бунда:

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аммо координаталарнинг турли иккита $x\,y\,z$ ва $x'\,y'\,z'$ системаси учун ҳам

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=-\lambda^3+I_1'\lambda^2-I_2'\lambda+I_3'$$

тенглик λ нинг ҳамма қийматларида бажарилганлиги сабабли $I_1=I_2'$, $I_2=I_2'$, $I_3=I_3'$ демак, I_1, I_2, I_3 — *сирт тенгламасининг инвариантлари* бўлади.

Энди

$$I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

нинг ҳам инвариантлигини исбот қилайлик.

I_4 детерминант

$$a_{11}x_1^2+2\,a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{44}\,x_4^2$$

квадратик форманинг дискриминантидир. Бу формада янги x_i' ўзгарувчиларга ушбу формулалар бўйича ўтайлик:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' + \alpha_{14}x_4', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' + \alpha_{24}x_4', \\ x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' + \alpha_{34}x_4' \\ x_4 &= 0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + 0\cdot x_3' + 1\cdot x_4'. \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Натижада

$$a_{11}'x_1'^3 + 2a_{13}'x_1'x_2' + \ldots + a_{44}'x_4'^2$$

формани ҳосил қиламиз, бу ердаги a_{ij}' сонлар сиртнинг алмашинган тенгламасидаги коэффициентларнинг ўзи.

Аммо (3) алмаштиришнинг ± 1 га тенг детерминанти (2) алмаштириш детерминантига тенг бўлганлиги учун дастлабки ва алмашинган форма дискриминантлари бир-бирига тенг бўлади, яъни:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & \ldots & a_{14}' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{14}' & \ldots & a_{44}' \end{vmatrix},$$

демак, I_4 детерминант ҳақиқатан ҳам, сирт тенгламаларининг инвариантидир.

Худди юқоридаги каби мулоҳазалар юргизиб, *иккинчи тартибли*

$$a_{11}x^2 + 2\ a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\ a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

эгри чизиқ тенгламаси учун координаталарни алмаштиришга нисбатан инвариантларни ҳосил қилинади:

$$I\ (\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}, \quad I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Машқлар

1. Сирт тенгламасини инвариантлари ҳисоблансин:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

2. Сирт тенгламасининг инвариантлари ҳисоблансин:

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2\ (ax + by + cz)^2 = 0.$$

8-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқни унинг ихтиёрий координатлардаги тенгламасига асосланиб текшириш

Тенгламаси ихтиёрий декарт координаталари $x\,y\,z$ га нисбатан ёзилган иккинчи тартибли эгри чизиқ берилган бўлсин:

$$a_{11}x^2+2a_{12}\,xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

III бобнинг 8-§ ида кўрсатдикки, координаталарнинг бирор янги системасига ўтганда эгри чизиқ тенгламасини

$$\alpha x^2+\beta y^2+ax+by+c=0$$

кўринишга келтириш мумкин. Координаталар системасининг ўзини топмай туриб, $I\ (\lambda)$ инвариант ёрдамида α ва β коэффициентларни осонгина топа оламиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=I\ (\lambda).$$

Бундан α ва β нинг $I\ (\lambda)=0$ тенглама, яъни

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

тенглама илдизлари бўлишлиги кўриниб турибди.

Бу тенгламанинг иккала илдизи ҳам нолдан фарқли деб фараз қилайлик (бу ҳол $I_2\neq 0$ да юз беради). Бундай вазиятда III бобнинг 8-§ ида кўрсатилгандек, координаталар системасини силжитиш натижасида эгри чизиқ тенгламасини ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma=0.$$

I_3 инвариантдан фойдаланиб, γ коэффициентни топиш осон:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}=I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бундан:

$$\gamma=\frac{I_3}{\alpha\beta}=\frac{I_3}{I_2}.$$

Шундай қилиб, $I_2\neq 0$ шартда *координаталарнинг тегишли системасида эгри чизиқ тенгламаси*

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$$

кўринишни олади, бунда λ_1 ва λ_2 лар

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

тенгламанинг илдизларидир.

Энди $I(\lambda)=0$ тенглама илдизларидан бири нолга тенг дейлик (бу хол $I_2=0$ да юз беради). Бундай вазиятда α ва β коэффициентларидан бири нолга тенг. Аниқлик учун $\alpha=0$ дейлик. III бобнинг 8-§ ида кўрсатилганидек, эгри чизиқ тегишли координаталарда:

$$\beta y^2 + 2\ \gamma x = 0$$

ёки

$$\beta y^2 + \delta = 0$$

тенглама билан, чунончи $I_3 \neq 0$ да биринчи ва $I_3 = 0$ да эса иккинчи тенглама билан ифодаланади.

$I_3 \neq 0$ бўлсин. Демак, эгри чизиқ

$$\beta y^2 + 2\ \gamma x = 0$$

тенглама билан ифодаланади. Энди

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

тенгламадан $I_2=0$ да $\beta = I_1$ ни топамиз: γ коэффициентни I_3 инвариантдан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = I_3.$$

Бундан:

$$\gamma = \sqrt{-\frac{I_3}{\beta}} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Демак, $I_2=0$, $I_3 \neq 0$ ҳолда эгри чизиқ тегишли координаталарда ушбу тенглама билан ифодаланади:

$$I_1 y^2 + 2x\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 0.$$

Ниҳоят, $I_2 = I_3 = 0$ ҳолни қарайлик. Эгри чизиқ тенгламасидаги коэффициентларни кичик ε_{ij} миқдорларга ўзгартирайлик. Бу ε_{ij} қўшимчаларни шундай танлаб олиш мумкинки, натижада I_2 инвариант нолдан фарқли бўлиб чиқади ва эгри чизиқ тенгламаси

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad (1)$$

куринишга келади. Энди $\varepsilon_{ij} \to 0$ да лимитга утамиз. Бунда (1) тенглама дастлабки эгри чизиқнинг каноник тенгламасига алмашинади.

Мисол. Айтайлик. $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $a_{22} \neq 0$ булсин. $\varepsilon_{11} = t$ ва қолган ҳамма ε_{ij} эса нолга тенг булсин. Энди (1) тенгламада лимитга ўтиб,

$$I_1 x^2 + \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{22}} = 0$$

ни ҳосил киламиз.

Пировардида ушбу холни таъкидлаб утамиз: I_3 *инвариантнинг нолга тенг булишлиги иккинчи тартибли эгри чизиқнинг иккита тўғри чизиққа ажралиб кетиши учун зарур ва етарли шартдир*. Бу фикрнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун эгри чизиқларнинг каноник шакллардаги тенгламалари учун I_3 ни хисоблаб чиқиш етарли.

Машқлар

1. Ушбу

$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \dots + a_{33}) + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \dots + b_{33}) = 0$$

тенглама билан берилган эгри чизиқнинг иккита тўғри чизиққа ажралиб кетишлиги учун λ сон қандай шартни қаноатлантириши керак? Бу эгри чизиқ ажраладиган тўғри чизиқлар $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \dots + a_{33} = 0$ ва $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \dots + b_{33} = 0$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтиши исбот килинсин.

2. Тўртинчи даражали

$$a_0x_4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

тенглама ушбу

$$a_0y^2 + a_1xy + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad y - x^2 = 0$$

системага эквивалент. Туртинчи даражали тенгламани ечиш учинчи даражали ва квадрат тенгламани ечишга келтирилсин (1-машққа қаранг.)

3. Гипербола тенгламаси унинг марказига ва асимптоталарининг бирига нисбатан ёзилса, тенглама ушбу

$$y = \alpha x + \frac{\beta}{x}$$

кўринишни қабул килади. α ва β ни гиперболанинг ихтиёрий координаталарда ёзилган тенгламасидаги коэффициентлар орқали ифода қилинсин.

4. Агар эллипснинг перпендикуляр диаметрлари координат ўқлар сифатида қабул қилиниб, шу диаметр узунликлари тенг булса, эллипс тенгламаси

$$x^2 + y^2 + 2\alpha xy + \delta = 0$$

кўринишни қабул қилади. Эллипс тенгламаси ихтиёрий координаталарда ёзилган деб фараз қилиб, α ва δ топилсин.

4-§. Ихтиёрий координаталардаги тенгламаси билан берилган иккинчи тартибли сиртни текшириш

Иккинчи тартибли сирт тўғри бурчакли координаталарнинг ихтиёрий системасида берилган бўлсин:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + \ldots + a_{44} = 0.$$

VII бобнинг 1-§ ида кўрсатилганидек, координаталарнинг янги системасига ўтиш йўли билан сиртнинг тенгламаси ушбу кўринишга келтирилади:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

$I\ (\lambda)$ инвариантдан фойдаланайлик:

$$I\ (\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Шундай қилиб, α, β, γ сонлар $I\ (\lambda) = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

Барча илдизлар нолдан фарқли бўлсин ($I_3 \neq 0$). Бундай ҳолда маълумки (VII боб, 1-§), янги координаталарга ўтиш усули билан тенглама ушбу

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$$

кўринишга келтирилади.

δ коэффициентни I_4 инвариантдан фойдаланиб топамиз, яъни:

$$\begin{vmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ 0 & & & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix} = I_4.$$

Бундан:

$$\delta = \frac{I_4}{\alpha\beta\gamma} = \frac{I_4}{I_3}.$$

Шундай қилиб, $I_3 \neq 0$ *ҳолда координаталарнинг бирор янги системага ўтиши билан тенглама ушбу*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$$

кўринишга келтирилади; бунда λ_1, λ_2, λ_3 сонлар $I\ (\lambda) = 0$ тенглама илдизларидир.

Энди $I(\lambda)=0$ тенглама илдизларидан бири нолга тенг ва қолган иккитаси эса нолдан фарқли бўлсин. Бу ҳол $I_3=0$ да юз беради, лекин $I_2\neq 0$. Бунда янги координаталарга ўтиш билан (VII боб, 1-§) сирт тенгламаси ушбу

$$\alpha x^2+\beta y^2+2pz=0,$$
$$\alpha x^2+\beta y^2+\delta=0$$

шакллардан бирини қабул қилади.

Буларнинг биринчиси $I_4\neq 0$ ҳолга, иккинчиси эса $I_4=0$ ҳолга тўғри келади.

Биринчи ҳолда p коэффициентни I_4 инвариантдан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix}=-\alpha\beta p^2=I_4,$$

натижада *сирт тенгламаси* ҳосил қилинади:

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\,z=0.$$

$I_4=0$ ҳолда сирт тенгламасидаги коэффициентларни ε_{ij} миқдорларга $I_3\neq 0$ шарт бажариладиган қилиб ўзгартирамиз. Бунда координаталарнинг тегишли системасига ўтиш билан тенглама янги кўриниш қабул қилади:

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{I_4}{I_3}=0.$$

Энди $\varepsilon_{ij}\to 0$ шартда лимитга ўтсак, сирт тенгламасининг каноник шаклини ҳосил қиламиз:

Мисол. $I_3=I_4=0$ бўлсин, лекин

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}\neq 0.$$

$\varepsilon_{33}=t$ деб, қолган ε_{ij} лар нолга тенг деб фараз қилайлик. Бу ҳолда:

$$\frac{I_4(t)}{I_3(t)}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 14 \\ a_{21} & a_{22} & 24 \\ a_{41} & a_{42} & 44 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Сирт тенгламасининг каноник шакли

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = 0.$$

Ниҳоят, $I(\lambda) = 0$ тенгламанинг иккала илдизи ҳам нолга тенг бўлган ҳолда сирт тенгламаси ушбу кўринишларнинг бирини қабул қилади:

$$\alpha x^2 + 2pz = 0 \text{ ёки } \alpha x^2 + \delta = 0.$$

p ва δ коэффициентлар сирт тенгламасидаги коэффициентлар билан ҳозиргина қаралган ҳолда иш кўрганимиз (уларни вариациялаш) йўли билан топилади.

Машклар

1. Сирт тенгламаси

$$(ax + by + cz + d)\ (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$$

нинг каноник шакли топилсин.

2. Агар $I_4 = 0$ бўлса, сиртнинг ё конус ёки цилиндрдан иборат бўлишлиги ёки бир жуфт текисликка ажралиб кетиши исбот қилинсин.

3. Агар $I_4 = 0$ ва $I_3 = 0$ бўлса, сиртнинг бир жуфт текисликка ажралиши исбот қилинсин.

5-§. Эгри чизиқ диаметрлари, сиртнинг диаметрал текисликлари. Эгри чизиқ ва сиртнинг маркази

Иккинчи тартибли сирт координаталарнинг ихтиёрий тўғри бурчакли декарт системасида берилган бўлсин:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\ xy + \ldots + a_{44} = 0.$$

Кейинги ҳисоблашларда ёзувларни қисқартириш мақсадида қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\begin{aligned} 2F &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44}, \\ F_x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ F_y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ F_z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}. \end{aligned}$$

Маълумки, (VII боб, 8-§), берилган $\lambda : \mu : \nu$ йўналишдаги ватарлар, яъни ушбу

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

тўғри чизиққа параллел ватарлар, ўрталари диаметрал текисликда ётади. Сирт (1) тенглама билан берилган деб фараз қилиб, бу текислик тенгламасини тузайлик.

(x, y, z) — ихтиёрий ватар ўртаси бўлсин. Ватар охирларининг координаталарини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_1 = x + \lambda t,\ y_1 = y + \mu t,\ z_1 = z + \nu t,$$
$$x_2 = x - \lambda t,\ y_2 = y - \mu t,\ z_2 = z - \nu t.$$

Бу координаталарни сиртнинг (1) тенгламасига қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$2F\ (x,y,z) \pm 2t\ (\lambda F_x\ (x,y,z) + \mu F_y\ (x,y,z) + \nu F_z\ (x,y,z)) +$$
$$+ t^2 (a_{11}\lambda^2 + a_{12}\mu^2 + a_{33}\nu^2 + 2a_{12}\lambda\mu + 2a_{23}\mu\nu + 2a_{31}\nu\lambda) = 0.$$

Бу тенгликдан t олдидаги коэффициентнинг нолга тенглиги келиб чиқади:

$$\lambda\ F_x + \mu\ F_y + \nu\ F_x = 0 \tag{2}$$

Берилган $\lambda : \mu : \nu$ йўналишдаги ватарларга мос келувчи диаметрал текислик тенгламаси шудир.

Агар сирт марказга эга бўлса, ҳар бир диаметрал текислик марказдан ўтади. Демак, сирт маркази

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0 \tag{3}$$

тенгламалардан топилади.

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар учун иш юқоридагига ўхшаш олиб борилади. Узил-кесил натижани келтирамиз.

Эгри чизиқ

$$2\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин. Фараз қилайлик:

$$\Phi_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$
$$\Phi_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}.$$

Натижада $\lambda : \mu$ йўналишдаги ватарлар, яъни

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu}$$

тўғри чизиққа параллел ватарларга мос диаметр

$$\lambda\ \Phi_x + \mu\ \Phi_y = 0$$

тенглама билан ифода қилинади.

Эгри чизиқнинг маркази (агар эгри чизиқ марказга эга бўлса)

$$\Phi_x = 0, \qquad \Phi_y = 0$$

тенгламалар системасидан аниқланади.

Машқлар

1. Агар координаталар боши иккинчи тартибли

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

эгри чизиқнинг марказига кўчирилса, бу чизиқнинг тенгламаси ушбу

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y_2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

кўринишни олиши исбот қилинсин.

2. Агар координаталар боши иккинчи тартибли сирт $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0$ марказига кўчирилса, бу сиртнинг тенгламаси янги

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \frac{I_4}{I_3} = 0$$

кўринишни олиши исбот қилинсин.

6-§. Эгри чизиқнинг симметрия ўқлари. Сиртнинг симметрия текисликлари

Ихтиёрий координаталардаги тенгламаси билан берилган сиртнинг симметрия текисликларини топайлик.

Фараз қилайлик, $\lambda:\mu:\nu$ — симметрия текислигига перпендикуляр йўналиш бўлсин. $\lambda:\mu:\nu$ йўналишдаги ватарлар ўрталари симметрия текислигида ётганлиги учун, симметрия текислиги

$$\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z = 0 \tag{1}$$

тенглама билан ифода қилинади. $\lambda:\mu:\nu$ йўналишнинг (1) текисликка перпендикулярлигидан:

$$\frac{a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu}{\lambda} = \frac{a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu}{\mu} = \frac{a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu}{\nu}. \tag{2}$$

Тенгламаларнинг бу системасидан $\lambda:\mu:\nu$ ни топиб (1) тенгламага қўйсак, сиртнинг симметрия текислиги тенгламаси ҳосил бўлади.

$\lambda:\mu:\nu$ ни (2) системадан топишни соддалаштириш мақсадида (2) даги учта нисбатнинг умумий қийматини ξ билан белгилайлик. Натижада эквивалент системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \xi)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - \xi)\mu + a_{23}\nu &= 0, \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - \xi)\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Аммо λ, μ, ν сонларнинг ҳаммаси ҳам бирданига нолга тенг эмаслиги учун:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\xi & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\xi & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\xi \end{vmatrix} = I(\xi) = 0.$$

Бу ердан ξ ни аниқлаб ва уни (3) системага қўйиб, бу системадан $\lambda : \mu : \nu$ ни топамиз.

Сиртнинг симметрия текисликларини топишни билгач, координаталарнинг шундай системасини топиш осонки, унга нисбатан сирт тенгламаси каноник шаклни олади.

Мисол келтирайлик.

Айтайлик, сирт инвариантларини текшириш натижасида унинг эллипсоид эканлиги аниқланган бўлсин. Бу ҳолда унинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

Бундан координат текисликларининг сирт учун симметрия текисликлари бўлиши кўриниб турибди.

Агар $I(\xi) = 0$ тенгламанинг ξ_1, ξ_2, ξ_3 илдизларининг учаласи ҳам турли бўлса, бу текисликлар кўрсатилган усул билан ягона равишда аниқланади. Лекин илдизлар орасида бир хиллари учраса, кўрсатилган усул ягона ечимни бермайди (айланма сирт ҳоли), бундай тақдирда координат текисликларнинг симметрия текисликлари бўлиш талабига перпендикулярлик шартини қўшиш керак.

Яна мисол кўрайлик. Сирт гиперболик параболоиддан иборат дейлик. Бундай ҳолда фақатгина иккита симметрия текислиги бор, холос; улар координат текисликлардир. Координаталар боши гиперболоид ўқининг (яъни симметрия текисликлари ўзаро кесишган тўғри чизиғининг) сирт билан кесишган нуқтасида бўлади.

Иккинчи тартибли эгри чизиқларга тегишли бўлган мулоҳазалар ушбу хулосага олиб келади:

Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг симметрия ўқлари

$$\lambda\ \Phi_x + \mu\ \Phi_y = 0$$

тенгламадан аниқланади. Ушбу

$$(a_{11} - \xi)\ \lambda + a_{12}\ \mu = 0,$$
$$a_{21}\lambda + (a_{22} - \xi)\ \mu = 0$$

системадан эса $\lambda:\mu$ топилади, бу ерда ξ сон $I(\xi)=0$ тенгламанинг илдизидир.

Координаталарнинг иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасининг каноник шаклда ифодалаш *имкониятини* берадиган системаси юқорида сиртларга нисбатан татбиқ қилинган фикрларга ўхшаш мулоҳазалар асосида топилади.

Машқлар

1. Доиравий конус ўқи топилсин:

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)^2=0.$$

2. Параболанинг учи ва ўқи топилсин:

$$(ax+by+c)^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

7-§. Гипербола асимптоталари. Гиперболоиднинг асимптотик конуси

Гипербола ихтиёрий координаталардаги тегламаси билан берилган бўлсин:

$$2\,\Phi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Унинг асимптотлари тенгламасини топайлик.

Координаталарнинг шундай $x'\ y'$ системасига ўтамизки, унда гипербола тенгламаси каноник шаклга эга:

$$2\,\Phi'=\alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma=0.$$

Координаталарнинг бу системасида иккала асимптота ҳам

$$\alpha x'^2+\beta y'^2=0,\ \text{яъни}\ 2\,\Phi'-\gamma=0$$

тенглама билан ифодаланишини биз биламиз (III боб, 4-§). Агар энди xy координаталарга қайтсак, гипербола учун яна (1) тенгламани ҳосил қиламиз, демак, унинг асимптотлари учун $2\,\Phi-\gamma=0$ вужудга келади.

