М.С.САЛОҲИДДИНОВ, А.Қ.ЎРИНОВ

ГИПЕРБОЛИК ВА ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ БУЗИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

М.С.САЛОҲИДДИНОВ, А.Қ.ЎРИНОВ

ГИПЕРБОЛИК ВА ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ БУЗИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Тошкент
«Университет»
2006

Мазкур ўқув қўлланма гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар учун қўйиладиган асосий масалалар ва уларни ечиш усулларига бағишланган.

Қўлланма юқори курс талабалари, магистрлар, аспирантлар ҳамда дифференциал тенгламалар соҳасида тадқиқотлар олиб борадиган илмий ходимларга мўлжалланган.

Маъсул муҳаррир:
Мирсабуров М. физика–математика фанлари доктори.

Тақризчилар:
Бердишев А.С. физика–математика фанлари доктори,
Зикиров О.С. физика–математика фанлари номзоди.

ISBN-978-9943-305-01-4

СЎЗ БОШИ

Мазкур ўқув қўлланма бакалавриатнинг «5460100 – математика» йўналиши ва магистратуранинг «5А460102 – дифференциал тенгламалар» мутахассисиги таълим стан – дарти асосида яратилган бўлиб, ундан дифференциал тенгламалар соҳаси бўйича ўтган асрнинг охирги 30 – 35 йили ичида олинган илмий натижаларнинг баъзилари ҳам жой олган. Шунинг учун ундан талабалар ва магистрант – лардан ташқари дифференциал тенгламалар соҳаси бўйича илмий – тадқиқот олиб бораётган илмий ходимлар ва аспирантлар ҳам фойдаланиши мумкин.

Ушбу ўқув қўлланма 5 бобдан иборат бўлиб, унда гиперболик ва эллиптик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар учун қўйиладиган асосий масалалар ва уларни ечиш усуллари ҳақида маълумот бериш билан бирга бир қатор янги ностандарт масалалар ва уларни ечиш усуллари ҳақида ҳам маълумот бериш мақсад қилиб қўйилган. Қўлланманинг I бобида икки ўзгарувчили иккинчи тартибли квази чизиқли дифференциал тенгламалар ва бузиладиган дифференциал тенгламалар классификацияси ва уларнинг каноник кўриниши ҳамда дифференциал тенгламаларга қўйилган масалалар ечишнинг характеристикалар усули келтирилган. II бобда гиперболик типдаги тенгламаларга қўйиладиган асосий бошланғич, чегаравий ва «силжишли» масалалар ва уларни ечиш усуллари кўрсатилган. III бобда эса II бобда ўрганилган масалалар гиперболик типдаги чегарада бузиладиган турли тенгламалар учун баён қилинган ва ечилган. III боб сўнгида гиперболик типдаги тенгламалар ечимлари учун экстремум принципи турли тенгламалар мисолида баён қилинган.

Ўқув қўлланманинг IV бобида эллиптик типдаги тенгламалар ечимлари учун хос бўлган экстремум, Хопф, Заремба – Жиро принциплари исботланиб, эллиптик типдаги бузиладиган тенгламаларга қўйиладиган асосий чегаравий ва «ностандарт» масалалар ҳамда уларни ечиш усуллари кўрсатилган. V бобда эса эллиптик типдаги бузиладиган тенглама учун потенциаллар назарияси баён қилиниб, баъзи чегаравий масалаларни ечишга татбиқ қилинган.

Ушбу ўқув қўлланма мазкур мавзуга бағишланган ўзбек тилидаги биринчи адабиёт бўлиб, дифференциал тенгламалар соҳасида илмий–татқиқот олиб борувчи миллий кадрлар тайёрлашга муносиб ҳисса қўшади, деган умиддамиз.

Ўқув қўлланманинг қўлёзмасини кўриб чиқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган физика–математика фанлари доктори А.С.Бердишевга, физика–математика фанлари номзоди, доцент О.С.Зикировга, китобнинг илмий муҳаррири физика–математика фанлари доктори М.Мирсабуровга ҳамда қўлёзмани нашрга тайёрлашда катта ёрдам берган И.Т.Тожибоевга самимий миннатдорчилик билдирамиз.

Мазкур ўқув қўлланма тўғрисидаги китобхонларнинг танқидий фикр ва мулоҳазаларини мамнуният билан қабул қиламиз.

Муаллифлар

I БОБ

ТЕНГЛАМАЛАР КЛАССИФИКАЦИЯСИ ВА КАНОНИК КЎРИНИШИ

Бу бобда икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли бўлган дифференциал тенгламалар классификацияси берилган ва уларни каноник кўринишга келтириш усуллари кўрсатиб ўтилган. Сўнгра соҳа чегарасида ва ичида бузиладиган тенгламалар таърифланган ва турларга ажратилган. Булардан ташқари тенгламалар ва уларга қўйилган масалалар ечимини топишнинг характеристикалар усули баён қилинган.

1–§. Тенгламалар классификацияси

Икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, $u(x,y)$ номаълум функция ва унинг иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари (иккинчи тартибли ҳосилалардан бири иштирок этиши шарт) орасидаги боғланишни ифодаловчи муносабатга айтилади ва уни умумий ҳолда

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

кўринишда ёзилади, бу ерда F – ўз аргументларининг берилган функцияси.

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F_1\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама *юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли тенглама* дейилади. Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x,y нинг функциялари бўлиб, камида биттаси нолдан фаркли. Агар бу коэффициентлар x, y дан ташқари яна u, u_x ва u_y ларнинг ҳам функцияси бўлса, (1) ***квази чизиқли тенглама*** дейилади.

Агар тенгламада юқори тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлар ҳам чизиқли бўлса, яъни (1) ушбу

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{23}\frac{\partial u}{\partial y}+a_{33}u+f=0 \quad (2)$$

кўринишда бўлса, (1) чизиқли тенглама дейилади. Бунда $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ ва f лар x, y нинг функциялари ҳисобланади; агарда тенгламанинг коэффициентлари x, y га боғлиқ бўлмаса, тенглама *ўзгармас коэффициентли* дейилади. Тенгламада $f(x,y)=0$ бўлса, тенглама ***бир жинсли*** дейилади.

Агар (2) кўринишдаги тенгламада ўзгарувчиларни $\xi=(x,y)$ ва $\eta=\psi(x,y)$ тенгликларга асосан алмаштирсак, олдинги тенгламага ***эквивалент янги тенглама*** ҳосил бўлади.

Шуни эслатиб ўтамизки, тенгламада юқорида айтилган алмаштириш бажарилганда иккинчи тартибли ҳосилалар иштирок этмаган ҳадлардан иккинчи тартибли ҳосилалар пайдо бўлмайди; агар бу ҳадлар чизиқли бўлса, чизиқлилигича қолади, яъни алмаштириш бажарилгач,

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=a_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{23}\frac{\partial u}{\partial y}+a_{33}u+f$$

ифода яна

$$\overline{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\overline{a}_{13}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\overline{a}_{23}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\overline{a}_{33}u+\overline{f}$$

кўринишга келади, бу ерда $\overline{a}_{13}, \overline{a}_{23}, \overline{a}_{33}, \overline{f}$ – ξ ва η ўзгарувчиларнинг функциялари. Шу сабабли келгусида бу ҳадларнинг ёйилган ифодасини олмасдан ихчам шакл–дагисини ишлатамиз, яъни (1) кўринишдаги тенглама билан шуғулланамиз.

Энди қуйидаги саволни қўйиш мумкин: ўзгарувчилар қандай алмаштирилганда, эквивалент тенглама олдинги тенгламага нисбатан соддароқ кўринишга келади?

Бу саволга жавоб топиш учун юқоридаги мулоҳазаларни инобатга олиб, (1) тенгламада ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Бунда $u(x,y)$ функциянинг ҳосилалари янги ўзгарувчилар орқали

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

тенгликлар билан аниқланиб, (1) тенглама

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \qquad (3)$$

кўринишга келади. Бунда

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad (4)$$

$$\bar{a}_{22}=a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

(3) тенглама (1) тенгламага нисбатан содда кўринишда бўлиши учун ўзгарувчиларни шундай алмаштириш керакки, бунда a_{11}, a_{12} ва a_{22} коэффициентлардан бири ёки иккитаси (учаласи эмас) нолга айлансин. Бу масалани ечиш учун қуйидаги иккита леммани кўриб чиқамиз.

1 – лемма. Агар $z=\varphi(x,y)$ функция ушбу

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (5)$$

тенгламанинг хусусий ечимларидан бири бўлса, $\varphi(x,y)=C$ *ифода*

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dx\,dy+a_{22}(dx)^2=0 \qquad (6)$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламанинг умумий интеграли бўлади.

2 – лемма. *Агар* $\varphi(x,y)=C$ *ифода* (6) *оддий дифференциал тенгламанинг умумий интеграли бўлса,* $z=\varphi(x,y)$ *функция* (5) *тенгламанинг хусусий ечими бўлади.*

Биринчи лемманинг исботи. Лемманинг шартига асосан $z=\varphi(x,y)$ функция берилган соҳанинг ихтиёрий нуқтасида

$$a_{11}(\varphi_x)^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}(\varphi_y)^2=0 \qquad (7)$$

тенглик ўринли. Умумийликни чегараламай $\varphi_y\neq 0$ деб ҳисоблаб, охирги тенгликни φ_y га бўлсак,

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0 \qquad (8)$$

тенгликка эга бўламиз.

$\varphi(x,y)=C$ ифода (6) нинг умумий интеграли бўлиши учун ундан ошкор шаклда топилган $y=f(x,C)$ функция (6) ни қаноатлантириши керак. Бу функциянинг ҳосиласи, $\varphi(x,y)=C$ га асосан,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)} \qquad (9)$$

тенглик билан аниқланади. Буни эътиборга олсак, (8) тенгликдан

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right)+a_{22}=0, \tag{10}$$

яъни (6) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Бу билан 1 – лемма исбот бўлди.

Энди иккинчи леммани исбот қиламиз. $\varphi(x,y)=C$ (6) тенгламанинг умумий интеграли бўлсин. У ҳолда, $\varphi(x,y)=C$ нинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай (x,y) нуқтада (10) тенглик бажарилади.

Буни эътиборга олсак, (9) га асосан, бу нуқтада (8) тенглик ҳам бажарилади. Бундан эса (7) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Шу билан 2 – лемма ҳам исбот бўлди.

(6) тенглама (1) тенгламанинг ***характеристик тенгламаси***, бу тенгламанинг интеграллари эса (1) тенгламанинг ***характеристикалари*** дейилади. (6) тенглама билан аниқланувчи $\{dx,dy\}$ вектор йўналиши (1) тенгламанинг характеристик йўналиши дейилади.

Демак, 1 – ва 2 – леммаларга асосан, $\varphi(x,y)=C$ (6) тенгламанинг интегралларидан бири бўлганда, $\xi=\varphi(x,y)$ деб олинса, (3) тенгламадаги $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ олдидаги коэффициент нолга айланар экан, яъни $\overline{a}_{11}=0$ бўлади; шунингдек, $\psi(x,y)=C$ (6) тенгламанинг иккинчи интеграли бўлса, $\eta=\psi(x,y)$ деб олинса, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ олдидаги коэффициент ҳам нолга айланади, яъни $\overline{a}_{22}=0$ бўлади.

Характеристик тенглама қуйидаги иккита биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ажралади:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{11}$$

Бу тенгламалардаги радикал остидаги ифоданинг ишорасига қараб, (1) тенглама типларга ажратилади.

Агар M нуқтада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ бўлса, (1) тенглама M нуқтада ***гиперболик типдаги*** тенглама дейилади.

Агар M нуқтада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ бўлса, (1) тенглама M нуқтада ***эллиптик типдаги*** тенглама дейилади.

Агар M нуқтада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ бўлса, (1) тенглама M нуқтада ***параболик типдаги*** тенглама дейилади.

Таърифдан фойдаланиб кўрсатиш қийин эмаски,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

тенгламалар, масалан, $O(0,0)$ нуқтада мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишли тенгламалардир.

Тенглама турли нуқталарда турли типга тегишли бўлиши мумкин, масалан,

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

тенглама $M_1(1,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,-1)$ нуқталарда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типга тегишлидир.

Агар тенглама бирор (тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳади аниқланган) D соҳанинг ҳар бир нуқтасида бир хил типга тегишли бўлса, у ҳолда уни D соҳада шу типдаги тенглама дейилади. Масалан, (12) тенгламалар текисликнинг ихтиёрий нуқтасида бир хил типга тегишли бўлгани учун улар бутун текисликда мос равишда эллиптик, параболик ва гиперболик типдаги тенглама ҳисобланади. (13) тенглама эса юқори ярим текисликда эллиптик, қуйи ярим текисликда эса гиперболик тенглама бўлади.

Агар (1) тенглама бирор D соҳада эллиптик типга тегишли бўлиб, ихтиёрий λ_1, λ_2 сонлар учун шундай мусбат k_0, k_1 сонлар топилсаки, D соҳанинг барча нуқталарида

$$k_0\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \le a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \le k_1\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) тенглама D соҳада ***текис эллиптик тенглама*** дейилади.

Масалан, (12) даги биринчи тенглама ихтиёрий соҳада текис эллиптик. (13) тенглама эса юқори ярим текисликда текис эллиптик эмас.

Агар тенглама D соҳанинг турли қисмида турлича типларга тегишли бўлса, уни шу соҳада аралаш типдаги тенглама дейилади. Масалан, (13) тенглама $D_0 = \{(x, y):$ $x^2 + y^2 < 1\}$ соҳанинг $D_1 = D_0 \cap (y > 0)$ қисмида эллиптик, $D_2 = D_0 \cap (y < 0)$ қисмида гиперболик, $D = \cap (y = 0)$ қисмида эса параболик типга тегишли бўлгани учун, у D_0 соҳада аралаш типдаги тенглама ҳисобланади.

(4) га асосан

$$a_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2.$$

Бундан кўринадики (1) ва (3) тенгламалар бир хил типга тегишли бўлиши, яъни ўзгарувчиларни алмаштиришда тенглама типи ўзгармаслиги учун

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлиши керак экан. Бу тенгсизлик эса $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқ бўлмаслигини кўрсатади.

Демак, ўзгарувчиларни чизиқли боғлиқ бўлмаган $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ формулалар ёрдамида алмаштирганда тенгламанинг типи ўзгармайди.

Бундан ташқари, юқоридагилардан келиб чиқадики, (1) тенглама бирор нуқтада эллиптик бўлса, бу нуқтада ҳақиқий характеристик йўналишга эга эмас, гиперболик (параболик) бўлса эса, иккита (битта) характеристик йўналишга эга бўлар экан.

2–§. Тенгламаларни каноник кўринишга келтириш

(1) тенглама бирор соҳанинг ҳамма нуқталарида бир хил типга тегишли бўлсин. (11) га асосан бу соҳанинг ҳар бир нуқтасидан иккита характеристика ўтади; тенглама гипер–болик типда бўлса, бу характеристикалар ҳақиқий, лекин ҳар хил, эллиптик типдаги тенглама учун мавҳум, лекин қўшма

ва ниҳоят, параболик типдаги тенглама учун ҳақиқий ва устма–уст тушади. Бу ҳолларнинг ҳар бирини алоҳида–алоҳида текширайлик.

1. Гиперболик типдаги тенгламада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ бўлиб, (11) тенгламаларнинг умумий интеграллари $\varphi(x, y) = C_1$ ва $\psi(x, y) = C_2$ ҳақиқий чизиқларнинг иккита оиласини тасвирлайди.

$\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ функциялар ўзаро боғлиқ бўлмаслигини исботлайлик. Бунинг учун уларга мос

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$$

функционал детерминантнинг нолга тенг бўлмаслигини кўрсатиш кифоядир.

Фараз қилайлик, бу функционал детерминант бирор нуқтада нолга тенг бўлсин. У ҳолда, бу нуқтада $(\varphi_x / \varphi_y) = (\psi_x / \psi_y)$ бўлиб, бунинг бажарилиши эса мумкин эмас. Чунки $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ бўлгани сабабли, (11) га асосан,

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \qquad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

тенгликлар ўринли бўлиб, уларнинг ўнг томонлари ҳар хил бўлгани учун чап томонлари ҳам ҳар хил бўлади. Демак, $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ функциялар қаралаётган ҳолда ўзаро боғлиқ эмас.

Демак, (1) тенгламани соддалаштириш учун янги ўзгарувчиларни $\xi = \varphi(x, y)$ ва $\eta = \psi(x, y)$ деб олиш мумкин. Бунда $\bar{a}_{11} = 0$, $\bar{a}_{22} = 0$, $\bar{a}_{12} \neq 0$ бўлиб, (3) тенглама $2\bar{a}_{12}$ га бўлиб юбориш натижасида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = G_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{14}$$

кўринишга келади. Бу кўринишдаги тенглама гиперболик типдаги тенгламанинг каноник кўриниши дейилади.

(14) тенгламада ξ,η ўзгарувчилардан янги α,β ўзгарувчиларга $\xi=\alpha+\beta$, $\eta=\alpha-\beta$ алмаштиришлар ёрдамида ўтсак,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

бўлгани сабабли, тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}=G_2\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial \alpha},\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

кўринишга келади. Бу гиперболик типдаги тенгламанинг иккинчи каноник кўриниши дейилади.

2. **Параболик типдаги тенгламада** $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$. Бу ҳолда (11) тенгламаларнинг ўнг томонлари бир хил бўлиб, иккаласи ҳам битта тенгламага келади, натижада битта $\varphi(x,y)=C$ умумий интегралга эга бўламиз. $\varphi(x,y)$ функция билан чизиқли боғлиқ бўлмаган $\psi(x,y)$ функция олайлик ва $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ алмаштириш бажарайлик. У ҳолда, умумийликни чегараламай $a_{11}>0$, $a_{22}>0$ десак, $a_{12}^2=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ бўлиб, (3) тенгламанинг коэффициентлари қуйидагича ҳисобланади:

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=0,$$

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=0,$$

$a_{22}\neq 0$, чунки $\psi(x,y)$ функция $\varphi(x,y)$ билан чизиқли боғлиқ бўлмаганлиги сабабли (5) тенгламани қаноатлантирмайди.

Шундай қилиб, (3) тенгламада $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ ларнинг олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиб, иккинчи тартибли ҳосилалардан $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ қолади, бутун тенгламани унинг олдидаги $\bar{a}_{22}$ коэффициентга қисқартириш натижасида тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

кўринишга келади. Агар бу тенгламада $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ иштирок этмаса, ξ ни параметр сифатида қарасак, тенглама оддий дифференциал тенглама бўлади.

3. Эллиптик типдаги тенгламада $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. (11) тенгламаларнинг ўнг томонлари қўшма комплекс бўлгани сабабли, иккита мавҳум $\varphi(x,y) = C_1$ ва $\overline{\varphi(x,y)} = C_2$ характеристикаларга эга бўламиз. Агар $\xi = \varphi(x,y)$ ва $\eta = \overline{\varphi(x,y)}$ алмаштиришларга асосан янги ўзгарувчиларга ўтсак, янги тенглама мавҳум ўзгарувчилар орқали ифодаланади. Шунинг учун, мавҳум ўзгарувчилардан қутилиш мақсадида

$$\xi + i\eta = \varphi(x,y), \quad \xi - i\eta = \overline{\varphi(x,y)}$$

деб оламиз. У ҳолда, $\xi = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$, $\eta = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi})$ бўлиб, φ ва $\bar{\varphi}$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлмагани учун, уларнинг чизиқли комбинацияси бўлган ξ ва η ўзгарувчилар ҳам чизиқли боғлиқ бўлмайди. Бундан ташқари, (5) га асосан,

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 -$$

$$-\left\{a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right\} + 2i\left\{a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \right.$$

$$+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\bigg\}=0.$$

Бу ердан комплекс сонларнинг хоссаларига асосан $\overline{a}_{11}=\overline{a}_{22}$, $\overline{a}_{12}=0$. Буни инобатга олиб, (3) тенгламани тенг коэффициентларга қисқартириш натижасида эллиптик тенгламанинг каноник куринишига

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=G_4\left(\xi.\eta.u.\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

эга буламиз.

Мисоллар.

1. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ тенгламани каноник куринишга келтирайлик. Бунда

$$a_{11}=x^2,\ a_{12}=xy,\ a_{22}=y^2,$$

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=(xy)^2-x^2y^2=0.$$

Демак, тенглама параболик типга тегишли. Унинг характеристикалар тенгламаси

$$x^2(dy)^2-2xydxdy+y^2(dx)^2=0$$

ёки

$$(xdy-ydx)^2=0\ .$$

Бу тенглама битта $\dfrac{y}{x}=C$ умумий интегралга эга.

Умумий назарияга асосан, ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз: $\xi=(y/x)$, $\eta=y$ (иккинчи ўзгарувчининг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, қулайлик учун $\eta=y$ деб олдик). Хосилаларни ҳисобласак,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{y}{x^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{y^2}{x^4}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{2y}{x^3},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{1}{x^2}+2\frac{\partial u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{y}{x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{y}{x^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x^2}.$$

Буларни тенгламага қўйиб, соддалаштириш натижасида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

кўринишдаги каноник тенгламага келамиз.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ тенглама учун бутун текисликда $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0$ тенгсизлик ўринли.

Демак, тенглама гиперболик типга тегишли.

Характеристик тенгламаси

$$(dy)^2 + 2\cos x\, dy\, dx - (3+\sin^2 x)(dx)^2 = 0$$

ёки

$$[dy + (\cos x + 2)dx][dy + (\cos x - 2)dx] = 0.$$

Бундан характеристикаларни топамиз:

$$y + \sin x + 2x = C_1, \quad y + \sin x - 2x = C_2.$$

Агар $\xi = y + \sin x + 2x$, $\eta = y + \sin x - 2x$ деб олсак,

$$u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xx} = (\cos x + 2)^2 u_{\xi\xi} + 2(\cos^2 x - 4)u_{\xi\eta} + (\cos x - 2)^2 u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (\cos x + 2)u_{\xi\xi} + 2\cos x\, u_{\xi\eta} + (\cos x - 2)u_{\eta\eta}.$$

Буларни тенгламага қўйиб, сўнгра соддалаштирсак,

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi + \frac{1}{4}u_\eta = 0$$

кўринишдаги каноник тенгламага келамиз.

3. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$, $x > 0$, $y > 0$ тенгламани қарайлик. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x^2 y^2 < 0$ бўлгани учун бу тенглама эллиптик типга тегишли. Унинг характеристикалари $y^2 \pm i x^2 = C$

кўринишга эга. Бу ерда умумий назарияга асосан $\xi = y^2$, $\eta = x^2$ деб оламиз.

У ҳолда

$$u_{xx} = 2u_\eta + 4x^2 u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = 2u_\xi + 4y^2 u_{\xi\xi}.$$

Буларни тенгламага қўйиб, соддалаштиргандан сўнг, тенгламанинг каноник кўринишига эга бўламиз:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi} u_\xi + \frac{1}{2\eta} u_\eta = 0.$$

3–§. Бузиладиган дифференциал тенгламалар

Юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли бўлган икки ўзгарувчили иккинчи тартибли

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (15)$$

дифференциал тенгламани D соҳада қарайлик.

Бу ерда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x ва y ўзгарувчиларнинг $\overline{D}$ да аниқланган етарли силлиқ функциялари бўлиб, D соҳанинг ҳеч бир нуқтасида бир вақтда нолга тенг бўлмайди, F эса ўз аргументларининг берилган функцияси.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11} a_{22},$$

$$Q(dx, -dx) = a_{11}(dy)^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22}(dx)^2.$$

Маълумки, D соҳада $\Delta(x, y)$ манфий, мусбат, ноль бўлишига қараб, (15) тенглама D соҳада мос равишда эллиптик, гиперболик, параболик типга тегишли бўлади, $Q(dx, -dy) = 0$ тенглама билан аниқланувчи (dx, dy) вектор йўналиши эса, (15) тенгламанинг характеристик йўналиши дейилади. Берилган тенглама ўзининг эллиптиклик соҳасида ҳақиқий характеристик йўналишга эга эмаслиги, гипер–боликлик (параболиклик) соҳасида эса иккита (битта) ҳақи–

қий характеристик йўналишга эгалиги ҳам аввалги параграфлардан маълум.

1. Типи бузиладиган тенгламалар.

а) *Чегарада бузиладиган тенгламалар.*

Агар D соҳада $\Delta(x,y)<0$ (>0) бўлиб, соҳа чегарасининг барча нуқталарида ёки унинг бирор қисмида $\Delta(x,y)=0$ бўлса, у ҳолда D да (19) ни ***чегарада бузиладиган*** эллиптик (гиперболик) типдаги тенглама дейилади. Соҳа чегарасининг $\Delta(x,y)=0$ тенглик бажариладиган қисми эса параболик бузилиш чизиғи дейилади.

Фараз қилайлик, (15) чегарада бузиладиган эллиптик (гиперболик) типдаги тенглама, γ эса унинг параболик бузилиш чизиғи бўлсин.

Агар γ чизиқда $Q(dx,-dy)\neq 0$ $(=0)$ бўлса, (15) ни чегарада бузиладиган биринчи (иккинчи) турдаги тенглама дейилади.

Таърифдан кўринадики, иккинчи тур бузиладиган тенгламанинг характеристик йўналиши γ чизиқда бу чизиқнинг уринмаси билан устма-уст тушади, биринчи тур бузиладиган тенглама учун эса улар устма уст тушмайди.

Мисоллар:

1. $D_1=\{(x,y):x^2+y^2<1, y>0\}$ соҳада

$$yu_{xx}+u_{yy}=0, \tag{16}$$

$$u_{xx}+yu_{yy}=0 \tag{17}$$

тенгламаларни қарайлик.

Иккала тенглама учун ҳам $\Delta(x,y)=-y$ бўлиб, D_1 соҳада $\Delta(x,y)<0$ тенгсизлик ва соҳа чегарасининг $\gamma_1=\{(x,y):$ $-1\leq x\leq 1, y=0\}$ қисмида эса $\Delta(x,y)=0$ тенглик ўринлидир.

Иккинчи томондан, γ_1 да (16) тенглама учун

$$Q(dx,-dy)=y(dy)^2+(dx)^2\neq 0, \tag{18}$$

(17) тенглама учун эса

$$Q(dx,-dy)=(dy)^2+y(dx)^2=0 \tag{19}$$

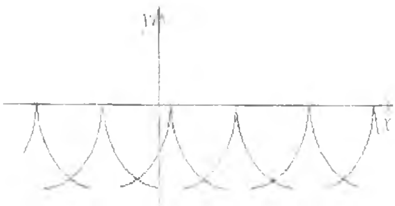
Демак, юқоридаги таърифларга асосан, $\overline{D}_1$ да (16) ва (17) мос равишда чегарада бузиладиган биринчи ва иккинчи тур эллиптик типдаги тенгламалардир, γ_1 кесма эса улар учун параболик бузилиш чизиғидир.

2. Энди (16) ва (17) тенгламаларни $D_2=\{(x,y): -\infty < x < +\infty,\ y<0\}$ соҳада қарайлик.

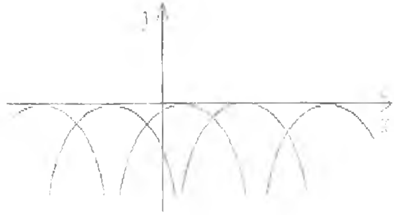
Бу ерда ҳам иккала тенглама учун $\Delta(x,y)=-y$ бўлиб, D_2 соҳада $\Delta(x,y)>0$ тенгсизлик ва соҳа чегараси $\gamma_2=\{(x,y): -\infty < x < +\infty, y=0\}$ нинг барча нуқталарида $\Delta(x,y)=0$ тенглик ўринли. Бундан ташқари, γ_2 да (16) тенглама учун (18) тенгсизлик, (17) тенглама учун (19) тенглик бажарилади.

Шунинг учун $\overline{D}_2$ да (16) ва (17) мос равишда чегарада бузиладиган биринчи ва иккинчи тур гиперболик типдаги тенгламалардир, γ_2 — тўғри чизиқ эса улар учун параболик бузилиш чизиғидир.

Маълумки, гиперболик типдаги тенгламалар иккита ҳақиқий характеристикалар оиласига эга. (16) ва (17) тенгламалар мисолидан фойдаланиб хулоса қилиш мумкинки, чегарада бузиладиган биринчи тур гиперболик тенгламалар учун γ бузилиш чизиғи характеристикаларнинг қайтиш нуқталари тўплами, иккинчи тур тенгламалар учун эса γ бузилиш чизиғи характеристикаларнинг уриниш нуқталари тўплами бўлиб, унинг ўзи ҳам характеристика бўлади (1 — ва 2 — чизмалар).



1 — чизма



2 — чизма

б) ***Соҳа ичида бузиладиган тенгламалар.***

Яна (15) тенглама ва D соҳага қайтайлик.

Агар (15) тенглама учун $\gamma(\subset D)$ чизиқда $\Delta(x,y)=0$ тенглик бажарилиб, D/γ нинг барча нуқталарида $\Delta(x,y)<0$ (>0) тенгсизлик бажарилса, $(15)-D$ ***соҳа ичида бузилади-ган*** эллиптик (гиперболик) типдаги тенглама дейилади, бу ерда ҳам γ – параболик бузилиш чизиғи дейилади.

Бундай тенгламалар ҳам чегарада бузиладиган тенгла–маларга ўхшаш биринчи ва иккинчи турга ажратилади. Таърифлар асосида кўрсатиш қийин эмаски,

$$|y|u_{xx}+u_{yy}=0, \qquad u_{xx}+|y|u_{yy}=0$$

тенгламалар $D_3=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ соҳанинг ичида бузилади–ган эллиптик типдаги тенгламалар бўлиб, мос равишда биринчи ва иккинчи турга тегишлидир. Худди шу каби

$$|y|u_{xx}-u_{yy}=0, \qquad u_{xx}-|y|u_{yy}=0$$

тенгламалар D_3 соҳанинг ичида бузилувчи (мос равишда) биринчи ва иккинчи тур гиперболик типдаги тенглама–лардир. Иккала ҳолда ҳам $\gamma=\{(x,y):-1\le x\le 1, y=0\}$ кесма параболик бузилиш чизиғи бўлади.

Юқорида таърифланган ва кўриб ўтилган тенгламаларда «бузилиш» фақатгина тенглама ***типига*** тегишлидир, яъни бузилиш чизиғида тенглама ***типи*** ўзгаради.

2. Типи ва тартиби бузиладиган тенгламалар.

Фараз қилайлик, D соҳада $a_{11}=k(x,y)\,\overline{a}_{11}$, $a_{12}=k(x,y)\,\overline{a}_{12}$, $a_{22}=k(x,y)\,\overline{a}_{22}$ тенгликлар ўринли бўлиб, $\overline{a}_{11},\overline{a}_{12},\overline{a}_{22}$ лар x ва y ўзгарувчиларнинг D соҳада аниқланган ва бир вақтда нолга тенг бўлмайдиган етарлича силлиқ функциялари, $k(x,y)$ эса қандайдир силлиқ функция бўлсин.

У ҳолда

$$\Delta(x,y)=k^2(x,y)\overline{\Delta}(x,y)=k^2(x,y)\left(\overline{a}_{12}^2-\overline{a}_{11}\cdot\overline{a}_{22}\right).$$

Бундан кўринадики, агар $\overline{D}$ да $k(x,y)\neq 0$ бўлса, $\Delta(x,y)$ нинг D соҳада манфий, мусбат ва ноль бўлишига боғлиқ равишда

(15) тенглама шу соҳада эллиптик, гиперболик ва параболик типга тегишли булади.

Агар D соҳада $k(x,y)\neq 0$, $\Delta(x,y)<0\ (>0)$ бўлиб, соҳа чегарасининг барча нуқталарида ёки унинг бирор γ қисмида $k(x,y)=0$, $\Delta(x,y)=0$ бўлса, у ҳолда (15) – ***типи ва тартиби*** чегарада бузиладиган эллиптик (гиперболик) типдаги тенглама дейилади. Бу ерда ҳам γ – параболик бузилиш чизиги дейилади.

Таърифдан кўринадики, γ чизиқда $\Delta(x,y)=0$ бўлган–лиги учун бу чизиқда тенглама типи ўзгармоқда, $k(x,y)=0$ бўлгани учун эса бу чизиқда тенгламанинг тартиби ўзгар–моқда, яъни биринчи тартибли тенгламага айланмоқда.

Мисол сифатида

$$y^2u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y=0$$

тенгламани D_1 соҳада қарайлик.

Бу ерда $k(x,y)=y$, $\Delta(x,y)=-y$, $\Delta(x,y)=-y^3$. D_1 соҳада $k(x,y)=y\neq 0$, $\Delta(x,y)=-y<0$ бўлиб, соҳа чегараси γ_1 да $k(x,y)=0$, $\Delta(x,y)=0$ бўлгани учун берилган тенглама типи ва тартиби чегарада бузиладиган эллиптик типдаги тенгламадир. γ_1 чизиқда у $\alpha u_x+\beta u_y=0$ биринчи тартибли тенгламага айланади.

Худди юқоридаги каби бундай тенгламаларни ҳам би–ринчи ва иккинчи турларга ажратиш мумкин.

Типи ва тартиби соҳа ичида бузиладиган тенгламаларга таъриф бериш қийинчилик туғдирмайди.

$$y^2u_{xx}-|y|u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y=0$$

тенглама D_3 соҳада типи ва тартиби бузиладиган гиперболик типдаги тенгламага мисол бўла олади.

3. Каноник кўринишга келтириш.

Аввалги параграфда кўриб ўтилдики, агар (15) тенглама берилган соҳада эллиптик, гиперболик ёки параболик типга тегишли бўлса, ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида уни каноник кўринишга келтириш мумкин.

Худди шу каби бузиладиган ва аралаш типдаги тенг–ламаларни ҳам маълум алмаштиришлар бажариб, каноник кўринишга келтириш мумкин. Бу масалани иккинчи тар–тибли икки ўзгарувчили тенгламалар учун итальян матема–тиги М.Чибрарио ҳал қилган. Қуйида биз бу масала ечими–нинг асосий босқичларини исботсиз келтирамиз. Унинг тўла исботи [20] да келтирилган.

Фараз қилайлик, (15) тенглама D соҳада бузиладиган ёки аралаш типга тегишли бўлсин, γ – эса унинг параболик бузилиш чизиғи бўлсин.

Бузилиш чизиғи γ да $\Delta(x,y)=0$ бўлгани учун уни

$$\Delta(x,y)=H^n(x,y)M(x,y)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $H(x,y)=0$ – γ чизиқ тенгламаси, γ чизиқ ва унинг кичик атрофида $M(x,y)\neq 0$ ва H_x, H_y лар бир вақтда нолга тенг бўлмайди.

Қуйидаги икки ҳолни қараймиз:

I. Тенгламанинг характеристик йўналиши бузилиш чизиғи уринмаси билан устма–уст тушмайди, яъни γ да

$$a_{11}(H_x)^2+2a_{12}H_xH_y+a_{22}(H_y)^2\neq 0$$

тенгсизлик бажарилади.

Бу ҳолда $\eta=H(x,y)$ деб, $\xi=\xi(x,y)$ сифатида эса

$$\left(a_{11}H_x+a_{12}H_y\right)\xi_x+\left(a_{12}H_x+a_{22}H_y\right)\xi_y=0$$

тенглама ечимини оламиз.

Ўзгарувчиларни бундай алмаштириш натижасида (15) тенглама

$$\eta^n k_1(\xi,\eta)\,u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+F_1\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right)=0$$

кўринишга келади, бу ерда $k_1(\xi,\eta)$ функция γ чизиқнинг кичик атрофида нолга айланмайди.

II. Тенгламанинг характеристик йўналиши бузилиш чизиғи уринмаси билан устма–уст тушади, яъни γ да

$$a_{11}(H_x)^2+2a_{12}H_xH_y+a_{22}(H_y)^2=0$$

тенглик бажарилади.

Бу ҳолда $\eta=\eta(x,y)$ сифатида

$$n(x,y)\eta_x - m(x,y)\eta_y = 0 \qquad (20)$$

тенгламанинг ечимини оламиз, бу ерда $n(x,y)$ ва $m(x,y)$ лар γ чизиқ ва унинг атрофида

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 \neq 0 \qquad (21)$$

шартни қаноатлантирувчи функциялар.

$\xi=\xi(x,y)$ сифатида эса

$$\left(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y\right)\xi_x + \left(a_{11}\eta_x + a_{22}\eta_y\right)\xi_y = 0 \qquad (22)$$

тенгламанинг $\eta(x,y)=0$ ва γ чизиқ кесишиш нуқтасида нолга тенг бўлган ечимини оламиз.

Ўзгарувчиларни бундай алмаштириш натижасида (15) тенглама

$$\xi^n k_2(\xi,\eta)\, u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F_2\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0$$

кўринишга келади, бу ерда $k_2(\xi,\eta)$ функция γ чизиқнинг кичик атрофида нолга айланмайди.

Мисол.

$$\left(1-x^2\right)u_{xx} - 2xyu_{xy} - \left(1+y^2\right)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0 \qquad (23)$$

тенгламани қарайлик.

Бу ерда

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = x^2 - y^2 - 1 = H(x,y)$$

бўлиб, тенглама $\gamma: x^2 - y^2 = 1$ чизиқда бузилади. Бу чизиқда

$$a_{11}(H_x)^2 + 2a_{12}H_xH_y + a_{22}(H_y)^2 = 4\left(y^2-x^2\right)\left(x^2-y^2-1\right) = 0$$

бўлгани учун II ҳолга мос келади.

(20) тенгламада, масалан, $n=1+x$, $m=-y$ деб олиб (бунда (21) шарт бажарилади),

$$(1+x)\eta_x + y\eta_y = 0$$

тенглама ечимини топамиз: $\eta = y/(1+x)$.

Бу ечимни (22) га қўйиб,

$$y(1+x)\xi_x + \left(1+x+y^2\right)\xi_y = 0$$

тенгламага келамиз. Унинг γ да нолга айланувчи ечими:

$$\xi = \left(x^2 - y^2 - 1\right)/(1+x)^2.$$

(23) тенгламада ўзгарувчиларни

$$\xi = \frac{x^2 - y^2 - 1}{(1+x)^2}, \qquad \eta = \frac{y}{1+x}$$

тенгликлар асосида алмаштирсак, тенглама

$$\xi u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 0{,}5 u_\xi = 0$$

кўринишга келади.

4-§. Характеристикалар усули

Бирор D соҳада иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенглама берилган бўлсин. D соҳада аниқланган ва берилган тенгламада иштирок этаётган барча ҳасилаларга эга бўлиб, тенгламадаги номаълум функция ўрнига қўйилганда уни айниятга айлантирувчи функция, тенгламанинг регуляр ечими дейилади. Тенгламанинг шундай ечими мавжуд бўлсаки, қолган ечимлар ундан хусусий ҳолда келиб чиқса, уни тенгламанинг умумий ечими дейилади. Одатда иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламанинг умумий ечими ўзаро боғлиқ бўлмаган икки функция орқали ифодаланади.

Берилган тенгламанинг қайси типга тегишлилигига қараб, унга турлича масалалар қўйилиши «Математик физика тенгламалари» курсидан маълум. Тенгламага қўйилган масаланинг ечими деб, тенглама ечимларидан масала шартларини қаноатлантирувчисига айтилади.

Турли тенгламаларнинг (уларга қўйилган масалаларнинг ҳам) ечимини топишга турлича усуллар қўлланилади. Баъзи усуллар тенглама (унга қўйилган масала) ечимини аналитик ифодасини берса, иккинчиси ечимнинг мавжудлигини кўрсатади холос, учинчиси эса шу ечимнинг сон қийматини беради. Ҳатто баъзида битта тенглама учун қўйилган турли масала ечимини топишга турлича усулларни қўллашга тўғри келади.

Тенгламалар (унга қўйилган масалалар) ечимини топишда қўлланиладиган бир усулни иккинчисидан афзал деб бўлмайди. Чунки бир тенглама (масала) ечимини топиш учун қулай бўлган усулни бошқа тенглама (масала)ни ечишга қўллаш ноқулай ёки умуман қўллаш мумкин бўлмаслиги мумкин. Бу параграфда биз характеристикалар усули ёки Даламбер усули деб аталувчи бир усулни кўриб ўтамиз. У қуйидаги босқичларни ўз ичига олади:

1. Берилган тенглама характеристикалар ёрдамида каноник кўринишга келтирилади;

2. Тенгламанинг каноник кўринишидан фойдаланиб, унинг умумий ечими топилади;

3. Агар берилган тенгламага бирор масала қўйилган бўлса, топилган умумий ечимдан масала шартларини қаноатлантирувчиси ажратиб олинади.

Бу усулни мисоллар ёрдамида кўриб ўтайлик.

1 мисол.

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Бу ерда $a_{11} = x^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -y^2$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2$. Характеристик тенгламаси

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = (xdy - ydx)(xdy + ydx) = 0$$

кўринишга эга бўлиб, уни интеграллаб $(y/x) = C_1$, $xy = C_2$ характеристикалар оиласига эга бўламиз. $\xi = (y/x)$, $\eta = xy$ характеристик ўзгарувчиларда тенглама

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$$

каноник кўринишга келади.

Бу хусусий ҳосилали дифференциал тенгламада $u_\eta = \upsilon$ белгилаш киритсак, тенглама

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} + \frac{\upsilon}{2\xi} = 0 \qquad \text{ёки} \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon} + \frac{d\xi}{2\xi} = 0$$

оддий дифференциал тенгламага келади. Унинг умумий интеграли $\upsilon = \xi^{-1/2}\varphi_1(\eta)$ бўлиб, $\upsilon = u_\eta$ белгилашни инобатга олсак,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \xi^{-1/2} \varphi_1(\eta)$$

тенгламага келамиз, бу ерда $\varphi_1(\eta)$ ихтиёрий функция. Охирги тенгламани (ξ ни параметр сифатида қараб) η бўйича интеграллаб ва x, y ўзгарувчиларга қайтиб, берилган тенглама умумий ечимига эга бўламиз:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\, \varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

бу ерда $\varphi, \psi \in C^2$ — ихтиёрий функциялар.

2 – мисол.

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Иккинчи параграфдан маълумки, бу тенглама

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$$

каноник кўринишга эга, бу ерда $\xi = y/x$, $\eta = y$. Агар $u_\eta = w$ белгилаш киритилса, бу тенглама

$$\frac{dw}{w} + \frac{d\eta}{\eta} = 0$$

кўринишга келади ва уни интеграллаб, $w = \varphi(\xi)\eta^{-1}$ эканини топамиз. Бу ердан $w = u_\eta$ тенгликка асосан $u_\eta = \varphi(\xi)\eta^{-1}$ тенгламага келамиз. Уни η бўйича интеграллаб ва x, y ўзгарувчиларга қайтиб, берилган тенглама умумий ечимига келамиз:

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) ln\, y + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

бу ерда $\varphi, \psi \in C^2$ — ихтиёрий функциялар.

3 – мисол.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad (24)$$

тенгламанинг

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ u_y(x,0)=\nu(x) \tag{25}$$

шартларини қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Одатда бу масала тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласи дейилади. Бу ерда характеристик тенглама $(dx)^2-(dy)^2=0$ бўлиб, характеристикалар $x+y=C_1$, $x-y=C_2$ кўринишига эга. Буларга асосан $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ алмаштиришни бажарсак, тенглама $u_{\xi\eta}=0$ каноник кўринишга келади. Уни юқоридаги мисоллардаги каби интеграллаб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=\varphi(x-y)+\psi(x+y) \tag{26}$$

формула билан аниқланишини топамиз, бу ерда $\varphi,\psi\in C^2$ – ихтиёрий функциялар.

Берилган масала ечимини топиш учун φ ва ψ функцияларни шундай танлаш керакки, (26) ечим (25) шартларни қаноатлантирсин. (26) дан (25) шартларнинг биринчисига асосан

$$\varphi(x)+\psi(x)=\tau(x), \tag{27}$$

иккинчисига асосан эса

$$-\varphi'(x)+\psi'(x)=\nu(x)$$

ёки

$$\varphi(x)-\psi(x)=-\int_0^x\nu(t)dt+C \tag{28}$$

тенгликлар келиб чиқади, бу ерда $C=const$.

(27), (28) тенгламалар системасини номаълум $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларга нисбатан ечсак,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tau(x)-\frac{1}{2}\int_0^x\nu(t)dt+\frac{C}{2}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\tau(x)+\frac{1}{2}\int_0^x\nu(t)dt-\frac{C}{2}$$

келиб чиқади.

Буларни (26) га қўйиб, (24) – (25) масала ечими учун формула топамиз:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x-y)+\tau(x+y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt. \tag{29}$$

Бу формула Даламбер формуласи деб аталади. Бу формула билан аниқланувчи $u(x,y)$ функция (24) – (25) масаланинг ечими бўлиши учун $\tau(x)\in C^2$, $\nu(x)\in C^1$ бўлиши керак.

Юқоридагилардан кўринадики, характеристикалар усулини фақатгина каноник кўринишини интеграллаш қулай бўлган тенгламаларга қўллаганда тегишли натижага тезроқ эришиш мумкин. Бундан ташқари, бу усулнинг муваффақиятли қўлланилиши қўйилган масала шартлари ёрдамида умумий ечимда иштирок этувчи номаълум функцияларга нисбатан ҳосил бўлган функционал тенгламалар системасини бир қийматли ечилишига ҳам боғлиқ. 3–мисолда бу [(27), (28)] система икки номаълумли икки чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлган бўлса, бошқа ҳолларда мураккаб система ҳосил бўлиши мумкин. Қолаверса, 3–мисолда масала шартлари $y=0$ тўғри чизиқда берилган бўлиб, бошқа ҳолда мураккаброқ тенгламали чизиқда берилса, ҳосил буладиган система яна ҳам мураккаб бўлиши мумкин.

II БОБ

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЙИЛАДИГАН АСОСИЙ МАСАЛАЛАР ВА УЛАРНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Бу бобда икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун қуйиладиган асосий масалалар бу типдаги тенгламаларнинг энг содда вакили бўлган тор тебраниш тенгламаси мисолида баён қилинган ва уларни ечиш усуллари курсатиб ўтилган. Сўнгра гиперболик типдаги умумий чизиқли тенглама учун Риман функцияси таърифланган ва бундай тенгламалар учун қўйилган бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишнинг Риман усули баён қилинган. Боб сўнгида бу усулнинг татбиғи сифатида телеграф тенгламаси учун Коши ва Гурса масалалари Риман усули билан ечилган.

1–§. Умумий қўйилган Коши масаласи

D орқали x, y ўзгарувчилар текислигида чегара бўлаклари силлиқ S Жордан чизиғидан иборат бўлган соҳани белгилаймиз.

Фараз қилайлик, $u(x,y)$ функция D соҳада

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, $D \cup S$ да биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

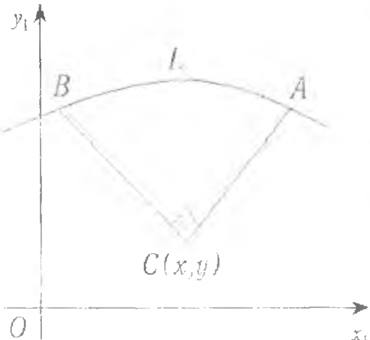
Ушбу

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right) = 0$$

айниятни D соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс–Остроградский формуласини қўллаймиз:

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)\right] dx_1 dy_1 =$$

$$= \int_S \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dx_1 = 0. \tag{2}$$



3 – чизма

Фараз қилайлик, L – ёпиқ бўлмаган силлиқ Жордан чизиғи бўлиб, қуйидаги икки шартни қаноатлантирсин:

а) (1) тенгламанинг $x+y=$ $=const$, $x-y=const$ характеристикалар оиласига тегишли бўлган ҳар бир тўғри чизиқ L билан битта нуқтада кесишсин;

б) L эгри чизиққа ўтказилган уринманинг йўналиши хеч бир нуқтада (1) тенглама характеристикаларининг йўналиши билан устма – уст тушмасин.

Ихтиёрий $C(x,y)$ нуқтадан чиқадиган $x_1-x=y_1-y$, $x_1-x=y-y_1$ характеристикалар L эгри чизиқ билан A ва B нуқталарда кесишсин (3 – чизма).

(2) формулани AB эгри чизиқ, CA ва CB характеристикалар билан чегараланган соҳага қўллаб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dx_1 = 0.$$

CA ва BC да, мос равишда, $dx_1 = dy_1$ ва $dx_1 = -dy_1$ бўлгани учун аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dx_1 - \int_{BC} du + \int_{CA} du = 0.$$

Бундан дарҳол

$$u(C) = \frac{1}{2}u(A) + \frac{1}{2}u(B) + \frac{1}{2}\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dx_1 \tag{3}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар (1) тенгламанинг $u(x, y)$ ечими

$$u|_l = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_l = \psi \tag{4}$$

шартларни қаноатлантирса, бунда φ ва ψ берилган, мос равишда икки ва бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар, l эса L да берилган йўналиш булиб, L нинг уринмаси билан устма-уст тушмайди, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y_1}$ номаълум функцияларни

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial l} = \psi$$

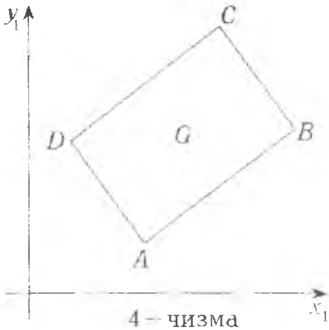
тенгликлардан аниқлаб оламиз, бу ерда s — L чизиқ ёйининг узунлиги.

Маълум $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y_1}$ миқдорларни (3) тенгликнинг унг томонига куйиб, (1) тенгламанинг (4) шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қиламиз. Юқорида юритилган мулоҳазалардан шу нарса келиб чиқадики, Коши масаласи келтирилган қуйилишда бирдан-бир турғун ечимга эгадир.

Одатда (1), (4) масала тор тебраниш тенгламаси учун умумий қуйилган Коши масаласи дейилади.

2-§. Асгейрссон принципи. Умумий қўйилган Гурса масаласи

(1) тенгламанинг тайин $A(x_0, y_0)$ нуқтадан чиқадиган $AB: x_1 - x_0 = y_1 - y_0$, $AD: x_1 - x_0 = y_0 - y_1$ характеристикалари ва $C(x, y)$ нуқтадан чиқадиган $CB: x_1 - x = y - y_1$, $CD: x_1 - x = y_1 - y$ характеристикаларидан ташкил топган характеристик туртбурчакни G орқали белгилаб оламиз (4-чизма).



4 – чизма

G соҳа учун (2) формулани қўллаб,

$$\int\limits_{AB+BC+CD+DA} \frac{\partial u}{\partial x_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dx_1 = 0$$

тенгликка эга бўламиз.

AB ва CD да $dx_1 = dy_1$, BC ва DA да $dx_1 = -dy_1$ бўлгани учун аввалги тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 - \int\limits_{BC} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 + \int\limits_{CD} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 -$$

$$- \int\limits_{DA} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 = \int\limits_{AB} du - \int\limits_{BC} du + \int\limits_{CD} du - \int\limits_{DA} du =$$

$$= 2u(B) - 2u(A) - 2u(C) + 2u(D) = 0.$$

Бундан

$$u(C) = u(B) + u(D) - u(A) \tag{5}$$

ёки

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

Бу тенглик (1) тенглама учун Асгейрссон принципи ёки ўрта қиймат тўғрисидаги теорема деб аталади.

Бунга асосан (1) тенглама $u(x, y)$ ечимининг характеристик тўртбурчак қарама – қарши учларидаги қийматларининг йиғиндиси бир – бирига тенгдир.

Асгейрссон принципи (1) тенгламага масала қўйишда ва қўйилган тенгламаларни ечишда муҳим роль ўйнайди.

(1) тенгламанинг $u(x, y)$ ечими

$$u|_{AB} = \varphi(x_1), \quad u|_{AD} = \psi(x_1), \quad \varphi(A) = \psi(A) \tag{6}$$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда 4 – чизмада B ва D нуқталарнинг координаталари мос равишда

$$\left(\frac{x + x_0 + y - y_0}{2}, \frac{x - x_0 + y + y_0}{2}\right) \text{ ва } \left(\frac{x + x_0 - y + y_0}{2}, \frac{-x + x_0 + y + y_0}{2}\right)$$

шартлардан иборатлигини эътиборга олсак, (5) га асосан, (1), (6) масаланинг ечими учун

$$u(x,y)=\varphi\left(\frac{x+y+x_0-y_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y+x_0+y_0}{2}\right)-\varphi(x_0) \quad (7)$$

формула келиб чиқади.

Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлса, (7) формула билан аниқланган $u(x,y)$ функция (1), (6) масаланинг регуляр ечимидан иборат бўлади. Бу масала ечимининг ягоналиги Асгейрссон принципидан ёки (7) формулани ҳосил қилиш усулидан дарҳол келиб чиқади.

Одатда (1), (6) масала тор тебраниш тенгламаси учун умумий қўйилган Гурса масаласи дейилади.

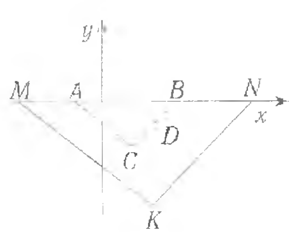
3–§. Характеристик учбурчакда Коши, Гурса ва Дарбу масалалари

x, y ўзгарувчилар текислигида (1) тенгламанинг $MK: x+y=m$, $NK: x-y=n$ характеристикалари ва $MN=\{(x,y): y=0, m<x<n\}$ кесма билан чегараланган D соҳани қарайлик. Бу соҳа одатда (1) тенглама учун характеристик учбурчак дейилади ва бу соҳада (1) тенглама учун қуйидаги масалаларни ўрганиш мумкин.

1. Коши масаласи. (1) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва

$$u|_{MN}=\tau(x), \quad m\le x\le n, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{MN}=\nu(x), \quad m<x<n \quad (9)$$



5 – чизма

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

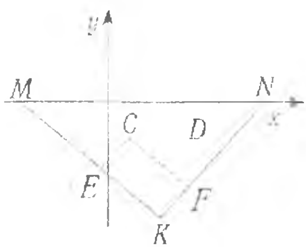
Бу ерда $\tau(x)\in C[m,n]\cap C^2(m,n)$, $\nu(x)\in C^1(m,n)$ – берилган функциялар бўлиб, масала ечимидан $u_y\in C(D\cup MN)$ шарт бажарилиши талаб қилинади.

Бу масала ечимини ихтиёрий $C(x_0,y_0)\in D$ нуқтада то – пиш мақсадида бу нуқтадан $x-y=x_0-y_0$, $x+y=x_0+y_0$ харак – теристикалар ўтказайлик. Бу характеристикаларнинг $y=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари $A(x_0+y_0,0)$, $B(x_0-y_0,0)$ бўлади (5 – чизма).

Биринчи параграфдаги L чизиқ сифатида $y=0$ чизиқни олайлик ва ҳосил бўлган ABC учбурчакка (3) формулани қўллайлик. У ҳолда $dy=0$ бўлиб, масаланинг ечими

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[\tau(x_0-y_0)+\tau(x_0+y_0)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\nu(t)dt \qquad (10)$$

кўринишда берилишини топамиз. (10) формула I бобнинг 4-§ ида характеристикалар усулида ҳам топилган.



6 – чизма

2. Гурса масаласи. (1) тенг – ламанинг D соҳада регуляр, D да узлуксиз ва

$$u|_{\overline{MK}}=\varphi(x),\quad m\le x\le\frac{m+n}{2}, \qquad (11)$$

$$u|_{NK}=\psi(x),\quad \frac{m+n}{2}\le x\le n \qquad (12)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда

$$\varphi(x)\in C\left[m,\frac{m+n}{2}\right]\cap C^2\left(m,\frac{m+n}{2}\right),\psi(x)\in C\left[\frac{m+n}{2},n\right]\cap C^2\left(\frac{m+n}{2},n\right) -$$

– берилган функциялар бўлиб, $\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)=\psi\left(\frac{m+n}{2}\right)$ тенглик бажарилади.

Бу масала ечимини ихтиёрий $C(x_0,y_0)\in D$ нуқтада топиш мақсадида бу нуқтадан $x-y=x_0-y_0$, $x+y=x_0+y_0$ характеристикалар ўтказайлик. Бу характеристикаларнинг MK ва NK характеристикалар билан кесишиш нуқталари мос равишда

$$E\left(\frac{m+x_0-y_0}{2},\frac{m-x_0+y_0}{2}\right),\quad F\left(\frac{x_0+y_0+n}{2},\frac{x_0+y_0-n}{2}\right)$$

бўлади (6-чизма). Ҳосил бўлган $CEKF$ характеристик тўртбурчакка Асгейрссон принципини қўллаб, Гурса масаласининг ечими

$$u(x_0,y_0)=\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{n+x_0+y_0}{2}\right)-\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

кўринишида берилишини топамиз.

3. **Дарбунинг биринчи масаласи.** (1) тенгламанинг D соҳада регуляр, D да узлуксиз ва (8), (11) [(8), (12)] шарт–ларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу ерда берилган функциялар $\tau(m)=\varphi(m)$ $[\tau(n)=\psi(n)]$ шартларни қаноатлантириши талаб қилинади.

Бу масала ечимини Асгейрссон принципидан фойдала–ниб топамиз. Асгейрссон принципини 7–чизмадаги $CE_1E_2E_3$ характеристик тўртбурчакка қўлласак,

$$u(C)=u(E_1)+u(E_3)-u(E_2) \tag{13}$$

келиб чиқади.

Характеристик тўртбурчак томонларининг

$CE_1: x+y=x_0+y_0,$

$E_1E_2: x-y=x_0+y_0,$

$E_2E_3: x+y=m,$

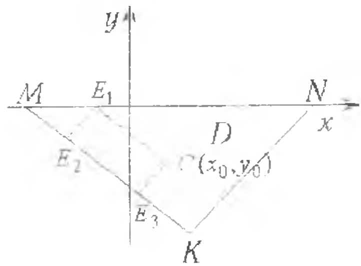
$E_3C: x-y=x_0-y_0$

тенгламаларидан $E_1(x_0+y_0,0)$,

$$E_3\left(\frac{m+x_0+y_0}{2},\frac{m-x_0-y_0}{2}\right),$$

$$E_2\left(\frac{m+x_0-y_0}{2},\frac{m-x_0+y_0}{2}\right)$$

ларни топамиз ва (13) га қўямиз.



7 – чизма

Натижада, (8) ва (11) шартларни эътиборга олиб, масала ечимини топамиз:

$$u(x_0,y_0)=\tau(x_0+y_0)+\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right)-\varphi\left(\frac{m+x_0+y_0}{2}\right).$$

(8), (12) шартларни қаноатлантирувчи масаланинг ечими қуйидаги формула билан аниқланиши ҳам худди шу усул билан исботланади:

$$u(x_0, y_0) = \tau(x_0 - y_0) + \psi\left(\frac{n + x_0 + y_0}{2}\right) - \psi\left(\frac{n + x_0 - y_0}{2}\right).$$

Бу масала ечимининг ягоналиги Асгейрссон принципи—дан келиб чиқади. Баъзида бу масалани тўғридан—тўғри Дарбу масаласи деб аталади.

4. Дарбунинг иккинчи (Коши—Гурса) масаласи.

(1) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва (9), (11), [(9), (12)] шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин (бу ерда ҳам $u_y(x,y) \in C(D \cup MN)$ талаб қилинади).

Масала ечимини (10) кўринишда қидирамиз, бу ерда ҳозирча $\tau(x)$—номаълум функция. (10) функция (1) тенгла—мани ва (9) шартни қаноатлантиради.

Номаълум $\tau(x)$ функцияни шундай танлайликки, (10) функция (11) шартни ҳам қаноатлантирсин.

(10) ни (11) га қўйсак,

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{2}\left[\tau(2x_0 - m) + \tau(m)\right] - \frac{1}{2}\int_m^{2x_0 - m} \nu(t)dt, \quad m \le x_0 \le \frac{m+n}{2}$$

тенглик келиб чиқади. Бу ерда $2x_0 - m = z \quad (m \le z \le n)$ белгилаш киритсак ва $\tau(m) = \varphi(m)$ эканини эътиборга олсак,

$$\tau(z) = 2\varphi\left(\frac{z+m}{2}\right) - \varphi(m) + \int_m^z \nu(t)dt$$

тенгликка эга бўламиз.

Буни (10) га қўйиб, масала ечимини топамиз:

$$u(x_0, y_0) = \varphi\left(\frac{m + x_0 - y_0}{2}\right) + \varphi\left(\frac{m + x_0 + y_0}{2}\right) - \varphi(m) + \int_m^{x_0 + y_0} \nu(t)dt.$$

Худди шу усул билан (9), (12) шартларни қаноатланти—рувчи масаланинг ечими учун

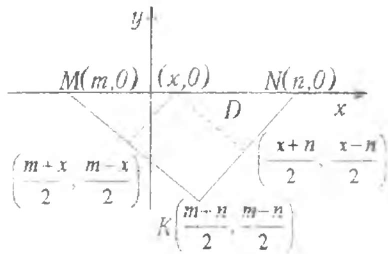
$$u(x_0, y_0) = \psi\left(\frac{n + x_0 - y_0}{2}\right) + \psi\left(\frac{n + x_0 + y_0}{2}\right) - \psi(n) + \int_{x_0 - y_0}^{n} \nu(t)dt$$

формула ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Бу масала ечимининг ягоналиги Коши масаласи ечими—нинг ягоналигидан келиб чиқади. Баъзида бу масалани Коши—Гурса масаласи деб ҳам аталади.

4–§. Силжишли масалалар

Аввалги параграфларда баён қилинган масалалардан кўринадики, масалаларни баён қилишда чегаравий шартлар D соҳа чегарасининг бир қисмидагина берилиб, қолган қисми эса чегаравий шартлардан озод қолмоқда. Иккинчи томондан, Гурса ва Дарбу масалаларининг қуйилишидан (Астейрссон принципидан ҳам) келиб чиқадики, D соҳада (1) тенглама учун Дирихле масаласи, яъни D да (1) тенгламанинг $u|_{MN\cup MK\cup NK}=\psi(x,y)$ шартни



8 – чизма

қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала қаралса, у ортиқча шартли масала бўлар экан. Булар асосида 1960 йилларда келиб қуйидаги савол пайдо бўлди: гиперболик типдаги тенгламалар учун характеристик учбурчак чегарасининг барча қисмида чегаравий шартлар берилган коррект масала мавжудми? Бу саволга 1960 йилларнинг охирига келиб А.М. Нахушев томонидан ижобий жавоб берилди [24]. Қуйида биз ана шу масалаларнинг баъзиларини баён қиламиз.

Шундай қилиб (1) тенгламани 8–чизмадаги $D\equiv MNK$ характеристик учбурчакда қараймиз.

1 масала. (1) тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$ ечими топилсин:

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ m\le x\le n; \tag{8}$$

$$\alpha(x)u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+\beta(x)u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\gamma(x),\quad m\le x\le n, \tag{14}$$

бу ерда $\tau(x),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)\in C[m.n]\cap C^2(m,n)$ – берилган функциялар бўлиб,

$$\begin{gathered}\alpha(x)\ne\beta(x),\quad m\le x\le n,\quad \alpha(n)\beta(m)\ne 0,\\ \alpha(n)[\gamma(m)-\alpha(m)\tau(m)]=\beta(m)[\gamma(n)-\beta(n)\tau(n)]\end{gathered} \tag{15}$$

шартларни қаноатлантиради.

Агар бу ерда ихтиёрий $x\in[m,n]$ учун

$$(x,0)\in \overline{MN},\qquad \left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)\in \overline{MK},\ \left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)\in \overline{NK}$$

эканлигини эътиборга олсак, (8) шарт номаълум функция-нинг $\overline{MN}$ даги қийматини, (14) шарт эса унинг $\overline{MK}$ ва $\overline{NK}$ даги қийматлари орасидаги муносабатни ифодалаётгани, ва, демак, бу масалада D соҳа чегарасининг барча қисми чегаравий шарт билан банд эканлиги келиб чиқади.

$$(x,0),\quad \left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right),\quad \left(\frac{m+n}{2},\frac{m-n}{2}\right),\quad \left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)$$

нуқталар характеристик туртбурчакнинг учларидан иборат-лигини инобатга олсак, Асгейрссон принципига асосан

$$u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=u(K)+\tau(x) \qquad (14_1)$$

келиб чиқади, бу ерда $u(K)$ аниқ сон булиб, (15) даги иккинчи ва учинчи шартларга асосан, (14) дан бир қийматли аниқланади.

Бу тенглик (14) шарт билан биргаликда икки номаъ-лумли икки тенгламалар системасини ташкил этиб, (15) даги биринчи шартга асосан, бу системадан $u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)$, $u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)$ лар бир қийматли топилади, демак, берилган масала Гурса масаласига келади.

Гурса масаласи коррект қуйилганлиги учун 1-масала ҳам коррект қуйилган булади.

Изоҳ. (15) даги биринчи шарт масала коррект қуйилган булиши учун муҳим роль уйнайди. Ҳақиқатан ҳам, масалан, агар $\alpha(x)\equiv\beta(x)\equiv 1$ булса, масала фақат ва фақат $\tau(x)-\tau(n)=$ $=\gamma(x)-\gamma(n)$ шарт бажарилгандагина ечимга эга ва бунда масала чексиз куп чизиқли боғлиқ булмаган ечимларга эга булади.

2-масала. (1) тенгламанинг қуйидаги шартларни қа-ноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup MN)\cap C^2(D)$ ечими топилсин:

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad m<x\leq n; \tag{8}$$

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+\beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\gamma(x),\ m<x<n. \tag{16}$$

Бу ерда $\tau(x)\in C[m,n]\cap C^2(m,n)$, $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)\in C[m,n]\cap C^1(m,n)$ – берилган функциялар бўлиб, $\alpha(x)\neq\beta(x)$, $x\in[m,n]$ шартни қаноатлантиради.

Коши масаласи коррект қўйилганлигига асосланиб, масала ечимини

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x-y)+\tau(x+y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt \tag{10}$$

кўринишида қидирамиз, бу ерда $\nu(x)\in C^1(m,n)$ – ҳозирча номаълум функция.

(10) формула билан аниқланувчи $u(x,y)$ функция (1) тенгламани ва (8) шартни қаноатлантиради. $\nu(x)$ функцияни шундай танлаймизки, (10) функция (16) шартни ҳам қаноатлантирсин.

(10) га асосан

$$u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)=\frac{1}{2}[\tau(x)+\tau(m)]-\frac{1}{2}\int\limits_m^x\nu(t)\,dt.$$

$$u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\frac{1}{2}[\tau(n)+\tau(x)]-\frac{1}{2}\int\limits_x^n\nu(t)\,dt.$$

Бу тенгликлардан x бўйича ҳосила олиб, сўнгра (16) га қўйиб, $\alpha(x)\neq\beta(x)$, $m\leq x\leq n$ эканлигини инобатга олсак, $\nu(x)$ функция

$$\nu(x)=\{[\alpha(x)+\beta(x)]\cdot\tau'(x)-2\gamma(x)\}/[\alpha(x)-\beta(x)]$$

тенглик билан бир қийматли топилади. Бундан ва берилган функцияларга қўйилган шартлардан $\nu(x)\in C^1(m,n)$ келиб чиқади.

Бу ерда ҳам масала коррект қўйилган бўлиши учун $\alpha(x)\neq\beta(x)$, $m\leq x\leq n$ шарт муҳимдир. Акс ҳолда масала фақат ва фақат $[\alpha(x)+\beta(x)]\cdot\tau'(x)=2\gamma(x)$ тенглик бажарил–

ганда ечимга эга бўлади. Агар бу шарт бажарилган бўлса, (10) формула ихтиёрий $v(x)\in C^1(m,n)$ функцияда масаланинг ечими бўлаверади.

3 — масала. (1) тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D\cup MN)\cap C^2(D)$ ечими топилсин:

$$u_y(x,0)=v(x), \qquad m<x<n; \tag{9}$$

$$u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+\beta(x)\,u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\gamma(x), \quad m\le x\le n,$$
$$\beta(m)\,u(n,0)=\beta_1, \tag{17}$$

бу ерда $v(x)\in C^1(m,n)$ — берилган функция $x\to n$, $x\to m$ да бирдан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин; $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — берилган функциялар бўлиб, $C[m,n]\cap C^2(m,n)$ синфга тегишли ва $\beta(x)\ne -1$, $x\in[m,n]$; β_1 — берилган сон бўлиб, $\beta(m)=0$ бўлганда ноль деб олинади.

