Высшая математика

Задачник

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по экономическим специальностям

Минск
«Вышэйшая школа»
2012

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73
В93

А в т о р ы: *Е. А. Ровба, А. С. Ляликов, Е. А. Сетько, К. А. Смотрицкий*

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики Белорусского государственного экономического университета; заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В. Г. Кротов*

Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с. : ил.
В93 ISBN 978-985-06-2150-4.

В пособие включено большое количество разнообразных задач по всем разделам общего курса высшей математики. Приведены примеры решения типовых задач. Рассматриваются приложения изучаемого материала в экономике.

Для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям. Может быть полезно магистрантам и преподавателям, читающим одноименный курс.

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2150-4

Оглавление

Предисловие

Данный задачник является практической частью единого учебного комплекса по дисциплине «Высшая математика» для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям. Комплекс включает также теоретическую часть, материалом которой необходимо овладеть для успешного решения приводимых здесь задач. Весь комплекс подготовлен одним и тем же коллективом авторов на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по высшей математике.

Содержание задачника соответствует теоретической части комплекса. В нем приведены задачи по следующим темам: линейная алгебра, аналитическая геометрия, предел последовательности и функции, дифференциальное исчисление функций одной переменной, теория интегрирования, дифференцирование функций двух переменных, дифференциальные уравнения, ряды.

Квалифицированный специалист экономического профиля при решении своих профессиональных задач может столкнуться с необходимостью построения математических моделей. В целях развития этого полезного практического навыка в книге приводятся задачи с экономическим содержанием, решение которых требует применения математического аппарата.

Общая структура пособия позаимствована из теоретической части: здесь вы найдете те же главы и параграфы. Большинство задач снабжено ответами, указаниями или решениями. Ответы и указания приведены в конце книги. Каждый блок задач, объединенных общей идеей, содержит решения типовых примеров.

В задачнике имеется довольно много отсылок к теоретической части комплекса. В таких случаях при оформлении ссылки на нумерованный объект теоретической части применяется индекс «т» (первая буква слова «теория») в верхнем индексе. Например, во фразе «Согласно формуле $(1.1)^{\text{т}}$» подразумевается формула (1.1) теоретической части.

Как показывает опыт авторов, приведенных в данном учебном пособии задач с избытком хватит для закрепления материала соответствующих разделов курса. Преподаватель же сможет не только разнообразить выбор задач в пределах каждого раздела и подобрать задания для итоговых занятий и контрольных работ, но и организовать факультативные занятия с наиболее успевающими студентами.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (особо заведующему кафедрой доктору физико-математических наук, профессору М.П. Дымкову) и заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, замечания и рекомендации которых способствовали улучшению учебного пособия.

Все отзывы и предложения просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

Глава 1

Линейная алгебра

1.1. Матрицы и определители

1. Найти значение матричного выражения:

1) $2A - 4B, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix};$

2) $2A - 4B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix};$

3) $-2A - 4B, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix};$

4) $2A + 4B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$

5) $-3A - 5B, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$

6) $-2A + 4B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 7 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix};$

7) $-2A-5B, \quad A=\begin{pmatrix}2&3&7\\1&0&0\\-2&3&1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2&0&4\\7&-1&-3\\-2&3&4\end{pmatrix};$

8) $-3A+3B, \quad A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&4&1\\-2&-3&-4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-7&6&1\\4&-3&-4\\1&-3&-2\end{pmatrix};$

9) $-2A+4B, \quad A=\begin{pmatrix}-4&-3\\1&-1\\1&-4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\\-5&-1\end{pmatrix};$

10) $-3A+4B, \quad A=\begin{pmatrix}5&-6&-5\\-2&-2&1\\4&-2&4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-7&-3&7\\-5&0&2\\7&-4&1\end{pmatrix};$

11) $-3A-5B, \quad A=\begin{pmatrix}-1&-6\\-5&-3\\-5&-2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&0\\7&-2\end{pmatrix};$

12) $-3A-4B, \quad A=\begin{pmatrix}-4&0&7\\-5&-2&4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-4&-3&-2\\1&-3&-3\end{pmatrix};$

13) $-3A+4B, \quad A=\begin{pmatrix}-1&6&4\\-2&-2&4\\7&2&3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1&-3&-5\\-5&-4&-2\\-5&2&-5\end{pmatrix};$

14) $-2A-5B, \quad A=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-7&6&4\\1&3&1\end{pmatrix};$

15) $2A-5B, \quad A=\begin{pmatrix}5&0&-2\\4&-1&3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-7&6&4\\-5&4&-3\end{pmatrix};$

16) $-3A+4B, \quad A=\begin{pmatrix}-7&6&-5\\-2&0&2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}5&-3&4\\7&0&-1\end{pmatrix};$

17) $-3A-4B, \quad A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-5&-2&-4\\1&4&3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-7&6&-5\\7&4&3\\-2&-1&4\end{pmatrix};$

18) $-2A+3B, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

19) $5A-5B, \quad A=\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -7 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};$

20) $-2A-4B, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix};$

21) $A-\lambda E, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е п. 1. По определению операций суммы матриц и произведения матрицы на число

$$2A-4B=2\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 8 & -4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 16 & -16 \\ 28 & 12 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -8-20 & 0+12 \\ 8-16 & -4+16 \\ -10-28 & 6-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -28 & 12 \\ -8 & 12 \\ -38 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц AB:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix};$

3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix};$

5) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$

6) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix};$

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$

8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};$

9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

11) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix};$

12) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix};$

14) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

15) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

16) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix};$

17) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix};$

18) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix};$

19) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

20) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е п. 1. По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1(-1) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1(-2) \\ -2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 2(-1) & -2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 2(-2) \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 5(-1) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 5(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -1 & -7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение матриц AB:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$; ***2)*** $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; ***4)*** $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; ***6)*** $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; ***8)*** $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; ***10)*** $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; ***12)*** $A=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. В данном случае имеем произведение вектора-строки на вектор-столбец:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3(-2) + 3(-5) + (-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}.$$

4. Найти и сравнить произведения AB и BA:

1) $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; ***2)*** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$; ***4)*** $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; ***6)*** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$; ***8)*** $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$; ***10)*** $A=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; ***12)*** $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Найти произведение трех матриц:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Пользуясь свойством ассоциативности умножения матриц, начнем с поиска произведения первой и второй матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-3)+0\cdot 4 & 3\cdot 0+0(-2) \\ 0(-3)+(-1)4 & 0\cdot 0+(-1)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Домножим результат на третью матрицу справа:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9(-1)+0(-1) & -9(-3)+0(-1) \\ -4(-1)+2(-1) & -4(-3)+2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 9, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $f(x) = -2x^2 - 3x + 8, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

6) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix};$

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

8) $f(x) = x^2 + 3x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$

9) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

10) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$

11) $f(x) = x^2 + 4x - 6, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

12) $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$

13) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix};$

14) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

15) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 6, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

16) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

17) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

18) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

19) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 8, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

20) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е п. 11. Находим квадрат матрицы A:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & -10 \\ -8 & 28 & 10 \\ 10 & 25 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем значение матричного многочлена:

$$f(A) = A^2 + 4A - 6E =$$
$$= \begin{pmatrix} 26 & 0 & -10 \\ -8 & 28 & 10 \\ 10 & 25 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -20 & -10 \\ -16 & 38 & 18 \\ -6 & 29 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить произведения AA^T и A^TA, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$ ***2)*** $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; ***4)*** $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; ***6)*** $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; ***8)*** $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; ***10)*** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; ***12)*** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Находим матрицу, транспонированную к A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 0\cdot 0 & 3\cdot 4 + 0\cdot 2 & 3\cdot 1 + 0(-1) \\ 4\cdot 3 + 2\cdot 0 & 4\cdot 4 + 2\cdot 2 & 4\cdot 1 + 2(-1) \\ 1\cdot 3 + (-1)0 & 1\cdot 4 + (-1)2 & 1\cdot 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 12 & 20 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 4\cdot 2 + 1(-1) \\ 0\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-1)1 & 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Вычислить определитель второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$; ***2)*** $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$; ***3)*** $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; ***4)*** $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; ***5)*** $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$; ***7)*** $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$; ***8)*** $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; ***9)*** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$; ***10)*** $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$; ***12)*** $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}$; ***13)*** $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; ***14)*** $\begin{vmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$; ***15)*** $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$; ***17)*** $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$; ***18)*** $\begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}$; ***19)*** $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$; ***20)*** $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$;

21) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$; ***22)*** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; ***23)*** $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$; ***24)*** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Согласно определению

$$\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 8(-3) - (-7)(-8) = -24 - 56 = -80.$$

9. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$; ***2)*** $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$; ***3)*** $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$;

4) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; ***5)*** $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$; ***6)*** $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0$;

7) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; ***8)*** $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6$; ***9)*** $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4$;

10) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34$; ***11)*** $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Вычисляя определитель, получаем, а затем решаем уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2x+1)2 - 3(x+5) = 0, \quad x - 13 = 0, \quad x = 13.$$

10. Вычислить определитель третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; ***2)*** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; ***3)*** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; ***4)*** $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; ***6)*** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; ***7)*** $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; ***8)*** $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; ***10)*** $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$; ***11)*** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; ***13)*** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; ***14)*** $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; ***16)*** $\begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; ***17)*** $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$; ***19)*** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; ***20)*** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; ***21)*** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;

22) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; ***23)*** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$; ***24)*** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$;

25) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$; ***26)*** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$; ***27)*** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$;

28) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$; ***29)*** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Применим правило треугольников (см. рис. $1.3^{т}$):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-2)4 + 0\cdot 3\cdot 3 + 3(-3)(-3) - \\ - 3(-2)\cdot 3 - 0(-3)\cdot 4 - 2\cdot 3(-3) = \\ = -16 + 0 + 27 + 18 + 0 + 18 = 47.$$

11. Решить уравнения и неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0;$ ***2)*** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0;$ ***3)*** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

4) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ ***5)*** $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leqslant 4;$ ***7)*** $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

8) $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6;$ ***9)*** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$

Р е ш е н и е п. 1. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & \boxed{3} \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2\Big(7\cdot 6 - (-3)(x-3)\Big) + 3\Big((-1)(-3) - 5\cdot 7\Big) = 0,$$

$$2(3x+33) + 3(-32) = 0, \quad 6x - 30 = 0, \quad x = 5.$$

12. Вычислить определитель четвертого порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix};$ ***2)*** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix};$ ***3)*** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; **9)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **11)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; **12)** $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; **14)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; **16)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **17)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; **19)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; **20)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

21) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **22)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **23)** $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 3 & d & x \end{vmatrix}$;

24) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; ***25)*** $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Вторая строка содержит один нуль и единицу. Пользуясь теоремой Лапласа, будем раскладывать определитель по элементам этой строки, предварительно обратив в нуль все ее элементы, кроме -1, путем элементарных преобразований. Для этого, поочередно домножая четвертый столбец на 4 и -2, будем добавлять результат соответственно к первому и третьему столбцам:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & \boxed{-1} \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -10 & -2 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из второй строки -2, обратим в нуль все элементы второго столбца, кроме единицы, и разложим определитель по элементам этого столбца:

$$D = 2 \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 5 & \boxed{1} & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -21 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & -3 \\ 13 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -21 & 10 \\ 13 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\Big((-21)(-6) - 13 \cdot 10\Big) = 2(126 - 130) = -8.$$

13. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 9 & 6 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; ***2)*** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$; ***3)*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; *5)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; *7)* $\begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & b & c & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & a \end{vmatrix}$.

Решение п. 1. Из первой строки вычтем сумму четвертой и пятой строк, а из второй — сумму третьей и четвертой строк. Обозначим исходный определитель через Δ. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)1 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1+18) = -57.$$

14. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 2n \end{vmatrix}$; *2)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Обозначим данный определитель через Δ и представим его в виде суммы двух других определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0+n & 0+n & 0+n & \dots & 0+n & n+n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей треугольный, потому он равен произведению диагональных элементов, т.е.

$$n!.$$

Второй определитель равен нулю, так как его первая и последняя строки пропорциональны. Значит,

$$\Delta = n! + 0 = n!.$$

15. Для матрицы второго порядка найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -38 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 23 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -7 & -18 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; ***15)*** $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; ***18)*** $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение п. 1. Обозначим данную матрицу A. Применим формулу $(1.7)^{\text{т}}$ для вычисления обратной матрицы для матрицы второго порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{3(-5) - 6(-1)} \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} & \dfrac{2}{3} \\[2ex] -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{5}{9} & \dfrac{2}{3} \\[2ex] -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \dfrac{5}{9} + 6\left(-\dfrac{1}{9}\right) & 3 \cdot \dfrac{2}{3} + 6\left(-\dfrac{1}{3}\right) \\[2ex] -1 \cdot \dfrac{5}{9} + (-5)\left(-\dfrac{1}{9}\right) & -1 \cdot \dfrac{2}{3} + (-5)\left(-\dfrac{1}{3}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3} & 2 - 2 \\[2ex] -\dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{9} & -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

16. Для матрицы третьего порядка найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -6 & -3 & 16 \\ -9 & -4 & 20 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} -25 & -15 & -10 \\ 20 & 15 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -18 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; ***5)*** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 15 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 16 & -10 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -25 \\ 2 & 1 & -35 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -20 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; ***9)*** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ -4 & -12 & -14 \\ -12 & -24 & -28 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -14 \\ -3 & 3 & -19 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 18 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 36 & 8 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} -16 & -4 & -12 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 15 & -6 & -3 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; ***17)*** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -18 \\ 1 & 3 & 24 \\ -1 & -1 & -15 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 95 & 20 & -15 \\ -4 & -2 & 0 \\ 40 & 10 & -5 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} -22 & 8 & 4 \\ -11 & 3 & 2 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} 18 & 4 & 4 \\ -54 & -18 & -12 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Обозначим данную матрицу через A и вычислим ее определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & \boxed{-1} & -4 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)(-2) - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому обратная матрица существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2.$$

Заметив, что знаки алгебраических дополнений чередуются, сокращаем выкладки:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9, \ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Присоединенная матрица A^* представляет собой транспонированную матрицу алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -9 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $(1.6)^{\text{т}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -9 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10+4+8 & 10-2-8 & 25-9-16 \\ -2+4-2 & 2-2+2 & 5-9+4 \\ -4+0+4 & 4+0-4 & 10+0-8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E.$$

17. Для следующей матрицы найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Решить матричное уравнение:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; ***4)*** $X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 3 & -24 \end{pmatrix}$; ***6)*** $X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$; ***8)*** $X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 2 \\ -3 & -33 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -59 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -28 & -16 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

16) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$;

17) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ -1 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ -23 & -2 & 7 \\ -13 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 1 & -12 & -5 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -9 & 17 & -20 \\ -13 & 23 & -32 \\ 7 & -14 & 22 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -1 & -8 & -10 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & -19 & 14 \\ -32 & -17 & 12 \\ 30 & 11 & -6 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -8 & -6 & -1 \\ -4 & 12 & 1 \end{pmatrix}$;

22) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -7 & 40 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ 12 & -9 & 16 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 9. Запишем уравнение в виде $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 32 & 2 \\ -3 & -33 \end{pmatrix}.$$

Умножаем это уравнение слева на A^{-1} и справа на B^{-1}: $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Находим A^{-1} и B^{-1} по формуле $(1.7)^{\text{т}}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу X:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{15}\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 2 \\ -3 & -33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 126 & -28 \\ 21 & -63 \end{pmatrix} = \frac{1}{15 \cdot 7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot 7\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 60 & -30 \\ 15 & -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

19. Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ -10 & -10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$; ***5)*** $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; ***9)*** $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 18 & 13 & 19 & -11 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 & 5 \\ 6 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 12 & 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; **15)** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; **17)** $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; **18)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; **20)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; **21)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} -4 & -9 & -3 & 7 & -4 \\ -3 & -6 & 3 & 5 & -4 \\ -3 & -3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; **23)** $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & -4 \\ 16 & 14 & 6 & -14 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \\ -11 & -10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$; **25)** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -10 & 4 & -12 & 6 & 2 \\ 10 & -4 & 12 & -6 & -2 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **27)** $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & 16 & -2 & 20 \\ 2 & 7 & 21 & -1 & 25 \\ -4 & 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & -4 & 1 \\ 9 & 12 & 6 & -6 & -12 \\ -3 & -4 & -2 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; **29)** $\begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 11 & 7 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 36 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; **31)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ -5 & -11 & -11 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$;

$$\textbf{\textit{32)}}\ \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & 6 & -3 & -11 \\ 33 & -12 & -15 & 6 & 18 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{\textit{33)}}\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{34)}}\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ -16 & -18 & -10 & -8 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & 7 & 16 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{\textit{35)}}\ \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{36)}}\ \begin{pmatrix} 16 & 3 & -12 & -8 & 24 & 12 \\ -28 & -5 & 20 & 14 & -42 & -20 \\ 20 & 6 & -15 & -16 & 48 & 24 \\ -35 & -10 & 25 & 28 & -84 & -40 \end{pmatrix}; \quad \textbf{\textit{37)}}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & -11 & 16 \\ 4 & 12 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е п. 33. Будем приводить данную матрицу к ступенчатому виду, выполняя над ней элементарные преобразования и вычеркивая нулевые ряды:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ \boxed{3} & -4 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Разделим последнюю строку на 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & \boxed{2} & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица имеет три строки. Значит, искомый ранг равен 3.

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

1.2.1. Общие задачи

20. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера (1.13)т:

1) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x-y=15; \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} -2x-6y=10, \\ 2x+5y=-8; \end{cases}$ *3)* $\begin{cases} 2x-8y=10, \\ 3x-10y=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y=-7, \\ 5x+5y=-10; \end{cases}$ *5)* $\begin{cases} -6x+6y=-24, \\ -3x-y=-16; \end{cases}$ *6)* $\begin{cases} x+y=0, \\ 5x+8y=-15; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 10x-13y=-23; \end{cases}$ *8)* $\begin{cases} -6x-6y=24, \\ 3x+y=-8; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -15x+14y=-1; \end{cases}$ *10)* $\begin{cases} 6x+6y=12, \\ 12x+17y=14; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 8x-6y+5z=15, \\ 13x-10y+z=32, \\ 2x-2y+z=5; \end{cases}$ *12)* $\begin{cases} 7x+9y+z=8, \\ 13x+15y+9z=6, \\ 2x+3y+z=2; \end{cases}$

13) $\begin{cases} -8x+4y=12, \\ 2y-5z=7, \\ 3x-2y+z=-6; \end{cases}$ *14)* $\begin{cases} -10x+9y-2z=-28, \\ -17x+15y-4z=-47, \\ -4x+3y=-10; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4x_1-x_2-4x_3+6x_4=23, \\ -4x_1+2x_3-4x_4=-10, \\ -x_1+x_2+x_3-2x_4=-6, \\ x_1+3x_2-4x_3+2x_4=25; \end{cases}$ *16)* $\begin{cases} -5x_1+4x_2-6x_3+7x_4=2, \\ -4x_2+2x_3-2x_4=-18, \\ -5x_1-3x_2-2x_3=-23, \\ -2x_1+x_2-2x_3+2x_4=-1; \end{cases}$

17) $\begin{cases} 4x+9y-8z=13, \\ 7x+15y-6z=22, \\ 2x+3y-2z=5; \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} -5x-6y+2z=17, \\ 13x+15y-14z=-43, \\ 2x+3y-2z=-8; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 9x+4y+2z=2, \\ 7x+2y+4z=-2, \\ -4x-2y=-2; \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} 4x-6y+2z=-12, \\ -5x+2y+4z=3, \\ 2x-2y=-4; \end{cases}$

21) $\begin{cases} -14x+9y+5z=-5, \\ -17x+15y+z=-2, \\ -4x+3y+z=-1; \end{cases}$ **22)** $\begin{cases} -11x-6y-2z=23, \\ -17x-10y-4z=37, \\ -4x-2y=8; \end{cases}$

23) $\begin{cases} -2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1+4x_3+2x_4=-6, \\ 4x_2-6x_3-3x_4=11, \\ -2x_1-3x_2-x_3+4x_4=10; \end{cases}$ **24)** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ -6x_1-2x_2+x_3-3x_4=3, \\ -3x_1+x_3-3x_4=10, \\ -3x_1-2x_2-x_3+2x_4=-12; \end{cases}$

25) $\begin{cases} -6x_1+4x_2-5x_3+9x_4=-5, \\ -3x_1+6x_2-6x_3+3x_4=12, \\ -2x_1+2x_2-2x_3+3x_4=1, \\ 2x_2+x_3=12; \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} -7x_1+2x_2-7x_3-9x_4=-2, \\ -7x_1+2x_2-7x_3-6x_4=-5, \\ -2x_1-2x_3-3x_4=-3, \\ -x_1-2x_3=-4; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-x_4=4, \\ 9x_1-5x_2+4x_3-2x_4=14, \\ 2x_2+x_3-2x_4=-11, \\ 3x_1-5x_2+5x_3+x_4=2; \end{cases}$ **28)** $\begin{cases} -x_1+5x_2-3x_3+4x_4=25, \\ 3x_2+2x_4=9, \\ 2x_2-2x_3+2x_4=12, \\ x_2-5x_3+2x_4=17; \end{cases}$

29) $\begin{cases} -3x_1+x_2-3x_3-4x_4=3, \\ -2x_1-x_3-2x_4=-1, \\ -2x_1+x_2-x_3-2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=-6; \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} -4x_1-4x_2+3x_3+x_4=-16, \\ 9x_1+8x_2-2x_3-6x_4=31, \\ 7x_1+7x_2-x_3-5x_4=26, \\ -2x_1-2x_2+x_3+x_4=-8; \end{cases}$

31) $\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=1, \\ a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\dots+a_n^2x_n=b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\dots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1}. \end{cases}$

Р е ш е н и е п. 1. Вычисляем определитель основной матрицы данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы применить формулы Крамера, вычисляем определители $(1.14)^{\text{т}}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -1 \end{vmatrix} = 0-15=-15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 15-0=15.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-15}{-3} = 5$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{15}{-3} = -5$.

Р е ш е н и е п. 11. Находим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 13 & -10 & 1 \\ 2 & -2 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 11 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 11 & -8 \end{vmatrix} = 16-44=-28.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Вычислим определители $(1.14)^{\text{т}}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & -6 & 5 \\ 32 & -10 & 1 \\ 5 & -2 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 4 & 0 \\ 27 & -8 & 0 \\ 5 & -2 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 27 & -8 \end{vmatrix} = 80-108=-28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 15 & 5 \\ 13 & 32 & 1 \\ 2 & 5 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 11 & 27 & 0 \\ 2 & 5 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = -54+110=56,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 15 \\ 13 & -10 & 32 \\ 2 & \boxed{-2} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & \boxed{-2} & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 14=28.$$

Тогда

$$x = \frac{-28}{-28} = 1, \quad y = \frac{56}{-28} = -2, \quad z = \frac{28}{-28} = -1.$$

21. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} -2x+6y=2, \\ 4x-15y=-7; \end{cases}$ ***2)*** $\begin{cases} -6x+15y=9, \\ 2x-2y=0; \end{cases}$ ***3)*** $\begin{cases} -3x+4y=-23, \\ 3x-3y=18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=23, \\ 6x-4y=44; \end{cases}$ ***5)*** $\begin{cases} 3x+3y=3, \\ -3x-5y=3; \end{cases}$ ***6)*** $\begin{cases} 9x+15y=21, \\ -3x-4y=-8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} -6x-12y=-42, \\ 2x-y=9; \end{cases}$ ***8)*** $\begin{cases} -9x-12y=33, \\ 15x+16y=-35; \end{cases}$ ***9)*** $\begin{cases} 6x-12y=54, \\ 8x-15y=70; \end{cases}$

10) $\begin{cases} -3x-6y=-15, \\ -x-6y=-13; \end{cases}$ ***11)*** $\begin{cases} -3x+4y=-1, \\ 6x-8y=2; \end{cases}$ ***12)*** $\begin{cases} x-2y=0, \\ -4x+8y=1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} -x-2y+z=-4, \\ 2x+5y+z=21, \\ x+y-2z=-3; \end{cases}$ ***14)*** $\begin{cases} 2x-3y+z=-9, \\ -2x+2y-4z=4, \\ -4x+5y-3z=15; \end{cases}$

15) $\begin{cases} -x+2y+z=4, \\ x-3y-3z=-6, \\ x-y+3z=-4; \end{cases}$ ***16)*** $\begin{cases} x+2y+2z=4, \\ 2x+3y+2z=6, \\ -2x-5y-4z=-6; \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x-3y+2z=-5, \\ -4x+7y-6z=7, \\ -2x+2y+z=11; \end{cases}$ ***18)*** $\begin{cases} x+2y+3z=-2, \\ x-y-3z=-3, \\ -9y-18z=0; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x-2y+z=-4, \\ -2x+y+2z=13, \\ 4x-5y+4z=-3; \end{cases}$ ***20)*** $\begin{cases} -x+2y+2z=2, \\ 2x-5y-z=-11, \\ -2x+5y+3z=9; \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 2x-y-4z=-3, \\ 6x-5y-8z=-11; \end{cases}$ **22)** $\begin{cases} -7x+4y=11, \\ 2y-5z=7, \\ 3x-2y+z=-6; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+2y-2z=1, \\ 2x+4z=-2, \\ 7x+2y+10z=-5; \end{cases}$ **24)** $\begin{cases} x+2y+2z=-2, \\ x+z=-3, \\ 4x+2y+5z=-9; \end{cases}$

25) $\begin{cases} 7x-6y-4z=9, \\ x+2y-2z=-3, \\ 2x-2y-2z=4; \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} 10x+9y-8z=17, \\ 12x+15y-6z=21, \\ 3x+3y-2z=5; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x-3y+3z=3, \\ x-y+z=-1, \\ -4x+7y-7z=-9; \end{cases}$ **28)** $\begin{cases} -10x+9y-2z=-6, \\ -17x+15y-4z=-9, \\ -4x+3y=-2; \end{cases}$

29) $\begin{cases} x-3y+3z=-2, \\ 2x-y+z=-3, \\ 7x-6y+6z=-10; \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} 2x-3y-9z=-9, \\ x-y-4z=-4, \\ -4x+7y+19z=19; \end{cases}$

31) $\begin{cases} 10x+9y+z=-28, \\ -6x-3y+3z=12, \\ 3x+3y+z=-9; \end{cases}$ **32)** $\begin{cases} 2x-3y=-9, \\ x-y-z=-4, \\ -4x+7y-2z=19; \end{cases}$

33) $\begin{cases} 2x+2y+2z=3, \\ x-2y-3z=-1, \\ -4x-10y-12z=-12; \end{cases}$ **34)** $\begin{cases} x-3y+8z=-6, \\ 2x+4z=-6, \\ x+9y-16z=6; \end{cases}$

35) $\begin{cases} 13x+15y-4z=-5, \\ 2x+7y+3z=-21, \\ 9x+10y+7z=-32, \\ 3x+5y+z=-10; \end{cases}$ **36)** $\begin{cases} -6x-10y-3z=-7, \\ 2x-5y+3z=-8, \\ x+10y+z=9, \\ 2x+5y-2z=7; \end{cases}$

37) $\begin{cases} -2x+4y-9z=-3, \\ -5x-5y+3z=12, \\ 9x-4y+7z=5, \\ 3x-2y+z=5; \end{cases}$ ***38)*** $\begin{cases} 2x+15y+10z=-40, \\ 2x-5y-2z=12, \\ -5x-5y+4z=6, \\ 2x+5y+z=-11; \end{cases}$

39) $\begin{cases} 11x+15y+z=-12, \\ -5x+7y+3z=-36, \\ 9x+10y+z=-3, \\ 3x+5y-2z=-6; \end{cases}$ ***40)*** $\begin{cases} -2x_1-x_2-2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+x_4=-4, \\ 2x_2+3x_3+3x_4=13, \\ 4x_1+4x_2+9x_3+2x_4=-11; \end{cases}$

41) $\begin{cases} -x_2-2x_3+3x_4=0, \\ -x_1-3x_2-x_3-3x_4=-29, \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=15, \\ -2x_1-x_2+3x_3-3x_4=-14; \end{cases}$ ***42)*** $\begin{cases} -2x_1-2x_2+3x_3-2x_4=0, \\ -x_1-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+2x_2-2x_4=2, \\ -x_1-x_2+x_3=0; \end{cases}$

43) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4=10, \\ -4x_1-2x_2-2x_4=-18, \\ 2x_1-2x_2-2x_3-x_4=0, \\ -4x_1-4x_2-5x_4=-28; \end{cases}$ ***44)*** $\begin{cases} 2x_3-2x_4=-10, \\ -2x_1-3x_2=-17, \\ 5x_1-4x_2-2x_3-x_4=-11, \\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4=-5; \end{cases}$

45) $\begin{cases} 4x_1+x_2-6x_4=-16, \\ -5x_1-2x_2-3x_3=17, \\ -x_1+x_3+3x_4=4, \\ -2x_1+x_2+5x_3+3x_4=1; \end{cases}$ ***46)*** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3=2, \\ 2x_1+x_2-3x_3+2x_4=16, \\ 2x_1+4x_2+x_3-3x_4=-27, \\ -2x_2-x_3+4x_4=23; \end{cases}$

47) $\begin{cases} 7x_1-2x_2-4x_3+9x_4=29, \\ 2x_1-2x_2-3x_3+3x_4=9, \\ -2x_1+x_3-3x_4=-11, \\ -2x_1+2x_2-2x_3+3x_4=18; \end{cases}$ ***48)*** $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1+x_3+2x_4=1, \\ -x_2+x_3+2x_4=3; \end{cases}$

49) $\begin{cases} x_1+3x_3+2x_4=9, \\ -8x_1-4x_2-4x_3-4x_4=-8, \\ -2x_1-x_2-2x_3-2x_4=-7, \\ -6x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-1; \end{cases}$ **50)** $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+4x_2-x_3-2x_4=-2, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-2, \\ x_1-8x_2+5x_3-2x_4=-2; \end{cases}$

51) $\begin{cases} 4x_1+4x_2-7x_3+6x_4+10x_5=3, \\ 2x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=1, \\ 8x_1+8x_2-5x_3+12x_4+18x_5=5, \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4; \end{cases}$

52) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_5=0, \\ 2x_1-9x_2-4x_3+x_4+x_5+2x_6=0, \\ x_1+9x_2+x_3-2x_4+x_5-2x_6=0, \\ 5x_2+x_3-x_4-x_6=0, \\ 3x_2-x_4-x_5=0; \end{cases}$

53) $\begin{cases} \qquad x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=0, \\ x_1 \qquad +x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1, \\ x_1+x_2 \qquad +\ldots+x_{n-1}+x_n=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+x_3+\ldots \qquad +x_n=n-2, \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} \qquad =n-1. \end{cases}$

Р е ш е н и е п. 17. Выполним прямой ход метода Гаусса с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{2} & -3 & 2 & -5 \\ -4 & 7 & -6 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда находим:

$$z=3, \quad y=-3+2z=-3+2\cdot 3=3,$$

$$x = \frac{-5 - 2z + 3y}{2} = \frac{-5 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Итак, $x = -1$, $y = 3$, $z = 3$ — решение данной системы.