Тенгламага кирган доимий γ нинг $\frac{I_3}{I_2}$ га тенглиги маълум (III боб, 3-§). Демак, *умумий тенгламаси берилган гипербола асимптотларининг тенгламаси*

$$2\Phi-\frac{I_3}{I_2}=0$$

дан иборат.

Худди шунга ўхшаш мулоҳазаларни (бир паллали, икки паллали) гиперболоид

$$2\,F=a_{11}\,x^2+2a_{12}\,xy+\ldots+a_{44}=0$$

га нисбатан татбиқ қилиб, унинг асимптотик конуси тенгламасини топамиз:

$$2F-\frac{I_4}{I_3}=0.$$

Машқлар

1. Гиперболанинг асимптоталари топилсин:

$$(ax+by+c)\ (a_1x+b_1y+c_1)=const.$$

2. Гиперболанинг асимптоталари топилсин:

$$\lambda\ (ax+by+c)^2+\mu\ \ (a_1x+b_1y+c_1)^2=\nu,\ \lambda\mu\leqslant 0.$$

8-§. Эгри чизиқнинг уринмаси. Сиртнинг уринма текислиги

Иккинчи тартибли эгри чизиқ умумий кўринишдаги

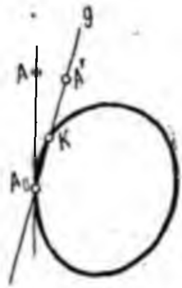
$$2\ \Phi=a_{11}\ x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{33}=0$$

тенгламаси билан берилган бўлсин.

Унинг ихтиёрий A_0 $(x_0,\ y_0)$ нуқтадаги уринмасининг тенгламасини тузайлик.

Эгри чизиқнинг уринмаси таъриф бўйича кесувчи g нинг k нуқта A_0 га чегарасиз яқинлашгандаги лимитидир (88-расм).

$A\ (x,\ y)$ уринманинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Кесувчидаги A нуқтага энг яқин бўлган нуқтани $A'(x',\ y')$ билан белгилайлик. Равшанки: $K\to A_0$ да $A'\to A$.



88- расм.

K нуқтанинг координаталарини A_0 ва A' нуқталар координаталари орқали ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$x_K=x_0+t\ (x'-x_0),\ y_K=y_0+t\ (y'-y_0).$$

K нуқта координаталарини эгри чизиқ тенгламасига қўйиб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$2\ \Phi|_K=2\ \Phi|_{A_0}+2t\ \ \{(x'-x_0)\ \Phi_x|_{A_0}+(y'-y_0)\ \Phi_y|_{A_0}\}+t^2\ \{a_{11}\ (x'-x_0)^2+2a_{12}(x'-x_0)(y'-y_0)+a_{22}(y'-y_0)^2\}=0,$$

бунда A ёнидаги индекс x ва y сифатида A_0 нуқтанинг координаталарини олишни билдиради. A_0 нуқта эгри чизиқда ётганлиги учун $\Phi\,|_{A_0}=0$. Шу сабабли тенгликни t га қисқартириш мумкин.

Натижада:

$$2\ (x' - x_0)\ \Phi_x (x_0,\ y_0) + 2\ (y' - y_0)\ \Phi_y (x_0,\ y_0) + $$
$$+ t\ \{a_{11} (x' - x_0)^2 + 2a_{12}\ (x' - x_0)\ (y' - y_0) +$$
$$+ a_{22}\ (y' - y_0)^2\} = 0.$$

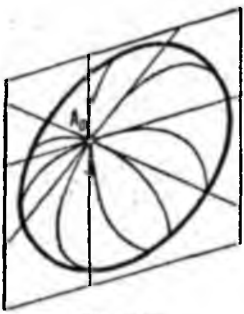
Энди $K \to A_0$ бўлсин. Бу чоғда $t \to 0$ ва $A' \to A$ (яъни $x' \to x$, $y' \to y$: ниҳоят

$$(x - x_0)\ \Phi_x\ \ (x_0,\ y_0) + (y - y_0)\ \Phi_y\ (x_0,\ y_0) = 0 \qquad (1)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенглама x, y га нисбатан чизиқли, бинобарин у қандайдир тўғри чизиқ тенгламасидир. Уринманинг ихтиёрий A нуқтаси уни қаноатлантиради. Демак, бу уринма тенгламасидир.

Сиртнинг A_0 нуқтасидаги *уринма текислиги* деб шундай текисликка айтиладики, сирт устида ётиб A нуқтадан ўтувчи эгри чизиқларга ўтказилган уринмалар унда ётади (89-расм). Иккинчи тартибли



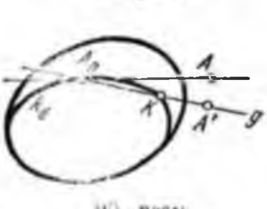
89- расм.

$$2F = a_{11} + x^2 + 2a_{12}\, xy + \ldots + a_{44} = 0$$

сиртнинг A_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасидаги уринма текислиги тенгламасини тузайлик.

A нуқтадан ихтиёрий σ текислик ўтказамиз. Иккинчи тартибли сиртни бу текислик иккинчи тартибли эгри чизиқ k_σ бўйича кесади.

k_σ эгри чизиққа A_0 нуқтада уринма ўтказиб, ундаги ихтиёрий нуқтани A $(x,\ y)$ орқали белгилайлик (90-расм). k_σ да A_0 га яқин K нуқтани олиб, A, K нуқталардан кесувчи g ни ўтказамиз. Айтайлик, A' $(x',\ y',\ z')$ нуқта кесувчида A га энг яқин нуқта бўлсин. Равшанки, $K \to A_0$ да $A' \to A$ булади.



90- расм.

K нуқта координаталарини A_0, A' нуқталарнинг координаталари орқали $x_K = x_0 + t\,(x' - x_0)$, $y_K = y_0 + t(y' - y_0)$, $z_K = z_0 + t(z' - z_0)$ кўринишда ифодалаш мумкин.

K нуқтанинг координаталарини сирт тенгламасига қўйиб ушбу

$$2F\,|_{A_0} + 2t\ \{(x' - x_0)\ F_x\,|_{A_0} + (y' - y_0)\ F_y\,|_{A_0} +$$

$$+(z'-z_0)\ F_z|_{A_0}\}+t^2\ \{a_{11}\ (x'-x_0)^2+$$
$$+2a_{12}\ (x'-x_0)\ (y'-y_0)+\ldots\}=0$$
тенгликни ҳосил қиламиз.

Аммо $2\ F|_{A_0}=0$, чунки A_0 нуқта сирт устида ётади. (2) тенгликни t га бўлиб ва $K\to A_0$ да лимитга ўтиб

$$(x-x_0)\ F_x\ |_{A_0}+(y-y_0)\ F_y\ |_{A_0}+(z-z_0)\ F_z\ |_{A_0}=0$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенглама x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлганлиги учун у бирор текисликни беради. Аммо уни A_0 нуқтадаги k_σ уринмада ётувчи исталган A нуқта координаталари хоҳланган σ учун ҳам қаноатлантиргани сабабли, бу тенглама сиртнинг A_0 нуқтадаги уринма текислик тенгламаси бўлади.

Машқлар

1. Иккинчи тартибли сиртнинг P нуқтасидаги уринма текислиги P нуқтадан ўтувчи диаметрга параллел бўлган ватарларга мос келган диаметрал текисликка параллел бўлиши исбот қилинсин.

2. Иккинчи тартибли эгри чизиқ $2\ \Phi=a_{11}\ x^2+2a_{12}\ xy+\ldots+a_{33}=0$ тенглама билан берилиб, $A_0\ (x_0,\ y_0)$— унда ётмаган нуқта бўлсин. A_0 орқали ихтиёрий тўғри чизиқ g ни ўтказамиз. $A\ (x,\ y)$ шу тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқта бўлсин. g тўғри чизиқнинг исталган B нуқта координаталарини ушбу

$$x_B=x_0+t\ (x-x_0),\ \ y_B=y_0+t\ (y-y_0)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. $2\ \Phi=0$ эгри чизиқнинг g тўғри чизиқ билан кесишган B_1, B_2 нуқталарига мос келган t параметрнинг қийматлари квадрат тенглама

$$2\ \Phi\ (x_0+t\ (x-x_0),\ y_0+t\ (y-y_0))=0 \qquad (3)$$

дан топилади. g тўғри чизиқ уринмага яқинлашгани сари (3) тенглама илдизлари бир-бирига яқинлаша боради.

Шу мулоҳазаларга суянган ҳолда A_0 нуқтадан чиқиб иккинчи тартибли эгри чизиққа уринадиган бир жуфт уринма тенгламаси тузилсин.

3. Учи $A_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада бўлиб, иккинчи тартибли эгри чизиқ $2\ F=0$ га уринадиган конус тенгламаси тузилсин.

4. Ўқи $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, иккинчи тартибли эгри чизиқ $2\ F=0$ га ташқи чизилган цилиндр тенгламаси тузилсин.

5. Бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоиднинг уринма текислиги сиртни иккита тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтиши исбот қилинсин.

6. $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи иккинчи тартибли фокусдош бўлган

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y}{b^2+\lambda}+\frac{z}{c^2+\lambda}=1$$

сиртларнинг шу нуқтада тўғри бурчак остида кесишганлиги исбот қилинсин. x_0, y_0, z_0 нуқта координат текисликларнинг биттасида ҳам ётмайди деб фараз қилинади.

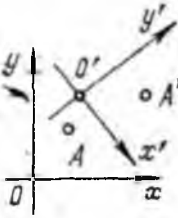
IX боб

ЧИЗИҚЛИ АЛМАШТИРИШЛАР

1-§. Ортогонал алмаштиришлар

Фараз қилайлик, F фигура ҳаракат ёки кўзгу қайтиши қўшилган ҳаракат натижасида бирор F' фигурага алмашинган бўлсин. Бу ҳолда F' фигура F дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил қилинган деб айтилади. *Маълумки фигурани ортогонал алмаштиришда унинг нуқталари орасидаги масофа ўзгармайди.*

F фигурага қарашли ихтиёрий A (x, y, z) нуқта координаталари билан берилган F' фигуранинг мос A' (x', y', z') нуқтаси координаталари орасидаги боғланишни топайлик.



91- расм.

Координаталарнинг s (x, y, z) системаси F фигура билан қаттиқ боғланган деб кўз олдимизга келтирайлик. Бунда ортогонал алмаштириш натижасида бу система координаталарнинг қандайдир s' системасига ўтиб, унга нисбатан A' нуқта координаталари x, y, z бўлади (91- расм). Демак, агар A' нуқтанинг s' системага нисбатан координаталари маълум бўлса, шу A' нуқтанинг s системадаги координаталарини аниқлаш масаласини ҳал қилиш керак экан.

Маълумки, (V боб, 4-§), нуқтанинг иккита тўғри бурчакли декарт координаталари орасидаги боғланиш ушбу формулалар билан ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

бундаги коэффициентлар қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \qquad & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \qquad & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \qquad & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Юқоридаги мулоҳазаларни эътиборга олиб, бундай хулоса чиқарамиз: *ҳар қандай ортогонал алмаштириш коэффициентлари (2) шартларни қаноатлантирадиган (1) формулалар билан ифодаланади.*

Тескарисини (2) *шартларда* (1) *формулалар билан бериладиган ҳар қандай алмаштириш ортогонал алмаштириш бўлишини*, яъни алмашинган фигура берилган фигурадан ҳаракат ёки кўзгу қайтиши қўшилган ҳаракат ҳосил қилинишини исбот қилайлик.

Фараз қилайлик, A_1 (x_1, y_1, z_1) ва A_2 (x_2, y_2, z_2) — F фигуранинг ихтиёрий иккита нуқтаси ва A_1' (x_1', x_2', x_3'), A_2' (x_2', y_2', z_2') — F' фигуранинг мос нуқталари бўлсин. A_1' ва A_2' нуқталар орасидаги масофа квадрати

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2$$

га тенг. Агар бу формулага x_1', x_2', y'_1, y_2', z_1', z_2' учун ёзилган (1) формуладаги ифодаларни қўйсак ва (2) шартлардан фойдалансак:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, F фигуранинг исталган икки нуқтаси орасидаги масофаси F' фигуранинг мос нуқталари орасидаги масофага тенг. Демак, F фигура F' фигурага тенг ва F' фигура F дан ҳаракат ёки кўзгу қайтиши қўшилган ҳаракат натижасида ҳосил бўлади.

Ортогонал алмаштиришлар геометрик жиҳатдан ўз-ўзидан равшан хоссаларга эга бўлса-да, уларни (1) формулалар ёрдамида аналитик текшириб кўриш ҳам мумкин:

1. *Кетма-кет бажарилган иккита ортогонал алмаштириш натижаси яна ортогонал алмаштиришдир*, яъни агар F' фигура F дан ортоганал алмаштириш натижасида F'' фигура эса F' дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, F'' фигура F дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил бўлади.

2. *Ортогонал алмаштиришга тескари алмаштириш ортогонал алмаштиришдир*, яъни агар F' фигура F дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил қилинса, F фигура F' дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил қилинади.

3. *Айнан алмаштириш, яъни*

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

формулалар билан ифодаланган алмаштириш ортогонал алмаштиришдир.

Ортогонал алмаштиришлар текисликда ҳам юқоридаги сингари таърифланади ва улар ҳам шунга ўхшаш хоссаларга эга. Улар

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

формулалар билан ифодаланиб, бундаги коэффициентлар ушбу шартларни қаноатлантиради:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \qquad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Тўғри бурчакли декарт координаталарини алмаштириш формулалари (II боб, 7-§) ортогонал алмаштириш формулалари билан бир хил бўлгани учун, III боб 8-§ да иккинчи тартибли эгри чизиқлар тенгламаларини каноник кўринишга келтиришга тааллуқли натижалардан хулоса чиқарамиз: иккинчи тартибли ҳар қандай эгри чизиқни ортогонал алмаштириш йўли билан ушбу

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \nu = 0,$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0,$$
$$\alpha x^2 + 2py = 0,$$
$$\alpha x^2 + q = 0,$$
$$x^2 = 0$$

типлардаги эгри чизиқларнинг бирига алмаштириш мумкин.

Машқлар

1. Шундай ортогонал алмаштириш формулалари тузилсинки у xy (yz, zx) текисликни ўз-ўзига, xy текисликни xz (yz) текисликка ўтказсин.

2. Шундай ортогонал алмаштириш формулалари тузилсинки, у координаталар бошини ўз ўрнида қолдирсин, x ўқини эса

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

тўғри чизиққа алмаштирсин.

2-§. Аффин алмаштиришлар

Ортогонал алмаштиришлар фигураларнинг *аффин алмаштиришлари* деб аталадиган умумийроқ алмаштиришларининг хусусий ҳолидир. Аффин алмаштиришлар ушбу формулалар билан ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

бундаги a_{ij} коэффициентлар исталган ҳақиқий сонлар бўлиб ягона

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2)$$

шартни қаноатлантиради. Маълумки, *бу таъриф координаталарни танлашга нисбатан инвариант хусусиятга эга*, чунки координаталарнинг битта системасига нисбатан нуқта координаталари унинг исталган бошқа системадаги координаталари орқали чизиқли тенгламалар билан ифодаланади.

Аффин алмаштириш осонгина текширилиб кўриладиган ушбу хоссаларга эга:

1. *Кетма-кет бажарилган иккита аффин алмаштириш натижаси яна аффин алмаштиришдир.*

2. *Аффин алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам аффин алмаштириш бўлади.*

3. *Айнан алмаштириш аффин алмаштиришдир.*

Бу хоссаларнинг ҳаммасини (1) формулалар ёрдамида осонгина текшириб кўриш мумкин. Масалан, иккинчи хоссани текшириб кўрайлик.

(1) системани x, y, z ларга нисбатан ечиб (система детерминанти нолдан фарқли), қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}z' + a_{14}, \\ y &= a_{21}x' + a'_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a'_{33}z' + a_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

бу ердаги a'_{ij} коэффициентлар, i, $j \leqslant 3$ бўлганда Δ даги a_{ij} элементларнинг келтирилган алгебраик тўлдирувчиларидир. Маълумки, a'_{ij} дан тузилган Δ' детерминант Δ^{-1} га тенг. Бундан хулоса чиқарамиз: (x', y', z') нуқтага (3) формулалар бўйича (x, y, z) нуқтани мос келтирувчи алмаштириш, яъни (1) аффин алмаштиришга тескари алмаштириш яна аффин алмаштиришдир.

Пировардида аффин алмаштиришнинг ягона равишда аниқланиш масаласига тўхтаб ўтамиз: *агар битта текисликда ётмаган тўртта нуқтанинг образлари берилса, аффин алмаштириш ягона равишда аниқланади*. Ҳақиқатан ҳам, (1) даги тенгламаларнинг биринчисига берилган тўртта нуқта ва улар образларининг координаталарини қуйиб ушбу

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14},$$
$$x_2 = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 + a_{14},$$

$$x_3 = a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3 + a_{14},$$
$$x_4 = a_{11}x_4 + a_{12}y_4 + a_{13}z_4 + a_{14},$$

тенгламалар системасига эга буламиз.

Бу тенгламаларни a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} ларга нисбатан тенгламалар системаси деб караш мумкин. Система детерминанти:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

абсолют қиймат жиҳатдан учлари берилган туртта нуқтада булган тетраэдр ҳажмининг олти бараварига тенг, демак, детерминант нолдан фаркли. Шундай килиб курсатилган системадан a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} коэффициентлар ягона равишда аниқланади. (1) формуладаги бошка коэффициентларнинг ягона равишда аниқланиши ҳам шунга ухшаш исбот қилинади.

Агар битта тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг образлари берилса, текисликдаги аффин алмаштириш ягона равишда аниқланади.

Машклар

1. (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) нуқталарни (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, u_4, z_4) нуқталарга алмаштирувчи аффин алмаштириш формулалари тузилсин.

2. Текисликда шундай аффин алмаштириш формулалари тузилсинки, бу алмаштириш натижасида x ва y координат уқлар берилган ушбу

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

иккита туғри чизиққа алмашсин.

3-§. Тугри чизиқ ва текисликни аффин алмаштириш

Аффин алмаштириш формулалари:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

нинг x, y ва z га нисбатан бир қийматли равишда ечилувчанлигидан *турли нуқталарнинг аффин алмаштиришда яна турли нуқталарга ўтиши ва ҳар бир (x', y', z') нуқта қандайдир (x, y, z) нуқта учун образ вазифасини бажариши келиб чиқади.*

Аффин алмаштиришда текисликнинг текисликка, тўғри чизиқнинг тўғри чизиққа ўтишини ва параллелликнинг сақланишини исбот қилайлик.

Фараз қилайлик, σ — ихтиёрий текислик,

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (2)$$

эса унинг тенгламаси бўлсин. (1) аффин алмаштириш натижасида σ текислик қандайдир σ′ фигурага алмашинади. Аммо σ га тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари (2) тенгламани қаноатлантиргани ва σ′ фигурада унга мос келган нуқтанинг координаталари орқали чизиқли ифодаланганлиги сабабли, σ нуқталарининг координаталари чизиқли

$$a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0 \qquad (2')$$

тенгламани қаноатлантиради; бу (2′) формула эса x, y, z ни x', y', z' орқали олдинги параграфдаги (3) формулаларга биноан чизиқли ифодаларига алмаштириш натижасида ҳосил бўлади. (2′) тенглама айниятдан иборат бўлиши мумкин эмас, чунки x', y', z' ўрнига (1) формула бўйича x, y, z ни киритсак биз яна (2) ни ҳосил қилишимиз керак.