Коши — Гурса масаласи коррект қўйилганлигига асосланиб, масала ечимини

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-\varphi(m)+\int_m^{x+y}v(t)\,dt \tag{18}$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда $\varphi(x)\in C[m,n]\cap C^2(m,n)$ — номаълум функция.

(18) функция (1) тенгламани ва (9) шартни қаноатлантиради. $\varphi(x)$ функцияни шундай танлайликки, (18) функция (17) шартларни ҳам қаноатлантирсин.

(18) га асосан

$$u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)=\varphi(x), \tag{19}$$

$$u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\varphi(x)+\varphi(n)-\varphi(m)+\int_m^x v(t)dt.$$

Буларни (17) шартларнинг биринчисига қўйсак,

$$[1+\beta(x)]\varphi(x)=\gamma(x)-\beta(x)[\varphi(n)-\varphi(m)]-\beta(x)\int_m^x v(t)dt \tag{20}$$

тенглик келиб чиқади.

(17) шартлар ва (19) тенгликдан $x = n$ ва $x = m$ да

$$u(K) = \gamma(n) - \beta_1 = \varphi(n),$$

$$u(M) = \gamma(m) - \beta(m)[\gamma(n) - \beta_1] = \varphi(m),$$

яъни $\varphi(m), \varphi(n)$ катталиклар берилганлар орқали тўла аниқланиши келиб чиқади.

Буни ва $\beta(x) \neq -1,\ x \in [m,n]$ эканлигини инобатга олсак, $\varphi(x)$ функция (20) тенгликдан бир қийматли аниқланади. Берилган функцияларга қўйилган шартларга асосан, топилган $\varphi(x)$ функция $C[m,n] \cap C^2(m,n)$ синфга тегишли бўлади.

Бу масалада ҳам $\beta(x) \neq -1,\ x \in [m,n]$ шарт муҳимдир. Акс ҳолда, масала фақат ва фақат $\gamma'(x) = -\nu(x)$ шарт бажарилганда ечимга эга бўлади ва бу шарт бажарилган бўлса, (18) формула ихтиёрий $\varphi(x)$ функция олинганда ҳам масала ечимини ифодалайди.

А.М.Нахушев томонидан (1) тенглама учун қўйилган ва ўрганилган масалалар ҳозирги кунгача гиперболик типдаги анча мураккаб тенгламалар учун ҳам ўрганилди ва математик адабиётларда «силжишли масалалар» деб номланди.

Маълумки

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0$$

тенгламанинг коэффициентлари қаралаётган соҳа ёпиғида етарлича силлиқ бўлса, бу тенглама учун классик масалалар (Коши, Гурса, Дарбу, Коши−Гурса масалалари) худди тор тебранишининг тенгламасидагидек қўйилади ва коррект бўлади, яъни тенглама кичик ҳадларининг коэффициентлари классик масалалар корректлигига таъсир кўрсатмайди. Силжишли масалаларни ўрганишда эса тенглама кичик ҳадларининг коэффициентлари масала қўйилишига ва корректлигига жиддий таъсир кўрсатади, яъни ҳар бир тенглама учун ўзига мос (агар мавжуд бўлса) силжишли масала қўйилади.

Масалан, агар $n - m \neq 2k\pi,\ k = 0,1,2,...$ бўлса,

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

тенглама учун

$$u(x,0) = 0, \quad m \leq x \leq n; \tag{8$_1$}$$

$$\cos\frac{n-x}{2}\frac{d}{dx}u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+\cos\frac{x-m}{2}\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=0 \quad (16_1)$$

бир жинсли масала фақат тривиал ечимга эга.

Ҳақиқатан ҳам, (16_1) шарт ва Асгейрссон принципини ифодаловчи (14_1) тенгликдан келиб чиқувчи ушбу

$$\frac{d}{dx}u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)+\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=\tau'(x)$$

тенгликдан

$$u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)=u|_{MK}=0, \qquad u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)=u|_{NK}=0$$

келиб чиқади. Бу эса (8_1), (16_1) масала бир жинсли Гурса масаласига эквивалентлигини кўрсатади. Охирги масала эса фақат тривиал ечимга эга.

Лекин (8_1), (16_1) масала $u_{xx}-u_{yy}-u=0$ тенглама учун тривиал бўлмаган $u(x,y)=\sin y$ ечимга эга. Бу тенглама учун эса (8_1) ва

$$\cos\frac{n-x}{2}A_{mx}^{1,1}\left[\frac{d}{dx}u\left(\frac{m+x}{2},\frac{m-x}{2}\right)\right]+$$
$$+\cos\frac{x-m}{2}A_{nx}^{1,1}\left[\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+n}{2},\frac{x-n}{2}\right)\right]=0$$

шартлар билан берилган масала коррект қуйилган бўлади [31], бу ерда

$$A_{kx}^{1,1}[f(x)]=f(x)-\int_k^x f(t)\frac{t-k}{x-k}\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{(x-k)(x-t)}]\,dt,$$

$J_0(x)$ – биринчи турдаги нолинчи тартибли Бессел функцияси.

Изоҳ. Юқорида кўриб ўтилган силжишли масалалардан илгари ўрганилган чегаравий масалалар келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам:

1. 1 – ва 2 – силжишли масалалар Гурса масаласига эквивалент. Буни 1 – масала мисолида кўрсатдик.

2. 1 – ва 2 – силжишли масалалардан $\beta(x)\equiv 0, \alpha(x)\neq 0$ $[\alpha(x)\equiv 0, \beta(x)\neq 0]$ да Дарбунинг биринчи масаласи келиб чиқади.

3. $\beta(x)\equiv 0$ да 3 – силжишли масаладан Коши – Гурса масаласи келиб чиқади.

5–§. Риман функцияси

Маълумки, иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг коэффициентлари етарли умумий шартларни қаноатлантирганда, уни

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \tag{21}$$

каноник кўринишга келтириш мумкин. Агар (21) тенгламанинг a ва b коэффициентларини дифференциалланувчи деб ҳисобласак, L операторга қўшма бўлган оператор

$$M\upsilon=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a\upsilon)-\frac{\partial}{\partial y}(b\upsilon)+c\upsilon$$

кўринишда ёзилади.

L операторнинг Риман функцияси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\upsilon(x,y)$ функцияга айтилади:

1) $M\upsilon=0$, (22)

2) $x=x_1$, $y=y_1$ характеристикаларда

$$\upsilon(x_1,y)=e^{\int\limits_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)d\tau}, \quad \upsilon(x,y_1)=e^{\int\limits_{x_1}^{x}b(t,y_1)dt}, \tag{23}$$

бу ерда (x_1,y_1) нуқта (21) тенглама берилган D соҳанинг ички нуқтасидир.

Агар қўшимча $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$ ва $c(x,y)$ функцияларнинг узлуксизлигини талаб қилинса, у ҳолда Риман функцияси мавжуд бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (22) тенгламани x_1 дан x гача ва y_1 дан y гача икки марта интеграллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\upsilon(x,y)-\upsilon(x,y_1)-\upsilon(x_1,y)+\upsilon(x_1,y_1)-\int\limits_{y_1}^{y}a(x,\tau)\upsilon(x,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)\upsilon(x_1,\tau)d\tau-\int\limits_{x_1}^{x}b(t,y)\upsilon(t,y)dt+\int\limits_{x_1}^{x}b(t,y_1)\upsilon(t,y_1)dt+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x}dt\int\limits_{y_1}^{y}c(t,\tau)\upsilon(t,\tau)d\tau=0. \tag{24}$$

(23) шартларга асосан

$$\frac{\partial \upsilon(x_1, y)}{\partial y} = a(x_1, y)\upsilon(x_1, y), \quad \frac{\partial \upsilon(x, y_1)}{\partial x} = b(x, y_1)\upsilon(x, y_1)$$

ёки

$$\upsilon(x, y_1) - \int_{x_1}^{x} b(t, y_1)\upsilon(t, y_1)dt = 1,$$

$$\upsilon(x_1, y) - \int_{y_1}^{y} a(x_1, \tau)\upsilon(x_1, \tau)d\tau = 1,$$

$$\upsilon(x_1, y_1) = 1.$$

Буларни эътиборга олсак, (24) тенглик $\upsilon(x, y)$ га нисбатан Вольтерранинг иккинчи турдаги чизиқли интеграл тенгламаси кўринишида ёзилади:

$$\upsilon(x, y) - \int_{x_1}^{x} b(t, y)\upsilon(t, y)dt - \int_{y_1}^{y} a(x, \tau)\upsilon(x, \tau)d\tau + \\ + \int_{x_1}^{x} dt \int_{y_1}^{y} c(t, \tau)\upsilon(t, \tau)d\tau = 1 \qquad (25)$$

(25) тенглама изланаётган функцияни бир қийматли

$$\upsilon(x, y) = w(x, y) + \int_{x_1}^{x} w(t, y)b(t, y)\exp\left(\int_{t}^{x} b(t_1, y)dt_1\right)dt + \\ + \int_{y_1}^{y} w(x, \tau)a(x, \tau)\exp\left(\int_{\tau}^{y} a(x, \tau_1)d\tau_1\right)d\tau$$

алмаштириш натижасида қуйидаги интеграл тенгламага келади:

$$w(x, y) + \int_{x_1}^{x} dt \int_{y_1}^{y} K_0(x, y; t, \tau)\, w(t, \tau)d\tau = 1, \qquad (26)$$

бу ерда

$$K_0(x, y; t, \tau) = c(t, \tau) - b(t, y)a(t, \tau)\exp\left(\int_{\tau}^{y} a(t, \tau_1)d\tau_1\right) -$$

$$-a(x, \tau)b(t, \tau)\exp\left(\int_{t}^{x} b(t_1, \tau)dt_1\right) + b(t, \tau)\int_{t}^{x} c(t_1, \tau)\exp\left(\int_{t}^{t_1} b(t_2, \tau)dt_2\right)dt_1 +$$

$$+a(t,\tau)\int_{\tau}^{t} c(t,\tau_1)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1} a(t,\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1.$$

(26) Вольтерранинг иккинчи турдаги интеграл тенг-ламаси бўлиб, у ягона ечимга эгадир.

Риман функцияси фақат x, y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмай, x_1, y_1 ўзгарувчиларга ҳам боғлиқ бўлгани учун, уни

$$\upsilon = R(x, y; x_1, y_1)$$

кўринишида белгилаб олиш табиийдир.

(23) га асосан, ушбу

$$\frac{\partial R(x_1, y; x_1, y_1)}{\partial y} - a(x_1, y)R(x_1, y; x_1, y_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(x, y_1; x_1, y_1)}{\partial x} - b(x, y_1)R(x, y_1; x_1, y_1) = 0, \tag{27}$$

$$R(x_1, y_1; x_1, y_1) = 1$$

ва

$$R(x, y; x, y_1) = e^{\int_{y_1}^{y} a(x,\tau)d\tau}, \quad R(x, y; x_1, y) = e^{\int_{x_1}^{x} b(t,y)dt}$$

шартларни эътиборга олиб,

$$\frac{\partial R(x, y; x, y_1)}{\partial y_1} + a(x, y_1)R(x, y; x, y_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(x, y; x_1, y)}{\partial x_1} + b(x_1, y)R(x, y; x_1, y) = 0, \tag{28}$$

$$R(x, y; x, y) = 1$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Риман функцияси (22) тенгламанинг ечими бўлгани учун, яъни

$$M\,R(x_1, y_1; x, y) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}(aR) - \frac{\partial}{\partial y_1}(bR) = -cR(x_1, y_1; x, y)$$

тенглик ўринлидир. Бунга асосан, D соҳадаги етарли силлиқ $u(x_1, y_1)$ функция учун ушбу

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\left[u(x_1,y_1)R(x_1,y_1;x,y)\right]-R(x_1,y_1;x,y)Lu(x_1,y_1)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y_1}-aR\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}-bR\right)\right] \qquad (29)$$

айниятнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(29) айниятни x_1 ва y_1 ўзгарувчилар бўйича $x_0 \le x_1 \le x$, $y_0 \le y_1 \le y$ оралиқларда интеграллаб (бу ерда $(x_0,y_0)-D$ соҳанинг ихтиёрий нуқтаси), (27) га асосан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$u(x,y)=u(x_0,y)R(x_0,y;x,y)+u(x,y_0)R(x,y_0;x,y)-$$
$$-u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y)+$$
$$+\int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,y_1)R(x_0,y_1;x,y)-\frac{\partial R(x_0,y_1;x,y)}{\partial y_1}\right]u(x_0,y_1)dy_1+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left[b(x_1,y_0)R(x_1,y_0;x,y)-\frac{\partial R(x_1,y_0;x,y)}{\partial x_1}\right]u(x_1,y_0)dx_1-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}dx_1\int_{y_0}^{y}R(x_1,y_1;x,y)Lu(x_1,y_1)\,dy_1. \qquad (30)$$

Бу ердаги Риман функциясининг ҳосилалари қатнашган интегралларни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_{y_0}^{y}u(x_0,y_1)\frac{\partial R(x_0,y_1;x,y)}{\partial y_1}dy_1=u(x_0,y)R(x_0,y;x,y)-$$
$$-u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y)-\int_{y_0}^{y}R(x_0,y_1;x,y)\frac{\partial u(x_0,y_1)}{\partial y_1}dy_1,$$

$$\int_{x_0}^{x}u(x_1,y_0)\frac{\partial R(x_1,y_0;x,y)}{\partial x_1}dx_1=u(x,y_0)R(x,y_0;x,y)-$$
$$-u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y)-\int_{x_0}^{x}R(x_1,y_0;x,y)\frac{\partial u(x_1,y_0)}{\partial x_1}dx_1.$$

Буларга асосан, (30) тенглик

$$u(x,y) = u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y) +$$
$$+\int_{x_0}^{x} R(x_1,y_0;x,y)\left[\frac{\partial u(x_1,y_0)}{\partial x_1} + b(x_1,y_0)u(x_1,y_0)\right]dx_1 +$$
$$+\int_{y_0}^{y} R(x_0,y_1;x,y)\left[\frac{\partial u(x_0,y_1)}{\partial y_1} + a(x_0,y_1)u(x_0,y_1)\right]dy_1 +$$
$$+\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)Lu(x_1,y_1)dy_1 \tag{31}$$

кўринишда ёзилади.

Агар $u(x,y) = R(x_0,y_0;x,y)$ бўлса, (31) дан (28) га асосан

$$\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)L\,R(x_0,y_0;x_1,y_1)dy_1 = 0 \tag{32}$$

эканлиги келиб чиқади.

(32) айниятдан $R(x,y;x_1,y_1)$ Риман функцияси охирги жуфт x_1, y_1 ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли

$$LR(x,y;x_1,y_1) = 0 \tag{33}$$

тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади. (21) тенглама — нинг ўнг томонидаги $f(x,y)$ функция узлуксиз бўлганда, унда

$$u_0(x,y) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)dy_1$$

функция унинг хусусий ечимларидан бири бўлади. Бунга (28) ва (33) га асосан, бевосита ҳисоблаш билан ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

6−§. Риман усули

Аввалги параграфда кўрдикки, агар $a_x(x,y)$, $b_y(x,y)$ ва $c(x,y)$ функциялар узлуксиз бўлса,

$$Lu = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f \tag{21}$$

тенглама учун $R(x_1,y_1:x,y)$ Риман функцияси мавжуд ва бу функция x_1, y_1 аргументлар бўйича $Lu = 0$ тенгламани, x, y

аргументлар буйича қўшма $M\upsilon = 0$ тенгламани қаноатлан–тиради.

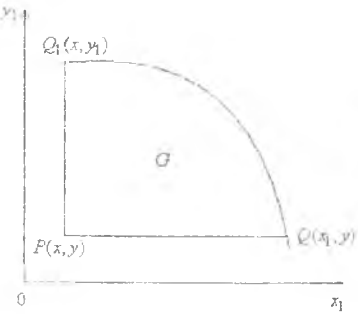
Риман функциясининг бу ва бошқа хоссаларидан фой–даланиб, (21) тенглама учун умумий қўйилган Коши ва Гурса масалалари ечимини топиш мумкин. Бу усул Риман усули деб аталиб, аввал биз уни 1– ва 2–§ ларда тор тебраниш тенгламаси (бу ерда $R(x_1, y_1; x, y) = 1$) учун қўллаган эдик.

Шундай қилиб, (21) тенгламани қараймиз. Узлуксиз эг–риликка эга бўлган очиқ Жордан чизиғини δ билан белги–лаймиз. Бу чизиқ шундай хоссага эга бўлсинки, ўзининг ҳеч бир нуқтасида (21) тенгламанинг характеристикалари билан уринишга эга бўлмасин. l эса δ да берилган вектор бўлиб, δ нинг уринмаси билан ҳеч қандай нуқтада устма–уст тушмасин.

1. Коши масаласи. (21) тенгламанинг

$$u\big|_{\delta} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{\delta} = \psi \tag{34}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда φ ва ψ мос равишда икки марта ва бир марта узлуксиз дифференциалланувчи берилган функция–лардир.



9-чизма

Бу масала ечимини топиш учун δ чизиқда ётмайдиган ихтиёрий $P(x, y)$ нуқта олайлик. $P(x, y)$ нуқтадан чиқувчи $x_1 = x$, $y_1 = y$ характеристикалар δ эгри чизиқ билан Q_1 ва Q нуқталарда кесишади деб фараз қиламиз.

PQ, PQ_1 тўғри чизиқлар ва δ эгри чизиқнинг QQ_1 қисми билан чегараланган соҳани G орқали белгилаб оламиз (9–чизма).

G соҳада ихтиёрий икки марта узлуксиз дифферен–циалланувчи $u(x_1, y_1)$ ва $\upsilon(x_1, y_1)$ функциялар учун қуйидаги айният ўринли бўлади:

$$2(\upsilon Lu - uM\upsilon) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right). \qquad (35)$$

Бу айниятни G соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс – Остроградский формуласини қўллаш натижасида

$$2\int_G (\upsilon Lu - uM\upsilon)dx_1\,dy_1 =$$

$$\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $S - G$ соҳанинг чегараси, яъни $PQ + QQ_1 + Q_1P$.

PQ да $dy_1 = 0$, PQ_1 да $dx_1 = 0$ бўлгани учун аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$2\int_G (\upsilon Lu - uM\upsilon)\,dx_1 dy_1 =$$

$$\int_{QQ_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1 +$$

$$\int_{Q_1}^{P}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \int_P^Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1. \qquad (36)$$

Бу ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи интеграл – ларда $u(x_1, y_1)$ функциянинг ҳосилалари қатнашган ҳадларни бўлаклаб интеграллаб, ушбу

$$\int_{Q_1}^{P}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 = (u\upsilon)\Big|_{Q_1}^{P} - 2\int_{Q_1}^{P} u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y_1} - a\upsilon\right)dy_1,$$

$$\int_P^Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1 = (u\upsilon)\Big|_P^Q - 2\int_P^Q u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} - b\upsilon\right)dx_1 \qquad (37)$$

тенгликларга эга бўламиз.

(36) формулада $u(x_1, y_1)$ функция (21), (34) Коши масаласининг ечими, $\upsilon(x_1, y_1)$ эса Риман функцияси, яъни

$$\upsilon(x_1, y_1) = \upsilon(P_1) = R(x_1, y_1, x, y) = R(P_1, P)$$

бўлсин деб ҳисоблаймиз.

У ҳолда, δ эгри чизиққа P_1 нуқтадан ўтказилган нормални n орқали белгилаб, $dy_1 = \frac{dx_1}{dn} ds$, $dx_1 = -\frac{dy_1}{dn} ds$ формулаларни эътиборга олсак, (36) дан (37) га ва Риман функциясининг (27) хоссаларига асосан

$$u(P) = \frac{1}{2} u(Q) R(Q, P) + \frac{1}{2} u(Q_1) R(Q_1, P) -$$
$$-\frac{1}{2} \int_{QQ_1} \left[\frac{\partial u(P_1)}{\partial N} R(P_1, P) - u(P_1) \frac{\partial R(P_1, P)}{\partial N} \right] ds -$$
$$-\frac{1}{2} \int_{QQ_1} \left[a(P_1) \frac{dx_1}{\partial n} + b(P_1) \frac{dy_1}{\partial n} \right] R(P_1, P) u(P_1) ds + \tag{38}$$
$$+\int_G f(P_1) R(P_1, P) dx_1 dy_1$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда

$$\frac{\partial}{\partial N} = \frac{dx_1}{dn} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{dy_1}{dn} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

(34) бошланғич шартларга асосан (38) формуладаги $\frac{\partial u}{\partial N}$ ни ҳамма вақт бир қийматли аниқлаб олишимиз мумкин. (38) формула билан аниқланган $u(x, y)$ функциянинг (21) тенгламани қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, (38) формула (21), (34) Коши масаласининг ечимидан иборатдир. (38) формулани ҳосил қилиш жараёнидан, бу масала ечимининг ягоналиги ва турғунлиги ҳам келиб чиқади.

2. Гурса масаласи. (21) тенгламанинг $u(x, y_0) = \varphi(x)$, $u(x_0, y) = \psi(y)$ шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(y)$ – узлуксиз дифференциал–

[illegible] ҳамда $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$ шартни қаноатлантирувчи берилган функциялар.

Бу масала ечимининг ихтиёрий $P(x,y)$ нуқтадаги қийматини топайлик. Фараз қилайлик, $u(x,y)$ – Гурса масаласининг ечими, $R(x_1,y_1;x,y)$ эса (21) тенгламанинг Риман функцияси бўлсин. У ҳолда, улар учун (30) тенглик ўринли. (30) да $u(x,y_0)$, $u(x_0,y)$ ва $Lu(x,y)$ ни мос равишда $\varphi(x)$, $\psi(y)$ ва $f(x,y)$ га алмаштирсак, Гурса масаласи ечимини аниқловчи

$$u(x,y)=R(x,y_0;x,y)\varphi(x)+R(x_0,y;x,y)\psi(y)-$$

$$-R(x_0,y_0;x,y)\varphi(x_0)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\left[b(x_1,y_0)R(x_1,y_0;x,y)-\frac{\partial}{\partial x_1}R(x_1,y_0;x,y)\right]\varphi(x_1)dx_1+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left[a(x_0,y_1)R(x_0,y_1;x,y)-\frac{\partial}{\partial y_1}R(x_0,y_1;x,y)\right]\psi(y_1)dy_1-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x}dx_1\int\limits_{y_0}^{y}R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)dy_1$$

формула келиб чиқади. Бу формулани ҳосил қилиш жараёнидан ечимнинг ягоналиги ҳам келиб чиқади. Масала ечимининг турғунлигини кўрсатиш қийинчилик туғдирмайди.

7–§. Телеграф тенгламаси учун Коши ва Гурса масалалари

Маълумки, коэффициентлари ўзгармас бўлган гиперболик типдаги

$$F_{xx}-F_{yy}+aF_x+bF_y+cF=0$$

тенглама $F=\exp[(ax-by)/2]u$ алмаштириш натижасида

$$\Box_\lambda u=u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2 u=0 \qquad (39)$$

тенгламага келади.

Ўтказгичдан ўтаётган электр оқими кучи ва кучланиши бу тенгламани қаноатлантиргани учун уни «**телеграф тенгламаси**» дейилади.

(39) тенгламани $y<0$ ярим текисликнинг $MK: x+y=m$, $NK: x-y=n$ $(m<n)$ характеристикалар ва $M(m,0)\,N(n,0)$ кесма билан чегараланган соҳасида қарайлик (5–чизма).

1. Риман функцияси. (39) тенглама учун Риман функциясини топиш мақсадида $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ алмаштиришни бажарамиз. Унда телеграф тенгламаси

$$\Box'_\lambda W \equiv W_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\lambda^2 W=0 \qquad (39')$$

кўринишга келади; бу ерда $W(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$.

(39') тенглама учун Риман функцияси

$$V_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\lambda^2 V=0 \qquad (40)$$

тенгламанинг

$$V\big|_{\xi=\xi_0}=1, \quad V\big|_{\eta=\eta_0}=1 \qquad (41)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат.

Уни топайлик. (40) да ξ ни t билан, η ни эса z билан алмаштирамиз ва уни t бўйича $[\xi_0,\xi]$, z бўйича эса $[\eta_0,\eta]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$V(\xi,\eta)-V(\xi,\eta_0)-\int_{\eta_0}^{\eta}V_z(\xi_0,z)dz+\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V(t,z)dz=0.$$

Бу ердан (41) ни ҳисобга олиб, $V(\xi,\eta)$ га нисбатан қуйидаги интеграл тенгламани топамиз:

$$V(\xi,\eta)+\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V(t,z)dz=1. \qquad (42)$$

(42) Вольтерра типидаги интеграл тенглама бўлгани учун ягона ечимга эга. Уни кетма–кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $V_0=0$ ни олиб, кейинги яқинлашишларни

$$V_k=1-\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V_{k-1}(t,z)dz, \qquad k=1,2,...$$

формула бўйича топамиз:

$$V_0 = 0, \qquad V_1 = 1,$$

$$V_2 = 1 - \frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0),$$

$$V_3 = 1 - \frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0) + \frac{1}{(2!)^2}\left[\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^2,$$

....

Бу процессни давом эттириб, ихтиёрий $n \in N$ учун

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left[\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^k$$

тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Бу ерда $n \to \infty$ лимитга ўтиб ва

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = J_0(x)$$

тенгликни эътиборга олиб,

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = J_0[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}]$$

ни топамиз.

Демак, (39') тенглама учун Риман функцияси

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = J_0[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}]$$

функциядан иборат экан.

Бу функция ҳақиқатан ҳам (40) ва (41) шартларни қаноатлантиришига бевосита текшириб кўриш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. $J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]$ функция ξ_0, η_0 ўзгарувчилар бўйича ҳам (39') тенгламани қаноатлантиради.

x, y ўзгарувчиларга қайтиб ва $\xi_0 = x_0 + y_0$, $\eta_0 = x_0 - y_0$ белгилашни киритиб, (39) тенглама учун Риман функциясини топамиз:

$$R(x,y;x_0,y_0) = J_0[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}].$$

2. **Коши масаласи**. (39) тенглама учун 5−чизмадаги D соҳада Коши масаласини, яъни қуйидаги масалани қарайлик:

(39) тенгламанинг D соҳада регуляр ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x,y)\in C(\overline{D}),\quad u_\nu(x,y)\in C(D\cup MN);$$
$$u(x,0)=\tau(x),\qquad m\le x\le n; \tag{43}$$
$$u_\nu(x,0)=\nu(x),\qquad m<x<n,$$

бу ерда $\tau(x)$, $\nu(x)$ – берилган функциялар бўлиб, $\tau(x)\in \in C[m,n]\cap C^2(m,n)$, $\nu(x)\in C^1(m,n)$.

Қуйилган масалани Риман усули билан ечамиз. Масаланинг ечими $u(x,y)$ мавжуд деб фараз қилайлик. Унинг ихтиёрий $C(x_0,y_0)\in D$ нуқтадаги қийматини топиш учун ξ,η характеристик координаталарга ўтамиз. Бунда (39) тенглама (39') кўринишни, (43) шартлар эса

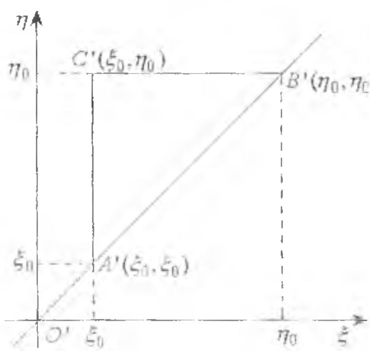
$$W(\xi,\xi)=\tau(\xi),\quad m\le\xi\le n;$$
$$W_\xi-W_\eta=\nu(\xi),\quad m<\xi<n \tag{43'}$$

кўринишни олади. Бу алмаштиришда xOy текисликдаги ABC учбурчак $\xi O'\eta$ текисликдаги $A'B'C'$ учбурчакка аксланади (5– ва 10– чизмалар).

$A'B'C'$ учбурчакда қуйидаги айният ўринли:

$$R\square_\lambda W - W\square_\lambda R\equiv\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}=0, \tag{44}$$

бу ерда $R=J_0[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}]$.



10 – чизма

$$P=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}(WR)-W\frac{\partial R}{\partial\eta},$$
$$Q=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(WR)-W\frac{\partial R}{\partial\xi}. \tag{45}$$

(44) айниятни $A'B'C'$ учбурчак бўйича интеграллаб ва Гаусс – Остроградский формуласини қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{B'C'A'}(-Q)d\xi+P\,d\eta=0 \tag{46}$$

$B'C'$ чизиқда $\eta=\eta_0=const$, $C'A'$ чизиқда $\xi=\xi_0=const$

[illegible] ва (45) тенгликларни эътиборга олиб ҳисоблай–миз:

$$\int_{B'C'} (-Q)d\xi + P\,d\eta = \frac{1}{2}\tau(x_0 - y_0) - \frac{1}{2}u(x_0, y_0),$$

$$\int_{C'A'} (-Q)d\xi + P\,d\eta = \frac{1}{2}\tau(x_0 + y_0) - \frac{1}{2}u(x_0, y_0), \tag{47}$$

$A'B'$ чизиқда $\eta = \xi$ бўлгани учун

$$\int_{A'B'} (-Q)d\xi + P\,d\eta = \int_{A'B'} (P - Q)d\xi.$$

Бундан

$$P - Q = \frac{1}{2}\left[W\left(\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \eta}\right) - R\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta}\right)\right],$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$ ва (43') тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$\int_{A'B'} (-Q)d\xi + Pd\eta = \frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \nu(x) J_0[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}\,]dx +$$

$$+\frac{\lambda y_0}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \tau(x)\frac{J_1[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}\,]}{\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}}dx. \tag{48}$$

(47) ва (48) ларни (46) га қўйиб, (39) тенглама учун Коши масаласи ечимининг ихтиёрий $C(x_0, y_0) \in D$ нуқтадаги қийматини аниқловчи формулага келамиз:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\tau(x_0 + y_0) + \tau(x_0 - y_0)\right] +$$

$$+\frac{\lambda y_0}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \tau(x)\frac{J_1[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}\,]}{\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}}dx + \tag{49}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \nu(x)\, J_0[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2 - y_0^2}\,]dx.$$

Берилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларга қўйилган шарт–лардан фойдаланиб, (49) формула билан аниқланувчи

$u(x_0, y_0)$ функция ҳақиқатан ҳам Коши масаласи шартларини қаноатлантиришини кўрсатиш қийин эмас.

(49) формула Коши масаласининг ихтиёрий ечими учун ўринлигини ва (39) тенглама учун Риман функцияси

$$R = J_0[\lambda\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}]$$

ягона эканлигини эътиборга олсак, (49) дан қўйилган масала ечимининг ягоналиги келиб чиқади.

Масала ечимининг турғунлигини кўрсатайлик.

Фараз қилайлик, $u_1(x, y)$ ва $u_2(x, y)$ (39) тенглама учун Коши масаласининг мос равишда

$$u_k|_{MN} = \tau_k(x), \quad m \le x \le n;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_k|_{MN} = \nu_k(x), \quad m < x < n$$

($k = 1,2$) шартларни қаноатлантирувчи ечимлари бўлиб,

$$|\tau_1(x) - \tau_2(x)| < \delta, \qquad |\nu_1(x) - \nu_2(x)| < \delta, \ m < x < n \tag{50}$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин, бу ерда δ – етарли кичик мусбат сон.

У ҳолда, $u_1(x, y)$ ва $u_2(x, y)$ функциялар учун (49) кўринишдаги формулалар ўринли бўлади. Уларни ҳадлаб айириб топамиз:

$$|u_1 - u_2| \le \frac{1}{2}|\tau_1(x + y) - \tau_2(x + y)| + \frac{1}{2}|\tau_1(x - y) - \tau_2(x - y)| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left|\int_{x-y}^{x+y}[\nu_1(t) - \nu_2(t)]J_0[\lambda\sqrt{(x - t)^2 - y^2}]\,dt\right| + \tag{51}$$

$$+ \frac{|\lambda y|}{4}\left|\int_{x-y}^{x+y}[\tau_1(t) - \tau_2(t)]\bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x - t)^2 - y^2}\right]dt\right|,$$

бу ерда $\bar{J}_1(z) = 2J_1(z)/z$ – Бессел – Клиффорд функцияси.

Бессел функциялари назариясидан маълумки, ихтиёрий чекли z учун шундай $c = const$ топиладики,

$$|J_0(z)| \le |I_0(z)| \le c, \quad |\bar{J}_1(z)| \le |\bar{I}_1(z)| \le c \tag{52}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бу ерда I_0, I_1 – мавҳум аргументли Бессел функциялари.

(50) ва (52) ни эътиборга олиб, (51) дан ихтиёрий $(x,y)\in D$ учун

$$|u_1-u_2|\le\delta(1+|y|c+|\lambda y^2|c/2) \tag{53}$$

тенгсизлик ўринли эканлигини топамиз. Бу ердан y, c ва λ лар чекли эканлигини ҳисобга олиб ва $\varepsilon=\delta(1+|y|c+|\lambda y^2|c/2)$ деб олиб, $|u_1-u_2|\le\varepsilon$ тенгсизликка келамиз. Бу эса ҳар бир чекли D соҳа ва λ учун Коши масаласининг ечими турғун эканлигини ифодалайди.

Демак, (39) тенглама учун Коши масаласи коррект қўйилган.

Изоҳ. $\lambda\in R$ бўлса, (53) да $c=1$ деб олиш мумкин.

Агар (49) да $\lambda=0$ десак, тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласи ечимини аниқловчи Даламбернинг

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[\tau(x_0+y_0)+\tau(x_0-y_0)\right]+\frac{1}{2}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\nu(x)dx$$

формуласига келамиз.

3. Гурса масаласи. (39) тенглама учун 6 – чизмадаги D соҳада Гурса масаласини, яъни қуйидаги масалани қарайлик:

(39) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва

$$u|_{MK}=\varphi(x),\ m\le x\le\frac{m+n}{2};\ \ u|_{NK}=\psi(x),\ \ \frac{m+n}{2}\le x\le n \tag{54}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ – берилган функциялар бўлиб, иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга ва $\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)=\psi\left(\frac{m+n}{2}\right)$ шартни қаноатлантиради.

Бу масалани ҳам Риман усули билан ечамиз.

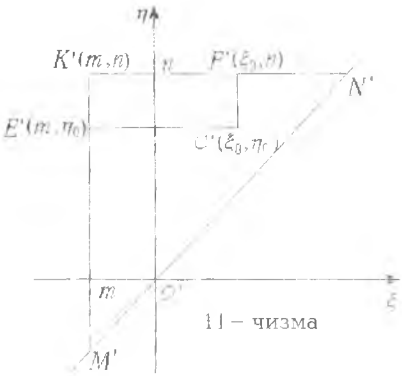
Фараз қилайлик, (39), (54) масаланинг ечими мавжуд бўлсин. Уни $u(x,y)$ билан белгилайлик ва ихтиёрий

$C(x_0, y_0) \in D$ нуқтадаги қийматини топайлик. Бунинг учун $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ характеристик координаталарга ўтамиз. Бунда (39) тенглама (39') кўринишга, (54) чегаравий шартлар эса

$$W|_{\xi=m} = \varphi\left(\frac{\eta + m}{2}\right), \quad m \le \eta \le n, \tag{55}$$

$$W|_{\eta=n} = \psi\left(\frac{\xi + n}{2}\right), \quad m \le \xi \le n, \tag{56}$$

кўринишга келади. Бу алмаштиришда xOy текисликдаги $CEKF$ тўртбучак $\xi O'\eta$ текисликдаги $C'E'K'F'$ тўртбурчакка аксланади (6 – ва 11 – чизмалар). $C'E'K'F'$ тўртбурчакда (44) айният ўринли. Уни $C''E''K''F''$ тўртбурчак буйича интеграллаб ва Гаусс – Остроградский формуласини қўллаб,



11 – чизма

$$\int\limits_{C'E'K'F'} (-Q)d\xi + Pd\eta = 0 \tag{57}$$

тенгликка эга бўламиз. Чап томондаги интеграл чегараси тўрт қисмдан иборат бўлгани учун, уни ҳар бир қисмда алоҳида ҳисоблаймиз.

а) $C'F'$ да $\xi = \xi_0$, $d\xi = 0$, $\eta_0 \le \eta \le n$. Шунинг учун

$$\int\limits_{C'F'} (-Q)d\xi + Pd\eta = \int\limits_{C'F'} Pd\eta = \int\limits_{\eta_0}^{n} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}(WR) - W\frac{\partial R}{\partial\eta}\right]\Bigg|_{\xi=\xi_0} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}W(\xi_0, n) - \frac{1}{2}W(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x_0 + y_0 + n}{2}\right) - \frac{1}{2}u(x_0, y_0).$$

Бу ерда (41) ва (56) тенгликлар эътиборга олинди.

Худди шу каби (41), (55), (56) ёрдамида топамиз:

б) $F'K'$ да $\eta = n$, $d\eta = 0$, $m \le \xi \le \xi_0$ бўлганлиги учун

$$\int\limits_{F'K'} (-Q)d\xi + Pd\eta = -\int\limits_{F'K'} Qd\xi = -\int\limits_{\xi_0}^{m} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(WR) - W\frac{\partial R}{\partial\xi}\right]\Bigg|_{\eta=n} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}W(m,n)R(m,n;\xi_0,\eta_0) + \frac{1}{2}W(\xi_0,n) +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{m} W(\xi,n)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,n;\xi_0,\eta_0)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)R(m,n;\xi_0,\eta_0) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x_0+y_0+n}{2}\right) +$$

$$+ \int_{x_0+y_0}^{m} \psi\left(\frac{\xi+n}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,n;\xi_0,\eta_0)d\xi;$$

в) $K'E'$ да $\xi = m, \quad d\xi = 0, \quad \eta_0 \le \eta \le n$. Шунинг учун

$$\int_{K'E'} (-Q)d\xi + Pd\eta = \int_{K'E'} Pd\eta =$$

$$= \int_n^{\eta_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}(WR) - W\frac{\partial R}{\partial\eta}\right]\Bigg|_{\xi=m} d\eta = \frac{1}{2}W(m,\eta_0) -$$

$$-\frac{1}{2}W(m,n)R(m,n;\xi_0,\eta_0) - \int_n^{\eta_0} W(m,\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}R(m,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)R(m,n;\xi_0,\eta_0) -$$

$$- \int_n^{x_0-y_0} \varphi\left(\frac{m+\eta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}R(m,n;\xi_0,\eta_0)d\eta;$$

г) $E'C'$ да $\eta = \eta_0$, $d\eta = 0$; $m \le \xi \le \xi_0$ бўлганлиги учун

$$\int_{E'C'} (-Q)d\xi + Pd\eta = -\int_{E'C'} Qd\xi = -\int_m^{\xi_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(WR) - W\frac{\partial R}{\partial\xi}\right]\Bigg|_{\eta=\eta_0} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}W(\xi_0,\eta_0) + \frac{1}{2}W(m,\eta_0) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right) - \frac{1}{2}u(x_0,y_0).$$

Топилганларни (57) га қўйиб, телеграф тенгламаси учун Гурса масаласи ечимини ихтиёрий $C(x_0,y_0) \in D$ нуқтада аниқловчи

$$u(x_0,y_0)=\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{n+x_0+y_0}{2}\right)-$$

$$-\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)J_0\left[\lambda\sqrt{(m-x_0-y_0)(n-x_0+y_0)}\right]+$$

$$+\int_{x_0-y_0}^{n}\varphi\left(\frac{m+\eta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}J_0\left[\lambda\sqrt{(m-x_0-y_0)(\eta-x_0+y_0)}\right]d\eta- \quad (58)$$

$$-\int_{m}^{x_0+y_0}\psi\left(\frac{n+\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-x_0-y_0)(n-x_0+y_0)}\right]d\xi$$

формулага эга бўламиз.

(58) функциянинг (55), (56) шартларни қаноатлантиришини текшириш қийинчилик туғдирмайди. Уни (39) тенгламани қаноатлантиришига эса бевосита ўрнига қўйиш усули билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

(58) формула ва уни келтириб чиқариш жараёнидан телеграф тенглама учун Гурса масаласи ечимининг ягоналиги келиб чиқади. (52) тенгсизликларни эътиборга олиб, (58) формула ёрдамида масала ечимининг турғунлигини кўрсатиш қийин эмас.

Демак, телеграф тенгламаси учун Гурса масаласи коррект қўйилган.

(58) формулада $\lambda=0$ десак, тор тебраниш тенгламаси учун Гурса масаласи ечимини аниқловчи

$$u(x_0,y_0)=\varphi\left(\frac{m+x_0-y_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{n+x_0+y_0}{2}\right)-\varphi\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

формула келиб чиқади.

III БОБ

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ БУЗИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР

Бу бобда икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали гиперболик типдаги чегарада бузиладиган дифференциал тенгламаларнинг турли вакиллари учун бошланғич ва чегаравий масалалар қаралган ва ечилган. Бундай масалалар ечими мавжудлиги ва ягоналигининг етарли, баъзида эса зарурий шартлари келтирилган ва мисоллар ёрдамида исботлаб берилган. Тенглама ечимларининг умумлашган R_1 ва R_2 синфлари киритилган. Боб сўнгида гиперболик типдаги (бузиладиган бўлиши шарт эмас) тенгламалар учун экстремум принциплари баён қилинган ва турли тенгламалар мисолида мустаҳкамланган.

1 – §. Эйлер–Дарбу тенгламаси

1. Таърифи ва хоссалари. Гиперболик типдаги бузиладиган тенгламаларни ўрганишда Эйлер–Дарбу тенгламаси деб аталувчи

$$E(\alpha,\beta)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \qquad (1)$$

тенглама кенг фойдаланилади, бу ерда α,β – берилган ҳақиқий сонлар.

$$u(\xi,\eta)=(\xi-\eta)^{1-\alpha-\beta}\upsilon(\xi,\eta) \qquad (2)$$

формула билан янги $\upsilon(\xi,\eta)$ функция киритсак, (1) тенглама

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1-\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}+\frac{1-\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}=0 \qquad (3)$$

кўринишга келади.

Агар (1) тенгламанинг ечимини $z(\alpha,\beta)$ билан белгиласак, у ҳолда (2), (3) дан келиб чиқадики,

$$z(\alpha,\beta)=(\xi-\eta)^{1-\alpha-\beta}z(1-\beta,1-\alpha). \qquad (4)$$

Бевосита текшириб кўриш мумкинки,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}z(\alpha,\beta)=z(1+\alpha,\beta), \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}z(\alpha,\beta)=z(\alpha,1+\beta) \qquad (5)$$

тенгликлар ўринли ва бу функциялар мос равишда $E(\alpha+1,\beta)=0$, $E(\alpha,\beta+1)=0$ тенгламаларнинг ечими бўлади. (5) ни кетма кет қўллаб,

$$z(\alpha+m-1,\beta+n-1)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^{n-1}}z(\alpha,\beta) \qquad (6_1)$$

функция $E(\alpha+m-1,\beta+n-1)=0$ тенгламанинг ечими эканлигини топамиз.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонига (4) формулани қўллаб,

$$(\xi-\eta)^{3-\alpha-\beta-m-n}z(2-\beta-n;2-\alpha-m)=$$
$$=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^{n-1}}\left[\frac{z(1-\beta,1-\alpha)}{(\xi-\eta)^{\alpha+\beta-1}}\right]$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда $\alpha,\beta,m-1,n-1$ ларни мос равишда $1-\beta$, $1-\alpha$, n, m ларга алмаштирсак,

$$z(\alpha-m,\ \beta-n)=(\xi-\eta)^{m+n+1-\alpha-\beta}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^{n}\partial\eta^{m}}\left[\frac{z(\alpha,\beta)}{(\xi-\eta)^{1-\alpha-\beta}}\right] \qquad (6_2)$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

2. Умумий ечим формуласи.

а) $\alpha=\beta=0$ бўлсин. У ҳолда тенглама $u_{\xi\eta}=0$ кўринишга эга бўлиб, унинг умумий ечими

$$z(0,0)=\varphi(\xi)-\psi(\eta) \qquad (7_1)$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\varphi(\xi)$ ва $\psi(\eta)$ – ихтиёрий функциялар.

б) $\alpha=\beta=1$ бўлсин. У ҳолда, тенглама

$$(\xi-\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

кўринишига келиб, уни

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}[(\xi-\eta)u]=0$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу тенгламани интеграллаб, умумий ечим

$$z(1,1)=\frac{\varphi(\xi)-\psi(\eta)}{\xi-\eta} \qquad (7_2)$$

формула билан аниқланишини топамиз, бу ерда $\varphi(\xi)$ ва $\psi(\eta)$ – ихтиёрий функциялар.

в) (6_1) тенгликда $\alpha=\beta=1$ деб ва (7_2) ни инобатга олиб, $E(m,n)=0$ тенгламанинг умумий ечим формуласини топамиз:

$$z(m,n)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^{n-1}}\left[\frac{\varphi(\xi)-\psi(\eta)}{\xi-\eta}\right]. \qquad (7_3)$$

г) (6_2) тенгликда $\alpha=\beta=0$ десак ва (7_1) ни инобатга олсак, $E(-m,-n)=0$ тенгламанинг умумий ечим формуласи келиб чиқади:

$$z(-m,-n)=(\xi-\eta)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}\left[\frac{\varphi(\xi)-\psi(\eta)}{\xi-\eta}\right]. \qquad (7_4)$$

д) Фараз қилайлик, $0\le\alpha$, $\beta<1$, $\alpha+\beta\ne1$. У ҳолда, (1) тенгламанинг ечимини $u(\xi,\eta)=X(\xi)Y(\eta)$ кўринишда бўлсин деб фараз қилиб, бу ечимни (1) га қўйсак,

$$(\xi-\eta)X'(\xi)Y'(\eta)-\beta X'(\xi)Y(\eta)+\alpha X(\xi)Y'(\eta)=0$$

ёки

$$\xi+\alpha\frac{X(\xi)}{X'(\xi)}=\eta+\beta\frac{Y(\eta)}{Y'(\eta)}$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз.

Бу тенгликнинг ўнг томони ξ га, чап томони η га боғлиқ бўлмаган функциялардир. Демак, унинг иккала томони ҳам ξ га ҳам, η га ҳам боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдордан иборат экан. Бу миқдорни a билан белгилаб,

$$\xi + \alpha \frac{X(\xi)}{X'(\xi)} = a, \quad \eta + \beta \frac{Y(\eta)}{Y'(\eta)} = a$$

ёки

$$\frac{X'(\xi)}{X(\xi)} = -\frac{\alpha}{\xi - a}, \quad \frac{Y'(\eta)}{Y(\eta)} = -\frac{\beta}{y - a}$$

оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламалар

$$X(\xi) = (\xi - a)^{-\alpha}, \quad Y(\eta) = (\eta - a)^{-\beta}$$

кўринишдаги хусусий ечимларга эга.

Улар ёрдамида тузилган

$$(\xi - a)^{-\alpha}(\eta - a)^{-\beta}$$

функция эса (1) тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

$\alpha + \beta \neq 1$ эканлигини инобатга олиб, (4) формулага асосан, бу ердан (1) тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини топамиз:

$$(\xi - \eta)^{1-\alpha-\beta}(\xi - a)^{\beta-1}(\eta - a)^{\alpha-1}.$$

Бу хусусий ечимлар ёрдамида тузилган

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(t)\,(t-\xi)^{-\alpha}(\eta - t)^{-\beta}\,dt, \qquad \alpha, \beta < 1,$$

$$(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} \int_{\xi}^{\eta} \psi(t)\,(t-\xi)^{\beta-1}(\eta - t)^{\alpha-1}\,dt, \qquad 0 < \alpha, \beta$$

ифодалар (бу ерда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – ихтиёрий функциялар) ҳам (1) тенгламанинг ечими бўлади.

Демак, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta \neq 1$ да (1) тенгламанинг умумий ечими

$$u(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \varphi(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta - t)^{-\beta}\,dt +$$
$$+ (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} \int_{\xi}^{\eta} \psi(t)(t-\xi)^{\beta-1}(\eta - t)^{\alpha-1}\,dt$$

кўринишга эга. Бу ерда $t = \xi + (\eta - \xi)z$ алмаштириш бажарсак, умумий ечим

$$u(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1\varphi\left[\xi+(\eta-\xi)z\right]z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz+$$
$$+\int_0^1\psi\left[\xi+(\eta-\xi)z\right]z^{\beta-1}(1-z)^{\alpha-1}dz \qquad (7_5)$$

формула билан аниқланишини топамиз.

e) $\alpha+\beta=1$ бўлганда (1) тенгламанинг умумий ечим

$$u(\xi,\eta)=\int_0^1\varphi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}dt+$$
$$+\int_0^1\psi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\ln\left[t(1-t)(\eta-\xi)\right]dt \qquad (7_6)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – ихтиёрий функциялар.

(1) тенгламанинг юқорида келтирилган хоссаларидан фойдаланиб, α, β параметрларнинг бошқа қийматларида ҳам умумий ечим формуласини топиш мумкин.

3. Риман функцияси. (1)–Эйлер–Дарбу тенгламаси–нинг Риман функцияси $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ ушбу

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{\beta}{\xi-\eta}R\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha}{\xi-\eta}R\right)=0,$$

яъни

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\alpha+\beta}{(\xi-\eta)^2}R=0 \qquad (8)$$

қушма дифференциал тенгламани қаноатлантиради ва $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$ характеристикаларда

$$R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=e^{-\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{\beta\,dt}{\xi_1-t}}=\left(\frac{\xi_1-\eta}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\beta}, \qquad (9)$$

$$R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=e^{\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{\alpha\,dt}{t-\eta_1}}=\left(\frac{\xi-\eta_1}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\alpha}$$

қийматларни қабул қилади. Риман функциясини

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=(\xi-\eta)^{\alpha+\beta}(\xi_1-\eta)^{-\alpha}(\xi-\eta_1)^{-\beta}F \qquad (10)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда F ҳозирча номаълум функция. У ҳолда, (9) ва (10) тенгликларга асосан,

$$R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=\left(\frac{\xi_1-\eta}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\beta}F\big|_{\xi=\xi_1},$$

$$R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=\left(\frac{\xi-\eta_1}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\alpha}F\big|_{\eta=\eta_1}$$

келиб чиқади.

Бу тенгликлардан (9) га асосан кўриняптики, $F\big|_{\xi=\xi_1}=$ $=F\big|_{\eta=\eta_1}=1$ бўлиши керак. (10) да F функция олдидаги кўпайтмани ω орқали белгилаб, R функцияни ва унинг ҳосилаларини (8) қўшма тенгламага қўйсак,

$$\begin{gathered}\omega F_{\xi\eta}+\left(\omega_\eta+\frac{\beta}{\xi-\eta}\omega\right)F_\xi+\left(\omega_\xi-\frac{\alpha}{\xi-\eta}\omega\right)F_\eta+\\+\left(\omega_{\xi\eta}+\frac{\beta\,\omega_\xi}{\xi-\eta}-\frac{\alpha\,\omega_\eta}{\xi-\eta}-\frac{\alpha+\beta}{(\xi-\eta)^2}\omega\right)F=0\end{gathered} \qquad (11)$$

тенглама ҳосил бўлади.

ω функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\omega_\xi=\left(\frac{\alpha+\beta}{\xi-\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta_1}\right)\omega, \qquad \omega_\eta=\left(-\frac{\alpha+\beta}{\xi-\eta}+\frac{\alpha}{\xi_1-\eta}\right)\omega,$$

$$\begin{gathered}\omega_{\xi\eta}=\left[\frac{(\alpha+\beta)(1-(\alpha+\beta))}{(\xi-\eta)^2}+\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)}+\right.\\\left.+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{(\xi-\eta)(\xi-\eta_1)}-\frac{\alpha\beta}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right]\omega\end{gathered}$$

ω функцияни ва унинг ҳосилаларини (11) тенгламага қўямиз, у ҳолда F функцияга нисбатан

$$F_{\xi\eta} + \alpha \frac{\xi-\xi_1}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)} F_\xi + \beta \frac{\eta-\eta_1}{(\xi-\eta)(\xi-\eta_1)} F_\eta +$$

$$+\alpha\beta \frac{(\xi_1-\eta_1)}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)} F = 0$$

ёки

$$\frac{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}{\xi_1-\eta_1} F_{\xi\eta} + \alpha \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\eta_1)}{\xi_1-\eta_1} F_\xi +$$

$$+\beta \frac{(\eta-\eta_1)(\xi_1-\eta)}{\xi_1-\eta_1} F_\eta + \alpha\beta F = 0 \tag{12}$$

тенгламага эга бўламиз. Ушбу

$$\sigma = \frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}$$

белгилашни киритамиз.

Фараз қилайлик, F – σ нинг функцияси бўлсин, яъни $F = F(\sigma)$. F функцияни ва унинг

$$F_\xi = F_\sigma \sigma_\xi, \quad F_\eta = F_\sigma \sigma_\eta, \quad F_{\xi\eta} = F_{\sigma\sigma} \sigma_\eta \sigma_\xi + F_\sigma \sigma_{\xi\eta}$$

ҳосилаларини ҳисоблагандан сўнг, (12) тенгламага қўямиз ва содда ҳисоблашларни бажариб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sigma(1-\sigma)F_{\sigma\sigma} + [1-(\alpha+\beta+1)\sigma]F_\sigma - \alpha\beta F = 0.$$

Маълумки, бу тенглама Гаусс тенгламаси бўлиб, унинг ечими

$$F(\alpha,\beta,1;\sigma) = F\left(\alpha,\beta,1; \frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right)$$

гипергеометрик функциядан иборатдир.

Бундан дарҳол $F|_{\xi=\xi_1} = F|_{\eta=\eta_1} = 1$ эканлиги келиб чиқади. Демак, Эйлер–Дарбу тенгламасининг Риман функцияси

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = \tag{13}$$

$$= (\xi-\eta)^{\alpha+\beta}(\xi_1-\eta)^{-\alpha}(\xi-\eta_1)^{-\beta} F\left(\alpha,\beta,1; \frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right)$$

функциядан иборат экан.

2–§. Гиперболик типдаги бузиладиган биринчи тур тенглама учун Коши масаласи

$y<0$ ярим текисликда гиперболик типга тегишли ушбу тенгламани қарайлик:

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m>0 \tag{14}$$

(14) тенглама $y=0$ тўғри чизиқда параболик бузилади.

1. Коши масаласининг қўйилиши. Бизнинг асосий мақсадимиз (14) тенглама учун бошланғич шартлар параболик бузилиш чизиғида берилганда Коши масаласини ўрганишдир: (14) тенгламанинг $y<0$ да регуляр, $y\le 0$ да узлуксиз ва $y=0$ ўқнинг бирор қисмида, масалан, $A(0,0)B(1,0)$ кесмада

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \tau(x), \qquad 0\le x\le 1, \tag{15}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x), \qquad 0<x<1 \tag{16}$$

шартларни каноатлантирувчи $u(x,y)$ ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ – берилган функциялар ўзларининг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиздир.

(14) тенглама

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{17}$$

характеристик координаталарда ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \tag{14'}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $u(x,y)$ функция янги ξ,η ўзгарувчиларга нисбатан яна $u(\xi,\eta)$ билан белгиланди, $\beta = m/(2m+4)$.

(14') тенглама Эйлер–Дарбу тенгламасининг хусусий ҳолидир. (13) дан бу тенглама учун Риман функцияси

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$
$$= (\eta-\xi)^{2\beta}\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)\right]^{-\beta} F\left[\beta,\beta,1;\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right]$$

кўринишга эга эканлиги келиб чиқади.

(17) алмаштириш $y<0$ да махсус бўлмаган алмаштиришдир, шу билан бирга (17) $y<0$ ярим текисликни $\eta>\xi$ ярим текисликка мос қўяди. $y=0$ тўғри чизиқ, яъни $\eta-\xi=0$ бу алмаштиришнинг махсус чизиғидир. Ушбу

$$\eta-\xi=\frac{4}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(-y)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

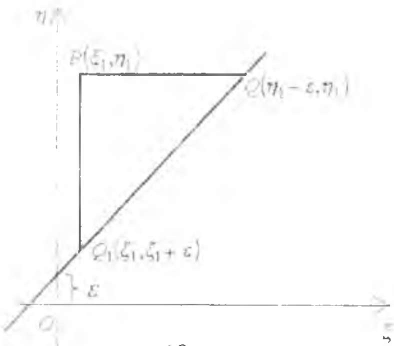
тенгликларга асосан (15), (16) бошланғич шартлар

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} u(\xi,\eta)=\tau(\xi),\ 0<\xi<1, \qquad (15')$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\nu(\xi),\ 0<\xi<1 \qquad (16')$$

кўринишда ёзилади.

2. Коши масаласининг ечилиши. Биз юқорида уқтириб ўтдикки, $\eta-\xi=0$ тўғри чизиқ (17) алмаштириш учун махсус чизиқдир, яъни бу чизиқда (14') тенгламанинг коэффициентлари чексизликка интилади. Шу билан бирга, $\eta\geq\xi+\varepsilon$ ярим текисликда (бу ерда ε – ихтиёрий кичик мусбат сон) (14') тенглама учун Коши масаласи, биз илгари кўрганимиздек, оддий усул билан ечилади, Коши масаласи, бошланғич шартлар $y=0$ параболик бузилиш чизиғида берилганда эса махсус текширишни талаб қилади.



12 – чизма

$\eta=\xi+\varepsilon$ тўғри чизиқнинг $Q(\eta_1-\varepsilon,\eta_1)$ $Q_1(\xi_1,\xi_1+\varepsilon)$ кесмаси ва (14') тенгламанинг $QP:\eta=\eta_1$, $Q_1P:\xi=\xi_1$ характеристикалари билан чега – раланган соҳани D орқали белгилайлик (12 – чизма). (14') тенгламанинг икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u(\xi,\eta)$ ечими учун II бобдаги (38) формулага асосан қуйидаги айният ўринли бўлади:

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{2}u(\eta_1-\varepsilon,\eta_1)R(\eta_1-\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}u(\xi_1,\xi_1+\varepsilon)R(\xi_1,\xi_1+\varepsilon;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{Q_1Q}\left\{\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial N}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)-u(\xi,\eta)\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial N}+\right.$$

$$\left.\left.+2u(\xi,\eta)\,R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\left(-\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{d\xi}{dn}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{d\eta}{dn}\right)\right\}\right|_{\eta=\xi+\varepsilon}ds.$$

Ушбу

$$\frac{d\xi}{dn}ds=d\eta,\quad \frac{d\eta}{dn}ds=-d\xi \quad \text{ва } QQ_1 \text{ да } d\xi=d\eta$$

ҳамда

$$\frac{\partial}{\partial N}ds=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{d\eta}{dn}ds+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\xi}{dn}ds=-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)d\xi$$

тенгликларни эътиборга олиб, аввалги айниятни

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{2}u(\eta_1-\varepsilon,\eta_1)\,R(\eta_1-\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+\frac{1}{2}u(\xi_1,\xi_1+\varepsilon)R(\xi_1,\xi_1+\varepsilon;\xi_1,\eta_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\eta_1-\varepsilon}u(\xi,\xi+\varepsilon)\left[\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}-\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{4\beta}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]\right|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi- \qquad (18)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\eta_1-\varepsilon}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=\xi+\varepsilon}R(\xi,\xi+\varepsilon;\xi_1,\eta_1)d\xi$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Гипергеометрик функциялар учун

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,1-c+a+b;1-x)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,1+c-a-b;1-x),$$

$$F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

тенгликлар ўринлидир, бу ерда $\Gamma(z)$ — гамма функция. Бу-ларга асосан, содда ҳисоблашларни бажаргандан сўнг

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \xi}-\frac{\partial R}{\partial \eta}-\frac{4\beta}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]_{\xi=\eta}=$$

$$=2(1-2\beta)\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\left[(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)\right]^{\beta-1}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ушбу $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$ формулага биноан, $\Gamma(2\beta)=(2\beta-1)\Gamma(2\beta-1)$. Буни эътиборга олсак, (15') бошланғич шартга асосан

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial R}{\partial \xi}-\frac{\partial R}{\partial \eta}-\frac{4\beta}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]\Bigg|_{\eta=\xi+\varepsilon} u(\xi,\xi+\varepsilon)=$$

$$=-2\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\left[(\eta_1-\xi)\,(\xi-\xi_1)\right]^{\beta-1}\ \tau(\xi). \qquad (19)$$

(16') бошланғич шартга асосан эса

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi+\varepsilon} R(\xi,\xi+\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\left[(\eta_1-\xi)(\xi-\xi_1)\right]^{-\beta}\ \nu(\xi). \qquad (20)$$

Шу билан бирга

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R(\xi_1,\xi_1+\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=0,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}R(\eta_1-\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0. \qquad (21)$$

(19), (20), (21) тенгликларга кўра, (18) формуладан $\varepsilon\to 0$ да қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\int_{\xi_1}^{\eta_1}\tau(\xi)\left[(\eta_1-\xi)\,(\xi-\xi_1)\right]^{\beta-1}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{\xi_1}^{\eta_1}\nu(\xi)\left[(\eta_1-\xi)\,(\xi-\xi_1)\right]^{-\beta}d\xi.$$

Бу формулада $\xi = \xi_1 + (\eta_1 - \xi_1)t$ алмаштириш бажариб ва $(1-2\beta)\,\Gamma(1-2\beta) = \Gamma(2-2\beta)$ тенгликни эътиборга олиб, сўнгра

$$\xi_1 = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta_1 = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$$

белгилашларга асосан x, y ўзгарувчиларга қайтсак, ушбу

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{\beta-1}dt +$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-\beta}dt \qquad (22)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(22) формула ***Дарбу формуласи*** дейилади.

Бевосита текшириб кўриш қийин эмаски, берилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар икки марта узлуксиз дифференциалла – нувчи бўлганда (22) формула билан аниқланган $u(x,y)$ функция x ва y бўйича иккинчи тартибли узлуксиз ҳоси – лаларга эга бўлиб, (14) тенгламани ҳамда (15), (16) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Бу Коши масаласининг ягона – лиги (22) формула, (14) тенгламанинг $\eta > \xi$ ярим текисликда ўзининг иккинчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ихтиёрий ечими учун ўринли бўлган (18) айниятнинг натижаси эканлигидан келиб чиқади. (22) формуланинг кўринишидан ечим бошланғич шартларга узлуксиз боғлан – ганлиги, яъни турғунлиги ҳам дарҳол келиб чиқади.

3. Умумлашган ечимларнинг R_1 синфи. Агар $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар узлуксиз бўлса, (22) ифода (14) тенгламанинг умумлашган ечими дейилади. Умумлашган ечим бирор тар – тибли ҳосилага эга бўлиши учун $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар маълум тартибли ҳосилага эга бўлиши керак. Қуйида биз умумлашган ечимларнинг К.И.Бабенко [1, 34] томонидан киритилган R_1 синфи билан танишамиз. Бунинг учун (14) тенгламани $AC: \xi = 0$, $BC: \eta = 1$ характеристикалар ва $A(0{,}0)$ $B(1{,}0)$ кесма билан чегараланган ABC характеристик учбурчакда қараймиз.

Қулайлик учун (22) формуланинг (17) характеристик ўзгарувчилардаги кўринишидан фойдаланамиз:

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_{\xi}^{\eta}\tau(t)(t-\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt-$$

$$-\gamma_2\int_{\xi}^{\eta}\nu(t)(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt, \qquad (22')$$

бу ерда $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=(2-4\beta)^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

Таъриф. Агар $\tau(t)$ ва $\nu(t)$ функциялар $0\le t<1$ да мос равишда $\alpha_1>1-\beta$ ва $\alpha_2>\beta$ кўрсаткичли Гёлрдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда (14) тенгламанинг (22) $[(22')]$ умумлашган ечими R_1 синфга тегишли дейилади.

1 – лемма. Агар $u(x,y)$ функция (14) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими бўлса, у ҳолда $u_x\in C(\Delta ABC)$, $u_y\in C(\Delta ABC\cup AB)$ ва

$$\lim_{y\to 0}u_y=\nu(x)\quad (0<x<1).$$

Исбот. $\tau(x)\in C^{(0,\alpha_1)}[0,1)$, $\nu(x)\in C^{(0,\alpha_2)}[0,1)$, $\alpha_1>1-\beta$, $\alpha_2>\beta$ бўлганлиги учун уларни

$$\tau(t)=\tau(0)+\int_0^t(t-s)^{-\beta+\varepsilon}\varphi(s)ds,$$
$$\qquad (23)$$
$$\nu(t)=\nu(0)+\int_0^t(t-s)^{\beta-1+\varepsilon}\psi(s)ds$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда ε – етарли кичик мусбат сон, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ эса $0\le s<1$ да узлуксиз функциялар.

(23) ифодаларни (22') га қўйиб ва интеграллаш тартибини ўзгартириб ҳамда гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидан фойдаланиб топамиз:

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}\varphi_1(s)(\eta-s)^{-\beta+\varepsilon}F\left(\beta,\beta-\varepsilon,2\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-s}\right)ds+$$

$$+\int_{\xi}^{\eta}\varphi_2(s)(\eta-\xi)^{-\beta}(\eta-s)^{\varepsilon}F\left(\beta,1-\beta,1+\varepsilon;\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\right)ds+$$

$$+\int_0^{\xi}\varphi_3(s)(\eta-s)^{-\beta}(\xi-s)^{\varepsilon}F\left(\beta+\varepsilon,\beta,1+\varepsilon;\frac{\xi-s}{\eta-s}\right)ds+$$

$$+\tau(0)+(2-4\beta)^{2\beta-1}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\nu(0). \tag{24}$$

бу ерда

$$\varphi_1(s)=\varphi(s)-2\gamma_2\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta+\varepsilon)\cos\pi\beta\psi(s)/\Gamma(1-\beta+\varepsilon),$$

$$\varphi_2(s)=\left[\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\varepsilon)\varphi(s)-\right.$$

$$\left.-\gamma_2\Gamma(\beta+\varepsilon)\Gamma(1-\beta)\psi(s)\right]/\Gamma(1+\varepsilon),$$

$$\varphi_3(s)=2\gamma_2\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\varepsilon)\cos\pi\beta\psi(s)/\Gamma(1+\varepsilon).$$

(24) дан бевосита ҳисоблаб кўриш мумкинки, u_ξ, u_η ҳосилалар ABC учбурчакда мавжуд, узлуксиз ва

$$u_\xi=O\left((\eta-\xi)^{-2\beta}\right),\quad u_\eta=O\left((\eta-\xi)^{-2\beta}\right).$$

(24) даги дастлабки икки қўшилувчининг биринчи тартибли ҳосилалари $C(\eta-\xi)^{-\beta+\varepsilon}$ каттalик билан чегараланган. Буни инобатга олиб,

$$(2-4\beta)^{-2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi-u_\eta)=\nu(0)+$$

$$+(2-4\beta)^{-2\beta}\frac{\beta(\beta+\varepsilon)}{1+\varepsilon}\int_0^{\xi}\varphi_3(s)(\eta-s)^{\beta-1}(\xi-s)^{\varepsilon}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi-s}{\eta-s}+1\right)F\left(1-\beta,1-\beta+\varepsilon,2+\varepsilon;\frac{\xi-s}{\eta-s}\right)ds+O\left((\eta-\xi)^{\beta+\varepsilon}\right).$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан $\eta-\xi\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}(2-4\beta)^{-2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi-u_\eta)=$$

$$=\nu(0)+\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\beta-1+\varepsilon}\psi(s)\,ds=\nu(\xi),\quad 0\le\xi<1$$

келиб чиқади. 1 – лемма исботланди.

Қуйидаги леммани исботсиз келтирамиз:

2 – лемма [34]. (14) тенгламанинг R_1 синфга тегишли ихтиёрий $u(\xi,\eta)$ умумлашган ечими учун бу тенгламанинг иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган ечимларининг шундай $\{u_n\}$ кетма – кетлигини топиш мумкинки, ABC учбурчакнинг ичида ётувчи ихтиёрий ёпиқ $A'B'C''$ учбурчакда

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\xi,\eta)=u(\xi,\eta)$$

тенглик ўринли бўлади ва ихтиёрий $\varepsilon(>0)$ сон учун шундай $N(\varepsilon)$ сон топиладики, $n\geq N(\varepsilon)$ бўлганда

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|<\varepsilon(\eta-\xi)^{-2\beta},\quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|<\varepsilon(\eta-\xi)^{-2\beta}$$

тенгсизликлар бажарилади.