Р е ш е н и е п. 18. Будем оперировать с расширенной матрицей данной системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Выполнив элементарные преобразования, мы привели одно из уравнений к виду $0 = -1$. Значит, система несовместна.

Р е ш е н и е п. 35. Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 15 & -4 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & -21 \\ 9 & 10 & 7 & -32 \\ 3 & 5 & \boxed{1} & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 35 & 0 & -45 \\ -7 & -8 & 0 & 9 \\ -12 & -25 & 0 & 38 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 7 & 0 & -9 \\ -35 & -40 & 0 & 45 \\ -60 & -125 & 0 & 190 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 & -18 \\ 0 & -41 & 0 & 82 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right).$$

Осуществим обратный ход:

$$\begin{aligned} &y = -2, \\ &x = \frac{-9 - 7y}{5} = \frac{-9 + 14}{5} = 1, \\ &z = -10 - 5y - 3x = -10 + 10 - 3 = -3. \end{aligned}$$

Итак, $x = 1$, $y = -2$, $z = -3$.

Р е ш е н и е п. 50. Применяем элементарные преобразования к расширенной матрице системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -8 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Объявляем неизвестную x_2 свободной и обозначаем через α. Получаем:

$$\begin{aligned} &x_3 = 2\alpha, \\ &x_4 = -3 - 5x_2 + 3x_3 = -3 - 5\alpha + 6\alpha = -3 + \alpha, \\ &x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 + \alpha - 4\alpha - 9 + 3\alpha = -8. \end{aligned}$$

Итак, $x_1 = -8$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = -3 + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

22. Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$ ***2)*** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + x_2 = 3; \end{cases}$ ***4)*** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -5, \\ -3x_1 + 9x_2 = -15; \end{cases}$ ***6)*** $\begin{cases} -13x_1 - 21x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 11, \\ 17x_1 + 27x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -13; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1+6x_2=21, \\ 5x_1+4x_2=23, \\ 4x_1+5x_2=22; \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} -3x_1+3x_2+3x_3-3x_4+9x_5=3, \\ 4x_1-5x_2-6x_3+3x_4-13x_5=-2, \\ 2x_1-x_2+3x_4-5x_5=-3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-3x_2-x_3=2, \\ 10x_1-10x_2=-1; \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} -8x_1+2x_2+3x_3=-7, \\ -x_1-3x_2+2x_3=-9; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 7x_1+17x_2-8x_3+17x_4-x_5=32, \\ 6x_1+27x_2-11x_3+27x_4-5x_5=15, \\ -13x_1-44x_2+19x_3-44x_4+6x_5=-47; \end{cases}$

12) $\begin{cases} -3x_1-2x_2+13x_3+5x_4=-12, \\ 2x_1-3x_2+x_4=-5, \\ 12x_1-5x_2-26x_3-7x_4=8; \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 6x_1-5x_2+3x_3=4, \\ 9x_1-9x_2+9x_3=9; \end{cases}$

14) $\begin{cases} -x_1+2x_2=-8, \\ -2x_1-3x_2=5; \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} 2x_1-17x_2+5x_3-13x_4=4, \\ -x_1+7x_2-2x_3+5x_4=-1; \end{cases}$

16) $\begin{cases} -3x_1+2x_2=-3, \\ 2x_1-14x_2=-39, \\ 2x_1+5x_2=21; \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} 3x_1+10x_2-4x_3+15x_4=-13, \\ 6x_1+13x_2-x_3+9x_4=2, \\ 24x_1+59x_2-11x_3+57x_4=-20; \end{cases}$

18) $\begin{cases} -3x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4=8, \\ 7x_1-2x_2-5x_3+3x_4=20; \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} -4x_1-3x_2-x_3=2, \\ 3x_2-2x_3=-7, \\ -6x_1-9x_2+x_3=14, \\ 2x_1+9x_2-4x_3=-19; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 3x_1+x_2-10x_3+5x_4=31, \\ -x_1-x_2+3x_3-2x_4=-10, \\ 3x_1+2x_2-11x_3+6x_4=33, \\ x_1-x_2-x_3=6; \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3=-6, \\ 6x_1-3x_2-5x_3=-19, \\ x_2+2x_3=9; \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 17x_3 + 5x_5 = 22, \\ 3x_2 - 7x_3 + x_4 - 2x_5 = -9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 5; \end{cases}$

23) $\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 26x_4 - 23x_5 = 20, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8x_4 + 7x_5 = -14, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 6x_5 = -6, \\ 2x_1 - 2x_4 + 4x_5 = 6; \end{cases}$

24) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 11x_4 - 14x_5 = 28, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -11, \\ -14x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 43x_4 + 48x_5 = -91, \\ 4x_1 - 12x_4 - 12x_5 = 20; \end{cases}$

25) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 13x_4 = 1, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -6, \\ -4x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 18x_4 = -27, \\ -12x_1 - 12x_2 - 8x_3 + 28x_4 = -63; \end{cases}$

26) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ -6x_1 + 3x_2 - x_3 = -22, \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = -5, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_3 = -26; \end{cases}$

27) $\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -8, \\ 9x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 25, \\ 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -4, \\ 6x_1 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ -3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6; \end{cases}$

28) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -9, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 19; \end{cases}$

29) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_5 = 8, \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_5 = 16, \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 11x_5 = 19, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 9x_5 = -12, \\ 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 24x_5 = -39; \end{cases}$

30) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_4 + 3x_5 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + 6x_5 = -8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$ **31)** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 44, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 36, \\ -x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -14; \end{cases}$

32) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 11x_5 = -1, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е п. 17. Применим элементарные преобразования к расширенной матрице системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 6 & 13 & -1 & 9 & 2 \\ 24 & 59 & -11 & 57 & -20 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -7 & 7 & -21 & 28 \\ 0 & -21 & 21 & -63 & 84 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} &x_3 = 4 + x_2 + 3x_4, \\ &x_1 = -\frac{13}{3} - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 - 5x_4 = \\ &\quad = -\frac{13}{3} - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}(4 + x_2 + 3x_4) - 5x_4 = 1 - 2x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Обозначив свободные неизвестные x_2 и x_4 через α и β, получим общее решение системы:

$$x_1 = 1 - 2\alpha - \beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = 4 + \alpha + 3\beta,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Придавая параметрам α и β некоторые вещественные значения, мы будем получать частные решения системы. Положив, например, $\alpha = \beta = 0$, получим частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.

23. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -7, \\ 4x_1 - 9x_2 - 10x_3 - \lambda x_4 = -11; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 14x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_2 + 4x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 2. \end{cases}$

1.2.2. Экономический профиль

24. Предприятие выпускает продукцию трех видов из сырья трех видов. Нормы расхода сырья каждого вида на единицу продукции и объем расхода сырья за один день заданы таблицей. Найти ежедневный объем выпуска продукции каждого вида:

1)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	2	1 650
2	3	11	9	6 400
3	1	5	8	4 150

;

2)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	3	6	4 950
2	9	9	21	16 350
3	3	2	3	3 000

;

3)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	5	6	3 600
2	3	2	3	1 950
3	6	7	10	5 800

;

4)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	9	9	6 900
2	3	9	8	6 650
3	1	2	2	1 650

;

5)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	6	6	4 500
2	12	12	14	11 200
3	4	3	3	3 150

;

6)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	2	3 000
2	3	6	5	4 950
3	6	12	11	10 350

;

7)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	4	1	1 800
2	6	13	5	6 050
3	2	5	6	3 050

;

8)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	4	3	4 150
2	8	11	9	10 400
3	4	13	15	11 800

;

9)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	12	12	15	10 200
2	4	2	2	2 300
3	4	5	5	3 650

;

10)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	12	7	9	10 300
2	4	2	2	2 800
3	12	9	18	15 600

;

11)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	4	2	3 900
2	8	9	7	9 050
3	8	9	8	9 300

;

12)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	5	3	3 050
2	3	18	20	15 400
3	1	6	6	4 800

;

13)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	2	3 300
2	6	9	7	8 250
3	6	11	16	12 900

;

14)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	15	11	13 600
2	2	17	15	16 400
3	1	4	3	3 700

;

15)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	3	3 650
2	6	9	8	8 400
3	9	14	16	14 050

;

16)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	2	3	2 850
2	9	8	12	10 350
3	9	12	20	14 750

;

17)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	3 300
2	4	4	4	4 600
3	4	6	8	6 600

;

18)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	1	2 950
2	8	7	5	8 000
3	4	8	8	7 600

;

19)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	4	3	3 400
2	4	10	8	8 400
3	2	6	8	6 200

;

20)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	3	3	2 850
2	9	12	11	10 200
3	6	9	10	7 950

;

21)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	5	2	4 100
2	3	8	4	6 150
3	6	19	13	15 850

;

22)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	1	1 500
2	1	5	4	2 750
3	1	5	6	3 250

;

23)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	2 300
2	12	7	8	8 050
3	4	3	7	4 650

;

24)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	3	2 150
2	3	11	11	7 550
3	1	5	7	3 950

;

25)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	2	1	2 150
2	4	5	4	5 550
3	2	3	5	4 300

;

26)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	2 400
2	12	8	8	8 600
3	8	8	9	8 050

;

27)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	11	17	12 400
2	1	3	3	2 800
3	2	7	9	7 200

;

28)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	5	3	2 850
2	1	7	5	4 050
3	1	9	8	5 550

;

29)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	5	1	3 450
2	2	6	3	4 750
3	4	11	6	9 100

;

30)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	3	1 950
2	1	6	5	3 150
3	2	12	12	6 900

.

Р е ш е н и е п. 1. Обозначим ежедневный объем выпуска продукции каждого типа через x_1, x_2 и x_3. Тогда в соответствии с таблицей получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ \boxed{3x_1} + 11x_2 + 9x_3 = 6\,400, \\ \boxed{x_1} + 5x_2 + 8x_3 = 4\,150. \end{cases}$$

Будем решать ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ \qquad \boxed{2x_2} + 3x_3 = 1\,450, \\ \qquad \boxed{2x_2} + 6x_3 = 2\,500, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 = 1\,450, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 1\,050. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$x_3 = 350, \quad x_2 = \frac{1\,450 - 3 \cdot 350}{2} = 200, \quad x_1 = 1\,650 - 3 \cdot 200 - 2 \cdot 350 = 350.$$

Итак, необходимо выпустить 350 единиц продукции первого типа, 200 второго и 350 единиц продукции третьего типа.

25. Определить вектор X валового выпуска продукции двух отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 \\ 0{,}18 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 209 \\ 516 \end{pmatrix}$; ***2)*** $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}18 \\ 0{,}19 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 532 \\ 518 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}17 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 670 \\ 422 \end{pmatrix}$; ***4)*** $A = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 344 \\ 748 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}07 \\ 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 322 \\ 520 \end{pmatrix}$; ***6)*** $A = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 720 \\ 498 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}0{,}06 & 0{,}12\\ 0{,}10 & 0{,}04\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}598\\ 410\end{pmatrix}$; ***8)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}10 & 0{,}21\\ 0{,}16 & 0{,}13\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}552\\ 568\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}07\\ 0{,}04 & 0{,}08\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}312\\ 720\end{pmatrix}$; ***10)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}18\\ 0{,}10 & 0{,}17\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}375\\ 365\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}17\\ 0{,}05 & 0{,}17\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}295\\ 395\end{pmatrix}$; ***12)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0{,}18\\ 0{,}15 & 0{,}16\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}298\\ 360\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0{,}25\\ 0{,}14 & 0{,}07\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}568\\ 632\end{pmatrix}$; ***14)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}21\\ 0{,}15 & 0{,}06\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}349\\ 489\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}12\\ 0{,}11 & 0{,}04\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}486\\ 510\end{pmatrix}$; ***16)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}10 & 0{,}11\\ 0{,}03 & 0{,}16\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}564\\ 483\end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}10\\ 0{,}16 & 0{,}13\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}410\\ 355\end{pmatrix}$; ***18)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0{,}07\\ 0{,}19 & 0{,}15\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}720\\ 528\end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0{,}06\\ 0{,}08 & 0{,}07\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}732\\ 494\end{pmatrix}$; ***20)*** $A=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0{,}07\\ 0{,}10 & 0{,}07\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}534\\ 498\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Подвергнем элементарным преобразованиям расширенную матрицу $(E-A|Y)$ соотношений баланса $(1.17)^{\text{т}}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1-0{,}04 & -0{,}25 & 209\\ -0{,}18 & 1-0{,}16 & 516\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}0{,}96 & -0{,}25 & 209\\ -0{,}18 & 0{,}84 & 516\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{96} & -25 & 20\,900\\ \boxed{-3} & 14 & 8\,600\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c}0 & 423 & 296\,100\\ -3 & 14 & 8\,600\end{array}\right).$$

Отсюда имеем: $x_2=700$, $x_1=\dfrac{14x_2-8600}{3}=\dfrac{1200}{3}=400$.

26. Определить вектор X валового выпуска продукции трех отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0{,}18 & 0{,}04\\ 0{,}17 & 0{,}08 & 0{,}05\\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}04\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}326\\ 524\\ 521\end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}19 & 0{,}06 & 0{,}07 \\ 0{,}16 & 0{,}13 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 571 \\ 490 \\ 277 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}11 \\ 0{,}09 & 0{,}14 & 0{,}11 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 613 \\ 371 \\ 467 \end{pmatrix};$

4) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}18 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}06 & 0{,}06 \\ 0{,}04 & 0{,}14 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 396 \\ 502 \\ 448 \end{pmatrix};$

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}05 \\ 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & 0{,}09 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 678 \\ 374 \\ 658 \end{pmatrix};$

6) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}08 & 0{,}11 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 246 \\ 433 \\ 543 \end{pmatrix};$

7) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}14 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}10 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 713 \\ 317 \\ 499 \end{pmatrix};$

8) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}12 \\ 0{,}18 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 565 \\ 276 \\ 594 \end{pmatrix};$

9) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}07 \\ 0{,}15 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}18 & 0{,}11 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 523 \\ 419 \\ 568 \end{pmatrix};$

10) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}11 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 749 \\ 277 \\ 420 \end{pmatrix};$

11) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}07 \\ 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}10 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 463 \\ 659 \\ 336 \end{pmatrix};$

12) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}06 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 251 \\ 318 \\ 652 \end{pmatrix};$

13) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}17 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 307 \\ 619 \\ 344 \end{pmatrix};$

14) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}16 & 0{,}14 \\ 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}09 \\ 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 506 \\ 402 \\ 369 \end{pmatrix};$

15) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}16 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 262 \\ 546 \\ 592 \end{pmatrix};$

16) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}07 \\ 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 279 \\ 445 \\ 379 \end{pmatrix};$

17) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}05 \\ 0{,}08 & 0{,}03 & 0{,}10 \\ 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 664 \\ 632 \\ 552 \end{pmatrix};$

18) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}20 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}13 \\ 0{,}04 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 194 \\ 553 \\ 426 \end{pmatrix};$

27. Определить вектор X валового выпуска продукции четырех отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}14 \\ 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}07 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 392 \\ 456 \\ 574 \\ 392 \end{pmatrix};$

$$\textbf{\textit{2)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}07 & 0{,}08 \\ 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}11 \\ 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 203 \\ 312 \\ 423 \\ 493 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{3)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}12 \\ 0{,}16 & 0{,}07 & 0{,}13 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}11 \\ 0{,}09 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 722 \\ 275 \\ 566 \\ 434 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{4)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}17 \\ 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}03 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}07 & 0{,}13 & 0{,}04 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 510 \\ 416 \\ 598 \\ 594 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{5)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}11 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}08 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 254 \\ 593 \\ 549 \\ 231 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{6)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}06 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}08 & 0{,}13 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 628 \\ 354 \\ 233 \\ 327 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{7)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}17 \\ 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}11 \\ 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}12 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 409 \\ 313 \\ 534 \\ 390 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{8)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}08 & 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 615 \\ 356 \\ 572 \\ 465 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{9)}}\ A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 547 \\ 311 \\ 588 \\ 419 \end{pmatrix};$$

10) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ 0{,}16 & 0{,}06 & 0{,}09 & 0{,}05 \\ 0{,}08 & 0{,}13 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 571 \\ 264 \\ 329 \\ 596 \end{pmatrix};$

11) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}09 & 0{,}14 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}06 & 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}07 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 587 \\ 531 \\ 260 \\ 596 \end{pmatrix};$

12) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}11 \\ 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}03 \\ 0{,}10 & 0{,}13 & 0{,}10 & 0{,}16 \\ 0{,}03 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 507 \\ 394 \\ 386 \\ 430 \end{pmatrix};$

13) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}10 & 0{,}06 \\ 0{,}10 & 0{,}13 & 0{,}11 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 378 \\ 410 \\ 465 \\ 284 \end{pmatrix};$

14) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}11 \\ 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}10 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 345 \\ 380 \\ 339 \\ 424 \end{pmatrix};$

15) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}05 & 0{,}12 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}10 \\ 0{,}09 & 0{,}08 & 0{,}11 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}11 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 680 \\ 525 \\ 477 \\ 313 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е п. 1. Выпишем расширенную матрицу $(E - A|Y)$ системы 1.17$^{\text{т}}$, содержащей соотношения баланса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}96 & -0{,}10 & -0{,}05 & -0{,}14 & 392 \\ -0{,}04 & 0{,}97 & -0{,}06 & -0{,}09 & 456 \\ -0{,}10 & -0{,}11 & 0{,}95 & -0{,}10 & 574 \\ -0{,}06 & -0{,}07 & -0{,}11 & 0{,}93 & 392 \end{array}\right).$$

Решая эту систему на компьютере, находим: $X = (600, 600, 800, 600)$.

1.3. Векторная алгебра

28. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Являются ли коллинеарными векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a} - 2\sqrt{5}\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = -\sqrt{5}\mathbf{a} + 10\mathbf{b}$?

Решение. Очевидно, что $\mathbf{q} = -\sqrt{5}\mathbf{p}$. Тогда по замечанию $1.18^{\text{т}}$ векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны. Поскольку коэффициент $-\sqrt{5} < 0$, то $\mathbf{p} \downarrow\uparrow \mathbf{q}$.

29. Как должны быть связаны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы выполнялись соотношения:

1) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; ***2)*** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; ***3)*** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;

4) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| > |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; ***5)*** $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$; ***6)*** $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$?

30. От точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-либо вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

31. Определить начало вектора $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, если его конец совпадает с точкой $B(0, 1, -1)$.

Решение. Пусть начало вектора $\mathbf{a}$ совпадает с точкой $A(x, y, z)$. Тогда

$$\begin{cases} 0 - x = 3, \\ 1 - y = 1, \\ -1 - z = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3, \\ y = 0, \\ z = -3. \end{cases}$$

Значит, начало вектора — это точка $A(-3, 0, -3)$.

32. Даны точки $A(2, 5, 3)$, $B(-1, 5, 8)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

33. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$. Найти $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

34. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр равностороннего треугольника с его вершинами, равна нулю.

35. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}.$$

36. Пусть AD, BE, CF — медианы треугольника ABC. Доказать, что

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

37. Найти орт вектора $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$.

38. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 4)$. Найти векторы $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

39. Найти длины суммы и разности векторов $\mathbf{a} = (3, 1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$.

40. Являются ли точки

$$A(3, -1, 2),\ B(1, 2, -1),\ C(-1, 1, -3),\ D(3, -5, 3)$$

вершинами трапеции?

Решение. Проверим, будут ли параллельны стороны AB и CD. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 2 - (-1), -1 - 2) = (-2, 3, -3),$$
$$\overrightarrow{CD} = (3 - (-1), -5 - 1, 3 - (-3)) = (4, -6, 6).$$

Так как $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

41. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, -5)$, $\mathbf{c} = (1, -3)$. Определить, при каких значениях β коллинеарны векторы $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \beta\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

42. При каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = (\alpha, 2, 4)$ и $\mathbf{b} = (1, \beta, -5)$ коллинеарны?

43. Векторы $\mathbf{a} = (7, -4, -4)$, $\mathbf{b} = (-2, -1, 2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\mathbf{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при условии, что $|\mathbf{c}| = 5\sqrt{6}$.

44. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{ab}$, если:

1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$; ***2)*** $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 135^\circ$;

3) $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$; ***4)*** $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} \downarrow\uparrow \mathbf{b}$; ***5)*** $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

45. Пусть $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/3$. Вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; ***2)*** $\mathbf{a}^2$; ***3)*** $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; ***4)*** $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$; ***5)*** $(3\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$.

Решение п. 4. Имеем:

$$(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 9\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{ab} + 4\mathbf{b}^2 = 9|\mathbf{a}|^2 + 12|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) + 4|\mathbf{b}|^2 = \\ = 36 + 60 + 100 = 196.$$

46. Доказать, что векторы $\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ac})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны.

47. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны единице. Вычислить $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

48. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, если известно, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ перпендикулярны?

49. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{ab}$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

50. Найти длину вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/4$.

51. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2\pi/3$.

52. Пусть $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2\pi/3$. Найти, при каком значении β векторы $\mathbf{c} = \beta\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны.

53. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/4$.

54. Дано: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/3$. Найти косинус угла между векторами:

1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; ***2)*** $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; ***3)*** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

55. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, если $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 3$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = \pi/3$, $(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \pi/2$.

56. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}.$$

57. Вычислить $\mathbf{a}^2+3\mathbf{ab}-2\mathbf{bc}+4$, если

$$\mathbf{a}=4\mathbf{m}-\mathbf{n},\quad \mathbf{m}+2\mathbf{n},\quad \mathbf{c}=2\mathbf{m}-3\mathbf{n},$$

где $\mathbf{m}^2=4$, $\mathbf{n}^2=1$, $(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})=\pi/2$.

58. Даны векторы

$$\mathbf{a}=(4,-2,-4),\quad \mathbf{b}=(6,-3,2).$$

Найти $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

Решение. *Первый способ.* Находим векторы, входящие в искомое скалярное произведение:

$$\begin{aligned}2\mathbf{a}-3\mathbf{b}&=2(4,-2,-4)-3(6,-3,2)=(-10,5,-14),\\ \mathbf{a}+2\mathbf{b}&=(4,-2,-4)+2(6,-3,2)=(16,-8,0).\end{aligned}$$

Вычисляем скалярное произведение:

$$(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})=(-10,5,-14)(16,-8,0)=-160-40+0=-200.$$

Второй способ. Вычислим искомое скалярное произведение, не находя векторов $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, а раскрывая скобки с учетом свойств скалярного произведения:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})&=2\mathbf{a}^2+4\mathbf{ab}-3\mathbf{ba}-6\mathbf{b}^2=2\mathbf{a}^2+\mathbf{ab}-6\mathbf{b}^2=\\ &=2(16+4+16)+(24+6-8)-6(36+9+4)=\\ &=2\cdot 36+22-6\cdot 49=72+22-294=-200.\end{aligned}$$

59. Вычислить скалярное произведение векторов:

1) $\mathbf{a}=(5,1)$, $\mathbf{b}=(-3,5)$; ***2)*** $\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right)$, $\mathbf{b}=(6,9)$;

3) $\mathbf{a}=(2,5,3)$, $\mathbf{b}=(-1,0,1)$;

4) $\mathbf{a}=\left(2\sin\dfrac{\pi}{6},2,\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},-1,2\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

60. Найти углы между векторами:

1) $\mathbf{a} = (8, 6)$, $\mathbf{b} = (2, 14)$; ***2)*** $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (6, -4)$;

3) $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$; ***4)*** $\mathbf{a} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (\cos 2^\circ, \sin 2^\circ, 0)$;

5) $\mathbf{a} = (\cos 15^\circ, 1, \sin 15^\circ)$, $\mathbf{b} = (-\sin 15^\circ, 3, \cos 15^\circ)$.

61. Найти такое значение α, чтобы векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ были перпендикулярны.

62. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (5, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2)$. Найти:

1) $2\mathbf{a}^2 - 3\mathbf{ab} + 4\mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ac} - \mathbf{c}^2$; ***2)*** $3(\mathbf{ab})\mathbf{c} - 2\mathbf{a}^2\mathbf{c} + (\mathbf{cb})\mathbf{a} + \mathbf{c}^2\mathbf{b}$.

63. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 4)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 1)$. Вычислить:

1) $\mathbf{a}^2(\mathbf{bc})$; ***2)*** $\mathbf{a}^2\mathbf{b} + \mathbf{b}^2\mathbf{c} + \mathbf{c}^2\mathbf{a}$; ***3)*** $2\mathbf{c}(\mathbf{c} + 3\mathbf{a}) + (\mathbf{b} - 2\mathbf{a})(\mathbf{c} + \mathbf{a})$;

4) $2\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{c}^2$; ***5)*** $3\mathbf{ab} - (2\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{c}$; ***6)*** $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{c} - \mathbf{a})^2$; ***7)*** $\sqrt{\mathbf{a}^2}$.

64. Даны вершины треугольника ABC:

$$A(-1, -2, 4), \quad B(-4, -2, 0), \quad C(3, -2, 1).$$

Определить величину его внутреннего угла при вершине B.

Р е ш е н и е. Найдем векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, образующие искомый угол B:

$$\overrightarrow{BA} = \Big(-1 - (-4), -2 - (-2), 4 - 0\Big) = (3, 0, 4),$$
$$\overrightarrow{BC} = \Big(3 - (-4), -2 - (-2), 1 - 0\Big) = (7, 0, 1).$$

Следовательно,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}\,\sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}\,\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \pi/4$.

65. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(4, 0, 8)$, $B(5, 2, 6)$, $C(3, 1, 4)$, $D(2, -1, 6)$ является квадратом.