Шундай қилиб, σ′ фигура (2′) тенглама билан ифодаланган текисликда ётади. Энди σ′ нинг шу текислик билан устма-уст тушишини, яъни бир-бирини тўла қопланишини исбот қилайлик. Ҳақиқатан ҳам, (x', y', z') — тенгламаси (2′) бўлган текисликнинг исталган нуқтаси бўлсин. Унинг (1) га тескари бўлган аффин алмаштиришдаги образи (2) тенгламани қаноатлантиради, демак σ′ га тенг тегишли бўлади. Бундан σ′ нинг (2′) текислик билан устма-уст тушиши (тўла қопланиши) тўғрисида хулоса чиқарамиз: бошқача айтганда σ′ фигура (2) текисликнинг ўзидир (унинг бир қисми эмас). Бу мулоҳазалар аффин алмаштиришда текисликнинг текисликка ўтишини исбот этади.

Аффин алмаштиришда текисликнинг текисликка ўтиши ва аффин алмаштиришга тескари алмаштиришнинг яна аффин бўлганлиги сабабли, *турли текисликлар яна турли текисликларга ўтади.*

Турли нуқталарнинг аффин алмаштиришда турли нуқталарга ўтганлиги сабабли, *параллел текисликлар яна параллел текисликларга ўтади.*

Тўғри чизиқ орқали иккита турли текислик ўтказиш мумкинлиги ва аффин алмаштиришда турли текисликлар яна турли текисликларга ўтганлиги учун *тўғри чизиқ аффин алмаштиришда яна тўғри чизиққа ўтади.*

Параллел тўғри чизиқларни иккита параллел текисликнинг учинчи текислик билан кесишмаси сифатида қараш ёки таърифлаш мумкинлиги ва параллел текисликларнинг аффин алмаштиришда яна параллел текисликларга ўтишлиги сабабли, *аффин алмаштиришда параллел тўғри чизиқлар яна параллел тўғри чизиқларга ўтади.*

Параграфнинг пировардида текисликдаги аффин алмаштиришлар юқоридагиларга ўхшаш хоссаларга эгалигини таъкидлаб ўтамиз. Чунончи, *текисликдаги аффин алмаштиришда тўғри чизиқлар яна тўғри чизиқларга ўтади ва параллеллик сақланади.*

Машқлар

1. *xy*, *yz*, *zx* дан иборат координат текисликлар (1) аффин алмаштиришда қандай текисликларга ўтиши топилсин.
2. Координаталар ўқлари (1) аффин алмаштириш натижасида қандай тўғри чизиқларга ўтиши топилсин.

4-§. Аффин алмаштиришнинг асосий инварианти

Ортогонал алмаштиришда нуқталар орасидаги масофа ўзгармайди. Шу муносабат билан нуқталар орасидаги масофа ортогонал алмаштириш инварианти деб айтилади. Ортогонал алмаштиришнинг бошқа кўп инвариантларини, чунончи, тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни, учбурчак юзини тилга олиш мумкин эди. Нуқталар орасидаги масофа энг содда инвариант бўлиб қолмай, у асосий инвариант ҳам, чунки қолган ҳамма инвариантлар у орқали ифодаланиши мумкин.

Аффин алмаштиришда нуқталар орасидаги масофа одатда ўзгаради, шунинг учун нуқталар орасидаги масофа умумий аффин алмаштиришнинг инварианти бўлмайди. *Аффин алмаштиришнинг энг содда ва шу билан бир вақтда асосий инварианти тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг содда нисбатидан иборат. Тўғри чизиқдаги учта A, B, C нуқтанинг содда нисбати деб қуйидагича аниқланган*

$$(ABC) = \frac{AB}{BC}$$

сонга айтилади.

Тўғри чизиқдаги учта нуқта содда нисбатининг аффин алмаштиришда сақланиши кўрсатилади, яъни агар A, B, C

нуқталар аффин алмаштиришда A', B', C' нуқталарга алмашинса, у ҳолда:

$$(ABC) = (A'B'C').$$

Умумиятликни чегараламасдан A, B, C нуқталар x ўқида ётади деб ҳисоблаш мумкин (AB тўғри чизиқни x ўқи сифатида қабул қилиш мумкин). Бундан ташқари A', B', C' нуқталар ҳам x ўқида ётади деб ҳисоблашимиз мумкин, чунки содда нисбатни бузмайдиган ортогонал алмаштиришни (чунки у кесмалар узунликларини сақлайди) қўлланиб, A', B', C' нуқталарни ҳамиша x ўқига кўчириш мумкин. Бундай ҳолда

$$(ABC) = \frac{|x_A - x_B|}{|x_B - x_C|}, \qquad (A'B'C') = \frac{|x_{A'} - x_{B'}|}{|x_{B'} - x_{C'}|}.$$

Аммо A', B', C' нуқталарнинг x' координаталари билан A, B, C нуқталарнинг x координаталари орасидаги боғланиш

$$x' = a_{11}x + a_{14},$$

тенгликдан иборат: энди (ABC), $(A'\ B'\ C')$ дан иборат содда нисбатларнинг тенглигини текшириб кўриш жуда осон.

Машқлар

1. Ихтиёрий учбурчакни тенг томонли учбурчакка алмаштирадиган аффин алмаштириш мавжудлиги исбот қилинсин. Медианаларнинг кесишган нуқтаси яна медианалар кесишган нуқтасига ўтиши исбот қилинсин.

2. Аффин алмаштиришни қўлланиб, берилган ҳар қандай параллелограммни квадратга айлантириш мумкинлиги исбот қилинсин. Ихтиёрий тўртбурчакни аффин алмаштириш квадратга айлантирадими?

3. Қандай шарт бажарилганда текисликнинг олдинги параграфидаги (1) формулалар билан берилган аффин алмаштириш бирор нуқтани ўз ўрнида қолдиради?

5-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртларни аффин алмаштириш

Иккинчи тартибли эгри чизиқ координаталари иккинчи даражали тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида таърифланганлиги, нуқта координаталари эса ўзининг аффин алмаштиришдаги образларининг координаталари орқали чизиқли ифодаланганлиги сабабли, *иккинчи тартибли эгри чизиқ аффин алмаштиришда яна иккинчи тартибли эгри чизиққа ўтади.*

Шунга ўхшаш *иккинчи тартибли сирт аффин алмаштиришда яна иккинчи тартибли сиртга ўтади.*

Аффин алмаштиришда тўғри чизиқлар яна тўғри чизиқларга ўтиб, шу билан бирга уларнинг параллеллиги ҳам сақланганлиги, учта нуқта содда нисбатининг сақланиши — жумладан, кесма ўртасининг мос кесма ўртасига ўтишлиги сабабли *аффин алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ диаметрлари яна диаметрларга ўтади, қўшма диаметрлар яна қўшма диаметрларга ва марказ яна марказга ўтади.*

Иккинчи тартибли сиртлар аффин алмаштиришда шунга ўхшаш хоссаларга эга.

Аффин алмаштиришда ҳақиқий нуқталар ҳақиқий нуқталарга, мавҳумлари — яна мавҳум нуқталарга ўтганлигидан, *аффин алмаштиришда ҳақиқий эгри чизиқ ҳақиқий эгри чизиққа, мавҳумлари эса яна мавҳум эгри чизиқларга ўтади.*

Равшанки, чекли фигуранинг аффин алмаштиришдаги образи ҳам чекли фигура бўлади, фигура чексиз бўлса, унинг образи — яна чексиз фигурадир.

Аффин алмаштиришнинг юқорида кўрсатилган хоссаларининг натижаси тариқасида ушбу хулосаларга келамиз:

Исталган аффин алмаштиришда эллипс яна эллипсга, гипербола — гиперболага, парабола — параболага, бир жуфт кесишувчи тўғри чизиқ — бир жуфт кесишувчи тўғри чизиққа, бир жуфт параллел тўғри чизиқ — бир жуфт параллел тўғри чизиққа ўтади.

Иккинчи тартибли сиртлар тўғрисида шунинг сингари хулосалар чиқариш мумкин.

Аффин алмаштириш натижасида бир-бирига алмашинадиган икки фигура *аффин эквивалент* деб аталади.

Барча эллипслар

$$x^2 + y^2 = 1$$

айланага аффин эквивалентдир.

Барча гиперболалар тенг ёнли

$$x^2 - y^2 = 1$$

гиперболага аффин эквивалентдир.

Барча параболалар

$$y = x^2$$

параболага аффин эквивалентдир.

Мисол тариқасида биринчи даъвони исбот қилайлик. Исталган эллипс ортогонал алмаштириш натижасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипсга алмаштирилиши мумкин. Бу эллипс эса координат ўқларга нисбатан бир текисда ушбу

$$x'=\frac{x}{a}, \qquad y'=\frac{y}{b}$$

тенгликлар билан аниқланган қисиш (чўзиш) натижасида

$$x'^2+y'^2=1$$

айланага ўтказилади.

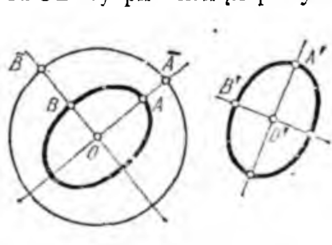
Фазо билан иш кўрилган ҳолда иккинчи тартибли сиртларнинг аффин эквивалентлиги ҳақида юқоридаги даъволар ўринлидир.

Пировардида ушбу хоссани исбот қиламиз: *текисликдаги ҳар қандай аффин алмаштиришни учта алмаштиришни кетма-кет бажариш натижасида ҳосил қилиш мумкин, улар: ўзаро перпендикуляр иккита тўғри чизиққа нисбатан бир текисда қисиш (чўзиш) билан бирор ортогонал алмаштиришдан иборат бўлади.*

Исботи осон. Аффин алмаштиришда

$$x^2+y^2=1$$

айлана бирор E' эллипсга ўтади (92-расм.) Айтайлик, A' ва B' — унинг бирин-кетин келган иккита учи, O' — маркази, $\bar{A}$ ва $\bar{B}$ — айлананинг эллипсдаги A', B' нуқталарга мос келган нуқталари бўлсин. $O\bar{A}$ ва $O\bar{B}$ тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр, чунки улар доиранинг қўшма диаметрларидир (чунки улар эллипснинг қўшма диаметрлари: $O'A'$, $O'B'$ га мос келади).



92- расм.

Координаталарнинг икки системасини, яъни мусбат ярим ўқлар $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ сифатида $O\bar{A}$ ва $O\bar{B}$ тўғри чизиқларни олиб, $\bar{x}\,\bar{y}$ системасини ва мусбат ярим ўқлари сифатида $O'A'$, $O'B'$ қабул қилинган $x'\ y'$ системани киритайлик. $x'\ y'$ системада E' эллипс

$$\alpha x'^2+\beta y'^2=1$$

тенглама билан ифодаланади.

E эллипс:

$$\alpha \overline{x}^2 + \beta \overline{y}^2 = 1$$

ни E' эллипсга ўтказадиган ортогонал алмаштириш мавжуд. Бунда унинг $\overline{A}$, $\overline{B}$ учлари E' эллипснинг A', B' учларига ўтади.

Энди учта алмаштиришдан тузилган аффин алмаштиришни қараймиз: 1) $\overline{y}$ ўқига нисбатан бир текисда қисиш (чўзиш), унда $\overline{A}$ нуқта A га ўтади; 2) $\overline{x}$ ўқига нисбатан бир текисда қисиш (чўзиш) унда $\overline{B}$ нуқта B га ўтади; 3) E эллипсни E' га ўтказилган ортогонал алмаштириш. Шу тариқада тузилган аффин алмаштириш аввалдан берилган аффин алмаштириш сингари O, $\overline{A}$, $\overline{B}$ нуқталарни O, A', B' нуқталарга ўтказади, демак, ундан фарқ қилмайди (2- §). Даъво исбот қилинди.

Фазодаги аффин алмаштириш учун ҳам юқоридагига ўхшаш хосса ўринли, чунончи: *фазодаги исталган аффин алмаштириш учта ўзаро перпендикуляр йўналиш бўйича бир текисда қисиш (чўзиш) ва ортогонал алмаштиришга ёйилиб юборилиши мумкин.*

Машқлар

1. Эллипснинг қўшма диаметрлари хоссасини айлана диаметрлари хоссасидан келтириб чиқарилсин. Эллипсоид диаметрлар ва диаметрал хоссаларини сфера диаметрлари ва диаметрал текисликлари хоссаларидан келтириб чиқарилсин.

2. Текисликдаги аффин алмаштириш

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

формулалар ёрдамида берилган. Бу алмаштиришни иккита ўзаро перпендикуляр йўналиши бўйича қисиш (чўзиш) билан қандайдир ортогонал алмаштиришга ёйиб юбориш мумкинлиги юқорида исбот қилинган эди. Чўзиш (қисиш) коэффициентлари топилсин.

6- §. Проектив алмаштиришлар

Фигураларнинг аффин алмаштиришлари *проектив алмаштиришлар* номини олган ва ушбу

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \\ y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \\ z' &= \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

формулалар билан берилган умумийроқ алмаштиришларнинг хусусий ҳолидир. (1) коэффициентлар фақат битта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

шартни қаноатлантиради.

Бу формулалар σ_∞ текислик:

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0$$

ни кесмайдиган исталган F фигура учун алмаштиришни аниқлаб беради.

Навбатдаги муҳокамаларимизда алмаштириладиган фигура σ_∞ текислик билан кесишмайди деб фараз қиламиз.

Равшанки, *проектив алмаштиришга берилган таъриф координаталар системасини танлаб олишга нисбатан инвариант хоссага эга.*

Ушбу хоссаниг ўринли эканлигини бевосита текшириб кўриш мумкин: *кетма-кет бажарилган иккита проектив алмаштириш натижаси — проектив алмаштириш бўлади, проектив алмаштиришга, тескари алмаштириш яна проектив алмаштиришдир, айнан алмаштириш — проектив алмаштиришдир.*

Проектив алмаштиришга аффин алмаштиришнинг талай хоссалари тааллуқли. Чунончи, тўғри чизиқда ётган нуқталар яна тўғри чизиқда ётувчи нуқталарга алмашинади.

Учта нуқтанинг содда нисбати проектив алмаштиришда одатда сақланмайди, лекин *унинг эвазига тўғри чизиқдаги тўртта нуқтанинг мураккаб (ангармоник) нисбати сақланади. Бу нисбат қуйидагича таърифланади.*

Фараз қилайлик, A, B, C, D — тўғри чизиқдаги тўртта нуқта ва $\boldsymbol{e}$ — шу тўғри чизиққа перпендикуляр бўлмаган нолдан фарқли вектор бўлсин. Бу холда берилган (тартибда олинган) A, B, C, D нуқталарнинг *мураккаб (ангармоник)* нисбати деб

$$(ABCD) = \frac{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{AC}}{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{BC}} : \frac{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{AD}}{\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{BD}}$$

га тенг сонга айтилади.

Бу таърифнинг $\boldsymbol{e}$ векторини танлаб олинишига нисбатан инвариантлиги аён. Шунинг учун $\boldsymbol{e}$ вектор сифатида x

ўқи AD тўғри чизиққа перпендикуляр эмас деб фараз қилиб, e_∞ ни оламиз; натижада:

$$(ABCD) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар y ва z ўқлар тўғри чизиққа перпендикуляр бўлмаса, y ва z координаталарга нисбатан шунга ўхшаш формулаларни ҳосил қиламиз.

Тўғри чизиқдаги тўртта A, B, C, D нуқта мураккаб нисбатнинг проектив алмаштиришда сақланишини исбот қилайлик.

Умумийликни чегараламасдан A, B, C, D нуқталар x ўқида ётади деб фараз қилиш мумкин (A D тўғри чизиқни x ўқи сифатида олиш мумкин). Бундан ташқари, уларнинг A', B', C', D' образлари ҳам x ўқида ётади дейиш мумкин, чунки мураккаб нисбатни буза олмаслиги аён бўлган ортогонал алмаштиришни ишлатиб, бу нуқталарни ҳам x ўқига кўчириш мумкин. Натижада A', B', C', D' нуқталарнинг x координаталари A, B, C, D нуқталарнинг x координаталари орқали ушбу

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{14}}{a_{41}x + a_{44}}$$

формула бўйича ифодаланади. Энди бевосита текшириб кўриш йўли билан

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{x_{C'} - x_{A'}}{x_{C'} - x_{B'}} : \frac{x_{D'} - x_{A'}}{x_{D'} - x_{B'}}$$

га, яъни

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

га ишонч ҳосил қиламиз.

Текисликдаги проектив алмаштириш

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

формулалар билан ифодаланади ва юқоридагига ўхшаш хоссаларга эга.

«Проектив алмаштиришлар» деб аталиши бу алмаштиришларнинг қуйидаги хоссасига боғлиқ:

Агар α текисликдаги F' фигура шу текисликдаги F фигурадан аффин алмаштиришга айланмайдиган проектив алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда F' фигура F га тенг бўлган $\overline{F}$ фигурани бирор S марказдан проекциялаш натижасида ҳосил қилиниши мумкин.

Аксинча, *шу тариқада проекциялаш билан ҳосил қилинган хар қандай фигура F дан проектив алмаштириш натижасида хосил қилиниши мумкин.*

Бу даъво икки қисмдан иборат, биз унинг иккинчи қисмини исбот қиламиз. Умумийликни чегараламасдан α текислик деб ҳисоблаш мумкин.

Фараз қилайлик, $A\ (x,\ y,\ 0)$ — F фигуранинг ихтиёрий нуқтаси, $\overline{A}\ (\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z})$ эса $\overline{F}$ нинг мос нуқтаси, $S\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ проекциялаш маркази ва $A'\ (x',\ y';\ 0)$ эса $\overline{A}$ нинг S дан xy текисликка туширилган проекцияси бўлсин. S, $\overline{A}$ ва A' нуқталар битта тўғри чизиқда ётганлиги учун:

$$\frac{x'-x_0}{\overline{x}-x_0}=\frac{y'-y_0}{\overline{y}-y_0}=\frac{-z_0}{\overline{z}-z^0}.$$

Бундан

$$x'=\frac{-z_0\overline{x}+\overline{z}x_0}{\overline{z}-z_0},\qquad y'=\frac{-z_0\overline{y}+\overline{z}\,y_0}{\overline{z}-z_0}.$$

Лекин $\overline{x}$, $\overline{y}$ ва $\overline{z}$ координаталар x, y орқали чизиқли ифодаланади, чунки $\overline{F}$ фигура F дан ортогонал алмаштириш натижасида ҳосил қилинган, шунинг учун x', y' нинг x, y орқали ифодалари (3) кўринишда бўлади: бу эса проекцияланадиган F' фигуранинг F фигурадан проектив алмаштириш натижасида ҳосил қилиниши мумкинлигидан дарак беради.

Машқлар

1. Агар текисликда тўртта нуқта бўлиб, уларнинг ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмаса ва бу тўртта нуқта учун тегишли образлар (яъни проектив алмаштириш) берилган бўлса, бу ҳолда текисликда проектив алмаштириш ягона равишда аниқланиши исбот қилинсин [1].

2. A, B, C, D нуқталарнинг исталган тартибда олинган тўртликлари, масалан A, B, C, D; B, A, C, D нинг ангармоник нисбатлари $(ABCD)$, $(ABCD)$ ва ҳ. к. ни ангармоник нисбат $(ABCD)$ орқали ифодалансин.

---

[1] (3) тенгликлардаги барча коэффициентлар тўла аниқланади.

7-§. Бир жинсли координаталар. Текислик ва фазони чексиз узоқ элементлар билан тўлдириш

Текисликдаги нуқтанинг *бир жинсли координаталари* деб ҳаммаси нолга тенг бўлмаган ва шу нуқтанинг декарт координаталари x, y билан ушбу

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

тенгликлар билан боғланган исталган учта x_1, x_2, x_3 сонга айтилади.

Нуқтанинг бир жинсли координаталари ягона равишда аниқланган эмас. Ҳақиқатан ҳам x_1, x_2, x_3 — нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлса $\rho \neq 0$ да ρx_1, ρx_2, ρx_3 сонлар ҳам шу нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлади.