4. Баъзи изоҳлар. Гиперболик типдаги бузиладиган биринчи тур чизиқли умумий тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$k(y)h(x,y)u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y), \quad (25)$$

бу ерда $h(x,y)>0$, $k(0)=0$ ва $y<0$ да $K(y)>0$ бўлиб, $y=0$ параболик бузилиш чизиғидир.

Бу тенгламани $y=0$ тўғри чизиқнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесмасига таянувчи D – характеристик учбурчакда қарайлик. (25) тенгламанинг $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AB)\cap C^2(D)$ синфга тегишли (15), (16) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала (25) тенглама учун Коши масаласи дейилади.

Теорема (Проттер [44]). Фараз қилайлик, қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

1^0. $h(x,y)>0$ функция $\overline{D}$ да иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга;

2^0. $k(y)$ монотон камаювчи узлуксиз функция бўлиб, $k(0)=0$;

3^0. $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$, функциялар D да x бўйича иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга;

4^0. $$\lim_{y\to 0}\frac{y\,a(x,y)}{\sqrt{k(y)}}=0. \quad (26)$$

У ҳолда, агар берилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар Липшиц шартини қаноатлантирувчи учинчи тартибли ҳосилаларга эга булса, Коши масаласи ягона регуляр ечимга эга булади.

Одатда (26) ни Проттер шарти дейилади.

Қуйидаги мисол курсатадики, бу шарт Коши масаласининг ечими мавжуд булиши учун етарли шарт булиб, зарурий эмас.

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0, \tag{27}$$

бу ерда $y < 0$, $m \geq 2$, $a = const \neq 0$ ва $|a| < m/2$, тенглама учун (26) шарт бажарилмайди, лекин Коши масаласи коррект қуйилган.

Ҳақиқатан ҳам, (27) да (17) алмаштириш бажарсак, у (1) куринишга келади, бу ерда

$$\alpha = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)}, \quad \alpha + \beta = \frac{m}{m+2}.$$

$|a| < m/2$ булганлиги учун $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ булиб, $0 < \alpha + \beta < 1$. Шунинг учун (27) тенглама (7_5) куринишдаги умумий ечимга эга. Бу умумий ечимни (15), (16) шартларга қуйсак,

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \tau(x)$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \nu(x)$$

эканини топамиз. Буларни (7_5) га қуйиб, ва ξ, η узгарувчилардан (17) формула буйича x, y узгарувчиларга қайтиб, Коши масаласи ечимини топамиз:

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} dt.$$

Бу ечимнинг ягоналигини ва берилган функцияларга узлуксиз боғлиқлигини курсатиш қийин эмас.

Агар (25) да $h(x,y)=1$, $k(y)=(-y)^m$ бўлса, (27) шарт қуйидаги кўринишга келади:

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{1-\frac{m}{2}}a(x,y)=0. \tag{28}$$

Бундан кўринадики, агар $0\le m<2$ бўлса, ихтиёрий чегараланган $a(x,y)$ функция учун Коши масаласи коррект қўйилган. Агар $m\ge 2$ ва (28) шарт бажарилмаса, Коши масаласи коррект қўйилмаган бўлиши мумкин. Агар $a_0(x)=\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{1-\frac{m}{2}}a(x,y)$ – чегараланган ва a,b,c,f,τ,ν функциялар x бўйича етарли тартибдаги ($\max|a_0(x)|$ га боғлиқ равишда) ҳосилага эга бўлса, Коши масаласи коррект қўйилган бўлади.

Бунга

$$(-y)^2u_{xx}-u_{yy}+(4n+1)u_x=0 \qquad (y<0)$$

($n\ge 0$ бутун сон) тенгламанинг

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1;\qquad u_y(x,y)=0,\qquad 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{\pi}\,y^{2k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\tau\left(x+\frac{y^2}{2}\right)$$

мисол бўлади.

3–§. Гиперболик типдаги бузиладиган иккинчи тур тенглама учун Коши масаласи

1. Асосий тушунчалар ва теоремалар.

Гиперболик типдаги бузиладиган

$$u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+a(x,y)\,u_x+b(x,y)\,u_y+$$
$$+c(x,y)\,u=f(x,y)\quad (0<m<2) \tag{29}$$

тенгламани $y<0$ ярим текисликда қарайлик.

Унинг характеристикалари

$$\xi = x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = C_1, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = C_2 \quad (30)$$

параболаларнинг шохчаларидан иборат бўлиб, уларнинг ўрамаси (29) тенгламанинг бузилиш чизиғи $y=0$ тўғри чизиқдан иборат, яъни $y=0$ тўғри чизиқ (29) тенглама учун характеристика ҳам бўлади. Бу ерда тенглама ечимининг $y=0$ бузилиш чизиғи яқинидаги хулқи тенгламанинг $b(x,y)$ коэффициенти ва бузилиш кўрсаткичи m га боғлиқ, яъни тенгламанинг ечими ва унинг u_y ҳосиласи $y=0$ да умуман чегараланмаган бўлиши мумкин. Шунинг учун (29) тенглама учун бошланғич шартлар $y=0$ чизиқда берилган одатдаги Коши масаласи коррект қўйилмаган бўлиши мумкин.

Бундай ҳолда

$$\lim_{y\to 0} \varphi(x,y)\, u(x,y) = \tau(x), \quad \lim_{y\to 0} \psi(x,y)\, u_y(x,y) = \nu(x),$$

бу ерда $\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\psi(x,y)=0$, кўринишдаги ўзгартирилган бошланғич шартли масала қаралиши табиийдир.

D билан $\xi=0$, $\eta=1$ характеристикалар ва $y=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган соҳани белгилайлик. (29) тенглама учун ўринли бўлган қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1 – теорема. Агар a,b,c,f функциялар $\overline{D}$ да x бўйича биринчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз ва $0<m<1$ бўлса, у ҳолда (29) тенгламанинг $\overline{D}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$u(x,0)=\tau(x), \ 0\le x\le 1; \quad u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ягона регуляр ечими мавжуд, бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$, $\nu(x)\in C^3(0,1)$.

2 – теорема. Фараз қилайлик,

1^0. a,b,c,f функциялар $\overline{D}$ да x бўйича биринчи тартибли ҳосиласи билан узлуксиз;

2^0. $1\le m<2$, $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{1-m}b(x,y)=\beta(x)$ ва $\beta(x)\in C^3[0,1]$, $m-1<\beta(x)<1$;

3^0. $\gamma(x,y)=\beta(x)-b(x,y)(-y)^{1-m}=O(y^{\varepsilon}),\quad \varepsilon>0$.

У ҳолда, (29) тенгламанинг $\overline{D}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1;\quad \lim_{y\to 0}(-y)^{\beta(x)}u_y=\nu_1(x),\ 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ягона регуляр ечими мавжуд, бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$, $\nu_1(x)\in C^3(0,1)$.

1— ва 2—теоремаларда зикр этилган ечимлар берилган функцияларга узлуксиз боғлиқ бўлади.

2. Хусусий ҳол учун умумлашган (бошланғич шартли) Коши масаласи.

$$u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\alpha(-y)^{m-1}u_y=0\quad(\alpha=const)\tag{31}$$

тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва

$$(-y)^{\alpha}u_y(x,y)\in C[D\cup(y=0)]$$

ҳамда

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1;\quad \lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}u_y=\nu_1(x),\ 0<x<1\tag{32}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилсин. Бу масалани одатда умумлашган (бошланғич шартли) Коши масаласи дейилади. 2—теоремага асосан бу масала ($m-1<\alpha<1$, $1\le m<2$ бўлганда) ягона ечимга эга. $m-1<\alpha<m/2$ бўлганда масала ечимини топайлик.

(30) характеристик координаталарда (31) тенглама ва (32) шартлар

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0,\tag{33}$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}u(\xi,\eta)=\tau(\xi),\qquad 0\le\xi\le 1;$$

(34)

$$\left(\frac{2-m}{2}\right)^{2\beta}\lim_{\eta-\xi\to 0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu_1(\xi),\qquad 0<\xi<1$$

кўринишни олади, бу ерда $\beta=(2\alpha-m)/(4-2m)$ бўлиб, $(1/2)<\beta<0$ тенгсизлик ўринли.

(33) тенглама Эйлер–Дарбу тенгламасининг хусусий ҳолидир. (4), (6_1), (7_5) формулалардан келиб чиқадики, (33) нинг умумий ечими

$$u(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}z(-\beta,-\beta) \tag{35}$$

кўринишга эга, бу ерда

$$z(-\beta,-\beta)=(\eta-\xi)^{1+2\beta}\int_0^1\psi[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{\beta}(1-t)^{\beta}dt+$$

$$+\int_0^1\varphi[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{-\beta-1}(1-t)^{-\beta-1}dt.$$

Буни (35) га қўйиб, (33) тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$\begin{aligned}u&=(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\varphi[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt-\\&-2\beta(1+2\beta)\int_0^1\psi[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{\beta}(1-t)^{\beta}dt+\\&+\beta(\eta-\xi)\int_0^1\psi'[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{\beta}(1-t)^{\beta}(1-2t)dt.\end{aligned} \tag{36}$$

(36) ечимни (34) шартларга бўйсундирсак,

$$\psi(\xi)=\frac{-k_1\tau(\xi)}{2\beta(1+2\beta)},\qquad \varphi(\xi)=k_2\nu_1(\xi) \tag{37}$$

келиб чиқади, бу ерда

$$k_1=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},\quad k_2=\left(\frac{2-m}{4}\right)^{1-2\beta}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(\alpha-1)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

$\psi(\xi)$ ва $\varphi(\xi)$ функцияларнинг (36) формулага қўйиб, (33) – (34) масала ечимини топамиз:

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=k_1\int_0^1\tau[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{\beta}(1-t)^{\beta}dt-\\&-\left[\frac{k_1}{2(1+2\beta)}\right](\eta-\xi)\int_0^1\tau'[\xi+(\eta-\xi)t]t^{\beta}(1-t)^{\beta}(1-2t)dt+\\&+k_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\nu_1[\xi+(\eta-\xi)t]\,t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt.\end{aligned} \tag{38}$$

Бу ердан x, y ўзгарувчиларга қайтиб, (31) – (32) масала – нинг $m-1<\alpha<m/2$ шарт бажарилгандаги ечимига эга бўламиз:

$$u(x,y)=k_1\int_0^1 \tau(\sigma) z^{\beta}(1-z)^{\beta}dz+$$

$$+\left[\frac{2k_1}{(1+2\beta)(2-m)}\right](-y)^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 \tau'(\sigma) z^{\beta}(1-z)^{\beta}(2z-1)dz+ \qquad (39)$$

$$+\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta-1}k_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu_1(\sigma) z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dz,$$

бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^3[0,1]$, $\nu_1(x)\in C^2(0,1)$ – берилган функциялар, $\sigma=x+[2/(m+2)]\, y^{(2-m)/2}(2z-1)$.

Изоҳ. Агар $x=x,\ t=-(2-m)^{-2}(-y)^{2-m}$ алмаштириш бажарсак, (31) тенглама

$$u_{xx}+t\,u_{tt}+\alpha_1 u_t=0 \qquad (\alpha_1=const<0)$$

кўринишга келади. Бу тенглама учун гиперболик соҳада чегаравий ва бошланғич масалалар И.Л.Кароль [15] ва С.А.Терсенов [37] томонидан ўрганилган.

3. Умумлашган ечимларнинг R_2 синфи [14]. Агар $\tau(x)$ ва $\nu_1(x)$ функциялар $0<x<1$ да узлуксиз бўлса, (39) [(38)] формула билан аниқланувчи функция одатда (31) тенгламанинг умумлашган ечими дейилади.

Таъриф. Агар $\nu_1(x)$ функция (0,1) да узлуксиз ва интегралланувчи, $\tau(x)$ функция эса (0,1) да узлуксиз ва интегралланувчи қандайдир $T(x)$ функциянинг $(1-2\beta)$ (каср) тартибли интеграли, яъни

$$\tau(x)=\tau(0)+\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)dt$$

кўринишга эга бўлса, (39) [(38)] умумлашган ечимни R_2 синфга тегишли дейилади.

Охирги тенгликдан келиб чиқадики, $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$.

Худди 2 – § даги каби бу ерда ҳам қуйидаги леммаларни исботлаш мумкин.

1 – лемма. Агар $u(x,y)$ функция (31) тенгламанинг R_2 синфга тегишли умумлашган ечими бўлса, у ҳолда бу ечим $\overline{D}$ да узлуксиз бўлади.

2 – лемма. Агар $u(x,y)$ функция (31) тенгламанинг R_2 синфга тегишли умумлашган ечими бўлса, у ҳолда u_x, u_y ҳосилалар D соҳада узлуксиз ва қуйидаги тенглик ўринли:

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}u_y=\nu_1(x), \qquad 0<x<1.$$

4 – §. Коши – Гурса масаласи

1. Масаланинг қўйилиши ва хусусий ҳол учун ечим формуласи.

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2(-y)^m u=0, \tag{40}$$

бу ерда $m,\lambda\in R,\, m>0$, тенгламани $y=0$ тўғри чизиқнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесмаси ва $y<0$ ярим текисликда ётувчи

$$AC:\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,$$
$$BC:\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1 \tag{41}$$

характеристикалар билан чегараланган D соҳада қарайлик.

Коши – Гурса масаласи: (40) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AB)$ синфга тегишли ва

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x), \qquad 0<x<1; \tag{42}$$

$$u(x,y)\big|_{\overline{AC}}=\psi_1(x), \qquad 0\le x\le 1/2 \tag{43}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\nu(x)$ ва $\psi_1(x)$ – берилган функциялар.

(41) характеристик координаталарда (40) тенглама ва (42), (43) чегаравий шартлар

$$L(u_1)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2 u_1=0, \qquad (40')$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)=\nu(\xi), \quad 0<\xi<1, \qquad (42')$$

$$u_1(\xi,\eta)|_{\xi=0}=\varphi_1(\eta), \qquad 0\le\eta\le 1 \qquad (43')$$

кўринишни олади, D соҳа эса $\xi=0$, $\eta=1$, $\eta=\xi$ чизиқлар билан чегараланган $A_1B_1C_1$ учбурчакка алмашади, бу ерда

$$\beta=m/(2m+4), \qquad u_1(\xi,\eta)=u(x,y), \qquad \varphi_1(\eta)=\psi_1(\eta/2).$$

Коши – Гурса масаласини ечишда қуйидаги хоссаларга эга бўлган Риман – Адамар функцияси деб аталувчи $\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция муҳим рол ўйнайди:

1) ξ_0,η_0 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида $L(\upsilon)=0$ тенгламани қаноатлантиради;

2) ξ,η ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида

$$M^*(\upsilon)=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi\partial\eta}+\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\upsilon}{\xi-\eta}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2\upsilon=0$$

қўшма тенгламани қаноатлантиради;

3) $\upsilon(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=1$;

4) $\upsilon(\xi,\xi;\xi_0,\eta_0)=0$;

5) $\dfrac{\partial[\upsilon]}{\partial\xi}+\beta\dfrac{[\upsilon]}{\eta-\xi}=0$,

бу ерда $[\upsilon]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\upsilon(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)-\upsilon(\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)]$, $\varepsilon>0$.

(40) тенглама учун $\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ Риман – Адамар функцияси М.Б. Капилевич томонидан тузилган [12]:

$$\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}\upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta\ge\xi_0;\\ \upsilon_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta\le\xi_0,\end{cases}$$

$$\upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\Xi_2(\beta,1-\beta,1;s_1,-s_2),$$

$$\upsilon_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=k_1\cdot\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta}}H_3\left(\beta,\beta,2\beta;\frac{1}{s_1},s_2\right),$$

$$k_1=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)},\; s_1=\frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\xi_0-\eta_0)(\eta-\xi)},$$

$$s_2=\frac{\lambda^2}{4}(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta),$$

H_3 ва Ξ_2 – Горн ва Гумбертнинг гипергеометрик функциялари бўлиб,

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(a)_i\,(b)_i}{(c)_{i+j}\,i!\,j!}x^i y^j,\qquad |x|<1,$$

$$H_3(a,b,c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(a)_{i+j}(b)_i}{(c)_i\,i!\,j!}x^i y^j,\qquad |x|<1$$

кўринишга эга, $(z)_j=z(z+1)(z+2)...(z+j-1)=\Gamma(z+j)/\Gamma(z)$.

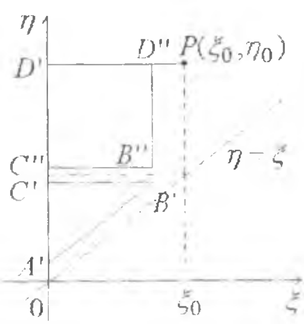
Бу ерда шуни айтиш керакки, $\upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ – (40) тенглама учун Риман функциясидир. $\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ дан $\lambda=0$ бўлганда Геллерстедт [42] томонидан

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0$$

тенглама учун қурилган Риман – Адамар функцияси келиб чиқади.

$u_1(\xi,\eta)$ – (40') тенгламанинг (42'), (43') шартларини қаноатлантирувчи ва $A_1B_1C_1$ учбурчакда иккинчи тар – тибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган ечими бўлсин. У ҳолда, $A_1B_1C_1$ учбурчакда қуйидаги айният ўринли:

$$\upsilon L(u_1)-u_1M(\upsilon)=H_\xi+K_\eta=0.$$



13-чизма

бу ерда

$$H=\frac{1}{2}\left(\upsilon u_{1\eta}-u_1\upsilon_\eta\right)+\frac{\beta u_1\upsilon}{\eta-\xi},\quad K=\frac{1}{2}\left(\upsilon u_{1\xi}-u_1\upsilon_\xi\right)-\frac{\beta u_1\upsilon}{\eta-\xi}.$$

Бу айниятни $\eta-\xi=\varepsilon$ чизиқнинг $A'B'$ кесмаси, $\eta=\xi_0-\varepsilon$ чизиқнинг $B'C'$ кесмаси, $\xi=0$ чизиқнинг $A'C'$ кесмаси билан чегараланган $A'B'C'$ учбурчак ва $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\eta=\eta_0$ чизиқларнинг мос равишда $C''B''$, $D'D''$ кесмалари, $\xi=0$, $\xi_0-2\varepsilon$ чизиқларнинг $C''D'$, $B''D''$ кесмалари билан чегараланган $C''B''D''D'$ тўртбурчак бўйича интеграллаб (13–чизма), сўнгра Риман–Адамар функциясининг 1–5 хоссаларидан ва (42'), (43') шартлардан фойдаланган ҳолда $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$u_1\left(\xi_0,\eta_0\right)=\frac{1}{2}(2-4\beta)^{2\beta}\int_0^{\xi_0}\nu(\xi)\left[(\eta-\xi)^{-2\beta}\upsilon_2\right]\Big|_{\eta=\xi}d\xi+$$

$$+\int_0^{\eta_0}\left[\varphi'_1(\eta)+\beta\varphi_1(\eta)/\eta\right]\upsilon\left(0,\eta;\xi_0,\eta_0\right)d\eta$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу ердан $u(x,y)$ функцияга қайтиб ва

$$H_3(a,b,c;x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j\,j!}x^j\bar{J}_{-a-j}\left(2\sqrt{y}\right)$$

тенгликдан [12] фойдаланиб, баъзи амалларни бажаргандан сўнг

$$u(x,y)=k_2\int_0^{\xi}\frac{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]}{\left[(\xi-t)(\eta-t)\right]^{\beta}}\nu(t)\,dt+$$

$$+\int_0^{\eta}\left[\varphi'_1(t)+\beta\varphi(t)/t\right]\upsilon(0,t;\xi,\eta)\,dt \tag{44}$$

формулани оламиз, бу ерда $k_2=k_1(2-4\beta)^{2\beta}/2$, $\bar{J}_{-\beta}(x)=\Gamma(1-\beta)(x/2)^{\beta}J_{-\beta}(x)$, $J_{-\beta}(x)$ эса $(-\beta)$ тартибли биринчи тур Бессел функцияси.

Демак, (40), (42), (43) Коши – Гурса масаласининг D соҳада аниқланган ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосила – ларга эга бўлган ихтиёрий ечимини (44) кўринишда ёзиш мумкин экан.

Агар $\nu(x) \in C^2(0,1)$ $(x \to 0,\ x \to 1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин), $\psi_1(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$ бўлса, (44) формула билан берилган $u(x,y)$ функция $\overline{D}$ да аниқланган, узлуксиз ва D соҳада иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, Коши – Гурса масаласининг ечими бўлади. Ечимнинг ягоналиги (44) формулани олиш жараёнидан келиб чиқади.

(44) формула ёрдамида қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема [31]. Агар $\nu(x) \in C^{(0,h_1)}[0,1)$, $h_1 > \beta$ ва $x \to 1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга, $\psi_1(x) \in$ $\in C[0,1/2] \cap C^{(1,\varepsilon)}(0,1/2)$ $(\varepsilon > 0)$ ва $\psi_1'(x)$ ҳосила $[0,1/2]$ да чегараланган бўлса, у ҳолда $\tau(x) = \lim\limits_{y \to 0} u(x,y)$ мавжуд, $C^{(0,h_2)}[0,1)$ $(h_2 > 1-\beta)$ синфга тегишли ва

$$\tau(x) = k_2 \int_0^x (x-t)^{-2\beta} \overline{J}_{-\beta}[\lambda(x-t)]\nu(t)\,dt +$$

$$+ k_1 x^{-\beta} \int_0^x [\varphi_1'(t) + \beta\varphi_1(t)/t]\, t^{2\beta} (x-t)^{-\beta} \overline{J}_{-\beta}[\lambda\sqrt{x(x-t)}]\,dt$$

формула билан аниқланади.

Бу ердан келиб чиқадики, теорема шартлари бажарил – ганда (44) формула билан аниқланувчи ечим R_1 синфга тегишли бўлар экан.

Агар Коши – Гурса масаласида (43) чегаравий шарт ўрнига

$$u(x,y)|_{\overline{BC}} = \psi_2(x), \qquad (1/2) \le x \le 1 \tag{45}$$

шарт берилган бўлса, масаланинг ечими

$$u(x,y) = k_2 \int_\eta^1 \frac{\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(t-\xi)(t-\eta)}\right]}{\left[(t-\xi)(t-\eta)\right]^{\beta}}\, \nu(t)\,dt +$$

$$+\int_{\xi}^{1}\left[\varphi_2'(t)+\frac{\beta\varphi_2(t)}{1-t}\right]\upsilon(-1,-t;-\eta,-\xi)\,dt$$

формула билан берилади, бу ерда $\varphi_2(t)=\psi_2[(1+t)/2]$.

2. Умумий ҳол учун изоҳлар.

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)\,u_x+b(x,y)\,u_y+c(x,y)\,u=f(x,y)$$

$$(m>0,\ y<0) \qquad (^*)$$

умумий чизиқли тенглама учун Коши – Гурса масаласини ҳам шу усулда ечиш мумкин. Бунда бу тенгламага мос Риман – Адамар функциясини қуриш асосий масала бўлиб қолади. $m<2$ ёки $a(x,y)=O(1)\,(-y)^{\alpha}$, $\alpha>(m/2)-1$ шартлар бажарилганда [(40) тенглама учун бу шарт бажарилади] (*) тенглама учун Риман – Адамар функцияси мавжуд бўлишини Проттер исботлаган. Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема [43]. Фараз қилайлик, қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

1^0. $a(x,y)$ ва $b(x,y)$ функциялар D соҳада учинчи тартибгача узлуксиз ва чегараланган ҳосилаларга эга бўлиб, $m\geq 3$ бўлганда D да

$$a(x,y)=(-y)^{\alpha}O(1)\left(\alpha>\frac{m}{2}-1\right)$$

тенглик ўринли;

2^0. $c(x,y)$ ва $f(x,y)$ функциялар D соҳада биринчи тартибли узлуксиз ва чегараланган ҳосилаларга эга;

3^0. $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, $\nu(x)$ ва $\nu'(x)$ функциялар D соҳада узлуксиз ва чегараланган.

У ҳолда, (*) тенглама учун Коши – Гурса масаласи D соҳада ягона ечимга эга.

Агар берилган тенглама учун Проттер шарти бажарилмаса, Коши – Гурса масаласи ечимининг ягоналиги бузилиши мумкин.

Фикримизнинг исботи сифатида

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\frac{m}{2}(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_x=0 \qquad (y<0,\ m>0) \qquad (46)$$

тенглама учун (42), (43) шартли Коши – Гурса масаласини қарайлик.

Бу тенглама учун Проттер шарти бажарилмайди. (41) характеристик ўзгарувчиларга ўтиш ёрдамида кўрсатиш мумкинки, (46) тенгламанинг (42) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,y)=\varphi[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}]-$$
$$-\frac{2y}{m+2}\int_0^1\nu[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m-2)/2}(1-2t)](1-t)^{-2\beta}dt \qquad (47)$$

кўринишга эга, бу ерда $\varphi(x)\in C^2$ – ихтиёрий функция. Бу ечимни (43) га қўйиб, x ни $x/2$ билан ва интеграл ўзгарув – чиси t ни $z=x(1-t)$ формула бўйича алмаштирсак,

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-2\beta}\cdot\int_0^x\nu(z)z^{-2\beta}dz$$

тенгликка келамиз. Буни x бўйича дифференциалласак,

$$x^{2\beta}\psi'\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-2\beta}\nu(x) \qquad (48)$$

келиб чиқади.

Бундан ташқари, ишонч ҳосил қилиш қийин эмаски,

$$u(x,y)=\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right]-\varphi(0), \qquad (49)$$

(бу ерда $\varphi\in C^2$ – ихтиёрий функция) бир жинсли Коши – Гурса масаласининг ечими бўлади.

Демак, (46) тенглама учун бир жинсли бўлмаган Коши – Гурса масаласи фақат ва фақат (48) шарт бажарилгандагина ечимга эга ва у (47) формула билан аниқланади, бир жинсли масала эса чексиз кўп чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимга эга ва у (49) формула билан аниқланади.

Энди D соҳада (46) тенглама учун (42), (45) шартли Коши – Гурса масаласини қарайлик. (47) умумий ечимни (45) шартга қўйиб, $2x-1$ ни z га алмаштирсак,

$$\varphi(z)=\psi_2\left(\frac{1+z}{2}\right)-\left(\frac{m+2}{2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{2/(m+2)}\times$$
$$\times\int_0^1\nu[1+t(z-1)](1-t)^{-2\beta}dt$$

келиб чиқади.

Буни (47) га қўйиб, (46), (42), (45) масала ечимини аниқловчи формулага эга бўламиз.

Юқоридагилардан кўринадики, (46) тенглама учун Коши – Гурса масаласи номаълум функция қиймати $\overline{AC}$ да эмас, балки $\overline{BC}$ да берилганда коррект бўлар экан, яъни бу масалани ўрганишда $\overline{AC}$ ва $\overline{BC}$ характеристикалар тенг ҳуқуқли эмас экан.

5 – §. Дарбу масаласи

Бу параграфда аввалги параграфдаги белгилашлардан фойдаланамиз ва (40) тенгламани D соҳада қараймиз.

Дарбу масаласи. (40) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва (43) ҳамда

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad 0\le x\le 1 \tag{50}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x),\psi_1(x)$ – берилган функциялар бўлиб, $\tau(0)=\psi_1(0)$.

(41) характеристик координаталарда (40) тенглама, (43) ва (50) шартлар мос равишда (40), (43') ва

$$u_1(\xi,\xi)=\tau(\xi), \ 0\le\xi\le 1 \tag{50'}$$

кўринишга келади, D соҳа эса $A_1B_1C_1$ учбурчакка аксланади.

Дарбу масаласини ечишда қуйидаги хоссаларга эга бўлган Риман – Адамар функцияси деб аталувчи $w(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функция асосий ролр ўйнайди:

1) ξ_0,η_0 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида $L(w)=0$ тенгламани қаноатлантиради;

2) ξ,η ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида $M(w)=0$ қўшма тенгламани қаноатлантиради;

3) $w(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=1$;

4) $\dfrac{\partial[w]}{\partial\xi}+\beta\dfrac{[w]}{\eta-\xi}=0$,

бу ерда $[w]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[w(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)-w(\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)]$, $\varepsilon>0$.

Бундай хоссаларга эга бўлган Риман – Адамар функцияси М. Б. Капилевич томонидан тузилган [12]:

$$w(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}\upsilon_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta>\xi_0;\\ \upsilon_3(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta<\xi_0,\end{cases}$$

бу ерда

$$\upsilon_3(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=k_3\cdot\frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\eta_0-\eta)^{1-\beta}(\xi_0-\xi)^{1-\beta}}\times$$

$$\times H_3\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\frac{1}{s_1},s_2\right),$$

$$k_3=\Gamma(1-\beta)/\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta).$$

$w(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ функциядан $\lambda=0$ да $(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама учун Геллерстедт [42] томонидан қурилган Риман — Адамар функцияси келиб чиқади.

$u_1(\xi,\eta)-(40')$ тенгламанинг (43'), (50') шартларни қаноатлантирувчи ва $A_1B_1C_1$ учбурчакда иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган ечими бўлсин. У ҳолда, қуйидаги айният ўринли:

$$wL(u_1)-u_1M(w)=\overline{H}_\xi+\overline{K}_\xi=0,$$

бу ерда

$$\overline{H}=\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-u_1\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)+\frac{\beta u_1 w}{\eta-\xi},$$

$$\overline{K}=\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-u_1\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)-\frac{\beta u_1 w}{\eta-\xi}.$$

Бу айниятни $A'B'C'$ учбурчак ва $C''B''D''D'$ тўртбурчак бўйича (13 — чизма) интеграллаб, сўнгра Риман — Адамар функциясининг 1 — 4 хоссаларидан ва (43'), (50') шартлардан фойдаланган ҳолда $\varepsilon\to0$ да лимитга ўтсак,

$$u_1(\xi_0,\eta_0)=-\frac{1}{2}(2-4\beta)^{-2\beta}\int\limits_0^{\xi_0}\tau(\xi)T\left[(\eta-\xi)^{-2\beta}\upsilon_3\right]\Big|_{\eta=\xi}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\eta_0}\left[\varphi_1'(\eta)+\beta\varphi_1(\eta)/\eta\right]w(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta,$$

бу ерда $T[u]=(2-4\beta)^{-2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi-u_\eta)$, тенгликка келамиз.

Бу ердан $u(x,y)$ функцияга қайтиб ва текширилиши қийин бўлмаган

$$T[(\eta-\xi)^{-2\beta}\upsilon_3(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)]\Big|_{\eta=\xi}=$$

$$=-k_3\left[(2-4\beta)(\eta_0-\xi_0)\right]^{1-2\beta}\left[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)\right]^{\beta-1}\times$$

$$\times\bar{J}_{\beta-1}\left[\lambda\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}\right]$$

тенгликни эътиборга олсак, баъзи алмаштиришлардан сўнг

$$u(x,y)=k_4(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^\xi\frac{\bar{J}_{\beta-1}[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}]}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{1-\beta}}\tau(t)\,dt+$$

$$+\int_0^\eta[\varphi_1(t)+\beta\varphi_1(t)/t]\,w(0,t;\xi,\eta)\,dt \qquad (51)$$

формулага эга бўламиз, бу ерда $k_4=(1-2\beta)k_3$.

Демак, агар (40), (43), (50) Дарбу масаласи ечимга эга бўлса, бу ечимни (51) кўринишда ёзиш мумкин экан. (51) формулани олиш жараёнидан кўринадики, агар масала ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\psi_1(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^3(0,1/2)$ бўлса, (51) формула билан берилган $u(x,y)$ функция $\bar{D}$ да аниқланган, узлуксиз ва D да иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, Дарбу масаласи шартларини қаноатлантиради, яъни масаланинг ечими бўлади.

(51) формула ёрдамида қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема [31]. Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^{(0,h_2)}[0,1)$, $h_2>1-\beta$, $\tau(0)=\psi_1(0)$, $\psi_1(x)\in C[0,1/2]\cap C^{(1,\varepsilon)}(0,1/2)$ $(\varepsilon>0)$ ва $\psi'(x)$ хосила $[0,1/2]$ да чегараланган бўлса, $\nu(x)=\lim\limits_{y\to 0}u_y(x,y)$ мавжуд, $C^{(0,h_1)}[0,1)$ $(h_1>\beta)$ синфга тегишли ва

$$\nu(x)=\frac{\sin 2\beta\pi}{\pi k_2}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\bar{J}_\beta[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{1-2\beta}}\tau(t)\,dt+\right.$$

$$+\frac{\lambda^2}{4\beta(1+\beta)}\int_0^x\tau(t)(x-t)^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]dt-$$

$$-\int_0^x \left[\varphi_1'(t)+\frac{\beta\varphi_1(t)}{t}\right] t\ \frac{\overline{J}_{\beta-1}\left[\lambda\sqrt{x(x-t)}\right]}{\left[x(x-t)\right]^{1-\beta}}\,dt\right\}$$

формула билан аниқланади.

Бу ердан келиб чиқадики, теорема шартлари бажарилганда (51) формула билан аниқланувчи ечим R_1 синфга тегишли бўлар экан.

Худди шу усул билан (43) чегаравий шарт ўрнига (45) шарт олинса, Дарбу масаласининг ечими

$$u(x,y)=k_4(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_\eta^1 \frac{\overline{J}_{\beta-1}\left[\lambda\sqrt{(t-\xi)(t-\eta)}\right]}{\left[(t-\xi)(t-\eta)\right]^{1-\beta}}\,\tau(t)\,dt+$$

$$+\int_\xi^1\left[\varphi_2'(t)+\frac{\beta\varphi_2(t)}{1-t}\right]w(-1,\ t;\ \eta,\ \xi)\,dt$$

формула билан берилишини исботлаш мумкин.

6–§. Силжишли масалалар. Асгейрссон принципи

1. Силжишли масалалар.

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0 \quad (y<0,\ m>0) \tag{52}$$

тенглама учун $y=0$ чизиқнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесмаси ва (41) характеристикалар билан чегараланган D соҳада «силжишли масалалар» деб аталувчи шундай масалаларни баён қиламизки, бунда:

1) D соҳа чегарасининг барча қисми чегаравий шартлар билан банд бўлади;

2) бу масалалардан хусусий ҳолда илгари ўрганилган масалалар келиб чиқади.

Бунда қуйидаги Риман–Лиувилл маъносидаги каср тартибли интегродифференциал операторлардан фойдаланамиз:

$$D_{0x}^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1}f(t)\,dt, & \alpha<0,\\[2ex] \dfrac{d^n}{dx^n}\left\{D_{0x}^{-(n-\alpha)}f(x)\right\}, & n-1<\alpha\le n.\end{cases}$$

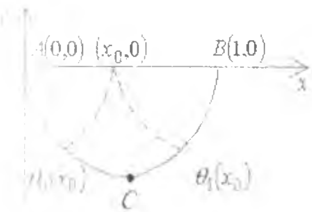
$$D^{\alpha}_{x1}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_x^1(t-x)^{-\alpha-1}f(t)\,dt, & \alpha<0,\\[2ex] (-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{D_{x1}^{-(n-\alpha)}f(x)\right\}, & n-1<\alpha\le n.\end{cases}\qquad(53)$$

Ушбу белгилашларни киритайлик:

$$\theta_0(x_0)=\left(\frac{x_0}{2},-\left(\frac{m+2}{4}x_0\right)^{\frac{2}{m+2}}\right),$$

$$\theta_1(x_0)=\left(\frac{1+x_0}{2},-\left(\frac{m+2}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)\qquad(54)$$

Текшириб кўриш қийин эмаски, $\theta_0(x_0)$ ва $\theta_1(x_0)$ лар (52) тенгламанинг $(x_0,0)\in AB$ нуқтадан чиқувчи характеристикаларининг мос равишда AC ва BC характеристикалар билан кесишиш нуқтасидан иборатдир. Агар $(x_0,0)$ нуқта AB да ҳаракатланиб, уни тўлдирса, $\theta_0(x_0)$ ва $\theta_1(x_0)$ нуқталар мос равишда AC ва BC характеристикаларда ҳаракатланиб, уларни тўлдиради (14 – чизма).



14 – чизма

1 – силжишли масала: Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AB)\cap C^2(D)$;

2) D соҳада (52) тенгламани қаноатлантиради;

3) D соҳа чегарасида

$$\lim_{y\to -0}u_y(x,0)=\nu(x),\qquad 0<x<1,\qquad(55)$$

$$a(x)D^{\beta}_{0x}x^{2\beta-1}u\left[\theta_0(x)\right]+b(x)D^{\beta}_{x1}(1-x)^{2\beta-1}u\left[\theta_1(x)\right]+$$

$$+c(x)u(x,0)=d(x),\quad (x,0)\in\overline{AB}\qquad(56)$$

шартларни қаноатлантиради, бу ерда $\beta=m/(2m+4)$; $\nu(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ – берилган функциялар бўлиб,

$$\nu(x)\in C^2(0,1),\quad \int_0^1 \nu(t)\left[t(1-t)\right]^{-\beta}dt<\infty,$$

$$a(x), b(x), c(x),\ d(x)\in C[0,1]\cap C^2\,(0,1),$$

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\neq 0,\quad x\in[0,1],$$

$$p(x)=\left[(1-x)^{1-\beta}a(x)+x^{1-\beta}b(x)\right]\left[\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]+$$

$$+\left[x(1-x)\right]^{1-\beta}c(x)\neq 0,\ \ x\in[0,1].$$

Масала коррект қўйилганлигини кўрсатамиз.

(52) тенглама учун Коши масаласи коррект қўйилган-лигига таяниб, 1 – силжишли масала ечимини (22) формула кўринишида, яъни

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_2 y\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-\beta}dt \qquad (57)$$

кўринишда қидирамиз, бу ерда $\nu(x)$ – (55) шартда берилган функция, $\tau(x)$ эса номаълум функция, $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

Номаълум $\tau(x)$ функцияни шундай танлаймизки, (57) функция (56) шартни ҳам қаноатлантирсин. Шу мақсадда $u\left[\theta_0(x)\right]$, $u\left[\theta_1(x)\right]$ ларни топамиз.

(57) формуладан (54) га асосан

$$u[\theta_0(x)]=\gamma_1 x^{1-2\beta}\int_0^x[t(x-t)]^{\beta-1}\tau(t)dt-\gamma_3\int_0^x[t(x-t)]^{-\beta}\nu(t)dt,$$

$$u\left[\theta_1(x)\right]=\gamma_1(1-x)^{1-2\beta}\int_x^1\left[(1-t)\,(t-x)\right]^{\beta-1}\tau(t)\,dt-$$

$$-\gamma_3\int_x^1\left[(1-t)\,(t-x)\right]^{-\beta}\nu(t)\,dt$$

келиб чиқади, бу ерда $\gamma_3 = (2-4\beta)^{2\beta-1}\gamma_2$.

(53) белгилашлардан фойдаланиб, бу тенгликларни

$$u[\theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1} \tau(x) - \gamma_3 \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta} \nu(x),$$

$$u[\theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta)(1-x)^{1-2\beta} D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x) - \tag{58}$$

$$-\gamma_3 \Gamma(1-\beta)\, D_{x1}^{\beta-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(58) ни (56) чегаравий шартга қўйиб ва $0 < l < 1$, $-1 < r < 0$ учун ўринли бўлган

$$D_{0x}^{l} D_{0x}^{-l} f(x) = D_{x1}^{l} D_{x1}^{-l} f(x) = f(x),$$

$$D_{0x}^{l} x^{l+r} D_{0x}^{r} f(x) = x^{r} D_{0x}^{l+r} x^{l} f(x), \tag{59}$$

$$D_{x1}^{l}(1-x)^{l+r} D_{x1}^{r} f(x) = (1-x)^{r} D_{x1}^{l+r}(1-x)^{l} f(x)$$

тенгликларни инобатга олсак,

$$p(x)\,\tau(x) = [\,x\,(1-x)]^{1-\beta}\, d(x) +$$

$$+\gamma_4\,(1-x)^{1-\beta} a(x)\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt + \tag{60}$$

$$+\gamma_4\, x^{1-\beta}\, b(x)\int_x^1 \nu(t)\,(t-x)^{-2\beta}\,dt$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $\gamma_4 = (2-4\beta)^{2\beta}/2\Gamma(1-\beta)$.

Берилган функцияларга қўйилган шартларга асосан охирги тенгликдан $\tau(x)$ функцияни бир қийматли топиш ва унинг $C[0,1]\cap C^2(0,1)$ синфга тегишлигини кўрсатиш қийин эмас.

Демак, бу масаланинг ечими (57) формула билан топилар экан, бу ерда $\tau(x)$ – (60) тенглик билан аниқланувчи функция. (57) формула Коши масаласи ечимини ифодалагани ва Коши масаласи коррект қўйилганлиги учун 1 – силжишли масала ҳам корректдир.

2 – силжишли масала. Қуйидаги шартларни қаноат – лантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D\cup AB)\cap C^2(D)$,

$$\int_0^1 u_y(t,0)\left[\, t\,(1-t)\,\right]^{-\beta} dt<\infty;$$

2) D соҳада (52) тенгламани қаноатлантиради;

3) D соҳа чегарасида

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{61}$$

$$\begin{gathered} a(x)\ D_{0x}^{1-\beta}\ u\left[\theta_0(x)\right]+b(x)\ D_{x1}^{1-\beta}\ u\left[\theta_1(x)\right]+ \\ +c(x)\ u_y(x,0)=d(x), \qquad (x,0)\in AB \end{gathered} \tag{62}$$

шартларни қаноатлантиради; бу ерда $\beta=m/(2m+4)$; $\tau(x)$, $a(x), b(x), c(x), d(x)$ — берилган функциялар бўлиб,

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1),$$

$$a(x),\ b(x),\ \ c(x)\in C[0,1]\cap C^2\ (0,1),$$

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\ne 0,\ \ x\in[0,1].$$

$$q(x)=\gamma_3\ \Gamma(1-\beta)[(1-x)^\beta a(x)+x^\beta b(x)]-$$

$$-\left[x(1-x)\right]^\beta c(x)\ne 0,\ x\in[0,1].$$

$d(x)\in C^2(0,1)$ функция $x\to 0$ ва $x\to 1$ да $1-\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин.

Бу масала ечимини ҳам (57) кўринишда қидирамиз, бу ерда $\tau(x)$ – (61) да берилган функция, $\nu(x)$ эса номаълум функция.

Номаълум $\nu(x)$ функцияни топиш мақсадида (57) ни (62) шартга қўямиз. Бу ерда ҳам (58) ва (59) тенгликлардан фойдаланиб,

$$\begin{gathered} q(x)\ \nu(x)=-\left[\ x(1-x)\ \right]^\beta d(x)+ \\ +\gamma_1\Gamma(\beta)\left[\ (1-x)^\beta a(x)\, D_{0x}^{1-2\beta}\ \tau(x)+x^\beta b(x)\ D_{x1}^{1-2\beta}\ \tau(x)\right] \end{gathered} \tag{63}$$

тенгликка эга бўламиз.

Берилган функцияларга қўйилган шартларга асосан $\nu(x)$ функция (63) тенгликдан бир қийматли топилади ва масала шартида талаб этилган хоссаларга эга бўлади.

Бу масаланинг корректлиги ҳам Коши масаласининг корректлигидан келиб чиқади.

1 – изоҳ. 1 – силжишли масалада $p(x) \neq 0$ шарт муҳимдир. Акс ҳолда, масала ечимга эга бўлиши учун берилган функциялар

$$[x(1-x)]^{1-\beta} d(x) = -\gamma_4 (1-x)^{1-\beta} a(x) \int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta} dt -$$

$$-\gamma_4 x^{1-\beta} b(x) \int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta} dt$$

тенгликни қаноатлантириши зарур бўларди. Агар шу шарт бажарилган бўлса, ихтиёрий $\nu(x) \in C^2(0,1)$ функция олинганда ҳам (57) функция масаланинг ечими бўлади, яъни масала ечимининг ягоналиги бузилади.

Худди шу каби 2 – силжишли масалада $q(x) \neq 0$ шарт масала коррект қўйилган бўлиши учун муҳимдир.

2 – изоҳ. Иккала масалада ҳам D соҳа чегарасининг барча қисми шартлар билан банд қилинган. Ҳақиқатан ҳам, (55) [(61)] шарт AB да берилаётган бўлса, $(x,0) \in AB$ да бўлганда, $\theta_0(x) \in AC$, $\theta_1(x) \in BC$ бўлиб, (56) [(62)] шарт номаълум функциянинг AC, BC ва AB даги қийматлари орасидаги муносабатни ифодаламоқда.

3 – изоҳ. Бу масалалардан хусусий ҳолда илгари ўрганилган масалалар келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, силжишли масалани қарайлик:

а) агар $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$ бўлса, (62) дан $u_y(x,0) = d(x)$ келиб чиқиб, у (61) билан бирга Коши масаласини ташкил қилади;

б) агар $c(x) \equiv b(x) \equiv 0$ $[c(x) \equiv a(x) \equiv 0]$ бўлса, (62) дан

$$D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] = d(x) \; \left\{ D_{x1}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] = d(x) \right\}$$

келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонига $D_{0x}^{\beta-1}$ $[D_{x1}^{\beta-1}]$ операторни қўллаб, $u[\theta_0(x)] = u|_{AC}$ $[u[\theta_1(x)] = u|_{BC}]$ ни топиш мумкин. Буни (61) билан бирга олиб, Дарбу масаласига эга бўламиз.

Худди шу каби 1-силжишли масаладан $c(x)\equiv b(x)\equiv 0$ $[c(x)\equiv a(x)\equiv 0]$ да Коши-Гурса масаласи, $a(x)\equiv b(x)\equiv 0$ да Коши масаласи келиб чиқади.

2. Асгейрссон принципи. Фараз қилайлик, $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AB)\cap C^2(D)$ – функция (52) тенгламанинг ечими бўлсин, у ҳолда (58) тенгликлар ўринли. Уларга мос равишда $D_{0x}^{1-\beta}$ ва $D_{x1}^{1-\beta}$ операторларни татбиқ қилиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини айириб ва (59) тенгликлардан фойдаланиб,

$$
\begin{aligned}
x^{\beta} D_{0x}^{1-\beta} u\left[\theta_0(x)\right]-(1-x)^{\beta} D_{x1}^{1-\beta} u\left[\theta_1(x)\right] &= \\
=\left[\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]\left[D_{0x}^{1-2\beta} u(x,0)-D_{x1}^{1-2\beta} u(x,0)\right] & \qquad (64)
\end{aligned}
$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу тенглик (52) тенглама учун Асгейрссон принципи деб аталиб, (52) тенгламанинг ихтиёрий регуляр ечими учун ўринлидир. Шу сабабли (52) тенглама учун D соҳада қўйилган ихтиёрий чегаравий масала (64) тенгликка зид бўлмагандагина коррект қўйилган бўлиши мумкин.

4-изоҳ. Агар $c(x)=0$, $a(x)\neq -x^{\beta}$, $b(x)\neq(1-x)^{\beta}$ бўлса, 2-масаладан Гурса масаласи келиб чиқади. Ҳақиқатан хам, бу шартлар бажарилганда (62) ва (64) икки номаълумли алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилиб, ундан $D_{0x}^{1-\beta}u[\theta_0(x)]$ ва $D_{x1}^{1-\beta}U[\theta_1(x)]$ бир қийматли топилади. Буларга мос равишда $D_{0x}^{\beta-1}$ ва $D_{x1}^{\beta-1}$ операторларни татбиқ қилсак, $u[\theta_0(x)]=u|_{AC}$ ва $u[\theta_1(x)]=u|_{BC}$ лар бир қийматли топилиб, 2-масала Гурса масаласига эквивалент эканлиги келиб чиқади.

7-§. Типи ва тартиби бузиладиган тенгламалар

Типи ва тартиби бир чизиқда бузиладиган тенгламаларнинг содда вакили

$$|y|^m u_{xx}-|y| u_{yy}+\alpha u_y=0 \qquad (65)$$

тенгламадир, бу ерда $m=const>1$, $\alpha=const$ – параметр.

$y=0$ тўғри чизиқда бу тенгламанинг типи ҳам, тартиби ҳам ўзгаради.

$y=0$ тўғри чизиқнинг $A(0,0)\,B(1,0)$ кесмаси ва (65) тенгламанинг $y<0$ ярим текисликда ётувчи

$$AC: \xi = x - \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}} = 0,$$

$$BC: \eta = x + \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}} = 1$$

характеристикалари билан чегараланган соҳани D билан белгилайлик.

Характеристик координаталарда (65) тенглама

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(u_\xi - u_\eta) = 0 \qquad (65')$$

кўринишга келади, бу ерда $\beta = (m-1+2\alpha)\,/\,(2m+2)$.

1. $\alpha = (1-m)/2$ **бўлган ҳол.** Бунда (65') тенглама $u_{\xi\eta} = 0$ кўринишга келиб, унинг умумий ечими

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) \qquad (66)$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда $f_1, f_2 \in C^2$ — ихтиёрий функциялар.

Бундан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки,

$$u(x,0) = \tau(x),\quad 0 \le x \le 1; \qquad u_y(x,0) = \nu_1(x),\quad 0 < x < 1 \qquad (67)$$

Коши масаласига мос бир жинсли масала

$$u(x,y) = f\left(x + \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right) - f\left(x - \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right),$$

бу ерда $f \in C^2$ — ихтиёрий функция, кўринишдаги чексиз кўп ечимга эга.

Демак, бу ҳолда (65) тенглама учун Коши масаласи коррект қўйилган эмас.

(65) тенгламани $D_\varepsilon = D \cap (y < -\varepsilon)$ соҳада $u(x,-\varepsilon)$, $u_y(x,-\varepsilon)$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топайлик, бу ерда $\varepsilon > 0$ етарлича кичик сон.

(66) формуладан фойдаланиб топиш мумкинки, бу масаланинг ечими

$$u_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{2}u(x+\omega,-\varepsilon)+\frac{1}{2}u(x-\omega,-\varepsilon)-$$

$$-\omega\cdot\varepsilon^{\frac{1-m}{2}}\int_0^1\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}u[x+(1-2t)\omega,\eta]\right\}\bigg|_{\eta=-\varepsilon}dt \qquad (68)$$

формула билан аниқланади, бу ерда

$$\omega=2\left[(-y)^{(m+1)/2}-\varepsilon^{(m+1)/2}\right]/(m+1).$$

(68) дан кўринадики, $y=0$ тўғри чизиқда бошланғич шартларни бериш учун (67) даги иккинчи шарт ўрнига

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\frac{1-m}{2}}u_y=\nu(x),\quad 0<x<1$$

шартни бериш керак. У ҳолда, бу масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\tau\left[x+\frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right]+\frac{1}{2}\tau\left[x-\frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right]-$$

$$-\frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\int_0^1\nu\left[x+(1-2t)\frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right]dt$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C^1(0,1)$ — берилган функциялар.

2. $|(1-m)/2|<\alpha<1$ **бўлган ҳол.** (65) тенглама учун D соҳада

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}u_y(x,y)=\nu(x),\quad 0<x<1 \qquad (69)$$

масалани қарайлик.

Бунда $0<\beta<1/2$ бўлиб, 1–параграфдан маълумки (65') тенгламанинг умумий ечими

$$u=(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\varphi(z_1)[t(1-t)]^{-\beta}dt+\int_0^1\psi(z_1)[t(1-t)]^{\beta-1}dt \qquad (70)$$

куринишга эга бўлади, бу ерда $\varphi,\ \psi \in C^2$ — ихтиёрий функциялар, $z_1 = \xi + (\eta - \xi)t$.

Бу умумий ечимни (69) бошланғич шартларга буйсиндириб ва x, y ўзгарувчиларга қайтсак, (65), (69) масала ечимини топамиз:

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}(2t-1)\right][t(1-t)]^{\beta-1}dt -$$

$$\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-\beta}dt,$$

бу ерда $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \nu(x) \in C^2(0,1)$ — берилган функциялар.

3. $-m < \alpha < (1-m)/2$ **бўлган ҳол.** Бунда $-(1/2) < \beta < 0$ бўлиб, (65') тенгламанинг умумий ечими (36) формулага асосан

$$u = (\eta - \xi)^{1-2\beta}\int_0^1 [t(1-t)]^{-\beta}\varphi(z_1)dt -$$

$$-2\beta(1+2\beta)\int_0^1 [t(1-t)]^{\beta}\psi(z_1)\,dt +$$

$$+\beta(\eta-\xi)\int_0^1 [t(1-t)]^{\beta}(1-2t)\psi'(z_1)dt$$

куринишга эга бўлади, бу ерда $\varphi, \psi \in C^2$ — ихтиёрий функциялар, $z_1 = \xi + (\eta - \xi)t$.

Бу ердан x, y ўзгарувчиларга қайтсак, (65) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = \left(\frac{4}{m+1}\right)^{1-2\beta}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 [t(1-t)]^{-\beta}\varphi(z_2)dt -$$

$$-2\beta(1+2\beta)\int_0^1 [t(1-t)]^{\beta}\psi(z_2)dt +$$

$$+\frac{4\beta}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\int_0^1 [t(1-t)]^{\beta}(1-2t)\psi'(z_2)dt$$

куринишга келади, бу ерда $z_2 = x - \frac{2}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}(1-2t)$.

Умумий ечимнинг бу кўринишидан фойдаланиб кўрсатиш қийин эмаски, бу ҳолда ҳам (65) тенглама учун

$$u(x,y)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\ \ 0<x<1$$

масала коррект қўйилган бўлади.

Бу масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{k_2}{\alpha-1}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1\left[t(1-t)\right]^{-\beta}\nu(z_2)dt$$

$$+k_1\int_0^1[t(1-t)]^{\beta}\tau(z_2)\,dt-$$

$$-\frac{2k_1}{(m+1)(1+2\beta)}(-y)^{\frac{m+1}{2}}\int_0^1[t(1-t)]^{\beta}(1-2t)\,\tau'(z_2)\,dt$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^{2}(0.1)$; $\nu(x)\in C^2(0,1)$ – берилган функциялар, $k_1=\Gamma(2+2\beta)/\Gamma^2(1+\beta)$, $k_2=\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

4. $\alpha=1$ бўлган ҳол. Бунда $\beta=1/2$ бўлиб, (65) [(65')] тенгламанинг умумий ечими, (7_6) формулага асосан,

$$u(x,y)=\int_0^1[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}}\varphi(z_2)dt+$$

$$+\int_0^1[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{1}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}t(1-t)\right]\psi(z_2)dt \qquad (71)$$

кўринишга эга.

Бундан кўринадики, бу ҳолда (65) тенглама учун

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln(-y)^{\frac{m+1}{2}}}=\tau(x),\quad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)\ln^2\left[(-y)^{\frac{m+1}{2}}\right]\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(x,y)-\omega_1(x,y)}{\ln(-y)^{\frac{m+1}{2}}}\right]=\nu(x),\ 0<x<1$$

масала коррект қуйилган бўлади, бу ерда

$$\omega_1(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[t(1-t)\right]^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{1}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}t(1-t)\right]\tau(z_2)\,dt.$$

Бу масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi(m+1)}\int_0^1[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}}\nu(z_2)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{1}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}t(1-t)\right]\cdot\tau(z_2)dt$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C^2(0,1)$ – берилган функциялар.

5. $\alpha<-m$ **бўлган ҳол.** Юқоридаги бандларда биз $-m<\alpha\le 1$ $(-1/2<\beta\le 1/2)$ бўлганда (65) тенглама учун $y=0$ бузилиш чизиғида қандай бошланғич шартлар бериш (яъни қандай коррект масалалар қўйиш) мумкинлигини ва бу масалалар ечимининг кўринишини аниқладик. (65) тенглама учун $\alpha<-m$ (яъни (65') тенглама учун $\beta<-1/2$) бўлганда қўйилиши мумкин бўлган коррект масалаларни аниқлашда Эйлер – Дарбу тенгламасининг хусусий ҳоли бўлган (65') тенглама учун ўринли бўлган

$$z(\beta-n,\beta-n)=(\eta-\xi)^{2n+1-2\beta}\frac{\partial^{2n}}{\partial\xi^n\partial\eta^n}\left[\frac{z(\beta,\beta)}{(\eta-\xi)^{1-2\beta}}\right]\tag{72}$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда $z(\beta,\beta)$ – (65') тенгламанинг ечими, $z(\beta-n,\beta-n)$ эса (65') тенгламада β параметр ўрнига $\beta-n$ қўйилган тенгламанинг ечими.

Бу формулани $[(1-m)/2]<\alpha<1$ ва $\alpha=1$ да (65) [(65')] тенгламанинг умумий ечимини аниқловчи (70), (71) формулаларга қўллаб, унинг $\alpha<-m$ $(\beta<-1/2)$ бўлгандаги умумий ечими учун формулалар топамиз.

а) $-n(m+1)-m<\alpha<1-n(m+1)\left(-\frac{1}{2}-n<\beta<\frac{1}{2}-n\right)$ бўлган ҳол. Бунда α параметрни $\alpha=(m+1)\left(\gamma+\frac{1}{2}-n\right)-m$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $-\frac{1}{2}<\gamma<\frac{1}{2}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Умумий ечим кўриниши қуйидагича бўлади [3, 41]:

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n} P_k(n,\gamma)\frac{(-y)^{k(m+1)}}{(m+1)^{2k}}\int_0^1 [t(1-t)]^{k+\gamma} F^{(2k)}(z_2)dt+$$

$$+\frac{(-y)^{1-\alpha}}{(m+1)^{1-2\gamma+2n}}\int_0^1 [t(1-t)]^{n-\gamma}\Phi(z_2)dt, \qquad (73)$$

бу ерда

$$P_k(n,\gamma)=2^{3k}C_{n+1}^{k}\left[\Gamma(\gamma+k+1)\prod_{l=0}^{k-1}{}'(2l+2\gamma-2n-1)\right]^{-1}, \quad k=1,2,\ldots,$$

$\prod'=1$, агар $k=0$ бўлса; $C_{n+1}^{k}=[(n+1)!]/[(n+1-k)!\,k!]$, $F(x)\in C^{2n+4}$, $\Phi(x)\in C^2$ – ихтиёрий функциялар.

Умумий ечимнинг (73) формуласидан келиб чиқадики, бу ҳолда (65) тенгламанинг

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}[u(x,y)-\omega_2(x,y)]=\nu(x), \quad 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала коррект қўйилган бўлади, бу ерда

$$\omega_2(x,y)=\sum_{k=0}^{n} P_k(n,\gamma)\frac{(-y)^{k(m+1)}}{(m+1)^{2k}}\int_0^1 [t(1-t)]^{k+\gamma} F^{(2k)}(z_2)dt.$$

б) $\alpha=-m-n(m+1)$. Бунда умумий ечим кўриниши қуйидагича бўлади:

$$u(x,y)=x^0(-y)^{(n-1)(m+1)}\int_0^1 \left[t(1-t)\right]^{n+1/2}\Phi(z_2)dt+$$

$$+x^1(-y)^{(n+1)(m+1)}\int_0^1 \left[t(1-t)\right]^{n+1/2}\ln\left[\frac{1}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}t(1-t)\right]F^{(2n+2)}(z_2)dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n+1} x_k(-y)^{k(m+1)}\int_0^1 \left[t(1-t)\right]^{k+1/2}F^{(2k)}(z_2)dt, \qquad (74)$$

бу ерда

$$x^0=(m+1)^{-2(n+1)},\qquad x^1=2^{3(n+1)}(m+1)^{-2(n+1)}[(2n+1)!!]^{-1},$$

$$x_k=(-1)^{n-k}\sqrt{\pi}C_{n+1}^k\frac{(n-k)!(m+1)^{-2k}\cdot 2^{2k-1}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)},\qquad k=0,1,...,n,$$

$$x_{n+1}=-\frac{2^{3n+4}(m+1)^{-2(n+1)}}{(2n+1)!!}\sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{2l-1}.$$

Умумий ечимнинг (74) формуласидан келиб чиқадики, бу ҳолда бошланғич масала коррект қўйилган бўлиши учун

$$u(x,0)=\tau(x).\qquad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{(m+1)n-m}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)-\omega_3(x,y)\right]=\nu(x),\quad 0<x<1$$

шартлар берилиши зарур, бу ерда

$$\omega_3(x,y)=\sum_{k=0}^{n+1}x_k(-y)^{k(m+1)}\int_0^1\left[t(1-t)\right]^{k+1/2}F^{(2k)}(z_2)dt+$$

$$+x^1(-y)^{(n+1)(m+1)}\int_0^1[t(1-t)]^{n+1/2}\ln\left[\frac{1}{m+1}(-y)^{\frac{m+1}{2}}t(1-t)\right]F^{(2n+2)}(z_2)dt.$$

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^{2n+4}(0,1)$, $\nu(x)\in C^2(0,1)$ бўлса, а) ва б) ҳолда қўйилган масалалар ягона ечимга эга, уларнинг ечимлари мос равишда (73) ва (74) фомулалар билан аниқланади, бу ерда

а) ҳолда

$$F(x)=\frac{\Gamma(2\gamma+2)}{\Gamma(\gamma+1)}\tau(x),\quad \Phi(x)=\frac{(m+1)^{1-2\gamma+2n}\Gamma(2n-2\gamma+2)}{(\alpha-1)\Gamma^2(n+1-\gamma)}\nu(x);$$

б) ҳолда

$$F(x)=\frac{(-1)^n16}{n!\,\pi}\tau(x),\qquad \Phi(x)=-\frac{(m+1)^{2n+1}(2n+2)!}{(n+1)\Gamma^2(n+3/2)}\nu(x).$$

6. $\alpha>1$ **бўлган ҳол.** Юқоридаги бандларда биз $\alpha\le 1$ бўлганда (65) тенгламанинг умумий ечими ва унга қўйиладиган коррект масалаларни аниқладик. Бевосита текшириб кўриш мумкинки, $\alpha\ne 1$ бўлганда (65) тенглама ечимлари учун

$$u_\alpha(x,y)=(-y)^{1-\alpha}u_{2-\alpha} \tag{75}$$

тенглик ўринли, бу ерда $u_\alpha(x,y)$ — (65) тенгламанинг ечими, $u_{2-\alpha}(x,y)$ эса (65) тенгламада α ўрнига $2-\alpha$ қўйилгандаги тенгламанинг ечими. (75) дан кўринадики, $\alpha<1$ даги (65) тенгламанинг умумий ечими ва бу тенгламага қўйилган коррект масалалар ёрдамида $\alpha>1$ бўлгандаги умумий ечим формуласи ва коррект масалаларни аниқлаш мумкин экан.

Шунинг учун 5-банддаги натижаларга асосланиб айтишимиз мумкинки, $\alpha>1$ да

$$\lim_{y\to0}(-y)^{\alpha-1}u(x,y)=\tau(x), \quad 0<x\le1;$$

$$\lim_{y\to0}(-y)^{2-\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\alpha-1}u(x,y)-\omega_4(x,y)\right]=\nu(x), \quad 0<x<1$$

масала коррект қўйилган бўлади, бу ерда $\omega_4(x,y)$ — $(2-\alpha)$ ёрдамида $\omega_2(x,y)$ каби аниқланувчи функция.

8-§. Сингуляр коэффициентли тенгламалар

D орқали $y<0$ ярим текисликнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесма ва

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}}u_x+\frac{\beta_0}{y}u_y=0 \tag{76}$$

тенгламанинг

$$AC:\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,$$
$$BC:\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1 \tag{77}$$

характеристикалари билан чегараланган соҳасини белгилайлик.

$y=0$ тўғри чизиқ (76) тенглама учун параболик бузилиш чизиғи бўлишдан ташқари u_x, u_y ҳосилаларнинг коэффициентлари чексизга айланувчи чизиқдир. Агар $\alpha_0\neq0$ бўлса, (76) тенглама учун (26) Проттер шарти бажарилмайди. Қолаверса, (76) тенгламанинг иккала томонини y га кўпайтирсак, типи ва тартиби бузиладиган тенглама ҳосил булади. Шу сабабли (76) тенглама учун коррект масалалар қуйишда α_0, β_0 параметрлар муҳим ролр уйнайди. Одатда бу тенглама урганилаётганда параметрларга

$$-2 < m, \qquad |\alpha_0| < (m+2)/2, \qquad -(m/2) \le \beta_0 < 1 \tag{78}$$

шартлар қуйилади.

Бундан ташқари, бу тенглама ечими учун

$$u_{\beta_0}(x,y) = (-y)^{1-\beta_0} u_{2-\beta_0}(x,y) \tag{79}$$

тенглик уринли, бу ерда u_{β_0} (76) тенгламанинг, $u_{2-\beta_0}$ эса (76) да β_0 параметр $2-\beta_0$ га алмашгандаги тенгламанинг ечими. Бундан куринадики, агар (76) тенгламанинг $\beta_0 < 1$ даги ечими топилган булса, (79) тенглик орқали унинг $\beta_0 > 1$ даги ечимини топиш мумкин.

(76) тенглама учун коррект қуйилган масалаларни аниқлаш мақсадида (77) характеристик координаталарга утамиз. Унда (76) тенглама

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta} u_\xi + \frac{\alpha}{\xi-\eta} u_\eta = 0 \tag{80}$$

куринишга келади, бу ерда

$$\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}, \qquad \beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)} \tag{81}$$

(80) — Эйлер—Дарбу тенгламаси булиб, α, β ларнинг турли қийматларида унинг умумий ечим формуласи тур-личадир. α ва β лар α_0 ва β_0 ларга боғлиқ равишда узгар-гани учун, уларни $\alpha_0 O \beta_0$ текислигида тадқиқ қилайлик.

$0 < \alpha$, $\beta < 1$ булишини талаб қилайлик. (81) дан фойда-ланиб курсатиш мумкинки, бунинг учун α_0 ва β_0 параметр-лар

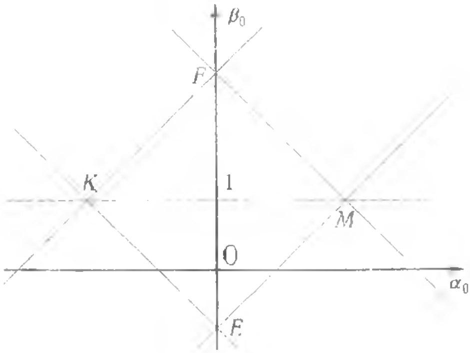
$$\begin{cases} -\dfrac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \dfrac{m}{2} + 2 \\ -\dfrac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \dfrac{m}{2} + 2 \end{cases} \tag{82}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантириши керак. $\alpha_0 O \beta_0$ параметрлар текислигида (82) тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами

$$KF: \beta_0 - \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2}, \quad FM: \beta_0 + \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2},$$

$$ME: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad KE: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган $KEMF$ тўртбурчакдан иборат.



15-чизма

Демак, (α_0, β_0) нуқта $KEMF$ тўртбурчакда ётса, $0 < \alpha$, $\beta < 1$ бўлади. Бундан ташқари, агар бу нуқта:

а) ΔKEM да бўлса, $\beta_0 < 1$, $\alpha + \beta < 1$;

б) $KE \cup \{E\}$ да бўлса, $\beta_0 < 1$. $\alpha = 0$, $\alpha + \beta < 1$;

в) ME да бўлса, $\beta_0 < 1$. $\beta = 0$, $\alpha + \beta < 1$;

г) KM да бўлса, $\beta_0 = 1$, $\alpha + \beta = 1$;

д) ΔKFM да бўлса, $\beta_0 > 1$, $\alpha + \beta > 1$;

е) $KF \cup \{F\}$ да бўлса, $\beta_0 > 1$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta > 1$;

ф) MF да бўлса, $\beta_0 > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha + \beta > 1$.

муносабатлар ўринли бўлади.

Юқоридагилардан ва (80) тенгламанинг умумий ечим формулаларидан (1 – § га қаранг) фойдаланиб, (76) тенгламанинг умумий ечимини ва унга қўйиладиган коррект масалаларни топиш мумкин.