66. Даны вершины треугольника:

$$A\left(2, 1, \sqrt{2}\right), \quad B(1, 0, 0), \quad C\left(1+\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}\right).$$

Найти его углы.

67. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами

$$A(1, 2, 1),\ B(3, -1, 7),\ C(7, 4, -2).$$

Показать, что этот треугольник равнобедренный.

68. Вектор $\mathbf{x}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 18\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если $|\mathbf{x}| = 14$.

69. Даны три вектора:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}.$$

Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{c}$ и удовлетворяющий условиям $\mathbf{ax} = 4$, $\mathbf{bx} = 35$.

70. Даны три вектора: $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (5, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (-3, 0, 1)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{xa} = -4$, $\mathbf{bx} = 5$, $\mathbf{cx} = 2$.

71. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{xa} = 3$.

72. Найти линейную комбинацию $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 7\mathbf{a}_3$ векторов

$$\mathbf{a}_1 = (-7, 3, 4, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, -1, -6, -5), \quad \mathbf{a}_3 = (-3, 1, 0, -1)$$

пространства $\mathbb{R}^4$. Что в связи с полученным результатом можно сказать о системе векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$?

73. Найти линейную комбинацию $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$ векторов

$$\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, -1, 5), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 2)$$

пространства $\mathbb{R}^3$.

74. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми:

1) $(5,-5,-2),\ (1,-3,1)$; ***2)*** $(-4,3,1,-1),\ (3,-3,1,1)$;

3) $(-2,-5,1,2),\ (3,1,3,2)$; ***4)*** $(-3,-3),\ (4,-1)$;

5) $(1,-3),\ (-1,3)$; ***6)*** $(1,-1,1,1),\ (2,-2,2,2)$;

7) $(-3,-3),\ (-6,-6)$; ***8)*** $(5,3),\ (4,3)$; ***9)*** $(-2,-1),\ (-4,-2)$;

10) $(8,-6,-4),\ (-4,3,2)$; ***11)*** $(-1,2,-2),\ (-2,3,-5),\ (-2,2,-6)$;

12) $(-3,-1,-1,0),\ (0,0,2,-4),\ (-9,-2,1,-2)$;

13) $(2,-2,-4,1),\ (4,-7,-4,4),\ (6,-7,3,5)$;

14) $(-3,-1,-4,-1),\ (0,0,-2,2),\ (-9,-4,5,-5)$;

15) $(2,1,-4,1),\ (2,0,5,-1),\ (-6,-1,2,-1)$;

16) $(-4,-5,7,-7),\ (-3,-3,2,-1),\ (-2,-1,-3,5)$;

17) $(10,1,25,7),\ (-1,2,5,-4),\ (4,-1,5,5)$;

18) $(-1,-2,-2),\ (-2,7,2),\ (-5,23,8)$;

19) $(1,-1,-1,1),\ (2,-3,-2,6),\ (3,-4,3,5)$;

20) $(2,2,0),\ (-3,-2,0),\ (1,2,-2)$;

21) $(-3,-2,5),\ (3,2,3),\ (-3,2,-1),\ (3,2,3)$;

22) $(-6,-4,-3,1),\ (10,1,12,-4),\ (-4,1,3,2),\ (-2,-2,3,0)$;

23) $(0,-1,0,0),\ (-5,8,3,-2),\ (1,-2,-1,1),\ (1,-1,1,-1)$;

24) $(1,0,0,-1,3),\ (-1,-2,1,-1,-3),\ (-1,4,0,-1,1),\ (1,1,-1,3,1)$;

25) $(3,1,-3,3),\ (-3,0,3,0),\ (1,1,-3,1),\ (3,-1,-3,-2)$;

26) $(6,4,1,0),\ (-3,-2,16,-3),\ (0,1,1,-2),\ (3,1,5,1)$;

27) $(-1,5,3,2,-5),\ (-3,7,2,1,-5),\ (0,-3,1,-3,2),\ (1,-2,0,3,1)$;

28) $(0,1,1,1,4),\ (3,1,5,1,3),\ (-3,1,2,0,-1),\ (12,-1,5,1,4)$;

29) $(6,-1,-4,5,0), (-3,-2,2,-3,0), (3,-3,-4,2,-1), (3,-3,2,2,2)$;

30) $(0,-2,-3,1,0), (-6,-2,5,-1,7), (2,-2,-2,0,-2),$
$(8,2,-15,5,-10)$.

Решение п. 1. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы данной системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -11 & 0 \\ 1 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит 2 строки. Значит, ранг матрицы данной системы векторов равен 2. Таким образом, число векторов системы равно рангу матрицы системы. По теореме $1.21^{\text{т}}$ такая система является линейно независимой.

75. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

1) $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, -1),\ \mathbf{a}_2 = (6, 3, 15),\ \mathbf{a}_3 = (-2, -2, -4)$;

2) $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, -4),\ \mathbf{a}_2 = (-1, 5, 0),\ \mathbf{a}_3 = (2, 5, -3),\ \mathbf{a}_4 = (1, 3, 3)$;

3) $\mathbf{a}_1 = (15, 1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (-12, 1, -5)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (6, 3, -1)$;

4) $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -6)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, -2, 2)$;

5) $\mathbf{a}_1 = (-2, -3, 1),\ \mathbf{a}_2 = (-2, -2, 2),\ \mathbf{a}_3 = (4, 4, -2)$;

6) $\mathbf{a}_1 = (-6, 4, 2),\ \mathbf{a}_2 = (-2, 1, 1),\ \mathbf{a}_3 = (1, 2, -1)$;

7) $\mathbf{a}_1 = (-9, 1, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (-21, -5, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (9, 1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (11, 3, -1)$;

8) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, -1)$,
$\mathbf{a}_4 = (-1, -1, -2)$;

9) $\mathbf{a}_1 = (1, 5, 18)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (-3, 2, -3)$,
$\mathbf{a}_5 = (2, 1, 9)$;

10) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-2, -2, -2),\ \mathbf{a}_3 = (1, 0, -1)$.

Решение п. 1. Вычислим ранг матрицы данной системы векторов. Так как ранг матрицы не меняется при транспонировании, то мы можем располагать векторы системы как в виде строк, так и в виде столбцов. В последнем случае, например, будем иметь:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 15 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен 2, а в качестве ее базисного минора можно, например, взять минор, образованный строками 1 и 2 и столбцами 1 и 2. Тогда по теореме $1.22^{\text{т}}$ ранг данной системы векторов также равен 2, а в качестве ее базиса можно взять систему $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, соответствующую выбранному нами базисному минору.

76. Показать, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ пространства $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^5$ линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства:

1) $\mathbf{a}_1 = (-1, 9, -1, -4, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -6, 5, 2, 0)$,
$\mathbf{a}_3 = (-1, -3, -2, 2, -1)$;

2) $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-6, -8, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (9, 5, -2, -5)$;

3) $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -4, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 3, 1, -2)$;

4) $\mathbf{a}_1 = (-4, -3, 3, -4, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 0, 1, -4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 2, 2, -2)$;

5) $\mathbf{a}_1 = (1, -3, -2, 5, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 2, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -1, -3, 1, 1)$;

6) $\mathbf{a}_1 = (-4, -9, 5, -4, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, -3, 2, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 3, 2, 2, -1)$;

7) $\mathbf{a}_1 = (-2, -4, -2, -3, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, 1, -4, 2)$,
$\mathbf{a}_3 = (2, 2, -4, 2, 1)$;

8) $\mathbf{a}_1 = (5, -6, -2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 0, 5, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, -4, -1, 1)$;

9) $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, 2, 2)$;

10) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -4, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 5, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, -2, -2, -4)$;

11) $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 0, -4, 1)$;

12) $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -5, 5, 2)$;

13) $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, -3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -2, -4, 5)$;

14) $\mathbf{a}_1 = (2, 6, -1, -1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, -4, -1, 3)$,
$\mathbf{a}_3 = (-2, -2, -3, 0, -1)$;

15) $\mathbf{a}_1 = (5, -1, 1, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (5, -1, -1, 6, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -1, -2, 2, 1)$;

16) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, -3, 2),\ \mathbf{a}_2 = (6, -1, 1, 2),\ \mathbf{a}_3 = (9, -4, 3, 4);$

17) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, 1, 1),\ \mathbf{a}_2 = (0, 4, -2, -4),\ \mathbf{a}_3 = (-3, 0, -3, 1);$

18) $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, 3, 1),\ \mathbf{a}_2 = (2, -1, -3, -3),\ \mathbf{a}_3 = (6, -4, 2, -2);$

19) $\mathbf{a}_1 = (1, -9, 1, -1, 5), \mathbf{a}_2 = (1, 3, -2, -1, -4),$
$\mathbf{a}_3 = (-3, 3, -3, 1, -1);$

20) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, -1, -1),\ \mathbf{a}_2 = (-3, 1, -3, 3),\ \mathbf{a}_3 = (-3, 2, -1, 3).$

Р е ш е н и е п. 1. Путем элементарных преобразований найдем какой-либо базисный минор матрицы данной системы векторов:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 9 & -1 & -4 & 2 \\ \boxed{-1} & -6 & 5 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & -3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & -12 & -1 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & \boxed{6} & 3 & -2 \\ 0 & -4 & \boxed{-1} & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -29 & 0 & 21 & -20 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен количеству векторов в данной системе, и в силу теоремы $1.21^{\text{т}}$ система линейна независима. Базисный минор матрицы A образован первыми тремя ее столбцами. Выберем единичные векторы $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$, соответствующие столбцам, не вошедшим в базисный минор. Достроим с их помощью матрицу A до квадратной матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица является невырожденной, поэтому, согласно следствию $1.4^{\text{т}}$, векторы, составляющие ее строки, являются линейно независимыми и образуют базис пространства $\mathbb{R}^5$.

Итак, чтобы дополнить систему $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ до базиса, достаточно добавить к ней векторы

$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

77. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \in \{2, 3, 4\}$, заданы векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{x}$. Показать, что система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если:

1) $\mathbf{b}_1 = (7, 6),\ \mathbf{b}_2 = (0, 3),\ \mathbf{x} = (21, 33)$;

2) $\mathbf{b}_1 = (5, 4),\ \mathbf{b}_2 = (-2, 1),\ \mathbf{x} = (11, 14)$;

3) $\mathbf{b}_1 = (1, 4),\ \mathbf{b}_2 = (4, -1),\ \mathbf{x} = (-5, 14)$;

4) $\mathbf{b}_1 = (7, 6),\ \mathbf{b}_2 = (5, 1),\ \mathbf{x} = (32, 11)$;

5) $\mathbf{b}_1 = (5, 2),\ \mathbf{b}_2 = (-3, -3),\ \mathbf{x} = (-4, 2)$;

6) $\mathbf{b}_1 = (-1, 2),\ \mathbf{b}_2 = (-3, -5),\ \mathbf{x} = (1, 20)$;

7) $\mathbf{b}_1 = (5, 4),\ \mathbf{b}_2 = (-2, -1),\ \mathbf{x} = (9, 9)$;

8) $\mathbf{b}_1 = (7, -2),\ \mathbf{b}_2 = (1, 3),\ \mathbf{x} = (18, 8)$;

9) $\mathbf{b}_1 = (7, 4),\ \mathbf{b}_2 = (-1, -3),\ \mathbf{x} = (21, 12)$;

10) $\mathbf{b}_1 = (7, -2),\ \mathbf{b}_2 = (4, 1),\ \mathbf{x} = (47, -7)$;

11) $\mathbf{b}_1 = (2, 2, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (6, 3, -9)$, $\mathbf{b}_3 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{x} = (10, 4, -12)$;

12) $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -3, 6)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{x} = (13, -7, 18)$;

13) $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -3, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x} = (0, 4, -6)$;

14) $\mathbf{b}_1 = (3, 9, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 5, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -4, 2)$, $\mathbf{x} = (13, 50, -8)$;

15) $\mathbf{b}_1 = (2, 4, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{x} = (3, 4, 5)$;

16) $\mathbf{b}_1 = (-1, -1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -2, -4)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x} = (3, -2, -8)$;

17) $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-6, -3, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -1, 0)$,
$\mathbf{x} = (-31, -12, 8)$;

18) $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 6)$,
$\mathbf{x} = (-4, 5, -22)$;

19) $\mathbf{b}_1 = (3, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -2, 6)$, $\mathbf{x} = (6, -3, 16)$;

20) $\mathbf{b}_1 = (3, 3, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, -3, 0)$, $\mathbf{x} = (3, -2, 11)$;

21) $\mathbf{b}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 6, 4)$, $\mathbf{b}_3 = (3, -3, -6, -3)$,
$\mathbf{b}_4 = (2, -1, 0, 0)$, $\mathbf{x} = (11, -2, 0, 3)$;

22) $\mathbf{b}_1 = (-2, -2, 0, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -1, 2, -4)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -3, 0, -9)$, $\mathbf{b}_4 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-6, -4, 4, -16)$;

23) $\mathbf{b}_1 = (-4, 2, 4, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, -3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -2, -7, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (5, -1, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-21, 7, 13, -4)$;

24) $\mathbf{b}_1 = (2, -2, 6, 8)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, -2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, 1, 0, -3)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, 0, -1, -1)$, $\mathbf{x} = (6, 2, -15, -10)$;

25) $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, -1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (-3, 1, 3, 5)$, $\mathbf{x} = (5, 4, 5, 3)$;

26) $\mathbf{b}_1 = (-4, -1, 4, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -1, 2, -2)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, -1, 4, 1)$, $\mathbf{x} = (-21, -7, 20, 18)$;

27) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -3, -2, -5)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, 6, -2, -3)$, $\mathbf{x} = (-7, 22, 1, 5)$;

28) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -3, 3, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -3, 1, -5)$, $\mathbf{b}_4 = (0, -1, -1, -5)$, $\mathbf{x} = (4, 1, 13, 28)$;

29) $\mathbf{b}_1 = (-2, -1, -3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, 4, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (5, 0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (2, -2, -2, -4)$, $\mathbf{x} = (-3, -7, -17, 7)$;

30) $\mathbf{b}_1 = (0, 2, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, -2, 0, -7)$, $\mathbf{b}_4 = (0, -1, 0, -3)$, $\mathbf{x} = (-3, 10, 1, 23)$.

Р е ш е н и е п. 11. Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$:

$$\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \beta_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}.$$

Полученное равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 6\beta_2 + 2\beta_3 = 10, \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 = 4, \\ -5\beta_1 - 9\beta_2 + 2\beta_3 = -12. \end{cases}$$

Осуществим прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & \boxed{-1} & 4 \\ -5 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 0 & 18 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ \boxed{-1} & -3 & 0 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Мы привели основную матрицу A рассматриваемой системы к треугольному виду и тем самым доказали ее невырожденность. Очевидно, что матрица системы векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ получается транспонированием матрицы A и потому также является невырожденной. Тогда по следствию $1.4^{\text{т}}$ система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ линейно независима.

Осуществим обратный ход метода Гаусса:

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_1 = -3\beta_2 + 4 = 1, \quad \beta_3 = 2\beta_1 + 3\beta_2 - 4 = 1.$$

Таким образом, имеет место разложение

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3.$$

Итак, в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ вектор $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

Отметим, что при решении этой задачи метод Гаусса фактически позволил не только найти коэффициенты разложения β_1, β_2 и β_3, но и доказать линейную независимость векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$.

78. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений:

1) $\begin{cases} -4x_1 - 18x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ -6x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ ***3)*** $\begin{cases} 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 11x_1 - 2x_2 - 13x_3 - 37x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0; \end{cases}$ ***5)*** $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 8x_1 - 7x_2 - 25x_3 - 7x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -11x_1 - 23x_2 - 6x_3 + 39x_4 = 0, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 + 16x_2 + 5x_3 - 23x_4 = 0, \\ 9x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 25x_4 = 0; \end{cases}$ ***7)*** $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ -16x_1 - 31x_2 + x_3 + 29x_4 = 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3x_1-10x_2-2x_3+13x_4+4x_5=0, \\ 6x_1+7x_2-22x_3-13x_4+5x_5=0, \\ -18x_1-34x_2+40x_3+52x_4-2x_5=0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5x_1-6x_2-3x_3+4x_4+2x_5=0, \\ -2x_1+10x_2+5x_3-13x_4+3x_5=0, \\ 14x_1-32x_2-16x_3+34x_4-2x_5=0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1-7x_3-8x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+6x_2-31x_3-38x_4+8x_5=0, \\ -4x_1-3x_2+19x_3+23x_4-5x_5=0, \\ -5x_1-6x_2+17x_3+22x_4-4x_5=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} -3x_1+3x_2+6x_3-12x_4+3x_5=0, \\ 15x_1+39x_2-3x_3-21x_4+12x_5=0, \\ 4x_1+14x_2+x_3-11x_4+5x_5=0, \\ -13x_1-5x_2+17x_3-25x_4+4x_5=0; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1-6x_2-12x_3-26x_4+4x_5=0, \\ -3x_2-5x_3-9x_4+x_5=0, \\ -4x_1-3x_2+3x_3+13x_4-5x_5=0; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1-2x_2-x_3+4x_5=0, \\ -10x_1-3x_3+26x_4+16x_5=0, \\ -x_1-x_2-x_3+5x_4+5x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+7x_3-31x_4-33x_5=0, \\ 5x_1+3x_2+4x_3-21x_4-19x_5=0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} -5x_1-x_2+22x_3+4x_4+2x_5=0, \\ -x_1-x_2+8x_3-2x_4+x_5=0, \\ -x_1+x_2+4x_4=0; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1+x_2-4x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+8x_3+4x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+12x_3+4x_4-2x_5=0; \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} -10x_2+5x_3+10x_4=0, \\ -3x_1-6x_2+6x_3+9x_4=0; \end{cases}$

17) $\begin{cases} -x_1+3x_4+3x_5=0, \\ -5x_1-12x_2-6x_3+57x_4+69x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-15x_4-18x_5=0, \\ 7x_1+15x_2+7x_3-72x_4-87x_5=0, \\ 5x_1+9x_2+5x_3-48x_4-57x_5=0; \end{cases}$

18) $\begin{cases} -2x_1+4x_2+5x_3-15x_4-2x_5=0, \\ 12x_1-16x_2-24x_3+64x_4+8x_5=0, \\ -2x_2-2x_3+8x_4=0, \\ 4x_1-2x_2-5x_3+9x_4+2x_5=0; \end{cases}$

19) $\begin{cases} -x_1+6x_2+8x_4-13x_5=0, \\ -x_1+15x_2+2x_3+15x_4-35x_5=0, \\ -x_1+3x_2-2x_3+7x_4-3x_5=0, \\ 3x_2+3x_4-6x_5=0; \end{cases}$

20) $\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3+9x_4+3x_5=0, \\ 3x_1-6x_2-x_3-11x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2-x_3-3x_4+3x_5=0, \\ -9x_1+6x_2-2x_3+26x_4+7x_5=0, \\ -x_1-2x_2-2x_3+2x_4+7x_5=0; \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x_1-x_3-4x_4+8x_5=0, \\ 2x_2-2x_4+8x_5=0, \\ -x_1-4x_2+5x_4-19x_5=0, \\ x_1-4x_2-x_3-x_4-7x_5=0, \\ -4x_1+2x_2+2x_3+8x_4-12x_5=0; \end{cases}$

22) $\begin{cases} -3x_1-2x_2+6x_3-14x_4-19x_5=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_5=0, \\ x_1+x_2-2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ x_2-x_3+4x_4+4x_5=0; \end{cases}$

23) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+x_5=0, \\ -3x_1+7x_2+5x_5=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-2x_4-2x_5=0, \\ x_1-3x_2+6x_3-3x_4-2x_5=0; \end{cases}$

24) $\begin{cases} -x_1-4x_3-x_4+x_5=0, \\ -2x_1+2x_2-13x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1-2x_2+6x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3+7x_4-2x_5=0; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3-6x_5=0, \\ -3x_1+2x_2+8x_3+21x_5=0, \\ -x_1+2x_3-x_4+3x_5=0, \\ -2x_2+6x_3+10x_5=0, \\ -x_1+3x_2-2x_3+x_4+2x_5=0; \end{cases}$

26) $\begin{cases} -4x_1+3x_2-2x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-2x_4=0, \\ -7x_1+9x_2-8x_3+5x_4+x_5=0, \\ -2x_1-2x_3+2x_5=0; \end{cases}$

27) $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4-4x_5=0, \\ -4x_1-3x_3+x_4-12x_5=0, \\ -4x_1-2x_2-2x_3+x_4-15x_5=0, \\ 4x_1-4x_2-3x_3-6x_4+3x_5=0, \\ 14x_1-3x_2+3x_3-9x_4+34x_5=0. \end{cases}$

Р е ш е н и е п. 6. Используя элементарные преобразования, преобразуем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -11 & -23 & -6 & 39 \\ \boxed{-1} & -9 & -4 & 7 \\ 6 & 16 & 5 & -23 \\ 9 & 5 & -2 & -25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 76 & 38 & -38 \\ -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & -38 & -19 & 19 \\ 0 & -76 & -38 & 38 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Объявляем неизвестные x_1 и x_3 базисными, а x_2 и x_4 — свободными. Выражаем базисные через свободные:

$$x_3 = -2x_2 + x_4, \quad x_1 = -9x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -x_2 + 3x_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$x_1 = -\alpha + 3\beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = -2\alpha + \beta, \quad x_4 = \beta.$$

Так как в данном случае число переменных $n = 4$, а ранг основной матрицы системы $r = 2$, то по теореме $1.27^{\text{т}}$ число векторов фундаментальной системы решений равно $n-r = 4-2 = 2$. Полагая $\alpha = 1$, $\beta = 0$, получаем первое решение: $(-1, 1, -2, 0)$. Полагая $\alpha = 0$, $\beta = 1$, имеем второе решение: $(3, 0, 1, 1)$.

79. Найти углы между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если:

1) $\mathbf{a} = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1, 1)$;

2) $\mathbf{a} = (-1, -2, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 1, -2)$.

Р е ш е н и е п. 1. По определению угла между векторами косинус угла α между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть найден по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 1(-1) + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 2\pi/3$.

80. Доказать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2, \qquad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n.$$

81. Доказать, что система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ составляет ортонормированный базис, если:

1) $\mathbf{b}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

2) $\mathbf{b}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{b}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{b}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$;

3) $\mathbf{b}_1=\left(-\frac{1}{9},\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right)$, $\mathbf{b}_2=\left(\frac{8}{9},-\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right)$, $\mathbf{b}_3=\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}\right)$.

82. Является ли базис

$$\mathbf{b}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$
$$\mathbf{b}_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

ортонормированным?

83. Показать, что следующие системы векторов ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

1) $\mathbf{b}_1=(1,2,-2,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,-1,-1,-1)$;

2) $\mathbf{b}_1=(1,-2,2,-3)$, $\mathbf{b}_2=(2,-3,2,4)$;

3) $\mathbf{b}_1=(1,1,1,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,2,3,-3)$.

Решение п. 1. Проверяем ортогональность векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2=(1,2,-2,1)(1,-1,-1,-1)=1-2+2-1=0.$$

Найдем такой вектор $\mathbf{b}_3=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, что $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3=0$ и $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3=0$. Переходя к координатам, получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2-x_3-x_4=0.\end{cases}$$

Очевидно, что основная матрица этой системы уравнений совпадает с матрицей системы векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$. С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, находим:

$$x_3 = 3x_2 + 2x_4 = 3, \quad x_1 = -2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4.$$

Имеем ненулевое частное решение $(4, 1, 3, 0)$. Итак, найден вектор $\mathbf{b}_3 = (4, 1, 3, 0)$, ортогональный векторам $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$.

В поиске вектора $\mathbf{b}_4$, ортогонального векторам системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, выписываем и преобразуем матрицу этой системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем:

$$x_2 = -3x_1, \quad x_3 = -\frac{4}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + x_1 = -\frac{1}{3}x_1,$$
$$x_4 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 + 6x_1 - \frac{2}{3}x_1 = \frac{13}{3}x_1.$$

Полагая $x_1 = 3$, получаем ненулевое частное решение $(3, -9, -1, 13)$. Тем самым найден вектор $\mathbf{b}_4 = (3, -9, -1, 13)$, и система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ достроена до ортогонального базиса $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$.

84. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

1) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

2) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

4) $\mathbf{b}_1 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(-\frac{14}{15}, \frac{2}{15}, -\frac{1}{3}\right)$.

85. Пользуясь теоремой 1.30[т] о разложении вектора по ортонормированному базису, найти координаты вектора $\mathbf{a} = (3, 6, -9)$ в базисе

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

86. Даны матрица A и векторы X_1, X_2, X_3. Установить, какие из данных векторов являются собственными векторами матрицы A, и найти их собственные значения, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

87. Найти характеристический многочлен и спектр данной матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Находим характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((4-\lambda)(1-\lambda)+2\Big) =$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda - 6.$$

Приравнивая характеристический многочлен нулю, вычисляем характеристические числа: $(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$, $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$.

Итак, спектр матрицы: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

88. Найти собственные значения λ_i данной матрицы, а также базисы $\mathbf{b}_1^i$, $\mathbf{b}_2^i$, ..., $\mathbf{b}_k^i$ соответствующих им подпространств собственных векторов:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} -10 & -30 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} 8 & -25 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -4 & -13 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; ***17)*** $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 2 & -8 & 9 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} -9 & -8 & 8 \\ -4 & -5 & 4 \\ -10 & -10 & 9 \end{pmatrix}$; ***22)*** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; ***23)*** $\begin{pmatrix} -7 & -5 & -6 \\ 10 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ***25)*** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; ***26)*** $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; ***28)*** $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; ***29)*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 & -4 \\ 12 & 1 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 16 & 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; ***31)*** $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$;

32) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ***33)*** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

34) $\begin{pmatrix} -9 & 8 & 4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 16 & -16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$; ***35)*** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

36) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$; ***37)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

38) $\begin{pmatrix} 2 & 14 & 6 & 7 \\ -1 & -10 & -6 & -4 \\ 1 & 8 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; ***39)*** $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -4 & -5 \\ -6 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

40) $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & -3 \\ -10 & 5 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; ***41)*** $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

42) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ***43)*** $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \\ -1 & 6 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

44) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е п. 1. Обозначив данную матрицу A, ищем ее собственные значения:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}7-\lambda & 12\\ -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(7-\lambda)(-3-\lambda)+24=$$
$$=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. Находим соответствующие этим значениям собственные векторы, решая с помощью элементарных преобразований однородные системы $(A-\lambda_i E)X^i=0$, где $i=1,2$:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}6 & 12\\ -2 & -4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\qquad X^1=\alpha\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix},$$
$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -2 & -6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\qquad X^2=\alpha\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}.$$

Итак, оба подпространства собственных векторов, соответствующие значениям λ_1 и λ_2, одномерные. В качестве базиса первого из них можно взять вектор $\mathbf{b}_1^1=(-2,1)$, в качестве базиса второго — вектор $\mathbf{b}_1^2=(-3,1)$.

Р е ш е н и е п. 15. Обозначив данную матрицу A, вычисляем ее характеристический многочлен:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\Big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\Big)=$$
$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=-(\lambda-2)^3.$$

Имеем единственное собственное значение $\lambda_1=2$.

Находим соответствующие λ_1 собственные векторы, решая с помощью элементарных преобразований однородную систему линейных уравнений $(A-\lambda_1 E)X=0$:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем общее решение $x_3 = -x_1$, где x_1, x_2 — любые действительные числа. Тогда векторы

$$\mathbf{b}_1^1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2^1 = (1, 0, -1),$$

представляют собой фундаментальную систему решений, которая и будет искомым базисом подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_1.

Решение п. 44. Выписываем характеристический многочлен данной матрицы, обозначив ее через A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -2-\lambda & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 1 \\ 5 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda) \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2-\lambda & -2 \end{vmatrix} - (2+\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -(2+\lambda)\Big((4 - 2 + \lambda) - (2+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\Big) =$$

$$= (\lambda+2)^2\Big(-1 + (\lambda^2 + 2\lambda + 2)\Big) = (\lambda+2)^2(\lambda+1)^2.$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Решаем однородную систему линейных уравнений с основной матрицей $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Придавая неизвестной x_1, которую будем считать свободной, значение 1, имеем:

$$x_3 = -x_1 = -1,$$
$$x_4 = 3x_1 + 2x_3 = 3 - 2 = 1,$$
$$x_2 = -5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = -5 + 4 + 2 = 1.$$

В данном случае фундаментальная система решений состоит из одного вектора $(1, 1, -1, 1)$, который можно выбрать в качестве вектора $\mathbf{b}_1^1$, образующего базис подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_1.