Исталган тўғри чизиқ декарт координаталарида

$$a_1 x + a_2 y + a_? = 0 \qquad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$$

тенглама билан ифодаланганлиги ва исталган бундай тенгламанинг бирор тўғри чизиқ тенгламаси бўлганлиги учун ҳар қандай тўғри чизиқ бир жинсли координаталарда

$$a_1 x_1 + a_3 x_2 + a_3 x_3 = 0 \qquad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$$

тенглама билан ифодаланади ва исталган бундай тенглама бирор тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Текисликнинг ҳар бир (x, y) нуқтаси учун шу нуқтанинг бир жинсли координаталари вазифасини бажарувчи сонлар учталигини, масалан x, y, 1 ни кўрсатиш мумкинлиги равшан. Бунинг тескариси, умуман айтганда, нотўғри. Чунончи, координатаси $(x_3 = 0)$ нолга тенг x_1, x_2, x_3, сонлар учталиги учун бу учта сонни бир жинсли координаталари сифатида қабул қилинган нуқта мавжуд эмас.

Бундай вазият кўп масалалар, чунончи проектив алмаштиришларга оид масалалар билан иш кўрганда катта ноқулайликларни вужудга келтиради. Шунга боғлиқ равишда текисликни янги элементлар билан тўлдирамиз (яъни унга янги элементлар қўшамиз) ва уларни *чексиз узоқ нуқталар ва чексиз узоқ тўғри чизиқ* деб атаймиз.

Юқоридаги мулоҳазалар асосида x_1, x_2 x_3 сонлар учталигига $x_3 = 0$ бўлганда текисликнинг чексиз узоқ нуқтаси мос келади деб айтамиз. Чексиз узоқ нуқталарнинг геометрик ўрнини *чексиз узоқ тўғри чизиқ* деб атаймиз.

Шу тарзда текисликда кенгайтирилган исталган:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

тенглама бирор тўғри чизиқ тенгламаси бўлади. Агар $a_1 = a_2 = 0$ *бўлса, тўғри чизиқ чексиз узоқ.*

Кенгайтирилган текисликда исталган иккита тўғри чизиқ кесишади, чунки чизиқли иккита

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

тенглама системаси ҳамиша нотривиал (x_1, x_2, x_3, нинг ҳаммаси нолга тенг бўлмаган) ечимга эга. Жумладан, *параллел икки тўғри чизиқ чексиз узоқ нуқтада кесишади.* Ҳақиқатан ҳам, агар (1) тўғри чизиқлар параллел бўлса, у ҳолда:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda.$$

Шунинг учун (1) системанинг иккинчи тенгламасини λ га кўпайтириб, биринчисидан айирсак, $(a_3 - \lambda b_3)\,x_3 = 0$ ни ҳосил қиламиз, ундан эса $x_3 = 0$.

Фигураларнинг киритилган проектив алмаштиришини (6- §) кенгайтирилган текисликка давом эттириш мумкин. Чунончи, кенгайтирилган текисликда ушбу

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

формулалар билан бериладиган алмаштиришни қараб чиқайлик.

Кенгайтирилган текисликда бу алмаштириш илгари киритилган проектив алмаштиришдан фарқ қилмайди. Ҳақиқатан ҳам, кенгайтирилмаган текисликда

$$x_3 \neq 0, \qquad x_3' \neq 0.$$

Демак, олдинги иккита формулани учинчисига ҳадма-ҳад бўлиш натижасида

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

ни ҳосил қиламиз.

Фазо билан иш кўрган ҳолда нуқтанинг бир жинсли координаталари декарт координаталари билан

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4}$$

тенгликлар орқали боғланган сонлар тўрттaлиги сифатида киритилади.

Текислик билан иш кўрганимизга ўхшаш фазо чексиз узоқ элементлар билан тўлдирилади (яъни бу элементлар қўшилади), улар: *чексиз узоқ нуқталар, чексиз узоқ тўғри чизиқлар, чексиз узоқ текислик.* Натижада *чексиз узоқ элементлар билан тўлдирилган фазода* исталган

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

тенглама текисликни ифода қилади($a_1 = a_2 = a_3 = 0$ *ҳолда чексиз узоқ текисликни) исталган иккита эркли*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$$

тенглама тўғри чизиқни $\left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\right.$ *да балки чексиз узоқ тўғри чизиқни) аниқлайди.*

6-§ да таъриф асосида киритилган проектив алмаштиришлар кенгайтирилган фазога давом эттирилади ва бир жинсли координаталарда ушбу формулалар билан ифода қилинади:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$
$$x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Машқлар

1. Кенгайтирилган текисликда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ тўғри чизиқларни ушбу

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0,$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0,$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0$$

тўғри чизиқларга ўтказувчи проектив алмаштириш формулалари тузилсин.

2. Ушбу

$$\frac{x_1\alpha_4 - x_4\alpha_1}{k_1} = \frac{x_2\alpha_4 - x_4\alpha_2}{k_2} = \frac{x_3\alpha_4 - x_4\alpha_3}{k_3},$$

$$\frac{x_1\beta_1 - x_4\beta_1}{k_1} = \frac{x_2\beta_4 - x_4\beta_2}{k_2} = \frac{x_3\beta_4 - x_4\beta_3}{k_3}$$

тўғри чизиқлар кесишган нуқтасининг координаталари топилсин.

8- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртларни проектив алмаштириш

Бир жинсли координаталарда иккинчи тартибли эгри чизиқнинг

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2 = 0 \tag{1}$$

тенглама билан берилиши равшан, бу тенглама эса унинг декарт координаталаридаги:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{33} = 0 \tag{2}$$

тенгламасидан x ўрнига $\frac{x_1}{x_3}$ ни, y ўрнига $\frac{x_2}{x_3}$ ни олиш натижасида ҳосил қилинади.

Текисликни чексиз узоқ элементлар билан тўлдирамиз ва (1) тенглама билан берилган эгри чизиқни кенгайтирилган текисликка давом эттирамиз, лекин унинг (1) тенгламани қаноатлантирган чексиз узоқ нуқталари мавжуд бўлган тақдирда уларни ҳам шу эгри чизиққа қўшиб қўямиз.

Кенгайтирилган текисликдаги иккинчи тартибли эгри чизиқнинг ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0, \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 0, \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ x_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

содда эгри чизиқларнинг бирига проектив эквивалентлигини исбот қилайлик, яъни унинг проектив алмаштириш натижасида (3) даги эгри чизиқларнинг бирига ўтишини кўрсатайлик.

Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтириш масаласи билан шуғулланиб (III боб, 8- §), координаталарнинг шундай $x'y'$ системаси борлигини кўрсатдикки, унда (2) эгри чизиқ тенгламаси ушбу шакллардан бирини қабул қилади:

$$\alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma=0,$$
$$\alpha x'^2+\beta y'^2=0,$$
$$\alpha x'^2+\beta y'=0,$$
$$x'^2=0.$$

Бу эса аналитик жиҳатдан (2) тенгламага x ва y билан ушбу

$$x'=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13},$$
$$y'=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}$$

формулалар воситасида боғланган янги x', y' ўзгарувчиларни киритиш мумкин ва (2) тенглама кўрсатилган шакллардан бирини қабул қилади, деган сўздир.

Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: агар иккинчи тартибли эгри чизиқ (1) ни проектив алмаштириш:

$$x_1'=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3,$$
$$x_2'=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3,$$
$$x_3'=x_3$$

га дуч келтирсак, қуйидаги эгри чизиқлардан бирига эга бўламиз:

$$\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2=0,$$
$$\alpha x_1^2+\beta x_2^2=0,$$
$$\alpha x_1^2+\beta x_2x_3=0,$$
$$x_1^2=0.$$

Бу эгри чизиқларга келганда эса содда проектив алмаштиришни татбиқ қилиб, уларни (3) эгри чизиқларга алмаштириб юбориш мумкин. Масалан, биринчи ҳолда

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x_1,\quad x_2'=\sqrt{|\beta|}\,x_2,\quad x_3'=\sqrt{|\gamma|}\cdot x_3$$

дан иборат, иккинчи ҳолда

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x_1,\quad x_2'=\sqrt{|\beta|}\,x_2,\quad x_3'=x_3$$

дан иборат ва учинчи ҳолда

$$x_1'=\sqrt{|\alpha|}\,x_1,\quad x_2'=\frac{x_2+x_3}{2}\sqrt{|\beta|},\quad x_3'=\frac{x_2-x_3}{2}\sqrt{|\beta|}$$

дан иборат проектив алмаштиришларни олиш керак.

Чексиз узоқ элементлар билан тўлдирилган фазода иккинчи тартибли сиртлар учун юқоридагига ўхшаш даъвони исбот қилиш мумкин. Чунончи, *иккинчи тартибли истаган сирт ушбу*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,$$
$$x_1^2+x_2^2=0,$$
$$x_1^2-x_2^2=0,$$
$$x_1^2=0$$

сиртларнинг бирига проектив эквивалент бўлади.

Исбот эгри чизиқларга тааллуқли исботларга ўхшашдир.

Машқ

Ушбу

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2\pm(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=0,$$
$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)=0$$

эгри чизиқларни (3) каноник шакллардан бирига ўтказиладиган проектив алмаштиришлар топилсин.

9- §. Полюс ва поляра

Агар 6- § да ангармоник нисбат учун чиқарилган (2) формулага бир жинсли координаталарни киритсак:

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}x_{1A} & x_{1C}\\ x_{4A} & x_{4C}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_{1B} & x_{1C}\\ x_{4B} & x_{4C}\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}x_{1A} & x_{1D}\\ x_{4A} & x_{4D}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_{1B} & x_{1D}\\ x_{4B} & x_{4D}\end{vmatrix}}$$

ни ҳосил қиламиз; бу ердаги x_1 ўрнига ҳамма жойда x_2 ёки x_3 ни қўйсак, яна иккита мос формулага эга бўламиз.

Чексиз узоқ элементлари билан тўлдирилган фазодаги тўғри чизиқ нуқталарининг ангармоник нисбатини (1) формула билан таърифладик. Бу тариқада таърифланган ангармоник нисбатнинг проектив алмаштириш натижасида сақланишига 6- § да келтирилган исботга боғлиқсиз равишда ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳисоб-китобларни биз келтирмай қўя қолдик.

Айтайлик иккинчи тартибли сирт:

$$2F = \sum_{i,j=1}^{4} x_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (2)$$

ва унда ётмайдиган $A(x_1', x_2', x_3', x_4')$ нуқта берилган бўлсин. A нуқта орқали ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказиб, унинг (2) сирт билан кесишган нуқталарини C ва D билан белгилайлик. A билан бирга C ва D нуқталарни *гармоник равишда бўладиган* B нуқтани, яъни шундай нуқтани ясайликки A, B, C, D нуқталарнинг ангармоник нисбати —1 га тенг бўлсин: $(ABCD) = -1$.

Ушбу йўсинда ясалган нуқталарнинг геометрик ўрни A нуқтанинг *поляраси* дейилади. A нуқта поляраrа нисбатан *полюс* дейилади.

Поляра тенгламасини тузайлик. x_1, x_2, x_3, x_4 сонлар B нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлсин. AB тўғри чизиқда A дан фарқли исталган нуқтанинг координаталарини ушбу

$$\bar{x}_i = x_i + \lambda x_i' \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (3)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, AB тўғри чизиқ иккита:

$$\sum a_i x_i = 0, \; \sum b_i x_i = 0$$

тенглама билан ифодаланади. Аммо матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

нинг ранги иккига тенг (тенгламалар эркли), шунинг учун бу системанинг исталган ечими иккита эркли ечимнинг чизиқли комбинациясидан иборат:

$$\bar{x}_i = \mu x_i + \nu x_i' \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Агар нуқта A дан фарқли бўлса, у ҳолда $\mu \neq 0$. Энди $\bar{x}_i$ координаталарни μ га бўлиб юбориш мумкин, натижада юқоридаги ифода ҳосил бўлади.

Агар $A, B, \lambda A + B, \mu A + B$ дан иборат тўртта нуқта олинса (бу ерда $\xi A + B$ нуқта координаталари $\xi x_i + x_i'$ га тенг нуқталардир), уларнинг ангармоник нисбати

$\frac{\lambda}{\mu}$ га тенглигини бевосита текшириш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкин, яъни;

$$(A,\ B, \lambda A + B, \mu A + B) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Бундан AB тўғри чизиқнинг иккинчи тартибли сирт билан кесишган C ва D нуқталарини қуйидагича ифодалаш мумкинлиги келиб чиқади:

$$C = \lambda A + B,\ D = -\lambda A + B.$$

C ва D нуқталарнинг координаталарини сирт тенгламасига қўйиб,

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\pm\lambda x_i + x'_i)(\pm\lambda x_j + x'_j) =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \pm 2\lambda \sum_{i,j} a_{ij} x_i x'_j + \sum_{i,j} a_{ij} x'_i x'_j = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x'_j = 0.$$

Поляра тенгламаси шудир. Демак, поляра текисликдан иборат.

Поляранинг иккита муҳим хоссасини кўрсатайлик:

1. *А нуқтанинг полярасидаги исталган В нуқтанинг поляраси А дан ўтади.*

2. *Агар А нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, унинг поляраси бирор тўғри чизиқ атрофида айланади.* Ҳақиқатан ҳам, $B(x''_i)$ нуқта полярасининг тенгламаси

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x''_j = 0$$

ни A нуқтанинг координаталари қаноатлантиради, чунки: B нуқта A нуқтанинг поляраси да ётгани учун

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, x'_i\, x''_j = \sum_{i,j} a_{ij}\, x''_i\, x'_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

ва

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, x''_i\, x'_j = 0.$$

A нуқта $A'(x'_i)$ ва $A''(x''_i)$ нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қиладиган бўлсин. Бу тўғри чизиқдаги исталган нуқтанинг поляраси:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i(\lambda' x'_j + \lambda'' x''_j) = 0$$

ёки

$$\lambda' \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j'' + \lambda'' \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j' = 0$$

тенглама билан ифодаланади. Бундан эса поляранинг ушбу

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j' = 0, \quad \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j'' = 0$$

тенгламалари билан бериладиган тўғри чизиқ атрофида айланиши кўриниб турипти.

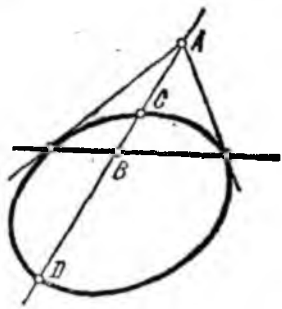
$A(x_1', x_2', x_3')$ нуқтанинг иккинчи тартибли эгри чизиққа нисбатан поляраси шунга ўхшаш таърифланади (93- расм). Поляра тўғри чизиқдан иборат бўлиб, эгри чизиқ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j' = 0$$

тенглама билан берилса, поляра

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j' = 0$$

тенглама билан ифодаланади.

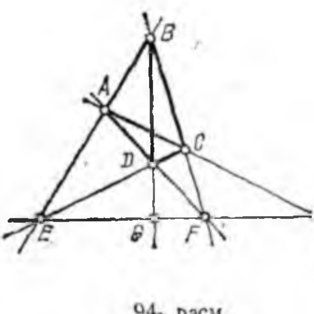


93- расм.

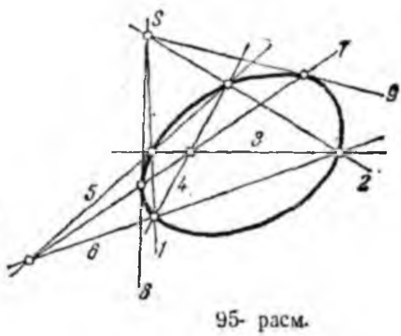
Машқлар

1. Агар C нуқта AB тўғри чизиқнинг чексиз узоқ нуқтаси билан бирга A ва B нуқталарни гармоник бўлиб юборса, бу C нуқта AB кесманинг ўртасидан иборат бўлиши исбот қилинсин.

2. *Тўлиқ тўртбурчак* деб учталаб битта тўғри чизиқда ётмаган тўртта нуқта ва уларни иккитадан туташтирувчи олти тўғри чизиқдан тузилган фигурага айтилади *(94- расм)*. G, H *дан* иборат бир жуфт нукта E, F нуқталардан тузилган жуфтни гармоник равишда бўлиб юбориши исбот қилинсин (1- машқдан ва ангармоник нисбатнинг проектив алмаштиришда инвариантлигидан фойдаланилсин).



94- расм.



95- расм.

3. Конус кесимига ихтиёрий S нуктадан уринмалар ўтказишнинг ушбу усули асослаб берилсин (95- расм). *1* ва *2* тўғри чизиқларни ихтиёрий қилиб ўтказамиз; қолган тўғри чизиқларни эса номерлари расмда кўрсатилган тартибда ўтказамиз.

4. Конус кесимига унинг берилган нуқтасида фақат чизғич ёрдамида қандай қилиб уринма ўтказиш мумкин?

5. Конус кесими ва тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқнинг конус кесимига нисбатан полюсини фақат чизғич ишлатиш йўли билан қандай ясаш керак?

6. k — конус кесими бўлсин. Ихтиёрий f тўғри чизиқни ва унда A нуқтани оламиз. A нуқтанинг k га нисбатан поляраси g ни ясаймиз. g поляра f ни B нуқтада кесади. B нуқтанинг h поляраси g ни C нуқтада кесади ва A нуқтадан ўтади. Шу тариқада томонлари қарама-қарши учларининг поляраларидан иборат ABC учбурчакни ясаймиз, у — *автополяр учбурчак* дейилади.

Агар автополяр учбурчак томонларини $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ тўғри чизиқлар сифатида қабул қилинса, конус кесими k тенгламасининг ушбу

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$$

кўринишни қабул қилиши исбот қилинсин.

7. Диаметрлар ва диаметрал текисликлар хоссаларини полюслар ва поляралар хоссаларидан келтириб чиқарилсин.

8. Конус кесими фокусининг поляраси директрисадан иборатлиги исбот қилинсин.

10- §. Тангенциал координаталар

Кенгайтирилган текисликда ҳам бир тўғри чизиққа учта u_1, u_2, u_3 сон нисбати $u_1 : u_2 : u_3$ ни мос келтириш мумкин, бу сонлар унинг бир жинсли координаталардаги тенгламаси

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \qquad (1)$$

нинг коэффициентларидан иборат. u_1, u_2, u_3 сонларни тўғри чизиқнинг *бир жинсли координаталари* деб атаймиз. Тўғри чизиқнинг бир жинсли координаталари бир қийматли аниқланган эмас, яъни u_1, u_2, u_3 тўғри чизиқнинг бир жинсли координаталари бўлса, $\rho \neq 0$ шартда ρu_1, ρu_2, ρu_3 ҳам шу тўғри чизиқнинг бир жинсли координаталари бўлади.

Энди

$$u_1 x_1^0 + u_2 x_2^0 + u_3 x_3^0 = 0 \qquad (2)$$

тенгламада u_1, u_2, u_3 ни ўзгарувчи ва x_1^0, x_2^0, x_3^0 — тайин сонлар деб фараз қилиб, унинг геометрик маъносини аниқлайлик.

(2) тенгламанинг ҳар бир u_1^0, u_2^0, u_3^0 ечимига x_1^0, x_2^0, x_3^0 нуқтадан ўтадиган

$$u_1^0 x_1 + u_2^0 x_2 + u_3^0 x_0 = 0$$

тўғри чизиқ мос келади. Аксинча, бу нуқтадан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқ координаталари (2) тенгламани қаноатлантиради. Шундай қилиб, (2) тенгламани маркази (x_1^0, x_2^0, x_3^0) нуқтадан иборат дастага қарашли тўғри чизиқлар координаталари ва фақат шулар қаноатлантиради. Шунга боғлаб (2) *тенгламани даста тенгламаси* деб атайдилар.

Фазо билан иш кўрилганда текисликнинг бир жинсли u_1, u_2, u_3, u_4 координаталари унинг бир жинсли (декарт) координаталарига нисбатан тенгламасидаги коэффициентлар сифатида киритилади.

Агар

$$u_1x_1^0 + u_2x_2^0 + u_3x_3^0 + u_4x_4^0 = 0$$

тенгламада x_i^0 лар белгили сонларни, u_i — лар эса ўзгарувчи ҳисобланса, бу тенглама текисликларнинг маркази (x_i^0) нуқтадаги боғламини ифода қилади.

Эгри чизиқнинг тангенциал тенгламаси деб шундай

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

тенгламага айтиладики, уни фақат эгри чизиқ уринмаларининг бир жинсли координаталари қаноатлантиради, холос. Айнимаган иккинчи тартибли эгри чизиқнинг тангенциал тенгламасини тузайлик.