1. $(\alpha_0,\beta_0)\in \Delta KEM\cup KE\cup ME\cup\{E\}$, **яъни** $\beta_0<1$ **бўлсин.**

Бунда умумий ечим қуйидаги кўринишга эга:

а) $(\alpha_0,\beta_0)\in \Delta KEM$, яъни $0<\alpha,\beta<1$, $0<\alpha+\beta<1$ бўлса,

$$u(x,y)=\int_0^1\varphi(z)\,t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+$$

$$+(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1\psi(z)\,t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt; \qquad (83_1)$$

б) $(\alpha_0,\beta_0)\in KE$, яъни $\alpha=0,\ 0<\beta<1, -\dfrac{m}{2}<\beta_0<1$ бўлса,

$$u(x,y)=\varphi(\eta)+(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1(1-t)^{-\beta}\psi(z)dt; \qquad (83_2)$$

в) $(\alpha_0,\beta_0)\in ME$, яъни $\beta=0, 0<\alpha<1, -\dfrac{m}{2}<\beta_0<1$ бўлса,

$$u(x,y)=\varphi(\xi)+(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1 t^{-\alpha}\psi(z)dt; \qquad (83_3)$$

г) $(\alpha_0,\beta_0)=E$, яъни $\alpha=\beta=0,\quad \beta_0=-\dfrac{m}{2}$ бўлса,

$$u=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)+(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1\psi(z)dt, \qquad (83_4)$$

бу ерда $\varphi(x),\psi(x)\in C^2$ — ихтиёрий функциялар,

$$z=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1).$$

Умумий ечимнинг (83) формулаларидан кўринадики, бу ҳолда (76) тенглама учун бошланғич шартлар

$$u(x,0)=\tau(x),\qquad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y)=\nu(x),\ 0<x<1$$

кўринишда берилган масала коррект қўйилган бўлади.

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C^2(0,1)$ бўлса, бу масаланинг ечими (83) формулалар билан берилади, бунда

а) ҳолда

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\tau(x),\quad \psi(x)=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{(\beta_0-1)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\nu(x);$$

б) ҳолда

$$\varphi(x)=\tau(x), \quad \psi(x)=(1-\beta)(\beta_0-1)^{-1}\nu(x);$$

в) ҳолда

$$\varphi(x)=\tau(x), \qquad \psi(x)=(1-\alpha)(\beta_0-1)^{-1}\nu(x);$$

г) ҳолда

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tau(x), \qquad \psi(x)=-[2/(m+2)]\nu(x).$$

2 $(\alpha_0,\beta_0)\in KM$**, яъни** $\beta_0=1$ **бўлсин.**

Бунда умумий ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y)=\int_0^1 \psi(z)t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}dt+$$

$$+\int_0^1 \varphi(z)\; t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\ln\left[\frac{t(1-t)}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right]dt, \tag{84}$$

бу ерда ҳам $z=x+\dfrac{2}{(m+2)}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)$.

(84) дан келиб чиқадики, бу ҳолда (76) тенгламага қуйиладиган бошланғич масала коррект бўлиши учун

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln(-y)^{(m+2)/2}}=\tau(x), \quad 0<x<1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)\ln^2\left[(-y)^{(m+2)/2}\right]\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(x,y)-\omega_1(x,y)}{\ln(-y)^{(m+2)/2}}\right]=\nu(x), \; 0<x<1$$

кўринишдаги шартлар берилиши зарур, бу ерда

$$\omega_1(x,y)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^1\tau(z)\,t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\cdot\ln\left[\frac{t(1-t)}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right]dt.$$

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C^2(0,1)$ бўлса, бу масаланинг ечими (84) формула билан аниқланади ва бунда

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\tau(x), \qquad \psi(x)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi(m+2)}\nu(x).$$

3. $(\alpha_0,\beta_0)\in \Delta KFM\cup KF\cup MF\cup\{F\}$**, яъни** $\beta_0>1$ **бўлсин.**

Бунда $\alpha+\beta>1$ бўлиб, (79) тенгликдан ва 1 – банддаги мулоҳазалардан фойдаланиб, (76) тенгламанинг умумий ечими ва унга қўйиладиган коррект масалаларни топиш мумкин. Бунинг учун

$$\alpha_1=\frac{m+2(2-\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)},\quad \beta_1=\frac{m+2(2-\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$$

белгилашларни киритайлик.

Кўрсатиш қийин эмаски, бу ҳолда $0<\alpha_1,\ \beta_1<1$ ва $0<\alpha_1+\beta_1<1$. Буларни ва (79) тенгликни инобатга олиб, умумий ечимни топамиз:

а) $(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta KFM$, яъни $0<\alpha_1,\beta_1<1,\ 0<\alpha_1+\beta_1<1$ бўлса,

$$u(x,y)=(-y)^{1-\beta_0}\int\limits_0^1\varphi(z)\,t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}dt+$$

$$+\int\limits_0^1\psi(z)t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}dt; \qquad (85_1)$$

б) $(\alpha_0,\beta_0)\in KF$, яъни $\alpha_1=0,\ \ 0<\beta_1<1$ бўлса,

$$u(x,y)=(-y)^{1-\beta_0}\varphi(\eta)+\int\limits_0^1(1-t)^{-\beta_1}\psi(z)dt; \qquad (85_2)$$

в) $(\alpha_0,\beta_0)\in MF$, яъни $\beta_1=0,\ \ 0<\alpha_1<1$ бўлса

$$u(x,y)=(-y)^{1-\beta_0}\varphi(\xi)+\int\limits_0^1 t^{-\alpha_1}\psi(z)dt; \qquad (85_3)$$

г) $(\alpha_0,\beta_0)=F$, яъни $\alpha_1=\beta_1=0,\ \beta_0=2+\dfrac{m}{2}$ бўлса,

$$u(x,y)=(-y)^{1-\beta_0}\left[\varphi(\xi)+\varphi(\eta)\right]+\int\limits_0^1\psi(z)dt, \qquad (85_4)$$

бу ерда ҳам z,ξ,η билан 1 – банддаги ифодалар белгиланган, $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^2$ – ихтиёрий функциялар.

Умумий ечимнинг (85) формулаларидан келиб чиқадики, бу ҳолда (76) тенгламага қўйиладиган бошланғич масала коррект бўлиши учун

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\beta_0-1}u(x,y)=\tau(x),\ 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\beta_0-1}u(x,y)-\omega_2(x,y)\right]=\nu(x),\quad 0<x<1$$

кўринишдаги шартлар берилиши керак, бу ерда

$$\omega_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)}\int\limits_0^1\tau(z)\,t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}dt, & \text{а) ҳолда;}\\ \tau(\eta), & \text{б) ҳолда;}\\ \tau(\xi), & \text{в) ҳолда;}\\ \dfrac{1}{2}\left[\tau(\xi)+\tau(\eta)\right], & \text{г) ҳолда.}\end{cases}$$

Агар $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \nu(x)\in C^2(0,1)$ бўлса, бу масаланинг ечими (85) формулалар билан берилади, бу ерда

а) ҳолда

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)}\tau(x),\qquad \psi(x)=\frac{\Gamma(2-\alpha_1-\beta_1)\nu(x)}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\beta_1)};$$

б) ҳолда

$$\varphi(x)=\tau(x),\qquad \psi(x)=(1-\beta_1)(1-\beta_0)^{-1}\nu(x);$$

в) ҳолда

$$\varphi(x)=\tau(x),\qquad \psi(x)=(1-\alpha_1)(1-\beta_0)^{-1}\nu(x);$$

г) ҳолда

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tau(x),\qquad \psi(x)=-\frac{2}{m+2}\nu(x).$$

9–§. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламалар

xOy текислигида қуйидаги тенгламани қарайлик:

$$|y|^m u_{xx}-|x|^n u_{yy}=0,\qquad m,n\neq 0.$$

$x=0$ ва $y=0$ тўғри чизиқларда бу тенглама параболик бузилади. Тенгламанинг бузилиш характери m ва n кўрсаткичларга боғлиқдир. Шунинг учун (m,n) кўрсаткичлар жуфтининг турли қийматларида текисликнинг турли чоракларида бу тенгламага коррект қўйилган масалалар турлича баён қилинади. Биз бу ерда тенгламани xOy текисликнинг тўртинчи чорагида қараймиз ва қуйидаги тўрт ҳолга тўхталамиз: $m=n>0$; $-1<m=n<0$; $m>0$, $n>0$, $m\neq n$; $-1<m<0$, $-1<n<0, m\neq n$.

Демак, бу параграфда $\{(x,y):\ y<0,\ x>0\}$ соҳада

$$(-y)^m u_{xx} - x^n u_{yy} = 0 \tag{86}$$

тенгламани ўрганамиз.

1. $m=n>0$ **бўлган ҳол.**

Бунда (86) тенглама

$$\xi = x^{\frac{m+2}{2}} - (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \eta = x^{\frac{m+2}{2}} + (-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{87}$$

кўринишдаги иккита характеристикалар оиласига эга бўлиб, $y=0$ тўғри чизиқ бу характеристикаларнинг қайтиш нуқталари тўпламидан иборат бўлади.

(87) характеристик координаталарда (86) тенглама

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta+\xi}\left(u_\eta + u_\xi\right) - \frac{\beta}{\eta-\xi}\left(u_\eta - u_\xi\right) = 0 \tag{88}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $\beta = m/(2m+4)$, бўлиб, $0<\beta<1/2$. Бу тенглама $t=\xi^2$, $s=\eta^2$ алмаштириш натижасида Эйлер – Дарбунинг

$$u_{st} + \frac{\beta}{s-t}\left(u_t - u_s\right) = 0 \tag{89}$$

тенгламасига келади. 1 – § дан маълумки, (89) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$u = (s-t)^{1-2\beta}\int_0^1 \varphi\left[t+(s-t)z\right]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}\,dz +$$

$$+\int_0^1 \psi\left[t+(s-t)z\right]z^{\beta-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz, \tag{90}$$

бу ерда $\varphi(x), \psi(x) \in C^2$ – ихтиёрий функциялар.

Бу ердан x, y ўзгарувчиларга қайтиб, (86) тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$u(x,y)=-4^{1-2\beta}xy\int_0^1\varphi(z_1)\ z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dz+$$

$$+\int_0^1\psi(z_1)\ z^{\beta-1}(1-z)^{\beta-1}dz,$$

$$z_1=x^{m+2}+(-y)^{m+2}+2(-xy)^{\frac{m+2}{2}}(2z-1).$$

Умумий ечимнинг бу формуласи ёрдамида (86) тенгламанинг

$$u(x,0)=\tau(x),\quad u_y(x,0)=v(x) \tag{91}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала (Коши масаласи) коррект қўйилганлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Агар $\tau(x)\in C[x_1,x_2]\cap C^2(x_1,x_2)$, $v(x)\in C^2(x_1,x_2)$, $x_1<x_2$ бўлса, бу масаланинг ечими

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau\left(z_1^{\frac{1}{m+2}}\right)z^{\beta-1}(1-z)^{\beta-1}dz-$$

$$-\gamma_2xy\int_0^1 z_1^{-\frac{1}{m+2}}v\left(z_1^{\frac{1}{m+2}}\right)z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dz$$

формула билан аниқланиб, у $D=\{(x,y):x_1<\xi<\eta<x_2\}$ соҳанинг ёпиғида узлуксиз ва D соҳада икки марта узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функцияни аниқлайди, бу ерда $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

2. $-1<m=n<0$ бўлган ҳол.

Бунда (86) тенглама (87) кўринишдаги иккита характеристикалар оиласига эга бўлиб, $y=0$ тўғри чизиқ бу характеристикаларнинг уриниш чизиғи, яъни узи ҳам (86) тенглама учун характеристика булади. Бу ерда ҳам 1—банддаги алмаштиришлар натижасида (86) тенглама (89) кўринишга келади. Бу ҳолда $-(1/2)<\beta<0$ булиб, тенглама—нинг умумий ечими (3—§га қаранг)

$$u=(s-t)^{1-2\beta}\int_0^1\varphi\left[t+(s-t)z\right]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dz-$$

$$-2\beta(1+2\beta)\int_0^1 \psi\left[t+(s-t)z\right] z^{\beta}(1-z)^{\beta}dz+$$

$$+\beta(s-t)\int_0^1 \psi'\left[t+(s-t)z\right] z^{\beta}(1-z)^{\beta}(1-2z)dz$$

формула билан аниқланади.

Охиригида x, y ўзгарувчиларга қайтиб, (86) тенглама учун $-1<m=n<0$ бўлгандаги умумий ечимни топамиз:

$$u(x,y)=-4^{1-2\beta}xy\int_0^1 \varphi(z_1)z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dt-$$

$$-2\beta(1+2\beta)\int_0^1 \psi(z_1)z^{\beta}(1-z)^{\beta}dz+$$

$$+4\beta(-xy)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \psi'(z_1)\, z^{\beta}(1-z)^{\beta}(1-2z)\,dz,$$

бу ерда ҳам $z_1=x^{m+2}+(-y)^{m+2}+2(-xy)^{\frac{m+2}{2}}(2z-1)$.

Бу формуладан келиб чиқадики, (86) тенгламанинг (91) шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,y)=\gamma_3\int_0^1 \tau\left(z_1^{\frac{1}{m+2}}\right)z^{\beta}(1-z)^{\beta}dz-$$

$$-\frac{2\gamma_3}{1+2\beta}(-xy)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \tau'\left(z_1^{\frac{1}{m+2}}\right)z^{\beta}(1-z)^{\beta}(1-2z)dz+$$

$$+\gamma_4 xy\int_0^1 z_1^{-\frac{1}{m+2}}\nu\left(z_1^{\frac{1}{m+2}}\right)z^{-\beta}(1-z)^{-\beta}dz$$

кўринишга эга, бу ерда $\gamma_3=\Gamma(2+2\beta)/\Gamma^2(1+\beta)$, $\gamma_4=\Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$. Агар $\tau(x)\in C[x_1,x_2]\cap C^3(x_1,x_2)$, $\nu(x)\in C^2(x_1,x_2)$, $x_1<x_2$ бўлса, бу ечим $D=\{(x,y): x_1<\xi<\eta<x_2\}$ соҳанинг ёпиғида узлуксиз ва D да икки марта узлуксиз хосилаларга эга бўлган функцияни ифодалайди.

3. $m>0,\ n>0,\ m\neq n$ **бўлган ҳол.**

Бунда (86) тенглама

$$\xi=\frac{1}{q}x^q-\frac{1}{p}(-y)^p,\quad \eta=\frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}(-y)^p. \qquad (92)$$

бу ерда $2p=m+2,\ 2q=n+2,$ кўринишдаги икки характеристикалар оиласига эга бўлиб, $y=0$ тўғри чизиқ бу характеристикаларнинг қайтиш нуқталари тўпламидан иборат бўлади.

D орқали $y=0$ тўғри чизик ва (86) тенгламанинг $AC:\xi=0$ $BC:\eta=h$ характеристикалари билан чегараланган соҳани белгилайлик, бу ерда $h=q^{1/q}$.

Коши масаласи: (86) тенгламанинг $C(\bar{D})\cap C^1(D\cup AB)\cap$ $\cap C^2(D)$ синфга тегишли ва

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le h;\quad u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<h \qquad (93)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)\in C[0,h]\cap C^2(0,h),\ \ \nu(x)\in C^2(0,h)$ — берилган функциялар.

Масала коррект қўйилганлигини исботлаш мақсадида (92) характеристик координаталарга ўтамиз. Унда (86) тенглама ва (93) шартлар мос равишда

$$u_{\xi\eta}+\frac{\alpha}{\eta+\xi}\left(u_\xi+u_\eta\right)+\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(u_\xi-u_\eta\right)=0, \qquad (86')$$

$$\lim_{\eta\to\xi}u(\xi,\eta)=\tau[(q\xi)^{1/q}],\quad 0\le\xi\le h,$$

$$(93')$$

$$\lim_{\eta\to\xi}\left(\frac{p}{2}\right)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=\nu\left[(q\xi)^{1/q}\right],\quad 0<\xi<h$$

кўринишга келади, D соҳа эса $D'=\{(\xi,\eta):0<\xi<\eta<h\}$ учбурчакка ўтади, бу ерда $\alpha=\dfrac{n}{2n+4},\ \beta=\dfrac{m}{2m+4}$.

(86') тенглама учун Риман функцияси қуйидаги кўринишга эга [7, 13]:

$$V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}F_3(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;r_1,r_2),$$

бу ерда

$$r_1=-\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)}, \qquad r_2=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)},$$

$$F_3(\alpha,\beta,\alpha',\beta',\gamma,x;y)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_i(\beta)_j(\alpha')_i(\beta')_j}{(\gamma)_{i+j}\, i!\, j!}x^i y^j .$$

(86') тенглама ва $D_\varepsilon' = D'\cap(\eta-\xi>\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ соҳага Риман усулини қўллаб, (93) шартлар ва

$$F_3(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;r_1,r_2)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(-r_2)^{-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i(1-\alpha)_i}{(1-\beta)_i\cdot i!}r_1^i\times$$

$$\times F\left(\beta,\beta-i,2\beta;\frac{1}{r_2}\right)+\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}(-r_2)^{\beta-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i(1-\alpha)_i}{(\beta)_i\cdot i!}r_1^i\times$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta-i,2-2\beta;\frac{1}{r_2}\right)$$

тенгликдан фойдаланиб, $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтсак, (86'), (93') масала ечимини аниқловчи формула келиб чиқади [7, 25]:

$$u(\xi,\eta)=\gamma_5 2^\alpha\int_\xi^\eta\frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\, t^\alpha\tau_1(t)}{(\eta+\xi)^\alpha(\eta-t)^{1-\beta}(t-\xi)^{1-\beta}}F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_0)dt+$$

$$+\gamma_6 2^\alpha\int_\xi^\eta\frac{t^\alpha\nu_1(t)}{(\eta+\xi)^\alpha(\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta}F(\alpha,1-\alpha,1-\beta;z_0)dz,$$

бу ерда

$$\tau_1(t)=\tau[(qt)^{1/q}],\ \ \nu_1(t)=\nu[(qt)^{1/q}],\ \ z_0=[(\eta-t)(t-\xi)][2t(\eta+\xi)]^{-1},$$

$$\gamma_5=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta),\quad \gamma_6=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\right)^{2\beta}\Gamma(1-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta).$$

Охирги формулада x,y ўзгарувчиларга қайтиб, (86), (93) масаланинг ечимига эга бўламиз:

$$u(\xi,\eta)=\gamma_5\left(\frac{1}{q}x^q\right)^{-\alpha}\int_0^1 z_1^\alpha\,\tau\left[(qz_1)^{1/q}\right]\left[z(1-z)\right]^{\beta-1}\times$$

$$\times F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_2)dz-$$

$$
-\gamma_6\left(\frac{1}{q}x^q\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{p}(-y)^p\right)^{1-2\beta}\int_0^1 z_1^{\alpha} v\left[(qz_1)^{1/q}\right]\left[z(1-z)\right]^{-\beta}\times
$$

$$
\times F(\alpha,1-\alpha,1-\beta;z_2)\,dz. \tag{94}
$$

бу ерда

$$
z_1=\frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}(-y)^p(2z-1),\quad z_2=\left[q(-y)^{2p}z(1-z)\right]/\,p^2x^qz_1.
$$

Бу ечимнинг ягоналиги уни келтириб чиқариш жараё–нидан келиб чиқади.

4. $-1<m<0,\ -1<n<0,\ m\neq n$ **бўлган ҳол.**

Бу ҳолда ҳам (86) тенглама (92) кўринишдаги икки характеристикалар оиласига эга бўлиб, $y=0$ тўғри чизиқ бу характеристикаларнинг уриниш нуқталари тўплами, яъни (86) тенгламанинг характеристикаси бўлади. Коши масаласи бу ҳолда ҳам 3–банддаги каби баён қилинади. Унинг ечимини топиш мақсадида (92) характеристик координата–ларга ўтсак, (86) тенглама (86') кўринишни олади, аммо бу ерда $-(1/2)<\alpha,\ \beta<0$. Бу ерда ҳам Риман усули қўлланса [22], (86'), (93') масаланинг ечими учун қуйидаги формула келиб чиқади:

$$
u(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}H_1(\xi,\eta,t)\,\tau_1(t)\,dt+\int_{\xi}^{\eta}H_2(\xi,\eta,t)\,\tau_1'(t)\,dt+
$$

$$
+\int_{\xi}^{\eta}H_3(\xi,\eta,t)\,\nu_1(t)\,dt.
$$

бу ерда

$$
H_1(\xi,\eta,t)=\gamma_7S(\xi,\eta,t)\left\{\left[2+4\beta-\frac{\alpha}{t}(\eta+\xi-2t)\right]F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_0)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial}{\partial z_0}F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_0)\cdot\frac{\partial z_0}{\partial t}\right\},
$$

$$
H_2(\xi,\eta,t)=-\gamma_7(\eta+\xi-2t)S(\xi,\eta,t)F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_0),
$$

$$
H_3(\xi,\eta,t)=-\gamma_6 2^{\alpha}(\eta+\xi)^{-\alpha}t^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}F(\alpha,1-\alpha,1-\beta;z_0).
$$

$$
\gamma_7=\frac{\Gamma(1+2\beta)}{2\Gamma^2(1+\beta)},\quad S(\xi,\eta,t)=\left(\frac{2t}{\eta+\xi}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-t)^{\beta}(t-\xi)^{\beta}}{(\eta-\xi)^{1+2\beta}}.
$$

x, y ўзгарувчиларга қайтиб, (86) тенглама учун Коши масаласининг ечимига эга бўламиз:

$$u(x,y)=\int_0^1 \overline{H_1}(x,y,z)\,\tau\left[(qz_1)^{1/q}\right]dz+$$
$$+\int_0^1 \overline{H_2}(x,y,z)\,\tau'\left[(qz_1)^{1/q}\right]dz+\int_0^1 \overline{H_3}(x,y,z)\,\nu\left[(qz_1)^{1/q}\right]dz, \tag{95}$$

бу ерда

$$\overline{H_1}(x,y,z)=\gamma_7\left(\frac{1}{q}x^q\right)^{-\alpha} z_1^{\alpha}\left[z(1-z)\right]^{\beta}\times$$
$$\times\left\{\left[2+4\beta+\frac{2\alpha}{z_1 p}(-y)^p(2z-1)\right]F(\alpha,1-\alpha,\beta,z_2)-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{2}{p}(-y)^p\right]^{-1}\frac{\partial z_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_2)\right\}.$$

$$H_2(x,y,z)=\gamma_7(2-4z)\frac{1}{p}(-y)^p\left(\frac{1}{q}x^q\right)^{-\alpha} z_1^{\alpha}[z(1-z)]^{\beta}F(\alpha,1-\alpha,\beta;z_2)$$

$$H_3(x,y,z)=-\gamma_6\left(\frac{1}{q}x^q\right)^{-\alpha}\left[\frac{2}{p}(-y)^p\right]^{1-2\beta} z_1^{\alpha}[z(1-z)]^{-\beta}F(\alpha,1-\alpha,1-\beta;z_2)$$

Агар $\tau(x)\in C[0,h]\cap C^3(0,h)$, $\nu(x)\in C^2(0,h)$ бўлса, (95) функция $\overline{D}$ да аниқланган, узлуксиз ва D соҳада икки марта узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, (86) тенгламани ва (93) шартларни қаноатлантиради.

10−§. Экстремум принципи

Гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципи аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни текширишда кенг фойдаланилади. Шунинг учун бундай принципларни ўрганиш муҳим аҳамиятга эга

Фараз қилайлик, D соҳада гиперболик типдаги тенглама учун бирор экстремум принципи баён қилинган бўлсин. Агар бунда тенглама ечимининг $\overline{D}$ даги ёки D га қарашли бирор нуқтанинг қисқа атрофидаги экстремуми ҳақида фикр юритилаётган бўлса, бу принципни мос равишда *мутлақ экстремум принципи* [40] ёки *локал экстремум принципи* [1,6,26] дейилади.

I. Мутлақ экстремум принципи.

1. Тор тебраниш тенгламаси учун экстремум принципи.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{96}$$

тенгламани $y=0$ тўғри чизиқнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесмаси ва $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ характеристикалар билан чегара–ланган D_1 соҳада қарайлик.

Экстремум принципи. (96) тенгламанинг $\overline{AC}$ $\left(\overline{BC}\right)$ да нолга тенг бўлган $u \in C\left(\overline{D_1}\right)$ регуляр ечими ўзининг $\overline{D}_1$ даги эктремал қийматларини $\overline{AB}$ кесмада қабул қилади.

Агар бу функциянинг эктремал қиймати $(x_0,0) \in AB$ нуқтада эришилган бўлса,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} u_y(x,y) = 0 \tag{97}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот: Маълумки (96) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = f_1(x+y) + f_2(x-y)$$

кўринишга эга, бу ерда $f_1, f_2 \in C^2$ – ихтиёрий функциялар. Бу формуладан фойдаланиб кўрсатиш қийин эмаски, (96) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регуляр ечими

$$u(x,y) = \tau(x+y) \tag{98}$$

кўринишга эга, бу ерда $\tau(t) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ – ихтиёрий функция бўлиб, $\tau(0)=0$.

(98) дан кўринадики, бу функция $x+y=const$ чизиқнинг барча нуқталарида (жумладан, $y=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасида ҳам) бир хил қиймат қабул қилади. Демак, $u(x,y)$ функциянинг D_1 соҳада қабул қиладиган ҳар бир қиймати, жумладан, экстремал қиймати ҳам, $\overline{AB}$ кесмада қабул қилинади.

Фараз қилайлик, $(x_0,0)\in AB$ нуқтада экстремал қиймат қабул қилинган бўлсин. У ҳолда, (98) га асосан,

$$\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0}} u_y(x,y)=\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0}} \tau'(x+y)=\tau'(x_0) \tag{99}$$

тенглик ўринли.

Иккинчи томондан, $\tau(x)$ функция $\overline{AB}$ да аниқланган, узлуксиз ва $C^2(0,1)$ синфга тегишли функция бўлиб, $x=x_0$ нуқтада экстремумга эришади ва шунинг учун $\tau'(x_0)=0$. Буни эътиборга олсак, (99) дан (97) келиб чиқади.

Тенглама ечими $\overline{BC}$ да нолга тенг бўлганда ҳам экстремум принципи шундай исботланади.

2. Трикоми тенгламаси учун экстремум принципи.

$$yu_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (y<0) \tag{100}$$

тенгламани x ўқининг $A(0,0)B(1,0)$ кесмаси ва

$$AC:\ \xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=0,\qquad BC:\ \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$$

характеристикалар билан чегараланган D_2 соҳада қарайлик.

Экстремум принципи. (100) тенгламанинг $\overline{AC}$ $(\overline{BC})$ да нолга тенг бўлган $u\in C(\overline{D}_2)$ регуляр ечими ўзининг $\overline{D}_2$ даги экстремал қийматини $\overline{AB}$ да қабул қилади.

Агар u функциянинг мусбат максимуми (манфий минимуми) $(x_0,0)\in AB$ нуқтада қабул қилинган бўлса,

$$\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0}} u_y(x,y)>0\ \ (<0) \tag{101}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. (100) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регляр ечими ($5-\S$ (51) формулада $m=1$, $\lambda=0$, $\varphi(t)=0$)

$$u(x,y)=k_1(\eta-\xi)^{2/3}\int_0^{\xi}\tau(t)\,[(\xi-t)(\eta-t)]^{-5/6}dt \tag{102}$$

кўринишга эга, бу ерда $\tau(t)=u(t,0)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ – ихтиёрий функция бўлиб, $\tau(0)=0$; $k_1=B^{-1}(1/6,2/3)$.

$$B(1/6,2/3)=\int_0^{\infty} z^{-5/6}(1+z)^{-5/6}dz\,. \qquad (103)$$

$\tau(t)$ функциянинг $\overline{AB}$ даги мусбат максимумини M билан белгилайлик.

(102) да $t=\xi-z(\eta-\xi)$ алмаштириш бажарсак, у

$$u(x,y)=k_1\int_0^{\xi/(\eta-\xi)} \tau[\xi-z(\eta-\xi)]z^{-5/6}(1+z)^{-5/6}dz \qquad (104)$$

кўринишга келади.

(103) ва (104) тенгликлардан фойдаланиб, $D_2\cup AC\cup \cup BC\cup\{C\}$ соҳадаги барча нуқталар учун

$$M-u(x,y)=Mk_1\int_{\xi/(\eta-\xi)}^{\infty} z^{-5/6}(1+z)^{-5/6}dz+$$

$$+k_1\int_0^{\xi/(\eta-\xi)}\{M-\tau[\xi-z(\eta-\xi)]\}z^{-5/6}(1+z)^{-5/6}dz \qquad (105)$$

тенгликнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Агар $D_2\cup AC\cup BC\cup\{C\}$ соҳада $\eta>\xi$ эканлигини, барча $z\in[0,\xi/(\eta-\xi)]$ учун $M\ge\tau[\xi-z(\eta-\xi)]$ тенгсизлик ўринлилигини, $k_1>0$, $M>0$ ва (102) хосмас интегралнинг ихтиёрий қолдиғи мусбатлигини инобатга олсак, (105) дан ихтиёрий $(x,y)\in D_2\cup AC\cup BC\cup\{C\}$ нуқта учун $u(x,y)<M$ тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади.

Энди (101) тенгсизликни исботлайлик. (102) формулани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$u(x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}k_1(\eta-\xi)^{2/3}\int_0^{\xi-\varepsilon}\tau(t)[(\xi-t)(\eta-t)]^{-5/6}dt.$$

У ҳолда, $k_2=(3/4)^{1/3}k_1$ белгилаш киритсак,

$$\lim_{y\to 0}u_y(x,y)=\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}(u_\xi-u_\eta)=$$

$$=\lim_{\eta-\xi\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}k_2\{(\eta-\xi)[\varepsilon(\eta-\xi+\varepsilon)]^{-5/6}\tau(\xi-\varepsilon)+$$

$$+\int_0^{\xi-\varepsilon}\tau(t)[(\xi-t)(\eta-t)]^{-11/6}\left[-\frac{4}{3}(\xi-t)(\eta-t)-\frac{5}{6}(\eta-\xi)^2\right]dt\Bigg\}.$$

Интеграл остидаги ифодага

$$\tau(\xi-\varepsilon)[(\xi-t)(\eta-t)]^{-11/6}\left[\frac{4}{3}(\xi-t)(\eta-t)+\frac{5}{6}(\eta-\xi)^2\right]=$$

$$=\tau(\xi-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\{(\xi+\eta-2t)[(\xi-t)(\eta-t)]^{-5/6}\}$$

ифодани қўшиб ва айириб,

$$\lim_{y\to 0}u_y(x,y)=\lim_{\eta-\xi\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}k_2\Big\{\tau(\xi-\varepsilon)[(\eta+\xi)(\xi\eta)^{-5/6}-$$

$$-2\varepsilon^{1/6}(\eta-\xi+\varepsilon)^{-5/6}]+\int_0^{\xi-\varepsilon}[\tau(\xi-\varepsilon)-\tau(t)][(\xi-t)(\eta-t)]^{-11/6}\times$$

$$\times\left[\frac{4}{3}(\xi-t)(\eta-t)+\frac{5}{6}(\eta-\xi)^2\right]dt\Big\}$$

тенгликни оламиз.

Бу ерда аввал ички лимитни, сўнгра ташқи лимитни ҳисоблаб, $\eta-\xi\to 0$ да $\eta\to x$, $\xi\to x$ эканлигини инобатга олсак, $x=x_0$ да

$$\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0}}u_y(x,y)=2k_2\left[\frac{\tau(x_0)}{x_0^{2/3}}+\frac{2}{3}\int_0^{x_0}\frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{5/3}}dt\right]$$

тенгликка келамиз.

$\tau(x_0)>0,\ \tau(x_0)-\tau(t)\geq 0,\ k_2>0$ бўлганлиги учун охирги тенгликдан (101) нинг тўғрилиги келиб чиқади.

Экстремум принципи x_0 — манфий минимум нуқтаси бўлган ҳолда ва u функция $\overline{BC}$ да нолга тенг бўлган ҳолда ҳам шундай исботланади.

3. Умумий тенглама учун экстремум принципи.

Бу ерда гиперболик типдаги қуйидаги умумий

$$L(u)\equiv u_{\xi\eta}+\alpha(\xi,\eta)u_\xi+\beta(\xi,\eta)u_\eta+\gamma(\xi,\eta)\,u=0 \qquad (106)$$

тенглама учун экстремум принципини баён қиламиз. Агар берилган тенглама бошқа кўринишда бўлса, аввал уни (106) кўринишга келтириб олинади.

D билан (106) тенгламанинг $AC:\xi=0$, $BC:\eta=1$ характеристикалари ва $\xi=\eta$ чизиқнинг AB кесмаси билан чегараланган соҳани белгилайлик.

(106) тенглама коэффициентлари қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи функциялар бўлсин:

1) $\alpha(\xi,\eta)$ функция $D\cup AC$ да ξ бўйича узлуксиз ҳосилага эга;

2) $\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta),\gamma(\xi,\eta)$ функциялар $\overline{D}$ да узлуксиз;

3) D соҳада

$$(I)\quad \begin{cases} \alpha(\xi,\eta)\geq 0, & (107)\\ \alpha_\xi+\alpha\cdot\beta-\gamma\geq 0, & (108)\\ \gamma(\xi,\eta)\geq 0 & (109)\end{cases}$$

тенгсизликлар ўринли.

Агар қуйидаги шартлар бажарилган бўлса, (106) тенглама коэффициентлари (I') шартни бажаради дейилади:

1) D соҳада (I) шарт бажарилган;

2) (107) да қатьий тенгсизлик ўринли ёки ҳар бир $\eta=const$ чизиқда (108) ва (109) да тенглик ўринли бўладиган нуқталар тўпламининг ўлчови нолга тенг.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\beta_1=\exp\int\beta\,d\xi,\quad \alpha_1=\beta_1\alpha,\quad \gamma_1=\beta_1\gamma-\alpha_{1\xi}.$$

У ҳолда, $\beta_1 L[u]$ оператор ва (I) шартлар

$$\beta_1 L(u)\equiv(\beta_1 u_\eta)_\xi+(\alpha_1 u)_\xi+\gamma_1 u,$$

$$\begin{cases}\alpha_1(\xi,\eta)\geq 0, & (107')\\ \gamma_1(\xi,\eta)\leq 0 & (108')\end{cases}$$

кўринишга келади.

Лемма. Айтайлик, $[P,Q]-\xi$ ўқига параллел характеристик кесма бўлиб, $D\cup AC\cup BC$ тўпламга тўлиғича тегишли бўлсин ҳамда бу кесмада $L(u)$ оператор коэффициентлари (I') шартни қаноатлантирсин ва $L(u)\leq 0$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда, агар $\max\limits_{[P,Q]} u=u(Q)\geq 0$ бўлса,

$$(\beta_1 u_\eta)_Q\leq(\beta_1 u_\eta)_P \tag{110}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Агар, бундан ташқари, $u(Q)>0$ ва $u(Q)>u(P)$ булса,

$$\left(\beta_1 u_\eta\right)_Q < \left(\beta_1 u_\eta\right)_P \tag{111}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $[P,Q]$ да $L(u)\le 0$ бўлгани учун бу кесмада

$$\beta_1 L[u] = \left(\beta_1 u_\eta\right)_\xi + \left(\alpha_1 u\right)_\xi + \gamma_1 u \le 0$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади (16 – чизма).

У ҳолда

$$\int_P^Q \left[\left(\beta_1 u_\eta\right)_\xi + \left(\alpha_1 u\right)_\xi + \gamma_1 u\right] d\xi \le 0.$$

Бу ерда дастлабки икки қўшилувчи учун интегрални ҳисоблаб,

$$\left(\beta_1 u_\eta\right)_Q - \left(\beta_1 u_\eta\right)_P \le -\int_P^Q \gamma_1 u d\xi + \left(\alpha_1 u\right)_P - \left(\alpha_1 u\right)_Q \tag{112}$$

тенгсизликни оламиз.

(112) нинг ўнг томонига

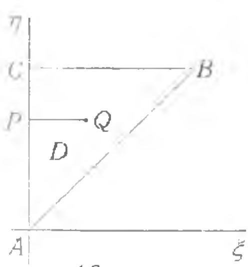
$$u(Q)\int_P^Q \gamma_1 d\xi = u(Q)\int_P^Q \beta_1\,\gamma\, d\xi - u(Q)\left[\alpha_1(Q) - \alpha_1(P)\right]$$

ифодани қўшиб ва айириб, баъзи алмаштиришлардан сўнг

$$\left(\beta_1 u_\eta\right)_Q - \left(\beta_1 u_\eta\right)_P \le \int_P^Q \left[u(Q) - u\right]\gamma_1 d\xi -$$

$$-u(Q)\int_P^Q \beta_1\,\gamma\, d\xi - \left[u(Q) - u(P)\right]\alpha_1(P) \tag{113}$$

тенгсизликка эга бўламиз.



16-чизма

Бу ердан (107'), (108'), (109) шарт – ларни ва $u(Q)>u(P)$ ни эътиборга олсак, (110) тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Агар $u(Q)>0$, $u(Q)>u(P)$ бўлиб, (Γ') шартлар бажарилган бўлса, (113) нинг ўнг томонидаги ҳадларнинг камида бири манфий бўлиб, (111) тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади.

1 – теорема. Қуйидаги шартлар бажарилган булсин:

1) $u_\eta(0,\eta)\le 0$;

2) $L(u)$ оператор коэффициентлари (I') шартни қано – атлантиради;

3) $D\cup AC\cup AB$ да $L(u)\le 0$.

У ҳолда, агар u функциянинг D даги максимуми мусбат булса, у AB да эришилади.

Исбот. Фараз қилайлик, u функция $\overline{D}$ даги максиму – мига $\overline{AB}$ да эришмасин. u функция бу қийматни AC да хам кабул килмайди, чунки $u_\eta(0,\eta)\le 0$ булгани учун u узининг AC даги максимумига A нуқтада эришади. Демак,

$$\max_{\overline{D}} u = u(Q),\ Q\in D\cup CB.$$

Q нуқтадан $\eta = const$ чизиқ утказайлик ва уни AC билан кесишган нуктасини P билан белгилайлик. u нинг $[P,Q]$ даги максимуми Q нуқтада эришилаётганлиги ва $u(Q)>0$, $u(Q)>u(P)$ булгани учун юқорида исботланган леммага асосан (111) тенгсизлик уринли.

(111) ва $u_\eta(P)\le 0$ дан $u_\eta(Q)<0$ келиб чиқади. Бу эса $u(Q)$ максимум қиймат деган фаразимизга зид. Демак, фаразимиз нотуғри, u функция $\overline{D}$ даги максимум қийматига $\overline{AB}$ да эришади.

2 – теорема (экстремум принципи) [40].
Қуйидаги шартлар бажарилган булсин:

1) $u_\eta(0,\eta)\le 0$;

2) $L(u)$ оператор коэффициентлари (I) шартни кано – атлантиради;

3) $D\cup AC\cup CB$ да $L(u)\le 0$.

У ҳолда, агар u функциянинг D даги максимуми мусбат булса, у AB да эришилади.

Исбот: $g(\xi,\eta)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи функция булсин:

$$M(g)=g_{\xi\eta}+\alpha g_{\xi}+\beta g_{\eta}<0,\qquad (\xi,\eta)\in\overline{D}; \tag{114}$$

$$g_\eta\ge 0,\qquad (\xi,\eta)\in D;\qquad g_\eta(0,\eta)=0 \tag{115}$$

Бундай функция сифатида, масалан, етарли катта k лар учун $g(\xi,\eta)=shk\xi\, chk\eta$ функцияни олиш мумкин.

$$u_\varepsilon = e^{-\varepsilon g}u \qquad (\varepsilon>0)$$

функциялар тупламини қарайлик, бу ерда ε — етарли кичик сон, u эса 2 — теорема шартларини қаноатлантирувчи функция.

u_ε функция учун 1 — теорема шартларини текширамиз.

Бевосита ҳисоблаб,

$$L(u_\varepsilon)=u_{\varepsilon\xi\eta}+\alpha_\varepsilon u_{\varepsilon\xi}+\beta_\varepsilon u_{\varepsilon\eta}+\gamma_\varepsilon u_\varepsilon<0,\ (x,y)\in D$$

тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин, бу ерда

$$\alpha_\varepsilon=\alpha+\varepsilon g_\eta,\ \beta_\varepsilon=\beta+\varepsilon g_\xi,\ \gamma_\varepsilon=\gamma+\varepsilon[\varepsilon g_\xi g_\eta+M(g)]. \quad (116)$$

(115) га асосан

$$u_{\varepsilon\eta}(0,\eta)=e^{-\varepsilon g}\left(-\varepsilon g_\eta u+u_\eta\right)_{\xi=0}\le 0,$$

(107) ва (115) га асосан

$$\alpha_\varepsilon=\alpha+\varepsilon g_\eta>0,\ (\xi,\eta)\in D,$$

(108) га асосан эса

$$\alpha_{\varepsilon\xi}+\alpha_\varepsilon\beta_\varepsilon-\gamma_\varepsilon=\alpha_\xi+\alpha\beta-\gamma\ge 0,\ (\xi,\eta)\in\overline{D}$$

тенгсизликлар ўринли.

(109) ва (116) дан келиб чиқадики,

$$\gamma_\varepsilon\ge\varepsilon[\varepsilon g_\xi g_\eta+M(g)], \qquad (\xi,\eta)\in D.$$

Бу ерда (114) ни эътиборга олиб, ε ни етарли кичик танласак, $\overline{D}$ да $\gamma_\varepsilon>0$ тенгсизликка эга буламиз. Демак, u_ε функция 1 — теореманинг барча шартларини қаноатлантирар экан. У ҳолда, 1 — теоремага асосан, u_ε функция (етарли кичик ε лар учун) мусбат максимумини AB да қабул қилади. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon=u$ бўлгани учун u функция ҳам мусбат максимумига AB да эришади. Теорема исботланди.

1 – изоҳ. 1 – ва 2 – теоремаларнинг исботи ва (113) тенгсизликдан келиб чиқадики, агар $\gamma = 0$ бўлса, 1 – ва 2 – теоремалар $\max\limits_{D} u > 0$ шартсиз ҳам ўринли бўлади.

2 – изоҳ. Агар (106) тенгламанинг ечими $(x_0, 0) \in AB$ нуқтада максимум (минимум) га эришган бўлиб, $u_y \in C(D \cup AB)$ бўлса, ҳосиланинг таърифига асосан,

$$\lim_{\substack{x = x_0 \\ y \to 0}} u_y(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{u(x_0, 0) - u(x_0, y)}{0 - y} \geq 0 \ \ (\leq 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

3 – изоҳ. Трикоми ва тор тебраниш тенгламаси учун экстремум принципининг тасдиғини 2 – теорема ёрдамида ҳам текшириб кўриш мумкин.

4 – изоҳ. $y < 0$ ярим текисликда

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0 \qquad (117)$$

тенгламани қарайлик.

Бу ерда $k(y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – берилган функциялар бўлиб, $k(y)$ – иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган монотон ўсувчи ҳамда $y < 0$ да $k(y) < 0$ ва $y = 0$ да $k(y) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи номанфий функция; $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ функциялар эса

$$AC: x + \int_0^y \sqrt{-k(t)}\, dt = 0, \qquad BC: \ x - \int_0^y \sqrt{-k(t)}\, dt = 1$$

чизиқлар ва x ўқининг AB кесмаси билан чегараланган D соҳанинг ёпиғида узлуксиз функциялар бўлиб, $a(x, y)$, $b(x, y)$ функциялар $D \cup AC \cup BC$ да узлуксиз ҳосилаларга эга.

(117) тенгламада

$$\xi = x + \int_0^y \sqrt{-k(t)}\, dt, \qquad \eta = x - \int_0^y \sqrt{-k(t)}\, dt$$

характеристик координаталарга ўтиб, ишонч ҳосил қилиш мумкинки, агар D соҳада

$$a + b\sqrt{-k} - \frac{k'}{2\sqrt{-k}} \leq 0,$$

$$\delta\left(\frac{a+b\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}}+\frac{k'}{2k}\right)+$$

$$+\frac{1}{2k}\left(a+b\sqrt{-k}-\frac{k'}{2\sqrt{-k}}\right)\left(a-b\sqrt{-k}-\frac{k'}{2\sqrt{-k}}\right)-2c\le 0,$$

$$c(x,y)\le 0$$

шартлар бажарилса, (117) тенглама учун 2–теорема тасдиғи уринли бўлади, бу ерда $\delta\equiv\frac{\partial}{\partial y}+\sqrt{-k}\,\frac{\partial}{\partial x}$.

5–изоҳ. 2–теореманинг тасдиғи (106) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими учун ҳам ўринли [35].

4. Бошқа махсус ҳоллар.

Ҳар қандай тенглама учун ҳам 2–теорема шартлари бажарилавермайди. Масалан,

$$yu_{xx}+u_{yy}+\lambda^2 yu=0 \tag{118}$$

тенглама учун (I) шартлар фақатгина $|\lambda|\le\sqrt{5}/3$ бўлгандагина бажарилади. Шунинг учун λ нинг қолган қийматларида экстремум принципининг тасдиғи бу тенглама учун ўринли бўлмаслиги мумкин. Аммо бу тенглама учун 1 банддаги D_2 соҳада қуйидаги экстремум принципи ўринли: (118) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган $u\in C(\overline{D_2})$ регуляр ечимнинг модули ўзининг максимум қийматини $\overline{AB}$ да қабул қилади.

Ҳақиқатан ҳам, (118) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг регуляр ечими $\overline{D_2}$ да (5–§ (51) – формулада $m=1$, $\varphi(t)=0$)

$$u(x,y)=k_1(\eta-\xi)^{2/3}\int_0^{\xi}\frac{\bar{J}_{-5/6}[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}]}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{5/6}}\,\tau(t)\,dt \tag{119}$$

куринишга эга, бу ерда $k_1,\xi,\eta,\tau(t)$ – 2–банддаги белгилашлар билан аниқланувчи катталик ва ўзгарувчилар, $\bar{J}_p(z)=\Gamma(1+p)\,(z/2)^{-p}J_p(z)$.

Бессель функциясининг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб, кўрсатиш мумкинки, $|\bar{J}_{-5/6}(z)|\leq 1$.

$|\tau(t)| = |u(t,0)|$ функциянинг $\overline{AB}$ кесмадаги максимум қийматини M_1 билан белгилайлик. У ҳолда, (119) да $t = \xi - z(\eta - \xi)$ алмаштириш бажариб ва (103) ни инобатга олиб,

$$M_1 - u(x,y) = M_1 k_1 \int\limits_{\xi/(\eta-\xi)}^{\infty} z^{-5/6}(1+z)^{-5/6}dz +$$

$$+k_1 \int\limits_{0}^{\xi/(\eta-\xi)} \left\{ M_1 - \tau[\xi - z(\eta-\xi)]\bar{J}_{-5/6}[\lambda(\eta-\xi)\sqrt{z(1+z)}]\right\}\times$$

$$\times[z(1+z)]^{-5/6}dz$$

тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Бу ерда $k_1 > 0,\ M_1 > 0,\ M_1 \geq |\tau(t)|,\quad |\bar{J}_{-5/6}(z)|\leq 1$ ва (103) хосмас интегралнинг ҳар қандай қолдиғи мусбат эканлигини инобатга олсак, ихтиёрий $(x,y)\in D_2 \cup AC \cup BC \cup \{C\}$ нуқталар учун $u(x,y) < M_1$ келиб чиқади. Принцип исботланди.

$\lambda \neq 0$ бўлганда

$$u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u = 0$$

тенглама учун (I) шартлар бажарилмайди, аммо

$$u \in e^{\delta x}\vartheta, \qquad \delta \geq |\lambda|, \quad \xi = x+y, \quad \eta = x-y \tag{120}$$

алмаштириш натижасида ҳосил бўлган

$$\upsilon_{\xi\eta} + \frac{\delta}{2}\upsilon_\xi + \frac{\delta}{2}\upsilon_\eta + \frac{1}{4}\left(\delta^2 - \lambda^2\right)\upsilon = 0$$

тенглама учун (I) шартлар бажарилади, демак, 2–теоремани қўллаш мумкин.

II. Локал экстремум принципи.

1. Телеграф тенгламаси учун локал экстремум принципи. I бандаги D_1 соҳада

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0 \tag{121}$$

телеграф тенгламасини қарайлик.

$\lambda \neq 0$ бўлганда (121) тенглама учун ҳам, уни (120) алмаштиришдан ҳосил бўлган тенглама учун ҳам (I) шартлар бажарилмайди. Шу сабабли бу тенглама учун 2 – теореманинг тасдиғи ўринли бўлмаслиги мумкин. Аммо (121) тенглама учун қуйидаги *локал экстремум принципи* ўринлидир:

$u(x,y) \in C(\overline{D}_1)$ – (121) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регуляр ечими бўлиб, $\delta, \lambda \in R$, $\delta \geq |\lambda|$ ва $\upsilon(x,y) = e^{-\delta x} u(x,y)$ бўлсин.

У ҳолда, агар $|\upsilon(x,y)|$ функция $y = 0$ тўғри чизиқнинг AP кесмасидаги энг катта қийматини $P(x_0,0)$ $(0 < x_0 < 1)$ нуқтада қабул қилса, P нуқтанинг D_1 га қарашли етарли қисқа атрофидаги ихтиёрий Q нуқта учун $|\upsilon(P)| > \upsilon(Q)$ тенгсизлик ўринли бўлади ва бунда $\upsilon(x_0,0) > 0$ (< 0) бўлса,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{\partial}{\partial y} \upsilon(x,0) > 0 \ (< 0). \tag{122}$$

Исбот. (121) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регуляр ечими

$$u(x,y) = \tau(x+y) + \frac{1}{2}\lambda^2 y \int_0^{x+y} \tau(t)\, \overline{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right] dt$$

кўринишга эга, бу ерда $\tau(t) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ – ихтиёрий функция бўлиб, $\tau(0) = 0$.

Бу формулада $u(x,y) = e^{\delta x}\upsilon(x,y)$ алмаштириш бажариб, $\upsilon(x,y)$ функцияни топамиз:

$$\upsilon(x,y) = \tau_1(x+y)e^{\delta y} + \frac{1}{2}\lambda^2 y \int_0^{x+y} e^{\delta(t-x)}\tau_1(t)\, \overline{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right] dt, \tag{123}$$

бу ерда $\tau_1(x) = \upsilon(x,0)$.

$P(x_0,0)$ нуқтанинг D_1 соҳага қарашли кичик атрофидан шундай $Q(x,y)$ нуқта олайликки, $0 < x + y < x_0$ бўлсин ($y < 0$ бўлганлиги учун бундай нуқталар мавжуд).

Ушбу айирмани қарайлик:

$$|\upsilon(P)|-\upsilon(Q)=|\tau_1(x_0)|-\tau_1(x+y)e^{\delta y}-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2 y\int_0^{x+y} e^{\delta(t-x)}\tau_1(t)\bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]dt.$$

Бу ифодани қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$|\upsilon(P)|-\upsilon(Q)=|\tau_1(x_0)|\,I(x,y)e^{\delta y}+\left[|\tau_1(x_0)|-\tau_1(x+y)\right]e^{\delta y}- \tag{124}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2 y\int_0^{x+y} e^{\delta(t-x)}\left\{|\tau_1(x_0)|+\tau_1(t)\bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\right\}dt,$$

бу ерда $I(x,y)=e^{-\delta y}-1+\frac{1}{2\delta}\lambda^2 y\left[1-e^{-\delta(x+y)}\right]$.

$I(x,y)$ функцияни ўрганайлик. Агар

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

ёйилмани эътиборга олсак,

$$I(x,y)=(-\delta y)\left\{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2 e^{-\delta(x+y)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-\delta y)}{2!}+\frac{(-\delta y)^2}{3!}+\ldots+\frac{(-\delta y)^n}{(n+1)!}+\ldots\right\}$$

тенгликка эга бўламиз.

$\delta\geq|\lambda|>0$ ва $y<0$ бўлганлиги учун охиргидан $I(x,y)>0$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, (124) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи мусбат. $0<x+y<x_0$ бўлганлиги учун унинг иккинчи қўшилувчиси ҳам мусбатдир.

Маълумки, ихтиёрий $z\in R$ учун $|\bar{J}_1(z)|\leq 1$ тенгсизлик ўринли. Буни, $0<x+y<x_0$ эканлигини ва $t\in[0,x+y]$ да $|\tau_1(x_0)|>|\tau_1(t)|$ тенгсизликнинг ўринлилигини эътиборга олсак, $|\tau_1(x_0)|+\tau_1(t)\bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\geq 0$ тенгсизликка эга оламиз. Бундан эса (124) тенглик ўнг томонидаги учинчи қўшилувчининг манфий эмаслиги келиб чиқади.

Юқоридаги хулосаларни эътиборга олсак, (124) тенгликдан $|\upsilon(P)| > \upsilon(Q)$ тенгсизлик келиб чиқади.

Энди (122) тенгсизликни исботлайлик. (123) тенгликдан y бўйича ҳосила олиб, сўнгра $y \to 0$ да лимитга ўтсак,

$$v_1(x) = \delta\tau_1(x) + \tau_1^{'}(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^x e^{\delta(t-x)}\tau_1(t) J_1[\lambda(x-t)]dt \qquad (125)$$

тенгликка келамиз, бу ерда $v_1(x) = \upsilon_y(x,0)$, $\tau_1(x) = \upsilon(x,0)$.

Фараз қилайлик, $\tau_1(x_0) > 0$. У ҳолда, (125) ни $x = x_0$ нуқтада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_1(x_0) = \delta\tau_1(x_0)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2\left(1 - e^{-\delta x_0}\right)\right] + \tau_1^{'}(x_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^{x_0} e^{\delta(t-x_0)}\{\tau_1(x_0) + \tau_1(t) J_1[\lambda(x_0 - t)]\}dt. \qquad (126)$$

$\delta \geq |\lambda|$ ва $0 < x_0 < 1$ бўлгани учун (126) нинг биринчи қўшилувчиси мусбат, $x = x_0$ $\upsilon(x,0) = \tau_1(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлгани учун $\tau_1^{'}(x_0) = 0$.

$$\tau_1(x_0) \geq |\tau_1(t)| \quad \text{ва} \quad |J_1[\lambda(x_0 - t)]| \leq 1$$

тенгсизликларни эътиборга олсак, (126) нинг учинчи қўшилувчиси манфий эмаслиги келиб чиқади. Шунинг учун $v_1(x_0) > 0$.

Демак, $\tau_1(x_0) > 0$ да (122) тенгсизлик тўғри.

$\tau_1(x_0) < 0$ бўлган ҳолда (126) нинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб ва юқоридаги мулоҳазаларни $|\tau_1(x_0)|$ функцияга нисбатан такрорлаб, $|-v_1(x_0)| > 0$, яъни $v_1(x_0) < 0$ тенгсизликка келамиз. Принцип тўла исботланди.

2. Сингуляр коэффициентли тенглама учун локал экстремум принципи. $y < 0$ ярим текисликда

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \qquad (127)$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $m > 0$, $-(m/2) \leq \beta_0 < 1$.

$y=0$ тўғри чизиқнинг $A(0,0)B(1,0)$ кесмаси ва (127) тенгламанинг

$$AC:\xi = x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0,$$

$$BC:\eta = x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=1$$

характеристикалари билан чегараланган соҳани D_3 орқали белгилайлик.

Экстремум принципи: $u(x,y)\in C(\overline{D_3})-(127)$ тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регуляр ечими бўлсин. У ҳолда, агар $u(x,y)$ функция $y=0$ тўғри чизиқнинг $\overline{AP}$ кесмасидаги энг катта мусбат қийматига $P(x_0,0)$ $(0<x_0<1)$ нуқтада эришса, $y=0$ тўғри чизиққа P нуқтадан ўтказилган ички нормалнинг P га етарлича яқин ихтиёрий Q нуқтаси учун $u(P)>u(Q)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Характеристик координаталарга ўтиб ва 5–параграфдаги мулоҳазалардан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, (127) тенгламанинг $\overline{AC}$ да нолга тенг бўлган регуляр ечими

$$u(x,y)=k_2\,(-y)^{1-\beta_0}\int_0^{\xi}\left[(\xi-t)\,(\eta-t)\right]^{\beta-1}\tau(t)\,dt \tag{128}$$

кўринишга эга, бу ерда $\beta=(m+2\beta_0)/(2m+4)$, $0<\beta<1/2$; $k_2=\left[\,4\,/\,(m+2)\,\right]^{1-2\beta}\Gamma(1-\beta)\,/\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-2\beta)$; $\tau(t)=u(t,0)\in$ $\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ – ихтиёрий функция бўлиб, $\tau(0)=0$.

$y=0$ тўғри чизиққа $P(x_0,0)$ нуқтадан ўтказилган ички нормалдаги P га етарлича яқин бўлган $Q(x_0,-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ нуқтани олайлик ва ушбу

$$u(P)-u(Q)=u(P)-k_2\,\varepsilon^{1-\beta_0}\int_0^{\xi_0}\left[(\xi_0-t)\,(\eta_0-t)\right]^{\beta-1}\tau(t)\,dt\,, \tag{129}$$

айирмани қарайлик, бу ерда $\xi_0=x_0-[2/(m+2)]\,\varepsilon^{(m+2)/2}$, $\eta_0=x_0+[2/(m+2)]\,\varepsilon^{(m+2)/2}$.

(129) тенгликни қуйидагича ёзиб олайлик:

$$u(P)-u(Q)=u(P)[1-I(\varepsilon)]+$$

$$+k_2\,\varepsilon^{1-\beta_0}\int\limits_0^{\xi_0}\left[(\xi_0-t)(\eta_0-t)\right]^{\beta-1}\left[u(P)-\tau(t)\right]dt, \qquad (130)$$

бу ерда $I(\varepsilon)=k_2\,\varepsilon^{1-\beta_0}\int\limits_0^{\xi_0}\left[(\xi_0-t)(\eta_0-t)\right]^{\beta-1}dt$.

$t=\xi_0 z$ алмаштириш бажариб ва гипергеометрик функциялар учун автотрансформация формуласидан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки,

$$I(\varepsilon)=k_3\left(\frac{\xi_0}{\eta_0}\right)^{\beta}F\left(\beta,2\beta,1+\beta;\frac{\xi_0}{\eta_0}\right), \qquad (131)$$

$$k_3=\Gamma(1-\beta)/\,\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1-2\beta).$$

Гипергеометрик функциялар учун ўринли бўлган

$$\frac{d}{dz}\left[z^a\,F(a,b,c;z)\right]=a\,z^{a-1}\,F(a+1,b,c;z).$$

$$F(a,b,a;z)=(1-z)^{-b}$$

формулалардан фойдалансак,

$$I'(\varepsilon)=-2k_3\,\beta\,x_0\,(\xi_0\eta_0)^{\beta-1}[4/(m+2)]^{-2\beta}\,\varepsilon^{-\beta_0} \qquad (132)$$

тенгликка эга бўламиз.

(131) ва (132) тенгликлардан келиб чиқадики, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I(\varepsilon)=1$ ва $I'(\varepsilon)<0$. Демак, $1-I(\varepsilon)>0$.

Бу тенгсизликни $0<\xi_0<x_0$ эканлигини ҳамда $t\in[0,\xi_0]$ учун $u(P)-\tau(t)>0$ тенгсизлик ўринлилигини инобатга олсак, (130) дан $u(P)>u(Q)$ тенгсизлик келиб чиқади. Принцип исботланди.

Юқорида биз баён қилган экстремум принципларида тенглама ечими характеристикаларнинг бирида нолга тенг бўлиши талаб этилди. Лекин тенглама ечими бунга нисбатан мураккаброқ шартларни бажарган баъзи ҳолларда ҳам ўзига хос эктремум принципи ўринли бўлади.

IV БОБ

ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ БУЗИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу бобда икки эркли ўзгарувчили иккинчи тартибли эллиптик типдаги чизиқли дифференциал тенгламалар ечимларининг қиёсий ва таркибий хоссалари баён қилиниб, соҳа чегарасида бузиладиган эллиптик тенгламалар учун қуйиладиган асосий чегаравий масалалар ва бу масалаларга оид теоремалар исботланган. Бундан ташқари, бундай тенгламаларнинг типик вакиллари учун баъзи чегаравий масалалар ечимини аниқловчи формулалар келтириб чиқарилган. Боб сўнгида чегарада бузиладиган бир тенглама учун нолокал шартли масалалар ва хос сонлар ҳақидаги масала ҳам кўриб ўтилган.

1–§. Асосий тушунча ва белгилашлар

1. Бу бобда қуйидаги тушунча ва белгилашлардан фойдаланамиз:

$\rho(M, M_0)$ – M ва M_0 нуқталар орасидаги масофа;

$S(M_0, \rho_0)$ – маркази M_0 нуқтада ва радиуси $\rho_0 (>0)$ га тенг бўлган айлана;

$\Gamma(M_0, \rho_0)$ – маркази M_0 нуқтада ва радиуси $\rho_0\ (>0)$ га тенг бўлган доира.

Агар алоҳида изоҳлар берилмаган бўлса, D билан текисликдаги бир боғламли чекли соҳани, S билан эса унинг чегарасини белгилаймиз;

n – D соҳа чегарасига ўтказилган ташқи нормал;

$M(x, y)$ нуқтага боғлиқ бўлган u функцияни $u(M)$ ёки $u(x, y)$ каби ёзамиз;

$C^{(k,h)}(D)$ синфга тегишли функция дейилганда, D соҳада аниқланган, k – тартибгача ҳосилалари мавжуд ва бу ҳосилалари билан $0<h\le 1$ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функцияни тушунамиз;

$C^{(k,0)}(D)$ билан D соҳада k — тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга функциялар синфини белгилаймиз;

$C^{(k,0)}(D)$ ва $C^{(0\,0)}(D)$ синфларни баъзида $C^k(D)$ ва $C(D)$ каби ҳам ёзилади.

2. Эллиптик типдаги тенгламалар ечимларининг хоссаларини ўрганишда тенглама қаралаётган соҳа чегара–сига қўйиладиган Ляпунов шартлари муҳим аҳамиятга эга.

Таъриф: Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи S чизиқ Ляпунов чизиғи дейилади:

1) S чизиқнинг ҳар бир нуқтасида уринма мавжуд, демак, аниқ нормал мавжуд;

2) шундай ўзгармас $d>0$ сон мавжудки, S чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасини олиб $S_0(M,\rho_0)$ $(0<\rho_0\le d)$ айлана чизсак, M нуқтадан ўтказилган нормалга параллел тўғри чизиқлар S чизиқнинг S_0 айлана ичидаги қисмини биттадан ортиқ нуқтада кесмайди;

3) шундай α ва a мусбат сонлар мавжудки, S чизиқнинг ихтиёрий M ва M_0 нуқталаридан ўтган нор–маллар орасидаги бурчак θ ва $r=\rho(M,M_0)$ масофа

$$\theta\le a\cdot r^{\alpha} \quad (0<\alpha\le 1)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Одатда 1)–3) шартлар Ляпунов шартлари дейилади.

Агар S – Ляпунов чизиғи бўлса, унинг ихтиёрий нуқтасининг қисқа атрофидаги $\sigma_0(\subset S)$ ёй тенгламасини $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрик кўринишда ёзиш мумкин ва бунда $x(t),y(t)\in C^{(1,h)}(J)$ бўлади, бу ерда J – $x(t)$, $y(t)$ функ–циялар аниқланиш соҳасининг σ_0 ёйга мос қисми, $0<h\le 1$.

Одатда бундай хоссага эга бўлган чизиқлар тўплами $A^{(1,h)}$ билан белгиланади.

Агар бу ерда $x(t),y(t)\in C^{(k,h)}(J)$ бўлса, у ҳолда S чизиқни $A^{(k,h)}$ тўпламга тегишли дейилади.

3. Маълумки, коэффициентлари D соҳада аниқланган ушбу

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (1)$$

квази чизиқли дифференциал тенглама шу соҳада эллиптик типга тегишли бўлса, у ҳолда D соҳанинг барча нуқталарида

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0 \qquad (2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(1) ва (2) дан келиб чиқадики, (2) тенгсизлик ўринли бўлган нуқталарда, умумийликни чегараламай, $a_{11} > 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Акс ҳолда, (1) тенгламанинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, бу тенгсизликни таъминлашимиз мумкин.

Агар бирор M нуқтада (2) тенгсизлик бажарилган бўлса, яъни (1) тенглама эллиптик типга тегишли бўлса, шу нуқтада

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11} \lambda_1^2 + 2a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + a_{22} \lambda_2^2 \qquad (3)$$

квадратик форма мусбат аниқланган бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, M_0 нуқтада $a_{11} > 0$ эканлигини инобатга олиб, бу нуқтада (3) ни

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\sqrt{a_{11}}\, \lambda_1\right)^2 + 2\left(\sqrt{a_{11}}\, \lambda_1\right)\left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \lambda_2\right) + a_{22} \lambda_2^2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгликнинг ўнг томонига $\left(a_{12}\lambda_2 / \sqrt{a_{11}}\right)^2$ ни қўшиб ва айириб, баъзи ҳисоблашлардан сўнг,

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\sqrt{a_{11}}\, \lambda_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \lambda_2\right)^2 + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \lambda_2^2 \qquad (4)$$

тенгликка эга бўламиз. M_0 нуқтада (2) тенгсизлик ўринли эканлигини инобатга олсак, (4) дан $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форманинг мусбат аниқланганлиги келиб чиқади.

Фараз қилайлик, (1) тенглама D соҳада эллиптик типга тегишли бўлсин. У ҳолда, (2) тенгсизлик D соҳанинг барча нуқталарида бажарилади. Шунинг учун D соҳада $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлади. Агар шундай k_0 ва k_1 мусбат сонлар мавжуд бўлиб, D соҳанинг барча нуқталарида

$$k_0\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\le Q\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\le k_1\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) тенгламани D соҳада ***текис эллиптик тенглама*** дейилади.

Бу таърифга асосан

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{5}$$

Лаплас тенгламаси ихтиёрий D соҳада текис эллиптик,

$$y^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (m>0) \tag{6}$$

тенглама эса $y>0$ ярим текисликнинг ҳар бир нуқтасида эллиптик бўлса ҳам, бу соҳада текис эллиптик эмас.

Одатда $Q(\lambda_1,\lambda_2)$ кўпҳад (1) дифференциал тенгламанинг характеристик формаси деб аталади ва баъзи адабиётларда берилган тенгламани типларга ажратиш унинг ёрдамида таърифланади. Эркли ўзгарувчилари иккитадан кўп бўлган дифференциал тенгламаларни типларга ажратиш асосан берилган тенгламаларга мос характеристик форма ёрдамида таърифланади [32].

4. Агар D соҳада аниқланган $u(x,y)$ функция шу соҳада тадқиқ қилинаётган дифференциал тенгламада иштирок этаётган ҳосилаларга эга бўлиб, D да уни қаноатлантирса, $u(x,y)$ ни мазкур тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими дейилади. Эллиптик типдаги дифференциал тенгламаларнинг регуляр ечимидан ташқари умумлашган ечими деган тушунча ҳам мавжуд [3, 23]. Бу бобда биз фақат регуляр ечимлар ҳақида фикр юритамиз.

5. Фараз қилайлик, D соҳада эллиптик типга тегишли (1) дифференциал тенглама берилган бўлсин. D соҳа диаметрини R, ихтиёрий (x,y) ва (ξ,η) нуқталари орасидаги масофани r билан белгилайлик, яъни $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

Агар $g(x,y;\xi,\eta)$ функция (x,y) ва (ξ,η) нуқталарнинг функцияси сифатида $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ да аниқланган ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб,

а) x,y ўзгарувчиларга нисбатан D соҳанинг (ξ,η) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида (1) тенгламанинг регуляр ечими;

б) (ξ,η) нуқтанинг кичик атрофида

$$g = O\left(\ln\frac{2R}{r}\right), \quad g_x = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad g_y = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

муносабатларни қаноатлантирса, у ҳолда уни (1) дифференциал тенгламанинг фундаментал ёки сингуляр ечими дейилади.

Эллиптик типга тегишли ушбу

$$u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = 0$$

чизиқли тенгламанинг коэффициентлари $C^1(D \cup S)$ синфга тегишли бўлса, унинг фундаментал ечими ҳеч бўлмаганда кичик D соҳалар учун мавжуд бўлади [2,32].

Хусусий ҳолда, Лаплас тенгламаси учун фундаментал ечим мавжуд бўлиб, у

$$g_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

кўринишга эга.

Лаплас тенгламаси ва унга қўйилган масалаларни ўрганишда $g_0(x, y; \xi, \eta)$ функция қандай рол ўйнаган бўлса, эллиптик типга тегишли дифференциал тенглама учун унинг фундаментал ечими ҳам шундай вазифани бажаради.

6. Фараз қилайлик, D соҳада эллиптик типга тегишли (1) тенглама берилган бўлиб, унинг коэффициентлари $D \cup S$ да узлуксиз, S чизиқ эса Ляпунов шартларини бажарсин. У ҳолда, (1) тенгламанинг коэффициентлари ва S чизиққа ўтказилган ташқи нормал ёрдамида тузилган ушбу

$$N_0 = \left\{\left[a_{11}\cos(n,x) + a_{12}\cos(n,y)\right]^2 + \left[a_{12}\cos(n,x) + a_{22}\cos(n,y)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ифода S чизиқнинг ихтиёрий M_0 нуқтасида аниқ чекли қийматга эга бўлади.