Решаем однородную систему линейных уравнений с основной матрицей $A - \lambda_2 E$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Придавая неизвестным x_2 и x_3, которые мы объявим свободными, конкретные значения, находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1,\ x_3 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 2x_1 + 2x_3 = 0,$$
$$x_2 = 0,\ x_3 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 2x_1 + 2x_3 = 2.$$

Итак, в качестве базиса подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_2, можно выбрать систему векторов

$$\mathbf{b}_1^2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_2^2 = (0, 0, 1, 2).$$

Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. Общие задачи

89. Даны точки $M_1(-2, 3)$ и $M_2(5, 4)$. Найти расстояние d между ними.

90. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3, -8)$ на расстоянии 5 единиц.

Решение. Пусть $M(0, y)$ — искомая точка. Получаем и решаем уравнение для нахождения координаты y с помощью формулы $(1.21)^{\text{т}}$ для нахождения расстояния между двумя точками:

$$5 = \sqrt{(3-0)^2 + (-8-y)^2}, \quad 25 = 9 + (8+y)^2, \quad (8+y)^2 = 16, \quad |8+y| = 4.$$

Имеем два решения: $y_1 = -4$, $y_2 = -12$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(0, -4)$ и $M_2(0, -12)$.

91. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(1, 4)$ равно 5.

92. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2, -1)$, $B(6, 1)$, $C(3, 4)$ прямоугольный.

93. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(0, 2)$ и $C(2, -1)$ тупой угол.

94. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(3,5)$ и $C(1,-3)$. Найти его площадь.

95. Даны вершины треугольника: $A(-3,6)$, $B(9,-10)$, $C(-5,4)$. Найти координаты центра и радиус описанной окружности.

96. Даны точки $M_1(1,1)$ и $M_2(7,4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x,y)$, которая в 2 раза ближе к M_1, чем к M_2.

97. Отрезок с концами $A(1,-5)$ и $B(4,3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

98. Точки $A(2,4)$, $B(-3,7)$ и $C(-6,6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

Решение. Как известно, диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Тогда точка $O(x,y)$ пересечения диагоналей может быть найдена как середина отрезка AC по формулам $(2.2)^{\text{т}}$:

$$x = \frac{2+(-6)}{2} = -2, \quad y = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Обозначим через $D(x,y)$ четвертую вершину параллелограмма. Тогда найденная точка $O(-2,5)$ делит пополам диагональ BD. Применяя формулы середины отрезка $(2.2)^{\text{т}}$, составляем и решаем уравнения для определения координат точки D:

$$\frac{-3+x}{2} = -2,\ -3+x=-4,\ x=-1; \qquad \frac{7+y}{2} = 5,\ 7+y=10,\ y=3.$$

Итак, четвертая вершина — $D(-1,3)$.

99. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,6)$, $B(2,8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,2)$. Найти координаты двух других вершин.

100. Даны середины сторон треугольника $M(-1,5)$, $N(1,1)$, $P(4,3)$. Найти координаты его вершин.

101. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

102. В треугольнике с вершинами $A(2,3)$, $B(6,3)$, $C(6,-5)$ найти длину биссектрисы BM.

103. Даны вершины треугольника: $A(7,2)$, $B(1,9)$ и $C(-8,-11)$. Определить расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B.

104. В треугольнике с вершинами $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(0,6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

105. Дан треугольник с вершинами $A(-2,4)$, $B(-6,8)$, $C(5,-6)$. Найти площадь этого треугольника.

106. Доказать, что точки $(2,3)$, $(5,7)$, $(11,15)$ лежат на одной прямой.

Решение. Воспользуемся формулой $(2.3)^{\text{т}}$ и найдем площадь треугольника с вершинами в данных точках:

$$S = \frac{1}{2}\Big|(5-2)(15-3)-(11-2)(7-3)\Big| = \frac{1}{2}\Big|3\cdot 12 - 9\cdot 4\Big| = 0.$$

Площадь S треугольника равна нулю. Это и означает, что его вершины лежат на одной прямой.

107. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого — точки $A(-2,3)$, $B(4,-5)$, $C(-3,1)$.

108. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3,2)$, $B(3,4)$, $C(6,1)$, $D(5,-2)$.

109. Даны точки $A(1,2)$ и $B(4,4)$. На оси Ox найти точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5.

110. Найти уравнение прямой:

1) образующей с осью Ox угол $\pi/3$ и пересекающей ось Oy в точке $(0,-6)$;

2) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2;

3) параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный -2;

4) параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

Решение п. 3. Угол наклона данной прямой к оси Ox равен $\pi/4$. Значит, угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. В уравнение прямой с угловым коэффициентом $(2.4)^{\text{т}}$ подставляем значения $k = 1$ и $b = -2$:

$$y = 1 \cdot x + (-2), \quad y = x - 2.$$

111. Определить, при каком значении α прямая

$$(\alpha^2 - \alpha)x + (2 + \alpha)y - 3\alpha + 1 = 0:$$

1) параллельна оси Ox; ***2)*** проходит через начало координат.

112. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 2/5)$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 3$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k = \operatorname{tg}\operatorname{arctg} 3 = 3$. Подставляем значение k и координаты точки A в уравнение $(2.5)^{\text{т}}$:

$$y - \frac{2}{5} = 3(x + 2), \quad 5y - 2 = 15x + 30, \quad 15x - 5y + 32 = 0.$$

113. Равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 4 имеет острый угол $\pi/4$. Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, а за Oy — ось симметрии трапеции.

114. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -1)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

115. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y = \sqrt{3}x + 4$ и $y = 4$.

116. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $A(7,4)$, $B(4,-8)$; ***2)*** $A(7,-2)$, $B(-3,0)$; ***3)*** $A(5,4)$, $B(14,-8)$;

4) $A(5,-4)$, $B(0,-8)$; ***5)*** $A(-3,-2)$, $B(-6,-14)$;

6) $A(5,-4)$, $B(-4,-16)$; ***7)*** $A(7,-4)$, $B(10,-8)$;

8) $A(7,-4)$, $B(-3,4)$; ***9)*** $A(-3,4)$, $B(-2,8)$;

10) $A(7,-2)$, $B(5,-10)$; ***11)*** $A(5,-4)$, $B(2,-1)$;

12) $A(-3,-4)$, $B(-6,-2)$; ***13)*** $A(7,4)$, $B(17,12)$;

14) $A(-3,-4)$, $B(-8,-2)$; ***15)*** $A(7,4)$, $B(16,-2)$.

Решение п. 1. Подставляем координаты точек A и B в уравнение $(2.7)^{\text{т}}$:

$$\frac{x-7}{4-7}=\frac{y-4}{-8-4},\quad \frac{x-7}{-3}=\frac{y-4}{-12},\quad \frac{x-7}{1}=\frac{y-4}{4},$$
$$4(x-7)=y-4,\quad 4x-y-24=0.$$

117. Дан треугольник с вершинами A, B, C. Написать уравнения сторон треугольника:

1) $A(3,2)$, $B(3,8)$, $C(6,2)$; ***2)*** $A(1,2)$, $B(-2,4)$, $C(4,8)$.

118. Найти угловой коэффициент k прямой и ординату b точки пересечения ее с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1,1)$ и $B(-2,3)$.

119. Прямая проходит через точки $A(2,3)$ и $B(-4,-1)$ и пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C.

120. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки $A(-2,-2)$ и $B(-1,6)$, и имеющая ординату, равную 22?

121. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ и находящейся на одинаковом расстоянии от точек $M_1(2,3)$ и $M_2(4,-5)$.

122. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $D(1,3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$?

123. Привести к уравнению прямой с угловым коэффициентом общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$.

124. Определить параметры k и b для следующих прямых:

1) $2x+5y-1=0$; ***2)*** $7x+2y=0$; ***3)*** $2y-5=0$.

Решение п. 1. Приведем данное уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$5y=-2x+1,\quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}.$$

Из формулы $(2.4)^{\text{т}}$ следует, что $k=-2/5$, $b=1/5$.

125. При каком значении C прямая

$$2x - 3y + C = 0$$

пересекает ось Oy в точках с ординатами $b_1 = 2$, $b_2 = -3$?

126. На прямой $2x + y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3, 5)$ и $B(7, 1)$.

127. Найти уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4.

128. Построить прямые, заданные уравнениями:

1) $2x - y - 4 = 0$; ***2)*** $2x - 5y + 20 = 0$; ***3)*** $2x + 3y + 8 = 0$;
4) $2x - 3y = 0$; ***5)*** $y + 4 = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Чтобы построить прямую, достаточно знать координаты любых ее двух точек. Полагая $x = 0$, получаем $y = -4$, полагая $x = 1$, получаем $y = -2$. Имеем две точки: $A(0, -4)$ и $B(1, -2)$. Проводим через них прямую (рис. 2.1).

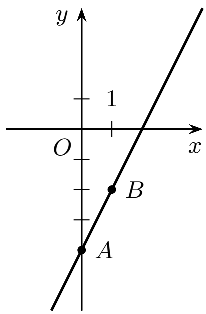

Рис. 2.1

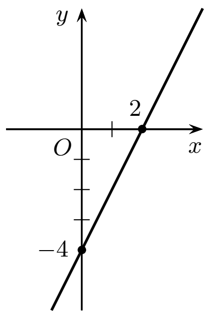

Рис. 2.2

Задачу можно решить иначе, преобразуя данное уравнение к уравнению прямой в отрезках:

$$2x - y - 4 = 0, \quad 2x - y = 4, \quad \frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Теперь на оси Ox отложим 2 единицы вправо, а на оси Oy — 4 единицы вниз. Получим две точки на осях координат, через которые проведем прямую (рис. 2.2).

129. Привести к уравнениям в отрезках данные уравнения прямых и построить эти прямые:

1) $y = 2x - 3$; ***2)*** $3x - 4y - 12 = 0$; ***3)*** $5x + 2y - 10 = 0$;

4) $3x - 2y - 1 = 0$.

130. Составить уравнение прямой, если точка $M(4, 2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

131. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна $7\sqrt{2}$.

132. При каких значениях α и β прямая

$$(\alpha - \beta)x + (2\alpha + \beta)y - 1 = 0$$

отсекает на оси Ox отрезок, равный $1/7$, а на оси Oy — отрезок, равный $1/2$?

133. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4, 4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S = 4$.

134. Через середину отрезка AB, где $A(4, 0)$, $B(0, 6)$, провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy, и написать ее уравнение.

135. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2, -6)$ и отсекает на осях Ox и Oy отрезки одинаковой длины, считая каждый отрезок направленным от начала координат.

136. Через точку $M(4, 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

137. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

138. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x + 10y + C = 0$, равна 135 квадратных единиц?

139. Найти угол между прямыми:

1) $2x - 3y + 10 = 0,\ 5x - y + 4 = 0;$

2) $x - 3y - 9 = 0,\ 3x - y - 6 = 0;$ ***3)*** $x - y + 6 = 0,\ -x - y - 8 = 0;$

4) $2x - 3y - 16 = 0,\ x + y - 1 = 0;$

5) $x + y - 5 = 0,\ x + 2y - 13 = 0;$ ***6)*** $2x + 2y + 7 = 0,\ x + y + 2 = 0;$

7) $-2x - 3y + 3 = 0,\ -x - y + 1 = 0;$

8) $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 2y + 21 = 0;$

9) $-2x - 5y + 9 = 0,\ 5x - 2y + 19 = 0;$

10) $x - 5y - 22 = 0,\ 5x - 2y + 37 = 0;$

11) $x - 5y - 22 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$

12) $x - 3y - 14 = 0,\ -x + 2y - 17 = 0;$

13) $x + 3y + 15 = 0,\ -3x - 2y + 15 = 0;$

14) $-2x - y + 7 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$

15) $-2x + 5y + 24 = 0,\ x - y + 5 = 0;$

16) $2x + 3y + 8 = 0,\ -x - 2y - 5 = 0.$

Р е ш е н и е п. 1. Преобразуем данные уравнения прямых к уравнениям с угловым коэффициентом:

$$2x - 3y + 10 = 0,\ y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3};$$
$$5x - y + 4 = 0,\ y = 5x + 4.$$

Выписываем угловые коэффициенты: $k_1 = 2/3$, $k_2 = 5$. Тогда по формуле $(2.10)^{\text{т}}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{5 - \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{2}{3}\cdot 5}\right| = \frac{13}{13} = 1.$$

Значит, угол между прямыми $\varphi = \pi/4$.

140. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(2,1)$, $B(3,1)$, $C(1,2)$.

141. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0,2)$ под углом $\pi/4$ к прямой l_1, задаваемой уравнением $x-2y+3=0$.

142. Точка $(2,0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x+y-1=0$. Составить уравнения двух других сторон.

143. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-5=0$ перпендикулярны.

144. Показать, что прямые $x+y-1=0$ и $2x+2y-3=0$ параллельны.

145. При каких значениях α следующие пары прямых будут: параллельны, перпендикулярны:

1) $2x-3y+4=0$, $\alpha x-6y+7=0$;

2) $\alpha x-4y+1=0$, $-2x+y+2=0$;

3) $4x+y-6=0$, $3x+\alpha y-2=0$;

4) $x-\alpha y+5=0$, $2x+3y+3=0$?

146. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A параллельной прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(3,1),\ M(5,-2),\ N(4,-1)$; ***2)*** $A(-1,-3),\ M(5,4),\ N(2,5)$;

3) $A(3,-3),\ M(-3,-4),\ N(-6,-10)$;

4) $A(-1,1),\ M(-3,-2),\ N(0,2)$; ***5)*** $A(2,1),\ M(5,-4),\ N(0,-2)$;

6) $A(-1,-3),\ M(5,4),\ N(20,16)$; ***7)*** $A(-1,-3),\ M(-3,4),\ N(0,6)$.

Решение п. 1. В силу параллельности искомая прямая и прямая MN имеют общий угловой коэффициент k, который может быть вычислен по координатам точек M и N по формуле $(2.6)^{\text{т}}$:

$$k=\frac{-1-(-2)}{4-5}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Итак, нам известны угловой коэффициент k и точка A искомой прямой. Выписываем ее уравнение по формуле $(2.5)^{\text{т}}$:

$$y-1=-1(x-3),\quad x+y-4=0.$$

147. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 2)$:

1) параллельно прямой $y = 2x - 7$;

2) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

148. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(-1, 1),\ M(-3, -4),\ N(-4, -5)$;

2) $A(2, -3),\ M(-3, 4),\ N(-9, 6)$; ***3)*** $A(3, 1),\ M(7, -4),\ N(6, -8)$;

4) $A(-1, 1),\ M(5, -2),\ N(8, 0)$; ***5)*** $A(3, 2),\ M(5, -2),\ N(7, 2)$;

6) $A(-1, -3),\ M(-3, -2),\ N(-8, -1)$;

7) $A(2, -3),\ M(-3, -2),\ N(7, 2)$.

Р е ш е н и е п. 1. По формуле $(2.6)^{\text{т}}$ вычисляем угловой коэффициент прямой MN:

$$k_{MN} = \frac{-5 - (-4)}{-4 - (-3)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Согласно условию перпендикулярности двух прямых $(2.12)^{\text{т}}$ угловой коэффициент искомого перпендикуляра

$$k_{\perp} = -\frac{1}{k_{MN}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Зная точку и угловой коэффициент, выписываем искомое уравнение по формуле $(2.5)^{\text{т}}$:

$$y - 1 = -1(x + 1), \quad x + y = 0.$$

149. Даны вершины треугольника: $A(6, -6)$, $B(2, -3)$, $C(8, 5)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины B.

Р е ш е н и е. По формуле $(2.6)^{\text{т}}$ находим угловой коэффициент стороны AC:

$$k_{AC} = \frac{5 - (-6)}{8 - 6} = \frac{11}{2}.$$

Тогда угловой коэффициент искомой высоты

$$k = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{2}{11}.$$

Зная угловой коэффициент k и точку B высоты, по формуле $(2.5)^{\text{т}}$ выписываем ее уравнение:

$$y-(-3)=-\frac{2}{11}(x-2),\quad 11y+33=-2x+4,\quad 2x+11y+29=0.$$

150. При каком значении α прямые

$$(\alpha+1)x+(3-\alpha)y-8=0,\quad (\alpha-3)x+(2\alpha-3)y=0$$

взаимно перпендикулярны?

151. Даны стороны треугольника: $x+3y-8=0$ (AB), $y-x=0$ (BC), $7x+5y-8=0$ (AC). Найти уравнение высоты этого треугольника, проведенной из вершины B.

152. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

153. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(-6,2)$ и точка $O(1,2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

154. Найти расстояние от точки $(2,1)$ до прямой $3x+4y-5=0$.

155. В треугольнике ABC найти длину высоты AD:

1) $A(-8,-5),\ B(-2,5),\ C(-5,2)$;

2) $A(-6,6),\ B(-2,-4),\ C(-5,-1)$;

3) $A(-4,15),\ B(-2,5),\ C(-6,9)$; ***4)*** $A(-6,11),\ B(3,-4),\ C(7,-7)$;

5) $A(-8,-19),\ B(-2,-4),\ C(-10,-12)$;

6) $A(-3,15),\ B(3,5),\ C(5,1)$; ***7)*** $A(9,11),\ B(3,-4),\ C(7,-3)$;

8) $A(9,11),\ B(3,-4),\ C(0,-1)$; ***9)*** $A(9,-5),\ B(3,5),\ C(9,11)$;

10) $A(7,-10),\ B(-2,5),\ C(-11,17)$;

11) $A(4,20),\ B(-2,5),\ C(-6,1)$;

12) $A(-3,-10),\ B(3,5),\ C(5,1)$; ***13)*** $A(-3,15),\ B(3,5),\ C(-3,2)$;

14) $A(-11,-10),\ B(-2,5),\ C(-8,11)$; ***15)*** $A(6,20),\ B(3,5),\ C(6,6)$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем уравнение стороны BC по формуле $(2.7)^{\text{т}}$:

$$\frac{x-(-2)}{-5-(-2)} = \frac{y-5}{2-5}, \quad \frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{-3},$$
$$x+2 = y-5, \quad x-y+7=0.$$

По формуле $(2.13)^{\text{т}}$ вычислим высоту AD как расстояние от точки A до прямой BC:

$$AD = \left|\frac{-8-(-5)+7}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

156. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.

157. Найти расстояние между следующими параллельными прямыми:

$$3x+4y-20=0, \quad 6x+8y+5=0.$$

158. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.

159. Даны уравнения оснований трапеции:

$$3x-4y-15=0, \quad 3x-4y-35=0.$$

Найти ее высоту.

160. Через точку $M(1,2)$ проведена прямая так, что расстояние от нее до точки $P(6,2)$ равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.

161. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от нее до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и осью Ox равен $3\pi/4$.

162. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3,4)$ относительно прямой $4x-y-1=0$.

163. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2,-2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.

164. Составить уравнения биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $5x + 12y - 2 = 0$.

Решение. Обозначим первую из данных прямых L_1, а вторую — L_2. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на одной из искомых биссектрис. Тогда по свойству биссектрисы расстояние d_1 от точки M до прямой L_1 равно расстоянию d_2 от точки M до прямой L_2. По формуле $(2.13)^{\text{т}}$ расстояния от точки до прямой составляют:

$$d_1 = \frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 1|}{5}, \quad d_2 = \frac{|5x + 12y - 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5x + 12y - 2|}{13}.$$

Тогда условие $d_1 = d_2$ дает уравнение

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{5} = \frac{|5x + 12y - 2|}{13}.$$

Решаем его:

$$13|3x + 4y - 1| = 5|5x + 12y - 2|,$$

$$\left[\begin{array}{l} 13(3x + 4y - 1) = 5(5x + 12y - 2), \\ 13(3x + 4y - 1) = -5(5x + 12y - 2), \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 14x - 8y - 3 = 0, \\ 64x + 112y - 23 = 0. \end{array}\right.$$

Итак, мы нашли две биссектрисы:

$$14x - 8y - 3 = 0, \quad 64x + 112y - 23 = 0.$$

165. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$.

166. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x + 5y - 9 = 0$, $10x - 6y + 4 = 0$;

2) $2x + 5y - 2 = 0$, $x + y + 4 = 0$; ***3)*** $2y = x - 1$, $4y - 2x + 2 = 0$;

4) $x + 8 = 0$, $2x - 3 = 0$; ***5)*** $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1$, $y = \dfrac{1}{2}x + 2$;

6) $x + y = 0$, $x - y = 0$; ***7)*** $y + 3 = 0$, $2x + y - 1 = 0$;

8) $y = 3 - 6x$, $12x + 2y - 5 = 0$; ***9)*** $2x + 3y = 8$, $x + y - 3 = 0$;

10) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}y - 1 = 0$, $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{3}y + 2 = 0$.

167. Найти точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$:

1) $A(-10,-16),\ B(-15,-2),\ C(-3,12),\ D(20,19)$;

2) $A(-4,-6),\ B(14,3),\ C(1,14),\ D(-26,11)$;

3) $A(-4,16),\ B(-11,0),\ C(1,-4),\ D(4,6)$;

4) $A(-2,-4),\ B(18,3),\ C(7,14),\ D(-22,11)$;

5) $A(-6,18),\ B(18,12),\ C(15,-10),\ D(-22,-4)$;

6) $A(-6,-14),\ B(13,-10),\ C(15,14),\ D(-22,18)$;

7) $A(-2,-2),\ B(-15,8),\ C(-7,8),\ D(0,2)$;

8) $A(14,-4),\ B(14,-6),\ C(-13,14),\ D(-26,26)$;

9) $A(-4,-8),\ B(-11,-6),\ C(1,2),\ D(24,8)$;

10) $A(4,-16),\ B(-16,7),\ C(-3,12),\ D(24,-1)$.

Решение п. 1. Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой $(2.7)^{\text{т}}$, проходящей через две точки:

$$\frac{x-(-10)}{-3-(-10)}=\frac{y-(-16)}{12-(-16)},\quad \frac{x+10}{7}=\frac{y+16}{28},\quad \frac{x+10}{1}=\frac{y+16}{4},$$
$$4(x+10)=y+16,\quad 4x-y+24=0.$$

Аналогично найдем уравнение диагонали BD:

$$\frac{x-(-15)}{20-(-15)}=\frac{y-(-2)}{19-(-2)},\quad \frac{x+15}{35}=\frac{y+2}{21},\frac{x+15}{5}=\frac{y+2}{3},$$
$$3(x+15)=5(y+2),\quad 3x-5y+35=0.$$

Для нахождения общей точки диагоналей составим из полученных уравнений систему, а затем решим ее:

$$\begin{cases}4x-y+24=0,\\ 3x-5y+35=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}4x-y+24=0,\\ -17x-85=0,\end{cases}$$

откуда

$$x=-5,\quad y=4x+24=4(-5)+24=4.$$

Итак, точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ имеет координаты $(-5,4)$.

168. При каких значениях a прямые $ax - 4y = 6$ и $x - ay = 3$:

1) пересекаются; ***2)*** параллельны; ***3)*** совпадают?

169. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$ и параллельную оси ординат, и написать ее уравнение.

170. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6 = 0$. Составить ее уравнение.

171. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ и перпендикулярной прямой $y = x + 1$.

172. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 13 = 0$ провести прямую, не совпадающую с данными и отсекающую на осях равные отрезки, и написать ее уравнение.

173. Найти координаты проекции точки $A(1, 3)$ на прямую

$$2x - y + 5 = 0.$$

174. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ так, что середина ее отрезка между прямыми $2x - 3y - 6 = 0$ и $2x - 3y + 6 = 0$ лежит на прямой $2x + 15y - 42 = 0$.

175. Дан треугольник с вершинами $A(4, 6)$, $B(-3, 0)$, $C(2, -3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежит биссектриса AD и высота CE, и определить величину острого угла φ между ними.

176. При каком значении α прямая $x+y-\alpha = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$?

177. Найти площадь треугольника, образованного прямыми

$$2x + y + 4 = 0, \quad x + 7y - 11 = 0, \quad 3x - 5y - 7 = 0.$$

178. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если заданы его вершина $A(1, 3)$ и уравнения медиан $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$.

179. Известны уравнения прямых, на которых лежат две стороны ромба: $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$, и уравнение одной из его диагоналей $x - y + 2 = 0$. Найти координаты вершин ромба.

180. Дан треугольник с вершинами $A(1, -2)$, $B(0, 5)$, $C(-6, 5)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности.

181. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот и вершину: $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$, $A(3, -4)$.

182. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x + y - 2 = 0$ и $7x - y + 4 = 0$ и точка $(3, 5)$ на его основании. Найти уравнение прямой, на которой лежит основание.

183. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(3, -4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

184. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная одну его вершину $A(2, -7)$, а также уравнения прямых, на которых лежат высота $3x + y + 11 = 0$ и медиана $x + 2y + 7 = 0$, проведенные из различных вершин.

185. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x + 5y - 13 = 0$ и $x - 4y + 7 = 0$ и делящей отрезок AB между точками $A(1, 0)$ и $B(7, 3)$ в отношении $2 : 1$.

186. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $y + 2x + 4 = 0$ относительно прямой $y - x - 2 = 0$.

187. Даны вершины треугольника: $A(4, 4)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -4)$. Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.

188. Даны вершины $A(-1, 0)$, $B(7, 9)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(8, 6)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D.

189. Даны уравнения сторон треугольника $x + y - 1 = 0$ (AB), $y + 1 = 0$ (BC) и точка $M(-1, 0)$ пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны AC.

2.1.2. Экономический профиль

190. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. ден. ед. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Найти стоимость автомобиля:

1) через 5 лет; ***2)*** через 6 лет и 3 месяца.

Решение п. 1. По условию ежегодная амортизация составляет 2,4 тыс. ден. ед. Тогда стоимость автомобиля через t лет

$$p(t) = 24 - \frac{12}{5}t.$$

Соответственно через 5 лет стоимость автомобиля будет равна

$$p(5) = 24 - \frac{12}{5} \cdot 5 = 12 \text{ тыс. ден. ед.}$$

191. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 ден. ед., остаточная — 200 ден. ед. Срок службы компьютера по норме — 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 ден. ед. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи?

192. Цена телевизора — 1000 ден. ед., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 ден. ед.?

193. Станок куплен за 12 тыс. ден. ед. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка $p(t)$ в зависимости от времени t, построить график. Определить стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации.

194. Стоимость y перевозки груза на расстояние x автотранспортом задается формулой $y = 0{,}5x + 2$, а водным транспортом — $y = 0{,}25x + 3$. Каким видом транспорта выгоднее осуществлять перевозки?

195. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y = 20x + 100$ и $y = 25x + 70$, где x — дальность перевозки в сотнях километров, y — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

Решение. Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70, \quad 5x = 30, \quad x = 6.$$

Итак, при перевозке на 600 км транспортные расходы совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ ден. ед. Поэтому начиная с 600 км более экономичным становится первое транспортное средство.

196. Мебельная фабрика продает каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Решение. По формуле $(2.7)^{\text{т}}$ построим функцию издержек $C(q)$, где q — количество произведенной продукции, как прямую, проходящую через точки $M_1(8, 635)$ и $M_2(13, 750)$:

$$\frac{C(q) - 635}{750 - 635} = \frac{q - 8}{13 - 8}, \quad \frac{C(q) - 635}{115} = \frac{q - 8}{5}, \quad \frac{C(q) - 635}{23} = \frac{q - 8}{1},$$
$$C(q) - 635 = 23(q - 8), \quad C(q) = 23q - 184 + 635 = 23q + 451.$$

Функция выручки по условию имеет вид $R(q) = 64q$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки:

$$23q + 451 = 64q, \quad 41q = 451, \quad q = 11.$$

197. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. ден. ед. в месяц, переменные издержки — 30 ден. ед., выручка — 50 ден. ед. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график. Найти точку безубыточности.

198. Функция издержек производства шин имеет вид

$$C(q) = 30q + 2100.$$

Цена одной шины — 60 ден. ед. Найти точку безубыточности. Дать графическую иллюстрацию.

199. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. ден. ед. в месяц, а переменные — 300 ден. ед. за одни часы. Цена часов — 500 ден. ед. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

200. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$D = -2p + 12, \quad S = p + 3,$$

где p — цена товара. Найти:

1) точку рыночного равновесия;

2) точку равновесия после введения налога, равного 3 ден. ед., определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;

3) величину субсидии, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы;

4) новую точку равновесия и доход государства, если вводится пропорциональный налог, равный 20%.

Р е ш е н и е п. 1. Равновесие на рынке определяется равенством спроса и предложения. С геометрической точки зрения точка рыночного равновесия — это точка пересечения линий спроса и предложения (рис. 2.3):

$$p + 3 = -2p + 12, \quad 3p = 9, \quad p = 3.$$

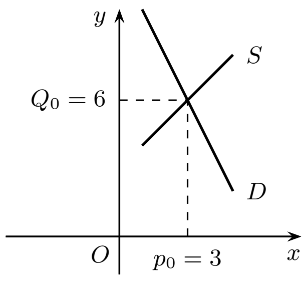

Рис. 2.3

Таким образом, равновесная цена $p_0 = 3$ ден. ед., равновесный объем продаж $Q_0 = 6$ ден. ед., т.е. точка рыночного равновесия имеет координаты 3 и 6.

Р е ш е н и е п. 2. Закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S_1 = S + 3 = p + 6$ (рис. 2.4).

Находим точку рыночного равновесия в новых условиях:

$$p + 6 = -2p + 12, \quad 3p = 6, \quad p = 2.$$

Получена новая точка равновесия $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличится на 2 единицы, а равновесный объем уменьшится на 1 единицу.

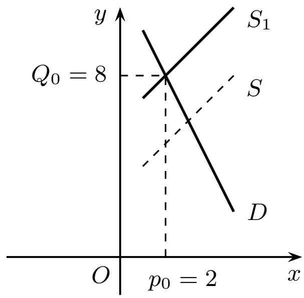

Рис. 2.4

201. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 ден. ед. за штуку и 20 единицам при цене 280 ден. ед. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 ден. ед. и 5 единиц при цене 60 ден. ед. Найти точку рыночного равновесия.

202. При цене 100 ден. ед. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 ден. ед. — только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара по цене 150 ден. ед. и 15 единиц по цене 255 ден. ед. Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

203. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями $S = p + 100$, $D = -2p + 250$, где p — цена товара. Найти:

1) точку рыночного равновесия;

2) новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения налога, равного 10 ден. ед. на единицу продукции;

3) доход государства, если налог был удвоен (подумать, может ли государство потерять деньги, увеличивая налог);

4) новую точку рыночного равновесия, если правительство предоставило субсидию, равную 5 ден. ед. на единицу продукции.

204. По одному вкладу банк выплачивает 15% годовых, а по другому, более рискованному — 20% годовых. Вкладчик хочет вложить 3 000 ден. ед. и получать ровно 500 ден. ед. в год. Какие суммы нужно вложить по вкладам каждого вида?

205. Петров взял кредит для строительства дома под 10% годовых в одном банке и под 12% в другом. Общая сумма займа составляет 10 тыс. ден. ед., а сумма выплат по процентам — 1 120 ден. ед. Сколько было взято в кредит в каждом банке?

206. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1,6)$, а боковых — точками $A(5,9)$ и $B(3,0)$. Составить уравнения прямых, ограничивающих участок.

2.2. Кривые второго порядка

207. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$; ***2)*** $x^2+y^2-4x+8y-16=0$;

3) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$; ***4)*** $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;

5) $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$.

Р е ш е н и е п. 2. Выделяем полные квадраты в левой части уравнения:

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+8y+16)-16-16=0,$$
$$(x-2)^2+(y+4)^2-36=0.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке $(2,-4)$, а ее радиус равен 6.

208. Составить уравнения окружностей для следующих случаев:

1) центр окружности — начало координат, радиус $r = 4$;

2) центром окружности является точка $A(3, -2)$, а ее радиус $r = 5$;

3) окружность проходит через точку $A(3, 7)$, а ее центр совпадает с точкой $B(0, 3)$;

4) точки $A(4, 3)$ и $B(0, 7)$ являются концами одного диаметра;

5) окружность проходит через точки $A_1(4, 4)$, $A_2(-2, 4)$, $A_3(-3, -3)$;

6) окружность касается прямой $5x - 12y + 17 = 0$, а центром окружности является точка $A(2, -1)$;

7) окружность касается двух параллельных прямых $2x + y - 15 = 0$, $2x + y + 5 = 0$ и проходит через точку $A(1, 3)$;

8) окружность касается осей координат и проходит через точку $M(2, 1)$.

209. Составить уравнение хорды окружности $x^2 + y^2 = 25$, делящейся в точке $(-1, 4)$ пополам.

210. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ в точке $M(5, 1)$.

211. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

212. Составить уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 + 2x - 19$, проведенных из точки $(1, 6)$.

213. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$ равна 10.

214. Составить каноническое уравнение эллипса для следующих случаев:

1) известны полуоси эллипса $a = 9$, $b = 5$;

2) малая ось равна 12, а расстояние между фокусами $2c = 5$;

3) известны эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$ и расстояние между фокусами $2c = 12$;

4) большая ось равна 5, а расстояние между фокусами $2c = 4$.

Решение п. 2. Найдем квадрат большой полуоси:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 6{,}5^2.$$

Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{6{,}5^2} + \dfrac{y^2}{6^2} = 1$.

215. Определить полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого из следующих эллипсов:

1) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; ***2)*** $4x^2 + y^2 = 16$; ***3)*** $x^2 + 4y^2 = 36$;

4) $24x^2 + 49y^2 = 1176$; ***5)*** $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Решение п. 4. Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{24x^2}{1176} + \frac{49y^2}{1176} = 1, \quad \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1, \quad \frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{\left(2\sqrt{6}\right)^2} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$a = 7, \quad b = 2\sqrt{6}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{7}.$$

Координаты фокусов: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.

216. Определить точки эллипса $x^2/25 + y^2/9 = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7.

217. Определить, как расположены точки

$$A(4, 1/5), \; B(1, 1), \; C(-2, -5), \; D(-1, -2).$$

относительно эллипса $16x^2 + 25y^2 = 65$.

218. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

219. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что его малая ось видна из фокуса под прямым углом.

220. Убедиться, что каждое из данных уравнений определяет эллипс, найти его центр симметрии и полуоси:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y - 5 = 0$; ***2)*** $5x^2 + 2y^2 - 50x - 8y - 27 = 0$.

221. Составить уравнение эллипса, длина большой оси которого равна 20, а фокусами служат точки $F_1(-1, 0)$ и $F_2(5, 0)$.

222. Установить, какие линии определяются приведенными ниже уравнениями, и изобразить их на чертеже:

1) $y = \dfrac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$; ***2)*** $y = -\dfrac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$; ***3)*** $x = -\dfrac{2}{3}\sqrt{7 - y^2}$;

4) $y = \dfrac{1}{9}\sqrt{6 - x^2}$.

223. Найти точки пересечения прямой и эллипса:

1) $x + 2y - 6 = 0$ и $x^2 + 4y^2 + 2x - 24 = 0$;

2) $4x - 3y + 40 = 0$ и $9x^2 + 16y^2 = 144$.

224. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Определить, при каких значениях m прямая $y = -x + m$:

1) пересекает данный эллипс; ***2)*** проходит вне эллипса;

3) касается его.

225. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$:

1) параллельных прямой $3x + 2y - 1 = 0$;

2) перпендикулярных этой прямой.

226. Составить уравнение касательной к эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в его точке $M(x_1, y_1)$.

227. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) известны оси гиперболы $2a = 12$, $2b = 10$;

2) расстояние между фокусами $2c = 12$, эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$;

3) расстояние между фокусами $2c = 20$, ось $2b = 16$;

4) даны уравнения асимптот $y = \pm\frac{5}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 2\sqrt{34}$;

5) расстояние между вершинами равно 20, а уравнение асимптоты $y = 2{,}4x$.

228. Для каждой из следующих гипербол найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот:

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$; ***2)*** $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1$; ***3)*** $64x^2 - 9y^2 = 1$;

4) $25x^2 - 16y^2 = 1$; ***5)*** $x^2 - y^2 = 1$; ***6)*** $4x^2 - y^2 = 16$.

229. Установить, какие линии определяются уравнениями:

1) $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 9}$; ***2)*** $y = -4\sqrt{x^2 + 1}$; ***3)*** $x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{y^2 + 9}$;

4) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$; ***5)*** $y = 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + 4x + 9}$;

6) $x = 10 - 3\sqrt{y^2 + 4y + 16}$.

230. Убедиться, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр симметрии и полуоси:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y - 16 = 0$;

3) $3x^2 - 9y^2 - 30x + 30y + 15 = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Выделим полный квадрат по переменным x и y:

$$16(x^2 - 4x + 4) - 64 - 9(y^2 + 6y + 9) + 81 - 161 = 0,$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144, \qquad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Отсюда следует, что центр гиперболы находится в точке $(2, -3)$, действительная полуось $a = \sqrt{9} = 3$, мнимая полуось $b = \sqrt{16} = 4$.

231. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 24, а фокусы находятся в точках $F_1(-10, 2)$ и $F_2(16, 2)$.

232. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-5, 2)$ параллельно асимптотам гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$.

233. Найти на гиперболе $x^2/4 - y^2/9 = 1$ точки с абсциссой $x = 6$ и фокальные радиусы этих точек.

234. Найти на гиперболе $x^2/9 - y^2/16 = 1$ точки, фокальные радиусы которых равны 5.

235. Найти точки пересечения гиперболы $x^2/20 - y^2/5 = 1$ и прямой $x - 2y + 2 = 0$.

236. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$.

237. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, для следующих случаев:

1) парабола проходит через точку $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 4;

3) фокус параболы находится в точке $F(-2, 0)$;

4) расстояние между фокусом и вершиной равно 3.

238. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $(1, 1)$, если ее вершина находится в начале координат.

239. Найти координаты фокуса и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 12x$; ***2)*** $y^2 = -8x$; ***3)*** $x^2 = -8y$.

240. Определить, какие линии задаются уравнениями:

1) $y = 3\sqrt{x}$; ***2)*** $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$; ***3)*** $y = \sqrt{-2x}$;

4) $4x + 3y^2 - 6y - 9 = 0$; ***5)*** $9x^2 - 18x + 3y + 12 = 0$;

6) $x = 5\sqrt{y}$; ***7)*** $x = -5\sqrt{-y}$.

Решение п. 1. Преобразуем данное уравнение к равносильному виду:

$$y = 3\sqrt{x}, \quad \begin{cases} y^2 = 9x, \\ y > 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений определяет часть параболы $y^2 = 9x$, лежащую в верхней полуплоскости, а точнее — в I квадранте.

241. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(4, -1)$, а фокус — в точке $(4, 2)$.

242. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x + 3y + 44 = 0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

Решение. Проверим, нет ли у данных параболы и прямой общих точек. Для точек прямой имеет место равенство $4x = -3y - 44$. Подставив его в уравнение параболы, получим:

$$y^2 = 16\,(4x), \quad y^2 = 16\,(-3y - 44), \quad y^2 + 48y + 704 = 0.$$

Очевидно, что дискриминант данного квадратного уравнения отрицательный. Следовательно, данные парабола и прямая не пересекаются. В таком случае ближайшая к прямой точка параболы является общей точкой этой параболы и ее касательной, параллельной данной прямой. Такая касательная имеет уравнение

$$4x + 3y + C = 0,$$

где константа C подлежит определению.

Касательная — это прямая, пересекающая параболу в единственной точке, называемой *точкой касания.* Чтобы найти касательную, подберем число C так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 64x, \\ 4x + 3y + C = 0 \end{cases}$$

имела единственное решение. Из второго уравнения находим: $4x = -3y - C$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем:

$$y^2 = 16(-3y - C), \quad y^2 + 48y + 16C = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. На этом основании вычисляем C:

$$24^2 - 16C = 0, \quad C = \frac{24^2}{16} = \frac{4^2 \cdot 6^2}{16} = 36.$$

Подставляя полученное значение C обратно в квадратное уравнение, находим его решение:

$$y^2 + 48y + 16 \cdot 36 = 0, \quad (y + 24)^2 = 0, \quad y = -24.$$

Теперь, зная y, находим x из уравнения параболы:

$$(-24)^2 = 64x, \quad 8^2 \cdot 3^2 = 64x, \quad x = 9.$$

Итак, ближайшей к прямой $4x + 3y + 44 = 0$ точкой параболы $y^2 = 64x$ является точка $M_0(9, -24)$.

Вычисляем расстояние от точки M_0 до данной прямой:

$$d = \frac{|4 \cdot 9 + 3(-24) + 44|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}.$$

243. Составить уравнения касательных к параболе $x^2 = 16y$ для следующих случаев:

1) касательная проходит через точку $A(-4, 1)$;

2) касательная параллельна прямой $x - 2y + 1 = 0$;

3) касательная перпендикулярна прямой $x - 2y + 2 = 0$.

244. Определить точки пересечения параболы $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и прямой $x + y - 2 = 0$.

245. Вычислить фокальный радиус точки параболы $y^2 = 40x$, если абсцисса этой точки равна 14.

246. Вершина параболы, проходящей через точку $(3, 5)$, совпадает с центром окружности $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Составить уравнение этой параболы, если ее ось параллельна оси Ox.

247. Установить, какую линию определяет уравнение:

1) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$;

2) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$;

3) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$;

4) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$; ***5)*** $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$;

6) $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$; ***7)*** $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$;

8) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$; ***9)*** $x^2 - 6x + 8 = 0$; ***10)*** $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Выделяем полные квадраты и проводим преобразования:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 9(y^2 - 4y + 4) + 36 - 44 = 0,$$
$$(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 9, \quad \frac{(x + 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{1} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-1, 2)$.

248. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке $C(x_0, y_0)$; сделать рисунок:

1) правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $C(2, 8)$;

2) левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 637$, $C(1, 8)$;

3) $B(3, 4)$, C — вершины параболы $y^2 = \frac{x + 7}{4}$;

4) фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $C(0, -6)$;

5) правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $C(-5, -2)$;

6) фокусы эллипса $x^2 + 9y^2 = 9$, C — его нижняя вершина;

7) правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $C(-2, 5)$;

8) правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $C(2, -7)$;

9) $B(2, -5)$, C — вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$;

10) левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $C(-1, -2)$;

11) правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $C(1,3)$;

12) фокусы эллипса $25x^2 + 26y^2 = 650$, C — его верхняя вершина;

13) левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $C(0,-6)$;

14) левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $C(-1,-3)$;

15) $B(1,4)$, C — вершина параболы $y^2 = \dfrac{x-4}{3}$.

Р е ш е н и е п. 1. Приведем данное уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\dfrac{3648}{57}} - \frac{y^2}{\dfrac{3648}{64}} = 1, \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{57} = 1.$$

Таким образом, для данной гиперболы

$$a^2 = 64, \quad b^2 = 57, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 57} = \sqrt{121} = 11.$$

Значит, правый фокус гиперболы $F_2 = (11, 0)$ (рис. 2.5).

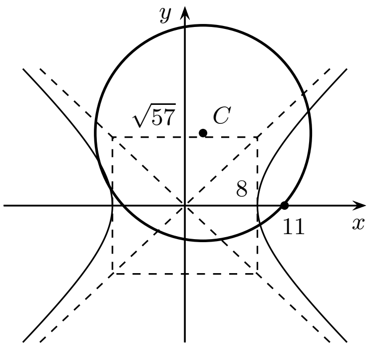

Рис. 2.5

Окружность с центром в точке $C(2,8)$ имеет уравнение

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 = R^2,$$

где радиус R подлежит определению. Подставим в это уравнение координаты найденной ранее точки F_2, по условию принадлежащей окружности:

$$(11-2)^2 + (0-8)^2 = R^2, \quad 81 + 64 = R^2, \quad R^2 = 145.$$

Итак, искомое уравнение окружности

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 = 145.$$

249. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям; привести к каноническому виду и сделать рисунок:

1) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна 18,5;

2) точка M отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в 4 раза меньшем, чем от прямой $x = -1$;

3) отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$;

4) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в 3 раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$;

5) точка M отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в 5 раз большем, чем от точки $A(4, -3)$;

6) точка M отстоит от точки $A(-3, -4)$ на расстоянии, в 3 раза большем, чем от прямой $x = 5$;

7) точка M отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в 4 раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$;

8) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65;

9) отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$;

10) точка M отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$;

11) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в 3 раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$;

12) точка M отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от прямой $x = 3$;

13) точка M отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$;

14) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31;

15) отношение расстояний от точки M до точек $A(2,-4)$ и $B(3,5)$ равно $2/3$.

Р е ш е н и е п. 2. Расстояние r между точками $M(x,y)$ и A, а также расстояние d от точки M до прямой $x=-1$ (рис. 2.6) могут быть вычислены по формулам:

$$r=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2},\quad d=|x+1|.$$

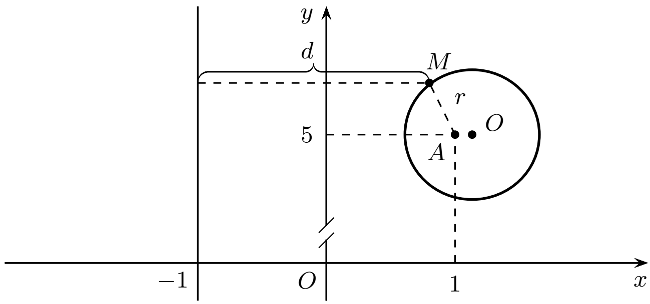

Рис. 2.6

Так как по условию $4r=d$, то

$$4\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=|x+1|,\quad 16\Big((x-1)^2+(y-5)^2\Big)=(x+1)^2,$$

$$16\Big(x^2-2x+1\Big)-\Big(x^2+2x+1\Big)+16(y-5)^2=0,$$

$$15x^2-34x+15+16(y-5)^2=0,$$

$$15\left(x^2-2\cdot\frac{17}{15}+\left(\frac{17}{15}\right)^2\right)-\frac{17^2}{15}+15+16(y-5)^2=0,$$

$$15\left(x-\frac{17}{15}\right)^2+16(y-5)^2=\frac{64}{15},\quad \frac{(x-17/15)^2}{(8/15)^2}+\frac{(y-5)^2}{(2/\sqrt{15})^2}=1.$$

Получено каноническое уравнение эллипса со следующими полуосями и центром:

$$a=\frac{8}{15},\quad b=\frac{2}{\sqrt{15}},\quad O\left(\frac{17}{15},5\right).$$

Глава 3

Предел последовательности и функции

3.1. Числовая последовательность

250. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = 1$; ***2)*** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; ***3)*** $x_n = 2^{n+1}$; ***4)*** $x_n = (-1)^n + 1$;

5) $x_n = n^2 + 2n + 3$; ***6)*** $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$; ***7)*** $x_n = \dfrac{4^n}{n^2}$; ***8)*** $x_n = n!$;

9) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; ***10)*** $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$; ***11)*** $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$;

12) $x_1 = -1$, $x_n = -n \cdot x_{n-1}$; ***13)*** $x_1 = 2$, $x_n = |x_{n-1} - 2|$.

Р е ш е н и е п. 2. Подставляя в формулу общего члена значения $n = 1, 2, 3, 4$, последовательно находим:

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1, \quad x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е п. 8. Факториал натурального числа n представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Поэтому

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad x_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Р е ш е н и е п. 11. Данная последовательность задана рекуррентно: каждый последующий ее член вычисляется через предыдущий. Имеем:

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = x_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$
$$x_3 = x_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$x_4 = x_3 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

251. Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу ее общего члена:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots;$ ***2)*** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots;$ ***3)*** $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots;$

4) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots;$ ***5)*** $2, 5, 10, 17, 26, \ldots.$

252. Исследовать последовательности на ограниченность, ограниченность сверху и ограниченность снизу:

1) $x_n = (-1)^n;$ ***2)*** $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n};$ ***3)*** $x_n = \sin n;$

4) $x_n = \ln n;$ ***5)*** $x_n = n;$ ***6)*** $x_n = n^3 + 2n;$ ***7)*** $x_n = -2^n;$

8) $x_n = \frac{n+1}{n};$ ***9)*** $x_n = (-1)^n n.$

Р е ш е н и е п. 8. Поскольку для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n > 0$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Так как, кроме того,

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2,$$

то $\{x_n\}$ ограничена также сверху и, следовательно, ограничена.

253. Исследовать данные последовательности на монотонность и строгую монотонность:

1) $x_n = 2n + 1;$ ***2)*** $x_n = \frac{(-1)^n}{n};$ ***3)*** $x_n = \frac{1}{n^2};$ ***4)*** $x_n = -\sqrt{n};$

5) $x_n = \left[\sqrt{n}\right];$ ***6)*** $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \ldots;$ ***7)*** $x_n = n - \frac{1}{n};$

8) $x_n = \frac{n+1}{n};$ ***9)*** $x_n = \cos\frac{\pi n}{2};$ ***10)*** $2, 2, 2, 2, \ldots.$

Р е ш е н и е п. 1. В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3 > 2n+1 = x_n.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ строго возрастающая.

Р е ш е н и е п. 2. Найдем три первых элемента:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда видно, что с одной стороны $x_1 < x_2$, а с другой — $x_2 > x_3$. Значит, данная последовательность не является монотонной.

Р е ш е н и е п. 3. Так как

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = x_n,$$

то данная последовательнось строго убывает.

Р е ш е н и е п. 5. В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = \left[\sqrt{n+1}\right] \geqslant \left[\sqrt{n}\right] = x_n.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Отсутствие строгого возрастания следует из того, что $x_1 = x_2 = 1$.

254. Найти первые семь членов последовательности Фибоначчи, определяемой рекуррентной формулой

$$x_1 = 1, \; x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \; (n \geqslant 3).$$

255. Привести пример двух ограниченных последовательностей, частное которых является неограниченной последовательностью.

256. Показать на примере, что произведение двух возрастающих последовательностей может не быть даже монотонной последовательностью.

257. Доказать по определению, что приведенные ниже последовательности бесконечно малые:

1) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; ***2)*** $\alpha_n = \dfrac{2}{n+1}$; ***3)*** $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$; ***4)*** $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$;

5) $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; ***6)*** $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$.

Р е ш е н и е п. 1. Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда требование $|\alpha_n| < \varepsilon$ влечет за собой неравенства

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как номер N должен быть натуральным числом, положим

$$N = [1/\varepsilon] + 1.$$

При $n \geqslant N$ будем иметь

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{[1/\varepsilon]+1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая.

258. Доказать, что последовательность

$$\alpha_n = \frac{1}{2n}$$

бесконечно малая, и для данных значений ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ справедливо равенство $|\alpha_n| < \varepsilon$:

1) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; ***2)*** $\varepsilon = 0{,}1$; ***3)*** $\varepsilon = 0{,}015$.

259. По определению предела доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$; ***2)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; ***3)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$; ***5)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{5n+2} = \dfrac{4}{5}$; ***6)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = 2$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n} = 3$.

Р е ш е н и е п. 1. Зададимся произвольным положительным числом ε и введем обозначение $x_n = n/(n-1)$. Тогда

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n-1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n-1)}{n-1}\right| = \frac{1}{n-1}.$$

Найдем, при каких значениях n это выражение будет меньше ε:

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n-1} < \varepsilon, \quad n - 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если теперь положить

$$N = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2,$$

то при всех $n \geqslant N$ окажется, что $|x_n - 1| < \varepsilon$. А это и доказывает, что последовательность x_n сходится к единице.

260. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{n}$; ***2)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{3-n^2}$; ***3)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+4}{7-9n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}$; ***5)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(n+2)}{n^2+n+1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+2}{2n+1+2n^2}$; ***7)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+n}$; ***8)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-8}$; ***10)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+4n^3}{1-n+2n^3}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}$; ***12)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3+100n}{2n^4}$; ***14)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n+1)!}{4n!+(n-1)!}$; ***16)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)n!}{(n+2)!+(n+1)!}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n-1)!+(4n+1)n!}$; ***18)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n+1)n!}{9(n+1)!+7n!}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+7n!}{(n+2)!}$; ***20)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)n!+(n+1)!}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$; ***22)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$; ***24)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{(2n^2+1)(n-3)!+(n-2)!}$; ***26)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+3)!}{(n+2)!+(n+1)!}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(2n^2+3)(n+1)!-(n+2)!}$; **28)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n!+(n+1)!}{(3n+1)n!}$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(n-1)!-3(n+1)!}{7(n+1)!+4n!}$; **30)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$; **32)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

33) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; **34)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)$;

35) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)$; **36)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$;

37) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$; **38)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$;

39) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$; **40)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$;

41) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$; **42)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n^2-3}}$;

43) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{5}{2n+1}\right)$; **44)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$;

45) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5+3n}{2n+4}-\dfrac{n}{2n-3}\right)$; **46)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1}-\dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$;

47) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$; **48)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n+2}-\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)$;

49) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-1}{5^n+1}$; **50)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

51) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; **52)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}$;

53) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$; **54)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+4+9+\ldots+n^2}$;

55) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3}$; **56)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

57) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

58) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$; ***59)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{5^n}\right)$.

Решение п. 4. Вынесем из числителя и знаменателя n в старшей (в данном случае второй) степени:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}.$$

Теперь мы можем применить свойство $4^{\text{т}}$ сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

Мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а последовательности $\{1/n\}$ и $\{1/n^2\}$ — бесконечно малые.

Решение п. 14. Используя определение факториала из задачи 250.8, разделим числитель и знаменатель на $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+2)}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0+0}=0.$$

Решение п. 31. Домножим и разделим выражение под знаком предела на его сопряженное, после чего применим к числителю формулу разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=0\cdot\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0\cdot\frac{2}{2}=0.$$

Решение п. 38. Вынесем, как всегда, из числителя и знаменателя n в старшей степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{1/2}}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\infty\cdot 1=\infty.$$

Решение п. 51. Применив формулу суммы арифметической прогрессии

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n(n+2)}{2(n+2)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+4/n}=\frac{-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

261. Показать на примерах, что частное двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно малым и бесконечно большим.

262. Доказать, что указанные последовательности не имеют предела:

1) $x_n=(-1)^n$; ***2)*** $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

263. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой последовательность $|x_n|$ сходится.

264. Показать на примере, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

265. Показать на примере, что не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.

266. Следует ли из сходимости суммы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходимость каждой из этих последовательностей?

267. Доказать, что последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

сходится.

Решение. Выясним, является ли эта последовательность монотонной. Действительно, запишем $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.$$

Сравним члены x_n и x_{n+1}. С этой целью преобразуем их следующим образом:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+(1+k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)}.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Покажем, что эта последовательность ограничена. В самом деле, для $n \in \mathbb{N}$ с одной стороны $x_n > 0$ и с другой стороны

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} n = 1.$$

Значит, для любого натурального n имеет место двойное неравенство $0 < x_n < 1$, убеждающее нас в ограниченности $\{x_n\}$.

Будучи возрастающей и ограниченной, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

268. Доказать сходимость и найти предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ \ldots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}},$$

если известно, что $a > 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a + \sqrt{0}}}}}_{n+1 \text{ корней}} < \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a + \sqrt{a}}}}}_{n+1 \text{ корней}} = x_{n+1},$$

то последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Докажем, что $\{x_n\}$ ограничена сверху, например числом $\sqrt{a} + 1$. В самом деле, для первого элемента это верно:

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ имеет место представление

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \tag{3.1}$$

и, если предположить, что $x_n \leqslant \sqrt{a} + 1$, то

$$x_{n+1} \leqslant \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1,$$

что и доказывает ограниченность всех элементов последовательности.

По теореме 3.5[т] возрастающая и ограниченная последовательность $\{x_n\}$ сходится. Обозначим ее предел через x. Факт существования предела последовательности $\{x_n\}$ делает возможным предельный переход при $n \to \infty$ в рекуррентном равенстве (3.1). В результате получаем и решаем уравнение отностительно x:

$$x = \sqrt{a + x}, \quad x^2 = a + x, \quad x^2 - x - a = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Итак, предел x необходимо равен одному из двух полученных значений. Так как отрицательное значение не подходит, то

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

269. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентно:

$$x_1 \in (0,1), \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

270. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ a < b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \ n \geqslant 3.$$

271. Доказать, что неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой.

3.2. Функциональная зависимость

3.2.1. Общие задачи

272. Для функции $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ найти:

1) $f(0)$; ***2)*** $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$; ***3)*** $f(-x)$; ***4)*** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; ***5)*** $\dfrac{1}{f(x)}$.