VIII бобнинг 8- § да иккинчи тартибли эгри чизиқ уринмасининг декарт координаталаридаги тенгламаси ҳосил қилинган эди. Бир жинсли координаталарга ўтганда бу тенглама симметрик шаклга келтирилади:

$$x_1F_{x_1'} + x_2F_{x_2'} + x_3F_{x_3'} = 0,$$

бунда:

$$F_{x_1'} = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3',$$
$$F_{x_2'} = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3',$$
$$F_{x_3'} = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'.$$

Булардан (x_1', x_2', x_3') нуқтадаги уринманинг бир жинсли координаталари

$$u_1 = F_{x_1'}, \ u_2 = F_{x_2'}, \ u_3 = F_{x_3'}$$

дан иборат деган хулоса чиқади. Бу учта тенгламани x_1', x_2', x_3' га нисбатан ечиб, уларнинг u_1, u_2, u_3 га нисбатан чизиқли ифодаларини ҳосил қиламиз (система детерминанти нолдан фарқли, чунки айнимайдиган эгри чизиқ кўзда тутилган эди). Аммо (x'_i) нуқта эгри чизиқда ётади, шу сабабли унинг координаталари эгри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради. Эгри чизиқ тенгламасига u_i лар орқали ифодаланган x'_i ларни қўйиб, эгри чизиқнинг тангенциал тенгламасини ҳосил қиламиз. Равшанки, бу тенглама иккинчи даражали ҳамда u_i координаталарга нисбатан бир жинсли бўлади:

$$2\Phi(u_1,\ u_2,\ u_3) = b_{11}u_1^2 + 2b_{12}u_1u_2 + \ldots + b_{33}u_3^2 = 0. \quad (3)$$

Ана шу муносабат билан иккинчи тартибли эгри чизиқ *иккинчи синфли эгри чизиқ* бўлади, деб гапирилади.

Координаталари ихтиёрий кўринишли (3) *тенгламани қаноатлантирувчи тўғри чизиқлар тўплами геометрик жиҳатдан нимани* ифода қилишини аниқлаб олайлик. Бу геометрик образнинг бирор айнимаган иккинчи тартибли эгри чизиқ уринмалари тўпламидан иборатлигини ҳозиргина кўрсатган эдик. Бироқ бу тўплам бор имкониятларнинг ҳаммасини қамраб олмайди. Масалан,

$$(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3)(\beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3) = 0$$

тенглама тўғри чизиқларнинг (α_i) ва (β_i) марказли иккита дастасини ифода қилади.

Иккинчи тартибли ҳар қандай эгри чизиқнинг

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j = 0$$

проектив алмаштириш натижасида ушбу

$$\varepsilon_1x_1^2 + \varepsilon_2x_2^2 + \varepsilon_3x_3^2 = 0$$

эгри чизиққа алмаштирилиши мумкин эканлиги 8- § да кўрсатилган эди, бу ерда ε_i сонлар $+1$, -1 ёки 0 га тенг. Бу эса аналитик жиҳатдан квадратик форма $\sum a_{ij}x_ix_j$ ни

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}x_j\right)^2$$

кўринишда тасвирланиши мумкинлигидан дарак беради, шу билан бирга бу ерда α_{ij} дан тузилган детерминант нолдан фарқли.

Агар барча $\varepsilon_i \neq 0$ бўлса, у ҳолда иккинчи

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}u_j\right)^2 = 0$$

тенглама тартибли айнимаган эгри чизиқ уринмаларини ифода қилади. Лекин ε_i коэффициентларнинг бири, масалан, ε_3 нолга тенг бўлса, у холда тенглама:

$$\varepsilon_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3)^2 + \varepsilon_2(\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3)^2 = 0$$

ни u_i га нисбатан чизикли бўлган иккита (ҳақиқий ёки мавхум) кўпайтувчининг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин:

$$(\beta_{11}u_1 + \beta_{12}u_2 + \beta_{13}u_3)(\beta_{21}u_1 + \beta_{22}u_2 + \beta_{23}u_3) = 0,$$

бу ҳолда эса тенглама тўғри чизиқларнинг иккита турли дастасини ифода қилади. ε_i коэффициентлардан иккитаси, масалан, ε_2 ва ε_3 нолга тенг бўлса, иккала даста битта даста:

$$(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3)^2 = 0$$

га айланади, яъни улар бирлашиб кетади.

Юқоридагига ўхшаш муҳокамаларни фазода иккинчи тартибли сиртларга нисбатан ҳам қўлланиш мумкин.

Иккинчи тартибли айнимаган сиртнинг тангенциал тенгламаси ушбу

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}u_i u_j = 0$$

кўринишга эга.

Бир жинсли координаталари

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}u_i u_j = 0$$

тенгламани қаноатлантирадиган текисликлар тўплами ё иккинчи тартибли айнимаган сиртнинг уринмаларидан, ёки бирор конус кесими уринмалари орқали ўтувчи текисликларнинг хусусий ҳолда бирлашиб кетадиган иккита боғламидан иборат бўлади.

Ниҳоят *коррелятив алмаштириш* деб номланган тушунчанинг муҳокамасига тўхтайлик. Кенгайтирилган текисликда бу алмаштириш қуйидагича таърифланади: *алмаштириш* нуқталардан тузилган F фигурани шундай F' фигурага ўтказадики, F' фигурага қарашли тўғри чизиқ координаталари F га қарашли мос нуқта координаталари билан ушбу формулалар бўйича боғланган бўлади:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\
u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\
u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,
\end{aligned}
\qquad
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Бу алмаштириш $a_{ij} = a_{ji}$ ҳолда геометрик жиҳатдан содда изоҳланади: бундай алмаштириш (x_1, x_2, x_3) нуқтага унинг

$$\sum a_{ij}x_i x_j = 0$$

тенглама билан берилган иккинчи тартибли эгри чизиққа нисбатан полярасини мос келтиради.

Булардан коррелятив алмаштиришнинг асосий хоссаси келиб чиқади: тўғри чизиқда ётувчи нуқталар нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқларга алмашинади. Коррелятив алмаштиришнинг бу хоссаси умумий ҳолда ҳам ўринли $(a_{ij} \neq a_{ji})$.

Фазода коррелятив алмаштириш юқоридагига ўхшаш таърифланади. F фигуранинг ҳар бир A нуқтасига F фигуранинг шундай текислиги мос келтириладики, унинг координаталари A нуқтанинг координаталари орқали чизиқли ифодаланади. Фазода коррелятив алмаштиришни иккинчи тартибли сиртнинг полюслари билан поляралари орасидаги мослик сифатида ифодалаш, яъни тасаввур қилиш мумкин.

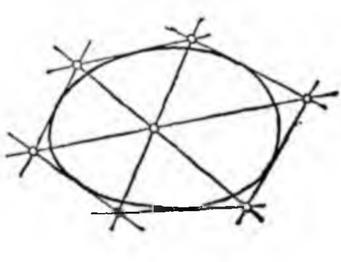
Машқлар

1. Дастага қарашли *тўртта тўғри чизиқнинг ангармоник нисбати* деб уларнинг даста марказидан ўтмаган ихтиёрий тўғри чизиқ билан кесишган тўртта нуқтасининг ангармоник нисбатига айтилади. Бу таърифнинг кесувчи тўғри чизиқнинг танлаб олинишига нисбатан инвариантлиги исбот қилинсин ва ангармоник нисбатнинг тўғри чизиқларнинг бир жинсли координаталари орқали ифодаси топилсин.

Хусусий ҳол тариқасида (u_i), (v_i), $(u_i + \lambda v_i)$, $(u_i + \mu v_i)$ дан иборат тўғри чизиқлар ангармоник нисбатининг $\frac{\lambda}{\mu}$ га тенглиги исбот қилинсин.

Коррелятив алмаштиришда F фигурага қарашли тўртта нуқта ангармоник нисбатининг F' фигурадаги мос тўғри чизиқлар (текисликлар) нинг ангармоник нисбатига тенглиги исбот қилинсин.

2. Паскаль теоремаси ёрдамида (III боб, 8- §, 9- машқ) *Брианшоннинг* ушбу *теоремаси* исбот қилинсин: конус кесимига ташқи чизилган олтибурчакнинг қарама-қарши учларини жуфт-жуфт туташтирувчи учта тўғри чизиқ битта нуқтада кесишади (96- расм).



96- расм.

МАШҚЛАРГА ДОИР ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР ВА ЕЧИМЛАР

I БОБ

1-§.

1. а) xy текисликнинг $|x|=a$ ни каноатлантирган нуқталари y ўқига параллел ва ундан a масофадаги тўғри чизиқларда ётади; б) $|x|=|y|$ ни қаноатлантирадиган нуқталар координат бурчакларнинг биссектрисаларида ётади.

2. а) $|x|<a$ ни қаоатлантирадиган нуқталар y ўқига параллел ва ундан a масофада узоқлашган иккита тўғри чизиқ орасидаги полосада ётади; б) $|x|<a$, $|y|<b$ ни каноатлантирадиган нуқталар маркази координаталар бошидан иборат бўлиб, томонлари эса $2a$, $2b$ га тенг ва x, y ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчак ичида ётади.

3. x ўқига нисбатан $A(x, y)$ нуқтага симметрик нукта координаталари x ва $-y$ бўлади; y ўқига нисбатан $A(x, y)$ нуқтага симметрик нуқта координаталари $-x$, y га тенг; координаталар бошига нисбатан $A(x, y)$ нуқтага симметрик нуқта координаталари $-x$, $-y$ га тенг.

4. Биринчи (иккинчи) координат бурчак биссектрисасига нисбатан $A(x, y)$ нуқтага симметрик нуқтанинг координаталари y ва x га (мос равишда $-y$ ва $-x$ га) тенг.

5. Агар x ўқи деб y ўқи ни, y ўқи деб x ўқи олинса, $A(x, y)$ нуқтанинг абсциссаси y га ва координатаси x га тенг бўлади.

6. Агар координаталар ўқларининг йўналишларини ўзгартмаган ҳолда координаталар бошларини $A(x_0, y_0)$ нуқтага силжитсак, $A(x, y)$ нисбатнинг абсциссаси $x-x_0$, ординатаси $y-y_0$ га тенг бўлади.

7. Агар координат ўқлари сифатида томони $2a$ га тенг квадрат диагоналлари қабул қилинса, квадрат томонларининг ўрталари $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ га тенг абсцисса ва ординаталарга эга бўлади. Ишораларни танлаб олиш — олинган томонга боғлиқ. Ишораларни танлаб олишда тўртта комбинация мавжуд бўлиб, улар тўртта томонга мос келади.

8. Нуқтанинг иккита бошқа нуқта орасида ётиши учун унинг абсциссаси (ёки ординатаси) шу икки нуқта абсциссаси (ёки ординатаси) орасида бўлиши керак.

2-§.

1. Изланган $(x, 0)$ нуқтанинг берилган икки нуқтагача олинган масофаларини тенглаштириб x ни топиш учун

$$(x_1-x)^2+(y_1-0)^2=(x_2-x)^2+(y_2-0)^2$$

тенгламани ҳосил қиламиз ёки

$$2(x_2-x_1)x=y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2.$$

Бундан x ни топамиз. Хусусий ҳолда эса $x=(b^2-a^2)/2b$ га эгамиз.

2. A ва B нуқталар орасидаги d масофани топамиз. Учбурчак нинг учинчи C учи унинг A, B учларидан d масофада туради. Натижада ҳосил қилинган иккита тенгламадан C учининг x, y координаталари топилади. Масаланинг иккита ечими мавжуд бўлиб, улар AB тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган иккита учбурчакка мос келади.

3. Квадратнинг A, B учлари координаталарини билган ҳолда унинг томони a ни A ва B нуқталар орасидаги масофа сифатида топамиз. Учинчи учи C эса B нуқтадан a масофада ва A нуқтадан $a\sqrt{2}$ (квадрат диагоналига тенг) масофада узоқлашади. Тўртинчи D учи эса A, C учлардан a масофада узоқлашган, лекин B дан фарқ қилади. Масала иккита ечимга эга.

4. Агар $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — тўғри бурчаги C даги тўғри бурчакли учбурчак учлари бўлса, шарт:

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

дан иборат. Бу шарт ABC учбурчак учун Пифагор теоремасининг координат шаклда ёзилишини билдиради.

5. Агар $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — учбурчак учлари бўлса, A бурчакнинг B бурчакдан катта бўлиш шарти

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2>(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$$

дан иборат. Бу шарт эса катта бурчак қаршисида катта томон, ва аксинча, катта томон қаршисида катта бурчак ётишлиги натижасидан келиб чиқади.

6. ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази O ни топгач, бу айлананинг R радиусини D уч ва марказ орасидаги масофа билан солиштириш керак. $OD=R$ ҳолда тўртбурчак айланага ички чизилган, $OD\neq R$ да эса ички чизилган эмас.

7. Бу тенглик — координаталари (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2) га тенг нуқталар учун «учбурчак тенгсизлиги» дир.

3-§.

1. Аниқлик учун (x_1, y_1) ва (x_3, y_3) — параллелограммнинг қарама-қарши учлари бўлсин. Бунда параллелограмм марказининг координаталари:

$$x_0=\frac{x_1+x_3}{2}, \quad y_0=\frac{y_1+y_3}{2}.$$

Тўртинчи учнинг x, y координаталари эса

$$x_0=\frac{x_2+x}{2}, \quad y_0=\frac{y_2+y}{2}$$

тенгламалардан топилади.

2. Агар ҳисобни учбурчак учидан олиб борилса, медианаларнинг кесишган нуқтаси ҳар бир медианани 2:1 га тенг нисбатда бўлади. Медианалар кесишган нуқтасининг координаталари:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

3. Учбурчак томонларининг ўрталари ва унинг исталган учи биргаликда параллелограмм учларини ташкил қилади. Шунинг учун масала 1- масалага келтирилади.

$$4.\quad x_i' = (1-\lambda)\,x_0 + \lambda\,x_i,\quad y_i' = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_i,\quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

5. Масалани ечиш учун кесмани берилган нисбатда бўлишга доир геометрик мулоҳазалардан фойдаланилсин (I боб, 3- §).

6. Фараз қилайлик, (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) — битта кесма охирлари ва (x_3, y_3), (x_4, y_4) — иккинчи кесма охирлари бўлсин. Агар кесмалар кесишса, уларнинг кесишган нуқтасининг координаталарини икки усулда ифодалаш мумкин:

$$(1-t)\,x_1 + tx_2 = (1-t')\,x_3 + t'x_4,$$
$$(1-t)\,y_1 + ty_2 = (1-t')\,y_3 + t'y_4.$$

Агар бу системанинг t, t' га нисбатан ечимлари $0 \leqslant t,\ t' \leqslant 1$ шартларни қаноатлантирса, кесмалар кесишади.

7. Математик индукция методидан фойдаланилсин.

4- §.

1. 1) $a = 0$ да айлана маркази ординаталар ўқида ётади; 2) $b = 0$ да айлана маркази абсциссалар ўқида ётади; 3) $c = 0$ да айлана координаталар бошидан ўтади; 4) $a = b = 0$ да айлана маркази координаталар бошида бўлади; 5) $a = 0$, $c = 0$ да айлана абсциссалар ўқига координаталар бошида уринади; 6) $b = 0$; $c = 0$ да айлана ординаталар ўқига координаталар бошида уринади.

2. $(x-a)^2 + (y-b)^2$ нинг (x, y) нуқтадан айлана марказигача бўлган масофага тенглигига эътибор бергач, бир катети айланага ўтказилган уринмага, иккинчи катети эса доира радиусига тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакка татбиқ қилинган Пифагор теоремасидан фойдаланилсин.

3. Ушбу мулоҳазадан фойдаланилсин: ташқи нуқталар учун даража уринма квадратига тенг бўлиб, ички нуқталар учун даража берилган нуқтадан ўтган ва марказни шу нуқта билан туташтирувчи диаметрга перпендикуляр ватар ярмининг минус билан олинган квадратига тенг.

4. (x, y) — геометрик ўрин нуқтаси бўлсин. Унинг F_1, F_2 нуқталаргача масофалари

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2},\quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

га тенг. Нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Бу тенгламани

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишига келтириш учун биринчи радикални тенгликнинг ўнг томонига ўтказамиз ва тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз. Натижада

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)_2 + y^2$$

ни ҳосил қиламиз. Ўнг томонда радикални қолдириб, қолган хадларни чап томонга ўтказамиз. Ўз-ўзидан равшан соддалаштиришлардан сўнг

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб ва содда алмаштиришлар натижасида

$$a^4 - a^2c^2 = a^2y^2 + (a^2 - c^2)\ x^2$$

ни ва бундан эса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{a^2 - c^2} = 1, \qquad a^2 - c^2 = b^2$$

ни ҳосил қиламиз.

5. Масала олдинги масала каби хал қилинади. Дастлабки тенглама:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

6. Геометрик ўрин тенгламаси:

$$\sqrt{(y-p)^2 + x^2} = y.$$

Квадратга кўтариш ва соддалаштиришдан сўнг тенглама

$$-2py + p^2 + x^2 = 0$$

кўринишни олади.

5- §.

1. Эгри чизиқнинг ноошкор шаклдаги тенгламаси:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Бундан a, b нинг марказ координаталарилиги ва R нинг радиуслиги кўриниб турибди.

2. Эгри чизиқ тенгламалари:

$$x = \frac{\lambda a}{\lambda + \mu}\cos t, \qquad y = \frac{\mu a}{\lambda + \mu}\sin t.$$

$\lambda = \mu$ да эгри чизиқ — айлана.

3. Эгри чизиқ тенгламалари

$$x = a\cos t + h\sin t, \qquad y = b\sin t + h\cos t,$$

бу ердаги a, b, h ва t параметр 14- расмда кўрсатилган қийматларга эга. Бу тенгламаларни ҳосил қилиш учун эгри чизиқдаги нуқтанинг абсцисса x ва ординатаси y ни синиқ чизиқ $OABC$ бўғинлари проекцияларининг узунликлари йиғиндиси сифатида ифодаланг.

4. Эгри чизиқ тенгламалари:

$$x = R\left(\frac{s}{R} - \sin\frac{s}{R}\right), \quad y = R\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right) \text{ (циклоида)}.$$

Масала олдинги масала каби ҳал қилинади. Бу ерда синиқ чизиқ $OTSA$ дан иборат.

5. $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0, \qquad t = \frac{y}{x}$

тенгламаларни x, y га нисбатан ечиб, эгри чизиқнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x = -\frac{d + et}{a + bt + ct^2}, \qquad y = -\frac{dt + et^2}{a + bt + ct^2}.$$

6-§.

1. Айлананинг x ўқи билан кесишган нуқталари

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \ y = 0$$

тенгламалар системасини ечиш натижасида ҳосил қилинади.

$x^2 + 2ax + c = 0$ тенглама илдизлари мавҳум бўлганда айлана x ўқини кесмайди. Бу тенглама ҳақиқий ва турли илдизларга эга бўлса, айлана x ўқни иккита нуқтада кесади. Илдизлар ўзаро тенг ҳолда айлана x ўқига уринади.

2. Радиуслари R_1, R_2, марказлари орасидаги масофа d бўлган айланалар $R_1 + R_2 > d$ ҳолда иккита нуқтада кесишади. R_1, R_2, d ни айланалар тенгламаларининг коэффициентлари орқали ифодалаш мумкин. Бу шартларни айланалар тенгламаларидан тузилган системани ечиб ҳам топиш мумкин.

3. Айланаларнинг кесишган нуқталари: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Эгри чизиқларнинг кесишган нуқтаси: $(1, 0)$.

5. Агар (x, y) нуқта эгри чизиқлар тенгламаларини қаноатлантирса, шу нуқтага координат ўқларга нисбатан симметрик бўлган $(-x, y)$ ва $(x, -y)$ нуқталар ҳам бу тенгламани қаноатлантиради. Шунинг учун кесишиш нуқталари координат ўқларга нисбатан симметрик жойлашган.

II боб

1-§.

1. Тенгламани эквивалент шаклда ёзиш мумкин:

$$(ax + by + c)\ (ax + by - c) = 0.$$

Бу тенгламани $ax + by + c = 0$, $ax + by - c = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари ва фақат шулар қаноатлантиради.