Агар

$$N_1 = \frac{1}{N_0}\left[a_{11}\cos(n,x) + a_{12}\cos(n,y)\right],$$

$$N_2 = \frac{1}{N_0}\left[a_{12}\cos(n,x) + a_{22}\cos(n,y)\right]$$

белгилашлар киритсак, S чизиқнинг ихтиёрий M_0 нуқтасида $N_1^2+N_2^2=1$ бўлади. Шунинг учун N_1 ва N_2 ларни қандайдир N бирлик векторнинг йўналтирувчи косинуслари сифатида олиш мумкин, яъни $N\{N_1,N_2\}$−бирлик вектор бўлади. Бу вектор $M_0\in S$ нуқтадан ташқари (1) тенгламанинг коэффицентларига ҳам боғлиқ бўлиб, одатда ***M_0* нуқтадан *S* чизиққа ўтказилган конормал** дейилади. Бундан келиб чиқадики, D соҳада ўрганилаётган ҳар бир тенглама учун S чизиқда шу тенгламага мос конормал мавжуд бўлади. Хусусий ҳолда, агар D соҳада Лаплас тенгламаси қаралаётган бўлса, унга мос конормал ташқи нормал билан устма−уст тушади.

Агар $u(x,y)$ функция берилган тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, $C^1(D\cup S)$ синфга тегишли бўлса, у ҳолда унинг конормал йўналиши бўйича ҳосиласи мавжуд бўлади ва

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot N_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot N_2$$

тенглик билан аниқланади.

7. Маълумки, Лаплас тенгламаси ва унга қўйилган масалалар ечимларининг хоссаларини ўрганишда $S(O,1)$ айлана билан чегараланган $\Gamma(O,1)$ доира энг қулай соҳа ҳисобланади.

Фараз қилайлик, бўлаклари силлиқ бўлган S чизиқ билан чегараланган D соҳада эллиптик типга тегишли (1) тенглама берилган бўлсин. Агар бирор ўзаро бир қийматли $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ махсус бўлмаган алмаштириш ёрдамида (1) тенгламани бош қисми Лаплас операторидан иборат бўлган тенгламага, D соҳани $\Gamma(O,1)$ доира ёки унинг бирор бўлагига, S чизиқ (ёки унинг бирор σ қисми) ни эса $S(O,1)$ айлана ёки унинг бирор бўлагига келтириш мумкин бўлса, S (ёки σ) чизиқни (1) тенглама учун "***нормал контур***" ва D соҳани эса "***нормал соҳа***" дейилади.

5 − ва 6 − банддаги тушунчаларни мустаҳкамлаш мақсадида (6) тенгламани $\sigma_0: x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=1$ $(y>0)$ ва

$y=0$ чизиқлар билан чегараланган D_0 соҳада қарайлик. Бу ерда $S=\sigma_0 \cup \{(x,y): y=0, \ -1 \le x \le 1\}$.

Бевосита ҳисоблаш билан ишонч ҳосил қилиш қийин эмаски, $x=\xi, y=\left(\frac{m+2}{2}\eta\right)^{\frac{2}{m+2}}$ алмаштириш бажарсак, σ_0 чизиқ $\xi^2+\eta^2=1$ $(\eta>0)$ ярим айланага, D_0 соҳа $\xi^2+\eta^2<1$ $(\eta>0)$ ярим доирага, (6) тенглама эса

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{m}{m+2}\frac{1}{\eta}u_\eta=0$$

тенгламага алмашади.

Демак, σ_0 чизиқ (6) тенглама учун нормал контур, D_0 эса нормал соҳа ҳисобланади.

(6) тенгламага мос N конормалнинг йуналтирувчи косинуслари

$$N_1=\frac{1}{N_0}y^m\cos(n,x), \qquad N_2=\frac{1}{N_0}\cos(n,y)$$

кўринишга эга бўлди, бу ерда

$$N_0=\sqrt{\left[y^m\cos(n,x)\right]^2+\cos^2(n,y)}.$$

(6) тенглама ечимининг N конормал йўналиши бўйича ҳосиласи

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{1}{N_0}y^m\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{1}{N_0}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y) \qquad (7)$$

формула билан ҳисобланади.

Бу бобда биз (6) тенглама учун масалалар қўйишда (7) ифода ўрнига

$$N_0\frac{\partial u}{\partial N}=y^m\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y) \qquad (8)$$

ифодадан фойдаланамиз. Агар

$$\cos(n,x)=\frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n,y)=-\frac{dx}{ds}$$

($s-\sigma_0$ чизиқ ёйининг узунлиги) эканлигини инобатга олсак, (8) ни

$$N_0\frac{\partial u}{\partial N}=y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Охирги ифода одатда $A_s[u]$ билан белгиланади ва умумийликни чегараламай, шартли равишда u нинг конормал ҳосиласи деб юритилади.

Демак,

$$A_s[\;] \equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}.$$

2–§. Экстремум принципи

D соҳада эллиптик типга тегишли бўлган ушбу

$$L(u) \equiv a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_{13}u_x + a_{23}u_y + a_{33}u = f \qquad (9)$$

чизиқли тенглама берилган бўлсин, бу ерда a_{ij} ва f – x, y ўзгарувчиларнинг D соҳада аниқланган функциялари.

Теорема (экстремум принципи). Агар D соҳанинг барча нуқталарида

$$a_{33} < 0, \quad f \le 0 \;\; (f \ge 0) \qquad (10_1)$$

ёки

$$a_{33} \le 0, \;\; f < 0 \quad (f > 0) \qquad (10_2)$$

бўлса, (9) тенгламанинг ихтиёрий регуляр ечими D соҳанинг ҳеч бир нуқтасида манфий нисбий минимум ва мусбат нисбий максимумга эришмайди.

Исбот. Фараз қилайлик, $u(x,y)$ функция (9) тенглама–нинг регуляр ечими бўлиб, $M_0 \in D$ нуқтада манфий нисбий минимумга эришсин. У ҳолда, бу нуқтада

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \qquad (11)$$

$$u_{xx}\delta_1^2 + 2u_{xy}\delta_1\delta_2 + u_{yy}\delta_2^2 \ge 0 \qquad (12)$$

муносабатлар ўринли бўлади, бу ерда δ_1, δ_2 ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Иккинчи томондан, (9) тенглама D соҳада эллиптик типга тегишли бўлганлиги учун M_0 нуқтада

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \qquad (13)$$

квадратик форма мусбат аниқланган. Бу квадратик формани қандайдир

$$\mu_j = c_{1j}\lambda_1 + c_{2j}\lambda_2, \quad j = 1,2 \tag{14}$$

алмаштириш ёрдамида

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2 \tag{15}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(13) ва (15) тенгликлардан, (14) га асосан,

$$a_{11} = c_{11}^2 + c_{21}^2, \quad a_{22} = c_{12}^2 + c_{22}^2, \quad a_{12} = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}$$

келиб чиқади.

У ҳолда, M_0 нуқтада

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = \sum_{j=1}^{2}\left(u_{xx}c_{j1}^2 + 2u_{xy}c_{j1}c_{j2} + u_{yy}c_{j2}^2\right)$$

тенглик ўринли.

(12) тенгсизликка асосан, бу тенгликдан M_0 нуқтада

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} \geq 0 \tag{16}$$

тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

(11) ва (16) ларни инобатга олсак, M_0 нуқтада $L(u) - a_{33}u \geq 0$ тенгсизликка эга бўламиз. Иккинчи томондан, (10_1), (10_2) шартлар ва $u(M_0) < 0$ деган фаразга асосан, M_0 нуқтада аввалгига зид бўлган $L(u) - a_{33}u = f - a_{33}u < 0$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади.

Демак, u функция D соҳанинг хеч бир нуқтасида манфий нисбий минимумга эришмайди.

Теореманинг мусбат нисбий максимумга тегишли қисми ҳам шундай исботланади.

3–§. Хопф принципи

Эллиптик типга тегишли бўлган (9) тенгламани D соҳада қарайлик.

Хопф принципи. D соҳада (9) тенгламанинг коэффи-циентлари чегараланган, $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форманинг дискриминанти мусбат қуйи чегарага эга ва

$$a_{33} \leq 0,\ f \leq 0\ (f \geq 0) \tag{17}$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин.

У ҳолда, агар ихтиёрий $M_0 \in D$ нуқтанинг

$$u(M) \geq u(M_0) \qquad [u(M) \leq u(M_0)]$$

тенгсизлик бажарилувчи ихтиёрий D_0 атрофида $u \neq const$ бўлса, (9) тенгламанинг $u(x, y)$ регуляр ечими D соҳанинг ҳеч бир M_0 нуқтасида манфий нисбий минимумга (мусбат нисбий максимумга) эришмайди.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик, яъни (9) тенглама–нинг $u(M)$ регуляр ечими M_0 нуқтада манфий нисбий минимумга эга бўлсин. D_0 соҳанинг $u(M) = u(M_0)$ тенг–сизлик бажарилувчи нуқталар тўпламини D_1 билан белгилайлик. Агар $D_1 = D_0$ эканлигини кўрсатсак, D_0 да $u = const$ бўлиб, теорема шартига зид хулосага келамиз. Бу эса фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади ва шу билан Хопф принципи исбот бўлади.

Фараз қилайлик, $D_1 \neq D_0$ бўлсин. У ҳолда ёпиқ D_1 тўпламда D_0 тўплам чегарасидан $\delta > 0$ масофада турувчи M_1 нуқта мавжуд бўлади. $D_0 \setminus D_1$ соҳага қарашли $\rho(M', M_1) < (\delta/2)$ шартни қаноатлантирувчи M' нуқтани олайлик. Аниқки, $\rho < (\delta/2)$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\Gamma(M', \rho)$ доира D_0 соҳада тўлиғича ётади.

$\Gamma(M', \rho) \subset D_0 \setminus D_1$ шартни қаноатлантирувчи барча доиралар радиусларининг юқори чегарасини r' билан белгилайлик. $S(M', r')$ айланада D_1 тўпламга қарашли ҳеч бўлмаганда битта M'' нуқта мавжуд бўлади. $[M'M'']$ тўғри чизиқли кесмада M' нуқтадан фарқли M^* нуқтани олайлик ва $\rho_0 = \rho(M^*, M'')$ белгилаш киритайлик. У ҳолда, $M \in \Gamma(M^*, \rho_0) \setminus \{M''\}$ бўлганда $u(M) > u(M_0)$ тенгсизлик ва $M = M''$ бўлганда $u(M) = u(M_0)$ тенглик ўринли бўлади.

Мусбат $\rho_1 (< \rho_0)$ сонни шундай танлайликки, $\Gamma(M'', \rho_1) \subset D_0$ бўлсин. $r = \rho(M^*, M)$ белгилаш киритиб, $\Gamma(M'', \rho_1)$ доирада

$$\upsilon(M) = e^{-\gamma \rho_0^2} - e^{-\gamma r^2} \tag{18}$$

функцияни қарайлик, бу ерда γ — ихтиёрий мусбат сон.

M^* ва M нуқталарнинг координаталари мос равишда (x^*, y^*) ва (x, y) бўлин. У ҳолда,

$$L(\upsilon) = e^{-\gamma r^2}\left(-A\gamma^2 + B\gamma + C\right) \tag{19}$$

тенглик ўринли, бу ерда

$$A = 4\left[a_{11}\left(x - x^*\right)^2 + 2a_{12}\left(x - x^*\right)\left(y - y^*\right) + a_{22}\left(y - y^*\right)^2\right],$$

$$B = 2[a_{11} + a_{22} + a_{13}(x - x^*) + a_{23}(y - y^*)],$$

$$C = a_{33}[e^{\gamma\left(r^2 - \rho_0^2\right)} - 1].$$

D соҳада, демак, $\Gamma(M'', \rho_1)$ доирада ҳам, $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ квадратик форманинг дискриминанти мусбат қуйи чегарага эга бўлганлиги учун $A \geq C_0 = const > 0$, (9) тенгламанинг коэффициентлари чегараланганлиги учун эса B ва C ифодалар ҳам чегараланган бўлади.

Юқоридагиларни эътиборга олиб, γ сонни шундай катта танлайликки, $\Gamma(M'', \rho_1)$ доирада $(-A\gamma^2 + B\gamma + C) < 0$ тенг–сизлик, демак, (19) га асосан, $L(\upsilon) < 0$ тенгсизлик бажарил–син.

У ҳолда, бу доирада ихтиёрий $\lambda > 0$ сон учун

$$L(u + \lambda\upsilon) < 0 \tag{20}$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

$\upsilon(M)$ функциянинг тузилишидан келиб чиқадики, бу функция $S(M'', \rho_1)$ айлананинг $\Gamma(M^*, \rho_0)$ доира ичидаги қисмида манфий, $S(M^*, \rho_0)$ айлана билан кесишиш нуқталарида ноль ва қолган нуқталарида мусбат бўлади. $\upsilon(M)$ функциянинг бу хоссасидан фойдаланиб, λ ни шундай кичик танлайликки, $S(M'', \rho_1)$ айланада

$$u(M) + \lambda\upsilon(M) > u(M_0) \tag{21}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин.

(17) шартларнинг биринчиси ва (20) тенгсизликдан келиб чиқадики, $u+\lambda\upsilon$ функция учун $\Gamma(M'',\rho_1)$ доирада (10_2) шарт бажарилмоқда. Шунинг учун $u+\lambda\upsilon$ функция $\Gamma(M'',\rho_1)$ доирада ҳам (21) тенгсизликни қаноатлантиради.

Иккинчи томондан, $u(M'')+\lambda\upsilon(M'')=u(M_0)$ тенглик ўринли бўлиб, бу (21) га зиддир. Бу қарама–қаршилик $D_0\neq D_1$ деган фаразимиз нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $D_0=D_1$.

Хопф принципининг мусбат нисбий максимумга тегишли тасдиғи ҳам шундай исботланади.

Хопф принципидан қуйидаги натижа келиб чиқади: $u(x,y)$ функция D соҳада $L(u)=0$ тенгламанинг ўзгармас сондан фарқли ва $C(D\cup S)$ синфга тегишли регуляр ечими бўлиб, $a_{33}\leq 0$ шарт бажарилса, D соҳада

$$|u|<\max_S|u|$$

тенгсизлик, агар $a_{33}=0$ шарт бажарилса, D соҳада

$$\min_S u<u<\max_S u$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

4–§. Заремба–Жиро принципи

Хопф принципидан фойдаланиб, эллиптик типдаги тенгламалар ечимларининг яна бир хоссасини исботлаш мумкин.

Зарембо–Жиро принципи. D соҳада (9) тенглама коэффициентлари ва озод ҳади учун Хопф принципи шартлари бажарилган, $u(x,y)\not\equiv const$ функция (9) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими бўлиб, $C(D\cup S)$ синфга тегишли ва S чизиқ эса $A^{(2,0)}$ тўпламга тегишли бўлсин.

Агар $\min\limits_S u\leq 0$ $\left(\max\limits_S u\geq 0\right)$ бўлиб, $M_0\in S$ нуқтада $u(x,y)$ функция ўзининг минимуми (максимуми)га эришса, у ҳолда M_0 нуқтадан чиқувчи ва $\cos(l,n)<0$ шартни қаноатлантирувчи ҳар бир l йўналиш учун

$$\frac{du}{dl} > 0 \left(\frac{du}{dl} < 0 \right) \tag{22}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, (9) тенгламанинг $u(M) \not\equiv const$ ечими учун $\min\limits_{S} u = u(M_0) \le 0$, $M_0 \in S$ бўлсин. У ҳолда, $S \in A^{(2,0)}$ бўлганлиги учун M_0 нуқтага ўтказилган ички нормалда шундай M^* нуқта топиладики, $\overline{\Gamma}(M^*, \rho_0)$ (бу ерда $\rho_0(M^*.M_0)$) ёпиқ доира S чизиқ билан фақат M_0 умумий нуқтага эга бўлади. $\rho_1 (< \rho_0)$ мусбат сонни олиб, $\overline{\Gamma}(M_0, \rho_1)$ ёпиқ доира ўтказайлик ва унинг $\overline{\Gamma}(M^*.\rho_0)$ билан кесиш–масини G билан белгилайлик

Хопф принципига асосан G соҳанинг ихтиёрий M нуқтасида $u(M) - u(M_0) > 0$ тенгсизлик ўринли.

(18) функция каби

$$\upsilon_1(M) = e^{-\gamma \rho_0^2} - e^{-\gamma r_1^2}$$

функцияни киритайлик, бу ерда $r_1 = \rho\left(M^*, M\right)$, γ эса ихтиёрий мусбат сон.

Бу функция G соҳа чегарасининг $\overline{\Gamma}\left(M^*, \rho_0\right)$ доира ичидаги қисмида манфий, қолган қисмида ноль бўлади. $\upsilon_1(M)$ функциянинг бу хоссасидан фойдаланиб, λ сонни шундай кичик танлайликки G соҳа чегарасида

$$u(M) - u(M_0) \ge -\lambda \upsilon_1(M) \tag{23}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин.

3 – параграфдаги каби кўрсатиш мумкинки, етарли катта γ учун $L(\upsilon_1) < 0$ бўлади. У ҳолда, G соҳанинг ихтиёрий M нуқтасида

$$L[u(M) - u(M_0) + \lambda \upsilon_1(M)] = f(M) - a_{33}(M) u(M_0) + \lambda L(\upsilon_1) < 0$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан келиб чиқадики, $u(M) - u(M_0) + \lambda \upsilon_1(M)$ функция учун G соҳада (10_2) шарт бажарилади. Шунинг учун, экстремум принципига асосан, (23) тенгсизлик G соҳанинг барча нуқталарида ўринли бўлади. У ҳолда, G соҳанинг l йўналиш бўйлаб ётувчи ихтиёрий M нуқтасида

$$\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho(M,M_0)} \geq -\frac{\lambda\upsilon_1(M)}{\rho(M,M_0)} \qquad (24)$$

тенгсизлик ҳам бажарилади.

Бу ерда M нуқта l йўналиш бўйича M_0 нуқтага интилганда (яъни $\rho(M,M_0)\to 0$ да) лимитга ўтиб, функциянинг йўналиш бўйича ҳосиласи таърифини ва

$$-\lambda\left(\frac{d\upsilon_1}{dl}\right)_{M=M_0} = -\lambda\left[\frac{d\upsilon_1}{dr_1}\cos(l,n)\right]_{M=M_0} =$$

$$= -2\lambda\gamma\rho_0 e^{-\gamma\rho_0^2}\cos(l,n) > 0$$

тенгсизликни инобатга олсак, (24) дан (22) тенгсизлик келиб чиқади.

Принципнинг иккинчи қисми ҳам шундай исботланади.

Бу принцип Лаплас тенгламаси учун Заремба ва (9) кўринишдаги тенгламалар учун Жиро томонидан исботланган бўлиб, унинг тасдиғи S — Ляпунов чизиғи бўлганда ҳам ўз кучида қолади [23].

5–§. Эллиптик типдаги бузиладиган тенгламалар ечимларининг баъзи хоссалари

Биринчи бобнинг учинчи параграфида айтиб ўтилганидек, чегарада бузиладиган эллиптик типдаги чизиқли тенгламаларни унинг коэффициентлари етарли силлиқ бўлганда ўзгарувчиларнинг махсус бўлмаган алмаштириши ёрдамида

$$L_1(u) \equiv y^m u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f \qquad (m>0), \qquad (25)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xx} + y^m u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f \qquad (m>0) \qquad (26)$$

кўринишга келтириш мумкин, агар тенгламанинг типидан ташқари тартиби ҳам бузилса, уни

$$L_3(u) \equiv y^m u_{xx} + y^n u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f \qquad (m, n>0) \qquad (27)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (25), (26) ва (27) тенгламаларда $y>0$ бўлиб, a, b, c ва f — x ва y нинг функцияларидир.

Бу тенгламаларни $y>0$ ярим текисликнинг учлари $A(x_1,0)$ ва $B(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$ нуқталарда бўлган σ Ляпунов чизиғи ва $AB=\{(x,y):\ y=0,\ x_1<x<x_2\}$ кесма билан чегараланган D соҳада қарайлик, бу ерда $S=\sigma\cup AB$.

Фараз қилайлик, a,b,c,f функциялар $D\cup S$ да узлуксиз ва D соҳада $c(x,y)\le 0$ бўлсин. У ҳолда, ҳар бир $D_h=D\cap(y>h)$ (бу ерда h етарли кичик мусбат сон) соҳада $L_j(u)=0$ $(j=1,2,3)$ тенгламанинг коэффициентлари учун Хопф принципи шартлари бажарилади ва, демак, унинг ечими учун Хопф принципи тасдиғи ўринли бўлади. Бу тасдиқ $h(>0)$ сон ихтиёрий кичик олинганда ҳам $D_h(\subset D)$ соҳа учун ўринли бўлганлигидан қуйидаги хулоса келиб чиқади. $L_j(u)=0$ $(j=1,2,3)$ тенгламанинг ихтиёрий $u\not\equiv const$ регуляр ечими D соҳанинг хеч бир нуқтасида манфий минимум ва мусбат максимумга эришмайди.

Худди шу каби, ҳар бир D_h соҳада Хопф принципи шартлари бажарилганлиги ва σ – Ляпунов чизиғи бўлганлиги учун, $L_j(u)=0$ $(j=1,2,3)$ тенгламанинг ўзгармас–дан фарқли ҳар бир $u\in C(D\cup S)$ регуляр ечими учун σ чизиқ нуқталарида (A ва B нуқталар бундан мустасно) Зарембa–Жиро принципининг тасдиғи ўринли бўлади.

$L_1(u)=0$ тенглама ечимлари учун AB кесмада қуйидаги хосса ўринли:

1 – лемма. $L_1(u)=0$ тенгламанинг коэффициентлари $D\cup S$ да узлуксиз, D соҳада $c(x,y)\le 0$ ва бу тенгламанинг ўзгармас сондан фарқли бўлган $u(x,y)\in C(D\cup S)$ регуляр ечими $P(x_0,0)\in AB$ нуқтада энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматга эришган бўлсин. У ҳолда, агар $u(x,y)$ функциянинг σ даги қиймати $u(x_0,0)$ дан кичик (катта) ва $\lim\limits_{y\to 0}u_y(x_0,y)$ лимит мавжуд бўлса, $\lim\limits_{y\to 0}u_y(x_0,0)<0$ (>0) тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, $L_1(u)=0$ тенгламанинг $u(x,y)\not\equiv const$ ечими $P(x_0,0)\in AB$ нуқтада энг катта мусбат қийматга эришган бўлиб, $u(x_0,0)>u(x,y)|_{\bar\sigma}$ бўлсин. У ҳолда, аниқки, $\lim\limits_{y\to 0} u_y(x_0,0)>0$ тенгсизлик бажарилмайди. Фараз қилайлик,

$$\lim_{y\to 0} u_y(x_0,0)=0 \tag{28}$$

тенглик ўринли бўлсин.

$$\dim D=d,\quad \max_{D}|b(x,y)|=\delta,\quad u(x_0,0)=u_0>0$$

белгилашлар киритайлик. Унда лемма шартига асосан $\max\limits_{\sigma} u(x,y)\le u_0-\varepsilon$, бу ерда $\varepsilon\ (<u_0)$ етарлича кичик мусбат сон.

Қуйидаги функцияни қарайлик:

$$V(x,y)=\frac{\varepsilon\, u(x,y)}{u_0\, e^{\gamma d}-\varepsilon\, e^{\gamma y}},\quad \gamma=const>\delta.$$

Бу функция учун $(x,y)\in\bar\sigma$ бўлганда

$$V(x,y)\le\frac{\varepsilon\,(u_0-\varepsilon)}{u_0 e^{\gamma d}-\varepsilon\, e^{\gamma d}}=\frac{\varepsilon}{e^{\gamma d}}<\frac{\varepsilon\, u_0}{u_0 e^{\gamma d}-\varepsilon}, \tag{29}$$

$(x,y)\in AB$ бўлганда эса

$$V(x,0)\le\frac{\varepsilon\, u_0}{u_0\, e^{\gamma d}-\varepsilon},\quad V(x_0,0)=\frac{\varepsilon\, u_0}{u_0\, e^{\gamma d}-\varepsilon} \tag{30}$$

муносабатлар ўринли.

Бундан ташқари, V функция D соҳада

$$y^m V_{xx}+V_{yy}+a_1 V_x+b_1 V_y+c_1 V=0 \tag{31}$$

тенгламани қаноатлантиради, бу ерда

$$a_1=a,\quad b_1=b-\frac{2\varepsilon\gamma e^{\gamma y}}{u_0 e^{\gamma d}-\varepsilon e^{\gamma y}},\quad c_1=c-\frac{\varepsilon\gamma e^{\gamma y}(\gamma+b)}{u_0 e^{\gamma d}-\varepsilon e^{\gamma y}},$$

$$a_1,\ b_1,c_1\in C(D\cup S),\qquad c_1(x,y)\le 0,\ (x,y)\in D. \tag{32}$$

Иккинчи томондан, (28) фаразимизга асосан,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial V(x_0,y)}{\partial y}=\frac{\varepsilon^2\gamma\, u_0}{(u_0 e^{\gamma d}-\varepsilon)^2}>0$$

тенгсизлик ўринли. Бундан келиб чиқадики, $V(x,y)$ функция D соҳа ичида энг катта қиймат қабул қилади. Бу эса (29) — (32) га асосан, экстремум принципига зиддир. Ҳосил бўлган қарама-қаршилик (28) фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $\lim\limits_{y\to 0} u_y(x_0,0)<0$.

Лемманинг иккинчи қисми ҳам шундай исботланади.

$L_2(u)=0$ тенглама ечимлари эса қуйидаги хоссага эга:

2-лемма. $L_2(u)=0$ тенгламанинг коэффициентлари D соҳада узлуксиз ва чегараланган бўлиб, $m\geq 1$, $b(x,0)>0$, $c(x,y)\leq 0$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. У ҳолда, унинг $D\cup S$ да узлуксиз ва $y\to 0$ да чегараланган u_y хосилага эга бўлган $u(x,y)$ регуляр ечими $D\cup S$ соҳадаги мусбат максимуми ва манфий минимумига AB кесмада эришмайди.

6-§. Асосий чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва улар ечимининг ягоналиги

$y>0$ ярим текисликда ётувчи ва учлари $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$ нуқталардан иборат бўлган σ Ляпунов чизиғи ҳамда $y=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган D соҳада (25) ва (26) тенгламаларни қарайлик ва $a,\ b,\ c,\ f\in$ $\in C^{(0,\alpha)}(D\cup S)$, $c(x,y)\leq 0$, $(x,y)\in D$ деб фараз қилайлик, бу ерда $S=\sigma\cup AB$, $0<\alpha\leq 1$.

1. Биринчи тур тенгламалар учун чегаравий масалалар.

Дирихле масаласи (D масала). (25) тенгламанинг D соҳада регуляр, $D\cup S$ да узлуксиз ва

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\varphi(s),\quad 0\leq s\leq l;\qquad u(x,0)=\tau(x),\ \ x_1\leq x\leq x_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда s — σ чизиқ ёйининг B нуқтадан бошлаб ҳисобланадиган узунлиги, l эса σ чизиқнинг узунлиги; $\varphi(s)$, $\tau(x)$ — берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(l)=\tau(x_1)$, $\varphi(0)=\tau(x_2)$.

1-теорема. (25) тенглама учун Дирихле масаласининг ечими биттадан ортиқ эмас.

Теоремани исботлаш учун бу масала ечимини иккита, яъни u_1 ва u_2 бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, $u=u_1-u_2$ функцияга нисбатан бир жинсли Дирихле масаласига эга бўламиз. $c(x,y)\leq 0$ бўлганлиги учун, Хопф принципига асосан, $D\cup S$ соҳада $|u|\leq \max\limits_{S}|u|=0$ тенгсизлик уринли. Бундан $D\cup S$ да $u\equiv 0$, яъни $u_1\equiv u_2$ эканлиги келиб чиқади. Демак, Дирихле масаласининг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Хольмгрен масаласи (N масала). (25) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(D\cup S)\cap C^1(D\cup AB)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\varphi(s),\quad 0<s<l;\ \lim_{y\to 0}u_y(x,y)=v(x),\quad x_1<x<x_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $\varphi(s)$, $v(x)-$берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $v(x)$ функция $x\to x_1$ ва $x\to x_2$ да $2/(m+2)$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин.

2 – теорема. Агар (25) тенглама учун Хольмгрен масаласининг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Теоремани исботлаш учун бир жинсли масала ечимини $D\cup S$ да айнан нолга тенглигини исботлаш етарли.

u – бир жинсли N масаланинг ечими бўлсин. $\lim\limits_{y\to 0}u_y=0$ бўлгани учун бу функция 5 – параграфдаги 1 – леммага асосан, AB да максимум ва минимумга эришмайди. У ҳолда, Хопф принципига асосан, $D\cup S$ соҳада $|u|\leq \max\limits_{\sigma}|u|=0$ тенгсизлик уринли. $u\big|_{\sigma}=0$ бўлгани учун бу тенгсизликдан $u\equiv 0,\ (x,y)\in D\cup S$ келиб чиқади.

Аралаш масала (К масала). (25) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C\,(D\cup S)\cap C^1\,(D\cup\sigma)$ синфга тегишли ва

$$A_s\,[u]\big|_{\sigma}=\varphi(s),\quad 0<s<l;\qquad u(x,0)=\tau\,(x),\quad x_1\leq x\leq x_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бунда u_x ва u_y хусусий хосилалар A ва B нуқта атрофида $2/\,(m+2)$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин. Бу ерда $\varphi(s), \tau(x)$ – берилган узлуксиз функциялар.

Бу масала ечимининг ягоналиги Хопф ва Зарембa – Жиро принципидан келиб чиқади.

2. Иккинчи тур тенгламалар учун чегаравий масалалар. (26) тенгламага масалалар қўйишда тенгламанинг бузилиш кўрсаткичи m ва $b(x,y)$ коэффициентининг $y \to 0$ даги лимити муҳим рол ўйнайди. Чунки (26) тенгламанинг $y=0$ чизиқда яккаланган махсус нуқталарга эга бўлмаган ечимлари $y=0$ чизиқ атрофида y ўзгарувчининг функцияси сифатида, асосан

$$y^m \varphi''(y) + b(x,0)\varphi'(y) = 0$$

оддий дифференциал тенгламанинг ечимлари каби табиатга эга бўлади [19].

Буни эътиборга олсак, (26) тенгламанинг ечимлари $y \to 0$ да қуйидагича хоссаларга эга эканлиги келиб чиқади:

а) $0 < m < 1$ бўлганда, барчаси чегараланган;

б) $m = 1,\ b(x,0) < 1$ бўлса, барчаси чегараланган;

в) $m = 1,\ b(x,0) \geq 1$ бўлса, баъзилари чегараланмаган;

г) $1 < m < 2,\ b(x,0) \leq 0$ бўлса, барчаси чегараланган;

д) $1 < m < 2,\ b(x,0) > 0$ бўлса, баъзилари чегараланмаган;

е) $m \geq 2,\ b(x,0) < 0$ бўлса, барчаси чегараланган;

f) $m \geq 2,\ b(x,0) \geq 0$ бўлса, баъзилари чегараланмаган.

(26) тенглама ечимларининг бу хоссаларидан келиб чиқадики, бу тенглама учун Дирихле масаласи ҳар доим ҳам коррект қўйилган бўлмайди. Тенглама ечимларининг барчаси чегараланган [а), б), г), е)] ҳолларда Дирихле масаласини ўрганиш маънога эга бўлади ва бунда ечимнинг ягоналиги Хопф принципидан келиб чиқади.

(26) тенгламанинг баъзи ечимлари чегараланмаган [в), д), f)] ҳолларда бу тенглама учун М.Б.Келдиш томонидан тавсия қилинган қуйидаги масалани ўрганиш мумкин:

***Е* масала.** (26) тенгламанинг D соҳада регуляр, $D \cup \sigma$ да узлуксиз ва

$$u(x,y)\big|_{\sigma} = \varphi(s), \qquad 0 \leq s \leq l; \qquad \left|\lim_{y \to 0} u(x,y)\right| < +\infty$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(s)\in C[0,l]$ — берилган функция.

3—теорема. Агар $D\cup\sigma$ да мусбат, $y\to 0$ да чексизликка текис интилувчи ва D соҳада $L_2[\omega]<0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\omega(x,y)$ функция мавжуд бўлса, у холда (26) тенглама учун E масала биттадан ортиқ ечимга эга эмас.

Исбот: $u(x,y)$ функция бир жинсли E масаланинг ечими бўлсин. Ихтиёрий етарли кичик ε (>0) сон учун D соҳада $L_2[\varepsilon\,\omega\pm u]<0$ тенгсизлик бажарилгани учун, экстремум принципига асосан, $\varepsilon\,\omega\pm u$ функция D соҳада манфий минимумга эга бўлмайди. У ҳолда, σ да $\varepsilon\,\omega\pm u>0$ бўлганлиги учун, D соҳада ҳам $\varepsilon\,\omega\pm u>0$ тенгсизлик, яъни $|u|\le\varepsilon\,\omega$ тенгсизлик ўринли. Бу ердан, ε етарли кичик ихтиёрий мусбат сон эканлигини эътиборга олсак, $u=0$, $(x,y)\in\overline{D}$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Изоҳ. 3—теоремада мавжудлиги талаб қилинган $\omega(x,y)$ функция сифатида

$$\omega(x,y)=-\ln y-(x-\delta)^n+K$$

функцияни олиш мумкин, бу ерда $\delta>0$ сон D соҳада $|x-\delta|>1$ тенгсизликни қаноатлантиради; n — натурал, K эса ихтиёрий мусбат сон.

Ҳақиқатдан ҳам, D соҳада

$$L_2(\omega)=y^{m-2}-n(n-1)(x-\delta)^{n-2}-an(x-\delta)^{n-1}-y^{-1}b+c\omega.$$

Дастлаб, в) ҳол, яъни $m=1$, $b(x,0)\ge 1$ ҳолни қарайлик.

$D\cup S$ соҳада $b(x,y)$ узлуксиз бўлганлиги учун, $A>0$ сонни етарли катта танлаш ҳисобига $1-b(x,y)<Ay$ тенгсизликни таъминлаш мумкин, n натурал сонни эса $n-1>3|a|\cdot|x-\delta|$, $n(n-1)>3A$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкин. Сўнгра $K>0$ сонни шундай танланадики, $D\cup S$ да $\omega(x,y)>0$ бўлади.

Ана шундай танланган n ва K учун

$$L_2(\omega)=y^{-1}(1-b)-\frac{2}{3}n(n-1)(x-\delta)^{n-2}$$

$$-\frac{1}{3}n\left[n-1+3a\left(x-\delta\right)\right]\left(x-\delta\right)^{n-2}+$$

$$+c\,\omega<A-\frac{2}{3}n\,\left(n-1\right)+c\,\omega<-\frac{1}{3}n\left(n-1\right)+c\,\omega<0,$$

яъни $\omega\left(x,y\right)$ функция 3–теоремада талаб қилинган шартларни бажаради.

д) ва f) ҳолларда ҳам $A>$ сонни $y^{m-1}-b\left(x,y\right)<Ay$ тенгсизликни бажарадиган қилиб танлаб ва юқори–даги мулоҳазаларни такрорлаб, $\omega\left(x,y\right)$ функция талаб қилинган хоссаларга эга эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

(26) тенгламага нисбатан юқорида баён қилинган мулоҳазаларнинг якуни сифатида қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз:

Кельдиш теоремаси [19]. (26) тенгламага D соҳада қўйилган Дирихле ва E масалалари учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. Агар $0<m<1$ бўлса, Дирихле масаласининг ечими мавжуд, E масала эса ноаниқ;

2. Агар m ва $b\left(x,y\right)$ лар учун

б) $m=1$ ва $b\left(x,0\right)<1$;

г) $1<m<2$ ва $b\left(x,0\right)\le 0$;

е) $m\ge 2$ ва $b\left(x,0\right)<0$

шартлардан бири бажарилса, Дирихле масаласи ечимга эга, E масала эса ноаниқ;

3. Агар m ва $b\left(x,y\right)$ лар қуйидаги шартларнинг бирини бажарса, Дирихле масаласи ҳар доим ҳам ечимга эга бўлмайди, E масала эса доим ечимга эга бўлади:

в) $m=1$ ва $b\left(x,0\right)\ge 1$;

д) $1<m<2$ ва $b\left(x,0\right)>0$;

f) $m\ge 2$ ва $b\left(x,0\right)\ge 0$.

Изоҳ. m ва $b\left(x,0\right)$ лар а), б), г), е) шартларни қаноат–лантирган ҳолларда (26) тенглама учун Хольмгрен масала–сини ҳам ўрганиш мумкин.

3. Умумлашган (чегаравий шартли) Дирихле ва Хольмгрен масалалари. (26) тенгламага қўйилган E масалага нисбатан умумий бўлган қуйидаги масалани ўрганиш ҳам муҳим аҳамиятга эга: (26) тенгламанинг D соҳада регуляр, $D \cup \sigma$ да узлуксиз ва $\psi(x,y)\,u(x,y) \in C(\overline{D})$ ҳамда

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \ (x,y) \in \sigma;$$
$$\lim_{y \to 0} \psi(x,y)u(x,y) = \phi(x), \quad x_1 \le x \le x_2 \tag{33}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу ерда $\varphi(s)$, $\phi(x)$ ва $\psi(x,y)$ – берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\psi(x,y)$ функция $y \to 0$ да нолга интилади.

Фикримизни тасдиқлаш мақсадида

$$u = w \cdot \upsilon \tag{34}$$

тенглик ёрдамида $\upsilon(x,y)$ функцияни киритайлик, бу ерда u (26) тенгламанинг ечими, w эса маълум функция.

У ҳолда, $\upsilon\,(x,y)$ функция

$$\tilde{L}_2(\upsilon) = \upsilon_{xx} + y^m\,\upsilon_{yy} + \left(a + 2\frac{w_x}{w}\right)\upsilon_x +$$
$$+\left(b + 2y^m\,\frac{w_y}{w}\right)\upsilon_y + \frac{L_2(w)}{w}\upsilon = 0 \tag{35}$$

тенгламани қаноатлантиради.

$w(x,y)$ функцияни шундай танлайликки,

$$\lim_{y \to 0}\left(b + 2y^m\frac{w_y}{w}\right)\begin{cases} < 1, & \text{агар} \quad m = 1 \quad \text{бўлса,} \\ \le 0, & \text{агар} \quad 1 < m < 2 \ \text{бўлса,} \\ < 0, & \text{агар} \quad m \ge 2 \quad \text{бўлса,} \end{cases}$$
$$w(x,y) > 0, \qquad L_2(w) < 0, \quad (x,y) \in D \cup S \tag{36}$$

шартлар бажарилсин ва $y \to 0$ да $w(x,y)$ функция чексизликка текис интилсин.

Унда (35) тенглама учун Кельдиш теоремасининг б), г), е) шартлари бажарилади ва шунинг учун D соҳада (35) тенгламанинг

$$\upsilon(x,y) = \varphi_1\,(x,y), \ \ (x,y) \in \overline{\sigma}; \ \ \upsilon(x,0) = \varphi_2(x), \quad x_1 \le x \le x_2$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ва $D \cup S$ да узлуксиз $\upsilon(x,y)$ ечими мавжуд.

Бу тасдиқдан, (34) га асосан, D соҳада (26) тенгламанинг

$$u(x,y) = \varphi_3(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\sigma};$$
$$\lim_{y \to 0} \psi(x,y)\, u(x,y) = \varphi_2(x), \qquad x_1 \le x \le x_2 \tag{37}$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ва $D \cup \bar{\sigma}$ да узлуксиз ечими мавжудлиги келиб чиқади, бу ерда

$$\varphi_3(x,y) = \varphi_1(x,y)\, w(x,y), \qquad \psi(x,y) = 1/w(x,y).$$

4 – теорема. Агар (36) шартларни қаноатлантирувчи $w(x,y)$ функция мавжуд бўлса, (26) тенгламанинг (37) шартларни қаноатлантирувчи ечими ягонадир.

Бу теорема ҳам 3 – теорема каби исботланади.

Изоҳ. (26) тенглама учун (36) шартларни қаноатлан – тирувчи $w(x,y)$ функциянинг мавжудлиги ҳақидаги маълу – мотлар [34] да келтирилган.

(26) тенглама ечимларининг баъзилари чегараланмаган [в), д), f)] ҳолларда Хольмгрен масаласига нисбатан умумий бўлган қуйидаги масалани ўрганиш мумкин: (26) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва $\psi(x,y) u_y(x,y) \in C(D \cup AB)$ ҳамда

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\sigma}:$$
$$\lim_{y \to 0} \psi(x,y)\, u_y(x,y) = \phi(x), \qquad x_1 < x < x_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\phi(x)$ – берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $y \to 0$ да $\psi(x,y)$ функция нолга интилади.

(26) тенглама учун юқорида баён қилинган масалалар – дан ташқари σ да $u(x,y)$ ўрнига $A_s[u]$ берилган масалаларни ҳам ўрганиш мумкин.

(26) тенгламага нисбатан билдирилган мулоҳазаларнинг аксарияти (27) тенгламага нисбатан ҳам ўринли бўлганлиги учун, (27) тенглама тўғрисида алоҳида тўхталмасдан, кейинги параграфларда конкрет тенгламалар ёрдамида фикримизни тасдиқлаймиз.

Бу параграфда биз эллиптик типдаги бузиладиган тенгламаларга чекли D соҳада қўйиладиган асосий масалалар ва улар ечимларининг ягоналигини кўриб ўтдик. Агар D соҳа чегараланмаган бўлса, чегаравий шартлар қаторига

$$\left|\lim_{R\to\infty} u(x,y)\right| < +\infty \qquad \text{ёки} \qquad \lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0$$

шарт ҳам қўшилади, бу ерда $R=\sqrt{x^2+y^2}$.

Кейинги параграфларда бу ерда қўйилган масалалар ечимларининг мавжудлигини конкрет тенгламалар мисолида исботлаш билан бирга, эллиптик типдаги тенгламалар учун юқорида баён қилинган масалалардан фарқли бўлган нолокал чегаравий шартли масалаларни ҳам кўриб ўтамиз.

7–§. Фундаментал ечимлар

1. Гельмгольц тенгламасининг фундаментал ечими xOy текислигида

$$F_0(u) = u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u = 0 \tag{38}$$

Гельмгольц тенгламасини қарайлик, буерда $\lambda \neq 0$ – ихтиёрий ҳақиқий сон.

(38) тенгламанинг ечимини $u = w(\lambda r)$ кўринишда қидирайлик, бу ерда $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ бўлиб, (x,y) ва (ξ,η) – текисликнинг ихтиёрий нуқталари. w функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаб, (38) тенгламага қўйсак,

$$w'' + \frac{1}{\lambda r} w' - w = 0 \tag{39}$$

тенгламага эга бўламиз.

(39) – Бессел тенгламаси булиб, $w_1 = k_1 I_0(\lambda r)$, $w_2 = k_2 K_0(\lambda r)$ чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга. Бу ерда

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$K_0(z) = -I_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

бўлиб, $I_0(z)$ — мавҳум аргументли Бессел функцияси, $K_0(z)$ — Макдональд функцияси, k_1, k_2 лар эса ўзгармас сонлар, $C = 0{,}577215664...$ — Эйлер ўзгармаси.

Бу тенгликлардан кўриниб турибдики, $r \to 0$ да $I_0(\lambda r)$ функция чегараланган, $K_0(\lambda r)$ эса логарифмик махсусликка эга.

Демак, Гельмгольц тенгламасининг фундаментал ечими $q_0(x, y; \xi, \eta; \lambda) = k_2 K_0(\lambda r)$ функциядан иборат. Одатда $k_2 = 1/2\pi$ деб олинади.

2. Умумлашган Гельмгольц тенгламасининг фундаментал ечими. $y > 0$ ярим текисликда эллиптик типга тегишли

$$F_m(u) \equiv y^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 y^m u = 0 \qquad (m > 0) \tag{40}$$

тенгламани қарайлик, бу ерда λ — ихтиёрий ҳақиқий сон.

$y = 0$ тўғри чизиқ бу тенглама учун параболик бузилиш чизиғидир.

(40) тенгламанинг фундаментал ечимини топиш мақсадида

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma_1 = 1 - \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{4}\lambda^2 r_1^2 \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)} \tag{40_1}$$

белгилашлар киритиб, ечимни

$$u = \left(r_1^2\right)^{-\beta} w(\sigma_1, \sigma_2) \tag{41}$$

кўринишда излаймиз. (41) функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаб ва (40) тенгламага қўйиб, баъзи алмаштиришлардан сўнг, $w(\sigma_1, \sigma_2)$ функцияга нисбатан

$$Aw_{\sigma_1\sigma_1} + 2Bw_{\sigma_1\sigma_2} + Cw_{\sigma_2\sigma_2} + Dw_{\sigma_1} + Ew_{\sigma_2} + Fw = 0 \tag{42}$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$A=\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left[y^m(\sigma_{1x})^2+(\sigma_{1y})^2\right],$$

$$B=\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left[y^m\sigma_{1x}\cdot\sigma_{2x}+\sigma_{1y}\cdot\sigma_{2y}\right],$$

$$C=\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left[y^m(\sigma_{2x})^2+(\sigma_{2y})^2\right],$$

$$D=-2\beta\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\left[y^m\left(r_1^2\right)_x\cdot\sigma_{1x}+\left(r_1^2\right)_y\sigma_{1y}\right]+$$

$$+\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left[y^m\cdot\sigma_{1xx}+\sigma_{1yy}\right], \qquad (43)$$

$$E=-2\beta\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\left[y^m\left(r_1^2\right)_x\cdot\sigma_{2x}+\left(r_1^2\right)_y\sigma_{2y}\right]+$$

$$+\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left[y^m\cdot\sigma_{2xx}+\sigma_{2yy}\right],$$

$$F=\beta(\beta+1)\,(r_1^2)^{-\beta-2}\left\{y^m[(r_1^2)_x]^2+[(r_1^2)_y]^2\right\}-$$

$$-\beta(r_1^2)^{-\beta-1}\left[y^m(r_1^2)_{xx}+(r_1^2)_{yy}\right]-\lambda^2y^m(r_1^2)^{-\beta}.$$

r_1^2,σ_1 ва σ_2 ларнинг ҳосилаларини ҳисоблаб, (43) ифодаларни соддалаштирсак,

$$A=4y^{\frac{m-2}{2}}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}(1-\sigma_1)\sigma_1,$$

$$2B=4y^{\frac{m-2}{2}}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\sigma_1\sigma_2+\lambda^2y^m\left(r_1^2\right)^{-\beta}\sigma_1,$$

$$C=-\lambda^2y^m\left(r_1^2\right)^{-\beta}\sigma_2,$$

$$D=4y^{\frac{m-2}{2}}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\left[2\beta-(1+2\beta)\sigma_1\right],$$

$$E=4y^{\frac{m-2}{2}}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\beta\sigma_2-\lambda^2y^m\left(r_1^2\right)^{-\beta}(1-\beta),$$

$$F=-4y^{\frac{m-2}{2}}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}\beta^2-\lambda^2y^m\left(r_1^2\right)^{-\beta}$$

эканлигини топамиз.

Буларни (42) га қўйиб, уни юқори ярим текисликнинг $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий (x,y), (ξ,η) нуқталар учун ўринли эканлигини инобатга олсак, $w(\sigma_1,\sigma_2)$ функция

$$\begin{cases} \sigma_1(1-\sigma_1)\,w_{\sigma_1\sigma_1}+\sigma_1\,\sigma_2\,w_{\sigma_1\sigma_2}+ \\ +\left[2\beta-(1+2\beta)\sigma_1\right]w_{\sigma_1}+\beta\,\sigma_2\,w_{\sigma_2}-\beta^2 w=0, \\ \\ \sigma_2\,w_{\sigma_2\sigma_2}-\sigma_1\,w_{\sigma_1\sigma_2}+(1-\beta)w_{\sigma_2}+w=0 \end{cases} \tag{44}$$

тенгламалар системасини қаноатлантиришини топамиз.

Бу тенгламалар системаси чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$\begin{gathered} w_1=H_3(\beta,\beta,2\beta;\sigma_1,\sigma_2), \\ w_2=\sigma_1^{1-2\beta}\;H_3(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\;\sigma_1,\sigma_2) \end{gathered} \tag{45}$$

ечимларга эга [5] ([5] да (44)системани ёзишда хатоликка йўл қўйилган), бу ерда

$$H_3(\alpha,\gamma,\delta;x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k-n}\;(\gamma)_k}{(\delta)_k\,k!\;n!}x^k y^n,\quad |x|<1.$$

$H_3(\alpha,\gamma,\delta;x,y)-$Горн функциясидан иборат бўлиб, уни

$$H_3(\alpha,\gamma,\delta;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}\cdot\frac{y^n}{n!}F(\alpha-n,\beta,\delta;x) \tag{46}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(45) ни (41) га қўйиб, (40) тенгламанинг чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$\begin{gathered} q_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)=k_1\left(r_1^2\right)^{-\beta}H_3(\beta,\beta,2\beta,\sigma_1,\sigma_2), \\ q_2(x,y;\xi,\eta;\lambda)=k_2\left(r_1^2\right)^{-\beta}\sigma_1^{1-2\beta}H_3(1-\beta,1-\beta,\;2-2\beta;\sigma_1,\sigma_2) \end{gathered} \tag{47}$$

ечимларига эга бўламиз, бу ерда k_1, k_2- ўзгармас сонлар.

Бу ерда (46) тенгликни ва гипергеометрик функциялар назариясидан маълум бўлган

$$F(a,b,a+b;1-z)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b,1;z)\ln z+$$

$$+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\times \tag{48}$$

$$\times\left[2\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]z^k$$

формулани инобатга олсак, $r\to 0$ да $\sigma_1\to 1$ бўлиб, (47) ечимлар $r\to 0$ да логарифмик махсусликка эга эканлиги келиб чиқади.

Демак, (47) функциялар (40) тенгламанинг фундаментал ечимларидан иборатдир. Бу фундаментал ечимлар барча x лар учун

$$\frac{\partial}{\partial y}q_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)\Big|_{y=0}=0,\quad q_2(x,0;\xi,\eta;\lambda)=0$$

шартларни қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас. Шу билан бирга фундаментал ечимлар (x,y), (ξ,η) нуқталарга нисбатан симметрикдир. Бундан кейин

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},\quad k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \tag{49}$$

деб ҳисоблаймиз.

(40) ва (47) ларда $\lambda=0$ деб, (46) тенгликни инобатга олсак,

$$E(u)\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0\qquad (m>0) \tag{50}$$

тенгламанинг фундаментал ечимлари

$$q_1(x,y;\xi,\eta)=k_1\left(r_1^2\right)^{-\beta}F(\beta,\beta,2\beta;\sigma_1),$$
$$q_2(x,y;\xi,\eta)=k_2\left(r_1^2\right)^{-\beta}\sigma_1^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\sigma_1) \tag{51}$$

функциялардан иборат эканлиги келиб чиқади, бу ерда k_1 ва k_2 лар (49) тенгликлар билан аниқланади.

(47) ва (51) функциялар $-1<m<0$ бўлганда ҳам мос равишда (40) ва (50) тенгламалар учун фундаментал ечим бўлаверади.

3. Иккинчи тур тенгламанинг фундаментал ечими. Ушбу

$$M_\alpha(u) \equiv u_{xx} + y^m u_{yy} + \alpha\, y^{m-1} u_y = 0 \qquad (0 < m < 2) \tag{52}$$

тенгламани юқори ярим текисликда қарайлик, бу ерда $m-1<\alpha<1,\ \ \alpha \neq m/2$.

$y=0$ тўғри чизиқ (52) тенглама учун параболик бузилиш чизиғи бўлиб, $y>0$ да (52) — эллиптик типдаги иккинчи тур бузиладиган тенгламадир.

Бу тенгламага қўшма тенглама

$$M_\alpha^*(\upsilon) \equiv \upsilon_{xx} + y^m \upsilon_{xx} + (2m-\alpha) y^{m-1}\upsilon_y + (m-\alpha)(m-1)\, y^{m-2}\upsilon = 0$$

кўринишга эга бўлиб,

$$M_\alpha[y^{m-\alpha}\upsilon(x,y)] = y^{m-\alpha} M_\alpha^*[\upsilon(x,y)] \tag{53}$$

тенглик ўринли

$y>0$ ярим текисликда

$$x = x, \quad z = \frac{2}{2-m}\, y^{(2-m)/2}, \quad w = z^{-\frac{2(1-m)}{2-m}}\,\upsilon \tag{54}$$

алмаштириш бажарсак, $M_\alpha^*[\upsilon(x,y)] = 0$ тенглама

$$w_{xx} + w_{zz} + \frac{2(1-\beta_1)}{z} w_z = 0 \tag{55}$$

кўринишга келади, бу ерда $\beta_1 = (2\alpha - m)/(4-2m)$.

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + (z \mp \zeta)^2, \ \ t = \frac{r^2}{r_1^2}, \ \ \beta_0 = 1 - \beta_1$$

белгилашлар киритиб, (55) тенгламанинг ечимини

$$w(x,z;\xi,\zeta) = \left(r_1^2\right)^{\beta_0} \omega(t) \tag{56}$$

кўринишда қидирамиз.

Натижада, $\omega(t)$ га нисбатан Гауссинг

$$t(1-t)\omega'' + [1-(1+2\beta_0)t]\omega' - \beta_0^2\,\omega = 0$$

тенгламасига эга бўламиз. $m-1<\alpha<1,\ \alpha \neq m/2$ бўлганда $2\beta_1 \,\overline{\in}\, Z$ бўлганлиги учун бу тенглама $t=1$ нуқта атрофида

$$\omega_1 = F\left(1-\beta_1, 1-\beta_1, 2-2\beta_1; 1-t\right),$$
$$\omega_2 = (1-t)^{2\beta_1-1}\, F\left(\beta_1, \beta_1, 2\beta_1; 1-t\right)$$
чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга.

Бу ечимларни (56) га қўйиб, (54) формулалар орқали x, y ўзгарувчиларга ва υ функцияга қайтиб, $1-t=16(y\eta)^{(2-m)/2}/(2-m)^2 r_1^2$ эканлигини инобатга олсак, $M_\alpha^*(\upsilon)=0$ тенгламанинг
$$q_1(x,y;\xi,\eta)=k_1 y^{1-m}\left(r_1^2\right)^{\beta_1-1}\times$$
$$\times F\left(1-\beta_1, 1-\beta_1, 2-2\beta_1; 16(y\eta)^{(2-m)/2}/(2-m)^2 r_1^2\right)$$
(57)
$$q_2(x,y;\xi,\eta)=k_2 y^{\alpha-m}\eta^{\alpha-1}\left(r_1^2\right)^{-\beta_1}\times$$
$$\times F\left(\beta_1, \beta_1, 2\beta_1; 16(y\eta)^{(2-m)/2}/(2-m)^2 r_1^2\right)$$
ечимларига эга бўламиз, бу ерда k_1, k_2 — ўзгармас сонлар, $\eta=\left[(2-m)\zeta/2\right]^{2/(2-m)}$.

(48) формулага асосан, (57) функциялар $r\to 0$ $(y>0)$ да логарифмик махсусликка эга. Шунинг учун улар x, y аргументлар бўйича $M_\alpha^*(\upsilon)=0$ тенгламанинг фундаментал ечимлари бўлади.

(53) тенгликка асосан, $y^{m-\alpha}q_j(x,y;\xi,\eta)$ $(j=1,2)$ функциялар x, y аргументлар бўйича $M_\alpha(u)=0$ тенгламани қаноатлантиради. Буни эътиборга олсак,
$$q_3(x,y;\xi,\eta)=k_1 y^{\alpha-m}\eta^{1-\alpha}\left(r_1^2\right)^{\beta_1-1}\times$$
$$\times F\left(1-\beta_1, 1-\beta_1, 2-2\beta_1; 16(y\eta)^{(2-m)/2}/(2-m)^2 r_1^2\right)$$
(57_1)
$$q_4(x,y;\xi,\eta)=k_2 y^{\alpha-m}\left(r_1^2\right)^{-\beta_1}\times$$
$$\times F\left(\beta_1, \beta_1, 2\beta_1; 16(y\eta)^{(2-m)/2}/(2-m)^2 r_1^2\right)$$
функциялар ξ, η аргументлар бўйича $M_\alpha(u)=0$ тенгламани қаноатлантиради ва, шунинг учун, ξ, η аргументлар бўйича (52) тенгламанинг фундаментал ечимлари бўлади.

4. Типи ва тартиби бузиладиган тенгламанинг фундаментал ечими. $y>0$ ярим текисликда эллиптик типга тегишли бўлиб, $y=0$ да типи ва тартиби бузиладиган

$$E_\alpha(u) \equiv y^{m+1}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \tag{58}$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $m>0$, $(-m/2)<\alpha<1$.

Агар $\beta_2 = (m+2\alpha)/(2m+4)$, $\sigma_1 = 1 - r^2/r_1^2$,

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp \eta^{\frac{m+2}{2}} \right)^2$$

белгилашлар киритиб, (58) тенгламанинг ечимини

$u = \left(r_1^2\right)^{-\beta_2} w(\sigma_1)$ кўринишда қидирсак,

$$q_1(x, y; \xi, \eta) = k_1 \left(r_1^2\right)^{-\beta_2} F(\beta_2, \beta_2, 2\beta_2; \sigma_1),$$

(59)

$$q_2(x, y; \xi, \eta) = k_2 \left(r_1^2\right)^{-\beta_2} (\sigma_1)^{1-2\beta_2} F(1-\beta_2, 1-\beta_2, 2-2\beta_2; \sigma_1)$$

функциялар бу тенгламанинг фундаментал ечимларидан иборатлигини топамиз.

5. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламанинг фундаментал ечими. xOy текисликнинг биринчи чорагида эллиптик типга тегишли

$$y^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0 \tag{60}$$

тенгламани қарайлик. $x=0$ ва $y=0$ тўғри чизиқларда бу тенглама параболик бузилади.

(60) тенглама учун фундаментал ечимлар топишда $m=n$ ва $m \neq n$ ҳоллар алоҳида қаралади.

а) $m=n>0$ ёки $-1<m=n<0$ бўлсин. У ҳолда,

$$\left.\begin{matrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix}\right\} = \left(\xi^p \mp x^p\right)^2 + \left(\eta^p \pm y^p\right)^2, \quad \sigma_1 = \frac{16(\xi\eta xy)^p}{(r_1 r_2)^2},$$

$$\beta = m/(2m+4), \quad 2p = m+2,$$

$$k_1 = 4^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)/\pi\Gamma(2\beta), \quad k_2 = 4^{2\beta-1}\Gamma^2(1-\beta)/\pi\Gamma(2-2\beta)$$

белгилашлар киритиб, (60) тенглама ечимини

$u=\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-\beta} w(\sigma_1)$ кўринишда қидирсак, 2—бандлаги каби мулоҳазалардан сўнг, (68) тенгламанинг фундаментал ечимлари

$$q_1(x,y;\xi,\eta)=k_1\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-\beta} F(\beta,\beta,2\beta;\sigma_1),$$

$$q_2(x,y;\xi,\eta)=k_2\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-\beta}\sigma_1^{1-2\beta} F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\sigma_1)$$

функциялардан иборат эканлигини топамиз.

Бу функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial\eta}(x,y;\xi,\eta)\right|_{\eta=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial\xi}q_1(x,y;\xi,\eta)\right|_{\xi=0}=0,$$

$$q_2(x,y;\xi,0)=0, \qquad q_2(x,y;0,\eta)=0.$$

б) $m\neq n$ ва $m>0, n>0$ ёки $-1<m<0$, $-1<n<0$ бўлсин. Бунда

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix}\right\}=\left(\frac{1}{q}x^q\mp\frac{1}{q}\xi^q\right)^2+\left(\frac{1}{p}y^p\mp\frac{1}{p}\eta^p\right)^2, \quad \sigma_1=\frac{r^2-r_1^2}{r^2}, \ \sigma_2=\frac{r^2-r_2^2}{r^2};$$

$$\frac{m+2}{2}=p, \quad \frac{n+2}{2}=q, \quad \frac{m}{2(m+2)}=\beta, \quad \frac{n}{2(n+2)}=\alpha$$

белгилашлар киритиб, (60) тенгламанинг ечимини

$$u=\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta} w(\sigma_1,\sigma_2) \tag{61}$$

кўринишда қидирсак, худди 2—банддаги каби мулоҳазалардан сўнг, $w(\sigma_1,\sigma_2)$ функцияга нисбатан

$$\begin{cases} \sigma_1(1-\sigma_1)w_{\sigma_1\sigma_1}-\sigma_1\sigma_2 w_{\sigma_1\sigma_2}+\left[2\alpha-(2\alpha+\beta+1)\,\sigma_1\right]w_{\sigma_1} \\ \qquad -\alpha\sigma_2 w_{\sigma_2}-\alpha(\alpha+\beta)\,w=0. \\ \\ \sigma_2(1-\sigma_2)w_{\sigma_2\sigma_2}-\sigma_1\sigma_2 w_{\sigma_1\sigma_2}+\left[2\beta-(\alpha+2\beta+1)\,\sigma_2\right]w_{\sigma_2} \\ \qquad -\beta\sigma_1 w_{\sigma_1}-\beta(\alpha+\beta)\,w=0 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз.

Бу система чизиқли боғлиқ бўлмаган 4 ечимга эга [5]:

$$w_1(\sigma_1,\sigma_2)=F_2(\alpha+\beta,\alpha,\beta,2\alpha,2\beta;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$w_2(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1^{1-2\alpha}F_2(1-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta,2-2\alpha,2\beta;\sigma_1,\sigma_2).$$

$$w_3(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_2^{1-2\beta}F_2(1+\alpha-\beta,\alpha,1-\beta,2\alpha,2-2\beta;\sigma_1,\sigma_2),\tag{62}$$

$$w_4(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1^{1-2\alpha}\sigma_2^{1-2\beta}F_2(2-\alpha-\beta,1-\alpha,1-\beta,2-2\alpha,2-2\beta;\sigma_1,\sigma_2),$$

бу ерда $F_2(a,b,b',c,c';x,y)=\sum\limits_{i,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{i+k}(b)_i(b')_k}{(c)_i(c')_k\,i\,!\,k!}x^iy^k$ — Горннинг гипергеометрик функцияси [5].

(62) функцияларни (61)га қўйиб,

$$F_2(a,b,b',c,c';x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b')_k}{(c')_k\,k\,!}F(a+k,b.c;x)y^k$$

тенгликни [5] ва (48) формулани инобатга олсак, (60) тенгламанинг фундаментал ечимлари

$$q_1(x,y;\xi,\eta)=k_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta}F_2(\alpha+\beta,\alpha,\beta,2\alpha,2\beta;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$q_2(x,y;\xi,\eta)=k_2\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta}\sigma_1^{1-2\alpha}\times$$

$$\times F_2(1-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta,2-2\alpha,2\beta;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$q_3(x,y;\xi,\eta)=k_3\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta}\sigma_2^{1-2\beta}\times$$

$$\times F_2(1+\alpha-\beta,\alpha,1-\beta,2\alpha,2-2\beta;\sigma_1,\sigma_2).$$

$$q_4(x,y;\xi,\eta)=k_4\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta}\sigma_1^{1-2\alpha}\sigma_2^{1-2\beta}\times$$

$$\times F_2(2-\alpha-\beta,1-\alpha,1-\beta,2-2\alpha,2-2\beta;\sigma_1,\sigma_2)$$

функциялардан иборатлиги келиб чиқади, бу ерда $k_j\ \left(j=\overline{1,4}\right)$ — ўзгармас сонлар.

Бу фундаментал ечимлар қуйидаги хоссаларга эга:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}q_1(x,y;0,\eta)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}q_1(x,y;\xi,0)=0;$$

$$q_2(x,y;0,\eta)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}q_2(x,y;\xi,0)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}q_3(x,y;0,\eta)=0, \qquad q_3(x,y;\xi,0)=0;$$

$$q_4(x,y;0,\eta)=0. \qquad q_4(x,y;\xi,0)=0.$$

6. Умумий тенгламанинг фундаментал ечими. Эллиптик типдаги тенгламалар ечимлари хоссаларини ўрганишда тенгламанинг фундаментал ечими муҳим рол ўйнайди. Шунинг учун берилган тенгламанинг фундаментал ечимини қуриш масаласи эллиптик типдаги тенгламалар назариясининг энг асосий масалаларидан бири ҳисобланади.

Агар (9) кўринишдаги текис эллиптик тенгламанинг коэффициентлари D сохада

$$a_{jm}\in C^{(1,0)}(D\cup S),\ a_{ik}\in C^{(3,0)}(D\cup S).\ \ i,k=1,2;\quad j,m=2,3$$

шартларни қаноатлантириб, D соҳа етарли кичик бўлса, бу тенгламанинг фундаментал ечими мавжуд бўлиши Леви томонидан исботланган [2]. Бу ерда бу тасдиқни исботсиз қабул қилиб, (25) ва (26) тенгламаларнинг коэффициентлари ҳам шу шартларни бажарганда юқори ярим текисликнинг $y=0$ тўғри чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлмаган етарли кичик D соҳасида фундаментал ечимлари мавжуд эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

8–§. $E(u)=0$ тенглама учун Хольмгрен масаласи

1. Масаланинг қўйилиши ва Грин функцияси.

$$E(u)\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (m>0)$$

тенгламани $y>0$ ярим текисликнинг учлари $A(-a,0)$, $B(a,0)$ $(a>0)$ нуқталарда ётувчи σ Ляпунов чизиғи ва $AB=\{(x,y):\ y=0,\ \ -a<x<a\}$ кесма билан чегараланган D соҳада қарайлик.

Хольмгрен масаласи: $E(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1\ (D\cup AB)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)\big|_{\overline{\sigma}}=\varphi(s),\quad 0\le s\le l;\qquad u_y\ (x,0)=\nu(x),\ -a<x<a \quad (63)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(s)\in C[0,l]$, $\nu(x)\in C\ (-a,a)$ − берилган функциялар булиб, $\nu(x)$ функция $x\to\pm a$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин; $s-\sigma$ чизиқ ёйининг B нуқтадан бошлаб ҳисобланадиган узунлиги, $l-\sigma$ чизиқнинг узунлиги, $\beta=m/(2m+4)$.

Бу масалани ечишда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1\ (\xi,\eta;\ x,y)$ Грин функцияси муҳим рол уйнайди:

1) $G_1\ (\xi,\eta;\ x,y)$ функция ξ,η ўзгарувчилар бўйича D соҳанинг (x,y) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида $E(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечимидан иборат;

2) ушбу

$$G_1\big(\xi,\eta;\ x,y\big)\bigg|_{(\xi,\eta)\in\overline{\sigma}}=0,\ \ \frac{\partial G_1\big(\xi,\eta;\ x,y\big)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}=0,\ \ (x,y)\in D \quad (64)$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $$G_1(\xi,\eta;\ x,y)=q_1(\xi,\eta;\ x,y)+g_1(\xi,\eta;\ x,y) \quad (65)$$

кўринишга эга, бунда $q_1(\xi,\eta;\ x,y)-E(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими (7 − § га қаранг), $g_1(\xi,\eta;\ x,y)$ эса барча D соҳада $E(u)=0$ тенгламанинг x,y ўзгарувчилар бўйича ҳам, ξ,η ўзгарувчилар бўйича ҳам регуляр ечимидир.

Бундай хоссаларга эга бўлган Грин функциясини тузиш, (64) ва (65) тенгликлар ҳамда $q_1(\xi,\eta;x,y)$ фунламентал ечимнинг хоссаларига асосан, $E(u)=0$ тенгламанинг

$$g_1(\xi,\eta;\ x,y)\big|_{\sigma}=-q_1\ (\xi,\eta;\ x,y)\big|_{\overline{\sigma}}\ ,$$

$$\frac{\partial g_1\ (\xi,\eta;\ x,y)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}=0,\quad (x,y)\in D$$

шартларни қаноатлантирувчи $g_1(\xi,\eta;\ x,y)$ регуляр ечимини топишга тенг кучлидир.