Р е ш е н и е п. 1. Подставим значение $x = 0$ в аналитическое выражение данной функции:

$$f(0) = \sqrt{1 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

273. Для функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 1}$ найти:

1) $f(0)$; ***2)*** $f(-2)$; ***3)*** $f(\sqrt{2})$; ***4)*** $f(-x)$; ***5)*** $f(1/x)$;
6) $f(a+1)$; ***7)*** $f(a) + 1$; ***8)*** $f(2x)$.

Р е ш е н и е п. 5. В выражении функции f заменяем x на $1/x$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/x + 3}{(1/x)^2 - 1} = \frac{x + 3x^2}{1 - x^2} = \frac{3x^2 + x}{1 - x^2}.$$

274. Для функции $f(x) = x^3\, 2^x$ найти:

1) $f(1)$; ***2)*** $f(-3)$; ***3)*** $f(-\sqrt[3]{5})$; ***4)*** $f(-x)$; ***5)*** $f(3x)$;
6) $f(1/x)$; ***7)*** $\dfrac{1}{f(x)}$; ***8)*** $f(b-2)$.

Решение п. 5. Заменяем x на $3x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(3x) = (3x)^3\, 2^{3x} = 3^3\, x^3\, (2^3)^x = 27x^3 8^x.$$

275. Определить область существования функций:

1) $y = \sqrt{x+1}$; ***2)*** $y = \lg\dfrac{2+x}{2-x}$; ***3)*** $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2+x}}$;

4) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$; ***5)*** $y = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$; ***6)*** $y = \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$;

7) $y = \sin\dfrac{1}{|x|-2}$; ***8)*** $y = \sqrt[4]{x^2-7x+10}$; ***9)*** $y = x^2 + \operatorname{tg} x$;

10) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$.

Решение п. 2. Так как логарифм задан для положительных значений аргумента, то область определения находится из условия

$$\frac{2+x}{2-x} > 0.$$

Этому условию удовлетворяет интервал $(-2, 2)$.

276. Найти множества значений функций:

1) $y = x^2 + 4x + 1$; ***2)*** $y = 2^{x^2}$; ***3)*** $y = 3 - 5\cos x$;

4) $y = x^2 - 8x + 20$; ***5)*** $y = 3^{-x^2}$; ***6)*** $y = 2\sin x - 7$;

7) $y = \dfrac{1}{x} + 4$; ***8)*** $y = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; ***9)*** $y = \sqrt{5-x} + 2$;

10) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; ***11)*** $y = \arcsin\dfrac{x^2+1}{2x}$; ***12)*** $y = \dfrac{|x|}{|x|+1}$.

Решение п. 1. Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x+2)^2 - 3.$$

Множеством значений функции $z = (x+2)^2$ является промежуток $[0, +\infty)$. Так как $y(x) = z(x) - 3$, то для функции y множество значений $E = [-3, +\infty)$.

277. Выяснить, является ли функция $f(x)$ четной, нечетной или имеет общий вид:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; ***2)*** $f(x)=x^4-5|x|$; ***3)*** $f(x)=e^x-2e^{-x}$;

4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; ***5)*** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; ***6)*** $f(x)=x^5+3x^3-x$;

7) $f(x)=\sqrt{x}$; ***8)*** $f(x)=\arcsin x$; ***9)*** $f(x)=\sin x+\cos x$;

10) $f(x)=|x|-2$; ***11)*** $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$; ***12)*** $f(x)=xe^x$.

Р е ш е н и е п. 1. Область определения $D(f)=(-\infty,+\infty)$ симметрична относительно начала координат, и

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=\frac{-x^3}{x^2+1}=-f(x).$$

Следовательно, функция $f(x)$ нечетная.

Р е ш е н и е п. 3. Здесь $D(f)=(-\infty,\infty)$, и

$$f(-x)=e^{-x}-2e^x\neq\pm f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ не является как четной, так и нечетной, т.е. имеет общий вид.

278. Выяснить, является ли функция $f(x)$ периодической; если да, то найти основной период:

1) $f(x)=\sin 4x$; ***2)*** $f(x)=\cos^2 5x$; ***3)*** $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$;

4) $f(x)=x^2$; ***5)*** $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$; ***6)*** $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$;

7) $f(x)=|x|$; ***8)*** $f(x)=\operatorname{tg}(2x-1)$; ***9)*** $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}x$;

10) $f(x)=\sin 3x\,\cos 3x$.

Р е ш е н и е п. 1. Основной период функции $\sin x$ равен 2π. Функция $f(x)=\sin 4x$ получается из нее путем сжатия в 4 раза вдоль оси Ox. Следовательно, функция $f(x)$ периодическая и ее основной период

$$T=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Р е ш е н и е п. 2. Поскольку

$$\cos^2 5x = \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 10x,$$

то функция f периодическая и ее период

$$T = \frac{1}{10}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{5}.$$

279. Для функции $y = f(x)$ найти обратную, если:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$; ***2)*** $f(x) = 3x+2$; ***3)*** $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$; ***5)*** $f(x) = 2e^{3x}$; ***6)*** $f(x) = x^3 - 2$; ***7)*** $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси. Ее областью значений является интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Выразим аргумент x через значение функции y:

$$y = \operatorname{arctg} 3x, \quad \operatorname{tg} y = 3x, \quad x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} y.$$

Таким образом, $x = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} y$ является искомой обратной функцией.

280. Найти сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$; ***2)*** $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x-1$;

3) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$; ***4)*** $f(x) = 3x+1$, $g(x) = 2x-5$;

5) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$.

Р е ш е н и е п. 1. Вычисляем искомые суперпозиции:

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|,\ x \in \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,\ x \geqslant 0.$$

281. Представить сложную функцию $y = f(x)$ в виде суперпозиции соответствующих функций, если:

1) $f(x) = (2x-3)^{99}$; ***2)*** $f(x) = \lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; ***3)*** $f(x) = \arcsin 3^{-x^2}$;

4) $f(x) = \sqrt{\sin^3(5x+3)}$; ***5)*** $f(x) = \ln^2\dfrac{1-x}{1+x}$.

Решение п. 2. Данная функция является суперпозицией линейной функции $v = x/3$, тригонометрической функции $u = \operatorname{tg} v$ и логарифмической функции $y = \lg u$.

282. Построить графики следующих функций:

1) $y = x^3 - 2$; ***2)*** $y = x^2 + 4x + 3$; ***3)*** $y = x^2 - 6x + 11$;

4) $y = \dfrac{1}{x-1}$; ***5)*** $y = -\dfrac{2}{x} + 1$; ***6)*** $y = \dfrac{x+4}{x+2}$; ***7)*** $y = \lg(x+2)$;

8) $y = \log_3(-x)$; ***9)*** $y = 1 - 0{,}5^x$; ***10)*** $y = 2^{x-1} + 3$;

11) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ***12)*** $y = -2\sin 3x$; ***13)*** $y = 3\cos 2x$;

14) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; ***15)*** $y = |x-3|$; ***16)*** $y = |x^2 - 2x + 3|$;

17) $y = \operatorname{tg}|x|$; ***18)*** $y = |1 + \ln x|$; ***19)*** $y = [x]$; ***20)*** $y = \{x\}$;

21) $y = \left|\{x\} - \dfrac{1}{2}\right|$; ***22)*** $y = \cos^2 x$; ***23)*** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

24) $y = \arcsin\sin x$; ***25)*** $y = \operatorname{sign}\cos x$; ***26)*** $y = |x| + |x+1| + |x+2|$.

Решение п. 11. В качестве исходного возьмем график функции $y = \cos x$ (рис. 3.1).

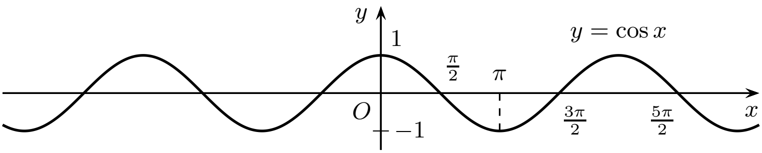

Рис. 3.1

С помощью сдвига вправо на величину $a = \pi/4$ получаем график функции $y = \cos(x - \pi/4)$ (рис. 3.2).

Растягивая полученный график в 2 раза вдоль оси Oy, получаем требуемый график функции $y = 2\cos(x - \pi/4)$ (рис. 3.3).

Решение п. 20. Дробная часть числа x определяется как разность самого числа x и его целой части:

$$\{x\} = x - [x].$$

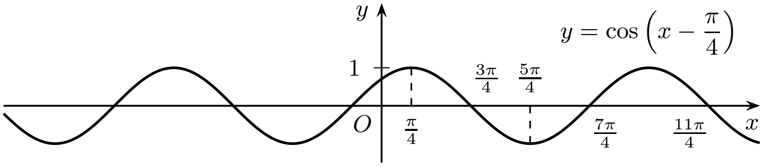

Рис. 3.2

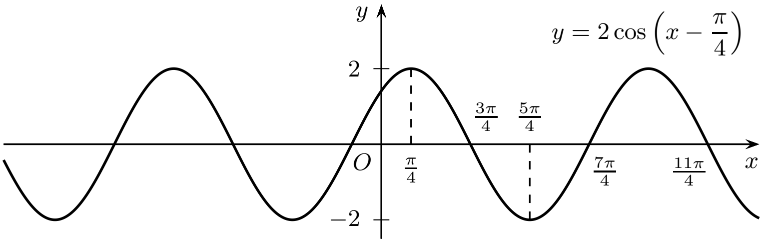

Рис. 3.3

Так как значение дробной части не изменяется при изменении числа x на любое целое значение, то достаточно построить часть графика функции $y = \{x\}$ на полуинтервале $[0, 1)$, а затем путем сдвигов влево и вправо на целочисленные значения аргумента получить весь график. Если $x \in [0, 1)$, то $[x] = 0$, поэтому $\{x\} = x$. На рис. 3.4 изображен получающийся в итоге график.

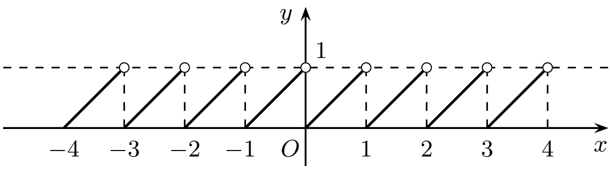

Рис. 3.4

283. Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие строго монотонными, какие ограниченными:

1) $f(x) = c$; ***2)*** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; ***3)*** $f(x) = \sin^2 x$;

4) $f(x) = -x^2 + 2x$; ***5)*** $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$; ***6)*** $f(x) = [x]$.

3.2.2. Экономический профиль

284. Опытным путем установлены функции спроса и предложения

$$D(p) = \frac{25p + 4p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара. Найти точку рыночного равновесия.

Р е ш е н и е. Находим равновесную цену:

$$D(p_0) = S(p_0), \quad \frac{25p_0 + 4p_0^2}{1 + 10p_0} = \frac{20 + 4p_0^2}{1 + 10p_0},$$

$$25p_0 + 4p_0^2 = 20 + 4p_0^2, \quad 25p_0 = 20, \quad p_0 = \frac{4}{5}.$$

Определяем равновесный объем продаж:

$$Q_0 = S(p_0) = \frac{20 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 + 10 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{500 + 64}{25 + 200} = \frac{564}{225} = \frac{188}{75}.$$

285. Для функций спроса и предложения

$$p = 29 - 3q^2, \quad p = \frac{5}{4}q^3 + 7,$$

где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия.

286. Для функций спроса и предложения

$$D(p) = \frac{8 + p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{2 - 4p + 3p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара, найти точку рыночного равновесия.

3.3. Предел функции. Два замечательных предела

287. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x + 1) = 5;$ ***2)*** $\lim\limits_{x\to -1}(4x + 3) = -1;$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(-x+5)=4$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$; ***5)*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}$;

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x}{x+3}=-2$; ***7)*** $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2)=10$; ***11)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$;

12) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x+4}=3$; ***13)*** $\lim\limits_{x\to 1}x^3=1$.

Решение п. 1. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполнялось бы неравенство

$$\big|(2x+1)-5\big|<\varepsilon.$$

Решая последнее неравенство, получаем:

$$\big|2x-4\big|<\varepsilon,\quad \big|2(x-2)\big|<\varepsilon,\quad \big|x-2\big|<\varepsilon/2.$$

Для завершения доказательства достаточно принять $\delta=\varepsilon/2$.

288. Используя определение предела функции по Гейне, найти предел:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-2x+1}{3x^2+2}$; ***3)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+3}$.

Решение п. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=3x^2+2x-1.$$

Выберем произвольным образом последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2,\quad x_n\neq 2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Найдем предел последовательности $f(x_n)$, пользуясь свойством $4^{\text{т}}$ сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(3x_n^2+2x_n-1)=$$
$$=3\Big(\lim_{n\to\infty}x_n\Big)^2+2\lim_{n\to\infty}x_n-1=3\cdot 2^2+2\cdot 2-1=15.$$

В силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ искомый предел равен 15.

289. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0:

1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \infty$; ***2)*** $f(x) = \sin x$, $x_0 = \infty$;

3) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$; ***4)*** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

5) $f(x) = \cos \dfrac{\pi}{x}$, $x_0 = 0$; ***6)*** $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2, \\ x^2, & x \geqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

7) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

Решение п. 1. Рассмотрим последовательности $x_n = 2\pi n$ и $y_n = \pi + 2\pi n$, сходящиеся к $x_0 = \infty$. Для них:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\Big(\pi + 2\pi n\Big) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$$

Пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ оказались различными. Это означает, что предел функции не существует.

290. Используя свойства предела функции, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-2} \big(5x^2 + 2x - 1\big)$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$; ***3)*** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x + 1}{x^3 - 2x + 3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin x + 2 \operatorname{ctg} x}{(\pi - x)\sin \frac{x}{2}}$; ***5)*** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1}$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2x + 5}{x - 3}$;

7) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 - 2x - 3}$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x - 3}{x^3 - 8}$; ***9)*** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 - 5x}{e^{1/x^2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x + \operatorname{tg}(\pi - x)}{2x\big(\frac{\pi}{2} - x\big)}$; ***11)*** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;

12) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{-x^2 + x + 20}{x^3 + 64}$; ***13)*** $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-8x^2 - 19x - 6}{5x^2 + 9x - 2}$;

14) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{-8x^2 + 33x + 35}{x^3 - 125}$; ***15)*** $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{4x^2 + 23x + 15}{-7x^2 - 36x - 5}$;

16) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3+8}$; ***17)*** $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{4x^2+23x+28}{x^3+64}$;

18) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{8x^2-27x+9}{7x^2-18x-9}$; ***19)*** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-8x^2-11x+10}{x^3+8}$;

20) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$; ***21)*** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-13x+3}{-7x^2+20x+3}$;

22) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{-2x^2-11x-5}{-5x^2-22x+15}$; ***23)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x^2-5x+7}{x^3-1}$;

24) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{-8x^2-43x-15}{5x^2+26x+5}$; ***25)*** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x^2+9x+1}{7x^2+10x+3}$;

26) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; ***27)*** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$; ***28)*** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2-x}$;

29) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; ***30)*** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$;

31) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}$; ***32)*** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$;

33) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$; ***34)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$;

35) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$; ***36)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

37) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; ***38)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{1-x^3}$; ***39)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

40) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; ***41)*** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$; ***42)*** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$;

43) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$; ***44)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4}}{2x^2-3x+1}$;

45) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$; ***46)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$; ***47)*** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{2}}{2x^2-5x+3}$;

48) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+18}-4}{2x^2+9x+10}$; ***49)*** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{-4x-6}-\sqrt{2}}{x^2+5x+6}$;

50) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$; ***51)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}$;

52) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{-3x+11}-\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$; ***53)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

54) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$; ***55)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; ***56)*** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

57) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x(1+\sqrt{x})}$; ***58)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; ***59)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

60) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; ***61)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$;

62) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$; ***63)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+3}{x^3-8x+5}$; ***64)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$;

65) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$; ***66)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; ***67)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$;

68) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^2(3-4x)^2}{(2x-1)^4}$; ***69)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10+x\sqrt{x}}{x^2}$; ***70)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+10x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$;

71) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; ***72)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; ***73)*** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-3}{2+|x|}$;

74) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$; ***75)*** $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

76) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$; ***77)*** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$;

78) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$; ***79)*** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$;

80) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$; ***81)*** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$;

82) $\lim\limits_{x\to -7}\left(\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{14}{x^2-49}\right)$; ***83)*** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

84) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$.

Р е ш е н и е п. 2. По свойствам предела арифметических операций

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}4x^2+\lim\limits_{x\to -1}5x+\lim\limits_{x\to -1}2}=\frac{3\lim\limits_{x\to -1}x\lim\limits_{x\to -1}x-1}{4\lim\limits_{x\to -1}x\lim\limits_{x\to -1}x+5\lim\limits_{x\to -1}x+2}=$$

$$=\frac{3(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2}=\frac{3-1}{4-5+2}=2.$$

Р е ш е н и е п. 6. Свойство предела частного здесь неприменимо, поскольку в точке $a=3$ знаменатель обращается в нуль. Числитель в этой точке в нуль не обращается, что позволяет найти предел «перевернутой дроби»:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2x+5}=\frac{0-3}{2\cdot 3+5}=0.$$

Итак, мы доказали, что функция

$$\alpha(x)=\frac{x-3}{2x+5}$$

бесконечно малая. Тогда по теореме $3.8^{\text{т}}$ функция $1/\alpha(x)$, т.е. функция под знаком предела, является бесконечно большой и ее предел равен ∞.

Вышесказанное позволяет при решении примеров выполнять для сокращения записи формальное деление ненулевой константы на нуль, получая в результате бесконечность:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+5}{x-3}=\frac{2\cdot 3+5}{3-3}=\frac{11}{0}=\infty.$$

Р е ш е н и е п. 11. В точке $x=2$ как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль. Это означает, что мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители, а затем сократим их общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

Знаменатель последней дроби теперь не обращается в нуль, что дает возможность применить свойства предела арифметических операций:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Р е ш е н и е п. 15. Очевидно, что здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to-5}\frac{4x^2+23x+15}{-7x^2-36x-5}=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(4x+3)}{(x+5)(-7x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to-5}\frac{4x+3}{-7x-1}=\frac{4(-5)+3}{-7(-5)-1}=\frac{-17}{34}=-\frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е п. 31. В точке $x=1$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как число $x=1$ является корнем многочленов в числителе и знаменателе, то последние делятся без остатка на $x-1$. Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} -\;3x^2-\;x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^2-3x} & 3x+2 \\ -\;2x-2 & \\ \underline{2x-2} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\;x^3-x^2+4x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+4 \\ -\;4x-4 & \\ \underline{4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x^2+4)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot1+2}{1^2+4}=1.$$

Р е ш е н и е п. 39. Подставляя значение $x=1$ в числитель и знаменатель, убеждаемся, что имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия избавимся от иррациональности в числителе, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Р е ш е н и е п. 51. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, разложим на множители знаменатель и сократим общий множитель:

$$\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}=\frac{\left(\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}=$$

$$= \frac{(2x+9)-(x+7)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} =$$
$$= \frac{x+2}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} =$$
$$= \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}.$$

Полученная дробь не содержит неопределенности, так что нахождение предела сводится к простой подстановке значения $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(-2+3)\left(\sqrt{2(-2)+9}+\sqrt{-2+7}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Р е ш е н и е п. 62. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия применим стандартный прием. Вынесем из числителя и знаменателя x в старшей степени, а затем воспользуемся тем, что функции $1/x$ и $1/x^2$ бесконечно малые при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1}{2+\dfrac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1}{2+\dfrac{3}{x}} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} =$$
$$= \frac{0+0-1}{2+3\cdot 0} = -\frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е п. 75. Выражение в скобках представляет собой неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим функцию под знаком предела на выражение, сопряженное разности в скобках:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

291. Найти пределы, используя первый замечательный предел (3.8)[т] и его следствия:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; *3)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; *5)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *6)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}$; *8)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; *9)* $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; *11)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; *12)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\operatorname{tg} 3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg} 2x}$; *14)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{\cos x-\cos^3 x}$; *15)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-\operatorname{tg} x}-\sqrt{2-\sin 3x}}{\sin 2x}$; *17)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{\arcsin 2x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+7\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x-3\operatorname{arctg} 4x}$; *19)* $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$; *20)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$;

21) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$; *22)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$; *23)* $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

24) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; *25)* $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

26) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; *27)* $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{ctg} 2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

Р е ш е н и е п. 1. Приведем данный предел к первому замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Так как при $x\to 0$ функция $2x$ является бесконечно малой, то последний предел является первым замечательным и, таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

Значит, искомый предел равен 2.

Р е ш е н и е п. 2. Воспользуемся первым замечательным пределом и свойствами пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\,\dfrac{\sin 6x}{6x}}{2x\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\lim_{x\to 0}3\frac{\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{1}{1}=3.$$

Р е ш е н и е п. 3. Сделаем замену $y=\arcsin x$. Так как $x=\sin y$ и $y\to 0$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Р е ш е н и е п. 7. Данное выражение содержит неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем его к виду, содержащему первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x(1-\cos^2 5x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=25\cos 0\cdot 1^2=25.$$

Р е ш е н и е п. 11. Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2}=-8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\,\frac{\sin x}{x}=-8.$$

Р е ш е н и е п. 15. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е п. 19. Выполним замену переменной $y=x-\frac{\pi}{2}$. Новая переменная y, как того и требует первый замечательный предел, будет стремиться к нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{1}{2}.$$

292. Найти пределы, используя второй замечательный предел $(3.9)^{т}$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$, $k\in\mathbb{R}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$, $k\in\mathbb{R}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$; ***5)*** $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$; ***7)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^{x}$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{2x-1}\right)^{x^2}$; ***11)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}$; ***13)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x-2}$; ***15)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+4}\right)^{x+5}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x-1}$; ***17)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x+6}{-x+4}\right)^{3x-1}$; ***19)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x+5}\right)^{4x-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-2}\right)^{-3x-1}$; ***21)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x-3}\right)^{3x-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; ***23)*** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; ***25)*** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}3x}}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; ***27)*** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Имеем неопределенность 1^{∞}. Чтобы привести данный предел ко второму замечательному $(3.10)^{т}$, выполним замену $y=k/x$. Ясно, что $y\to 0$ при $x\to\infty$. Тогда имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{k}=e^{k}.$$

Р е ш е н и е п. 3. Сводим данный предел ко второму замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=\left(\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^5.$$

Так как функция $\alpha(x)=5x$ бесконечно малая при $x\to 0$, то по формуле $(3.10)^{\text{т}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}=e.$$

А это значит, что искомый предел равен e^5.

Р е ш е н и е п. 6. Приведем данный предел к отношению двух вторых замечательных, разделив числитель и знаменатель на x, и воспользуемся задачей 292.1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^x}=\frac{e^3}{e^{-2}}=e^5.$$

Р е ш е н и е п. 12. Имеем неопределенность вида 1^∞. Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и бесконечно малой функции (БМФ), что позволит нам воспользоваться вторым замечательным пределом в форме $(3.10)^{\text{т}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x-3}-1\right)^{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}\,\frac{8}{x-3}\,(2x+7)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x+56}{x-3}}.$$

Так как функция $\alpha(x)=8/(x-3)$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, то по формуле $(3.10)^{\text{т}}$ предел в основании степени равен e. Очевидно, что предел в показателе степени равен 16. Значит, искомый предел равен e^{16}.

293. Найти пределы, используя следствия $(3.11)^{\text{т}}$ второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{kx}-1}{x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; *3)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$; *5)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{5x}-e^{x}}$; *6)* $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{e^{\cos x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; *8)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; *9)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x-1}$; *11)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{x}$; *12)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x\sin x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\bigl(2\sin(\pi/6+x)\bigr)}{x}$; *14)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+kx)^m-1}{x}$; *16)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$; *17)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$;

18) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[7]{x^2-3x-9}-1}{x^3-125}$; *19)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x^2}}{x}$.

Решение п. 1. Так как функция $\alpha(x) = kx$ является бесконечно малой при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{x} = \lim_{x\to 0} k\,\frac{e^{kx}-1}{kx} = k\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{kx} = k\cdot 1 = k.$$

Решение п. 2. Воспользуемся следствиями первого и второго замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}\,\frac{\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\cdot 1\cdot 1 = 6.$$

Решение п. 10. Преобразуем данное выражение:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\bigl((x^2-1)+1\bigr)}{x^2-1}\,\frac{x^2-1}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\bigl((x^2-1)+1\bigr)}{x^2-1}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Так как функция $\alpha(x) = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$, то искомый предел

$$L = 1 \cdot \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Р е ш е н и е п. 17. Воспользуемся тем, что $\alpha(x) = x - 1$ — БМФ при $x \to 1$:

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)+1}-1}{x-1}\,\frac{x-1}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)+1}-1}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

294. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = 2\operatorname{sign} x - 1$, $x_0 = 0$; ***2)*** $f(x) = [x]$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \{x\}$, $x_0 = 1$; ***4)*** $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$;

5) $f(x) = \dfrac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{при } x < 1, \\ \ln x & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

7) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ x/3 & \text{при } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

8) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 3x+2 & \text{при } x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Так как $\operatorname{sign} x = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$, то имеем:

$$f(0-0) = \lim_{x\to -0}\Big(2\operatorname{sign} x - 1\Big) = \lim_{x\to -0}\Big(2(-1)-1\Big) = -3,$$
$$f(0+0) = \lim_{x\to +0}\Big(2\operatorname{sign} x - 1\Big) = \lim_{x\to +0}\Big(2\cdot 1 - 1\Big) = 1.$$

Р е ш е н и е п. 6. Для данной функции получаем:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x-2) = 1-2 = -1,$$
$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\ln x = \ln 1 = 0.$$

295. Доказать эквивалентность БМФ при $x \to 0$:

1) $1-\cos x$ и $\dfrac{x^2}{2}$; ***2)*** $\ln(1+5x)$ и $e^{5x}-1$; ***3)*** $\ln(1+4x)$ и $\sin 4x$;

4) $\dfrac{3^{\sin x}-1}{\ln 3}$ и $\arcsin x$; ***5)*** $\sqrt{1+x}-1$ и $e^{x/2}-1$.

Решение п. 1. Находим предел отношения данных функций, используя первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=1.$$

Так как предел равен единице, то $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$.

296. Найти пределы, используя свойства эквивалентных БМФ и таблицу эквивалентностей (см. п. 3.3.8т):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$; ***3)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$; ***4)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{3^x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{(\operatorname{arctg}2x)^2}$; ***7)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}4x}$; ***9)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$; ***10)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$; ***12)*** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; ***13)*** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$;

14) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; ***15)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\operatorname{tg}(4-x^2)}$; ***16)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\ln(2x+1)}{1-\cos 2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}$; ***18)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x^2}-1)}{2\sin x-\sin 2x}$.

Решение п. 1. Так как функции $4x$ и $3x$ являются бесконечно малыми при $x\to 0$, то $\sin 4x\sim 4x$ и $\sin 3x\sim 3x$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Решение п. 12. Так как $1 = \ln e$, то

$$\ln x - 1 = \ln x - \ln e = \ln \frac{x}{e} = \ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right).$$

Функция $\alpha(x) = \dfrac{x}{e} - 1$ бесконечно малая при $x \to e$, поэтому

$$\ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right) \sim \frac{x}{e} - 1, \quad x \to e.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e}$.

Решение п. 18. Воспользуемся таблицей эквивалентностей (см. п. 3.3.8[т]) и задачей 295.1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^{x^2} - 1)}{2\sin x - \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,x^2}{2\sin x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x\,\frac{x^2}{2}} = 1.$$

297. Привести пример, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0, а функция $f(x) + g(x)$ имеет.

298. Показать на примерах, что частное бесконечно малых функций может быть бесконечно малым, иметь любой конечный предел, быть бесконечно большим, не иметь предела вообще.

299. Привести пример, когда сумма двух бесконечно больших функций является бесконечно малой.

3.4. Непрерывные функции

300. Используя теорему о непрерывности элементарных функций, выяснить, в каких точках непрерывны данные функции:

1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; ***2)*** $f(x) = \dfrac{x^2\cos x}{1 + \sin^2 x}$; ***3)*** $f(x) = \sqrt{-x^2} + \sin 3x$;

4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2} + e^x\sqrt{x^2 + x - 6}$; ***5)*** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3 - x}{x^2 - 4}$;

6) $f(x) = \arcsin(1 - x) + \lg\lg x$; ***7)*** $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x}$;

8) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg \dfrac{x+1}{x-2}$.