2. I боб, 6-§ га қаранг.

3. Тўғри чизиқлар бирор (x, y) нуқтада кесишади, деб фараз қилайлик. Бу ҳолда:

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \qquad Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Биринчи тенгликни A га, иккинчисини a га кўпайтириб, ҳадма-ҳад айирайлик. $Ac - Ca = 0$ га эга бўламиз. Бу тенглик $Ab - Ba = 0$ билан пропорцияни беради:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C},$$

бу пропорциядан эса иккала тенглама иккита турли тўғри чизиқни эмас, битта тўғри чизиқни ифодалайди деган хулоса келиб чиқади.

4. $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $\quad x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$

айланаларнинг радикал ўқи

$$(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + c_1 - c_2 = 0$$

тенглама билан ифодаланади. I боб, 4-§, 3-машққа қаранг.

5. Агар (x_1, y_1), (x_2, y_2) берилган нуқталар бўлса, геометрик ўриннинг тенгламаси:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(x-x_2)^2-(y-y_2)^2=a.$$

Бу тенглама x, y га нисбатан чизиқлидир.

6. $\underline{(x', y')}$ нуқта $\underline{(x, y)}$ нуқтадан ўтадиган нурда ётади ва $\sqrt{x'^2+y'^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=R^2$ шарт бажарилади.

7. $x^2+y^2+ax+by+c=0$ тенглама берилган айлана тенгламаси бўлсин. Буни x^2+y^2 га бўлайлик. Натижада:

$$1+\frac{ax}{x^2+y^2}+\frac{by}{x^2+y^2}+\frac{c}{x^2+y^2}=0.$$

Энди

$$x'=\frac{R^2x}{x^2+y^2}, \quad y'=\frac{R^2y}{x^2+y^2}, \quad x'^2+y'^2=\frac{R^4}{x^2+y^2}$$

ни эътиборга олсак, алмаштирилган эгри чизиқнинг тенгламасига эга бўламиз:

$$1+\frac{a}{R^2}x'+\frac{b}{R^2}y'+\frac{c}{R^4}(x'^2+y'^2)=0.$$

Умумий ҳолда бу айлана тенгламаси бўлади. $c=0$ да, яъни дастлабки айлана координаталар бошидан ўтган ҳолда тўғри чизиқ ҳосил қилинади.

8. $ax+by+c=0$ тенглама ушбу эквивалент шаклга эга:

$$2(x_0-x_0')x+2(y_0-y_0')y+(x_0'^2+y_0'^2-x_0^2-y_0^2)=0,$$

бунда x_0' ва y_0' сонлар A^* нуқта координаталари. Тенгламаларнинг эквивалентлигидан

$$\frac{2(x_0-x_0')}{a}=\frac{2(y_0-y_0')}{b}=\frac{x_0'^2+y_0'^2-x_0^2-y_0^2}{c}$$

пропорциялар ҳосил бўлади. Булардан x_0' ва y_0' топилади.

9. Детерминантнинг нолга тенглиги ушбу

$$\left.\begin{aligned} ax_1+by_1+c=0,\\ ax_2+by_2+c=0,\\ ax_3+by_3+c=0 \end{aligned}\right\}$$

системанинг a, b, c га нисбатан нотривиал ечимининг мавжудлигига гарантия беради (a ва b бир вақтда нолга тенг бўла олмайди). Берилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$ax+by+c=0.$$

2-§.

1. Тўғри чизиқ $\frac{c}{a}<0$ да мусбат ярим ўқ x ни ва $\frac{c}{a}>0$ да манфий ярим ўқ x ни кесиб ўтади.

2. Агар ba, $c \geqslant 0$ ёки a, b, $c \leqslant 0$ бўлса, тўғри чизиқ биринчи координат бурчакни кесиб ўтмайди.

3. Агар (x, y) нуқта биринчи тенгламани қаноатлантирса, x ўқига нисбатан унга симметрик бўлган $(x, -y)$ нуқта иккинчи тенгламани қаноатлантиради.

4. Агар (x, y) нуқта биринчи тенгламани қаноатлантирса, координаталар бошига нисбатан унга симметрик $(-x, -y)$ нуқта иккинчи тенгламани қаноатлантиради.

5. λ сон $a + \lambda a_1 = 0$ шартни қаноатлантирган ҳолда тўғри чизиқ x ўқига параллел. $c + \lambda c_1 = 0$ да эса тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади.

6. $|a| = |b|$ шарт бажарилганда тўғри чизиқ координат ўқлар билан биргаликда тенг ёнли учбурчакни чегаралаб туради.

7. $\left|\frac{c}{a}\right|$ ва $\left|\frac{c}{b}\right|$ лар тўғри бурчакли учбурчак катетларидир.

8. Уринмалар $x - \lambda = 0$ (мос равишда $y - \lambda = 0$) кўринишли тенгламалар билан ифода қилинади. λ сон эса $\lambda^2 + y^2 + 2a\lambda + 2by = 0$ (мос равишда $x^2 + \lambda^2 + 2ax + 2b\lambda = 0$) тенгламадан аниқланади (ягона ечим мавжудлик шартида).

3- §.

1. II боб, 3- § даги (1) формуладан фойдаланилсин.

2. Тўғри чизиқ x ўқи билан $\frac{\pi}{2} - \alpha$ га тенг бурчак ташкил қилади.

3. Агар учбурчакнинг томони x ўқида, баландлиги эса мусбат ярим ўқи y да бўлса, у ҳолда томонларнинг тенгламалари:

$$y = 0,\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + x\sqrt{3},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$$

бўлади.

4. Учбурчак тенг ёнли бўлиб, биринчи координат бурчак биссектрисага нисбатан симметрик жойлашгандир.

5. Тўғри чизиқларнинг x ўқи билан ташкил қилган бурчакларини солиштиринг. Изланган шарт: $\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$.

6. Тўғри чизиқнинг $(x - b)c - (y - d)a = 0$ кўринишли тенгламасига ўтилсин.

7. Тўғри чизиқларнинг ноошкор шаклдаги тенгламаларига ўтилсин.

8. Тўртбурчак учлари $\left(\pm\frac{c}{a}, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{c}{a}\right)$ нуқталардан иборат.

4- §.

1. Тўғри чизиқлар ушбу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1, \qquad |a| = |b|,\ |c| = |d|$$

кўринишдаги тенгламалар билан ифода қилинади. Бу тўғри чизиқлар учун ё $ad - bc = 0$ ёки $ac + bd = 0$.

2. Тўғри чизиқларнинг ноошкор шаклдаги тенгламаларига ўтилсин. Параллеллик шарти: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$. Перпендикулярлик шарти $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$.

3. Тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти: $a\alpha + b\gamma = 0$. Перпендикулярлик шарти: $a\gamma - b\alpha = 0$.

4. Параллеллик ҳоли қаралганда λ параметр $(a_1 + a_2\lambda) b - (b_1 + b_2\lambda) a = 0$ шартдан аниқланади. Перпендикулярлик ҳолида $(a_1 + a_2\lambda) a + (b_1 + b_2\lambda) b = 0$ шартдан аниқланади.

5- §.

1. Берилган нуқта ва учлардан исталганининг координаталарини шу нуқта қаршисидаги томон тенгламасининг чап томонига қўйганда бир хил ишорали миқдорлар хосил қилиниши керак. Агар учлардан атиги биттаси учун ҳам бу ифода (миқдор) лар турли ишорали бўлиб чиқса — нуқта учбурчак ташқарисида бўлади.

2. Айниятга эгамиз:

$$\left|\frac{ax + by + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ax + by + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Агар $A\ (x,\ y)$ — тўғри чизиқларнинг биридаги нуқта бўлса, у ҳолда айниятнинг чап томони бу нуқтанинг иккинчи тўғри чизиққача масофасига тенгдир, яъни бу тўғри чизиқлар орасидаги масофадан иборатдир.

3. Изланган тўғри чизиқлар

$$ax + by + c' = 0$$

кўринишли тенгламалар билан ифода қилинади; бу ердаги c' сон $|c - c'| = \delta\sqrt{a^2 + b^2}$ тенгликдан аниқланади. Олдинги масалага қаранг.

4. $(ax + by + c) \pm (a_1x + b_1y + c) = 0$ тенглама $(x,\ y)$ нуқтанинг берилган тўғри чизиқларгача масофаларининг тенглигини ифода қилади.

5. Агар дастлабки тўғри чизиқлар нормал шаклдаги тенгламалари

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

билан берилган бўлса, у ҳолда геометрик ўриннинг тенгламаси

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,\lambda \pm (a_2x + b_2y + c_2)\,\mu = 0$$

бўлади. Бу тенглама чизиқли, шунинг учун нуқталарнинг геометрик ўрни тўғри чизиқдир.

6- §.

1. II боб, 4- § даги 4- масалага қаранг.

2. $ax_1 + by_1 + c = -(ax_2 + by_2 + c)$, $a(y_2 - y_1) - b(x_2 - x_1) = 0$. Бу шартларнинг биринчиси нуқталарнинг тўғри чизиқдан турли томондалигини ва ундан баравар узоқлашганлигини билдиради. Иккинчи шарт нуқталарнинг берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда ётишини ифода қилади.

3. Тўғри чизиқ

$$(x - x_0) - \lambda(y - y_0) = 0$$

кўринишли тенглама билан ифодаланади. λ параметр эса

$$(x_1 - x_0) - \lambda(y_1 - y_0) = \pm\{(x_2 - x_0) - \gamma(y_2 - y_0)\}$$

шартдан аниқланади. Ишоранинг танланиши нуқталарнинг тўғри чизиққа нисбатан бир томонда ёки турли томонда жойланишига боғлиқ.

4. Детерминантнинг биринчи сатрини қолган икки сатрдан айириб детерминантни очсак,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\ (y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)\ (x_3 - x_1)$$

ни ҳосил қиламиз. Ўнг томоннинг нолга тенглиги (x_2, y_2) нуқтанинг (x_1, y_1), (x_3, y_3) нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ:

$$(x - x_1)\ (y_3 - y_1) - (y - y_1)\ (x_3 - x_1) = 0$$

да ётганлигини билдиради.

7- §.

1. $x' = \pm \dfrac{ax + by + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\qquad y = \pm \dfrac{-bx + ay + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ишоралар x', y' ўқларнинг йўналишига қараб танланади.

2. $x' = \pm \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}$, $\qquad y' = \pm \dfrac{x - y}{\sqrt{2}}$.

Эгри чизиқнинг янги координаталардаги тенгламаси:

$$2x'y' = a^2.$$

3. (x_0, y_0) нуқта янги системада яна ўша (x_0, y_0) координаталарга эга. Бинобарин, x_0, y_0 сонлар тенгламалар системаси

$$x_0 = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1, \quad y_0 = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2$$

ни ечиш натижасида ҳосил қилинади.

III боб

1- §.

1. Айлана тенгламасини декарт координаталарида ёзиб $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ ёрдамида қутб координаталарига ўтиш керак. Қутб координаталарда берилган айлана марказининг координаталари билан радиусини аниқлаш учун декарт координаталарига ўтиш керак. Натижада

$$x^2 + y^2 + 2a\,(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + b = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Марказ координаталари $x = -a \cos \alpha$, $y = a \sin \alpha$ радиус: $R = \sqrt{a^2 - b}$. Марказнинг қутб координаталарга нисбатан координаталари: $\rho = a$, $\theta = \pi - \alpha$.

2. $A\,(\rho_1, \theta_1)$ ва $B\,(\rho_2, \theta_2)$ нуқталар орасидаги масофани OAB учбурчакка косинуслар теоремасини татбиқ қилиб топиш мумкин. Натижада

$$|AB|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\,\rho_2 \cos (\theta_2 - \theta_1)$$

ни ҳосил қиламиз.

3. ρ_0 — қутбнинг тўғри чизиққача бўлган масофаси, α — қутбдан тўғри чизиққа туташтирилган перпендикулярнинг қутб ўқи билан ташкил қилган бурчаги.

4. Кардиоданинг қутб системасидаги тенгламаси:

$$\rho = R\,(1 - \cos \theta).$$

5. Бернулли лемнискатасининг тенгламаси:

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

бунда a — фокуслар орасидаги масофанинг ярми.

2- §.

1. Эгри чизиқ тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\rho = \frac{\lambda p}{1+\lambda\cos\theta'},$$

бу ерда

$$\lambda = \sqrt{a^2+b^2}, \quad p = c/\sqrt{c^2+b^2}, \ \theta' = \theta + \alpha.$$

Қутб ўқини α бурчакка бурганда эгри чизиқ тенгламаси шу шаклни олади. Бу тенгламадан эгри чизиқнинг конус кесими эканлиги кўриниб турибди.

2. Қутб ўқининг вазияти тўғрисида ҳеч нарса дейилмагани сабабли эллипснинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\rho = \frac{\lambda p}{1+\lambda\cos(\theta+\alpha)}.$$

Бу тенгламага эллипснинг берилган учта нуқтасининг координаталарини қўйиб, номаълум α, λ, p учун тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

3. Бевосита текшириб кўрилади.

4. Парабола тенгламаси:

$$\rho = \frac{e}{1-\cos\theta}.$$

Қутб системасининг қутбига нисбатан инверсияси ушбу

$$\theta' = \theta, \ \rho' = \frac{R^2}{\rho}$$

формулалар билан ифодаланади. Параболани бундай алмаштириш натижасида тенгламаси

$$\rho' = (R^2/e)\ (1-\cos\theta')$$

бўлган эгри чизиқ ҳосил қилинади. Бу эса кардиода.

3- §.

1. Эгри чизиқнинг конус кесими бўлиши унинг таърифидан келиб чиқади, чунки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ ифода эгри чизиқдаги (x, y) нуқтанинг x_0, y_0 фокусгача масофасини билдиради, $ax+by+c$ эса (x, y) нуқтанинг директрисагача масофасига пропорционал. Эгри чизиқ $\frac{k}{a^2+b^2} \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 1$ нинг қийматига қараб ё эллипс, ё парабол гиперболадан иборат.

2. Конус кесими нуқтасининг фокусгача масофаси у трисагача масофасига пропорционал. Нуқтанинг директри фаси эса тўғри чизиққача масофани билдиргани учун ну динаталари орқали чизиқли ифода қилинади.

3. Конус кесимининг тўғри чизиқ билан кесишиш масаласи квадрат тенгламани ечиш масаласига келтиради, бу тенглама эса иккитадан ортиқ илдизга эга эмас.

4. I боб, 4- §, 4- машққа қаранг.

5. I боб, 4- §, 5- машққа қаранг.

6. $A(x, y)$ — геометрик ўрин нуқтаси бўлсин. Унинг берилган айланалар марказларигача бўлган масофалари $(|R \pm R_1|, |R \pm R_2|$ га тенг; бунда R_1, R_2 — берилган айланаларнинг радиуслари, R — уларга уринувчи айлана радиуси, «+», «—» ишоралар уринишнинг ички ёки ташқи бўлишига боғлиқ. Исталган ҳолда ҳам масофаларнинг ё йиғиндиси ёки айирмаси ўзгармасдир. Нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс, гипербола ёки тўғри чизиқдан иборат. Айланаларнинг бири тўғри чизиққа айланса — нуқталарнинг геометрик ўрни парабола бўлади.

4- §.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс тенгламаси бўлсин (a — катта ярим ўқ). xy текисликни x ўқи атрофида шундай α бурчакка бурамиз: $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. Бундай ҳолда бу текисликдаги $x'^2+y'^2=a^2$ айлана берилган эллипсга ортогонал проекцияланади.

2. Гипербола тенгламасини бу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ — гипербола асимптоталарининг тенгламаларидир. Гиперболадаги (x, y) нуқта учун гипербола тенгламасининг чап томонидаги кўпаювчилар бу нуқтанинг асимптоталаргача бўлган масофаларига пропорционалдир.

3. Олдинги масалага қаранг.

4. AC ва CD кесмаларни n та тенг қисмга бўламиз. A_m ва C_m — номери m бўлган нуқталар бўлсин. x ўқи деб AB тўғри чизиқни, AB кесма ўртасини эса координаталар боши деб қабул қилиб: A_mB ва C_mA тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасининг x, y координаталарини топамиз. $\frac{m}{n}$ дан иборат параметрни йўқ қилиб, (x, y) нуқталарнинг эллипс тенгламасини қаноатлантириши исбот қилинсин.

5. Олдинги масалага берилган кўрсатмалардан фойдаланилсин.

5- §.

1. Гипербола асимптоталарининг тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Уринма тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Уринманинг асимптоталар билан кесишиш нуқталарини топайлик. y ни йўқ қилиб, x учун квадрат тенглама ҳосил қиламиз:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{y_0^2a^4}\right)+2\frac{b^2}{y_0^2}\cdot\frac{x_0}{a^2}x-\frac{b^2}{y_0^2}=0$$

ёки

$$\frac{1}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{y_0^2a^4}=-\frac{b^2}{y_0^2a^2}$$

ни эътиборга олиб

$$x^2-2x_0x+a^2=0$$

ни хосил қиламиз.

Бундан кўриниб турибдики, уринманинг асимптоталар билан кесишиш нуқталари абсциссаларининг кўпайтмаси a^2 га тенг $x_1x_2=a^2$ ва учбурчак юзи:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{x_2}{\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha,$$

бунда α — асимптоталарнинг x ўқи билан ташкил қилган бурчаги.

2. Тенгламалардан y ни йўқотиб, x учун квадрат тенглама ҳосил қиламиз. Уриниш шарти тенглама каррали илдизга эга деган гап, яъни тенглама дискриминанти нолга тенг, демак, тенглама дискриминанти λ га нисбатан квадрат учҳаддир. Уринмаларнинг (x_0, y_0) нуқтада тўғри бурчак остида кесишишлиги учун $\lambda_2\lambda_1=-1$ бўлиши керак. Шу сабабли λ учун ёзилган келтирилган тенгламадаги озод ҳадни -1 га тенглаштириб, изланган геометрик ўрин тенгламасини ҳосил қиламиз. Бу геометрик ўрин айланадан иборат бўлиб чиқади.

3. Олдинги масалани ечгандаги мулоҳазалар қўлланилсин.

4. Эллипсга ўтказилган бир жуфт уринма тенгламаси:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}\right)-\left(\frac{-\beta x}{a^2}+\frac{\alpha y}{b^2}\right)^2=0.$$

5. Уринмаларнинг асимптоталар билан кесишиш нуқталарини туташтирувчи кесма ўртасининг абсциссаси x_0 га тенг. Ҳақиқатан ҳам, кесишиш нуқталарининг абсциссалари ушбу

$$x^2-2x_0x+a^2=0$$

тенглама илдизларидан иборат. Бундан $(x_1+x_2)/2=x_0$ (шу параграфдаги 1-масала ечимига қаранг).

6-§.

1. Фокус координаталари геометрик ясашларга мувофиқ топилсин. Сўнгра $c=\sqrt{a^2-b^2}$ бўлишига ишонч ҳосил қилинсин.

2. Исботи эллипснинг оптик хоссасининг исботига ўхшаш.

3. Парабола тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$(x-c)^2+y^2=(ax+b)^2,$$

бунда c — фокус координатаси, $ax+b=0$ — директриса тенгламаси. Бу тенгламани каноник тенглама $y^2-2px=0$ билан айнан бир деб ҳисоблаб, c, a, b ни топамиз.

4. Олдинги масала ечилишига қаранг.

5. Фокуслар координаталари топилсин ва уларнинг λ га боғлиқ эмаслигига ишонч ҳосил қилинсин.

6. λ га нисбатан тенглама:

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda}=1$$

бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар қандай x_0, y_0 учун иккита ҳақиқий λ_1, λ_2 илдизга эга: $-a^2<\lambda_1<-b^2<\lambda_2$. Уларга (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган эллипс ва гипербола мос келади.

7. Қуйидагиларга эгамиз:

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda_1}=1, \quad \frac{x_0^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda_2}=1.$$

Бу тенгликларни хадма-ҳад айириб

$$\frac{x_0^2}{(a^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)}+\frac{y_0^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}=0$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу эса уринмалар

$$\frac{xx_0}{a^2+\lambda_1}+\frac{yy_0}{b^2+\lambda_1}=1, \quad \frac{xx_0}{a^2+\lambda_2}+\frac{yy_0}{b^2+\lambda_2}=1$$

нинг перпендикулярлик шартидир.