σ эгри чизиқ

$$\sigma_0 : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1$$

нормал эгри чизиқ билан устма—уст тушганда Грин функциясини дарҳол ёзиб олишимиз мумкин. У ушбу

$$G_1(\xi, \eta; x, y) = q_1(\xi, \eta; x, y) - \left(R^2\right)^{\beta} q_1(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y})$$

куринишга эга булади, бу ерда

$$R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \qquad \bar{x} = \frac{x}{R^2}, \qquad \bar{y}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y^{\frac{m+2}{2}}}{R^2}.$$

σ — ихтиёрий Ляпунов чизиғи булган ҳолда $G_1(\xi, \eta; x, y)$ Грин функциясининг мавжудлиги V бобнинг 8—параграфида исботланади.

2. Масаланинг ечими. D соҳада ётувчи, σ чизиққа параллел ва ундан ρ масофада жойлашган σ_ρ чизиқ ҳамда $y = \delta$ (бу ерда ρ ва δ —етарли кичик мусбат сонлар) тўғри чизиқ билан чегараланган соҳани D_δ^ρ орқали ва $y = \delta$ тўғри чизиқнинг σ_ρ чизиқ билан кесишиш нуқталарининг абсциссаларини x_1 ва x_2 $(x_1 < x_2)$ орқали белгилайлик. D_δ^ρ соҳанинг (x, y) нуқтасини марказ қилиб етарли кичик ε (>0) радиусли ва D_δ^ρ да ётувчи C_ε айлана чизайлик. σ_ρ чизиқ, $[x_1, x_2] = \{(x, y) : y = \delta, x_1 \le x \le x_2\}$ кесма ва C_ε айлана билан чегараланган $D_{\varepsilon\delta}^\rho$ соҳада $G_1(\xi, \eta; x, y)$ Грин функцияси $E(u) = 0$ тенгламанинг регуляр ечимидан иборат булади. $u(x, y)$ функция $E(u) = 0$ тенгламанинг (63) шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими булсин. У ҳолда, $D_{\varepsilon\delta}^\rho$ соҳада

$$u E(G_1) - G_1 E(u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\eta^m \left(u \frac{\partial G_1}{\partial \xi} - G_1 \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u \frac{\partial G_1}{\partial \eta} - G_1 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

айният уринли.

Бу айниятни $D^{\rho}_{\varepsilon\delta}$ соҳа бўйича интеграллаб, сўнгра Гаусс – Остроградский формуласини қўллаймиз:

$$\int\limits_{\overline{\sigma_{\rho}}\cup[x_1,x_2]\cup\vec{C}_{\varepsilon}} \left[\eta^m\left(u\frac{\partial G_1}{\partial\xi}-G_1\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\cos(n,\xi)+\right.$$

$$\left.+\left(u\frac{\partial G_1}{\partial\eta}-G_1\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cos(n,\eta)\right]ds=0.$$

Бу ерда $\dfrac{d\eta}{ds}=\cos(n,\xi)$, $\dfrac{d\xi}{ds}=-\cos(n,\eta)$ тенгликларни ва

$$A_s[\;]\equiv\eta^m\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

белгилашни инобатга олсак,

$$\int\limits_{\overline{\sigma_{\rho}}\cup[x_1,x_2]\cup\vec{C}_{\varepsilon}}\left(u\,A_s[G_1]-G_1\,A_s[u]\right)ds=0 \tag{66}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда G_1 функциянинг хоссаларини ва (63) шартларни эътиборга олсак,

$$\int\limits_{\overline{\sigma}_{\rho}}\varphi(s)\,A_s[G_1]\,ds+\int\limits_{x_1}^{x_2}\nu(\xi)\,G_1(\xi,0;x,y)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\vec{C}_{\varepsilon}}\left(uA_t[G_1]-G_1A_t[u]\right)dt=0$$

ёки

$$-\int\limits_{\overleftarrow{C}_{\varepsilon}}\left(u\,A_t[G_1]-G_1A_t[u]\right)dt=$$

$$=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\nu(\xi)\,G_1(\xi,0;x,y)\,d\xi-\int\limits_{\overline{\sigma}}\varphi(s)\,A_s[G_1]\,ds \tag{67}$$

тенглик ҳосил бўлади. C_{ε} нинг тенгламасини ҳозирча $\xi=\xi(t)$, $\eta=\eta(t)$ десак, бевосита ҳосилаларнинг ҳисоблаш натижасида ушбу

$$A_t\left[q_1(\xi,\eta;x,y)\right]=\eta^m\frac{\partial q_1}{\partial\xi}\eta'(t)-\frac{\partial q_1}{\partial\eta}\xi'(t)=$$

$$= u_1\eta^{-1}(m+2)\left[(\xi - x)\frac{2}{m+2}\eta^{m+1}\eta'(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2}\eta^{\frac{m+2}{2}}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}} + y^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] - \tag{68}$$

$$- u_2\frac{4}{m+2}\eta^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m+2}{2}}\frac{h(x,y,t)}{r^2}$$

ифодага эга бўламиз, бу ерда

$$u_1 = \frac{\beta k_1}{\left(r_1^2\right)^{\beta+1}}F(\beta,\beta,2\beta;\sigma_1), \quad u_2 = \frac{\beta k_1}{\left(r_1^2\right)^{\beta+1}}F(\beta,\beta,2\beta+1;\sigma_1),$$

$$h(x,y,t) = 2(\xi - x)\frac{2\eta^{m+1}}{m+2}\eta'(t) + \xi'(t)(x-\xi)^2$$

$$- \frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2}\left(\eta^{m+2} - y^{m+2}\right)$$

Энди, C_ε айлананинг тенгламасини қутб координаталарда $\xi - x = \varepsilon\cos t$, $\eta - y = \varepsilon\sin t$ каби ёзиб оламиз. У ҳолда,

$$(y + \varepsilon\sin t)^{\frac{m+2}{2}} = y^{\frac{m+2}{2}} + \frac{m+2}{2}\varepsilon y^{\frac{m}{2}}\sin t + \alpha_1(y,t,\varepsilon)$$

тенгликка асосан

$$r^2 = \varepsilon^2\cos^2 t + \frac{4}{(m+2)^2}\left[(y+\varepsilon\sin t)^{\frac{m+2}{2}} - y^{\frac{m+2}{2}}\right]^2 =$$

$$= \varepsilon^2\cos^2 t + \varepsilon^2 y^m\sin^2 t + \alpha_2(y,t,\varepsilon), \qquad \alpha_2 = O\left(\varepsilon^3\right),$$

$$\eta^{m+2} = (y+\varepsilon\sin t)^{m+2} = y^{m+2} + (m+2)\varepsilon y^{m+1}\sin t + \gamma_1(y,t,\varepsilon),$$

$$h(x,y,t) = \frac{4}{m+2}\varepsilon^2\cos^2 t(y+\varepsilon\sin t)^{m+1} - \varepsilon^3\sin t\cos^2 t +$$

$$+ \frac{4\varepsilon^2}{m+2}y^{m+1}\sin^2 t + \gamma_2(y,t,\varepsilon) = \frac{4\varepsilon^2}{m+2}\left[\cos^2 t\,(y+\varepsilon\sin t)^{m+1}\right.$$

$$-\varepsilon\frac{m+2}{4}\sin t\cos^2 t+y^{m+1}\sin^2 t+\gamma_3(y,t,\varepsilon)\Bigg],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_3(y,t,\varepsilon)=0.$$

Юқоридаги тенгликларни эътиборга олиб, қуйидаги—ларни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h(x,y,t)}{r^2}=\frac{\frac{4}{m+2}y^{m+1}}{\cos^2 t+y^m\sin^2 t},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(r_1^2\right)^{-(\beta+1)}=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}y^{-\frac{3m+4}{2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_2=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}y^{-\frac{3m+4}{2}}\beta k_1F(\beta,\beta,1+2\beta;1)= \tag{69}$$

$$=2k_1\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}y^{-\frac{3m+4}{2}}.$$

Энди, (69) га асосан, k_1 нинг (49) даги қийматини эътиборга олсак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_2\frac{4}{m+2}\eta^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m+2}{2}}\frac{h(x,y,t)}{r^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{\cos^2 t+y^m\sin^2 t}. \tag{70}$$

$u(x,y)$ ва $g_1(\xi,\eta;x,y)$ функциялар $E(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечимлари бўлганлиги сабабли

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overleftarrow{C_\varepsilon}}G_1A_t[u]dt=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overleftarrow{C_\varepsilon}}u\,A_t[g_1(\xi,\eta;x,y)]\,dt=0$$

бўлади. Шунинг учун ҳам, (68) ва (70) га асосан,

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overleftarrow{C_\varepsilon}}uA_t[q_1]dt=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}u(x+\varepsilon\cos t,\ y+\varepsilon\sin t)A_t[q_1]\,dt=$$

$$=u(x,y)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{\cos^2 t+y^m\sin^2 t}dt=$$

$$y^{\frac{m}{2}}$$

$$= u(x,y)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t}{1+y^m tg^2 t}\,dt = u(x,y).$$

Шундай қилиб, (67) формулада $\varepsilon\to 0$, $\rho\to 0$ ва $\delta\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$u(x,y) = -\int\limits_{-a}^{a} \nu(\xi)\,G_1(\xi,0;x,y)\,d\xi - \int\limits_{\sigma}\varphi(s)\,A_s[G_1]\,ds \qquad (71)$$

формулага эга бўламиз. (71) формула билан аниқланган $u(x,y)$ функциянинг ҳақиқатан ҳам N масаланинг ечими эканлиги V бобнинг 8 – параграфида исботланади.

9–§. $E(u)=0$ тенглама учун Дирихле масаласи

Бу параграфда ҳам $E(u)=0$ тенгламани $y>0$ ярим текисликнинг учлари $A(-a,0)$, $B(a,0)$ $(a>0)$ нуқталарда ётувчи σ Ляпунов чизиғи ва $AB=\{(x,y): y=0, -a<x<a\}$ кесма билан чегараланган D соҳада қараймиз.

Дирихле масаласи. $E(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва

$$u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(s),\quad 0\le s\le l;\qquad u(x,0)=\tau(x),\quad -a\le x\le a \quad (72)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(s)\in C[0,l]$, $\tau(x)\in C[-a,a]$ – берилган функциялар бўлиб, $\varphi(0)=\tau(a)$, $\varphi(l)=\tau(-a)$.

Бу масаланинг Грин функцияси деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_2(\xi,\eta;x,y)$ функцияга айтилади:

1) бу функция ξ,η ўзгарувчилар бўйича D соҳанинг (x,y) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида $E(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечимидан иборат;

2) (ξ,η) нуқта D соҳанинг чегарасида ётганда бу ункция нолга тенг, яъни

$$G_2(\xi,\eta;x,y)\Big|_{(\xi,\eta)\in\overline{\sigma}\cup\overline{AB}}=0, \qquad (x,y)\in D;$$

3) ушбу $G_2(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)+g_2(\xi,\eta;x,y)$ кўринишга эга, бу ерда $q_2(\xi,\eta;x,y)-E(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими (7 – § а қаранг), $g_2(\xi,\eta;x,y)$ эса $E(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр ечими.

Грин функциясининг таърифидан ва $q_2(\xi,\eta;x,y)$ фундаментал ечимнинг хоссаларидан келиб чиқадики, уни қуриш $E(u)=0$ тенгламанинг

$$g_2(\xi,\eta;x,y)=-q_2(\xi,\eta;x,y),\ \ (\xi,\eta)\in\overline{\sigma}\cup\overline{AB}, \quad (x,y)\in D$$

шартни қаноатлантирувчи регуляр ечимини топишга тенг кучлидир.

$E(u)=0$ тенгламанинг (72) шартларни қаноатлантирувчи регуляр $u(\xi,\eta)$ ечими ва $G_2(\xi,\eta;x,y)$ функция учун (66) формулани қўллаб, Дирихле масаласи ечими учун ўринли бўлган

$$u(x,y)=\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;x,y)\,d\xi-\int_{\sigma}\varphi(s)A_s[G_2]\,ds \tag{73}$$

формулага эга бўламиз.

Хусусий ҳолда, $\sigma=\sigma_0:x^2+[4/(m+2)]^2y^{m+2}=1$ бўлганда Грин функцияси ва ҳосилалари

$$G_2(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)-\left(R^2\right)^{-\beta}q_2(\xi,\eta;\overline{x},\overline{y}), \tag{74_1}$$

$$\frac{\partial G_2(\xi,0;x,y)}{\partial\eta}=k_2y\left\{\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}-\right.$$

$$\left.-\left[(1-x\xi)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\xi^2y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\}, \tag{74_2}$$

$$A_s[G_2(\xi,\eta;x,y)]\big|_{\sigma_0}=k_2(1-\beta)(m+2)y\left(1-R^2\right)\left(r_1^2\right)^{\beta-2}\times$$

$$\times F\left(1-\beta,2-\beta,2-2\beta;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)\frac{d\xi}{ds} \tag{74_3}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда R^2, x, y – аввалги параграфдаги белгилар, k_2 эса (49) тенглик билан аниқланувчи катталик.

$\sigma \neq \sigma_0$ бўлганда $G_2(\xi,\eta;x,y)$ Грин функциясининг мавжудлиги ва (73) формула билан аниқланувчи $u(x,y)$ функция ҳақиқатан ҳам Дирихле масаласи шартлари бажаришини V бобнинг 8 – параграфида исботланади.

Изоҳ. $-1 < m < 0$ бўлганда, яъни $E(u) = 0$ тенглама иккинчи турга тегишли бўлганда ҳам Хольмгрен ва Дирихле масалаларининг ечимлари мос равишда (71) ва (73) формулалар билан берилади [14,34].

10 – §. $E(u) = 0$ тенглама учун ярим текисликда Дирихле ва Нейман масалалари

$E(u) = 0$ тенгламани $y > 0$ ярим текисликда қарайлик. Қуйидаги $D = \{(x,y):\ y > 0, -\infty < x < +\infty\}$, $S = \{(x,y) : y = 0, -\infty < x < +\infty\}$ белгилашларни киритайлик.

Дирихле масаласи. $E(u) = 0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $D \cup S$ да узлуксиз ва чегараланган ҳамда

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad -\infty < x < +\infty \tag{75}$$

шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$ – берилган функция.

1 – теорема. Агар $\tau(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз ва чегараланган бўлса,

$$u(x,y) = k_2 y \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\xi) \left[(x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} d\xi \tag{76}$$

функция Дирихле масаласи ечимини аниқлайди, бу ерда k_2 – (49) да берилган сон, $\beta = m/(2m+4)$.

Исбот: (76) интегралнинг абсолют ва текис яқинлашишини кўрсатиш қийинчилик туғдирмайди. Агар

$$k_2 y \left[(x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} = \frac{\partial}{\partial \eta} q_2(\xi,0;x,y)$$

тенгликни ва $q_2(\xi,\eta:x,y)$ функция $E(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими эканлигини инобатга олсак, (76) функциянинг $E(u)=0$ тенгламани қаноатлантириши дарҳол келиб чиқади.

(76) функциянинг $D\cup S$ да чегараланганлигини ва $y\to 0$ да (75) чегаравий шартни қаноатлантиришини кўрсатайлик.

$\xi = x+[2/(m+2)]y^{(m+2)/2}t$ алмаштириш бажарсак, (76)

$$u(x,y)=k_3\int_{-\infty}^{+\infty}\tau\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}t\right)\left(1+t^2\right)^{\beta-1}dt$$

кўринишга келади, бу ерда $k_3=k_2[2/(m+2)]^{2\beta-1}$.

Агар $\max|\tau(x)|=M$ белгилаш киритсак ва

$$k_3\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+t^2\right)^{\beta-1}dt=1 \tag{77}$$

тенгликни инобатга олсак, охирги тенгликдан $D\cup S$ да $|u(x,y)|\le M$ эканлиги осонгина келиб чиқади.

(77) га асосан, $D\cup S$ да

$$u(x,y)-\tau(x)=k_3\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\tau\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}t\right)-\tau(x)\right]\left(1+t^2\right)^{\beta-1}dt \tag{78}$$

тенглик ўринли.

$\tau(x)$ функция $-\infty<x<+\infty$ да чегараланганлиги учун

$$\left|\tau\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}t\right)-\tau(x)\right|\le 2M$$

тенгсизлик ихтиёрий $x,t\in(-\infty,+\infty)$ ва $y\in[0,+\infty)$ учун бажарилади.

(77) интеграл яқинлашувчи бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon(>0)$ сон олинганда ҳам шундай $R(>0)$ сон топиладики,

$$\int_{-\infty}^{-R}\left(1+t^2\right)^{\beta-1}dt<\frac{\varepsilon}{6Mk_3},\qquad \int_{R}^{+\infty}\left(1+t^2\right)^{\beta-1}dt<\frac{\varepsilon}{6Mk_3}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

У ҳолда, (78) дан $D \cup S$ соҳанинг ихтиёрий нуқтасида

$$\left| u(x,y) - \tau(x) \right| <$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + k_3 \int_{-R}^{R} \left| \tau\left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} t \right) - \tau(x) \right| \left(1+t^2\right)^{\beta-1} dt \qquad (79)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$\tau(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли, етарли кичик y ва ихтиёрий $t \in [-R;R]$ учун

$$\left| \tau\left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} t \right) - \tau(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик бажарилади. Буни эътиборга олиб, (79) дан

$$\left| u(x,y) - \tau(x) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \cdot k_3 \int_{-R}^{R} \left(1+t^2\right)^{\beta-1} dt < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ерда $\varepsilon(>0)$ ихтиёрий кичик сон эканлигини инобатга олсак,

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

яъни (75) тенгликнинг бажарилиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Нейман масаласи. $E(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $C^1(D \cup S)$ синфга тегишли ва

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \nu(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad (80)$$

$$\lim_{y\to +\infty} u(x,y) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (81)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\nu(x)$ — берилган функция.

2−теорема. Агар $\nu(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да узлуксиз бўлиб, етарли катта x лар учун

$$\left| \nu(x) \right| \le M \left| x \right|^{2\beta-1-\varepsilon} \qquad (82)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, Нейман масаласининг ечими

$$u(x,y)=k_1\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi)\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}d\xi \qquad (83)$$

формула билан аниқланади, бу ерда $\varepsilon(>0)$ – етарли кичик сон, k_1 – (49) да берилган сон, $M=const>0$.

Исбот. (83) интегралнинг абсолют ва текис яқинлашиши аниқ. $E(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими $q_1(\xi,\eta;x,y)$ функция учун

$$q_1(\xi,0;x,y)=k_1\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)}y^{m+2}\right]^{-\beta}$$

тенглик ўринли эканлигини инобатга олсак, (83) тенглик билан аниқланувчи $u(x,y)$ функциянинг $E(u)=0$ тенгламани қаноатлантириши дарҳол келиб чиқади. Бу функция учун (80) шартнинг бажарилиши 1–теоремадаги каби исботланади.

(81) шарт бажарилишини кўрсатиш мақсадида (83) тенгликда $R^2=x^2+\left[2/(m+2)\right]^2y^{m+2}$ белгилаш киритиб, $\xi=Rt$ алмаштириш бажарайлик:

$$u(x,y)=k_1R^{1-2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}v(Rt)\left[1-2\frac{x}{R}t+t^2\right]^{-\beta}dt.$$

Бу ердан, (82) тенгсизликка асосан,

$$|u(x,y)|\le k_1R^{-\varepsilon}M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|^{2\beta-1-\varepsilon}}{\left(1-2\frac{x}{R}t+t^2\right)^{\beta}}dt$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ердаги интегрални $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ ораликлар бўйича интегралларга ажратиб ва интеграллар остидаги каср махражининг энг кичик қийматини олиб,

$$|u(x,y)|=2MR^{-\varepsilon}\int_0^{\infty}t^{2\beta-1-\varepsilon}|1-t|^{-2\beta}dt$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан эса (81) шартнинг тасдиғи келиб чиқади. Теорема исботланди.

Изоҳ. (76) ва (83) формулалар $-1<m<0$ бўлганда, яъни $E(u)=0$ тенглама иккинчи турга тегишли бўлганда ҳам мос равишда Дирихле ва Нейман масаласининг ечимини ифодалайди.

11–§. Иккинчи тур тенглама учун умумлашган Хольмгрен масаласи

1. Масаланинг қўйилиши ва ечимнинг ягоналиги. Юқори ярим текисликда ётувчи ва учлари $A(-1,0)$, $B(1,0)$ нуқталардан иборат бўлган σ силлиқ чизиқ ҳамда $y=0$ тўғри чизиқнинг AB кесмаси билан чегараланган D соҳада

$$M_\alpha(u)\equiv u_{xx}+y^m u_{yy}+\alpha y^{m-1}u_y=0 \qquad (m>0) \tag{84}$$

тенгламани қарайлик.

Бу соҳада (84) – эллиптик типдаги иккинчи тур бузиладиган тенглама бўлиб, $y=0$ – параболик бузилиш чизиғидир.

Бу параграфда $1<m<2$, $m-1<\alpha<1$ деб ҳисоблаймиз ва $\alpha\neq m/2$, $\alpha=m/2$ ҳолларни алоҳида қараймиз.

Умумлашган Хольмгрен масаласи (N_α **масала).** (84) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\bar{D}$ да узлуксиз ва $y^\alpha u_y(x,y)\in C(D\cup AB)$ ҳамда

$$u(x,y)\big|_{\bar\sigma}=\varphi(x), \qquad -1\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to 0} y^\alpha u_y(x,y)=\nu(x), \quad -1<x<1 \tag{85}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$, $\nu(x)$ – берилган узлуксиз функциялар.

Теорема. Агар N_α масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

Исбот. $u(x,y)-N_\alpha$ масаланинг $\varphi(x)\equiv 0$, $\nu(x)\equiv 0$ бўлгандаги ечими, $w(x,y)$ эса

$$w(x,y)=\frac{1}{\alpha-1}y^{1-\alpha}-(x-a)^n+c$$

тенглик билан аниқланувчи функция бўлсин, бу ерда $2<n\in R$, a ва c лар эса $\overline{D}$ да мос равишда $x-a>1$ ва $w(x,y)\geq 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Кўрсатиш қийин эмаски,

1) $0\leq w(x,y)\in C(\overline{D})$;

2) D соҳада $M_\alpha(w)<0$;

3) $\lim\limits_{y\to 0} y^\alpha w_y=-1$.

Ихтиёрий кичик $\varepsilon(>0)$ сон олайлик ва

$$\omega(x,y)=\varepsilon\, w(x,y)\pm u(x,y)$$

функцияни тузайлик. $w(x,y)$ ва $u(x,y)$ функцияларнинг хоссаларига асосан D соҳада $M_\alpha(\omega)<0$ тенгсизлик ўринли. Шунинг учун экстремум принципига асосан $\omega(x,y)$ функция D соҳада минимумга эришмайди.

Фараз қилайлик, $\omega(x,y)$ функция $(x_0,0)\in AB$ нуқтада минимумга эришган бўлсин. Бу нуқтадан D соҳада ётувчи шундай Γ ёпиқ чизиқ ўтказайликки, у чегаралаган Δ соҳа D соҳада тўла ётсин ва $\omega(x,y)|_\Gamma-\omega(x_0,0)\geq 0$ тенгсизлик бажарилсин. $M_\alpha[\omega(x,y)-\omega(x_0,0)]<0$ бўлгани учун Хопф принципига асосан $\omega(x,y)-\omega(x_0,0)$ функция Δ соҳада минимумга эга бўлмайди ва $\overline{\Delta}$ да манфий эмас. Шунинг учун $(x,y)\to(x_0,0)$ да

$$\lim[\omega(x,y)-\omega(x_0,0)]'_y=\lim\omega_y(x,y)\geq 0.$$

Бундан $\lim\limits_{y\to 0} y^\alpha\omega_y(x_0,y)=0$ келиб чиқади. $w(x,y)$ функциянинг 3 – хоссасига асосан эса бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, фаразимиз нотўғри, яъни $\omega(x,y)$ функция AB кесмада минимумга эришмайди. У ҳолда, бу функция минимумга $\overline{\sigma}$ да эришади. $w(x,y)|_\sigma\geq 0$ бўлганлиги учун $\overline{D}$ да $\omega(x,y)\geq 0$, яъни $|u(x,y)|\le \varepsilon w$ тенгсизлик ўринли. Бу ердан ε ни ихтиёрий кичик мусбат сон эканлигини эътиборга олсак, D да $u(x,y)\equiv 0$ айниятнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2. $\alpha\ne m/2$ **да масаланинг Грин функцияси.** (84) тенгламага қўшма тенглама

$$M_\alpha^*(\upsilon)\equiv\upsilon_{xx}+y^m\upsilon_{yy}+(2m-\alpha)y^{m-1}\upsilon_y+$$
$$+\left[(m-\alpha)(m-1)\right]y^{m-2}\upsilon=0$$

кўринишга эга.

N_α масаланинг Грин функцияси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G(\xi,\eta;x,y)$ функцияга айтилади:

1) ξ,η ўзгарувчилар бўйича $M_\alpha^*(\upsilon)=0$ тенгламани, x,y ўзгарувчилар бўйича эса $M_\alpha(u)=0$ тенгламани $(\xi,\eta)\ne(x,y)$ нуқталарда қаноатлантиради;

2) D соҳанинг ихтиёрий (x,y) нуқтаси учун ушбу тенгликлар бажарилади:

$$G(\xi,\eta;\ x,y)=0,\qquad (\xi,\eta)\in\sigma;$$

$$\lim_{\eta\to 0}[\eta^m\ G_\eta(\xi,\eta;\ x,y)+(m-\alpha)\eta^{m-1}\ G(\xi,\eta;\ x,y)]=0;$$

3) $G(\xi,\eta;x,y)=q(\xi,\eta;x,y)+g(\xi,\eta;x,y)$ кўринишга эга, бу ерда $g(\xi,\eta;x,y)$ — (84) тенгламанинг регуляр ечими;

$$q(\xi,\eta;\ x,y)=k\ \eta^{\alpha-m}r_1^{-2\beta}\ F\left(\beta,\beta,2\beta;\ \frac{16\,(\eta y)^{(2-m)/2}}{(2-m)^2\,r_1^2}\right)$$

эса (84) тенгламанинг фундаментал ечими (7 – § га қаранг);

$$r_1^2=(\xi-x)^2+\frac{4}{(2-m)^2}\left(\eta^{\frac{2-m}{2}}+y^{\frac{2-m}{2}}\right)^2,$$

$$\beta=\frac{2\alpha-m}{2(2-m)},\quad k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Бевосита ҳисоблаб ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $q(\xi,\eta;x,y)$ функция учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\left\{\left[\eta^m \frac{\partial}{\partial\eta}q+(m-\alpha)\eta^{m-1}q\right]d\xi-\frac{\partial}{\partial\xi}q\,d\eta\right\}=1 \qquad (86)$$

тенглик бажарилади, бу ерда $S_\varepsilon-$ маркази $y>0$ ярим текисликнинг ихтиёрий (x,y) нуқтасида бўлган етарли кичик $\varepsilon(>0)$ радиусли айлана.

Хусусий ҳолда, σ чизиқ $\sigma_0: x^2+[2/(2-m)]^2y^{2-m}=1$ нормал контур билан устма-уст тушганда D — нормал соҳа бўлиб, юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи Грин функцияси

$$G_0(\xi,\eta;\ x,y)=q(\xi,\eta;\ x,y)-R^{-2\beta}\ q(\xi,\eta;\ \bar{x},\bar{y})$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда

$$R^2=x^2+\frac{4}{(2-m)^2}\,y^{2-m},\quad \bar{x}=\frac{x}{R^2},\quad (\bar{y})^{(2-m)/2}=\frac{y^{(2-m)/2}}{R^2}.$$

3. $\alpha\neq m/2$ да масаланинг ечилиши. Бу бандда $\sigma\equiv\sigma_0$ бўлган ҳол учун N_α масала ечимини аниқловчи формулани келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик, $u(\xi,\eta)-N_\alpha$ масаланинг ечими, $G_0(\xi,\eta;x,y)$ эса Грин функцияси бўлсин. $\sigma_\rho: x^2+[2/(2-m)]^2y^{2-m}=(1-\rho)^2$ ва $y=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган соҳани $D^\rho\ (\subset D)$ билан белгилайлик, бу ерда $\rho-$етарли кичик мусбат сон. D^ρ соҳанинг ихтиёрий (x,y) нуқтасини олиб, $\delta(>0)$ сонни шундай танлайликки, $(x,y)\in D^\rho_\delta=D^\rho\cap(y\geq\delta)$ бўлсин. (x,y) нуқтани марказ қилиб, D^ρ_δ соҳада тўла ётувчи $\Gamma_\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ доира ўтказайлик ва $D_{\varepsilon\delta}=D_\delta/\Gamma_\varepsilon$ белгилаш киритайлик. $D^\rho_{\varepsilon\delta}$ соҳада

$$G_0M_\alpha(u)-u\,M^*_\alpha(G_0)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G_0u_\xi-uG_{0\xi}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta^m\left(G_0u_\eta-uG_{0\eta}\right)-(m-\alpha)\ \eta^{m-1}uG_0\right]\equiv 0 \qquad (87)$$

айният ўринли.

(87) айниятни $D^{\rho}_{\varepsilon\delta}$ соҳа бўйича интеграллаб ва Гаусс – Остроградский формуласини қўллаб,

$$\int\limits_{\gamma} u \left\{ [\eta^m G_{0\eta} + (m-\alpha)\, \eta^{m-1} G_0]\, d\xi - G_{0\xi} d\eta \right\} -$$

$$-\int\limits_{\gamma} G_0 \left(\eta^m u_\eta \, d\xi - u_\xi \, d\eta \right) = 0 \tag{88}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $\gamma = \gamma_1 \cup S_\varepsilon$, $\gamma_1 - D^{\rho}_{\varepsilon\delta}$ соҳанинг ташқи контури, S_ε эса Γ_ε доирани чегараловчи айлана. Бу тенгликда, (85), (86) тенгликларни ва $G_0(\xi, \eta; x, y)$ функциянинг хоссаларини инобатга олиб, $\varepsilon \to 0$, $\rho \to 0$ ва $\delta \to 0$ да лимитга ўтсак, N_α масаланинг $u(x,y)$ ечими учун уринли бўлган

$$u(x,y) = -\int\limits_{-1}^{1} v(\xi) \left[\eta^{m-\alpha} G_0 \ (\xi,\eta;\ x,y) \right] \Big|_{\eta=0} d\,\xi -$$

$$-\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, A\left[G_0 \ (\xi,\eta;\ x,y) \right] \Big|_{\sigma_0} d\xi \tag{89}$$

формула келиб чиқади, бу ерда

$$A[G_0] = \eta^m G_{0\eta} - G_{0\xi} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + (m-\alpha)\eta^{m-1} G_0 . \tag{90}$$

Бевосита ҳисоблаб топиш мумкинки,

$$\eta^{m-\alpha} \ G_0 \left(\xi,\eta;\ x,y \right)\Big|_{\eta=0} = k \cdot \left\{ \left[(\xi - x)^2 + \frac{4}{(2-m)^2}\, y^{2-m} \right]^{-\beta} - \right.$$

$$\left. -R^{-2\beta} \left[\left(\xi - \frac{x}{R^2} \right)^2 + \frac{4}{(2-m)^2}\, \frac{y^{2-m}}{R^4} \right]^{-\beta} \right\}, \tag{91}$$

$$A\left[G_0 \ (\xi,\eta;x,y) \right]\Big|_{\sigma_0} =$$

$$= (m-2)\beta k \eta^{\alpha-1} \left(1 - R^2 \right) \left(r_1^2 \right)^{-\beta-1} \ F\left(\beta, \beta+1,\ 2\beta;\ \frac{16(\eta y)^{\frac{2-m}{2}}}{(2-m)^2\, r_1^2} \right). \tag{92}$$

Грин функцияси таърифига асосан (89) формула билан аниқланувчи $u(x,y)$ функция (84) тенгламани қаноатлантиради. Уни (85) шартларни ҳам қаноатлатиришини кўрсатайлик. Бунинг учун (89) даги биринчи интегрални $I_1(x,y)$, иккинчисини $I_2(x,y)$ билан белгилайлик ва дастлаб

$$\lim_{y\to 0} y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}I_1(x,y)=\nu(x),\ -1<x<1 \tag{93}$$

тенгликни исботлайлик.

$$y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}I_1(x,y)=$$

$$=-\frac{4k\beta}{2-m}y^{\alpha+1-m}\int_{-1}^{1}\nu(\xi)\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}\right]^{-\beta-1}d\xi+$$

$$+\frac{8k\beta}{2-m}y^{\alpha+1-m}\int_{-1}^{1}\xi^2\nu(\xi)\left[\left(\xi R-\frac{x}{R}\right)^2+\frac{4}{(2-m)^2}\frac{y^{2-m}}{R^2}\right]^{-\beta-1}d\xi$$

тенглик ўринли.

Биринчи интегралда $\xi=x+\frac{2}{2-m}y^{(2-m)/2}t$ алмаштириш бажарсак,

$$y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}I_1(x,y)=$$

$$=4^{-\beta}2\beta k(2-m)^{2\beta}\int_{A_1}^{B_1}\nu\left(x+\frac{2}{2-m}y^{(2-m)/2}t\right)\left(1+t^2\right)^{-\beta-1}dt+$$

$$+\frac{8k\beta}{2-m}y^{\alpha+1-m}\int_{-1}^{1}\xi^2\nu(\xi)\left[\left(\xi R-\frac{x}{R}\right)^2+\frac{4}{(2-m)^2}\frac{y^{2-m}}{R^2}\right]^{-\beta-1}d\xi$$

келиб чиқади, бу ерда

$$A_1=-\frac{(1+x)(2-m)}{2y^{(2-m)/2}},\qquad B_1=\frac{(1-x)(2-m)}{2y^{(2-m)/2}}.$$

Охирги тенгликда $y\to 0$ $(x\neq\pm 1)$ да лимитга ўтиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+t^2\right)^{-\beta-1}dt=\frac{\pi\Gamma(2\beta)}{2^{2\beta-1}\beta\Gamma^2(\beta)}$$

тенгликни эътиборга олсак, (93) келиб чиқади.

(92) дан фойдаланиб

$$\lim_{y\to 0}y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}I_2(x,y)=0,\quad -1<x<1$$

эканини кўрсатиш қийин эмас. Демак, (89) функция (85) шартнинг иккинчисини қаноатлантиради.

(89) функциянинг (85) шартларнинг биринчисини қаноатлантиришини кўрсатиш махсус тадқиқ талаб қилади. Бундай масала билан навбатдаги бобда шуғулланамиз.

Демак, (89) формула билан аниқланувчи функция $\alpha\neq m/2$ да N_{α} масаланинг ечимидан иборат.

4. $\alpha=m/2$ **бўлган ҳол.** Бунда $x=x,\quad z=\frac{2}{2-m}y^{(2-m)/2}$ алмаштириш бажарсак, σ чизиқ xOz текисликдаги σ_1 чизиққа, D соҳа D_1 соҳага, (84) тенглама $u_{xx}+u_{zz}=0$ Лаплас тенгламасига, (85) чегаравий шартлар эса $u|_{\sigma_1}=\varphi_1(x)$, $u_z|_{z=0}=\nu(x)$ шартларга алмашади. Маълумки, бу масала ягона ечимга эга [3].

1 – изоҳ. Агар $x=x,\quad t=(2-m)^{-2}y^{2-m}$ алмаштириш бажарсак, (84) тенглама

$$u_{xx}+tu_{tt}+\alpha_1 u_t=0 \tag{84'}$$

кўринишга келади.

2 – изоҳ. (84') тенглама учун И.А.Кароль томонидан $\alpha_1>0$ бўлганда D соҳа чегарасининг фақатгина σ қисмида чегаравий шарт берилган масала ўрганилган [16].

3 – изоҳ. α_1 параметрнинг бирдан кичик бўлган қийматларида (84') тенглама учун эллиптик ва аралаш соҳаларда турли масалалар [10, 15, 27, 28] мақолаларда ўрганилган.

12 – §. Типи ва тартиби бузиладиган тенглама учун чегаравий масалалар

Бу параграфда $y>0$ ярим текисликда ётувчи ва учлари $A(-1,0)$, $B(1,0)$ нуқталардан иборат бўлган σ силлиқ чизиқ ва $AB=\{(x,y): y=0,\ -1<x<1\}$ кесма билан чегараланган D соҳада

$$E_\alpha(u)\equiv y^{m+1}u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0 \qquad (m>0) \tag{94}$$

тенглама учун $-(m/2)<\alpha<1$ бўлганда қўйиладиган чегаравий масалалар ва уларга мос Грин функциялари билан танишиб чиқамиз.

$y=0$ тўғри чизиқ бу тенглама учун параболик бузилиш чизиғи бўлиб, унда тенгламанинг тартиби ҳам бузилади.

1. Тенглама ечимларининг хоссалари.

1^0. Агар u функция $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечими бўлса, $\upsilon=y^{\alpha-1}u$ функция $E_{2-\alpha}(\upsilon)=0$ тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, u функциянинг ҳосилалари учун

$$u_{xx}=y^{1-\alpha}\upsilon_{xx}, \quad u_y=(1-\alpha)y^{-\alpha}\upsilon+y^{1-\alpha}\upsilon_y,$$

$$u_{yy}=-\alpha(1-\alpha)y^{-1-\alpha}\upsilon+2(1-\alpha)y^{-\alpha}\upsilon_y+y^{1-\alpha}\upsilon_{yy}$$

тенгликлар ўринли. Буларни (94) га қўйсак,

$$E_\alpha(u)=y^{1-\alpha}E_{2-\alpha}(u)=0$$

тенглик келиб чиқади.

2^0. Агар E_α операторга қўшма оператор E_α^* бўлса, у ҳолда $E_\alpha^*(\upsilon)\equiv E_{2-\alpha}(\upsilon)$ тенглик ўринли.

Таърифга асосан,

$$E_\alpha^*(\upsilon)=\left(y^{m+1}\upsilon\right)_{xx}+(y\upsilon)_{yy}-(\alpha\upsilon)_y.$$

Бу ерда $\left(y^{m+1}\upsilon\right)_{xx}=y^{m+1}\upsilon_{xx}$, $(\alpha\upsilon)_y=\alpha\upsilon_y$, $(y\upsilon)_{yy}=2\upsilon_y+y\upsilon_{yy}$ тенгликларни инобатга олсак,

$$E_\alpha^*(\upsilon)=y^{m+1}\upsilon_{xx}+y\upsilon_{yy}+(2-\alpha)\upsilon_y, \tag{95}$$

яъни $E_\alpha^*(\upsilon)=E_{2-\alpha}(\upsilon)$ тенглик келиб чиқади.

3^0. Агар υ функция $E^*_\alpha(\upsilon)=0$ тенгламанинг регуляр ечими бўлса, $u=y^{1-\alpha}\upsilon$ функция $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

Бу хоссанинг исботи 1^0 ва 2^0 хоссалардан дарҳол келиб чиқади.

4^0. Агар D соҳада u функция $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг, υ функция эса $E^*_\alpha(\upsilon)=0$ тенгламанинг регуляр ечими бўлса, D соҳада ётувчи ихтиёрий бўлакли силлиқ ёпиқ γ контур учун

$$\int_\gamma \left\{ y^{1-\alpha}\upsilon\left(y^\alpha A_s[u]\right)-y^\alpha u\, A_s[y^{1-\alpha}\upsilon] \right\}ds=0 \tag{96}$$

тенглик бажарилади, бу ерда $A_s[\ ]=y^m\dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Исбот. (94) ва (95) тенгликларга асосан D соҳада

$$\upsilon E_\alpha(u)-uE^*_\alpha(\upsilon)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{m+1}\upsilon u_x-y^{m+1}u\upsilon_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\upsilon u_y-yu\upsilon_y+(\alpha-1)\,u\upsilon\right)$$

тенглик ўринли.

Бу тенгликнинг иккала томонини γ контур билан чегараланган соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс — Остроградский формуласини қўлласак,

$$\int_\gamma \left[y\,u\,\upsilon_y-y\upsilon u_y+(1-\alpha)\,u\upsilon\right]dx+\left(y^{m+1}\upsilon u_x-y^{m+1}u\,\upsilon_x\right)dy=0$$

тенгликка эга бўламиз. u ва υ функциялар иштирок этган ҳадларни ажратиб, охирги тенгликдан

$$\int_\gamma \left\{\upsilon\,(y^{m+1}u_x dy-yu_y dx)-u[y^{m+1}\upsilon_x dy-y\upsilon_y dx-(1-\alpha)\upsilon\,dx]\right\}=0$$

тенгликка келамиз. Бу ерда биринчи қавсдан y ни, иккинчисидан y^α ни чиқарсак ва $A_s[\ ]$ белгидан фойдалансак, (96) тенгликнинг тўғри эканлиги келиб чиқади.

5^0. Агар u ва w функциялар (94) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечимлари бўлса, у ҳолда

$$\int_\gamma y^\alpha\{wA_s[u]-uA_s[w]\}ds=0 \tag{97}$$

тенглик ўринли.

(96) тенгликда $w = y^{1-\alpha}\upsilon$ белгилаш киритиб, 3^0 хоссани инобатга олсак, дарҳол (97) тенглик келиб чиқади.

6^0. Фараз қилайлик, $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ функция $E_\alpha(u) = 0$ тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими, $w(x,y;x_0,y_0)$ эса шу тенгламанинг фундаментал ечими бўлсин. У ҳолда, D соҳанинг ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтасида

$$k\,u(x_0,y_0) = \int_\sigma y^\alpha \left\{ wA_s[u] - uA_s[w] \right\} ds +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \left[u(x,0)\left(y^\alpha w_y\right)\Big|_{y=0} - w(x,0;x_0,y_0)\left(y^\alpha u_y\right)\Big|_{y=0} \right] dx \tag{98}$$

тенглик ўринли, бу ерда $k = -\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{\gamma_1} y^\alpha A_s[w]\,ds$, γ_1 – маркази M_0 нуқтада ва радиуси $\rho\,(>0)$ га тенг айлана.

Исбот. D соҳанинг ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтасини олайлик ва $\rho(>0)$ сонни шундай танлайликки $\Gamma(M_0,\rho)$ доира D соҳада тўла ётсин. $D_\rho = D / \Gamma(M_0,\rho)$ соҳада u, $w \in C^1(\overline{D}_\rho) \cap C^2(D_\rho)$ ва бу функциялар (94) тенгламанинг регуляр ечимларидир. У ҳолда, 5^0 хоссага асосан,

$$\int_{\sigma\cup\overline{AB}} y^\alpha \left\{ wA_s[u] - uA_s[w] \right\} ds -$$
$$- \int_{\gamma_1} y^\alpha wA_s[u]\,ds + \int_{\gamma_1} y^\alpha uA_s[w]\,ds = 0. \tag{99}$$

M_0 нуқта атрофида w фундаментал ечим логарифмик махсусликка эга эканлиги ва u функция эса $\overline{D}$ соҳада узлуксиз ҳосилаларга эга бўлганлиги учун (99) тенгликдаги иккинчи интеграл $\rho \to 0$ да нолга интилади. Бу ердаги охирги интегралда қутб координаталарга ўтиб, сўнгра $\rho \to 0$ да лимитга ўтсак, уни $(-k)u(x_0,y_0)$ га тенглиги келиб чиқади.

Юқоридаги мулоҳазаларни инобатга олиб ва $\sigma \cup \overline{AB}$ бўйича интегрални $\overline{\sigma}$ ва $\overline{AB}$ бўйича алоҳида-алоҳида ҳисоблаб, (99) тенгликда $\rho \to 0$ да лимитга ўтсак, (98) тенглик келиб чиқади.

7^0. Фараз қилайлик, $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими $u(x,y)\in C(\overline{D})$ функция $(x_0,0)\in AB$ нуқтада энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматга эришсин. Агар σ чизиқда $u(x,y)$ функциянинг қиймати $u(x_0,0)$ дан кичик (катта) бўлиб, $l=\lim\limits_{y\to 0} y^\alpha u_y(x_0,y)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $l<0$ $(l>0)$ бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, $u(x,y)$ – (94) тенгламанинг D соҳада регуляр ечими бўлиб, у $(x_0,0)\in AB$ нуқтада энг катта мусбат қийматга эришсин. Бу нуқтада $l>0$ бўлмаслиги аниқ. Шунинг учун $l=0$ деб фараз қилайлик.

d билан D соҳа диаметрини белгилайлик ва умумийликни чегараламай $u(x_0,0)=1$ деб олайлик. У ҳолда, $\max\limits_{\sigma} u \le 1-\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $0<\varepsilon<1$. $d_1(>d)$ сон олайлик ва D соҳада

$$\upsilon(x,y)=\varepsilon u(x,y)\left[e^{d_1^{1-\alpha}}-\varepsilon e^{y^{1-\alpha}}\right]^{-1}$$

функцияни қарайлик.

Кўрсатиш қийин эмаски, бу функция ихтиёрий $(x,y)\in D\setminus(x_0,0)$ нуқтада

$$\upsilon(x,y)<\upsilon(x_0,0)=\varepsilon\cdot\left[e^{d_1^{1-\alpha}}-\varepsilon\right]^{-1} \tag{100}$$

тенгсизликни ва D соҳада эса

$$y^{m+1}\upsilon_{xx}+y\upsilon_{yy}+\left\{\alpha-2(1-\alpha)\varepsilon y^{1-\alpha}e^{y^{1-\alpha}}[e^{d_1^{1-\alpha}}-\varepsilon e^{y^{1-\alpha}}]^{-1}\right\}\upsilon_y-$$

$$-\varepsilon(1-\alpha)^2 y^{1-2\alpha}e^{y^{1-\alpha}}[e^{d_1^{1-\alpha}}-\varepsilon e^{y^{1-\alpha}}]^{-1}\upsilon=0 \tag{101}$$

тенгламани қаноатлантиради.

(101) тенглама озод ҳадининг коэффициенти учун D сохада

$$a_{33} = -\varepsilon(1-\alpha)^2 y^{1-2\alpha} e^{y^{1-\alpha}} [e^{d_1^{1-\alpha}} - \varepsilon e^{y^{1-\alpha}}]^{-1} < 0 \qquad (102)$$

тенгсизлик бажарилади.

Иккинчи томондан, фаразимизга асосан,

$$\lim_{y\to 0} y^{\alpha} \upsilon_y(x_0, y) = \frac{\varepsilon l}{e^{d_1^{1-\alpha}} - \varepsilon} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)u(x_0,0)}{\left(e^{d_1^{1-\alpha}} - \varepsilon\right)^2} = \frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{\left(e^{d_1^{1-\alpha}} - \varepsilon\right)^2} > 0$$

Охирги тенгсизликдан кўринадики, $\upsilon_y(x_0, y)$ функция ихтиёрий етарли кичик $(0, y_0)$ интервалда мусбат. Бундан, $\upsilon(x_0, y)$ функция D соҳанинг ички нуқтасида максимумга эришади, деган хулоса келиб чиқади. Бу эса, (100) – (102) га асосан, экстремум принципига зиддир. Демак, фаразимиз нотўғри. У ҳолда

$$l = \lim_{y\to 0} y^{\alpha} u_y(x_0, y) < 0 \cdot$$

Хоссанинг энг кичик манфий қийматга тегишли қисми ҳам шундай исботланади.

2. Асосий чегаравий масалалар ва уларнинг ечими.

(94) тенглама ечимларининг юқорида санаб ўтилган хоссалари ёрдамида бу тенглама учун қандай масалалар қўйиш мумкинлиги ва уларга мос Грин функциялари қандай таърифланиши ҳақидаги саволга жавоб бериш ва қўйилган масалалар ечимининг ягоналигини исботлаш мумкин. $E_{\alpha}(u) = 0$ тенгламанинг регуляр ва фундаментал ечимларининг биргаликдаги хоссасини ифодаловчи (98) тенгликдан келиб чиқадики, бу тенгламага қуйидаги уч масалани қўйиш мумкин.

Бунда σ чизиқни қуйидаги шартларни бажариши талаб этилади:

а) $x = x(s)$, $y = y(s)$ параметрик тенглама билан берилган, бу ерда $s \in [0, l]$, $l - \sigma$ чизиқ узунлиги;

б) $x(s)$, $y(s)$ функциялар бир вақтда нолга тенг бўлмаган $x'(s)$, $y'(s)$ ва Гёльдер шартини қаноатлантирувчи $x''(s)$, $y''(s)$ ҳосилаларга эга;

в) A ва B нуқталар атрофида $|x'(s)| \leq C y^{m+1}(s)$ тенгсизлик ўринли, бу ерда $C = const > 0$.

Бу шартларни $\sum_0$ шартлар деб атаймиз.

Дирихле масаласи. $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва

$$u|_{\bar{\sigma}} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l; \qquad u(x,0) = \tau(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \qquad (103)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда s – σ чизиқ ёйининг B нуқтадан бошлаб ҳисобланадиган узунлиги, $l-\sigma$ чизиқ узунлиги, $\varphi(s) \in C[0,l]$, $\tau(x) \in C[-1,1]$ – берилган функциялар, $\varphi(0) = \tau(1)$, $\varphi(l) = \tau(-1)$

Бу масала ечимининг ягоналиги Хопф принципидан дарҳол келиб чиқади.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_2(x,y;x_0,y_0)$ функция $E_\alpha(u)=0$ тенглама учун Дирихле масаласининг Грин функцияси дейилади:

1) x, y аргументлар бўйича D соҳанинг (x_0, y_0) нуктасидан бошқа барча нуқталарида $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечими;

2) қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантиради:

$$G_2(x,y;x_0,y_0)\big|_{(x,y)\in\sigma} = 0, \qquad G_2(x,0;x_0,y_0) = 0; \qquad (104)$$

3) $G_2(x,y;x_0.y_0) = q_2(x,y;x_0,y_0) + g_2(x,y;x_0,y_0)$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$q_2(x,y;x_0,y_0) = k_2 r_1^{-2\beta_2} \sigma_1^{1-2\beta_2} F(1-\beta_2, 1-\beta_2, 2-2\beta_2; \sigma_1)$$

– $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими, $g_2(x,y;x_0,y_0)$ – бу тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими, r_1, σ_1 эса (40_1) тенгликлар билан аниқланувчи ифодалар, $\beta_2 = (m+2\alpha)/(2m+4)$.

Таърифдан ва $q_2(x,y;x_0,y_0)$ функциянинг хоссасидан келиб чиқадики, $E_\alpha(u)=0$ тенглама учун Дирихле масаласининг Грин функциясини топиш бу тенгламанинг

$$g_2(x,y;x_0,y_0)=-q_2(x,y;x_0,y_0),\quad (x,y)\in\bar\sigma,\quad g_2(x,0;x_0,y_0)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи $g_2(x,y;x_0,y_0)$ регуляр ечимини топишдан иборат экан.

σ чизиқ $\sum_0$ шартларни қаноатлантирганда $E_\alpha(u)=0$ тенгламага мос потенциаллар ёрдамида $g_2(x,y;x_0,y_0)$ функциянинг, демак, $G_2(x,y;x_0,y_0)$ Грин функциясининг мавжудлигини ва (x,y), (x_0,y_0) аргументларга нисбатан симметриклигини кўрсатиш мумкин. Хусусий ҳолда, σ чизиқ

$$\sigma_0: x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=1$$

нормал контур билан устма-уст тушганда Грин функцияси аниқ кўринишга эга:

$$G_2(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)-R^{-2\beta}q_2(x,y;\bar x_0,\bar y_0),$$

бу ерда

$$R^2=x_0^2+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2},\quad \bar x_0=\frac{x_0}{R^2},\quad \bar y_0^{\frac{m+2}{2}}=\frac{1}{R^2}y_0^{\frac{m+2}{2}}. \quad (105)$$

D соҳанинг ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтасини олайлик. D соҳада ётувчи, σ чизиққа параллел ва ундан ε масофада жойлашган σ_ε чизиқ ҳамда $y=\delta$ (бу ерда ε ва δ – етарли кичик мусбат сонлар) тўғри чизиқ билан чегараланган соҳани $D_{\varepsilon\delta}$ билан белгилайлик. ε ва δ сонларни шундай танлайликки, $M_0(x_0,y_0)\in D_{\varepsilon\delta}$ бўлсин. $M_0(x_0,y_0)$ нуқтани марказ қилиб $D_{\varepsilon\sigma}$ соҳада тўла ётувчи ва радиуси $\rho\,(>0)$ га тенг бўлган $\Gamma(M_0,\rho)$ доира чизайлик ва $D_{\varepsilon\delta}\setminus\Gamma(M_0,\rho)$ соҳани $D_{\varepsilon\delta}^\rho$ билан белгилайлик.

Фараз қилайлик, $u(x,y)$ функция $E_\alpha(u)$ тенглама учун Дирихле масаласининг ечими, $G_2(x,y;x_0,y_0)$ эса унга мос

Грин функцияси бўлсин. $u(x,y)$ ва $G_2(x,y;x_0,y_0)$ функцияга $D_{\varepsilon\delta}^{\rho}$ соҳада (97) формулани қўллаб, 6^0 хоссадаги мулоҳазаларни юритгандан сўнг $\rho\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$k\, u(x_0,y_0)=\int\limits_{\sigma_\varepsilon} y^{\alpha}\left\{G_2\, A_s[u]-u\, A_s[G_2]\right\}ds+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[u(x,\delta)\left(y^{\alpha}G_{2y}\right)\Big|_{y=\delta}-G_2(x,\delta;x_0,y_0)\left(y^{\alpha}u_y\right)\Big|_{y=\delta}\right]dx \tag{106}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда x_1 ва x_2 лар $y=\delta$ ва σ_ε чизиқлар кесишиш нуқталарининг абсциссалари бўлиб, $x_1<x_2$, $k=-\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_1}A_s[G_2]\,ds$, $\gamma_1-\Gamma(M_0,\rho)$ доирани чегараловчи айлана.

Қутб координаталар системасига ўтиб, (71) формулани келтириб чиқаришдаги ҳисоблашларни бажариб, $\rho\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$k=-\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_1}A_s[G_2]\,ds=4\pi\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta_2-2}\frac{\Gamma(2-2\beta_2)}{\Gamma^2(1-\beta_2)}k_2$$

эканлиги келиб чиқади.

(106) тенгликда $\varepsilon\to 0$ ва $\delta\to 0$ да лимитга ўтиб, (103) ва (104) тенгликларни инобатга олсак ва

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta_2}\frac{\Gamma^2(1-\beta_2)}{\Gamma(2-2\beta_2)}$$

деб ҳисобласак, Дирихле масаласининг ечими учун ўринли бўлган

$$u(x_0,y_0)=\int\limits_{-1}^{1}\tau(x)\left(y^{\alpha}G_{2y}(x,y;x_0,y_0)\right)\Big|_{y=0}dx-$$

$$-\int\limits_{\sigma}\varphi(s)\,y^{\alpha}(s)\,A_s\left[G_2(x,y;x_0,y_0)\right]ds \tag{107}$$

формулага эга бўламиз.

Умумлашган Хольмгрен масаласи. $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва $y^\alpha u_y(x,y)\in \in C(D\cup AB)$ ҳамда

$$u(x,y)\big|_{\overline{\sigma}}=\varphi(s),\quad 0\le s\le l;\qquad \lim_{y\to 0} y^\alpha u_y(x,y)=\nu(x),\ -1<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(s)\in C[0,l]$, $\nu(x)\in C(-1,1)$ – берилган функциялар бўлиб, $\nu(x)$ функция $x\to\pm 1$ да $1-2\beta_2$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин.

Бу масала ечимининг ягоналиги Хопф принципи ва 7^0 хоссадан келиб чиқади.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1(x,y;x_0,y_0)$ функция $E_\alpha(u)=0$ тенглама учун умумлашган Хольмгрен масаласининг Грин функцияси дейилади:

1) x,y ўзгарувчиларга нисбатан D соҳанинг (x_0,y_0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг регуляр ечими;

2) $G_1(x,y;x_0,y_0)\big|_{(x,y)\in\sigma}=0,\qquad \lim\limits_{y\to 0} y^\alpha \dfrac{\partial G_1}{\partial y}=0$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $G_1(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)+g_1(x,y;x_0,y_0)$

кўринишга эга, бу ерда

$$q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1\, r_1^{-2\beta_2}\, F(\beta_2,\beta_2,2\beta_2;\sigma_1)\quad -$$

– $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг фундаментал ечими, $g_1(x,y;x_0,y_0)$ эса бу тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими.

Бу таърифдан кўринадики, $G_1(x,y;x_0,y_0)$ Грин функциясини топиш (94) тенгламанинг

$$g_1(x,y;x_0,y_0)=-q_1(x,y;x_0,y_0),\ (x,y)\in\sigma;\qquad \lim_{y\to 0} y^\alpha \frac{\partial g_1}{\partial y}=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечимини (яъни Грин функциясининг регуляр қисми – $g_1(x,y;x_0,y_0)$

функцияни) топишга тенг кучли экан. Бу функциянинг мавжудлиги умумий ҳолда (94) тенгламага мос потенциаллар ёрдамида исботланиб, хусусий ҳолда, $\sigma = \sigma_0$ бўлганда

$$G_1(x,y;x_0,y_0) = q_1(x,y;x_0,y_0) - R^{-2\beta_2} q_1(x,y;\bar{x}_0,\bar{y}_0)$$

кўринишга эга, бу ерда $R, \bar{x}_0, \bar{y}_0$ лар (105) тенгликлар билан аниқланади ва бу масалани ечишда

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}$$

деб олинади.

$G_1(x,y;x_0,y_0)$ функция ва умумлашган Хольмгрен масаласининг $u(x,y)$ ечимига (97) формулани қўллаб, (107) формулани келтириб чиқаришдаги мулоҳазаларни такрорласак, умумлашган Хольмгрен масаласининг ечими учун

$$u(x_0,y_0) = -\int_{-1}^{1} \nu(x) G_1(x,0;x_0,y_0)dx -$$
$$-\int_{\sigma} \varphi(s)\, y^{\alpha}(s)\, A_s[\,G_1(x(s),y(s);x_0,y_0)\,]\,ds$$

формула ўринли эканлиги келиб чиқади.

Аралаш масала. $E_\alpha(u)=0$ тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\bar{D})\cap C^1(D\cup\sigma)$ синфга тегишли ва

$$A_s[u]\big|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 < s < l; \quad u(x,0) = \tau(x), \quad -1 \le x \le 1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда (x,y) нуқта A ва B нуқталарга интилганда u_x ва u_y ҳосилалар $1-2\beta_2$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин; $\varphi(s)\in C[0,l]$, $\tau(x)\in C[-1,1]$ – берилган функциялар.

Бу масала ечимининг ягоналиги Хопф ва Заремба – Жиро принциплари ёрдамида исботланади.

Фараз қилайлик, $u(x,y)$ функция аралаш масалага мос бир жинсли масаланинг ечими, яъни $E_\alpha(u)=0$, $A_s[u]\big|_\sigma = 0, u(x,0)=0$ шартларни қаноатлантирувчи функ – ция бўлиб, $\bar{D}$ соҳада $u(x,y)\neq const$ бўлсин.

Хопф принципига асосан $u(x,y)$ функция D соҳада мусбат максимум ва манфий минимум қийматларга эришмайди. $u(x,0)=0$ бўлгани учун $u(x,y)$ бу қийматларни $\overline{AB}$ да ҳам қабул қилмайди. У ҳолда, $u(x,y)$ функция ўзининг мусбат максимум ва манфий минимум қийматларига σ да эришади. Заремба – Жиро принципига асосан σ чизиқнинг бу қийматлар қабул қилинган нуқталарида $A_s[u]\neq 0$. Бунинг эса бўлиши мумкин эмас, чунки σ чизиқда $A_s[u]=0$. Бу қарама – қаршилик $u(x,y)\neq const$ деган фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $u(x,y)\equiv const$, $(x,y)\in\overline{D}$. Буни ва $u(x,0)=0$ тенгликни инобатга олсак, $\overline{D}$ да $u(x,y)\equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Бундан эса масала ечимининг ягоналиги келиб чиқади.

$E_\alpha(u)=0$ тенглама учун аралаш масаланинг Грин функцияси деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_3(x,y;x_0,y_0)$ функцияга айтилади:

1) x,y ўзгарувчиларга нисбатан D соҳанинг (x_0,y_0) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида (94) тенгламанинг регуляр ечими;

2) $A_s[G_3(x,y;x_0,y_0)]\big|_{(x,y)\in\sigma}=0$, $\quad G_3(x,0;x_0,y_0)=0$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $G_3(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)+g_3(x,y;x_0,y_0)$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $q_2(x,y;x_0,y_0)$ – (94) тенгламанинг фундаментал ечими, $g_3(x,y;x_0,y_0)$ эса бу тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими.

Теорема. Агар σ чизиқ $\sum_0$ шартларни қаноатлантирса, $G_3(x,y;x_0,y_0)$ Грин функцияси мавжуд, у (x,y), (x_0,y_0) нуқталарга нисбатан симметрик ва (94) тенглама учун аралаш масаланинг ечими

$$u(x_0,y_0)=\int_{-1}^{1}\tau(x)\left[y^\alpha\frac{\partial}{\partial y}G_3(x,y;x_0,y_0)\right]\Bigg|_{y=0}dx+$$

$$+\int_0^l\varphi(s)y^\alpha(s)G_3(x(s),y(s);x_0,y_0)ds \qquad (108)$$

формула билан аниқланади.

Бу теореманинг $G_3(x,y;x_0,y_0)$ функцияга тегишли қисми (94) тенгламага мос потенциаллар ёрдамида исботланади (V боб 7–§ га қаранг), (108) формула эса (97) тенглик ёрдамида (107) формула каби келтириб чиқарилади.

13–§. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган тенглама учун чегаравий масалалар

xOy текислигининг биринчи чорагида ётувчи ва учлари $A(a,0)$, $B(0,b)$ нуқталардан иборат σ эгри чизиқ ва $OA=\{(x,y): y=0,\ 0<x<a\}$, $OB=\{(x,y): x=0,\ 0<y<b\}$ кесма–лар билан чегараланган D соҳада

$$y^m u_{xx}+x^n u_{yy}=0 \tag{109}$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $a=q^{1/q}$, $b=p^{1/p}$, $2q=n+2$, $2p=m+2$.

$x=0$ ва $y=0$ тўғри чизиқларда (109) тенглама параболик бузилади.

Одатда ушбу $\frac{1}{q^2}(x-\xi)^{2q}+\frac{1}{p^2}(y-\eta)^{2p}=\varepsilon^2$ тенгламани қаноатлантирувчи (x,y) нуқталар тўплами (109) тенгламанинг маркази (ξ,η) нуқтада параметри (радиуси) ε га тенг бўлган нормал контури дейилади.

Маълумки, $m\neq n$ ёки $m=n$ бўлишига мос равишда (109) тенглама тўртта ёки иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган фундаментал ечимларга эга. Шунинг учун чегаравий масалалар қўйишда бу ҳоллар алоҳида қаралади.

1. $m\neq n$, $m>n>0$ **бўлган ҳол**. Бу ҳолда (109) тенглама фундаментал ечимларининг хоссаларига таянган ҳолда қўйидаги масалаларни қўйиш мумкин.

1–чегаравий масала. (109) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup OA\cup OB)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\sigma}; \tag{110}$$

$$u_y(x,0)=\nu_1(x),\quad 0<x<a; \tag{111}$$

$$u_x(0,y)=\nu_2(y),\quad 0<y<b \tag{112}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $v_1(x)$, $v_2(y)$ – берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $v_1(x)$ ва $v_2(y)$ функциялар $x \to 0$, $x \to a$ ва $y \to 0$, $y \to b$ да $(1-2\beta)/(1-2\alpha)$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин, $\beta = m/(2m+4)$, $\alpha = n/(2n+4)$.

2–чегаравий масала. (109) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OA)$ синфга тегишли ва (110), (111) ҳамда

$$u(0,y) = \tau_2(y), \qquad 0 \le y \le b \tag{113}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau_2(y)$ – берилган узлуксиз функция бўлиб, $\varphi(0,b) = \tau_2(b)$.

3–чегаравий масала. (109) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OB)$ синфга тегишли ва (110), (112) ҳамда

$$u(x,0) = \tau_1(x), \qquad 0 \le x \le a \tag{114}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau_1(x)$ – берилган узлуксиз функция бўлиб, $\varphi(a,0) = \tau_1(a)$.

4–чегаравий масала. (109) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва (110), (113), (114) шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда берилган функциялар $\varphi(a,0) = \tau_1(a)$, $\varphi(0,b) = \tau_2(b)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0)$ тенгликларни қаноатлантиради.

4–чегаравий масала ечимининг ягоналиги Хопф принципидан дарҳол келиб чиқади.

Биринчи, иккинчи ва учинчи чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги "энергия интеграллари усули" билан исботланади.

Фараз қилайлик, $u(x,y)$ функция биринчи (иккинчи ёки учинчи) чегаравий масалага мос бир жинсли масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда, D соҳада

$$u\left(y^m u_{xx} + x^n u_{yy}\right) =$$

$$= \left(y^m u u_x\right)_x + \left(x^n u u_y\right)_y - y^m \left(u_x\right)^2 - x^n \left(u_y\right)^2 \equiv 0 \tag{115}$$

айният ўринли.

D^* билан D соҳада тўла ётувчи ва $\Gamma^* = \sigma_\delta \cup \gamma_0 \cup \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup O_1A_1 \cup O_2B_1$ контур билан чегараланган соҳани белгилайлик, бу ерда $\sigma_\delta - D$ соҳада ётувчи σ чизиққа параллел ва ундан δ масофада жойлашган чизиқ; $\gamma_0, \gamma_1\ \gamma_2$ лар эса маркази $O,\ A,\ B$ нуқталарда ва параметри (радиуси) мос равишда $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ га тенг бўлган нормал контурлар; O_1, A_1 ва O_2, B_1 лар $y = d_1$ ва $x = d_2$ тўғри чизиқларнинг мос равишда γ_0, γ_1 ва γ_0, γ_2 контурлар билан кесишиш нуқталари; $\delta,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_j,\ d_j\ (j = 1,2)$ – етарли кичик мусбат сонлар.

(115) айниятни D^* соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс–Остроградский формуласини қўлласак,

$$\iint\limits_{D^*} [y^m (u_x)^2 + x^n (u_y)^2]\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma^*} u\, A_s[u]\, ds$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $A_s[\ ] = y^m \dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial}{\partial x} - x^n \dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Бу тенгликдан $\delta,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_j,\ d_j\ (j = 1,2)$ нолга интилганда лимитга ўтиб, бир жинсли чегаравий шартларни инобатга олсак,

$$\iint\limits_{D} \left[y^m (u_x)^2 + x^n (u_y)^2 \right] dx\, dy = \sum_{j=0}^{2} \lim_{\varepsilon_j \to 0} \int\limits_{\gamma_j} u\, A_s[u]\, ds \qquad (116)$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $u(x, y)$ функциянинг ҳосилалари $O,\ A,\ B$ нуқталар атрофида мос равишда

$$u_x = O\left(\varepsilon_j^{\frac{2\beta-1}{1-2\alpha}+\delta_j} \right), \quad u_y = O\left(\varepsilon_j^{\frac{2\beta-1}{1-2\alpha}+\delta_j} \right), \quad j = 0,1,2 \qquad (117)$$

каби бўлса, (116) тенгликдаги лимитлар нолга тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, масалан, $j = 0$ ҳолда

$\gamma_0 : \dfrac{1}{q^2} x^{2q} + \dfrac{1}{p^2} y^{2p} = \varepsilon_0^2$ чизиқда $\dfrac{1}{q} x^q = \varepsilon_0 \cos\theta$,

$\frac{1}{p}y^p = \varepsilon_0 \sin\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$ формулалар ёрдамида ўзгарувчиларни алмаштирсак,

$$\int\limits_{\gamma_0} u\, A_s[\, u\,]\, ds = \varepsilon_0 \int\limits_0^{\pi/2} u\, u_x \,[\, p\,\varepsilon_0 \sin\theta\,]^{2\beta} \cos\theta \; d\theta +$$

$$+\varepsilon_0 \int\limits_0^{\pi/2} u\, u_y [q\varepsilon_0 \cos\theta\,]^{2\alpha} \sin\theta \; d\theta$$

келиб чиқади.

Бу ерда $\left| u(x,y) \right| \le const$ ва (117) тенгликларни инобатга олсак,

$$\left| \int\limits_{\gamma_0} u\, A_s[\, u\,] ds \right| \le const \cdot \varepsilon_0^{\frac{2\beta - 2\alpha}{1-2\alpha} + \delta}, \qquad \delta > 0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $\lim\limits_{\varepsilon_0 \to 0} \int\limits_{\gamma_0} u\, A_s[\, u\,]\, ds = 0$ тенглик келиб чиқади.