Р е ш е н и е п. 1. Будучи элементарной, данная функция непрерывна во всех точках своей области определения, т.е. в точке $x = 0$.

Р е ш е н и е п. 2. Область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$. Поскольку функция $f(x)$ является элементарной, то она непрерывна для всех $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

301. Доказать, что функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0. Исследовать ее на одностороннюю непрерывность.

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

3) $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{при } x < -2, \\ x^2 - 4 & \text{при } x \geqslant -2, \end{cases} \quad x_0 = -2.$

Р е ш е н и е п. 1. Найдем односторонние пределы в точке x_0 и сравним их со значением $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} 0 = 0 \neq f(0), \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} 1 = 1 = f(0).$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0. В силу различия значений односторонних пределов она не является непрерывной в этой точке.

302. Установить характер разрыва функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & x \geqslant 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$ ***2)*** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & 1 < x \leqslant 2, \\ \sin \pi x, & x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x_0 = 2$; **5)** $f(x) = \sin\ln|x|$, $x_0 = 0$;

6) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4$; **7)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

8) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$, $x_0 = 3$; **9)** $f(x) = \ln|x|$, $x_0 = 0$;

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$; **11)** $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $x_0 = \pi$;

12) $f(x) = x - [x]$, $x_0 = 1$; **13)** $f(x) = \dfrac{1}{x-[x]}$, $x_0 = 1$;

14) $f(x) = \operatorname{tg} x - [\operatorname{tg} x]$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение п. 1. Находим односторонние пределы в точке x_0:

$$f(x_0 - 0) = f(-0) = \frac{1}{0-1} = -1, \quad f(x_0 + 0) = f(+0) = (0+1)^2 = 1.$$

Оба предела существуют и конечны, но различны. Следовательно, x_0 является точкой конечного скачка, причем скачок

$$h = f(+0) - f(-0) = 2.$$

303. Показать, что функция $y = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

304. Показать, что функции $[x]$ (см. рис. 3.52т) и $\{x\}$ (см. рис. 3.4) непрерывны во всех точках $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а во всех точках $x_0 \in \mathbb{Z}$ непрерывны только справа.

305. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. Построить график. Найти скачок в точках конечного разрыва:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } |x| \leqslant \pi/2, \\ 1/2 & \text{при } |x| > \pi/2; \end{cases}$ **2)** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x-1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 2 & \text{при } |x| \geqslant 1; \end{cases}$ **4)** $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in [0,1), \\ 3x+2 & \text{при } x \in (1,2]; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{при } x\in(-\infty,0],\\ x & \text{при } x\in(0,+\infty);\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{при } x\in(-\infty,0],\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x\in(0,1)\cup(1,+\infty);\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x\leqslant-\pi,\\ \sin x & \text{при } -\pi<x<\pi/2,\\ 1 & \text{при } x>\pi/2;\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{при } x<1,\\ 2 & \text{при } x\in[1,2],\\ 3x & \text{при } x>2;\end{cases}$ ***9)*** $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-x & \text{при } x\in(0,1],\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x>1;\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}2 & \text{при } x<-2,\\ \sqrt{4-x^2} & \text{при } -2\leqslant x<2,\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{при } x<0,\\ 2x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ \operatorname{tg} x & \text{при } x>\pi/2;\end{cases}$ ***12)*** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$;

13) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx$; ***14)*** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{2n}}{1+x^{4n}}$;

15) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{-nx}}{2+e^{-2nx}}$; ***16)*** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$;

17) $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2}$; ***18)*** $f(x)=\log_2|x-2|$; ***19)*** $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$;

20) $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{x^2+x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Если $|x| < \pi/2$, то $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $y = \sin x$ и потому непрерывна. Для $|x| > \pi/2$ функция $f(x)$ также непрерывна, поскольку совпадает с элементарной функцией $y = 1/2$. Таким образом, исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ следует в точках $x = \pm\pi/2$.

В точке $x = \pi/2$

$$\lim_{x\to\pi/2-0} f(x) = \lim_{x\to\pi/2-0} \sin x = 1, \qquad \lim_{x\to\pi/2+0} f(x) = \lim_{x\to\pi/2+0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, односторонние пределы в точке $x = \pi/2$ существуют, конечны и не равны между собой. Следовательно, функция $f(x)$ в этой точке терпит конечный разрыв со скачком

$$h = \left| f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что в точке $x = -\pi/2$ функция $f(x)$ также имеет конечный разрыв со скачком $h = 1/2$. Строим график (рис. 3.5).

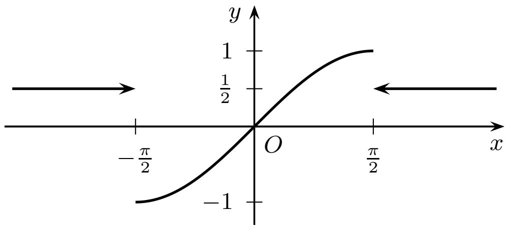

Рис. 3.5

Р е ш е н и е п. 12. Если $|x| < 1$, то

$$f(x) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x^n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x^n} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Если $|x| > 1$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

При $x = 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

При $x = -1$ знаменатель задающей функцию $f(x)$ дроби для нечетных n обращается в нуль. Значит, в этой точке предел не существует и функция $f(x)$ не определена.

Итак, мы доказали, что

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$f(1-0) = 0, \quad f(1+0) = 1, \quad f(-1-0) = 1, \quad f(-1+0) = 0,$$

то эта функция в точках $x = \pm 1$ терпит конечный разрыв со скачком $h = 1$. В остальных точках функция $f(x)$ совпадает с постоянной функцией и потому непрерывна. Строим чертеж (рис. 3.6).

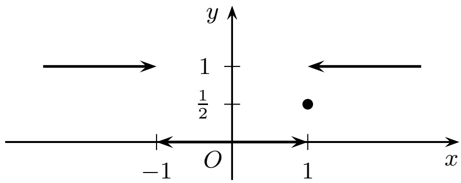

Рис. 3.6

306. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ ***2)*** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; ***4)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$; ***5)*** $f(x) = \ln|\cos x|$;

6) $f(x) = (1+x) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x^2}$.

Р е ш е н и е п. 1. При $x \neq 0$ функция $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $2^{-1/x^2}$ и потому непрерывна. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2} = 2^{-\infty} = 0 \neq 2 = f(0).$$

Итак, предел функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существует, но не равен значению функции в этой точке. Таким образом, в точке $x = 0$ данная функция имеет устранимый разрыв.

307. Выяснить, существует ли значение A, при котором данные функции непрерывны в точке x_0, и если существует, то найти его:

1) $x_0 = -2,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ A & \text{при } x = -2; \end{cases}$

2) $x_0 = 3,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{при } x \neq 3, \\ A & \text{при } x = 3; \end{cases}$

3) $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leqslant 0, \\ A(x-1) & \text{при } x > 0. \end{cases}$

308. Выяснить, является ли функция $f(x)$ непрерывной на заданном отрезке:

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$, $[-1, 2]$; ***2)*** $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)(x+1)}$, $[4, 7]$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$, $[-4, -3]$; ***4)*** $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$, $[0, 1]$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, $[-2, 0]$.

309. Имеет ли уравнение $x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ хотя бы один корень на отрезке $[1, 2]$?

Р е ш е н и е. Функция $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ является многочленом и потому непрерывна на отрезке $[1, 2]$. Найдем ее значения на концах этого отрезка:

$$f(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 16 - 12 + 4 - 1 = 7 > 0.$$

Полученные значения имеют разные знаки, поэтому по первой теореме Больцано — Коши существует точка $c \in (1, 2)$, в которой $f(c) = 0$. Число c и есть корень данного уравнения.

310. Доказать, что всякий многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

311. Доказать, что из непрерывности функции $f(x)$ следует непрерывность $|f(x)|$. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

312. Привести пример двух функций, разрывных в точке $x = 1$, сумма которых непрерывна в этой точке.

313. Существует ли на отрезке $[1, 2]$ такая точка, в которой функция $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ имеет значение, равное нулю?

314. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на интервале $(1, 2)$.

315. Доказать, что уравнение $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$ имеет корень на отрезке $[0, 2]$.

316. Определить, имеет ли уравнение $\sin x - x + 1 = 0$ хотя бы один корень.

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Производная функции

4.1.1. Общие задачи

317. Найти производные функций:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 4;$ ***2)*** $y = 2x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - 4x + 5;$

3) $y = \dfrac{x^4}{4} - 5\sqrt{x} + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}};$ ***4)*** $y = 3x^5 - 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{10}{\sqrt[5]{x^4}};$

5) $y = \sin x \cdot e^x;$ ***6)*** $y = x \operatorname{arcctg} x;$ ***7)*** $y = \sqrt[4]{x} \ln x;$

8) $y = x^2 \operatorname{tg} x;$ ***9)*** $y = \dfrac{\cos x}{\ln x};$ ***10)*** $y = \dfrac{3^x}{2x+1};$ ***11)*** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1};$

12) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x};$ ***13)*** $y = \dfrac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x;$ ***14)*** $y = \sin 2x;$

15) $y = \arcsin 4x;$ ***16)*** $y = \log_3(2x-5);$ ***17)*** $y = \operatorname{tg}(5x+1);$

18) $y = (3x-8)^7;$ ***19)*** $y = \ln\sqrt{x};$ ***20)*** $y = \sin^2 x;$

21) $y = \cos^3 x;$ ***22)*** $y = \arcsin\dfrac{x}{5};$ ***23)*** $y = \ln 3x;$

24) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; ***25)*** $y = \operatorname{arctg} e^x$; ***26)*** $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$;

27) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$; ***28)*** $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$; ***29)*** $y = \ln\sin x$;

30) $y = \ln\cos x$; ***31)*** $y = \sqrt{1-x^2}$; ***32)*** $y = \sqrt{1+5\cos x}$;

33) $y = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$; ***34)*** $y = \ln\ln x$; ***35)*** $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы и разности $(4.4)^{\text{т}}$, производной степенной функции, получим:

$$y' = (x^3+3x^2-4)' = (x^3)' + (3x^2)' - 4' = 3x^2 + 3(x^2)' - 0 = \\ = 3x^2 + 3\cdot 2x = 3x^2 + 6x.$$

318. Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{tg}^2 3x$; ***2)*** $y = \sqrt{\arcsin(5x+1)}$; ***3)*** $y = 3^{4x^2-5x+1}$;

4) $y = \sin^2 x \cdot e^{4x+1}$; ***5)*** $y = \arccos^3\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$;

6) $y = \ln\frac{x^3-2x+1}{2x+4}$; ***7)*** $y = \cos\left(2^{x^3}\right)$; ***8)*** $y = \frac{e^{4x+1}}{\operatorname{ctg}(x/3)}$;

9) $y = \sqrt[3]{\sin^2 3x + \cos^2 3x}$; ***10)*** $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$;

11) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$; ***12)*** $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;

13) $y = (2^x+3x^2)^4$; ***14)*** $y = x\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$;

15) $y = \sqrt[5]{\cos(1-x^2)}$; ***16)*** $y = \frac{\operatorname{ctg} 7x}{(x^2+1)^3}$; ***17)*** $y = \frac{1}{4(1+3\cos x)^7}$;

18) $y = \frac{1}{4(1+3\cos x)^7}$; ***19)*** $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; ***20)*** $y = \sqrt{xe^x+1}$;

21) $y = 2^{\arccos 3x} + (1-\arcsin 3x)^2$; ***22)*** $y = \sqrt[3]{3e^x+2^x-1} + \ln^7 x$;

23) $y = \sqrt{1-9x^2}\arccos 3x$; ***24)*** $y = \sin(x^3+4^x)$;

25) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$; ***26)*** $y = e^{\sin^3 x}$; ***27)*** $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$;

28) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; ***29)*** $y = \sqrt{\cos(4^x+4^{-x})}$; ***30)*** $y = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

31) $y = \left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^3$; ***32)*** $y = \sin^3\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^4$;

33) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^3}}$; ***34)*** $y = \operatorname{tg}^6 5x + 7^{\frac{2x}{3x-1}}$; ***35)*** $y = \ln^5(x-2^{-x})$.

Решение п. 1. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции $(4.7)^{\text{т}}$ и таблицей производных (см. п. $4.1.5^{\text{т}}$). Получим:

$$y' = (\operatorname{tg}^2 3x)' = 2\operatorname{tg}3x\cdot(\operatorname{tg}3x)' = 2\operatorname{tg}3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\,(3x)' =$$
$$= 2\operatorname{tg}3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3 = \frac{6\operatorname{tg}3x}{\cos^2 3x}.$$

319. Применив логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций:

1) $y = (\sin x)^x$; ***2)*** $y = (x^2+3x)^{x-2}$; ***3)*** $y = (\operatorname{tg}2x)^{x^2}$; ***4)*** $y = x^{2^x}$;

5) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$; ***6)*** $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$;

7) $y = \dfrac{\cos 2x\sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2\operatorname{ctg}x}$; ***8)*** $y = \dfrac{2^{x^2-3x}(1-5x)^3\sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10}\sqrt[3]{2x+x^2}}$;

9) $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; ***10)*** $y = (3x+1)^{1/x}$; ***11)*** $y = x + x^x + x^{x^x}$;

12) $y = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3\right)^{\cos 6x}$; ***13)*** $y = (\operatorname{tg}7x)^{\lg(3x+1)}$;

14) $y = (\sin 5x)^{\cos 5x} + x^{\cos 5x}$; ***15)*** $y = x^{a^x} + x^{x^a} + a^{x^x}$;

16) $y = (\operatorname{ctg}5x)^{x^3-1}$; ***17)*** $y = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg}x}$; ***18)*** $y = (6x-9)^{x^2}$;

19) $y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)}$; ***20)*** $y = (\operatorname{tg}x)^{\sin(3x+7)}$.

Решение п. 1. Применим формулу $y' = y\cdot(\ln y)'$. Найдем логарифмическую производную. При этом воспользуемся свойством логарифма:

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln\sin x;$$

$$(\ln y)' = (x \ln \sin x)' = x' \ln \sin x + x(\ln \sin x)' = \ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставим полученное выражение в исходную формулу:

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

320. Найти значение производной функции в указанной точке:

1) $y = \sqrt[5]{4 - 3x^5} + 4^x \dfrac{2}{\ln 4}$, y' в точке $x = 1$;

2) $y = \ln(\sin 5x) - \dfrac{4x^2}{\pi} + \dfrac{4}{5}$, y' в точке $x = \dfrac{\pi}{10}$;

3) $y = \ln \sqrt{(x-4)^3} + (x-4)^3$, y' в точке $x = 5$;

4) $y = e^{x+1}(4x - 5)$, y' в точке $x = \ln 2$;

5) $y = (x+1) \operatorname{arctg} e^{-2x}$, y' в точке $x = 0$;

6) $y = \ln \dfrac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x}$, y' в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$;

7) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{x}$, y' в точке $x = 5$;

8) $y = (4x^2 - 3x + 1)^3$, y'' в точке $x = 0$;

9) $y = \sin(7x^2 + x)$, y'' в точке $x = 0$;

10) $y = e^{4x^2 - 5x}$, y'' в точке $x = 0$;

11) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$, y'' в точке $x = 2$;

12) $y = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} \cos^2 x$, y''' в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$;

13) $y = \cos(x^2 + 3x)$, y''' в точке $x = 0$;

14) $y = \sin(2x^2 + 5x)$, y''' в точке $x = 0$;

15) $y = e^{4x^2 - x}$, y''' в точке $x = 0$;

16) $6x^2 - xy - y^2 + 18x - 8y = -12$, y' в точке $(-2, 0)$;

17) $e^y = e - xy$, y' в точке $(0, 1)$;

18) $x^4 - xy + y^4 = 1$, y'' в точке $(0, 1)$;

19) $e^y + y - x = 0$, y'' в точке $(1, 0)$.

Р е ш е н и е п. 1. Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных (см. п. 4.1.5$^{\text{т}}$), находим:

$$y' = \left((4-3x^5)^{\frac{1}{5}} + 4^x \frac{2}{\ln 4}\right)' = \frac{1}{5}(4-3x^5)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-15x^4) + 4^x \ln 4 \cdot \frac{2}{\ln 4} =$$
$$= -\frac{3x^4}{\sqrt[5]{(4-3x^5)^4}} + 2 \cdot 4^x.$$

Теперь вместо x подставим 1:

$$y'(1) = -\frac{3 \cdot 1^4}{\sqrt[5]{(4-3\cdot 1^5)^4}} + 2 \cdot 4^1 = -3 + 8 = 5.$$

321. Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = 3x^2 - x + 5$; ***2)*** $y = e^{x^2}$; ***3)*** $y = \operatorname{ctg} x$; ***4)*** $y = \sqrt{1+x^3}$;
5) $y = \arcsin 2x$; ***6)*** $y = \cos^2 x$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем производную первого порядка:

$$y' = (3x^2 - x + 5)' = 6x - 1.$$

Производную второго порядка найдем по определению:

$$y'' = (y')' = (6x-1)' = 6.$$

322. Найти производные третьего порядка от функций:

1) $y = 5x^2 - 104x - 3$; ***2)*** $y = e^x \sin x$; ***3)*** $y = 2x^2 \cos x$;
4) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}$; ***5)*** $y = xe^{-x}$; ***6)*** $y = x \ln x$.

Р е ш е н и е п. 1. Используя определение, находим последовательно производные:

$$y' = (5x^2 - 104x - 3)' = 10x - 104,$$
$$y'' = (y')' = (10x - 104)' = 10, \quad y''' = (y'')' = (10)' = 0.$$

323. Найти производные n-го порядка от функций:

1) $y = e^{-x}$; ***2)*** $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$; ***3)*** $y = \sin 2x$;
4) $y = \cos \dfrac{x}{3}$; ***5)*** $y = 2^{3x-5}$; ***6)*** $y = x^2 \ln x$.

Решение п. 1. Найдем первую и вторую производные указанной функции:

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x}, \qquad y'' = (-e^{-x})' = e^{-x}.$$

Несложно предположить, что

$$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Проверим справедливость полученной формулы методом математической индукции. При $n = 1$ формула очевидно верна. Пусть это равенство выполняется при $n = k$, т.е.

$$y^{(k)} = (-1)^k e^{-x}.$$

Проверим его при $n = k+1$, т.е. покажем, что

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} e^{-x}.$$

Действительно,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^k e^{-x}\right)' = (-1)^k(-1)e^{-x} = (-1)^{k+1}e^{-x}.$$

324. Применив формулу Лейбница, найти производные указанного порядка от функций:

1) $y = x\sin x$, $y^{(100)}$; ***2)*** $y = x^2e^{2x}$, $y^{(20)}$; ***3)*** $y = x^2\sin 2x$, $y^{(50)}$;

4) $y = e^x\cos x$, $y^{(4)}$; ***5)*** $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y^{(5)}$; ***6)*** $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}$.

Решение п. 1. Прежде всего отметим, что

$$x' = 1, \quad (x)^{(k)} = 0, \ k = 2, 3, \ldots,$$
$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда, применив формулу Лейбница $(4.12)^{\text{т}}$, получим:

$$(x\sin x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{n} C_{100}^k (x)^{(k)}(\sin x)^{(100-k)} =$$
$$= C_{100}^0 x(\sin x)^{(100)} + C_{100}^1 x'(\sin x)^{(99)} =$$
$$= x\sin(x + 50\pi) + 100\sin\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) = x\sin x - 100\cos x.$$

325. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Найти угол наклона этой касательной к оси Ox. Построить график функции, искомую касательную и нормаль:

1) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; ***2)*** $y = x^2 - 2x$, $x_0 = -1$; ***3)*** $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $y = e^x$, $x_0 = 0$; ***5)*** $y = x^3$, $x_0 = 2$; ***6)*** $y = x^2 - 7x + 3$, $x_0 = 1$;

7) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$; ***8)*** $y = \dfrac{4}{x}$, $x_0 = -1$; ***9)*** $y = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 5$.

Р е ш е н и е п. 1. Уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

В данном случае

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0.$$

Подставив полученные значения в уравнение касательной, получим:

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 0,$$

т.е. $y = x - 1$.

Уравнение нормали $(4.3)^{\text{т}}$ имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Значит, в данном случае уравнение нормали $y = -\frac{1}{1}(x - 1) + 0$, т.е. $y = -x + 1$.

Определим угол наклона касательной: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Графики полученных функций изобразим на рис. 4.1.

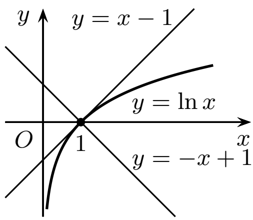

Рис. 4.1

326. Выяснить, в каких точках кривой

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$$

касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

327. Найти точки на кривой

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7,$$

касательная в которых параллельна оси Ox.

328. Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна прямой $x - 20y + 5 = 0$.

329. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$.

330. На кривой $y = x^3$ найти точки, в которых касательные параллельны биссектрисе первого и третьего координатных углов. Сделать чертеж.

331. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = 4x - x^3$ в точках ее пересечения с осью Ox.

332. Составить уравнения касательных к графику функции

$$y = \frac{x-3}{x+5}$$

в точках его пересечения с прямой $y + 2x + 3 = 0$. Сделать чертеж.

333. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $M(3, 2)$.

334. Найти точки на кривых, в которых касательные к графикам функций $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

335. Записать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$ и найти угол между этими касательными. Сделать чертеж.

336. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{2x-5}$, проходящей через точку $A(-1,-3)$. Сделать чертеж.

337. Найти на кривой $y = \ln x$ точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(1,0)$ и $B(e,1)$ этой кривой.

338. Найти угол наклона касательной к графику функции, проходящей через точку A:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 0{,}5$, $A(1,2)$; ***2)*** $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 6$, $A(2,4)$.

339. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной, проведенной в точке пересечения параболы с осью Oy.

340. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ надо провести касательную, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе первого координатного угла?

341. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x_0 = 2$.

342. Написать уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ и $g(x) = 2x^2 - x - 6$.

343. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3x + 5$, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

344. Найти угол между двумя касательными, проведенными из точки $(0,-1)$ к графику функции $f(x) = x^2$.

345. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника, образованного осями координат и касательной к гиперболе $xy = 7$ в точке $M(7,1)$.

346. Найти угол, под которым пересекаются кривые. Сделать чертеж:

1) $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$; ***2)*** $x^2 = 2y$ и $y = 4 - \dfrac{1}{2}x^2$;

3) $y = 0{,}5$ и $y = \cos x$; ***4)*** $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$; ***5)*** $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$.

Решение п. 1. *Углом между кривыми* в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в указанной точке.

Сначала определим точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

откуда получим точки $(2, 2)$, $(2, -2)$.

Рассмотрим сначала точку $(2, 2)$. Для того чтобы найти угол между касательными, достаточно знать их угловые коэффициенты в этой точке. Для кривой $y^2 = 2x$ получим:

$$2yy' = 2, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad k_1 = y'(2, 2) = \frac{1}{2}.$$

Для кривой $x^2 + y^2 = 8$ имеем:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad k_2 = y'(2, 2) = -1.$$

Значит, для искомого угла

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2} = \frac{-1 - 1/2}{1 + 1/2} = -1,$$

т.е. острый угол между данными кривыми в точке $(2, 2)$ равен $\pi/4$.

Поступая аналогично для точки $(2, -2)$, будем иметь:

$$k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1 + 1/2}{1 + 1/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

4.1.2. Экономический профиль

347. Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = q_0$ ед.

1) $C(q) = 50q - 0{,}05q^3$, $q_0 = 10$; ***2)*** $C(q) = \dfrac{q^2 + 2q}{q^2 + 4}$, $q_0 = 4$;

3) $C(q) = qe^{2q+1}$, $q_0 = 1$; ***4)*** $C(q) = \ln(q^3 + 3q + 1)$, $q_0 = 10$.

Р е ш е н и е п. 1. Функция средних издержек выражается соотношением

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

В данном случае

$$AC(q) = \frac{50q - 0{,}05q^3}{q} = 50 - 0{,}05q^2.$$

При $q = 10$ средние издержки

$$AC(q) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45.$$

Функция предельных издержек выражается производной:

$$MC(q) = C'(q).$$

В данном случае

$$MC(q) = (50q - 0{,}05q^3)' = 50q - 0{,}15q^2.$$

При $q = 10$ предельные издержки

$$MC(q) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35.$$

348. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и объемом выпуска продукции x (млн руб.) выражается функцией $y = y(x)$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном $x = x_0$ млн руб.:

1) $y(x) = -0{,}5x + 80$, $x_0 = 60$; ***2)*** $y(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

3) $y(x) = x^3 + x + 1$, $x_0 = 2$; ***4)*** $y(x) = 4\ln x$, $x_0 = e^2$.

Р е ш е н и е п. 1. Эластичность определяется с помощью следующей формулы:

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'.$$

Значит, в данном случае

$$E_x(y) = \frac{x}{-0{,}5x + 80}(-0{,}5x + 80)' = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ эластичность себестоимости

$$E_{60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0{,}6.$$

349. Объем продукции q, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$q = q(t) \text{ (ед.)}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 8,$$

где t — рабочее время, ч. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания:

1) $q(t) = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$; ***2)*** $q(t) = \ln(2t+5)$;

3) $q(t) = -t^3 + 7t^2 + 100t + 25$; ***4)*** $q(t) = e^{-t} + t$.

Р е ш е н и е п. 1. Производительность труда определяется производной от объема продукции:

$$z(t) = q'(t).$$

Скорость изменения производительности выражается производной от производительности труда:

$$v(t) = z'(t).$$

Темп изменения производительности равен логарифмической производной от производительности труда:

$$T_z(t) = (\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

В данном случае имеем:

$$z(t) = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\right)' = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100,$$

$$v(t) = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100\right)' = -5t + 15,$$

$$T_z(t) = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

Через час после начала работы, т.е. при $t = 1$, указанные параметры равны:

$$z(1) = -\frac{5}{2} + 15 + 100 = 112{,}5, \quad v(1) = -5 + 15 = 10,$$

$$T_z(1) = \frac{2 - 6}{1 - 6 - 40} = \frac{4}{45}.$$

За час до окончания работы, т.е. при $t = 8 - 1 = 7$, указанные параметры равны:

$$z(7) = -\frac{5}{2} \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5,$$
$$v(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20,$$
$$T_z(7) = \frac{2 \cdot 7 - 6}{7^2 - 6 \cdot 7 - 40} = -\frac{8}{33}.$$

350. Опытным путем установлены функции спроса $q = q(p)$ и предложения $s = s(p)$, где q, s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу, p — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены:

1) $q(p) = \dfrac{p+8}{p+2}$, $s(p) = p + 0{,}5$; ***2)*** $q(p) = \dfrac{4}{p+3}$, $s(p) = 2p - 1$;

3) $q(p) = \dfrac{12}{p+1}$, $s(p) = \log_2(p+5)$;

4) $q(p) = \sin\dfrac{\pi p}{2}$, $s(p) = (p-1)^2 + 1$.

Р е ш е н и е п. 1. Равновесная цена определяется из условия $q = s$. Поэтому, решив уравнение

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0,5,$$

получим $p = 2$, т.е. равновесная цена равна 2.