7- §.

1. Эллипснинг уриниш нуқтасидан ўтган диаметрининг бурчак коэффициенти

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}.$$

2. (x_0, y_0) нуқтадан ўтказилган диаметр йўналиши ватар йўналишига қўшмадир.

3. I боб, 5- § га қаранг. Қўшма йўналишлар t нинг бир- биридан $\frac{\pi}{2}$ га фарқ қиладиган қийматларига мос келади.

4. Параллел тўғри чизиқлар дастаси ёрдамида проекциялашда параллел тўғри чизиқлар яна параллел тўғри чизиқларга алмашинади ва кесма ўртаси яна кесма ўртасига алмашинади. Доиранинг қўшма диаметрлари ўзаро перпендикуляр. Проекциялашда фигуранинг S юзи ва унинг $\overline{S}$ проекцияси орасида $\overline{S}=S\cos\alpha$ дан иборат боғланиш бор, бу ерда α — фигурани ўз ичига олган текислик билан проекция ётган текислик орасидаги бурчак.

5. 4- машқда берилган кўрсатмага қаранг.

6. 4- машқда берилган кўрсатмага қаранг.

7. Эллипсни айлана проекцияси деб қаралсин.

8. 4- машқда берилган кўрсатмадан фойдаланилсин. Эллипсга шундай ички учбурчак чизиш мумкинки, унинг ҳар бир учидаги уринма қарама- қарши томонга параллел бўлади. Бу ерда учларнинг бирини ихтиёрий қилиб олиш мумкин.

8- §.

1. Тенгламанинг чап томонини чизиқли кўпаювчилар кўпайтмасига ёйилсин.

2. Эгри чизиқ ушбу иккита

$$|ax + by + c| \leq \sqrt{k}$$
$$|\alpha x + \beta y + \gamma \leq \sqrt{k}$$

полосанинг кесишмасидан ҳосил топган параллелограмм ичида жойлашади.

3. $ax + by + c = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ тўғри чизиқлардан ташкил топган бурчакларнинг биссектрисалари янги ўқлар сифатида қабул қилинсин.

4. Масала тенгламанинг чап томонини чизиқли иккита кўпайтувчига ажратиш йўли билан олдинги масалага келтирилади.

5. I боб, 6- § га қаранг.

6. Иккинчи тартибли

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

эгри чизиқни қуйидагича параметрлаштириш мумкин:

$$x = -\frac{d + et}{a + bt + ct^2}, \qquad y = -\frac{dt + et^2}{a + bt + ct^2}$$ (I боб, 5- §, 5- машқ). Бундан сўнг I боб, 6- § га қаранг.

7. I боб, 6- § га қаранг.

8. A_i нуқталар учун тенгламанинг чап томонидаги иккала қўшилувчи ҳам нолга айланади. γ эгри чизиқда $\alpha_{34}\ \alpha_{26}\ \alpha_{15} \neq 0$ шарт бажарниладиган қилиб ихтиёрий A_0 нуқтани олиш керак. λ қуйидагича олинсин:

$$\lambda = \frac{\alpha_{24}\ \alpha_{16}\ \alpha_{35}}{\alpha_{34}\ \alpha_{26}\ \alpha_{15}}\Bigg|_{A_0}.$$

9. 8- машқдан фойдаланилсин.

IV боб

1- §.

1. Ҳамма векторларни $\frac{2\pi}{n}$ бурчакка буришда уларнинг йиғиндиси ҳам шу бурчакка бурилади. Аммо олинган векторлар системаси натижада ўз-ўзига алмашинади. Шунинг учун йиғинди нолга тенгдир.

2. Медианаларнинг кесишган O_0 нуқтаси учун:

$$\overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{O_0B} + \overrightarrow{O_0C} = 0,$$

исталган бошқа O нуқта учун бу йиғинди $3\overrightarrow{OO_0}$ га тенг.

3. Тенглик элементар геометриянинг маълум теоремасини ифода қилади: параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

4. Бевосита текшириб кўрилсин.

5. α текислик нуқтасидан чиқиб, шу текисликка нисбатан жойлашган битта ярим фазога йўналган векторлар йиғиндиси, яна шу ярим фазога йўналган вектордир.

6. Умумий боши (0,0) нуқтада ва охирлари x $(m\delta, n\delta)$ нуқтада бўлган векторларнинг r_{mn} системаси (0,0) нуқтага нисбатан симметрик жойлашади.

7. Координаталар боши учун векторлар йиғиндиси векторлар системасининг симметрияси туфайли нолга тенг. Исталган бошқа O' нуқта учун бу йиғинди $n\,\overrightarrow{O'O}$ га тенг, бунда n — векторлар сони.

2- §.

1. Агар r_1 ва r_2 нолдан фарқли ва нопараллел векторлар бўлса, $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ йиғинди фақат $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ да нолга тенг бўлади.

2. векторлардан бирини қолган иккитасининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш керак.

3. Бир томони r вектор ёрдамида тасвирланиб, қолган икки томони эса r_1, r_2 векторларга параллел бўлган учбурчак ясалсин.

3- §.

1. Векторли тенгликни $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторга ва унга перпендикуляр векторга скаляр кўпайтирилсин.

2. $\lambda^2 a^2 + 2\lambda\mu\,(a\ b) + \mu^2 b^2 = (\lambda a + \mu b)^2$.

3. Битта текисликка параллел исталган учта вектор чизиқли боғлиқ бўлади, яъни бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай λ_1, λ_2, λ_3 сонлар мавжудки, бунда

$$\lambda_1\, r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0$$

(2- §, 3- машққа қаранг) тенглик бажарилади. Бу тенгликни r_1, r_2, r_3 га скаляр кўпайтириб, ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 (r_1 r_1) + \lambda_2 (r_1 r_2) + \lambda_3 (r_1 r_3) &= 0 \\ \lambda_1 (r_2 r_1) + \lambda_2 (r_2 r_2) + \lambda_3 (r_2 r_3) &= 0, \\ \lambda_1 (r_3 r_1) + \lambda_2 (r_3 r_2) + \lambda_3 (r_3 r_3) &= . \end{aligned}\right\}$$

λ_1, λ_2, λ_3, га нисбатан тенгламаларнинг бу системаси нотривиал ечимга эга. Шунинг учун система детерминанти нолга тенг.

4. 3- машққа доир кўрсатмага қаранг.

5. 3- машққа доир кўрсатмага қаранг.

6. 5- машққа қаранг.

4- §.

1. $a \times b$ ва c векторлар параллел.

2. $(a \times b) \times c$ ва $b\,(a\,c)$ векторларнинг абсолют қийматлари тенг ва улар параллел.

3. a векторни бири c га параллел, иккинчиси унга перпендикуляр бўлган икки вектор йиғиндиси шаклида ифодалансин.

4. Олдинги учта машқ натижаларидан фойдалансин.

5. Агар a, b, c учта вектор бўлиб, уларнинг бошланиш нуқтаси пирамида учидан, охирлари эса унинг асоси учларидан иборат бўлса, у ҳолда:

$$S = \frac{1}{2}\,|(a - b) \times (a - c)|.$$

5- §.

1. $(a\times b)\times c = b(ac) - a(bc)$. 4- §, 4- машққа қаранг.

2. a, b, c векторлар сифатида боши сфера марказида, охирлари эса сферик учбурчак учларидаги векторлар олинсин.

3. 4- §, 4- машқдаги формуладан фойдаланилсин.

4. Ушбу айниятдан фойдаланилсин:

$$(a\times b)\times(c\times d)\times(c\times d)\times(a\times b) = 0.$$

5. r векторни $r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бу тенгликни $e_1\times e_2$, $e_2\times e_3$, $e_2\times e_1$ векторларга скаляр кўпайтириб, λ_1, λ_2, λ_3 топилсин.

6. 5- машққа қаранг.

7. $e_1\times e_2$, $e_2\times e_3$, $e_3\times e_1$ векторлар чизиқли эркли, r векторни ушбу кўринишда тасвирлансин:

$$r = \lambda_1(e_2\times e_3) + \lambda_2(e_3\times e_1) + \lambda_3(e_1\times e_2).$$

Бу тенгликни e_1, e_2, e_3 га скаляр кўпайтириб, λ_1, λ_2, λ_3 топилсин

8. Ечиш ушбу кўринишда тасвирланган:

$$x = \lambda_1(b\times c) + \lambda_2(c\times a) + \lambda_3(a\times b).$$

Бу тенгликни a, b, c га скаляр кўпайтириб, λ_1, λ_2, λ_3 топилсин.

6 - §.

1. 5- § даги 5- машққа қаранг.

2. 5- § даги 7- машққа қаранг.

4. 5- § нинг 3- машқидаги айниятдан фойдаланилсин.

5. 3- машқдаги айниятдан фойдаланилсин.

6. 4- ва 3- машқлардаги айниятлардан фойдаланилсин.

V боб

1- §.

1. а) нуқталар учун $x = 0$ бўлса, улар y ва z ўқлардан ўтувчи координат текисликда ётади. г) нуқталар учун $x = 0$ ва $y = 0$ бўлса, улар z ўқида ётади.

2. Саккизта нуқта.

3. Нуқталар $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ текисликлар билан чегараланган параллелепипед ичида жойлашади.

4. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ параллелепипед учларининг координаталари, бунда ε_1, ε_2, ε_3 сонлар 1 ёки 0 га тенг қийматларни қабул қилади.

5. Агар $A(x, y, z)$ нуқта $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриш натижасида $A'(x', y', z')$ нуқтага алмашинса, у ҳолда:

$$(\overrightarrow{OA}\cdot e)e + \overrightarrow{OA}\times e = \overrightarrow{OA'},\quad e = \overrightarrow{OA_0}/\,[\overrightarrow{OA_0}].$$

6. 5- машққа қаранг. Буриш бурчаги α ихтиёрий бўлган ҳолда:

$$(\overrightarrow{OA}\cdot e)e + \overrightarrow{OA}\cos\alpha + (\overrightarrow{OA}\times e)\sin\alpha = \overrightarrow{OA'}.$$

2- §.

1. $A(x, y, z)$ ва $A'(x', y', z')$ нуқталар орасидаги масофа квадрати:

$$(AA')^2 = \{(x-x')e_x + (y-y')e_y + (z-z')\, e_z\}^2 =$$
$$= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(x-x')\,(y-y') \cos\gamma +$$
$$+ 2(y-y')\,(z-z') \cos\alpha + 2\,(z-z')\,(x-x') \cos\beta.$$

2. Ташқи чизилган сфера маркази тетраэдр учларидан баравар узоқлашади.

3. Тетраэдрнинг исталган иккита қарама-қарши қирраларининг ўртасини туташтирувчи кесма ўрталарининг координаталари:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

4. Тўғри чизиқлар тетраэдрнинг оғирлик марказида кесишади.

5. Координаталари x, y, z дан иборат нуқта ва исталган A_i уч билан биргаликда тетраэдрнинг шу учга қарама-қарши бўлган ёғига нисбатан бир тарафда ётади.

6. Учбурчак учлари A_1, A_2, A_3 бўлса, у ҳолда:

$$S = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|.$$

7. Элементар алмаштиришлар натижасида қуйидаги детерминантларнинг бир-бирига алмашиниши исбот қилинсин:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_1 & 1 \\ x_3 & y_2 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. 7- машққа қаранг.

3- §.

1. Тенгламани эквивалент шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d;$$

бунда $-a$, $-b$, $-c$ — сонлар марказ координаталари, $(a_2 + b^2 + c^2 - d)^{\frac{1}{2}}$ — сфера радиуси.

2. Исталган нуқтанинг координаталари $f_1 = 0$ ва $f_2 = 0$ дан иборат тенгламаларни қаноатлантирса, улар

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

тенгламани ҳам қаноатлантиради.

3. Сирт z ўқига параллел ва айни вақтда xy текисликни эгри чизиқ $\varphi(x, y, z) = 0$ бўйича кесиб ўтадиган тўғри чизиқлардан тузилган.

4. Конус тенгламаси:

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2\alpha,$$

бунда α — конус ясовчисининг ўқ билан ташкил қилган бурчаги.

5. γ_1 ва γ_2 эгри чизиқларни пераметрик шаклдаги тенгламалар билан ифодалаш мумкин:

$$\gamma_1 : x = u, \ y = 0, \ z = au^2,$$
$$\gamma_2 : x = 0, \ y = v, \ z = bv^2.$$

Охирлари γ_1, γ_2 эгри чизиқларда бўлган кесма ўртасининг чизган сирти қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$x = \frac{u}{2}, \ y = \frac{v}{2}, \ z = \frac{au^2 + bv^2}{2}.$$

6. Эгри чизиқларни параметрик шаклдаги тенгламалар билан ифодалаш мумкин:

$$\gamma_1 : x = u, \ y = a, \ z = f(u);$$
$$\gamma_2 : x = u, \ y = b, \ z = \varphi(u).$$

Сирт тенгламаси:

$$x = u, \ y = (1 - v)\, a + vb, \ z = (1 - v)\, f(u) + v\varphi(u).$$

7. $\sqrt{x^2 + y^2}$ — сирт устидаги нуқтанинг z ўқигача бўлган масофаси.

8. Бу сирт ясовчилари x ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртдир. Бу сирт эгри чизиқ орқали ўтади, чунки сирт тенгламасини эквивалент шаклда ёзиш мумкин:

$$(f(x) - z) - (\varphi(y) - z) = 0.$$

Бундан $z = f(x)$ ва $z = \varphi(y)$ тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқта $f(x) - \varphi(y) = 0$ тенгламани ҳам қаноатлантириши кўриниб турибди.

4- §.

1.

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

2.

$$\cos\alpha = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}}, \ \cos\beta = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{33}a_{11}}}, \ \cos\gamma = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

2- § даги 1- машққа қаранг.

3. IV боб, 5- § даги 5- ва 7- машқларга қаранг.

VI боб

1- §.

1. Текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан $(x_1, \ y_1, z_1)$, $(x_2, \ y_2, z_2)$ нуқталаргача бўлган масофалар ўзаро тенг.

2.

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + d_1 &= 0, \\ ax + by + cz + d_2 &= 0 \qquad d_1 \neq d_2, \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системаси ечимга эга эмас, шунинг учун текисликлар кесишмайди.

3. Нуқталарнинг геометрик ўрни иккита текисликдан иборат:

$$ax + by + cz + d \pm (\alpha x + \beta y + \lambda z + \delta) = 0.$$

4.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,\ y,\ z) + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ f(x,\ y,\ z) + a_2 y + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right\}$$

тенгламалар системасининг ечими қуйидаги

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$

тенгламанинг ечими бўлади.

5. $k \neq \lambda d + \mu\delta$ шартда текисликларни ифодаловчи тенгламалар системаси биргаликда эмас.

6. 4- машққа қаранг.

7. II боб, 1- § даги 6- ва 7- машқларга қаранг.

8. Берилган икки текисликнинг кесишган тўғри чизиқдан ўтувчи текислик тенгламаси ушбу кўринишда ёзилади:

$$(ax + by + cz + d)(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta) -$$
$$- (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0,$$

бунда $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ кесишиш тўғри чизиғида ётмаган ихтиёрий нуқта.

9. V боб, 2- § даги 8- машққа қаранг.

2- §.

1. Текислик мусбат ярим ўқ x ни $\frac{d}{a} < 0$ шарт бажарилганда кесиб ўтади (текислик y, z ўқларини мос равишда $\frac{d}{b} < 0$, $\frac{d}{c} < 0$ шартларда кесиб ўтади).

2. Тетраэдр ҳажми: $V = \frac{1}{6}\left|\frac{d^3}{abc}\right|$.

3. Фазодаги нуқталарнинг

$$|x| + |y| + |z| < a$$

шартни бажарадиган тўплами ушбу:

$$\pm x \pm y \pm z < a$$

тенгсизликлар билан бериладиган ярим фазоларнинг кесишмаси (умумий қисми) дан иборат.

4. σ текисликка xy текисликка нисбатан симметрик бўлган текислик тенгламаси

$$ax + by - cz + d = 0$$

билан ифодаланади. σ текисликка координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган текислик тенгламаси

$$-ax - by - cz + d = 0$$

билан ифодаланади.

5. z ўқига параллел текислик тенгламаси таркибида z иштирок этмайди. Демак, λ параметр $c + \gamma\lambda = 0$ шартидан топилади.

6. λ ва μ параметрлар ушбу шартлардан аниқланади:

$$a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 = 0,\ \ b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 = 0.$$

3- §.

1. Текисликлар орасидаги масофа:

$$\delta = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

II боб, 5- § даги 2- машққа қаранг.
2.

$$\delta = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3. Агар текисликлар нормал кўринишдаги

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, нуқталарнинг геометрик ўрни

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \pm \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

тенглама билан ифода қилинади, демак, у иккита текисликдан иборат.

4. 1- машққа қаранг.

5. Текисликнинг нормал шаклдаги тенгламасига ўтилсин.

6. II боб, 5- § даги 1- машққа қаранг.

7. Агар текисликларнинг тенгламалари нормал шаклга келтирилган бўлса, у ҳолда:

$$\begin{aligned} \pm x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ \pm y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ \pm z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3. \end{aligned}$$

4- §.

1. (a, b, c) вектор текисликка перпендикуляр. Текисликнинг x ўқи билан ташкил қилган α бурчаги ушбу

$$\sin \alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

шартдан аниқланади.

2. Текисликнинг xy текислик билан ташкил қилган бурчаги ушбу

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

шартдан аниқланади.

3. 2- машққа қаранг.

4. Текислик x ва y ўқларни $|a| = |b|$ бўлганда тенг бурчаклар остида кесиб ўтади.

5. $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ тенглама билан берилган текислик (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтади. Текисликларнинг параллеллик шарти бажарилган.

6.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама билан ифодаланган текислик (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтади ва

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

векторга перпендикуляр.

7. λ ва μ параметрлар

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)\, a + (\lambda b_1 + \mu b_2)\, b + (\lambda c_1 + \mu c_2)\, c = 0$$

шартга бўйсунади.

8. Ҳар қандай n (a, b, c) векторлар учун текисликлар дастасидан нормали n бўлган текислик топиш мумкин. Бунинг учун λ_1, λ_2, λ_3 параметрларни ушбу

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{a} = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}{b} = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3}{c}$$

шартларни қаноатлантирадиган қилиб олиш керак.

5- §.

1. Тўғри чизиқ x ўқини (мос равишда y, z ўқларини) $\frac{y_0}{l} = \frac{z_0}{m}$ шарт бажарилганда кесади (мос равишда $\frac{x_0}{k} = \frac{z_0}{m}$, $\frac{x_0}{k} = \frac{y_0}{l}$ шартларда). Тўғри чизиқ xy текисликни $m = 0$ шарт бажарилганда кесиб ўтади ($k = 0$ шартда yz текисликни, $l = 0$ шартда zx текисликни).

2. Текисликлар тенгламаларини нормал шаклда олиб, нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

3. Учбурчакнинг иккита учидан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни текисликдир. Изланган геометрик ўрни икки текисликнинг кесишган чизиғидан иборат, яъни тўғри чизиқ бўлади.

4. $y = \lambda$, $z = a\lambda x$ тенгламалар билан ифодаланган тўғри чизиқ сирт устида ётади, чунки бу тўғри чизиқ нуқталари сирт тенгламасини қаноатлантиради. $x = \mu$, $z = a\mu y$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқ ҳам сирт устида ётади.

5. Детерминантнинг нолга тенглиги

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш шартидир. Бу система биргаликда, чунки тўғри чизиқлар кесишади.

6- §.

1. Детерминантнинг нолга айланиши

$$(x' - x'',\ y' - y'',\ z' - z''),\ (k',\ l',\ m'),\ (k'',\ l'',\ m'')$$

векторларнинг битта текисликка параллеллигини билдиради. Демак, тўғри чизиқлар ё параллел ёки кесишади.