$u(x,y)$ функция (яъни бир жинсли масаланинг ечими) (117) шартларни қаноатлантиради деб фараз қилиб (ечим мавжудлигини исботлашда албатта бу шарт инобатга олиниши зарур), юқоридаги мулоҳазаларни ҳисобга олсак, (116) тенглик

$$\iint\limits_D [\, y^m (u_x)^2 + x^n (u_y)^2 \,]\, dx\, dy = 0$$

кўринишни олади.

Бундан D соҳада $u(x,y) \equiv const$ тенглик келиб чиқади. У ҳолда, $u(x,y)$ функция $\overline{D}$ да узлуксиз ва $\overline{\sigma}$ да нолга тенг бўлгани учун, $\overline{D}$ да $u(x,y) \equiv 0$ тенглик ўринли бўлади. Демак, агар биринчи (иккинчи ёки учинчи) чегаравий масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

(109) тенглама учун юқорида баён қилинган чегаравий масалаларнинг Грин функцияси деб шундай $G_j(x,y;x_0,y_0)$ $(j=\overline{1,4})$ функцияга айтиладики, у

1) x, y ўзгарувчиларга нисбатан D соҳанинг (x_0, y_0) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида (109) тенгламанинг регуляр ечими;

2) $(x_0, y_0) \in D$ бўлганда x, y ўзгарувчилар бўйича $j-$ чегаравий масалага мос бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $G_j(x, y; x_0, y_0) = q_j(x, y; x_0, y_0) + g_j(x, y; x_0, y_0)$

кўринишга эга, бу ерда $q_j(x, y; x_0, y_0)$ — (109) тенгламанинг фундаментал ечимлари ($7-\S$ га қаранг), $g_j(x, y; x_0, y_0)$ эса бу тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими.

σ эгри чизиқ (109) тенгламанинг ушбу

$$\sigma_0 : \frac{1}{q^2} x^{2q} + \frac{1}{p^2} y^{2p} = 1$$

нормал контури билан устма—уст тушганда юқорида таърифланган Грин функцияларини аниқ ёзиш, демак, уларга мос чегаравий масалалар ечимини аниқловчи формулаларни аниқ ёзиш мумкин.

Масалан, 2—чегаравий масаланинг Грин функцияси

$$G_2(x, y; x_0, y_0) = q_2(x, y; x_0, y_0) - \left(R^2\right)^{-\alpha-\beta} q_2(x, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0)$$

кўринишга эга бўлиб, бу масаланинг ечими

$$u(x_0, y_0) = -\int_0^a x^n \nu_1(x) G_2(x, 0; x_0, y_0) dx +$$

$$+\int_0^b y^m \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0} \tau_2(y) dy - \int_0^l \varphi(x(s), y(s)) A_s\left[G_2(x(s), y(s); x_0, y_0)\right] ds$$

формула билан аниқланади, бу ерда

$$R^2 = \frac{1}{q^2} x_0^{2q} + \frac{1}{p^2} y_0^{2p}, \quad \bar{x}_0^q = \frac{x_0^q}{R^2}, \quad \bar{y}_0^p = \frac{y_0^p}{R^2},$$

$s - \sigma_0$ чизиқнинг A нуқтадан бошлаб ҳисобланадиган ёй узунлиги, $l - \sigma_0$ чизиқнинг узунлиги; $x = x(s)$, $y = y(s)$ — σ_0 чизиқни аниқловчи параметрик тенгламалар;

$$q_2(x, y; x_0, y_0) = k_2\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta} \sigma_1^{1-2\alpha} \times$$

$$\times F_2(1-\alpha+\beta, 1-\alpha, \beta, 2-2\alpha, 2\beta; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\left.\begin{array}{l} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \end{array}\right\} = \left(\frac{1}{q}x^q \mp \frac{1}{q}x_0^q\right)^2 + \left(\frac{1}{p}y^p \mp \frac{1}{p}y_0^p\right)^2, \sigma_1 = 1 - \frac{r_1^2}{r^2}, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{r_2^2}{r^2},$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2-2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2\beta)},$$

F_2 — Горннинг гипергеометрик функцияси.

2—, 3—, 4— чегаравий масалаларни (110) чегаравий шарт

$$A_s[u]\big|_\sigma = \varphi(s), \qquad 0 < s < l$$

шарт билан алмаштирилган ҳолда урганиш ҳам алоҳида аҳамиятга эга.

$m \neq n$, $-1 < m$, $n < 0$ ҳолда ҳам юқоридаги масалалар коррект қуйилган булади.

2. $m = n > 0$ **булган ҳол.** Бунда (109) тенглама иккита чизиқли боғлиқ булмаган фундаментал ечимларга эга булиб (7—§ га каранг), уларга мос чегаравий масалалар 1— ва 4— чегаравий масалалар каби баён қилинади.

$\sigma = \sigma_0 : x^{2p} + y^{2p} = 1$ булганда бу масалалар учун Грин функциялари

$$G_j(x, y; x_0, y_0) = q_j(x, y; x_0, y_0) - \left(R^2\right)^{-2\beta} q_j(x, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0)$$

куринишга эга булади, бу ерда $j = 1,4$,

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-\beta} F(\beta, \beta, 2\beta; \sigma_1),$$

$$q_4(x, y; x_0, y_0) = k_4\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-\beta} \sigma_1^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; \sigma_1),$$

$$R^2 = x_0^{2p} + y_0^{2p}, \qquad r_{1,2}^2 = \left(x^p \mp x_0^p\right)^2 + \left(y^p \pm y_0^p\right)^2,$$

$$\sigma_1 = 16\left(x\,y\,x_0\,y_0\right)^p\left(r_1^2 r_2^2\right)^{-1}, \quad \bar{x}^p = \frac{x^p}{R^2}, \quad \bar{y}^p = \frac{y^p}{R^2},$$

$$k_1 = 4^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)/\pi\,\Gamma(2\beta), \;\; k_4 = 4^{2\beta-1}\Gamma^2(1-\beta)/\pi\,\Gamma(2-2\beta).$$

Бу ҳолда ҳам (109) тенглама учун 2— ва 3— чегаравий масалаларни урганиш мумкин. Бунда Грин функциялари

$$G_2^1(x,y;x_0,y_0)=G_4^1(x,y;x_0,y_0)+G_4^1(x,-y;x_0,y_0),$$

$$G_3^1(x,y;x_0,y_0)=G_4^1(x,y;x_0,y_0)+G_4^1(-x,y;x_0,y_0)$$

тенгликлар билан аниқланади.

Грин функциялари маълум бўлганда тегишли чегаравий масала ечимини аниқловчи формулани келтириб чиқариш қийинчилик туғдирмайди.

$-1<m=n<0$ бўлганда ҳам $G_j^1(x,y;x_0,y_0)$, $j=\overline{1,4}$ функциялар (109) тенглама учун $1-4$ чегаравий масалалар учун Грин функцияси бўлади.

14−§. Эллиптик типдаги тенгламалар учун нолокал масалалар

Ўтган параграфларда биз эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйиладиган классик масалалар билан танишиб чиқдик. Бундай масалаларда тенглама қаралаётган соҳанинг чегарасида ё номаълум функциянинг қиймати ёки ҳосиласига оид бирор ифоданинг қиймати берилди. Лекин амалиётда эллиптик типдаги тенгламалар учун классик бўлмаган чегаравий шартли масалалар ҳам учраб туради. Математик адабиётларда бундай масалалар "нолокал шартли масалалар" деб аталиб, биз бу ерда уларга оид икки масалани кўриш билан чегараланамиз.

1. $y>0$ ярим текисликнинг $\sigma_0: x^2+\dfrac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=1$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган чекли соҳасини D_0 билан белгилайлик ва бу соҳада

$$E(u)\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (m>0)$$

тенгламани қарайлик.

БС масала: $E(u)=0$ тенгламанинг D_0 соҳада регуляр, $\overline{D}_0$ да узлуксиз ва

$$u(x,0)=\tau(x),\quad -1\le x\le 1;$$

$$u(x,y)-\alpha(x,y)\,u\left(r_0x,r_0^{1+2\beta}y\right)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\sigma_0 \qquad (118)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\alpha(x,y)$, $\varphi(x,y)$ – берилган узлуксиз функциялар, $r_0 = const$ – берилган сон бўлиб, $0 < r_0 < 1$, $\beta = m/(2m+4)$.

Агар (x,y) нуқта σ_0 чизиқда ётиб, у бўйлаб ҳаракатланса, $(r_0 x,\ r_0^{1-2\beta} y)$ нуқта D_0 соҳа ичида ётиб, σ_0 га параллел бўлган $\sigma_1 : x^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = r_0^2$ чизиқ бўйича ҳаракатланади. Демак, (118) шарт номаълум функциянинг чегаравий ва ички нуқталардаги қийматларини боғламоқда. Бундай шартли масалалар "Бицадзе – Самарский типидаги масалалар" деб аталиб, улар асосан 1960 йилларнинг охиридан бошлаб жадал ўрганила бошланди [3].

Теорема. Агар $|\alpha(x,y)| \le 1$ бўлса, БС масала битгадан ортиқ ечимга эга эмас.

Исбот: $u_0(x,y)$ функция БС масаланинг $\tau(x) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$ бўлгандаги ечими бўлсин. $u_0(x,y) \not\equiv const$, $(x,y) \in \overline{D}_0$ деб фараз қилайлик. У ҳолда, $\max\limits_{\sigma_0} |u_0| = |u_0(x_0,y_0)| = M > 0$ белгилаш киритсак, Хопф принципига асосан, D_0 соҳанинг ихтиёрий (x,y) нуктасида $|u_0(x,y)| < M$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Буни эътиборга олсак,

$$M = |u_0(x_0,y_0)| = \left| \alpha(x_0,y_0)\, u_0(r_0 x_0, r_0^{1-2\beta} y_0) \right| <$$

$$\le \left| u_0(r_0 x_0,\ r_0^{1-2\beta} y_0) \right| < M$$

нотўғри тенгсизликка келамиз. Бу қарама – қаршилик фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $u_0(x,y) = const$, $(x,y) \in \overline{D}_0$. У ҳолда, $u_0(x,0) = 0$ га асосан, $\overline{D}_0$ да $u_0(x,y) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Бундан эса агар масаланинг ечими мавжуд бўлса, унинг ягоналиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Масала ечимининг мавжудлигини кўрсатиш мақсадида $u(x,y)|_{\overline{\sigma}} = \varphi_0(x,y)$ белгилаш киритайлик ва $\varphi_0(x,y) \in C(\overline{\sigma}_0)$

деб фараз қилайлик, бу ерда $\varphi_0(x,y)$ – номаълум функция. У ҳолда, $E(u)=0$ тенглама учун Дирихле масаласи ечими формуласига асосан D_0 соҳада

$$u(x,y)=\int_{-1}^{1}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;x,y)d\xi-$$
$$-\int_{\sigma_0}\varphi_0(\xi,\eta)A_s[G_2(\xi,\eta;x,y)]ds \tag{119}$$

тенглик ўринли, бу ерда $G_2(\xi,\eta,x,y)$ – $E(u)=0$ тенглама учун Дирихле масаласининг Грин функцияси бўлиб, (74) тенгликлар билан аниқланади.

(119) ни (118) га қўйиб, $u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi_0(x,y)$ белгилашни инобатга олсак, $\varphi_0(x,y)$ га нисбатан

$$\varphi_0(x,y)+\int_{\sigma_0}\varphi_0(\xi,\eta)K(\xi,\eta;x,y)ds=\varphi_1(x,y) \tag{120}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$\varphi_1(x,y)=\varphi(x,y)+\alpha(x,y)\int_{-1}^{1}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;r_0x,r_0^{1-2\beta}y)d\xi,$$

$$K(\xi,\eta;x,y)=\alpha(x,y)A_s[G_2(\xi,\eta;r_0x,r_0^{1-2\beta}y)] \tag{121}$$

σ_0 чизиқдаги ихтиёрий (x,y) ва (ξ,η) нуқталар учун $(r_0x,r_0^{1-2\beta}y)\neq(\xi,\eta)$ тенгсизликнинг ўринлилигидан ва (74) тенгликлардан фойдалансак,

$$\int_{-1}^{1}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;r_0x,r_0^{1-2\beta}y)d\xi,\quad A_s[G_2(\xi,\eta;r_0x,r_0^{1-2\beta}y)]$$

функцияларнинг x,y ўзгарувчиларга нисбатан $\overline{\sigma}_0$ чизиқда узлуксизлиги келиб чиқади. У ҳолда, (121) тенгликларга асосан, $\varphi_1(x,y)\in C(\overline{\sigma}_0)$, $K(\xi,\eta;x,y)\in C(\overline{\sigma}_0\times\sigma_0)$.

Буларни ва (x,y), (ξ,η) нуқталар σ_0 да ётганда

$$y=\left[\left(\frac{m+2}{2}\right)^2(1-x^2)\right]^{\frac{1}{m+2}},\quad \eta=\left[\left(\frac{m+2}{2}\right)^2(1-\xi^2)\right]^{\frac{1}{m+2}}$$

тенгликлар ўринли эканлигини эътиборга олиб,

$$\varphi_0(x,y)=\varphi_0(x),\ \varphi_1(x,y)=\varphi_1(x),\ K(\xi,\eta;x,y)=K(\xi,x)$$

белгилашлар киритсак, (120) ни

$$\varphi_0(x)+\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)K(\xi,x)d\xi=\varphi_1(x),\ -1\le x\le 1$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенглама $\varphi_0(x)$ функцияга нисбатан Фредгольм типидаги иккинчи тур интеграл тенглама бўлиб, узлуксиз функциялар синфида унинг ягона ечими мавжудлиги БС масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

$\varphi_0(x)=\varphi_0(x,y)$ функция топилгандан сўнг, БС масаланинг ечими D_0 соҳада (119) формула билан аниқланади. Шундай қилиб, БС масала тўла ҳал қилинди.

Фараз қилайлик, $\gamma_1(\subset D_0)$ тугун нуқталарга эга бўлмаган силлиқ чизиқ, σ_1 эса σ_0 чизиқнинг бирор қисми бўлиб, $z=\psi_1(x,y)$, $t=\psi_2(x,y)$ чизиқли боғлиқ бўлмаган функциялар $(z,t)\in\gamma$, $(x,y)\in\sigma_1$ нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатсин.

У ҳолда, БС масалани қуйидагича умумлаштириш мумкин:

$E(u)=0$ тенгламанинг D_0 соҳада регуляр, $\overline{D}_0$ да узлуксиз ва

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ -1\le x\le 1;\quad u(x,y)=\varphi(x,y),\ \ (x,y)\in\sigma_0\setminus\sigma_1;$$

$$u(x,y)-\alpha(x,y)\ \ u\left[\psi_1(x,y),\ \ \psi_2(x,y)\right]=\varphi_1(x,y),\ (x,y)\in\sigma_1$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\varphi(x,y)$, $\alpha(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, $\varphi_1(x,y)$ — берилган узлуксиз функциялар.

2. DT масала. $E(u)=0$ тенгламанинг D_0 соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup OB)$ синфга тегишли ва $[x(1-x)]^{1-2\beta}u_y(x,0)\in$ $\in C[0,1]$ ҳамда

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in\overline{\sigma_0\cup AO};$$

$$u(x,0)-\gamma\int_0^x(x-t)^{-2\beta}u_y(t,0)dt=\psi(x),\quad (x,0)\in\overline{OB}\qquad(122)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $\psi(x)-$ берилган узлуксиз функциялар, $\overline{AO}$ ва $\overline{OB}$ – $y=0$ тўғри чизиқ кесмалари,

$$A(-1,0),\ \ O(0,0),\ B(1,0),\ \gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$$

(122) шарт нокласcик (нолокал) шарт бўлиб, номаълум $u(x,y)$ функциянинг $u(x,0)$ қийматини $u_y(t,0)$ ҳосиласининг $[0,x]$ оралиқдаги қийматлари билан боғламоқда.

Бундай масалаларни ўрганиш аввалги параграфларда кўриб ўтилган масалаларни ўрганишга нисбатан анча мураккаб бўлиб, биз бу ерда масала ечимининг ягоналигини исботлаш билан чекланамиз.

Теорема. Агар DT масала ечимга эга бўлса, у ягонадир.

Исбот. $u_0(x,y)$ функция DT масаланинг $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$ бўлгандаги ечими бўлсин ва $\overline{D_0}$ да $u_0(x,y)\not\equiv const$ деб фараз қилайлик. У ҳолда, экстремум принципига асосан, $u_0(x,y)$ функция D_0 соҳада мусбат максимумга (манфий минимумга) эришмайди. $u_0(x,y)|_{\sigma_0\cup AO}=0$ бўлганлиги учун бу қийматга $\overline{\sigma_0\cup AO}$ да ҳам эришмайди. $u_0(x,y)\in C(\overline{D_0})$ бўлганлиги учун бу функция мусбат максимумга (манфий минимумга) OB кесманинг қандайдир $(x_0,0)$ нуқтасида эришади. У ҳолда, $5-\S$ даги $1-$леммага асосан,

$$u_{0y}(x_0,0)<0\quad(>0). \tag{123}$$

$u_0(x_0,0)=\tau(x)$, $u_{0y}(x,0)=\nu(x)$ белгилашлар киритиб ва $\psi(x)\equiv 0$ эканлигини инобатга олиб, (122) тенгликни

$$\tau(x)=\gamma\int_0^x(x-t)^{-2\beta}\nu(t)dt,\ 0\le x\le 1$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу – Абель типидаги интеграл тенглама бўлиб, $\nu(x)$ га нисбатан ягона ечими

$$\nu(x)=\frac{\sin 2\beta\pi}{\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},\ \ 0<x<1$$

формула билан аниқланади.

Бу ифодани

$$\nu(x)=\frac{\sin 2\beta\pi}{\pi\gamma}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x-\varepsilon}\frac{\tau(t)}{(x-t)^{1-2\beta}}dt$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу ерда аввал дифференциаллаш амалини бажариб, сўнгра $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтиб, $x=x_0$ десак,

$$\nu(x_0)=\frac{\sin 2\beta\pi}{\gamma\pi}\left[(1-2\beta)\int_{0}^{x_0}\frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}}dt+\frac{\tau(x_0)}{x_0^{1-2\beta}}\right] \qquad (124)$$

тенгликка эга бўламиз.Агар $\tau(x_0)>0$ (<0), $\tau(x_0)-\tau(t)>0$ (<0), $1-2\beta>0$ эканлигини инобатга олсак, (124)дан $\nu(x_0)>0$ (<0) келиб чиқади. Бу эса (123) га зид бўлиб, фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $u_0(x,y)\equiv const$, $(x,y)\in\overline{D}_0$. $u_0(x,y)\big|_{\sigma_0\cup AO}=0$ бўлганлиги учун $u_0(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}_0$. Теорема исбот бўлди.

γ ўрнига ихтиёрий мусбат сон, 2β ўрнига эса ихтиёрий $l\in(0,1)$ сон олинганда ҳам бу масала ечимининг ягоналиги худди шундай исботланади.

15–§. $F_m(u)=0$ тенглама учун спектрал масала

Аввалги параграфларда берилган тенглама учун қўйилган барча масалалар ечимининг ягоналигига алоҳида аҳамият берилди ва исботланди. Бунда ўрганилаётган масалага мос бир жинсли масаланинг фақатгина тривиал ечимга эга эканлиги исботланди. Лекин эллиптик типдаги тенгламалар назариясида берилган тенгламага қўйилган масалага мос бир жинсли масаланинг тривиал бўлмаган ечимларини топиш ҳақидаги масалаларни ўрганиш ҳам алоҳида аҳамиятга эга. Бундай масалаларнинг бир қисми спектрал масалалар деб аталиб, қуйида биз шундай масалалардан бирини кўриб ўтамиз.

$y>0$ ярим текисликда ётувчи $\sigma_0: x^2+\frac{4}{(m+2)}y^{m+2}=1$ чизиқ ва $AB=\{(x,y): y=0, -1<x<1\}$ кесма билан чегараланган D_0 соҳада

$$F_m(u)=y^m u_{xx}+u_{yy}+\lambda y^m u=0 \qquad (125)$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $m>0, \lambda-$сонли параметр, $A(-1,0)$, $B(1,0)$.

C_λ^0 **масала**: λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, $F_m(u)=0$ тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган регуляр ечимлари мавжуд бўлсин:

$$u(x,y)\in C\left(\overline{D_0}\right)\cap C^1\left(D_0\cup OB\right),\quad [x(1-x)]^{1-2\beta}u_y(x,0)\in C[0,1],$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma_0}\cup\overline{AO}, \qquad (126)$$

$$u(x,0)-\gamma\int_0^x u_y(t,0)(x-t)^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt,\ (x,0)\in\overline{OB}, \quad (127)$$

бу ерда γ, β — 14—параграфдаги катталиклар, $\overline{J}_{-\beta}(z)=\Gamma(1-\beta)(z/2)^\beta J_{-\beta}(z)$ — Бессел — Клиффорд функцияси, $J_{-\beta}(z)$ эса $(-\beta)$ тартибли биринчи тур Бессел функцияси, $\Gamma(z)$ – гамма функция, $O(0,0)$.

Одатда λ нинг бундай қийматларини масаланинг хос сонлари ва унга мос ечимлар эса хос ечимлари дейилади.

Агар C_λ^0 масалада $\lambda=0$ десак, 14 – параграфда ўрганилган DT масалага мос бир жинсли масала келиб чиқади. Бу масала фақат тривиал ечимга эга бўлганлиги учун $\lambda=0$ C_λ^0 масала учун хос сон бўлмайди.

$\lambda\neq 0$ деб фараз қилиб, $\overline{D_0}$ соҳада $x=r\cos\theta$, $\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}=r\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi, 0\le r\le 1)$ формулалар орқали янги ўзгарувчиларга ўтиб, масала ечимини

$$u(x,y)=R(r)\cdot\Phi(\theta) \qquad (128)$$

кўринишда қидирайлик.

У ҳолда, (125) тенгламадан

$$\frac{r^2R''(r)+(1+2\beta)r\,R'(r)+\lambda r^2R(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)+2\beta ctg\theta\,\Phi'(\theta)}{\Phi(\theta)}$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик ихтиёрий $r\in(0,1)$, $\theta\in(0,\pi)$ учун бажарилганлиги сабабли, унинг иккала томони ҳам ўзгармас сондан иборатлиги келиб чиқади ва бу сонни μ^2 билан белгилаб,

$$r^2R''(r)+(1+2\beta)r\,R'(r)+\left(\lambda r^2-\mu^2\right)R(r)=0,\ \ 0<r<1, \quad (129)$$

$$\Phi''(\theta)+2\beta ctg\theta\ \Phi'(\theta)+\mu^2\Phi(\theta)=0,\ \ 0<\theta<\pi \quad (130)$$

тенгламаларга эга бўламиз.

r ва θ ўзгарувчиларда (126) ва (127) шартлар

$$|R(0)|<+\infty, \qquad R(1)=0, \quad (131)$$

$$\Phi(\pi)=0\ , \quad (132)$$

$$R(x)\cdot\Phi(0)=\gamma\,\Gamma(1-\beta)(m+2)^{2\beta}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\beta}\left[\Phi(\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta}\right]\Bigg|_{\theta\to0}\times$$

$$\times\int_0^x(x-t)^{-\beta}J_{-\beta}\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]R(t)\,t^{2\beta-1}dt \quad (133)$$

кўринишни олади.

Шундай қилиб, C_λ^0 масала икки масалага, яъни: I) (129),(131); II) (130),(132),(133) масалаларга ажралди.

(129) тенгламанинг умумий ечими

$$R(r)=c_0r^{-\beta}J_w\left(\sqrt{\lambda}r\right)+c_0'r^{-\beta}Y_w(\sqrt{\lambda}r)$$

кўринишга эга, бу ерда $Y_w(z)$ — w тартибли иккинчи тур Бессель функцияси, c_0, c_0' — ихтиёрий ҳақиқий сонлар, $w=\sqrt{\beta^2+\mu^2}$. Бу умумий ечимдан (131) шартнинг биринчисини қаноатлантирувчи ечимни ажратиб,

$$R(r)=c_0r^{-\beta}J_w\left(\sqrt{\lambda}\ r\right) \qquad (c_0\neq0) \quad (134)$$

функцияга эга бўламиз.

(130) тенгламанинг умумий ечимини топиш мақсадида $\psi=\sin^2(\theta/2)$ алмаштириш бажарайлик. У ҳолда, (130) тенглама

$$\psi(1-\psi)\Phi''_{w}+\left[\frac{1}{2}+\beta-(1+2\beta)\psi\right]\Phi'_{\psi}+\mu^2\Phi=0$$

гипергеометрик тенгламага келади. Бу тенгламанинг чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларидан фойдаланиб, (130) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Phi(\theta)=c_1\ F\left(a,b,c;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$+c_2\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1-c}F\left(1+a-c,1+b-c,2-c;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (135)$$

бу ерда c_1,c_2 – ихтиёрий ҳақиқий сонлар, $a=\beta+w$, $b=\beta-w$, $c=\beta+1/2$, $w=\sqrt{\beta^2+\mu^2}$.

(135) дан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\Phi(0)=c_1,\quad \lim_{\theta\to 0}\Phi(\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta}=\frac{1}{2}(1-2\beta)c_2. \qquad (136)$$

(134) ва (136) ни (133) га қўйиб,

$$x^{-\beta}J_w\left(\sqrt{\lambda}x\right)c_1=\frac{1}{2}(1-2\beta)c_2\gamma\Gamma(1-\beta)(m+2)^{2\beta}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\beta}\times$$

$$\times\int_0^x(x-t)^{-\beta}t^{\beta-1}J_w\left(\sqrt{\lambda}\ t\right)J_{-\beta}\left[\sqrt{\lambda}\ (x-t)\right]dt$$

тенгликка эга бўламиз.

$x-t=z$ алмаштириш бажариб, сўнгра

$$\int_0^x z^{-\beta}(x-z)^{\beta-1}J_{-\beta}\left(\sqrt{\lambda}z\right)J_w\left[\sqrt{\lambda}\ (z-z)\right]dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2x\sqrt{\lambda}\right)^{-\beta}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma(w+\beta)/\Gamma(1+w-\beta)\right]J_w\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$

формуладан [8] фойдалансак, оҳирги тенгликдан

$$c_2 = c_1(m+2)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(1+w-\beta)/\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma(w+\beta)\right]$$

келиб чиқади. Буни (135) га қўйиб, (130) тенгламанинг (133) шартни қаноатлантирувчи ечимини топамиз:

$$\Phi(\theta)=c_1\left[F\left(a,b,c:\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(1+w-\beta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma(w+\beta)}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1-c}F\left(1+a-c,1+b-c,2-c:\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right], \quad (137)$$

бу ерда $c_1 \neq 0$.

(137) функцияни (132) шартга қўйиб, w га нисбатан

$$\cos w\pi+\sin(\beta+w)\pi=0$$

тригонометрик тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг $w>0$ шартни қаноатлантирувчи ечимлари $w_n=n-\frac{1}{4}(1+2\beta)$, $n=1,2\ldots$ бўлиб, $w_n=\sqrt{\beta^2+\mu_n^2}$ тенгликка асосан, μ параметрнинг уларга мос қийматлари

$$\mu_n=\sqrt{\left[n-\frac{1}{4}(1+2\beta)\right]^2-\beta^2}, \quad n=1,2\ \ldots \qquad (138)$$

формула билан аниқланади.

Демак, μ параметрнинг (138) қийматларида II масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлади ва улар, (137), (138) га асосан,

$$\Phi_n(\theta)=c_n\left[F\left(a_n,b_n,c;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(1+w-\beta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma(w+\beta)}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1-c}F\left(1+a_n-c,1+b_n-c,2-c;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (139)$$

формулалар билан аниқланади, бу ерда $c_n \neq 0$ – ихтиёрий ҳақиқий сонлар, $a_n=\beta+w_n$, $b_n=\beta-w_n$, $c=\frac{1}{2}+\beta$. $n=1,2\ldots$

(134) да $w = w_n$ деб, уни (131) шартнинг иккинчисига қўйсак, $J_{w_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$, $n=1,2,\ldots$ тенгламаларга эга буламиз. $w_n > -1$ бўлганлиги учун бу тенгламалар фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлиб, уларнинг k –илдизини $z_k^{(w_n)}$ билан белгиласак, C_λ^0 масаланинг $\lambda_{n,k} = [z_k^{(w_n)}]^2$, $n,k = 1,2,\ldots$ хос сонларига эга бўламиз.

Демак, I масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари

$$\bar{R}_{n,k}(r) = c'_{n,k}\, r^{-\beta} J_{w_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,k}}\, r\right), \quad n,k = 1,2,\ldots \tag{140}$$

функциялардан иборат экан, бу ерда $c'_{n,k} \neq 0$ – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

(139) ва (140) ларни (128) га қўйиб, C_λ^0 масаланинг $\lambda_{n,k}$ хос сонларига мос хос ечимларини топамиз:

$$u_{n,k}(x,y) = c_{n,k} r^{-\beta} J_{w_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,k}}\, r\right)\left[F\left(a_n, b_n, c; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(1+w_n-\beta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma(w_n+\beta)} F\left(1+a_n-c, 1+b_n-c, 2-c; \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

бу ерда $c_{n,k} \neq 0$ – ихтиёрий ҳақиқий сонлар, $n,k = 1,2,\ldots$

Бу функцияларнинг $C(\bar{D}_0) \cap C^1(D_0 \cup OB)$ синфга тегишли эканлигини исботлаш қийинчилик туғдирмайди. Шу билан C_λ^0 масала тўла ҳал бўлди.

Бу ерда топилган $\lambda_{n,k}$ сонлар ва $u_{n,k}(x,y)$ функциялар $F_m(u) = 0$ тенгламада $-1 < m < 0$ бўлганда ҳам C_λ^0 масаланинг хос сонлари ва хос ечимлари бўлаверади.

V БОБ

$E(u)=0$ ТЕНГЛАМА УЧУН ПОТЕНЦИАЛЛАР НАЗАРИЯСИ

Бу бобда $y>0$ ярим текисликда эллиптик типга тегишли ушбу

$$E(u)\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (m>0) \tag{E}$$

тенгламани қараймиз.

Бу тенгламанинг ҳар бир фундаментал ечимига мос потенциаллар киритилиб, уларнинг хоссалари ўрганилади ва чегаравий масалаларни ечишга татбиқ қилинади.

1–§. Грин формуласи

$y>0$ ярим текисликда ётувчи бир боғламли чекли D соҳани олайлик.

D соҳада иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилалари мавжуд ва биринчи тартибли ҳосилалари $\bar{D}$ да узлуксиз бўлган u ва υ функциялар учун

$$u E(\upsilon)-\upsilon E(u)\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[y^m\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

айният ўринли.

Бу айниятни D соҳа буйича интеграллаб, сўнгра Гаусс–Остроградский формуласини қўлласак,

$$\iint\limits_D\left[uE(\upsilon)-\upsilon E(u)\right]dx\,dy=$$

$$=\int\limits_\gamma\left[y^m\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n,x)+\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)\right]ds$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда γ – D соҳанинг контури, $n-\gamma$ контурга ўтказилган ташқи нормал.

$\cos(n,x)=\dfrac{dy}{ds}$, $\cos(n,y)=-\dfrac{dx}{ds}$ тенгликларни эътиборга олиб, $A_s[\ ]=y^m\dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial}{\partial y}$ белгилашни қўлласак, охирги тенгликни

$$\iint_D [uE(\upsilon)-\upsilon E(u)]\,dx\,dy=\int_\gamma (uA_s[\upsilon]-\upsilon A_s[u])\,ds \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(1) тенглик одатда (E) тенглама учун Грин формуласи дейилади.

Агар u ва υ функциялар (E) тенгламанинг ечимлари бўлса, (1) формула

$$\int_\gamma (uA_s[\upsilon]-\upsilon A_s[u])ds=0 \tag{2}$$

кўринишни олади.

(1) формулада $\upsilon\equiv 1$ бўлиб, u функция (E) тенглама–нинг ечими бўлса, u ни u^2 билан алмаштириб,

$$\iint_D\left[y^m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int_\gamma uA_s[u]\,ds \tag{3}$$

формулага эга бўламиз.

Ниҳоят, (2) тенгликда $\upsilon\equiv 1$ десак,

$$\int_\gamma A_s[u]\,ds=0 \tag{4}$$

бўлади, яъни (E) тенглама ечимининг конормал ҳоси–ласидан соҳа контури бўйича олинган интеграл нолга тенг.

2–§. Тенглама фундаментал ечимларининг хоссалари

IV бобнинг 7–параграфидан маълумки (E) тенглама

$$q_1(\xi,\eta;x,y)=k_1r_1^{-2\beta}F(\beta,\beta,2\beta;\sigma_1), \tag{5}$$

$$q_2(\xi,\eta;x,y)=k_2r_1^{-2\beta}\sigma_1^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\sigma_1) \tag{6}$$

чизиқли боғлиқ бўлмаган фундаментал ечимларга эга, бу ерда $y>0,\eta>0$;

$$\left.\begin{array}{l} r^2 \\ r_1^2 \end{array}\right\} = (\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}} \mp y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma_1 = 1 - r^2 / r_1^2, \qquad \beta = m/(2m+4),$$

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}. \quad (7)$$

(5) ва (6) фундаментал ечимлар (ξ, η) ва (x, y) жуфтликларга нисбатан симметрик бўлиб, $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ нуқталарда (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади ва, бундан ташқари, барча ξ лар учун

$$\frac{\partial}{\partial \eta} q_1(\xi, \eta; x, y)\Big|_{\eta=0} = 0, \quad (8)$$

$$q_2(\xi, \eta; x, y)\Big|_{\eta=0} = 0 \quad (9)$$

тенгликларни қаноатлантиради.

IV бобдаги (48) формулага асосан (5) ва (6) функциялар $r \to 0$, яъни $\sigma_1 \to 1$ да логарифмик махсусликка эга.

Бевосита ҳисоблаб топиш мумкинки,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} q_1(\xi, \eta; x, y) =$$

$$= \frac{4\beta k_1}{m+2} r^{-2} r_1^{-2\beta} \eta^{\frac{m}{2}} \left(y^{\frac{m+2}{2}} - \eta^{\frac{m+2}{2}}\right) F(\beta, \beta - 1, 2\beta; \sigma_1) -$$

$$- \frac{4\beta k_1}{m+2} r_1^{-2(\beta+1)} \eta^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m+2}{2}} F(\beta + 1, \beta, 2\beta + 1; \sigma_1). \quad (10)$$

Худди шу каби, агар (ξ, η) нуқта $\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$ параметрик тенгламалар билан берилган γ чизиқда ётса, қуйидаги тенгликлар ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас:

$$A_s[q_j(\xi, \eta; x, y)] = R_j(s; x, y) + Q_j(s; x, y), \quad (11)$$

бу ерда $j = 1,2$; s — γ чизиқ ёйининг узунлиги,

$$R_1(s;x,y)=-k_1\beta r_1^{-2\beta}F(\beta,\beta-1,2\beta;\sigma_1)\,A_s[\ln r^2], \quad (12_1)$$

$$R_2(s;x,y)=-\frac{k_2(1-\beta)y\eta}{r_1^{2(1-\beta)}}F(1-\beta,-\beta,2-2\beta;\sigma_1)\,A_s[\ln r^2], \quad (12_2)$$

$$Q_1(s;x,y)=\frac{4k_1\beta}{m+2}r_1^{-2(\beta+1)}\eta^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m+2}{2}}F(\beta+1,\beta,2\beta+1;\sigma_1)\cdot\xi'(s), \quad (13_1)$$

$$Q_2(s;x,y)=k_2\,y\,r_1^{2(\beta-1)}F(1-\beta,-\beta,1-2\beta;\sigma_1)\cdot\xi'(s). \quad (13_2)$$

3–§. Иккиланган қатлам потенциаллари

Бу ва кейинги барча параграфларда $y>0$ ярим текисликда ётувчи ва учлари $A(-a,0)$, $B(a,0)$ нуқталардан иборат бўлган σ чизиқ ва $AB=\{(x,y):y=0,\ -a<x<a\}$ кесма билан чегараланган соҳани D билан белгилаймиз. Бундан ташқари σ эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси $x=x(s)$, $y=y(s)$ бўлиб (бу ерда $s-\sigma$ нинг B нуқтадан бошлаб ҳисобланадиган ёй узунлиги), қуйидаги шартлар бажарилган деб ҳисоблаймиз:

1) $x(s)$ ва $y(s)$ функциялар $[0,l]$ оралиқда бир вақтда нолга тенг бўлмаган $x'(s)$, $y'(s)$ ҳосилаларга ва Гёльдер шартини қаноатлантирувчи $x''(s)$, $y''(s)$ ҳосилаларга эга, бу ерда $l-\sigma$ чизиқ узунлиги;

2) A ва B нуқталар атрофида σ чизиқда

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|\le C\cdot y^{m+1}(s) \quad (14)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $C=const>0$.

Бундан буён σ эгри чизиққа қуйилган бу шартларни $\sum_0$ шартлар деб атаймиз ва σ эгри чизиқнинг ўзгарувчи нуқтасини (ξ,η) билан белгилаймиз.

1. Биринчи иккиланган қатлам потенциали.

$[0,l]$ оралиқда узлуксиз бўлган $\mu_1(s)$ функцияни олайлик ва

$$\omega^{(1)}(x,y)=\int_0^l\mu_1(s)A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]ds \quad (15)$$

интегрални тузайлик, бу ерда

$$A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]=\eta^m\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}-\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial q_1}{\partial \eta}. \tag{16}$$

(15) интеграл биринчи иккиланган қатлам потенциали дейилади, $\mu_1(s)$ эса унинг зичлиги дейилади.

Табиийки, $\omega^{(1)}(x,y)$ функция $y>0$ ярим текисликнинг σ эгри чизиқ ва $y=0$ тўғри чизиқ билан умумий қисмга эга бўлмаган ихтиёрий соҳасида (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

$1-$лемма.

$$\omega_1^{(1)}(x,y)=\int_0^l A_s[q_1(\xi,\eta,x,y)]ds=\begin{cases}-1, & агар\,(x,y)\in D\cup(-a,a)\,бўлса,\\ -\frac{1}{2}, & агар\,(x,y)\in\sigma\;\; бўлса,\\ 0, & агар\,(x,y)\in \overline{D}\;\; бўлса.\end{cases} \tag{17}$$

Исбот: 1) $(x,y)\in D$ бўлсин. (x,y) нуқтани марказ қилиб, етарли кичик ε (>0) радиус билан доира чизайлик ва D соҳанинг бу доирадан ташқари қисмини D_ε билан, доиранинг чегарасини C_ε билан белгилайлик. D_ε соҳада $q_1(\xi,\eta;x,y)$ функция (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлгани учун (4) формулани қўллаб, (8) ни ҳисобга олсак,

$$\omega_1^{(1)}(x,y)=\int_{\overleftarrow{C_\varepsilon}} A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]\,ds \tag{18}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда интеграл остидаги ифода (11), (12_1), (13_1) тенгликлар билан аниқланади.

C_ε айлана тенгламасини қутб координаталар системасида $\xi=x+\varepsilon\cos\varphi$, $\eta=y+\varepsilon\sin\varphi$ кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда IV бобдаги $(68)-(70)$ тенгликларни инобатга олиб,

$$\omega_1^{(1)}(x,y)=-2k_1\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^{2\pi}\frac{y^{m/2}\,d\varphi}{\cos^2\varphi+y^m\sin^2\varphi}$$

тенгликка, ёки бу ердаги интеграл 2π га тенглиги ва k_1 нинг қийматини эътиборга олсак, $\omega_1^{(1)}(x,y)=-1$ тенгликка эга бўламиз.

2) $(x,y)=M_0(\xi(s_0),\eta(s_0))\in\sigma,\ 0<s_0<l$ бўлсин. M_0 нуқтани марказ қилиб, етарли кичик ε (>0) радиусли доира чизайлик. Бу доира чегарсининг D соҳа ичидаги қисмини C_ε^1 ва σ чизиқнинг бу доира ичидаги қисмини σ_ε билан белгилайлик. У ҳолда

$$\omega_1^{(1)}(s_0)=\int_0^l A_s[q_1(\xi,\eta;\xi(s_0),\eta(s_0))]\,ds=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma/\sigma_\varepsilon} A_s[q_1(\xi,\eta;\xi(s_0),\eta(s_0))]\,ds. \tag{19}$$

Иккинчи томондан, $\sigma\setminus\sigma_\varepsilon$, C_ε^1 ва AB лар билан чегараланган соҳада $q_1(\xi,\eta;x,y)$ функция (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлгани учун, (4) ва (8) тенгликларга асосан,

$$\int_{\sigma\setminus\sigma_\varepsilon} A_s[q_1(\xi,\eta;\xi(s_0),\eta(s_0))]\,ds=\int_{C_\varepsilon^1} A_s[q_1(\xi,\eta;\xi(s_0),\eta(s_0))]\,ds$$

келиб чиқади. Буни ҳисобга олсак, (19) дан

$$\omega_1^{(1)}(s_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^1} A_s[\xi,\eta;\xi(s_0),\eta(s_0)]ds$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда ҳам қутб координаталарига ўтиб, 1) банддаги мулоҳазаларни такрорласак, $\omega_1^{(1)}(s_0)=-\dfrac{1}{2}$ $(0<s_0<l)$ келиб чиқади.

3) $(x,y)\in(y>0)\setminus D$ бўлсин. У ҳолда $q_1(\xi,\eta;x,y)$ функция D соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, (4) ва (8) дан $\omega_1^{(1)}(x,y)=0$ келиб чиқади.

4) (x,y) нуқта x ўқида ётган бўлсин. $y=\varepsilon$ (ε — етарли кичик мусбат сон) тўғри чизиқ ўтказиб, $D_\varepsilon=D\cap(y>\varepsilon)$ белгилаш киритайлик. D_ε соҳа ва $q_1(\xi,\eta;x,y)$ функцияга (4) формулани қўллаб,

$$\omega_1^{(1)}(x,0)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\eta}q_1(\xi,\varepsilon;x,0)\,d\xi+$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon_2} A_s[q_1(\xi,\eta;x,0)]\,ds+\int_{l-\varepsilon_1}^{l} A_s[q_1(\xi,\eta;x,0)]\,ds \tag{20}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $x_1(l-\varepsilon_1)$ ва $x_2(\varepsilon_2)-\sigma$ эгри чизиқ ва $y=\varepsilon$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқталарининг абсциссалари, $l-\varepsilon_1$ ва ε_2 эса σ чизиқнинг бу кесишиш нуқталарига мос ёй узунликлари.

Аввал иккинчи ва учинчи интегралларни қарайлик. Агар $x\neq\pm a$ бўлса, етарли кичик $[-a,x_2]$, $[x_1,a]$ оралиқда

$$r^2\Big|_{y=0}=r_1^2\Big|_{y=0}=(x-\xi)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\neq 0$$

бўлишини инобатга олсак, (11), (12_1) ва (13_1) тенгликлардан келиб чиқадики, бу оралиқларда $A_s[q_1(\xi,\eta;x,0)]$ функция чегараланган бўлади. Агар, масалан, $x=a$ бўлса, табиийки, $A_s[q_1(\xi,\eta;,a;0)]$ функция $[-a,x_2]$ оралиқда чегараланган бўлади. Унинг $[x_1,a]$ оралиқда чегараланганлиги эса [(14) шарт ва унга тенг кучли бўлган $a-\xi=O(\eta^{m+2})$ тенгликка асосан] A нукта атрофида ўринли бўлган

$$r^2\Big|_{\substack{x=a\\y=0}}=r_1^2\Big|_{\substack{x=a\\y=0}}=O\left(\eta^{m+2}\right),$$

$$A_s[r^2]\Big|_{\substack{x=a\\y=0}}=A_s[r_1^2]\Big|_{\substack{x=a\\y=0}}=O\left(\eta^{2m+2}\right)$$

тенгликлар ва (11), (12_1), (13_1) тенгликлардан келиб чиқади.

Демак, $\varepsilon\to 0$ да (20) тенгликдаги иккинчи ва учинчи интеграллар нолга интилади.

Буни ва (10) тенгликни инобатга олсак, (20) ни

$$\omega_1^{(1)}(x,0)=-\frac{4\beta k_1}{m+2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_1}^{x_2}\varepsilon^{m+1}\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\varepsilon^{m+2}\right]^{-\beta-1}d\xi$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Интеграл ўзгарувчисини $\xi=x+\frac{2}{m+2}\varepsilon^{\frac{m+2}{2}}t$ формула бўйича алмаштирсак, охирги тенглик

$$\omega_1^{(1)}(x,0) = -\frac{2^{2\beta-1}\beta\,\Gamma^2(\beta)}{\pi\,\Gamma(2\beta)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(1+t^2\right)^{-\beta-1}dt \qquad (21)$$

кўринишга келади, бу ерда

$$\alpha_1 = \frac{(m+2)(x_1-x)}{2\varepsilon^{\frac{m+2}{2}}}, \qquad \alpha_2 = \frac{(m+2)(x_2-x)}{2\varepsilon^{\frac{m+2}{2}}}.$$

Табиийки, агар $-a < x < a$ бўлса,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = -\infty,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_2 = +\infty, \qquad (22_1)$$

агар $-\infty < x < -a$ ($a < x < +\infty$) бўлса,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_2 = +\infty \quad \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_2 = -\infty\right). \qquad (22_2)$$

(14) шартга асосан A ва B нуқталар атрофида σ чизиқда мос равишда $a + x = O\left(y^{m+2}\right)$ ва $a - x = O\left(y^{m+2}\right)$ тенгликлар ўринли. Бундан келиб чиқадики, $x = -a$ бўлса,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_2 = +\infty, \qquad (22_3)$$

$x = a$ бўлса,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_1 = -\infty,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_2 = 0. \qquad (22_4)$$

Маълумки,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+t^2\right)^{-\beta-1}dt = \pi\,\Gamma(2\beta)/\left[2^{2\beta-1}\beta\,\Gamma^2(\beta)\right] \qquad (23)$$

$(22_1)-(22_4)$ тенгликларни инобатга олиб, (21) тенгликда $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтсак, (23) га асосан,

$$\omega_1^{(1)}(x,0) = \begin{cases} -1, & \textit{агар} \quad -a < x < a \quad \textit{бўлса}, \\ -\dfrac{1}{2}, & \textit{агар} \quad x = \pm a \quad \textit{бўлса}, \\ 0, & \textit{агар} \quad x \overline{\in} [-a,a] \quad \textit{бўлса}, \end{cases}$$

келиб чиқади. 1 – лемма тўла исботланди.

2 – лемма. $y > 0$ ярим текисликнинг ихтиёрий (x,y) нуқтасида

$$\int_0^l |A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]|\,ds \le C \qquad (24)$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $C = const > 0$.

Исбот. (11) тенгликка асосан,

$$\int_0^l |A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]|\,ds \le \int_0^l |R_1(s;x,y)|\,ds + \int_0^l |Q_1(s;x,y)|ds. \qquad (25)$$

Аввал

$$\int_0^l |Q_1(s;x,y)ds| \le C_1 \qquad (26)$$

тенгсизликни исботлайлик.

$s \in [\varepsilon, l-\varepsilon]$ да $Q_1(s;x,y)$ функция логарифмик махсусликка эга бўлгани учун

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} |Q_1(s;x.y)|\,ds \le C_2 \ \ (\varepsilon > 0). \qquad (26_1)$$

A ва B нуқта атрофида σ чизиқда (14) шарт бажарилгани учун $s \in [0,\varepsilon] \cup [l-\varepsilon, l]$ да $r_1^2 = \eta^{m+2} O(1)$ бўлади. Буни эътиборга олсак, (13_1) дан s нинг бу қийматлари учун $Q_1(s;x,y) = \eta^{\frac{m}{2}} |\ln(1-\sigma_1)| O(1)$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда,

$$\int_0^\varepsilon |Q_1(s;x,y)|\,ds \le C_3, \quad \int_{l-\varepsilon}^l |Q_1(s;x.y)|\,ds \le C_3. \qquad (26_2)$$

(26_1) ва (26_2) лардан (26) тенгсизлик келиб чиқади.

$\tilde{\eta} = \frac{2}{m+2}\eta^{\frac{m+2}{2}}$ алмаштириш бажариб ва $(\xi, \tilde{\eta})$ текисликда $\tilde{\sigma}$ чизиқ ёйининг узунлигини $\tilde{s}$ билан белгилаб,

$$\int_0^l |R_1(s;x,y)|\,ds \le C_4 \int_0^l \frac{\tilde{\eta}^{2\beta}}{\tilde{r}^{2\beta}} |F(\beta,\beta-1,2\beta;\sigma_1)| \times$$

$$\times \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\left(\ln\frac{1}{\tilde{r}}\right)\right| d\tilde{s} \le C_5 \int_0^l \frac{|\cos\theta|}{\tilde{r}}\,d\tilde{s}$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу ерда $\theta - \tilde{\sigma}$ эгри чизиққа ўтказилган ташқи $\tilde{n}$ нормал ва $\tilde{r} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\tilde{\eta} - \tilde{y})^2}$

орасидаги бурчак. Логарифмик потенциаллар наза- риясидан маълумки,

$$\int_0^l \frac{|\cos\theta|}{\tilde{r}} d\tilde{s} \le C_6 .$$

Демак,

$$\int_0^l |R_1(s;x,y)|\, ds \le C_7 . \tag{27}$$

(26) ва (27) ларга асосан (25) дан (24) тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. 2-лемма исботланди.

(11), (12_1) ва (13_1) тенгликлардан бевосита қуйидаги лемма келиб чиқади:

3-лемма. Агар (x,y) нуқта σ чизиқда ётса,

$$|A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]| \le C_8 \frac{\eta^{2m}}{r_1^{2\beta}} \left(1-\ln\frac{r^2}{r_1^2}\right) \tag{28}$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $C_8 = const > 0$.

1-леммадан келиб чиқадики, $\mu_1(s) = 1$ бўлганда $\omega^{(1)}(x,y)$ функция (x,y) нуқта σ чизиқни кесиб ўтганда сакрашга эга. $\mu_1(s)$ - ихтиёрий узлуксиз функция бўлганда хам $\omega^{(1)}(x,y)$ функциянинг бу хоссаси сақланиб қолади.

Ҳақиқатан хам, σ чизиқнинг ихтиёрий $M_0(x(s_0), y(s_0))$ нуқтасини олайлик ва $\omega^{(1)}(x,y)$ функциянинг (x,y) нуқта M_0 нуқтага D соҳа ичидан ва ташқарисидан интилгандаги лимит қийматини мос равишда $\omega_i^{(1)}(s_0)$ ва $\omega_e^{(1)}(s_0)$ билан белгилайлик.

1-теорема. Агар $\mu_1(s)$ функция $[0,l]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда биринчи иккиланган қатлам потенциали учун қуйидаги лимит муносабатлар ўринлидир:

$$\begin{aligned} \omega_i^{(1)}(s) &= -\frac{1}{2}\mu_1(s) + \int_0^l \mu_1(t)\, K_1(s,t)\, dt, \\ \omega_e^{(1)}(s) &= \frac{1}{2}\mu_1(s) + \int_0^l \mu_1(t)\, K_1(s,t)\, dt, \end{aligned} \tag{29}$$

бу ерда

$$K_1(s,t)=A_t\left[q_1(\xi(t),\eta(t);x(s);y(s))\right]. \tag{30}$$

Одатда $\omega_0^{(1)}(s)=\int_0^l \mu_1(t)\,K_1(s,t)\,dt$ функция $\omega^{(1)}(x,y)$ функциянинг $M_0(x(s),y(s))\in\sigma$ нуқтадаги тўғри қиймати дейилади.

Исбот: $\omega^{(1)}(x,y)$ функцияни

$$\omega^{(1)}(M)=\int_0^l\left[\mu_1(t)-\mu_1(s)\right]A_t\left[q_1(P;M)\right]dt+$$

$$+\mu_1(s)\int_0^l A_t\left[q_1(P;M)\right]dt=w_1(M)+\mu_1(s)\,w_0(M) \tag{31}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда $P(\xi(t),\eta(t))\in\sigma$, $M(x,y)$ эса $y>0$ ярим текисликнинг ихтиёрий нуқтаси.

$w_1(M)$ функциянинг M_0 нуқтада узлуксиз эканини кўрсатайлик. Шу мақсадда M_0 нуқтани марказ қилиб, етарли кичик $\delta\,(>0)$ радиусли $\Gamma(M_0,\delta)$ доира чизамиз. σ чизиқнинг бу доира ичидаги қисмини σ_1 билан, ташқаридагисини σ_2 билан белгилайлик. У ҳолда,

$$w_1(M)=\int_{\sigma_1}\left[\mu_1(t)-\mu(s)\right]A_t\left[q_1(P;M)\right]dt+$$

$$+\int_{\sigma_2}\left[\mu_1(t)-\mu_1(s)\right]A_t\left[q_1(P;M)\right]dt=w_{11}(M)+w_{12}(M).$$

Бунга асосан

$$|w_1(M)-w_1(M_0)|\le|w_{11}(M)|+|w_{11}(M_0)|+$$

$$+|w_{12}(M)-w_{12}(M_0)|. \tag{32}$$

$\mu_1(s)$ функция узлуксиз бўлгани учун δ ни шундай танлайликки, $|t-s|<\delta$ бўлганда,

$$|\mu_1(t)-\mu_1(s)|<\frac{\varepsilon}{3C}$$

бўлсин, бу ерда $\int_\sigma|A_t[q_1(P;M)]|\,dt<C$.

Бу ҳолда, $y>0$ ярим текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси учун

$$\left|w_{11}(M)\right| \leq \int_{\sigma_1}\left[\mu_1(t)-\mu_1(s)\right] A_t\left[q_1(P;M)\right] dt < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (33)$$

Хусусий ҳолда

$$\left|w_{11}(M_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (34)$$

$w_{12}(M)$ функцияда интеграл σ_2 бўйича бажарилаяпти, M_0 нуқта эса σ_1 да ётади. Шунинг учун $M \in \Gamma(M_0,\delta)$ бўлганда бу функция узлуксиздир. У ҳолда, ихтиёрий берилган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\Delta>0$ сон топиладики, $\rho(M,M_0)<\Delta$ бўлганда

$$\left|w_{12}(M)-w_{12}(M_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (35)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(32) — (35) тенгсизликларга асосан, $\rho(M,M_0)<\Delta$ бўлганда $\left|w_1(M)-w_1(M_0)\right|<\varepsilon$ бўлиши, яъни $w_1(M)$ функциянинг M_0 нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади. Шунинг учун $w_1(M)$ функциянинг M_0 нуқтадаги лимит қиймати билан тўғри қиймати устма-уст тушади, яъни

$$w_{1_i}(M_0)=w_{1_e}(M_0)=w_1(M_0). \qquad (36)$$

Иккинчи томондан, 1-леммага асосан,

$$w_{0i}(M_0)=-1, \quad w_{0e}(M_0)=0, \quad w_0(M_0)=-\frac{1}{2}. \qquad (37)$$

(31), (36), (37) тенгликлардан $\omega_i^{(1)}(M_0)$ ва $\omega_e^{(1)}(M_0)$ лимит қийматларнинг мавжудлиги ҳамда

$$\omega_i^{(1)}(M_0)=w_1(M_0)-\mu_1(s), \quad \omega_e^{(1)}(M_0)=w_1(M_0),$$

$$\omega_0^{(1)}(M_0)=w_1(M_0)-\frac{1}{2}\mu_1(s) \qquad (38)$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликлардан эса 1-теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

Натижа: Агар $\mu_1(s)$ функция $[0,l]$ да узлуксиз бўлса, $\omega_0^{(1)}(s)$ функция ҳам $[0,l]$ да узлуксиз бўлади.

Исбот. Агар $M \in \sigma$ ва $M \neq M_0$ бўлса, (31) га асосан

$$\omega_0^{(1)}(M) = w_1(M) - \frac{1}{2}\mu_1(s).$$

Энди M нуқтани σ чизиқ бўйлаб M_0 нуқтага интилтирамиз. $w_1(M)$ функция узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{M \to M_0} \omega_0^{(1)}(M) = w_1(M_0) - \frac{1}{2}\mu_1(s).$$

Буни (38) тенглик билан таққослаб,

$$\lim_{M \to M_0} \omega_0^{(1)}(M) = \omega_0^{(1)}(M_0)$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, $\omega_0^{(1)}(s)$ функция $[0,l]$ да узлуксиз.

Изоҳ. (29) тенгликлар ҳамда $\omega_0^{(1)}(s)$ ва $\mu(s)$ функцияларнинг $[0,l]$ да узлуксизлигидан келиб чиқадики,

$$\omega^{(1)}(x,y) \in C(D \cup \sigma), \qquad \omega^{(1)}(x,y) \in C\left[\left((y>0) \setminus \overline{D}\right) \cup \sigma\right].$$

2. Иккинчи иккиланган қатлам потенциали.

(E) тенгламанинг $q_2(\xi,\eta;x,y)$ фундаментал ечими ёрдамида аниқланган

$$\omega^{(2)}(x,y) = \int_0^l \mu_2(s) A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]ds \tag{39}$$

функция иккинчи иккиланган қатлам потенциали дейилади, бу ерда $\mu_2(s)$ – $[0,l]$ да узлуксиз функция,

$$A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)] = \eta^m \frac{d\eta}{ds}\frac{\partial q_2}{\partial \xi} - \frac{d\xi}{ds}\frac{\partial q_2}{\partial \xi}.$$

Табиийки, $\omega^{(2)}(x,y)$ функция $y>0$ ярим текисликнинг σ чизиқ ва x ўқи билан умумий қисмга эга бўлмаган ихтиёрий соҳасида (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

4 – лемма.

$$\omega_1^{(2)}(x,y)=\int_0^l A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]ds=\begin{cases} i(x,y)-1, \text{ агар } (x,y)\in D \text{ бўлса,} \\ i(x,y)-\dfrac{1}{2}, \text{ агар } (x,y)\in\sigma \text{ бўлса,} \\ i(x,y), \text{ агар } (x,y)\overline{\in} D\cup\sigma \text{ бўлса,}\end{cases} \quad (40)$$

бу ерда

$$i(x,y)=\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial\eta}q_2(\xi,0;x,y)d\xi. \quad (41)$$

Исбот. Дастлаб $M(x,y)\in D$ бўлсин. Маркази M нуқтада ва радиуси $\varepsilon(>0)$ бўлган доирани шундай чизайликки, у D соҳада тўлиғича ётсин. D соҳанинг бу доирадан ташқари қисмини D_ε ва бу доира чегарасини C_ε билан белгиласак, (4) формулага асосан

$$\int_{\overline{\sigma}\cup AB\cup \overset{\leftarrow}{C}_\varepsilon} A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]\,ds=0$$

тенглик ўринли бўлади. Бу интегрални $\overline{\sigma}, AB, C_\varepsilon$ чизиқлар бўйича алоҳида – алоҳида ёзиб олиб, (40) ва (41) белгилашларни эътиборга олсак,

$$\omega_1^{(2)}(x,y)=i(x,y)+I_\varepsilon(x,y), \quad (42)$$

бу ерда

$$I_\varepsilon(x,y)=\int_{\overset{\leftarrow}{C}_\varepsilon} A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]\,ds$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $(x,y)\in\sigma$ бўлса ҳам (42) тенглик ўринли бўлиб, бу ерда C_ε – маркази $M(x,y)\in\sigma$ нуқтада ва радиуси $\varepsilon(>0)$га тенг бўлган айлананинг D соҳа ичидаги қисми бўлади.

(11), (12_2), (13_2) тенгликлардан фойдаланиб ва 1 – лемманинг исботидаги мулоҳазаларни такрорлаб, кўрсатиш мумкинки,

$$I_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}-1, \text{ агар } (x,y)\in D \text{ бўлса,} \\ -\dfrac{1}{2}, \text{ агар } (x,y)\in\sigma \text{ бўлса.}\end{cases} \quad (43)$$

Агар $M(x,y)\in D\cup\sigma$ бўлса, (4) формулани тўғридан тўғри D соҳага қўллаб,

$$\omega_1^{(2)}(x,y)=i(x,y),\ \ (x,y)\in D\cup\sigma \tag{44}$$

тенгликка эга бўламиз.

(42), (43), (44) тенгликлардан 4–лемманинг тасдиғи тўғри эканлиги келиб чиқади.

5–лемма. $y>0$ ярим текисликнинг ихтиёрий (x,y) нуқтасида

$$\int_0^l |A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]|\,ds\le C_9 \tag{45}$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $C_9=const>0$.

6–лемма. σ чизиқнинг ихтиёрий (x,y) нуқтасида

$$|A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]|\le C_{10}\frac{\eta^{\frac{m}{2}}}{r_1^{2\beta}}\left(1-\ln\frac{r^2}{r_1^2}\right) \tag{46}$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $C_{10}=const>0$.

Бу леммаларнинг исботи (11), (12_2), (13_2) тенглик–лардан бевосита келиб чиқади.

4– ва 5– леммалардан фойдаланиб, қуйидаги теоре–мани исботлаш қийинчилик туғдирмайди:

2–теорема. Агар $\mu_2(s)$ функция $[0,l]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда иккинчи иккиланган қатлам потенциали учун қуйидаги лимит муносабатлар ўринлидир:

$$\omega_i^{(2)}(s)=-\frac{1}{2}\mu_2(s)+\int_0^l\mu_2(t)K_2(s,t)dt,$$

$$\omega_e^{(2)}(s)=\frac{1}{2}\mu_2(s)+\int_0^l\mu_2(t)K_2(s,t)dt, \tag{47}$$

бу ерда

$$K_2(s,t)=A_t\left[q_2\left(\xi(t),\eta(t);\,x(s),y(s)\right)\right], \tag{48}$$

$(\xi(t),\eta(t))$ ва $(x(s),y(s))$ – σ чизиқда ётувчи нуқталар.

4–§. Оддий қатлам потенциаллари

1. Биринчи оддий қатлам потенциали.

1) Таърифи ва асосий хоссалари. Фараз қилайлик, $\rho_1(t)$ – $[0,l]$ да узлуксиз ва σ чизиқ учларида η^m каби нолга интилувчи функция бўлсин.

$$\upsilon_1(x,y)=\int_0^l \rho_1(t)\, q_1(\xi,\eta;x,y)dt \qquad (49)$$

функция биринчи оддий қатлам потенциали, $\rho_1(t)$ эса унинг зичлиги дейилади.

(49) ва $q_1(\xi,\eta;x,y)$ фундаментал ечимнинг хоссаларидан келиб чиқадики, $\upsilon_1(x,y)$ функция $y>0$ ярим текисликнинг барча нуқталарида аниқланган ва σ чизиқдан ўтишда узлуксизлигини сақлайди. Табиийки, бу функция $y>0$ ярим текисликнинг σ чизиқ ва x ўқи билан умумий нуқтага эга бўлмаган ихтиёрий соҳасида (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади. Бундан ташқари, (x,y) нуқта чексизликка интилганда $\upsilon_1(x,y)$ функция нолга интилади. Ҳақиқатан ҳам, агар (x,y) нуқта

$$C_R: x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=R^2$$

нормал чизиқда ётса, (5) тенгликка асосан,

$$|\upsilon_1(x,y)|\le\int_0^l|\rho_1(t)|\cdot|q_1(\xi,\eta;x,y)|\,dt\le M_0\,R^{-2\beta} \qquad (50)$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $M_0=const>0$.

2) Конормал ҳосиласи. σ чизиқда ихтиёрий $N(x(s),y(s))$ нуқта олайлик ва бу нуқтадан σ чизиққа ташқи нормал ўтказайлик. Бу нормалда σ чизиққа қарашли бўлмаган $M(x,y)$ нуқта олайлик ва (49) функциянинг конормал ҳосиласини тузайлик:

$$A_s[\upsilon_1(x,y)]=\int_0^l \rho_1(t)\,A_s[q_1(\xi,\eta;x,y)]\,dt, \qquad (51)$$

бу ерда

$$A_s[\ ]\equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y};$$

$\dfrac{dy}{ds}=\cos(n,x),\ \dfrac{dx}{ds}=-\cos(n,y)$ – σ чизиққа N нуқтадан ўтказилган n нормалнинг йўналтирувчи косинуслари.

(51) ва (11), (12_1), (13_1) тенгликлардан бевосита келиб чиқадики, $(x,y)\in C_R$ нуқталарда

$$|\ A_s[\upsilon_1(x,y)]\ |\le M_1\ y^m R^{-2\beta-1} \tag{52}$$

тенгсизлик ўринли, $M_1=const>0$.

(51) интеграл $M=N$ бўлганда ҳам мавжуд. Бу интегралнинг M нуқта N нуқтага D соҳа ичидан ва ташқарисидан интилгандаги лимит қийматларини мос равишда $A_s[\upsilon_1(x,y)]_i$ ва $A_s[\upsilon_1(x,y)]_e$ каби белгилайлик.

3 – теорема. Агар $\rho_1(s)$ функция $[0,l]$ да узлуксиз бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\begin{aligned} A_s[\upsilon_1(x,y)]_i &= \frac{1}{2}\rho_1(s)+\int_0^l \rho_1(t)K_1(t,s)\,dt,\\ A_s[\upsilon_1(x,y)]_e &= -\frac{1}{2}\rho_1(s)+\int_0^l \rho_1(t)K_1(t,s)\,dt, \end{aligned} \tag{53}$$

бу ерда

$$K_1(t,s)=A_s[\,q_1(\,\xi(t),\,\eta(t);\,x(s),y(s)\,)]. \tag{54}$$

(53) формуладан $\upsilon_1(x,y)$ оддий қатлам потенциалининг конормал ҳосиласи σ чизиқни кесиб ўтишда

$$A_s[\upsilon_1(x,y)]_i - A_s[\upsilon_1(x,y)]_e=\rho_1(s) \tag{55}$$

сакрашга эга эканлиги келиб чиқади.

3) Грин формуласининг қўлланилиши. D соҳада ётувчи, σ чизиққа параллел ва ундан ε масофада жойлашган σ_ε чизиқ ҳамда $y=\delta$ чизиқ билан чегараланган соҳани $D_{\varepsilon\delta}$ билан белгилайлик, бу ерда ε ва δ – етарли кичик мусбат сонлар. Бу соҳада $\upsilon_1(x,y)$ функцияга (3) формулани қўлласак,

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} \left[y^m \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \tag{56}$$

$$= \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \upsilon_1 A_s[\upsilon_1] ds + \int\limits_{x_1}^{x_2} \upsilon_1(x,\delta) \frac{\partial}{\partial y} \upsilon_1(x,\delta) dx$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда x_1 ва x_2 – σ_ε ва $y=\delta$ чизиқлар кесишиш нуқталарининг абциссалари.

$\upsilon_1(x,y)$ ва $A_s[\upsilon_1(x,y)]$ функциялар $D\cup\sigma$ соҳада узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \upsilon_1 A_s[\upsilon_1] ds = \int\limits_0^l \upsilon_1 A_s[\upsilon_1], ds. \tag{57}$$

Қуйидаги тенгликни исботлайлик:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{x_1}^{x_2} \upsilon_1(x,\delta) \frac{\partial}{\partial y} \upsilon_1(x,\delta) dx = 0. \tag{58}$$

$q_{1y}(\xi,\eta;x,0)=0$ бўлгани учун $\delta\to 0$ да

$$\int\limits_\Delta^{l-\Delta} \rho_1(t) q_{1y}(\xi,\eta;x,y) dt \ \ (\Delta > \delta > 0)$$

интеграл нолга текис интилади. Буни ва $\upsilon_1(x,y)$ функциянинг узлуксизлигини инобатга олсак, (58) тенгликни исботлаш учун

$$I(x_2,\delta) = \int\limits_0^{x_2} dx \int\limits_0^{\Delta} \rho_1(t) \frac{\partial}{\partial y} q_1(\xi,\eta;x,\delta) dt$$

интегрални ўрганиш етарли.

t ўзгарувчи ўрнига $\xi(t)$ ўзгарувчи киритиб ва σ чизиқ учларида (14) тенгсизлик ва $\rho_1(t)=O(\eta^m)$ тенглик ўринли эканлигини инобатга олсак,

$$|I(x_2,\delta)| \le M_2 \int\limits_0^{x_2} dx \int\limits_{\xi_1}^{a} \eta^{-1} \left| \frac{\partial}{\partial y} q_1(\xi,\eta;x,\delta) \right| d\xi$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу ерда $\xi_1=\xi(\Delta)$, $M_2=const>0$.