2. Агар A', A'' — тўғри чизиқдаги нуқталар ва e', e'' — тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари бўлса, у ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги масофа:

$$\delta = \pm \frac{e' \times e''}{|e' \times e''|} \cdot \overrightarrow{A'A''} = \pm \frac{(e'e''\overrightarrow{A'A''})}{|e' \times e''|}.$$

3.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ушбу

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

координаталарга эга

4. 3- машққа қаранг.

5. Конус сиртининг тенгламаси:

$$\frac{[(x - x_0)\,a + (y - y_0)\,b + (z - z_0)\,c]^2}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$= [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]\ \sin^2 \alpha.$$

6. 3- машққа қаранг.

7. Фараз қилайлик, $A(x, y, z)$ — конус сиртнинг учидан фарқли нуқтаси бўлсин. A нуқтадан ўтувчи ясовчининг $ax + by + cz + d = 0$ текислик билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топамиз. Бу координаталарни сферанинг тенгламаси $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ га қўйиб, изланган конус сирт тенгламасини ҳосил қиламиз. Конус сиртнинг xy текислик билан кесишмаси айланадан иборат.

8. 7- машққа қаранг.

7- §.

1. Агар тўғри чизиқлар

$$\frac{x - x'}{k'} = \frac{y - y'}{l'} = \frac{z - z'}{m'},\qquad \frac{x - x''}{k''} = \frac{y - y''}{l''} = \frac{z - z''}{m''}$$

тенгламалар билан берилса, улардан баравар узоқлашган текислик координаталари

$$\frac{x' + x''}{2},\quad \frac{y' + y''}{2},\quad \frac{z' + z''}{2}$$

бўлган нуқтадан ўтади ва (k', l', m'), (k'', l'', m'') векторларга параллел бўлади.

2. Ушбу

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2}$$

тенглама билан берилган текислик ва тўғри чизиқда ётмайдиган (x_0, y_0, z_0) нуқта орқали ўтади.

3. $(x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0)\times(k, l, m)$ вектор изланган текисликка перпендикуляр бўлади.

4. Берилган икки тўғри чизиқни кесиб ўтаяиган тўғри чизиқни бири биринчи, иккинчиси эса иккинчи тўғри чизиқ орқали ўтадиган иккита текисликнинг кесишиш чизиғи деб қараш мумкин.

5. $\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ кўринишдаги тенглама билан берилган сирт координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлардан ташкил топган бўлади, чунки (x, y, z) билан бир қаторда исталган $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ нуқта ҳам тенгламани қаноатлантиради. Сирт $z = 1$ текислик билан $\varphi(x, y) = 0$ эгри чизиқ бўйича кесишади.

VII боб

2- §.

1. Сирт $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$ — эллиптик параболоид (гиперболик параболоид, параболик цилиндрдан иборат).

2. Тенгламанинг чап томонини чизиқли иккита кўпайтувчи кўпайтмасига ажралиб кетади.

3. Бу ерда ҳосил қилинадиган тенгламани текисликнинг сирт билан кесишган эгри чизиғи нуқталарининг координаталари қаноатлантиради.

4. 3- машққа қаранг.

5. Берилган нуқтани координаталар боши деб, эгри чизиқ ётган текисликни эса $z = \text{const}$ текислиги сифатида қабул қилиб конус сирт тенгламаси тузилсин. VI боб, 7-§ даги 5- машққа қаранг.

6. Сиртларнинг умумий нуқталарининг координаталари $f(x, y, z)\varphi(x_0, y_0, z_0) - \varphi(x, y, z)\, f(x_0, y_0, z_0) = 0$ тенгламани қаноатлантиради. (x_0, y_0, z_0) нуқта ҳам уни қаноатлантиради.

7. Сирт тенгламаси тўғри чизиқлар тенгламаларининг натижасидир. Тенглама улардан λ параметрни йўқотиш билан ҳосил қилинади.

8. Иккинчи тартибли сирт. 7- машққа қаранг.

9. $x^2 + y^2 = \left(\frac{z-b}{a}\right)^2 + \left(\frac{z-d}{c}\right)^2.$

3- §.

1. Фокуслар z ўқида бўлиб, координаталар бошидан $\sqrt{c^2 - a^2}$ га тенг масофада жойлашган.

2. Эллипсоиднинг текисликлар билан кесишиш чизиғи айни бир вақтда бу текисликларнинг $x^2 + y^2 + z^2 + \mu = 0$ сфера билан кесишган чизиғи бўлади.

3. Фазо нуқталари

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоид ичида жойлашади.

4. u, v параметрларни йўқотиб, сиртнинг ноошкор шаклдаги тенгламасига ўтилсин.

5. Сирт-эллипсоиддир. Сиртнинг чегаралангаилигидан фойдаланилсин.

4- §.

1. 3- § даги 2- машққа қаранг.
2. III боб, 6- § даги 5- машққа қаранг.

5- §.

1. Параболоид фокуси yz текислигидаги $z=\frac{y^2}{a^2}$ параболанинг фокуси билан устма-уст тушади.

2. Кесимнинг xy текисликка туширилган проекцияси қаралсин. 3- § даги 2- машққа қаранг.

6- §.

1. (λ, μ, ν) ва (x, y, z) векторларнинг α бурчак ташкил қилишидан фойдаланилсин.

2. Агар $\bar{A}$ нуқта A (x, y, z) нуқтанинг $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ тўғри чизиққа проекцияси бўлса, у ҳолда $(O\bar{A})^2+R^2=(OA)^2$. $|O\bar{A}|$ ни (λ, μ, ν), (x, y, z) векторларнинг скаляр кўпайтмаси орқали ҳисоблансин.

7- §.

1. Кесишиш чизиғининг xy текислигига туширилган проекцияси қаралсин. 2- § даги 3- машққа қаранг.
2. Биринчи оила: $x=\lambda$, $z=a\lambda y$. Иккинчи оила: $y=\mu$, $z=a\mu x$.
3. Гиперболик параболоид.

VIII боб

1- §.

1. Агар чизиқли кўпайтувчилар эркли бўлса, янги

$$x_1'=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4,$$
$$x_2'=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4,$$
$$x_3'=x_3, \qquad x_4'=x_4$$

ўзгарувчиларни киритиш керак. Алмашинган форма дискриминантининг нолга тенглиги равшан.

2. Чизиқли

$$\sum a_i x_i, \ \sum b_i x_i, \quad \sum c_i x_i. \quad \sum d_i x_i$$

формалар эркли бўлган ҳолда янги

$$x_1'=\sum a_i x_i, \quad x_2'=\sum b_i x_i, \quad x_3'=\sum c_i x_i, \quad x_4'=\sum d_i x_i$$

ўзгарувчиларни киритиш керак.

2- §.

1. $I_1 = a + c,\ I_2 = ac - b^2,\ I_3 = 0,\ \ I_4 = ac\gamma^2.$

2. $ax + by + cz = 0$ текисликни координат текислик сифатида қабул қилиб, янги координаталар киритилсин.

3- §.

1. Эгри чизиқнинг иккита тўғри чизиққа ажралиб кетиш шарти: $|a_{ij} + \lambda b_{ij}| = 0$. Эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталари учун эгри чизиқ тенгламасининг чап томонидаги иккала қўшилувчи ҳам нолга тенг.

2. λ параметрни шундай танлаб олинсинки, ушбу

$$a_0 y^2 + a_1 xy + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 + \lambda (y - x^2) = 0$$

тенглама чизиқли бўлган иккита кўпайтувчи кўпайтмасига ажралиб кетсин.

3. $$\alpha = \frac{I_1}{2\sqrt{-I_2}}, \qquad \beta = \frac{I_3}{2(\sqrt{-I_2})^3}.$$

4. $$\alpha = \sqrt{1 - \frac{4I_2}{I_1^2}}, \qquad \delta = \frac{2I_3}{I_1 I_2}.$$

4- §.

Координат текисликлар сифатида ушбу

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

текисликларнинг биссектриал текисликлари қабул қилинсин.

2. I_4 ни сиртларнинг каноник тенгламалари учун топилсин.

3. I_4 ва I_3 ни сиртларнинг каноник тенгламалари учун топилсин.

5- §.

1. Координаталар боши $F'_x = F'_y = 0$ тенгламаларни қаноатлантиради. Шунинг учун $a_{13} = a_{23} = 0$. Тенгламанинг озод ҳади a'_{33}, $I'_3 = I_3$ инвариантларни тенглаштириш натижасида топилади: $I_3 = I'_3$. $i, j \leqslant 2$ шартда a_{ij} коэффициентлар a'_{ij} га тенг бўлади.

2. 1- машққа қаранг.

6- §.

1. $ax + by + cz = 0$ текисликни координат текислик сифатида қабул қилиш керак. Конус ўқи шу текисликка перпендикуляр.

2. Параболанинг диаметрлари $ax + by + c = 0$ тўғри чизиққа параллел. Парабола ўқи $a : b$ йўналишга қўшма

7- §.

1. Асимптоталар: $ax + by + c = 0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0.$

2. Асимптоталар: $\lambda (ax + by + c) \pm \sqrt{-\lambda\mu}\, (a_1 x + b_1 y + c_1) = 0.$

8- §.

1. Сирт тенгламасининг каноник шаклига мурожаат қилинсин.

2. III боб, 5- § га қаранг.

3. 2- машққа қаранг.
4. III боб, 5- § даги 4- машққа қаранг.
5. Бу тўғри чизиқлар тўғри чизиқли ясовчилардир.
6. III, боб, 6- § даги 7- машққа қаранг.

IX боб

1- §.

1. xy текисликни ўз-ўзига ўтказадиган ортогонал алмаштириш формулалари:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{14}, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{24}, \quad z' = z, \text{ бунда}$$
$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

2. a_{11}, a_{21}, a_{31} коэффициентлар λ, μ, ν га пропорционал; $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

2- §.

1. Аффин алмаштириш формулалари:

$$x' = x_1 + (x_2 - x_1)x + (x_3 - x_1)y + (x_4 - x_1)z,$$
$$y' = y_1 + (y_2 - y_1)x + (y_3 - y_1)y + (y_4 - y_1)z,$$
$$z' = z_1 + (z_2 - z_1)x + (z_3 - z_1)y + (z_4 - z_1)z.$$

2. x' ва y' га нисбатан $\lambda x = ax' + by' + c, \mu y = a_1x' + b_1y' + c_1$ тенгламалар ечилсин.

3- §.

1. xy текислик ушбу

$$x' = a_{11}u + a_{12}v + a_{14},$$
$$y' = a_{21}u + a_{22}v + a_{24},$$
$$z' = a_{31}u + a_{32}v + a_{34}$$

текисликка ўтади, бу ерда u, v — параметрлар.

2. x ўқ $x' = a_{11}t + a_{14}$, $y' = a_{21}t + a_{24}$, $z' = a_{31}t + a_{34}$ тўғри чизиққа алмашинади, бунда t — параметр.

4- §.

1. Битта тўғри чизиқда ётмаган ҳар қандай учта нуқтани аффин алмаштириш натижасида яна битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтага ўтказиш мумкин.

2. Параллелограмнинг учта учини квадратнинг учта учига ўтказиш етарлидир, бу эса ҳамиша мумкин. Ҳар қандай тўртбурчакни ҳам аффин алмаштириш билан квадратга ўтказиб бўлавермайди. Тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел бўлиши керак.

3. Ушбу тенгламаларнинг системаси биргаликда бўлиши керак:

$$x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$
$$y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24};$$
$$z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}.$$

5- §.

1. Аффин алмаштиришда қушмалик хоссаси сақланади.

2. Чузилиш (қисилиш) коэффициентлари ушбу $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)$ эллипснинг ярим уқларига тенг булади.

6- §.

1. Турт нуқта ва уларнинг образлари маълум булса, проектив алмаштиришни берадиган тенгламалар системаси, a_{ij} коэффициентларнинг хаммаси бирор умумий купайтувчига купайтиришгача аниқлигида бир қийматли равишда ечилади, бошқача айтганда система ечимида a_{ij} коэффициентлар урнига λa_{ij} олиш мумкин.

2. Проектив алмаштиришни қулланиб, A, B, C нуқталар x ўқидаги -1, 0, 1 нуқталарга утказилсин ва хамма ангармоник нисбатларни туртинчи (D) нуқтанинг координатаси ξ орқали ифодалансин.

7- §.

1. x_1', x_2', x_3' га нисбатан ушбу система ечилсин:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 x_1 &= a_1 x_1' + b_1 x_2' + c_1 x_3',\\ \lambda_2 x_2 &= a_2 x_1' + b_2 x_2' + c_2 x_3',\\ \lambda_3 x_3 &= a_3 x_1' + b_3 x_2' + c_3 x_3'.\end{aligned}\right|$$

2. Туғри чизиқлар $(k_1, k_2, k_3, 0)$ нуқтада кесишади.

8- §.

1. Биринчи эгри чизиқ учун:

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad x_3' = x_3.$$

Иккинчи эгри чизиқ учун

$$\begin{aligned}2x_1' &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3),\\ 2x_2' &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3),\\ x_3' &= x_3.\end{aligned}$$

9- §.

1. Бир жинсли координаталарга ўтиб, ангармоник нисбат ҳисоблансин.

2. BH туғри чизиқни проектив алмаштиришни қулланиб, чексиз туғри чизиққа утказилсин.

3. Тулиқ туртбурчак хоссаларидан фойдаланилсин.

4. Уриниш нуқтасидан ихтиёрий туғри чизиқ утказилсин. Бу тўғри чизиқ нуқталарининг поляралари изланган уринмада кесишади.

5. Туғри чизиқдаги иккита нуқтанинг поляралари изланган полюсда кесишади.

6. Умумий тенгламаси билан берилган эгри чизиқ, нуқталари полярасининг тенгламасини автополяр учбурчак учларининг поляралари тенгламаси билан солиштирилсин.

7. 1- машққа қаранг.

8. Конус кесимининг тенгламаси каноник шаклда олинсин ва фокус полярасининг тенгламаси тузилсин.

10- §.

Ушбу

$$x' = \frac{x}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{y}{ax + by + c}$$

проектив алмаштириш маркази координаталар бошида бўлган дастани сақлайди, аммо дастани кесувчи тўғри чизиқларни алмаштиради.

2. Текисликни коррелятив алмаштиришдан фойдаланилсин.

МУНДАРИЖА

Русча тўртинчи нашрига сўз боши 3

Русча иккинчи нашрига сўз боши 3

Муқаддима 4

I боб. **Текисликда тўғри бурчакли декарт координаталари** 5

1- §. Текисликда координаталарни киритиш . . 5

2- §. Нуқталар орасидаги масофа 8

3- §. Кесмани берилган нисбатда бўлиш 10

4- §. Эгри чизиқ тенгламаси ҳақида тушунча. Айлана тенгламаси 13

5- §. Эгри чизиқнинг параметрик шаклдаги тенгламаси 16

6- §. Эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталари . . 19

II боб. **Тўғри чизиқ** 22

1- §. Тўғри чизиқ тенгламасининг умумий кўриниши 20

2- §. Тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан вазияти 24

3- §. Тўғри чизиқнинг y га нисбатан ечилган тенгламаси. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак . 27

4- §. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти 29

5- §. Тўғри чизиқ билан нуқтанинг ўзаро вазияти. Тўғри чизиқнинг нормал кўринишдаги тенгламаси 31

6- §. Тўғри чизиққа оид асосий масалалар . . 34

7- §. Координаталарни алмаштириш 36

III боб. **Конус кесимлари** 40
1- §. Қутб координаталар 40
2- §. Конус кесимлари. Қутб координаталардаги тенгламалар 42
3- §. Конус кесимларининг декарт координаталардаги каноник кўринишли тенгламалари . . 45
4- §. Конус кесимларининг шаклини текшириш . 48
5- §. Конус кесимига уринма 52
6- §. Конус кесимларининг фокал хоссалари . . 56
7- §. Конус кесимларининг диаметрлари 59
8- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар 62

IV боб. **Векторлар** 66
1- §. Векторларни қўшиш ва айириш 66
2- §. Векторни сонга кўпайтириш 68
3- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси 70
4- §. Векторларнинг вектор кўпайтмаси 73
5- §. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси 75
6- §. Векторнинг берилган базисга нисбатан координаталари 77

V боб. **Фазода декарт координаталари** 81
1- §. Умумий декарт координаталари 81
2- §. Фазода аналитик геометриянинг энг содда масалалари 83
3- §. Фазода сирт ва эгри чизиқ тенгламалари . 85
4- §. Координаталарни алмаштириш 88

VI боб. **Текислик ва тўғри чизиқ** 92
1- §. Текислик тенгламаси 92
2- §. Текисликнинг координаталар системасига нисбатан жойлашиши 94
3- §. Текисликнинг нормал шаклдаги тенгламаси 96
4- §. Текисликнинг ўзаро вазияти 98
5- §. Тўғри чизиқ тенгламалари 100
6- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг, икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти 102
7- §. Тўғри чизиқ ва текисликка оид асосий масалалар 105

VII боб. **Иккинчи тартибли сиртлар** 109
1- §. Координаталарнинг махсус системаси . .109
2- §. Иккинчи тартибли сиртларни синфларга ажратиш 112
3- §. Эллипсоид 115
4- §. Гиперболоидлар 117
5- §. Параболоидлар 119
6- §. Конус ва цилиндрлар 121
7- §. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқли ясовчилари 123
8- §. Иккинчи тартибли сиртнинг диаметрлари ва диаметриал текисликлари 125
VIII боб. **Умумий тенгламалари билан берилган иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртларни текшириш** 128
1- §. Квадратик формани янги ўзгарувчиларга алмаштириш 128
2- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртлар тенгламаларининг координаталарини алмаштиришга нисбатан инвариантлари . . .129
3- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқни унинг ихтиёрий координаталардаги тенгламасига асосланиб текшириш 133
4- §. Ихтиёрий координаталардаги тенгламаси билан берилган иккинчи тартибли сиртни текшириш 136
5- §. Эгри чизиқ диаметрлари, сиртнинг диаметрал текисликлари. Эгри чизиқ ва сиртнинг маркази .138
6- §. Эгри чизиқнинг симметрия ўқлари. Сиртнинг симметрия текисликлари 140
7- §. Гипербола асимптоталари. Гиперболоиднинг асимптотик конуси 142
8- §. Эгри чизиқнинг уринмаси. Сиртнинг уринма текислиги 143
IX боб. **Чизиқли алмаштиришлар** 146
1- §. Ортогонал алмаштиришлар 146
2- §. Аффин алмаштиришлар 148

3- §. Тўғри чизиқ ва текисликни аффин алмаштириш 150
4- §. Аффин алмаштиришни асосий инварианти .152
5- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртларни аффин алмаштириш 153
6- §. Проектив алмаштиришлар 156
7- §. Бир жинсли координаталар. Текислик ва фазони чексиз узоқ элементлар билан тўлдириш 160
8- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртларни проектив алмаштириш 163
9- §. Полюс ва поляра 165
10- §. Тангенциал координаталар 169
Машқларга доир жавоблар, кўрсатмалар ва ечимлар 174

На узбекском языке

ПОГОРЕЛОВ АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений

Перевод с русского издания изд-ва «Наука», М., 1978

Издательства «Ўқитувчи»

Ташкент — 1983

ИБ № 2590

Таржимон *М. Собиров*
Редактор *Р. Каримов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Т. Скиба*
Корректор *Д, Абдуллаева*

ИБ № 2590

Теришга берилди 16. 05. 1982 й. Босишга рухсат этилди 9. 06. 1983 й. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. тип, қоғози № 3. Гарнитура «литературная». Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 10,92. Нашр л. 11,7. Тиражи 7000.
Зак. № 850°. Баҳоси 40 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9—292—81.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонасида терилиб, 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1983 й.

Набрано на головном предприятии ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Отпечатано в тип. № 1. Ташкент, Хамза, 21. 1983 г.

Погорелов А. В.

Аналитик геометрия:

Олий ўқув юрт. математика ва физика ихтисосликлари студентлари учун дарслик. — Т.:

Ўқитувчи, 1983 — 208 б.

Погорелов А. В. Аналитическая геометрия: Учебник для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений.

$\cdot(50) = -\frac{20}{3}$

ББК 22.151.5я 73
517.3

40 т.

«УҚИТУВЧИ»