(10) тенгликка асосан

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} q_1(\xi,\eta;x,\delta) \right| \le M_3 \delta^{m/2} r_1^{-2\beta-1} \left(1 - \ln \frac{r^2}{r_1^2} \right) +$$

$$+M_4\delta^{m/2}r_1^{-2\beta}\left|\eta^{\frac{m+2}{2}}-\delta^{\frac{m+2}{2}}\right|r^{-2},\ M_3,\ M_4=const>0.$$

Демак,

$$|I(x_2,\delta)|\leq M_5\delta^{\alpha}\int_0^{x_2}dx\int_{\xi_1}^{a}\left(a^2-\xi^2\right)^{\gamma-1}\left(1-\ln\frac{r^2}{r_1^2}\right)d\xi+$$

$$+M_6\delta^{m/2}\int_0^{x_2}dx\int_{\xi_1}^{a}\eta^{-\frac{m+2}{2}}\left|\eta^{\frac{m+2}{2}}-\delta^{\frac{m+2}{2}}\right|r^{-2}d\xi,$$

бу ерда $\gamma>0,\ 0<\alpha<m/2$: $M_5,\ M_6=const>0$.

$\delta\to 0$ да биринчи интегралнинг нолга интилиши аниқ. Иккинчисини қуйидагича ёзиб олайлик:

$$M_6\delta^{m/2}\left\{\int_0^{\xi_1}dx\int_{\xi_1}^{a}[\ ]d\xi+\int_{\xi_1}^{x_2}dx\int_{x_{2\delta}}^{a}[\ ]d\xi+\int_{\xi_1}^{x_2}dx\int_{x_2}^{x_{2\delta}}[\ ]d\xi+\int_{\xi_1}^{x_2}dx\int_{\xi_1}^{x_2}[\ ]d\xi\right\},$$

бу ерда $x_{2\delta}-\sigma$ ва $y=\delta$ чизиқлар кесишиш нуқтасининг абсциссаси. Дастлабки уч интеграллар $\delta\to 0$ да нолга интилади. Тўртинчи интегралда янги η ўзгарувчига ўтамиз. σ чизиқ учида $a^2-\xi^2=O\left(\eta^{m+2}\right)$ бўлишини эътиборга олсак,

$$M_7\ \delta^{m/2}\int_{\xi_1}^{x_2}dx\int_{\eta_1}^{\eta_2}\eta^{m/2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}}-\delta^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(\xi r^2\right)^{-1}d\eta, \qquad (59)$$

бу ерда $\eta_1=\eta(\xi_1),\eta_2=\eta(x_2),\ M_7=const>0$.

Аммо σ чизиқнинг учлари атрофида

$$\frac{1}{\xi r^2}\eta^{\frac{m}{2}}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}}-\delta^{\frac{m+2}{2}}\right)=\frac{m+2}{4a^2}\xi\frac{d}{d\eta}\left(\ln r^2\right)-$$

$$-\frac{1}{a^2}\eta^{\frac{m+2}{2}}\frac{d}{d\eta}arctg\frac{\xi-x}{\frac{2}{m+2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}}-\delta^{\frac{m+2}{2}}\right)}-$$

$$-\frac{\xi-x}{a^2r^2}\eta^{m+1}\left(1-\frac{(m+2)^2}{4}O(1)\right).$$

Бу ердан $\delta \to 0$ да (59) ифоданинг нолга интилиши келиб чиқади. Демак, (58) тенглик тўғри

(56) тенгликда $\varepsilon \to 0$ ва $\delta \to 0$ лимитга ўтиб, (57) ва (58) тенгликларни эътиборга олсак,

$$\iint\limits_D \left[y^m \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \int\limits_0^l \upsilon_1 A_s \left[\upsilon_1 \right]_i ds \tag{60}$$

тенглик келиб чиқади.

(3) формулани σ чизиқ, x ўқининг $[-R,-a]$, $[a,R]$ кесмалари ва C_R нормал чизиқ билан чегараланган соҳага қўллаб, сўнгра $R \to \infty$ да лимитга ўтиб ва (50), (52) тенгсизликларни инобатта олиб,

$$\iint\limits_{D_1} \left[y^m \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = -\int\limits_0^l \upsilon_1\, A_s \left[\upsilon_1 \right]_e ds \tag{61}$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда $D_1 - D$ соҳани $y > 0$ ярим текисликка тўлдирувчи соҳа.

2. Иккинчи оддий қатлам потенциали. (E) тенглама – нинг иккинчи фундаментал ечими ёрдамида аниқланган

$$\upsilon_2(x, y) = \int\limits_0^l \rho_2(t) q_2(\xi, \eta; x, y) dt \tag{62}$$

функция иккинчи оддий қатлам потенциали дейилади, $\rho_2(t)$ функция эса унинг зичлиги дейилади. (62) функция $y > 0$ ярим текисликда узлуксиз бўлиб, бу ярим текисликнинг σ ва $y = 0$ чизиқлар билан умумий қисмга эга бўлмаган ихтиёрий соҳасида (E) тенгламанинг регуляр ечимидир.

$\upsilon_2(x,y)$ функциянинг конормал ҳосиласи

$$A_s \left[\upsilon_2(x, y) \right] = \int\limits_0^l \rho_2(t) A_s \left[q_2(\xi, \eta; x, y) \right] dt, \qquad (x, y) \in \sigma \tag{63}$$

формула билан аниқланади.

4 – теорема. Агар $\rho_2(t)$ функция $[0,l]$ оралиқда узлуксиз бўлса,

$$\begin{aligned} A_s \left[\upsilon_2(x, y) \right]_i &= \frac{1}{2} \rho_2(s) + \int\limits_0^l \rho_2(t) K_2(t, s) dt, \\ A_s \left[\upsilon_2(x, y) \right]_e &= -\frac{1}{2} \rho_2(s) + \int\limits_0^l \rho_2(t) K_2(t, s) dt. \end{aligned} \tag{64}$$

тенгликлар ўринли, бу ерда

$$K_2(t,s)=A_s\left[q_2\left(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s)\right)\right]. \qquad (65)$$

(64) тенгликлардан иккинчи оддий қатлам потенциалининг конормал хосиласи σ чизиқни кесиб ўтишда

$$A_s\left[\upsilon_2(x,y)\right]_i-A_s\left[\upsilon_2(x,y)\right]_e=\rho_2(s) \qquad (66)$$

сакрашга эга эканлиги келиб чиқади.

Бундан ташқари, ихтиёрий $(x,y)\in C_R$ нуқтада

$$\left|\upsilon_2(x,y)\right|\le M R^{-1}; \qquad \left|A_s\left[\upsilon_2(x,y)\right]\right|\le M R^{2(\beta-1)} \qquad (67)$$

тенгсизликлар бажарилади, бу ерда $M=const>0$.

1 – банддаги усул билан кўрсатиш мумкинки, $\upsilon_2(x,y)$ функция учун хам (60) ва (61) формулалар ўринли.

5–§. Зичлик функциялари учун интеграл тенгламалар

(29) ва (47) хамда (53) ва (64) тенгликларни бир–лаштириб,

$$\mu_j(s)-\lambda\int_0^l K_j(s,t)\,\mu_j(t)\,dt=f_j(s) \qquad (j=1,2), \qquad (68)$$

$$\rho_j(s)-\lambda\int_0^l K_j(t,s)\rho_j(t)dt=g_j(s) \qquad (j=1,2) \qquad (69)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\lambda=\pm2$ бўлиб, $\lambda=2$ бўлганда $f_j(s)=-2\omega_i^{(j)}(s)$, $g_j(s)=-2A_s\left[\upsilon_j\right]_e$, $\lambda=-2$ бўлганда $f_j(s)=2\omega_e^{(j)}(s)$, $g_j(s)=2A_s\left[\upsilon_j\right]_i$.

(68) ва (69) лар $\mu_j(s)$ ва $\rho_j(s)$ зичлик функцияларига нисбатан қўшма интеграл тенгламалар бўлиб, 3– ва 6– леммаларга асосан, уларга Фредгольм теоремаларини қўллаш мумкин.

$K_1(s,t)$ ядро учун $\lambda=2$ хос сон бўлмаслигини исботлайлик. Бунинг учун эса

$$\rho(s)-2\int_0^l K_1(t,s)\,\rho(t)\,dt=0 \qquad (70)$$

интеграл тенглама тривиал бўлмаган ечимга эга эмаслигини кўрсатиш етарли. (70) тенгламанинг барча чегараланган ечимлари учун $|\rho(t)| \le M\eta^{m}$ тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Фараз қилайлик, (70) тенглама узлуксиз $\rho_0(s)$ ечимга эга бўлсин. Зичлик функцияси $\rho_0(s)$ бўлган оддий қатлам потенциали шундай $\upsilon_0(x,y)$ функциядан иборат бўладики, у D ва D_1 соҳаларда (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, (70) га асосан $A_s[\upsilon_0]_e = 0$ бўлади. $\upsilon_0(x,y)$ оддий қатлам потенциалига (61) формулани қўллаб, D_1 соҳада $\upsilon_0(x,y) \equiv const$ эканлигини ва оддий қатлам потенциали $D_1 \cup \sigma$ да узлуксизлиги ҳамда чексизликда нолга тенглигини инобатга олсак, $D_1 \cup \sigma$ да $\upsilon_0(x,y) \equiv 0$ тенгликка эга бўламиз. Буни эътиборга олиб, $\upsilon_0(x,y)$ оддий қатлам потенциалига (60) формулани қўлласак, $\upsilon_0(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \in D$ келиб чиқади. У ҳолда, $A_s[\upsilon_0]_i = 0$ бўлиб, (55) га асосан $\rho_0(t) \equiv 0$ тенгликка эга бўламиз. Демак, (70) интеграл тенглама фақат тривиал ечимга эга ва шунинг учун $\lambda = 2$ $K_1(s,t)$ ядро учун хос сон бўлмайди.

Худди шу каби $\lambda = 2$ ва $\lambda = -2$ лар $K_2(s,t)$ ядро учун хос сон бўлмаслигини кўрсатиш мумкин.

Аммо, (17) тенгликка асосан,

$$\mu(s) - \lambda \int_0^l K_1(s,t)\,\mu(t)\,dt = 0 \tag{71}$$

тенглама $\lambda = -2$ да $\mu(s) \equiv const$ ечимга эга, яъни $\lambda = -2$ $K_1(s,t)$ ядро учун хос сон бўлади.

6–§. Дирихле ва Хольмгрен масалаларини потенциаллар ёрдамида ечиш

1. Масалаларнинг қўйилиши. D соҳада (E) тенгламани қарайлик.

IV бобнинг 8– ва 9–параграфларида (E) тенглама учун D соҳада қуйидаги масалалар қўйилган эди.

Дирихле масаласи. (E) тенгламанинг D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз ва

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\varphi(s),\quad 0\le s\le l;\quad u(x,0)=\tau(x),\quad -a\le x\le a \qquad (72)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(s)$, $\tau(x)$ – берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(0)=\tau(a)$, $\varphi(l)=\tau(-a)$.

Хольмгрен масаласи. (E) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AB)$ синфга тегишли ва

$$u(x,y)\big|_{\overline{\sigma}}=\varphi(s),\ 0\le s\le l;\quad \lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\ -a<x<a \qquad (73)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\nu(x)$ – берилган функция бўлиб, $(-a,a)$ оралиқда узлуксиз ва $x\to\pm a$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин.

IV бобда бу масалалар σ чизиқ σ_0 нормал контур билан устма-уст тушганда Грин функциялари усулида ҳал қилинган бўлиб, бу параграфда биз σ чизиқ $\sum_0$ шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий чизиқ деб ҳисоблаймиз ва масалалар ечимининг мавжудлигини иккиланган қатлам потенциаллари ёрдамида исботлаймиз.

2. Бузилиш чизиғидаги чегаравий шартларни бир жинслига келтириш. Юқоридаги масалаларни ҳар доим $\tau(x)\equiv 0,\ \nu(x)\equiv 0$ бўлган ҳолга келтириш мумкинлигини кўрсатайлик.

Дастлаб Хольмгрен масаласини қарайлик. Бевосита текшириб кўриш мумкинки,

$$p_1(x,y)=-k_1\int_{-a}^{a}\nu(\xi)\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}d\xi \qquad (74)$$

функция (E) тенгламани қаноатлантиради. Бундан ташқари бу функция σ да узлуксиз ва чегараланган.

$(-a,a)$ оралиқдаги ихтиёрий x_0 нуқтада

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{\partial p_1}{\partial y}=\nu(x_0) \qquad (75)$$

тенглик бажарилишини исботлайлик.

(74) ни y бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}=\frac{4\beta k_1}{m+2}y^{m+1}\int_{-a}^{a}v(\xi)\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta-1}d\xi . \quad (76)$$

$\xi=x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}t$ алмаштириш ва (21), (23) тенгликлардан фойдаланиб,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{4\beta k_1}{m+2}y^{m+1}\int_{-a}^{a}\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta-1}d\xi=1 \quad (77)$$

тенгликнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(77) тенгликни инобатга олиб, (76) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{\partial p_1}{\partial y}=v(x_0)+\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{4\beta k_1}{m+2}y^{m+1}\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\left[v(\xi)-v(x_0)\right]\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta-1}d\xi. \quad (78)$$

Ушбу

$$\frac{4\beta k_1}{m+2}y^{m+1}\int_{-a}^{a}\left[v(\xi)-v(x_0)\right]\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta-1}d\xi= \quad (79)$$

$$=\frac{4\beta k_1}{m+2}y^{m+1}\left\{\int_{-a}^{x_0-\delta}+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}+\int_{x_0+\delta}^{a}\right\}=I_1+I_2+I_3.$$

функцияни $y\to 0$, $x\to x_0$ да нолга интилишини кўрсатайлик, бу ерда δ — етарли кичик мусбат сон.

$v(x)$ функция $(-a;a)$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун ихтиёрий берилган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон мавжудки, $|\xi - x_0| < \delta$ бўлганда $|\nu(\xi) - \nu(x_0)| < \varepsilon/3$ бўлади. У ҳолда, $\xi = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} t$ алмаштиришдан фойдалансак,

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{4\beta k_1}{m+2} y^{m+1} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[(\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-\beta-1} d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} \frac{2^{2\beta-1} \beta \Gamma^2(\beta)}{\pi \Gamma(2\beta)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(1 + t^2\right)^{-\beta-1} dt$$

тенгсизлик келиб чиқади, бу ерда

$$\alpha_1 = -\frac{(m+2)(x - x_0 + \delta)}{2y^{\frac{m+2}{2}}}, \qquad \alpha_2 = \frac{(m+2)(x_0 - x + \delta)}{2y^{\frac{m+2}{2}}}$$

(23) тенгликка асосан, охиргидан $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизликка эга бўламиз.

$-a \le \xi \le x_0 - \delta$ оралиқда $|\xi - x_0| \ge \delta$. Агар бунда $|x - x_0| < \delta/2$ булса, $|\xi - x| > \delta/2$ ва $(\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} > \frac{\delta^2}{4}$ бўлади. Шунинг учун тайинланган $\delta(>0)$ ва етарли кичик $y(>0)$ учун

$$|I_1| \le \frac{4\beta k_1}{m+2} y^{m+1} \left(\frac{4}{\delta^2}\right)^{\beta+1} \int_{a}^{x_0-\delta} [\nu(\xi) - \nu(x_0)] \, d\xi \le C_1 y^{m+1} < \varepsilon/3.$$

Худди шу каби, $|I_3| < \varepsilon/3$ тенгсизлик ҳам уринли.

У ҳолда, ε етарли кичик ихтиёрий мусбат сон бўлгани учун, (79) функция $y \to 0$, $x \to x_0$ да нолга интилади.

Буни инобатга олсак, (78) дан (75) келиб чиқади.

$p_1(x, y)$ функциядан фойдаланиб, Хольмгрен масаласи ечимини

$$u(x, y) = p_1(x, y) + \omega_1(x, y) \tag{80}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\omega_1(x, y)$ функция (E) тенгламанинг

$$\omega_1(x,y)\big|_{\bar\sigma}=\varphi(s)-p_1(x,y)\big|_{\bar\sigma}=\varphi_1(s),\quad \left.\frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial\nu}\right|_{y=0}=0 \qquad (81)$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими.

Демак, Хольмгрен масаласини ўрганишда $\nu(x)=0$ бўлган ҳол билан чегараланиш етарли.

Энди Дирихле масаласига ўтайлик. $a_1>0$ сонни шундай олайликки, D соҳа $-a_1<x<a_1$ полоса ичига тўла жойлашсин. $\tau(x)$ функцияни $[-a_1,a_1]$ оралиқда узлуксиз давом эттирайлик. У ҳолда, Хольмгрен масаласидаги каби кўрсатиш мумкинки,

$$p_2(x,y)=k_2 y\int_{-a_1}^{a_1}\tau(\xi)\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}d\xi \qquad (82)$$

функция $y>0$ ярим текисликда (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} p_2(x,y)=\tau(x_0),\qquad -a<x_0\le a.$$

Бу функция ёрдамида Дирихле масаласи ечимини

$$u(x,y)=p_2(x,y)+\omega_2(x,y) \qquad (83)$$

кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $\omega_2(x,y)$ – (E) тенгламанинг

$$\omega_2(x,y)\big|_{\bar\sigma}=\varphi(s)-p_2(x,y)\big|_{\bar\sigma}=\varphi_2(s);\qquad \omega_2(x,0)=0 \qquad (84)$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими.

Демак, Дирихле масаласини ўрганишда ҳам $\tau(x)=0$ бўлган ҳол билан чегараланиш етарли.

3. Масалаларни интеграл тенгламага келтириш. Хольмгрен ва Дирихле масалаларининг ечимини мос равишда

$$\omega_1(x,y)=\int_0^l\mu_1(s)A_s\left[q_1(\xi,\eta;x,y)\right]ds, \qquad (85)$$

$$\omega_2(x,y)=\int_0^l\mu_2(s)A_s\left[q_2(\xi,\eta;x,y)\right]ds \qquad (86)$$

кўринишда қидирайлик, бу ерда $\mu_1(s)$ ва $\mu_2(s)$ — номаълум функциялар.

$\omega_1(x,y)$ ва $\omega_2(x,y)$ функциялар D соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб,

$$\omega_{1y}(x,0)=0, \ -a<x<a; \qquad \omega_2(x,0)=0, \ -a<x<a$$

шартларни қаноатлантиради.

$\mu_1(s)$ ва $\mu_2(s)$ функцияларни шундай танлайликки, $\omega_1(x,y)$ ва $\omega_2(x,y)$ функциялар мос равишда (81) ва (84) шартларнинг биринчиларини ҳам қаноатлантирсин, яъни уларнинг $\bar{\sigma}$ даги лимит қийматлари мос равишда.

$$\omega_{1i}(x,y)=\varphi_1(s), \qquad \omega_{2i}(x,y)=\varphi_2(s), \qquad (x,y)\in\bar{\sigma}$$

тенгликларни қаноатлантирсин

Булардан ва (29), (47) тенгликлардан келиб чиқадики, бунинг учун номаълум $\mu_j(s)$, $j=1,2$ функциялар

$$\mu_j(s)-2\int_0^l K_j(s,t)\,\mu_j(t)\,dt=-2\varphi_j(s), \qquad j=1,2 \tag{87}$$

интеграл тенгламаларни қаноатлантириши зарур, бу ерда $K_1(s,t)$ ва $K_2(s,t)$ ядролар (30) ва (48) формулалар билан аниқланади.

(28) ва (46) тенгсизликлардан келиб чикадики, $K_1(s,t)$ ва $K_2(s,t)$ ядролар суст махсусликка эга. Буни ва $\varphi_j(s)$, $j=1,2$ функцияларнинг узлуксизлигини эътиборга олсак, (87) тенгламаларнинг ечими (агар мавжуд бўлса) узлуксиз функциядан иборатлиги келиб чиқади.

$K_j(s,t)$, $j=1,2$ ядролар учун $\lambda=2$ хос сон бўлмагани сабабли ($5-\S$ га қаранг), (87) интеграл тенгламалар ихтиёрий $\varphi_j(s)$, $j=1,2$ узлуксиз функциялар олинганда ҳам ягона узлуксиз ечимга эга.

Демак, агар σ – $\sum_0$ шартларни қаноатлантирувчи чизиқ ва масала ечимининг $\bar{\sigma}$ да берилган қиймати $\varphi(s)$ – узлуксиз функциядан иборат бўлса, (E) тенглама учун Хольмгрен ва Дирихле масалаларининг ҳар бири ягона ечимга эга ва бу ечимлар мос равишда (85) ва (86) кўринишда, яъни иккиланган қатлам потенциали шаклида ифодаланади.

7–§. Аралаш масалани потенциаллар ёрдамида ечиш

1. Масаланинг қўйилиши ва Грин функцияси.

Аралаш масала (*K* **масала**). (E) тенгламанинг D соҳада регуляр, $C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\sigma)$ синфга тегишли ва

$$A_s[u(x,y)]\big|_\sigma=\varphi(s),\qquad 0<s<l;$$
$$u(x,0)=\tau(x),\qquad -a\le x\le a \tag{88}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда (x,y) нуқта A ва B нуқталарга интилганда u_x ва u_y ҳосилалар $1-2\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин; $\varphi(s)$, $\tau(x)$ – берилган узлуксиз функциялар.

Аралаш масаланинг Грин функцияси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G(\xi,\eta,x,y)$ функцияга айтилади:

1) D соҳанинг (x,y) нуқтасидан ташқари барча нуқталарида ξ,η аргументлар бўйича (E) тенгламанинг регуляр ечими;

2) $A_s\left[G(\xi,\eta;x,y)\right]\Big|_{(\xi,\eta)\in\sigma}=0,\ G(\xi,0;x,y)=0,\ (x,y)\in D$ (89)

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $G(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)+\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ (90)

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $q_2(\xi,\eta;x,y)$- (E) тенгламанинг фундаментал ечими, $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ эса (E) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими.

5 – теорема. $G(\xi,\eta;x,y)$ Грин функцияси мавжуд, D соҳада (ξ,η), (x,y) нуқталарга нисбатан симметрик ва

$$G(\xi,\eta;x,y)=G_0(\xi,\eta;x,y)+H(\xi,\eta;x,y) \tag{91}$$

кўринишга эга, бу ерда $H(\xi,\eta;x,y)-(E)$ тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими;

$$G_0(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta}q_2(\xi,\eta;\overline{x},\overline{y}), \tag{92}$$

$$R = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad \bar{x} = \frac{a^2}{R^2} x, \quad \bar{y}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{a^2}{R^2} y^{\frac{m+2}{2}} \tag{93}$$

Исбот: а) Мавжудлиги. Таърифдан ва $q_2(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг хоссаларидан келиб чиқадики,
$G(\xi,\eta;x,y)$ Грин функциясини топиш, унинг

$$A_s[\upsilon(\xi,\eta;x,y)]|_\sigma = -A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]|_\sigma, \tag{94}$$

$$\upsilon(\xi,0;x,y) = 0, \quad -a \le \xi \le a \tag{95}$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ ечимини топишга тенг кучлидир.

$\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ функцияни топайлик. Уни

$$\upsilon(\xi,\eta;x,y) = \int_0^l \mu(t;x,y)\, q_2(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)dt \tag{96}$$

оддий қатлам потенциали кўринишида қидирамиз, бу ерда $\mu(t;x,y)$ – номаълум функция.

(96) функция D соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, (95) шартни қаноатлантиради. $\mu(t;x,y)$ функцияни шундай танлайликки, у (94) шартни ҳам бажарсин. Шу мақсадда (96) ни (94) га қўйсак, (64) формулаларнинг биринчисига асосан, $\mu(t;x,y)$ га нисбатан

$$\mu(s;x,y) + 2\int_0^l K_2(t,s)\mu(t;x,y)dt = -2A_s[q_2(\xi(s),\eta(s);x,y)] \tag{97}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда
$K_2(t,s) = A_s[q_2(\xi_1(t),\eta_1(t);\xi(s),\eta(s))]$.

$(x,y) \in D$ бўлгани учун (97) тенгламанинг ўнг томони s нинг узлуксиз функцияси, (46) тенгсизликка асосан эса $K_2(t,s)$ ядро суст махсусликка эга. Буларни ва $\lambda = -2$ $K_2(t,s)$ ядро учун хос сон эмаслигини эътиборга олсак, интеграл тенгламалар учун Фредгольм назариясига асосан, (97) тенгламанинг ягона узлуксиз ечими мавжудлиги келиб чиқади. Бу ечимни

$$\mu(s;x,y) = -2A_s\left[q_2(\xi(s),\eta(s);x,y)\right] +$$

$$+4\int_0^l R_2(t,s;-2)A_t\left[q_2(\xi(t),\eta(t);x,y)\right]dt \tag{98}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $(\xi(s),\ \eta(s)) \in \sigma$, $R_2(t,s;-2)$ функция $K_2(t,s)$ ядронинг резольвентаси.

(98) ни (96) га қўйиб, $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ ни топамиз:

$$\upsilon(\xi,\eta;x,y) = -2\int_0^l A_t\left[q_2(\xi_1,\eta_1;x,y)\right]q_2(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)dt +$$

$$+4\int_0^l\int_0^l A_t\left[q_2(\xi_1,\eta_1;x,y)\right]R_2(t,s;-2)\,q_2(\xi_2,\eta_2;\xi,\eta)dt\,ds, \tag{99}$$

бу ерда ξ_1, η_1 – t нинг, ξ_2, η_2 – s нинг функциялари.

Демак, $G(\xi,\eta;x,y)$, функция мавжуд.

б) Симметриклиги. Қуйидаги функцияни қарайлик:

$$g(\xi,\eta) = \begin{cases} \upsilon(\xi,\eta;x,y), & (\xi,\eta)\in D; \\ -q_2(\xi,\eta;x,y), & (\xi,\eta)\in D_1. \end{cases} \tag{100}$$

Бу функция D ва D_1 соҳаларда (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, чексизликда нолга интилади. $(x,y)\in D$ бўлгани учун $g(\xi,\eta)$ функция D_1 соҳада ихтиёрий тартибли ҳосилаларига эга ва бу ҳосилалар ҳамда $g(\xi,\eta)$ функция $D_1\cup\sigma$ да узлуксиздир. Шунинг учун унга D_1 соҳада (E) тенгламанинг

$$g(\xi,\eta)\big|_\sigma = -q_2(\xi,\eta;x,y), \qquad g(\xi,0)=0 \tag{101}$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими сифатида қараш мумкин. У ҳолда, бу функцияни иккиланган қатлам потенциали сифатида ёзиш мумкин:

$$g(\xi,\eta) = \int_0^l \rho(t;x,y)A_t\left[q_2(\xi_1(t),\eta_1(t);\xi,\eta)\right]dt, \quad (\xi,\eta)\in D_1, \tag{102}$$

бу ерда $\rho(t;x,y)$ – номаълум функция.

(47) формулаларнинг иккинчисини (102) функцияга қўллаб, (101) шартларнинг биринчисини эътиборга олсак, $\rho(s;x,y)$ га нисбатан

$$\rho(s;x,y)+2\int_0^l K_2(s,t)\rho(t;x,y)dt=-2q_2(\xi(s),\eta(s);x,y) \quad (103)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

(103) тенглама (97) тенгламага қўшма бўлиб, унинг ўнг томони узлуксиз функциядан иборат. Шунинг учун (103) тенглама узлуксиз ечимга эга:

$$\rho(s;x,y)=-2q_2(\xi(s),\eta(s);x,y)+$$

$$+4\int_0^l R_2(s,t;-2)\,q_2(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y)\,dt. \quad (104)$$

(100) функция $D_1\cup\sigma$ да ҳосилалари билан узлуксиз бўлгани учун

$$A_s[g(\xi,\eta)]|_\sigma=-A_s[q_2(\xi,\eta;x,y)]|_\sigma, \quad g(\xi,0)=0, \ -a\le\xi\le a$$

Бундан ва (94), (95) тенгликлардан келиб чиқадики, $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ функция ва $g(\xi,\eta)$ иккиланган қатлам потенциали D соҳа ва унинг чегарасида бир хил шартларни қаноатлантиради. У ҳолда, аралаш масала ечимининг ягоналигига асосан (100) тенгликлар билан аникланган $g(\xi,\eta)$ функцияни D соҳада ҳам (102) кўринишда ёзиш мумкин, яъни

$$\upsilon(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \rho(t;x,y)A_t[q_2(\xi_1(t),\eta_1(t);\xi,\eta)]\,dt,\ (\xi,\eta)\in D. \quad (105)$$

Иккинчи томондан, (104) тенгликнинг иккала томонини $A_s[q_2(\xi_1(s),\eta_1(s);\xi,\eta)]$ га кўпайтириб, сўнгра s бўйича $[0,l]$ оралиқда интеграллаб, (99) тенгликни инобатга олсак,

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\int_0^l \rho(s;x,y)A_s[q_2(\xi_1(s),\eta_1(s);\xi,\eta)]\,ds \quad (106)$$

келиб чиқади. (105) ва (106) тенгликларни таққослаб, D соҳанинг ихтиёрий (ξ,η), (x,y) нуқталари учун

$\upsilon(\xi,\eta;x,y)=\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ тенгликка эга бўламиз. Бундан ва (90) тенгликдан $G(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг (x,y) ва (ξ,η) нуқталарга нисбатан симметриклиги келиб чиқади.

Изоҳ: (105) дан куринадики, $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ функция зичлиги $\rho(t;x,y)$ бўлган иккиланган қатлам потенциалидан иборатдир. У ҳолда, (47) формулаларнинг биринчисига асосан,

$$\upsilon_i(\xi(s),\eta(s);x,y)=-\frac{1}{2}\rho(s;x,y)+\int_0^l K_2(s,t)\rho(t;x,y)\,dt.$$

Буни ва (103) ни ҳисобга олсак, (90) тенгликдан

$$G(\xi(s),\eta(s);x,y)=-\rho(s;x,y) \tag{107}$$

келиб чиқади.

в) (91) тенгликнинг исботи.

$$\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)=-(a/R)^{2\beta}q_2(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y})$$

функция (E) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечимидир. Бу функцияни

$$\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)=-\int_0^l \rho(t;\xi,\eta)A_t[\upsilon_0(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y)]\,dt \tag{108}$$

куринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатайлик.

D соҳанинг ихтиёрий (ξ,η) нуқтасини олайлик ва

$$u(\xi,\eta;x,y)=-\int_0^l \rho(t;\xi,\eta)A_t[\upsilon_0(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y)]dt$$

функцияни қарайлик. Бу функция ξ,η ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида D соҳада (E) тенгламани қаноатлантиради, чунки (104) га асосан, $\rho(t;\xi,\eta)$ функция шундай хоссага эга.

$u(\xi,\eta;x,y)$ функцияда $\rho(t;\xi,\eta)$ ўрнига (104) даги ифодасини қўйсак,

$$u(\xi,\eta;x,y)=-\int_0^l \psi(s;x,y)q_2(\xi_1(s),\eta_1(s);\xi,\eta)ds \tag{109}$$

келиб чиқади, бу ерда

$$\psi(s;x,y)=-2A_s\left[\upsilon_0\left(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y\right)\right]+$$
$$+4\int_0^l R_2(t,s;-2)\ A_t\left[\upsilon_0\left(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y\right)\right]dt,$$

яъни $\psi(s;x,y)$ функция

$$\psi(s;x,y)+2\int_0^l K_2(t,s)\psi(t;x,y)\,dt=-2A_s\left[\upsilon_0\left(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y\right)\right] \quad (110)$$

интеграл тенгламанинг ечими.

(109) оддий қатлам потенциалига (64) формулаларнинг биринчисини қўллаб,

$$A_s\left[u\left(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y\right)\right]_i=-\frac{1}{2}\psi(s;x,y)-\int_0^l K_2(t,s)\,\psi(t;x,y)\,dt$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда (110) ни эътиборга олсак,

$$A_s\left[u\left(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y\right)\right]_i=$$
$$=A_s\left[\upsilon_0\left(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y\right)\right],\qquad \left(\xi_1(s),\eta_1(s)\right)\in\sigma \quad (111)$$

тенглик келиб чиқади.

Бундан ташқари,

$$u(\xi,0;x,y)=0,\qquad \upsilon_0(\xi,0;x,y)=0\ . \quad (112)$$

Демак, $u(\xi,\eta;x,y)$ ва $\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)$ функциялар D соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечимлари бўлиб, соҳа чегарасида (111), (112) шартларни бажаради. У ҳолда, аралаш масала ечимининг ягоналигига асосан $\overline{D}$ да $u(\xi,\eta;x,y)\equiv\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)$, яъни (108) тенглик тўғри.

Ниҳоят, (90) нинг ўнг томонига $\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)$ функцияни қўшиб ва айириб ҳамда (106) ва (108) тенгликларни эътиборга олиб, (92) ва

$$H(\xi,\eta;x,\eta)=\int_0^l \rho(t;\xi,\eta)A_t\left[G_0\left(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y\right)\right]dt \quad (113)$$

белгилашларни киритсак, (91) тенглик келиб чиқади.

Табиийки, $H(\xi,\eta;x,y)$ функция (ξ,η), (x,y) жуфтликларга нисбатан D соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади. 5 – теорема тўла исботланди.

2. Масала ечимини топиш. D соҳада ихтиёрий (x, y) нуқта олайлик. D соҳада ётувчи, σ га параллел ва ундан $\varepsilon\,(>0)$ масофада жойлашган σ_ε эгри чизиқ ҳамда $y=\delta(>0)$ тўғри чизиқ билан чегараланган соҳани $D_{\varepsilon\delta}$ билан белгилайлик. ε ва δ ни шундай кичик танлайликки, $(x, y) \in D_{\varepsilon\delta}$ бўлсин. $D_{\varepsilon\delta}$ соҳада тўла ётувчи ва маркази (x, y) нуқтада бўлган $\rho\,(>0)$ радиусли доира чизайлик. $D_{\varepsilon\delta}$ соҳанинг бу доирадан ташқари қисмини $D^{\rho}_{\varepsilon,\delta}$ билан белгилайлик.

$u(x, y)$ функция (E) тенгламанинг (88) шартларни қаноатлантирувчи D соҳадаги регуляр ечими бўлсин. Аралаш масаланинг Грин функцияси $G(\xi, \eta, x, y)$ $D^{\rho}_{\varepsilon\delta}$ соҳада (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлади.

$u(\xi, \eta)$ ва $G(\xi, \eta; x, y)$ функцияларга $D^{\rho}_{\varepsilon\delta}$ соҳада (2) формулани қўлласак,

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \left(GA_s[u] - u\,A_s[G]\right) ds + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(u\frac{\partial G}{\partial \eta} - G\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\eta=\delta} dx =$$

$$= \int\limits_{\overleftarrow{C}_\rho} \left(GA_s[u] - u\,A_s[G]\right) ds$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда x_1 ва $x_2 - \sigma_\varepsilon$ ва $y=\delta$ чизиқлар кесишиш нуқталарининг абсциссаси, C_ρ эса маркази (x, y) нуқтада ва радиуси ρ га тенг айлана.

Бу ердан аввал $\rho \to 0$ да, сўнгра эса $\varepsilon \to 0$ ва $\delta \to 0$ да лимитга ўтиб ва IV бобнинг 8 $-$ ва 9 $-$ параграфидаги мулоҳазаларни юритиб,

$$u(x, y) = \int\limits_{-a}^{a} \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta} G(\xi, 0; x, y)\, d\xi + \int\limits_{0}^{l} \varphi(s) G(\xi, \eta; x, y) ds \quad (114)$$

формулага эга бўламиз.

6 $-$ теорема. Агар $\tau(x) \in C[-a, a]$ ва $\varphi(s) \in C[0, l]$ бўлса, (114) тенглик билан аниқланган $u(x, y)$ функция аралаш масаланинг ечими бўлади.

Исбот. (114) формуладаги биринчи интегрални $I_1(x,y)$ билан белгилайлик. Табиийки, бу функция $\overline{D}$ да узлуксиз ва D соҳада (E) тенгламани қаноатлантиради.

$$Q(x,y)=\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}q_2(\xi,0;x,y)\,d\xi$$

белгилаш киритайлик. У ҳолда, (90) ва (99) тенгликлардан ҳамда $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг симметриклигидан фойдалансак, $I_1(x,y)$ ни

$$I_1(x,y)=Q(x,y)-$$

$$-2\int_0^l q_2(\xi,\eta;x,y)\left\{A_t[Q(\xi,\eta)]-2\int_0^l R_2(t_1,t;-2)A_{t_1}[Q(\xi_1,\eta_1)]dt_1\right\}dt \quad (115)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ердаги иккинчи қўшилувчи оддий қатлам потенциалидир. (64) формулаларнинг биринчисини ва $R_2(t,s;-2)$ резольвента учун ўринли бўлган [33]

$$R_2(t,s;-2)=K_2(t,s)-2\int_0^l K_2(t_1,s)R_2(t,t_1;-2)dt_1$$

тенгламани эътиборга олсак, (115) дан $A_s[I_1(x,y)]\big|_\sigma=0$ келиб чиқади.

Иккинчи томондан, (105) ва $\upsilon(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг симметриклигидан фойдалансак, $I_1(x,y)$ функцияни

$$I_1(x,y)=Q(x,y)+$$

$$+\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\,d\xi\int_0^l\frac{\partial}{\partial\eta}\rho(t;\xi,0)\cdot A_t[q_2(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y)]\,dt \quad (116)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

$q_2(\xi,\eta;x,0)=0$ бўлгани учун $y\to 0$ да (116) даги иккинчи интеграл нолга интилади. 6-параграфда кўрсатилганки, $\lim\limits_{y\to 0}Q(x,y)=\tau(x),\ -a\le x\le a$. Демак,

$$\lim_{y\to 0}I_1(x,y)=\tau(x),\ -a\le x\le a.$$

(114) формуладаги иккинчи интегрални $I_2(x, y)$ билан белгилайлик. (107) ва (104) тенгликларни эътиборга олиб, $I_2(x, y)$ ни

$$I_2(x, y) = -\int_0^l \varphi(s)\, \rho(s; x, y)\, ds = -\int_0^l \theta(t)\, q_2(\xi, \eta; x, y)\, dt \qquad (117)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\theta(t) = -2\varphi(t) + 4\int_0^l R_2(s, t)\varphi(s) ds,$$

яъни $\theta(t)$ функция

$$\theta(t) + 2\int_0^l K_2(s,t)\theta(s) ds = -2\varphi(t) \qquad (118)$$

тенгламанинг ечими.

$\theta(t)$ – узлуксиз функция бўлгани учун $I_2(x, y)$ оддий қатлам потенциали сифатида $\overline{D}$ да узлуксиз ва D соҳада (E) тенгламани қаноатлантиради. Бундан ташқари, унга (64) формулаларнинг биринчисини татбиқ қилиб, (118) ни эътиборга олсак, $A_s[I_2(x, y)]|_{\sigma} = \varphi(s)$ келиб чиқади.

Табиийки,

$$\lim_{y \to 0} I_2(x, y) = 0.$$

Юқоридагилардан (114) формула билан аниқланувчи $u(x, y)$ функция аралаш масаланинг барча шартларини бажариши келиб чиқади. 6 – теорема исбот бўлди.

Изоҳ. (91) тенгликка асосан (114) формулани

$$u(x, y) = \int_{-a}^{a} \tau(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G_0(\xi, 0; x, y) + \frac{\partial}{\partial \eta} H(\xi, 0; x, y) \right] d\xi +$$

$$+ \int_{\sigma} \varphi(s) \left[G_0(\xi, \eta; x, y) + H(\xi, \eta; x. y) \right] ds$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин, бу ерда $H(\xi, \eta; x, y)$ – (113) тенглик билан аниқланувчи функция.

Аралаш масала ечимининг бу кўриниши (E) тенглама иштирок этган аралаш тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда анча қулайдир.

8–§. Баъзи қўшимчалар

Маълумки, IV бобнинг 8 – ва 9 – параграфларида $D_0 = \{(x,y): x^2 + [2/(m+2)]^2 y^{m+2} < 1,\ y > 0\}$ нормал соҳада (E) тенглама учун Хольмгрен ва Дирихле масалаларининг Грин функциялари мавжудлиги кўрсатилган ва бу масалалар ечимлари учун формулалар топилган эди. Аммо бу формулалар билан аниқланган функциялар тегишли масала чегаравий шартларини қаноатлантириши ва нормал бўлмаган соҳалар учун бу масалалар учун Грин функцияларининг мавжудлиги исботланмаган эди. Бу параграфда ана шу масалаларга ойдинлик киритамиз.

1. Хольмгрен масаласи. D соҳада (E) тенглама учун қўйилган Хольмгрен масаласининг Грин функцияси деб, қўйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1(\xi,\eta;x,y)$ функцияга айтилади:

1) D соҳанинг (x,y) дан ташқари барча нуқталарида ξ,η аргументлар бўйича (E) тенгламанинг регуляр ечими;

2) $$G_1(\xi,\eta;x,y)\Big|_{(\xi,\eta)\in\sigma} = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = 0, \quad (x,y)\in D; \qquad (119)$$

3) $$G_1(\xi,\eta;x,y) = q_1(\xi,\eta;x,y) + \upsilon_1(\xi,\eta;x,y) \qquad (120)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $q_1(\xi,\eta;x,y)$ ва $\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ – мос равишда (E) тенгламанинг D соҳадаги фундаментал ва регуляр ечимлари.

7 – теорема. D соҳада (E) тенглама учун қўйилган Хольмгрен масаласининг Грин функцияси мавжуд, (ξ,η) ва (x,y) нуқталарга нисбатан симметрик ва

$$G_1(\xi,\eta;x,y) = G_{01}(\xi,\eta;x,y) + H_1(\xi,\eta;x,y) \qquad (121)$$

кўринишга эга, бу ерда $H_1(\xi,\eta;x,y)$ – (E) тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими,

$$G_{01}(\xi,\eta;x,y) = q_1(\xi,\eta;x,y) - \left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta} q_1(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y}) -$$

– D_0 соҳа учун Хольмгрен масаласининг Грин функцияси, R, $\bar{x},\bar{y}$ лар эса (93) тенгликлар билан аниқланади.

Исбот. а) Мавжудлиги. Таърифдан келиб чиқадики, $G_1(\xi,\eta;x,y)$ Грин функцияси мавжудлигини кўрсатиш учун, $E(u)=0$ тенгламанинг

$$\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)\big|_{\sigma}=-q_1(\xi,\eta;x,y)\big|_{\sigma},\qquad (x,y)\in D; \tag{122}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)\Big|_{\eta=0}=0,\qquad (x,y)\in D \tag{123}$$

шартларни қаноатлантирувчи $\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ регуляр ечими мавжудлигини кўрсатиш етарли.

$\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ функцияни зичлиги $\mu_1(s;x,y)$ бўлган иккиланган қатлам потенциали кўринишида қидирамиз:

$$\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \mu_1(t;x,y)\,A_t\left[q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\right]dt \tag{124}$$

(124) функция D соҳада (E) тенгламани ва (123) шартни қаноатлантиради. $\mu_1(s;x,y)$ функцияни шундай танлайликки, $\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ функция (122) шартни ҳам қаноатлантирсин. Шу мақсадда (124) ни (122)га қўйиб, (29) формулаларнинг биринчисини эътиборга олсак, $\mu_1(\xi;x,y)$ га нисбатан

$$\mu_1(s;x,y)-2\int_0^l K_1(s,t)\,\mu_1(t;x,y)\,dt=2q_1(\xi(s),\eta(s);x,y) \tag{125}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

(125) тенгламанинг ўнг томони узлуксиз функция ва $\lambda=2$ $K_1(s,t)$ ядро учун хос сон эмас. Шунинг учун бу тенглама ягона узлуксиз ечимга эга ва уни

$$\begin{aligned}\mu_1(s;x,y)&=2q_1(\xi(s),\eta(s);x,y)+\\&+4\int_0^l R_1(s,t;2)q_1(\xi_1(t),\eta_1(t);x,y)dt\end{aligned} \tag{126}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $R_1(s,t;2)$ функция $K_1(s,t)$ ядронинг резольвентаси.

(126) ни (124) га қўйиб, $\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ни топамиз:

$$\begin{aligned}\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)&=2\int_0^l q_1(\xi_1,\eta_1;x,y)\,A_t\left[q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\right]dt+\\&+4\int_0^l\int_0^l A_t\left[q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\right]R_1(t,s;2)\,q_1(\xi_2(s),\eta_2(s);x,y)\,dt\,ds.\end{aligned} \tag{127}$$

Демак, $G_1(\xi,\eta;x,y)$ функция мавжуд.

б) Симметрикликги. Қуйидаги функцияни киритайлик:

$$g(\xi,\eta)=\begin{cases} \upsilon_1(\xi,\eta:x,y), & (\xi,\eta)\in D; \\ -q_1(\xi,\eta:x,y), & (\xi,\eta)\in D_1. \end{cases} \tag{128}$$

Бу функция D ва D_1 соҳаларда (E) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, чексизликда нолга интилади. $(x,y)\in D$ бўлгани учун $g(\xi,\eta)$ функция D_1 да ихтиёрий тартибли ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар ҳамда $g(\xi,\eta)$ функция $D_1\cup\sigma$ да узлуксиз. Шунинг учун $g(\xi,\eta)$ функцияга D_1 соҳада (E) тенгламанинг

$$A_s\left[g(\xi,\eta)\right]\Big|_\sigma=-A_s\left[q_1(\xi(s),\eta(s):x,y)\right]\Big|_\sigma,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}g(\xi,0)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими сифатида қарашимиз мумкин. Бу ечимни оддий қатлам потенциали кўринишида ёзиш мумкин:

$$g(\xi,\eta)=\int_0^l\rho_1(t:x,y)q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)dt,\qquad(\xi,\eta)\in D_1, \tag{129}$$

бу ерда $\rho_1(s;x,y)$ — номаълум функция.

(129) функцияга (53) формулаларнинг иккинчисини қўллаб, $\rho_1(s;\,x,y)$ функцияга нисбатан

$$\rho_1(s;x,y)-2\int_0^l K_1(t,s)\rho_1(t;,x,y)\,dt=2A_s\left[q_1(\xi(s),\eta(s);x,y)\right] \tag{130}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Бу (125) га қўшма тенглама бўлиб, унинг ўнг томони узлуксиз функциядир. Шунинг учун (130) тенглама ягона узлуксиз ечимга эга:

$$\begin{gathered}\rho_1(s:x,y)=2A_s\left[q_1(\xi(s),\eta(s);x,y)\right]+ \\ +4\int_0^l R_1(t,s,2)A_t\left[q_1(\xi_1,\eta_1;x,y)\right]dt.\end{gathered} \tag{131}$$

$g(\xi,\eta)$ оддий қатлам потенциали ва $\upsilon_1(\xi_1,\eta_1;x,y)$ функция D соҳа чегарасида бир хил шартни қаноатлантиради. У ҳолда, Хольмгрен масаласи ечимининг ягоналигига асосан, (128) тенглик билан аниқланган $g(\xi,\eta)$

функция учун (129) формула $(\xi,\eta)\in D$ бўлганда ҳам ўринли, яъни

$$\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \rho_1(t;x,y)q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)dt,\ (\xi,\eta)\in D. \qquad (132)$$

(131) тенгликнинг иккала томонини $q_1(\xi(s),\eta(s);\xi,\eta)$ га кўпайтириб ва s бўйича $[0,l]$ да интеграллаб, (127) ни эътиборга олсак,

$$\upsilon_1(x,y;\xi,\eta)=\int_0^l \rho_1(t;x,y)\,q_1(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,dt,\ (x,y)\in D$$

келиб чиқади. Буни (132) билан таққослаб,

$$\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)=\upsilon_1(x,y;\xi,\eta)$$

тенгликка эга бўламиз. Буни эътиборга олсак, (120) дан $G_1(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг (ξ,η) ва (x,y) нуқталарга нисбатан симметриклиги келиб чиқади.

в) (121) тенгликнинг исботи.

$$\upsilon_{01}(\xi,\eta;x,y)=\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta} q_1(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y})$$

функцияни

$$\upsilon_{01}(\xi,\eta;x,y)=-\int_0^l \rho_1(s;\xi,\eta)\upsilon_{01}(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y) \qquad (133)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатайлик, бу ерда $\rho_1(s;\xi,\eta)$ – (130) тенгламанинг ечими, яъни (131) тенглик билан аниқланувчи функция.

Ҳақиқатан ҳам, D соҳанинг ихтиёрий (x,y) нуқтасини олайлик ва қуйидаги функцияни қарайлик:

$$u(\xi,\eta,x,y)=-\int_0^l \rho_1(s;\xi,\eta)\upsilon_{01}(\xi_1(s),\eta_1(s);x,y)ds. \qquad (134)$$

Бу функция (E) тенгламани қаноатлантиради. $\rho_1(s;x,y)$ ўрнига (131) ифодани қўйсак,

$$u(\xi,\eta;x,y)=-\int_0^l \psi_1(s;x,y)\,A_s[q_1(\xi_1(s),\eta_1(s);\xi,\eta)]\,ds \qquad (135)$$

кўринишни олади, бу ерда

$$\psi_1(s;x,y)=2\upsilon_{01}(\xi(s),\eta(s);x,y)+4\int_0^l R_1(s;t,2)\,\upsilon_{01}(\xi_1,\eta_1;x,y)\,dt,$$

яъни $\psi_1(s;x,y)$ функция

$$\psi_1(s;x,y)-2\int_0^l K_1(s,t)\,\psi_1(t;x,y)\,dt=2\upsilon_{01}(\xi(s),\eta(s);x,y) \quad (136)$$

тенгламанинг ечими.

(135) – иккиланган қатлам потенциали бўлгани учун, унга (29) формулаларнинг биринчисини қўллаб,

$$u_i(\xi(s),\eta(s);x,y)=\frac{1}{2}\psi_1(s;x,y)-\int_0^l K_1(s,t)\,\psi_1(t;x,y)\,dt$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан, (136) тенгликка асосан,

$$u_i(\xi(s),\eta(s);x,y)=\upsilon_{01}(\xi(s);\eta(s);x,y), \quad (\xi(s),\eta(s))\in\bar{\sigma}$$

келиб чиқади.

Иккинчи томондан, $u_\eta(\xi,0;x,y)=\upsilon_{01\eta}(\xi,0;x,y)=0$.

Шундай қилиб, $u(\xi,\eta;x,y)$ ва $\upsilon_{01}(\xi,\eta;x,y)$ функциялар D соҳада (E) тенгламани ва унинг чегарасида эса бир хил шартларни қаноатлантиради. У ҳолда, Хольмгрен масаласи ечимининг ягоналигига асосан, улар D да ўзаро тенг, яъни (133) тенглик тўғри.

Ниҳоят, (120) тенгликнинг ўнг томонига $\upsilon_{01}(\xi,\eta;x,y)$ функцияни қўшиб ва айириб, сўнгра (132) ва (133) тенгликларни инобатга олсак, (121) тенгликнинг ўринли эканлиги осонгина келиб чиқади, бу ерда

$$H_1(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \rho_1(t;\xi,\eta)G_{01}(\xi_1,\eta_1;x,y)dt. \quad (137)$$

7 – теорема исбот бўлди.

Изоҳ: қуйидаги тенглик ўринли:

$$A_s[G_1(\xi(s),\eta(s);x,y)]=\rho_1(s;x,y). \quad (138)$$

Ҳақиқатан ҳам, (132) оддий қатлам потенциалига (53) формулаларнинг биринчисини қўлласак,

$$2A_s[\upsilon_1(\xi(s),\eta(s);x,y)]=\rho_1(s;x,y)+2\int_0^l K_1(t,s)\rho_1(t,;x,y)dt$$

тенгликка эга бўламиз. Буни (130) билан таққосласак, (138) келиб чиқади.

8 – теорема. Агар $\varphi(s)\in C[0,l]$, $v(x)\in C(-a,a)$ бўлса,

$$u(x,y)=-\int_{-a}^{a}v(\xi)\,G_1(\xi,0;x,y)\,d\xi-\int_{0}^{l}\varphi(s)\,A_s\left[G_1(\xi,\eta;x,y)\right]ds \quad (139)$$

функция $\overline{D}$ да узлуксиз, D соҳада (E) тенгламани ва унинг чегарасида эса (73) шартларни қаноатлантиради, яъни Хольмгрен масаласи ечимини ифодалайди, бу ерда $v(x)$ функция $x\to\pm a$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин.

Исбот: Табиийки, (139) формуладаги интеграллар x,y нинг функцияси сифатида $\overline{D}$ да узлуксиз ва D соҳада (E) тенгламани қаноатлантиради. Ушбу белгилашни киритайлик:

$$Q_1(x,y)=\int_{a}^{a}v(\xi)\,q_1(\xi,0;x,y)\,d\xi\,. \quad (140)$$

(139) даги биринчи интегрални $I_1(x,y)$билан белгилаб, (120), (127) тенгликлардан ва $\upsilon_1(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг симметриклигидан фойдалансак, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_1(x,y)=-Q_1(x,y)-$$

$$-2\int_0^l A_t\left[q_1(\xi,\eta;x,y)\right]\left[Q_1(\xi,\eta)+2\int_0^l R_1(t,s;2)\,Q_1(\xi_1(s),\eta_1(s))ds\right]dt.$$

Бу ердаги интеграл иккиланган қатлам потенциали бўлиб, унга (29) формулаларнинг биринчисини қўлласак ва $R_1(s,t;2)$ резольвента учун ўринли бўлган [33]

$$R_1(s,t;2)=K_1(s,t)+2\int_0^l K_1(s,t_1)R_1(t_1,t;2)\,dt_1$$

тенгламани эътиборга олсак, $I_1(x,y)\big|_{\overline{\sigma}}=0$ келиб чиқади.

(132), (133) ва (140) ларга асосан, $I_1(x,y)$ ни

$$I_1(x,y)=-Q_1(x,y)-\int_{-a}^{a}v(\xi)\,d\xi\int_0^l\rho_1(t;\xi,0)\,q_1(\xi_1,\eta_1;x,y)\,dt \quad (141)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Табиийки, (141) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчининг y бўйича ҳосиласи $y=0$ да нолга тенг. 6 – параграфда кўрсатилганки,

$$\lim_{y\to 0} Q_1(x,y) = -\nu(x), \; -a < x < a.$$

Демак,

$$\lim_{y\to 0} I_1(x,y) = \nu(x), \; -a < x < a.$$

(139) формуладаги иккинчи интегрални $I_2(x,y)$ билан белгиласак, (131) ва (138) ларга асосан,

$$I_2(x,y) = -\int_0^l \varphi(s)\rho_1(s;x,y)\,ds = -\int_0^l \theta_1(t) A_t\left[q_1(\xi,\eta;x,y)\right]dt \quad (142)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\theta_1(t) = 2\varphi(t) + 4\int_0^l R_1(t,s;2)\,\varphi(s)\,ds,$$

яъни $\theta_1(s)$ функция

$$\theta_1(s) - 2\int_0^l K_1(s,t)\theta_1(t)dt = 2\varphi(s) \quad (143)$$

интеграл тенгламанинг ечими. $\theta_1(s)$ функция узлуксиз бўлгани учун (142) функция $\overline{D}$ да узлуксиз ва D соҳада (E) тенгламани қаноатлантиради. Бундан ташқари, унга иккиланган қатлам потенциали сифатида қараб, (29) формулаларнинг биринчисини қўлласак ва (143) ни эътиборга олсак, $I_2(x,y)\big|_{\overline{\sigma}} = \varphi(s)$ келиб чиқади. Табиийки, $I_{2y}(x,0) = 0, \; -a < x < a.$

Юқоридагилардан (139) функция (73) шартларни бажариши келиб чиқади. 8 – теорема исбот бўлди.

Изоҳ. (121) ва (139) тенгликларга асосан Хольмгрен масаласи ечимини

$$u(x,y) = -\int_{-a}^{a} \nu(\xi)\left[G_{01}(\xi,0;x,y) + H_1(\xi,0;x,y)\right]ds -$$

$$-\int_0^l \varphi(s)\left\{ A_s\left[G_{01}(\xi_1,\eta_1;x,y)\right] + A_s\left[H_1(\xi_1,\eta_1;x,y)\right]\right\}ds \quad (144)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$G_{01}(\xi,0;x,y)=k_1\left\{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}-\right.$$

$$\left.-\left[\left(a-\frac{\xi x}{a}\right)^2+\frac{4\xi^2}{a^2(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}\right\},$$

$H_1(\xi,\eta;x,y)$ эса (137) тенглик билан аниқланувчи функция.

Хольмгрен масаласи ечимининг (144) кўриниши (E) тенглама иштирок этган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда қулайдир.

D_0 нормал соҳа учун $H_1(\xi,0;x,y)\equiv 0$ бўлиб, (144) формула

$$u(x,y)=-k_1\int_{-a}^{a}v(\xi)\left\{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}-\right.$$

$$\left.-\left[\left(a-\frac{\xi x}{a}\right)^2+\frac{4\xi^2}{a^2(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}\right\}d\xi-$$

$$-k_1\beta(m+2)\left(a^2-R^2\right)\int_0^l\eta^{-1}\varphi(s)r_1^{-2(\beta+1)}F(\beta,\beta+1,2\beta;\sigma_1)\xi'(s)\,ds$$

содда кўринишни олади.

2. Дирихле масаласи. D соҳада (E) тенгламага қўйилган Дирихле масаласининг Грин функцияси деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_2(\xi,\eta;x,y)$ функцияга айтилади:

1) D соҳанинг (x,y) дан ташқари барча нуқталарида ξ,η ўзгарувчиларга нисбатан (E) тенгламанинг регуляр ечими;

2) $G_2(\xi,\eta;x,y)\Big|_{(\xi,\eta)\in\bar\sigma\cup\overline{AB}}=0,\quad (x,y)\in D;$

3) $G_2(\xi,\eta;x,y)=q_2(\xi,\eta;x,y)+\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)$ (145)

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $q_2(\xi,\eta;x,y)$ ва $\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)$ $-(E)$ мос равишда (E) тенгламанинг D соҳадаги фундаментал ва регуляр ечимлари.

9 – теорема. D соҳада (E) тенгламага қуйилган Дирихле масаласининг Грин функцияси мавжуд, (ξ,η) ва (x,y) нуқталарга нисбатан симметрик ва

$$G_2(\xi,\eta;x,y)=G_0(\xi,\eta;x,y)+H_2(\xi,\eta;x,y) \tag{146}$$

кўринишга эга, бу ерда $H_2(\xi,\eta;x,y)-(E)$ тенгламанинг D соҳадаги регуляр ечими, $G_0(\xi,\eta;x,y)$ эса (92) тенглик билан аниқланувчи функция.

Исбот. а) Мавжудлиги. Грин функцияси мавжудлигини кўрсатиш учун, $E(u)=0$ тенгламнинг

$$\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)\big|_{\sigma}=-q_2(\xi,\eta;x,y)\big|_{\bar\sigma}, \qquad (x,y)\in D;$$
$$\upsilon_2(\xi,0;x,y)=0, \quad (x,y)\in D \tag{147}$$

шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими мавжудлигини кўрсатиш етарли. Уни иккиланган қатлам потенциали шаклида, яъни

$$\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \mu_2(t;x,y)A_t\left[q_2(\xi,\eta;x,y)\right]dt$$

кўринишда қидириб ва (124) функцияни аниқлашда қилинган мулоҳазаларни такрорлаб, (147) шартлардан фойдалансак,

$$\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)=2\int_0^l q_2(\xi_1,\eta_1;x,y)A_t\left[q_2(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\right]dt+$$
$$+4\int_0^l\int_0^l A_t\left[q_2(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\right]R_2(t,s;2)\,q_2(\xi_2(s),\eta_2(s);x,y)\,dt\,ds$$

келиб чиқади, бу ерда $R_2(t,s;2)$ функция $K_2(s,t)$ ядро резольвентаси.

б) $G_2(\xi,\eta;x,y)$ функциянинг (ξ,η) ва (x,y) нуқталарга нисбатан симметриклиги худди Хольмгрен ва аралаш (К) масаладаги каби исботланади.

в) (146) тенгликнинг исботи. Аввалги масалалардаги каби $\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)$ функцияни ҳам

$$\upsilon_2(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \rho_2(t;x,y)\,q_2(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,dt \tag{148}$$

оддий қатлам потенциали шаклида ёзиш мумкин, бу ерда $\rho_2(s;x,y)$ функция

$$\rho_2(s;x,y)-2\int_0^l K_2(t,s)\rho_2(t;x,y)dt = 2A_s[q_2(\xi(s),\eta(s);x,y)] \quad (149)$$

интеграл тенгламанинг ечими.

Энди (145) тенгликнинг ўнг томонига (108) тенглик билан аниқланувчи $\upsilon_0(\xi,\eta;x,y)$ функцияни қўшиб ва айириб, (92) ва (148) ни эътиборга олсак, (146) келиб чиқади, бу ерда

$$H_2(\xi,\eta;x,y)=\int_0^l \rho(t;\xi,\eta)\, G_0(\xi_1,\eta_1;x,y)dt. \quad (150)$$

9–теорема исботланди

Изоҳ. (148) функцияга (64) формулаларнинг биринчисини қўллаб, (149) ни ҳисобга олсак,

$$A_s[G_2(\xi(s),\eta(s);x,y)]=\rho_2(s;x,y) \quad (151)$$

тенглик келиб чиқади.

10–теорема. Агар $\tau(x)\in C[-a,a], \varphi(s)\in C[0,l], \tau(-a)=\varphi(l)$, $\tau(a)=\varphi(0)$ бўлса,

$$u(x,y)=\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;x,y)\,d\xi-\int_0^l\varphi(s)\,A_s[G_2(\xi,\eta;x,y)]\,ds \quad (152)$$

функция (E) тенгликнинг $\overline{D}$ да узлуксиз, D соҳада регуляр ва (72) шартларни қаноатлантирувчи ечими, яъни Дирихле масаласи ечимини аниқлайди.

Бу теорема ҳам 6– ва 8–теоремалар каби исботланади.

Изоҳ. (146) тенгликка асосан (152) ечимни

$$u(x,y)=\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G_0(\xi,0;x,y)+\frac{\partial}{\partial\eta}H_2(\xi,0;x,y)\right]d\xi$$

$$-\int_0^l\varphi(s)\left\{A_s\left[G_0(\xi,\eta;x,y)\right]+A_s\left[H_2(\xi,\eta;x,y)\right]\right\}ds$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $H_2(\xi,\eta;x,y)$ – (150) формула билан аниқланган функция,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}G_0(\xi,0;x,y)=k_2y\left\{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}-\right.$$

$$-\left[\left(a-\frac{\xi x}{a}\right)^2+\frac{4\xi^2 y^{m+2}}{a^2(m+2)^2}\right]^{\beta-1}\Bigg\}.$$

D_0 нормал соҳа учун ечим формуласи содда ёзилади:

$$u(x,y)=k_2 y\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\left\{\left[(\xi-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{\beta-1}-\right.$$

$$\left.-\left[\left(a-\frac{\xi x}{a}\right)^2+\frac{4\xi^2 y^{m+2}}{a^2(m+2)^2}\right]^{\beta-1}\right\}d\xi-k_2(1-\beta)(m+2)y\left(a^2-R^2\right)\times$$

$$\times\int_0^l\varphi(s)r_1^{-2(2-\beta)}F(1-\beta,2-\beta,2-2\beta;\sigma_1)\xi'(s)ds.$$

Фойдаланилган адабиётлар

1. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа: Дис.... доктора физ.-мат.наук. –М.: Матем ин-т РАН, 1952.

2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. –М.: Наука, 1966. -204 б.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. –М.: Наука, 1981. -448 б.

4. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1982. –336 б.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие транцендентные функции. –М.: Наука, 1965. Том I. –296 б.

6. Волкодавов В.Ф., Невоструев Л.М. О принципе локального экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу //Волжский математический сборник. –Куйбышев, 1966. Вып. №5. –Б. 70-78.

7. Гордеев А.М. Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Волжский математический сборник. -Куйбышев, 1968. Вып.6. –Б. 51-61.

8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы, интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ., 1962. –1100 б.

9. Зайнулабидов М.М. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения //Дифференциальные уравнения. –1966. T.V. №1. –Б. 91-99.

10. Исамухамедов С.С. О свойствах функции Грина задачи Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // Сборник: Краевые задачи для дифференциальных уравнений. –Ташкент: Фан, 1971. –Б. 68-73.

11. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник. –1952. Т.30(72). № 1. –Б. 11-38.

12. Капилевич М.Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференциальные уравнения. –1966. Т. II. № 9. –Б. 1239-1253.

13. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциальные уравнения. –1968. Т. IV. №8. –Б. 1466-1483.

14. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. - 1953. 88. 2. –Б.197-200.

15. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. - 1953. 88. 3. -Б. 397-400.
16. Кароль И.Л. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник.–1956. 38 (80).3. –Б. 261-283.
17. Карпухин Ю.П. Задача N для уравнения с двумя линиями вырождения второго рода // Волжский математический сборник. – Куйбышев, 1967. Вып. 7. –Б. 27-31.
18. Карпухин Ю.П. Решение задачи Коши для уравнения с двумя линиями вырождения второго рода методом Римана // Волжский математический сборник. –Куйбышев, 1968.Вып.6. –Б. 90-94.
19. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. -1951. т.77. –Б. 181-183.
20. Кошляков А.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. –М.: Физматгиз, 1962. – 768 б.
21. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа. 1962. –424 б.
22. Макаров И.А. Задачи Коши для уравнения с двумя линиями вырождения второго род // Сборник: Математическая физика. – Куйбышев, 1976. Б. 3-7.
23. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. –М.: Издательство иностранной литературы, 1957. – 256 б.
24. Нахушев А.М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго поряд-ка. – Нальчик: 1992. –155 б.
25. Пестун Л.В. Решение задачи Коши для уравнения $y^{\beta}u_{xx}-x^{\alpha}u_{yy}=0$ //Волжский математический сборник.–Куйбышев, 1965. Вып. 3.–Б. 289-295.
26. Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта // Известия вузов. Математика.–1960. №6 (19).
27. Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С. Краевые задачи для одного уравнения смешанного типа // Изв. АН. УзССР, серия физико-математических наук. - 1968, №5. –Б. 7-10.
28. Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // Сердико Българско математическо списание. –1977. Т.3. –Б. 181-188.

29. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых задачах со смешением для уравнения гиперболического типа, вырож-дающегося на границе//Изв. АН.УзССР, серия физ-мат наук.–1980. №1. –Б. 16-21.
30. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения вырождающегося внутри области //Дифференциальные уравнения. –1981. Т.XVII. № 1. –Б. 129-136.
31. Салахитдинов М.С., Уринов А. К., Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Тошкент: Фан. 1997. –168 б.
32. Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.– Тошкент: Ўзбекистон, 2002. –448 б.
33. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.IV., ч I.–М.: Наука, 1974. –336 б.
34. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. –М.: Наука, 1966. –292 б.
35. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. –М.:Наука, 1970. –296 б.
36. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. –М.: Высшая школа, 1985. –304 б.
37. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. –Новосибирск: 1973. –143 б.
38. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. –М.: Издательство иностранной литературы, 1957. –440 б.
39. Ўринов А.Қ. Телеграф тенгламаси учун чегаравий масалалар. –Тошкент: Университет, 1996. –46 б.
40. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. –Commun. Pure and Appl. Math., 1953. v.6. –p. 455-470.
41. Blum E.K. The solutions of the Euler-Darboux equation for negative values of the parameter. –Duke Math. J., 1954. v.21. –p. 257-269.
42. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. -Thesis., Uppsala, 1935.
43. Gellerstedt S. Sur une equation lineare aux derivees partielles de type mixte.–Arkiv Math., Ast. och Fysik.,1937. 25A. №29.
44. Protter M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line.–Can.J.of Math., 1954.v.6. №4. –p.542-553.

Мундарижа

III боб. Гиперболик типдаги бузиладиган тенгламалар

V боб. $E(u)=0$ тенглама учун потенциаллар назарияси

Махмуд Салоҳиддинович Салоҳиддинов
Аҳмаджон Қўшоқович Ўринов

ГИПЕРБОЛИК ВА ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ БУЗИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР
(ўқув қўлланма)

Муҳаррир: З.Ахмеджанова
Мусаҳҳиҳа: М.Джўраева

Босишга рухсат этилди 05.12.2006 й.
Бичими 60×84 1/16. Нашриёт ҳисоб табоғи 12,7.
Шартли босма табоғи 28,5. Адади 200 нусха.
Баҳоси шартнома асосида. Буюртма №41

«Университет» нашриёти. Тошкент—100174.
Талабалар шаҳарчаси, Мирзо Улуғбек номидаги
Ўзбекистон Миллий университети.
Маъмурий бино, 2—қават, 7—хона.

ЎзМУ босмахонасида босилди.