Эластичность спроса определяется формулой

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'(p) = \frac{p}{q}\left(\frac{p+8}{p+2}\right)' = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)},$$

а эластичность предложения — формулой

$$E_p(s) = \frac{p}{s} s'(p) = \frac{p}{s}(p + 0{,}5)' = \frac{p}{p + 0{,}5} = \frac{2p}{2p+1}.$$

Значит, эластичность спроса и предложения для равновесной цены $p = 2$ соответственно равны:

$$E_2(q) = -\frac{6 \cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0{,}3, \quad E_2(s) = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = 0{,}8.$$

4.2. Дифференцируемость функции

351. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $y = \arcsin 2x$; ***2)*** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; ***3)*** $y = \sqrt{\arccos 2x}$;

4) $y = x^2 \operatorname{tg} 3x$; ***5)*** $y = e^{x^2}$; ***6)*** $y = \ln\left(2x^2 - \dfrac{x}{3} + 1\right)$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем производную:

$$y' = (\arcsin 2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Значит, дифференциал функции

$$dy = y'dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

352. Используя дифференциал первого порядка, вычислить приближенно:

1) $\sqrt{26}$; ***2)*** $\sqrt{1{,}2}$; ***3)*** $\log_2 1{,}9$; ***4)*** $\operatorname{arctg} 1{,}01$; ***5)*** $5{,}99^3$;

6) $\operatorname{arcctg} 0{,}99$; ***7)*** $\sqrt[4]{80}$; ***8)*** $\sqrt[3]{28}$; ***9)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{51}{50}$; ***10)*** $\arcsin\dfrac{3}{100}$;

11) $\sin 29^\circ$; ***12)*** $(3{,}01)^4$; ***13)*** $\lg\dfrac{51}{5}$; ***14)*** $\sin 31^\circ$; ***15)*** $\sqrt{24}$;

16) $\sqrt[3]{126}$; ***17)*** $\sqrt[5]{33}$; ***18)*** $\sqrt[4]{82}$; ***19)*** $\cos 91^\circ$; ***20)*** $\operatorname{tg} 44^\circ$;

21) $\ln(e+1)$; ***22)*** $\operatorname{arctg} 0{,}98$; ***23)*** $(3{,}03)^4$; ***24)*** $\ln 0{,}96$.

Р е ш е н и е п. 1. Воспользуемся формулой

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

В этом случае

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

При применении указанной формулы важно правильно выбрать точку x и Δx. Легко вычислить $\sqrt{25} = 5$. Поэтому в качестве x положим 25, т.е.

$$x = 25, \quad \Delta x = 26 - 25 = 1.$$

Подставив полученные значения в исходную формулу, будем иметь

$$\sqrt{25+1}-\sqrt{25}\approx\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 1.$$

Тогда

$$\sqrt{26}=\sqrt{25+1}\approx\frac{1}{10}+5=5{,}1.$$

353. Найти приближенные значения функций:

1) $y=x^3+x^2$ при $x=2{,}01$; ***2)*** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x=2{,}9$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{1+x}}$ при $x=3{,}02$; ***4)*** $y=\sqrt{x^2-5x+12}$ при $x=1{,}3$.

4.3. Правило Лопиталя

354. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x-3x}{x}$; ***3)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{e^{2x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; ***5)*** $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x$; ***6)*** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}2x)^{\pi-2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$; ***8)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; ***9)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\operatorname{tg}3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$; ***11)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}{x-2}$; ***12)*** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$; ***14)*** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$; ***15)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)x$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$; ***17)*** $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$; ***18)*** $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$; ***20)*** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$; ***21)*** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.

Р е ш е н и е п. 1. Так как $\sin 2\cdot 0=0$, $3\cdot 0=0$, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(3x)'}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3}=\frac{2\cos 0}{3}=\frac{2}{3}.$$

4.4. Исследование функции с помощью производной

4.4.1. Общие задачи

355. Найти экстремумы и промежутки монотонности функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 7$; ***2)*** $y = e^{x^2-2x}$; ***3)*** $y = \ln(3x^2 + 2x + 1)$;

4) $y = x^2 e^{-x}$; ***5)*** $y = \sqrt{12x - 3x^3}$; ***6)*** $y = x + \operatorname{arcctg} x$;

7) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; ***8)*** $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$; ***9)*** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$;

10) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$; ***11)*** $y = x - \ln(1 + x)$; ***12)*** $y = x\ln^2 x$;

13) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$; ***14)*** $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5$;

15) $y = e^{3-6x-x^2}$; ***16)*** $y = x^{\frac{2}{3}} - x$; ***17)*** $y = x^3 - 6x^2 + 12x$;

18) $y = \sqrt{3x - 7}$; ***19)*** $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; ***20)*** $y = \dfrac{4x + 1}{4x^2 + x + 8}$;

21) $y = \dfrac{1}{10x^2 + x + 20}$; ***22)*** $y = \sqrt{3x^2 + 4x + 6}$.

Р е ш е н и е п. 1. Область определения данной функции

$$D(y) = (-\infty, +\infty).$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 7\right)' = x^2 - 5x + 6.$$

Область ее определения $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

найдем критические точки: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	$\nearrow$	$-7/3$	$\searrow$	$-5/2$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $x_1 = 2$ — точка максимума, $y_{\max} = -7/3$; $x_2 = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = -5/2$; функция возрастает при $x \in (-\infty, 2], [3, +\infty)$; функция убывает при $x \in [2, 3]$.

356. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости функций:

1) $y = x^4 - 4x^3 + x - 1$; ***2)*** $y = 2x^2 + \ln x$; ***3)*** $y = e^{-x^2/2}$;

4) $y = \ln(1 + x^2)$; ***5)*** $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$; ***6)*** $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$; ***7)*** $y = x \operatorname{arctg} x$;

8) $y = \operatorname{arctg} x - x$; ***9)*** $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$; ***10)*** $y = (3x + 6)e^{x/3}$;

11) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$; ***12)*** $y = xe^x$; ***13)*** $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$; ***14)*** $y = \dfrac{e^x}{x}$;

15) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$; ***16)*** $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$; ***17)*** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Область определения данной функции

$$D(y) = (-\infty, +\infty).$$

Найдем вторую производную:

$$y' = (x^4 - 4x^3 + x - 1)' = 4x^3 - 12x^2 + 1,$$
$$y'' = (4x^3 - 12x^2 + 1)' = 12x^2 - 24x.$$

Область ее определения $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв y'' нулю:

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 0,$$

найдем точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y	$\cup$	-1	$\cap$	-15	$\cup$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $(0, -1)$, $(2, -15)$ — точки перегиба; функция выпукла (выпукла вверх) при $x \in [0, 2]$; функция вогнута (выпукла вниз) при $x \in (-\infty, 0], [2, +\infty)$.

357. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке:

1) $y = x^3 - 3x$, $[0, 2]$; ***2)*** $y = x^4 - 8x^2$, $[1, 3]$;

3) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $[-2, 0]$; ***4)*** $y = x - \sqrt{x}$, $[0, 1]$;

5) $y = x - \ln x$, $[1/e, e]$; ***6)*** $y = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$, $[-4, 0]$;

7) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1, 5]$; ***8)*** $y = x + \sqrt[3]{x}$, $[-1, 1]$;

9) $y = 2x - \sqrt{x}$, $[0, 4]$; ***10)*** $y = x^2 - 4x + 1$, $[-3, 3]$;

11) $y = \operatorname{tg} x - x$, $[-\pi/4, \pi/4]$; ***12)*** $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-2, 2]$.

Решение п. 1. Функция $y = x^3 - 3x$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$. Найдем производную:

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$$

Она также непрерывна на отрезке $[0, 2]$.

Приравняв производную нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0,$$

найдем критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Точка $x_1 = -1 \notin [0, 2]$, а $x_2 = 1 \in [0, 2]$.

Вычислим значения функции в полученной точке и на концах отрезка:

$$y(1) = -2, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2.$$

Значит, наибольшее значение функции

$$y_{\text{наиб}} = y(2) = 2;$$

наименьшее значение функции

$$y_{\text{наим}} = y(1) = -2.$$

358. Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; ***2)*** $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x - 1}$; ***3)*** $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; ***4)*** $y = e^{-1/x}$;

5) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$; ***6)*** $y = x \operatorname{arctg} x$; ***7)*** $y = \ln(x - 1)$;

8) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; ***9)*** $y = \dfrac{2x}{x-1}$; ***10)*** $y = \operatorname{arctg} x$; ***11)*** $y = \dfrac{2x-1}{3x}$;

12) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; ***13)*** $y = \dfrac{3x^2}{x^2+5}$; ***14)*** $y = \dfrac{1}{x-3}$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем вертикальные асимптоты.

Область определения функции $D(y) = (\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Поскольку

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

то $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - 2x}{(x+1)^2} = -2.$$

Значит, $y = x - 2$ — наклонная асимптота.

Аналогичным образом получаем, что при $x \to -\infty$ прямая $y = x - 2$ также является наклонной асимптотой.

359. Провести полное исследование и построить график функций:

1) $y = \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)$; ***2)*** $y = \ln(x^2 + 4)$; ***3)*** $y = xe^{-x}$;

4) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$; ***5)*** $y = 4x^2 + \dfrac{25}{x-1}$; ***6)*** $y = x \ln x$;

7) $y = x^3 - 3x^2$; ***8)*** $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$; ***9)*** $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$;

10) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$; ***11)*** $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; ***12)*** $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$;

13) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; ***14)*** $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{1-x}}$; ***15)*** $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$;

16) $y = \dfrac{1}{5}(x^3 - 6x^2 + 25)$; ***17)*** $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$; ***18)*** $y = x + \dfrac{1}{x}$;

19) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; ***20)*** $y = e^{2x - x^2}$; ***21)*** $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$.

Решение п. 1. Область определения $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Найдем пределы при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = -\infty.$$

Поскольку $D(y) = (-\infty, +\infty)$, то вертикальных асимптот нет.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{1}{4}\big((-x)^3 + 3(-x)^2 - 9(-x) + 1\big) = \frac{1}{4}\big(-x^3 + 3x^2 + 9x + 1\big).$$

Функция не является периодической.

Для нахождения точек пересечения с осью Ox приравняем y нулю. Получим уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = 0,$$

которое является достаточно сложным для решения, поэтому пропустим этот пункт.

Чтобы найти точки пересечения с осью Oy, положим в исходном уравнении $x = 0$. Тогда

$$y = \frac{1}{4}(0^3 + 3\cdot 0^2 - 9\cdot 0 + 1) = \frac{1}{4}.$$

Получили точку $(0, 1)$.

Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную:

$$y' = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)' = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}.$$

Область ее определения $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную нулю: $y' = 0$, т.е. $3x^2 + 6x - 9 = 0$, найдем критические точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $x_1 = -3$ — точка максимума, $y_{\max} = 7$; $x_2 = 1$ — точка минимума, $y_{\min} = -1$; функция возрастает при $x \in (-\infty, -3], [1, +\infty)$; функция убывает при $x \in [-3, 1]$.

Определим интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{1}{4}(3x^2 + 6x - 9)' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Область ее определения $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв вторую производную нулю:

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0,$$

найдем точку $x = -1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
y	$\cap$	3	$\cup$
y''	$-$	0	$+$

Значит, $(-1, 3)$ — точка перегиба; функция выпукла при $x \in (-\infty, -1]$; функция вогнута при $x \in [-1, +\infty)$.

Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 1}{x} = \infty.$$

Значит, наклонных асимптот нет.

Множество значений функции $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

Построим график (рис. 4.2).

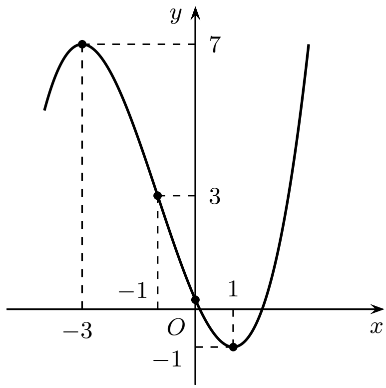

Рис. 4.2

4.4.2. Экономический профиль

360. Предприятие производит q единиц продукции в месяц, а суммарные издержки производства составляют $C = C(q)$. Зависимость между удельной ценой p и количеством единиц продукции q, которое можно продать по этой цене, описывается формулой $p = p(q)$. Рассчитать, при каких условиях прибыль будем максимальной, и найти эту прибыль:

1) $C(q) = \dfrac{q}{50} + 15q + 800$, $p(q) = 50 - \dfrac{q}{10}$;

2) $C(q) = q^2 - 2q + 3$, $p(q) = 20$; ***3)*** $C(q) = 10\ln(q+5)$, $p(q) = 10$;

4) $C(q) = 10\ln(q+1) - 5$, $p(q) = 4 + \dfrac{1}{q+1}$, x — целое.

Решение п. 1. Доход, который можно получить, продав q единиц продукции по цене $p(q)$, равен $R(q) = qp(q)$. Поэтому функция прибыли будет иметь вид

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = qp(q) - C(q) = \\ = q\left(50 - \frac{q}{10}\right) - \frac{q}{50} - 15q - 800 = \frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800.$$

Исследуем функцию прибыли на максимальное значение при $q \geqslant 0$. Найдем производную:

$$\Pi'(q) = \left(\frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800\right)' = \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q.$$

Приравняем $\Pi'(q)$ нулю:

$$\Pi'(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q = 0.$$

Отсюда $q = 174{,}9$.

Составим таблицу:

q	0	$(0, 174{,}9)$	$174{,}9$	$(174{,}9, +\infty)$
Π	-800	$\nearrow$	$2259{,}001$	$\searrow$
Π'		$+$	0	$-$

Значит, прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 174{,}9$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259{,}001$.

Отметим, что если по смыслу задачи q — целое, то для нахождения решения дополнительно нужно вычислить значение функции $\Pi(q)$ в ближайших к полученному $q_{\max}$ целых числах. В нашем случае

$$\Pi(174) = 2258{,}92, \qquad \Pi(175) = 2259.$$

Поэтому при условии целочисленности q прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 175$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259$.

361. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, на a км (считается по кратчайшему расстоянию). Определить, под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p ден. ед., а по железной дороге — q ден. ед. и город B расположен на b км севернее завода A. Рассчитать стоимость транспортировки в этом случае:

1) $a = 8$, $p = 4$, $q = 2$, $b = 15$; ***2)*** $a = 6$, $p = 8$, $q = 4$, $b = 17$;

3) $a = 7$, $p = 10$, $q = 8$, $b = 18$; ***4)*** $a = 8$, $p = 5$, $q = 5\sqrt{3}$, $b = 16$.

Решение п. 1. Обозначим через C точку железной дороги, ближайшую к A, через D — точку между C и B, где подъездной путь будет пересекать железную дорогу (рис. 4.3).

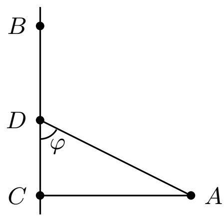

Рис. 4.3

Пусть $CD = x$, тогда по теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{64 + x^2}$$

длина подъездного пути к железной дороге. Кроме того, $BD = BC - x = 15 - x$ — длина пути по железной дороге. Учитывая стоимость провоза груза по подъездному пути и по железной дороге, найдем общую стоимость транспортировки:

$$s = s(x) = AD \cdot p + BD \cdot q = 4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x).$$

По смыслу задачи $x \in [0, 15]$. Исследуем функцию $s(x)$ на наименьшее значение на этом отрезке. Найдем производную:

$$s'(x) = \left(4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x)\right)' = \frac{4x}{\sqrt{64 + x^2}} - 2.$$

Приравняв производную нулю, найдем критические точки:

$$s'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{\sqrt{64 + 4^2}} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \in [0, 15].$$

Определим значения функции $s(x)$ в найденной точке и на концах отрезка $[0, 15]$:

$$s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57{,}7, \quad s(0) = 62, \quad s(15) = 68.$$

Значит,

$$s_{\text{наим}} = s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57{,}7.$$

Для нахождения угла φ поступим следующим образом:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AC}{CD} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3},$$

поэтому $\varphi = \pi/3$.

362. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под $p_1\%$ годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере $p_2\%$, а издержки задаются квадратичной зависимостью с коэффициентом a. Кроме того, прибыль при вложении средств в производство облагается налогом в $p_3\%$. Определить, сколько денег следует вложить в производство и сколько в банк, чтобы максимизировать прибыль:

1) $p_1 = 50, p_2 = 100, p_3 = 10, a = 3$;

2) $p_1 = 40$, $p_2 = 150$, $p_3 = 20$, $a = 2$;

3) $p_1 = 60$, $p_2 = 200$, $p_3 = 10$, $a = 1$;

4) $p_1 = 30$, $p_2 = 100$, $p_3 = 5$, $a = 0{,}5$.

Р е ш е н и е п. 1. Пусть x млрд руб. инвестируется в производство, тогда $1-x$ млрд руб. размещается в банке. Через год размещенный в банке капитал

$$K_{\text{б}}(x) = (1-x)\left(1+\frac{p_1}{100}\right) = (1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x,$$

а капитал, вложенный в производство,

$$K_{\text{пр}}(x) = x\left(1+\frac{p_2}{100}\right) = x\left(1+\frac{100}{100}\right) = 2x.$$

По условию задачи издержки составят $C(x) = ax^2 = 3x^2$, т.е. прибыль от вложения в производство $\Pi_1(x) = u(x) - K(x) = 2x - 3x^2$. Налоги составят

$$N(x) = \Pi_1(x)\frac{p_3}{100} = (2x-3x^2)\cdot 0{,}1.$$

Таким образом, чистая прибыль от вложения средств в производство

$$\Pi_{\text{пр}}(x) = \Pi_1(x) - N(x) = 2x - 3x^2 - (2x-3x^2)\cdot 0{,}1 = 0{,}9(2x-3x^2).$$

Значит, суммарная прибыль

$$\Pi(x) = K_{\text{б}}(x) + \Pi_{\text{пр}}(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + 0{,}9(2x-3x^2) = 0{,}3x - 2{,}7x^2 + 1{,}5.$$

Исследуем функцию $\Pi(x)$ на наибольшее значение при $x \in [0,1]$. Найдем производную:

$$\Pi'(x) = (0{,}3x - 2{,}7x^2 + 1{,}5)' = 0{,}3 - 5{,}4x.$$

Приравняв ее нулю, отыщем критические точки:

$$\Pi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3 - 5{,}4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{18}.$$

Найденная точка принадлежит отрезку исследования. Осталось вычислить значения данной функции в критических точках и на концах отрезка:

$$\Pi(0) = 1{,}5,$$
$$\Pi\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{181}{120} \approx 1{,}508,$$
$$\Pi(1) = 0{,}3 - 2{,}7 + 1{,}5 = -0{,}9.$$

Значит, наибольшее значение функции $\Pi_{\text{наиб}} = \Pi\,(1/18) = 181/120$. Таким образом, для получения максимальной прибыли в производство следует вложить $x_1 = 1/18$ млрд руб., а в банк — $x_2 = 17/18$ млрд руб.

363. Функция издержек производства имеет вид $C(q) = 100 + 3q + q^2$, где q — количество товара. Цена за единицу товара составляет 20 ден. ед. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Вычислить и объяснить экономический смысл $\pi'(30)$, а также $\pi(31) - \pi(30)$.

364. Функция средних издержек имеет вид $AC(q) = 120 + q$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) издержки производства 100 единиц продукции; в) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 250 ден. ед.

365. Пусть спрос на некоторый товар зависит от цены следующим образом:

$$D(p) = \frac{25\,000}{p^2} - \frac{1}{5}.$$

Найти: а) скорость изменения спроса при цене 10 ден. ед. и 25 ден. ед.; б) эластичность спроса относительно указанных цен. Определить, при каком значении цены спрос будет эластичным.

366. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой

$$C(q) = 40q - 0{,}03q^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = 15$ ед. Объяснить экономический смысл полученных величин.

367. Для функции спроса $D(p) = 6 - p$ и функции предложения $S(p) = p + 2$, где p — цена товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесной цены. Сделать вывод.

368. Найти эластичность спроса по цене и вычислить значение эластичности при указанных значениях цены:

1) $D(p) = \dfrac{p^3}{2p^2 + 7}$, $p = 10$; ***2)*** $D(p) = 14p^2 + 7p - \dfrac{8}{\sqrt{p}}$, $p = 25$.

369. Для функции спроса $p = -2q + 150$ и функции предложения $p = 4q + 30$, где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесного объема продаж. Сделать вывод.

370. Уравнение спроса имеет вид $p = 100 - 10q$. Известна функция издержек $C(q) = 50 + 3q$, где p — цена товара; q — число единиц товара. Найти максимальное значение прибыли. Определить, при какой цене прибыль будет максимальной.

371. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = q^3 + 15q - 6q^2.$$

Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q средние издержки минимальны.

372. Функция средних издержек имеет вид

$$AC(q) = \frac{320\,000}{q^2} + \frac{8\,000}{q} + 0{,}5,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) функцию предельных издержек. Определить, при каком объеме производства полные издержки минимальны.

373. Уравнение спроса имеет вид $D(p) = 100\sqrt{4-p}$. Найти эластичность спроса и выяснить, как увеличение цены повлияет на выручку, если спрос составит:

1) 150 ед.; ***2)*** 50 ед.

374. Функция издержек производства некоторой продукции имеет вид

$$C(q) = 150 + 10q + 0{,}01q^2.$$

Цена на товар составляет 36 ден. ед. Найти функцию предельной прибыли и ее значение в точке $q = 15$ ед. Вычислить и объяснить экономический смысл величин $\pi'(15)$, $\pi(16) - \pi(15)$.

375. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 2\,000 + 100q + 0{,}1q^2.$$

Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q скорость изменения средних издержек равна нулю.

376. Для следующих функций спроса найти значение эластичности при указанных значениях цены:

1) $D(p) = \dfrac{p^3+7}{p}$, $p = 21$; ***2)*** $D(p) = \dfrac{p}{p^2+7p-3}$, $p = 17$.

377. Определить, при каком объеме производства монополия получит максимальную прибыль, если функция совокупных издержек $C(q)$ и уравнение спроса на некоторый товар $p = p(q)$, где p — цена товара, q — количество единиц товара, имеют вид:

1) $C(q) = 400 + 30q + q^2, \quad p = -\dfrac{1}{3}q^2 - 3q + 50;$

2) $C(q) = 900 + 40q + 5q^2, \quad p = -2q^2 - 4q + 280.$

378. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 1\,000 + 2q + 0{,}04q^2.$$

Найти фиксированные издержки, функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q средние издержки минимальны.

379. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 96q - 2q^2 + q^3.$$

Установить, при каком объеме производства предельные и средние издержки совпадают. Найти эластичность полных и средних издержек при этом объеме.

380. Пусть производственная функция задается следующей эмпирической формулой:

$$F(L) = 300\sqrt{L} - 4L,$$

где L — численность персонала. Вычислить предельную производительность при $L = 9$, $L = 100$, $L = 2\,500$, $L = 22\,500$. Определить, как изменяется предельная производительность с ростом численности персонала.

381. Пусть зависимость между себестоимостью продукции и объемом производства задается формулой $C(q) = 50 - 0{,}4q$. Определить эластичность себестоимости при объеме продукции:

1) $q = 15$ ед.; ***2)*** $q = 150$ ед.

382. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(q) = 100 + 3q^2.$$

Цена на товар изменяется по закону $p(q) = 400 - 2q/5$. Определить, при каком объеме производства q прибыль π будет максимальной.

383. Для функции спроса

$$D(p) = 154 - \frac{2p^3}{p+1}$$

найти значение эластичности при цене $p = 7$.

Глава 5

Теория интегрирования

5.1. Неопределенный интеграл

384. Найти интегралы:

1) $\int (2x+1)^2 dx$; ***2)*** $\int \frac{x^2-1}{x}\, dx$; ***3)*** $\int \left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$;

4) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$; ***5)*** $\int \frac{2x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x^3}}{x}\, dx$;

6) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\, dx$; ***7)*** $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$; ***8)*** $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$;

9) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; ***10)*** $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

11) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx$; ***12)*** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$;

13) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$; ***14)*** $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$; ***15)*** $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$;

16) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$; ***17)*** $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\, dx$;

18) $\int e^x \left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$; ***19)*** $\int 4^x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$;

20) $\int \left(2^{x+1} - 5^{x-1}\right) dx$; ***21)*** $\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx$; ***22)*** $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\, dx$;

23) $\int \frac{dx}{4+x^2}$; **24)** $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; **25)** $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 4}{\sin^2 x}\,dx$;

26) $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$; **27)** $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$; **28)** $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}\,dx$;

29) $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}\,dx$; **30)** $\int \frac{dx}{16-x^2}$; **31)** $\int \left(\frac{2-x}{x}\right)^3 dx$.

Решение п. 1. Воспользуемся формулой возведения в квадрат, свойством линейности неопределенного интеграла и таблицей интегралов:

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2+4x+1)dx = \int 4x^2 dx + \int 4x dx + \int dx =$$
$$= 4\int x^2 dx + 4\int x dx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

385. Найти интегралы, применив подходящие подстановки:

1) $\int \cos 3x\,dx$; **2)** $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx$; **3)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; **5)** $\int e^{5-2x^2} x\,dx$; **6)** $\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx$;

7) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$; **8)** $\int (2+5x)^9\,dx$; **9)** $\int \frac{dx}{3x-1}$; **10)** $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

11) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; **12)** $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; **13)** $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

14) $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; **15)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; **16)** $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

17) $\int 4^{\cos 5x}\sin 5x\,dx$; **18)** $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; **19)** $\int \sqrt[3]{3+5\cos x}\,\sin x\,dx$;

20) $\int \frac{x^3\,dx}{(8x^4+125)^{\frac{3}{4}}}\,dx$; **21)** $\int \frac{x\,dx}{9+x^4}\,dx$; **22)** $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^{12}+3}}\,dx$;

23) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; **24)** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; **25)** $\int \cos\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2}$;

26) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; ***27)*** $\displaystyle\int \frac{2x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; ***28)*** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x - 1}$;

29) $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\,dx$; ***30)*** $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; ***31)*** $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1}$;

32) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$; ***33)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; ***34)*** $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x\,dx$;

35) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; ***36)*** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx$; ***37)*** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Р е ш е н и е п. 1. Выполнив замену $3x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \cos 3x\,dx = \left|\begin{array}{l} 3x = t, \\ 3\,dx = dt, \\ dx = \dfrac{1}{3}\,dt \end{array}\right| = \int \cos t\,\frac{1}{3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Р е ш е н и е п. 2. Выполнив замену $\sin 5x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \sin 5x = t, \\ 5\cos 5x\,dx = dt, \\ \cos 5x\,dx = \dfrac{1}{5}\,dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{\sin 5x}} + C.$$

Р е ш е н и е п. 3. Выполнив замену $\operatorname{ctg} 4x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx = \left|\begin{array}{l} \operatorname{ctg} 4x = t, \\ -\dfrac{4}{\sin^2 4x}\,dx = dt, \\ \dfrac{dx}{\sin^2 4x} = -\dfrac{1}{4}\,dt \end{array}\right| = \int \sqrt{t}\left(-\frac{1}{4}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{4}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{t^3} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x} + C.$$

Р е ш е н и е п. 4. Выполнив замену

$$\operatorname{arctg} x = t,$$

сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\operatorname{arctg} x + C.$$

Р е ш е н и е п. 5. Выполнив замену

$$5 - 2x^2 = t,$$

сведем интеграл к табличному:

$$\int e^{5-2x^2} x\, dx = \left| \begin{array}{l} 5 - 2x^2 = t, \\ -4x\, dx = dt, \\ x\, dx = -\dfrac{1}{4}\, dt \end{array} \right| = \int e^t \left(-\frac{1}{4}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} e^t + C = -\frac{1}{4} e^{5-2x^2} + C.$$

Р е ш е н и е п. 6. Разобьем интеграл на два:

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\, dx = \int \frac{2x}{x^2+16}\, dx - \int \frac{4}{x^2+16}\, dx.$$

Второй интеграл в правой части является табличным:

$$\int \frac{4}{x^2+16}\, dx = 4 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$

В первом интеграле выполним замену $x^2 + 16 = t$:

$$\int \frac{2x}{x^2+16}\, dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 16 = t, \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln(x^2+16) + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\, dx = \ln(x^2+16) - \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$

386. Найти интегралы, применив метод интегрирования по частям:

1) $\int \ln(x+8)\,dx$; ***2)*** $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$; ***3)*** $\int (3x-2)\ln^2 x\,dx$;

4) $\int \frac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; ***5)*** $\int (x+8)\sin 3x\,dx$; ***6)*** $\int (x^2-3)\cos x\,dx$;

7) $\int x\cos(x-4)\,dx$; ***8)*** $\int \arcsin x\,dx$; ***9)*** $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$;

10) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$; ***11)*** $\int (5x-1)e^{2x}\,dx$; ***12)*** $\int x^2\sin 3x\,dx$;

13) $\int (2x+3)\cos 5x\,dx$; ***14)*** $\int e^x\sin 2x\,dx$; ***15)*** $\int e^{2x}\cos x\,dx$;

16) $\int \cos(\ln x)\,dx$; ***17)*** $\int \sin(\ln x)\,dx$; ***18)*** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;

19) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$; ***20)*** $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$; ***21)*** $\int \sqrt{x^2+7}\,dx$;

22) $\int \ln^2 x\,dx$; ***23)*** $\int \ln(x^2+4)\,dx$; ***24)*** $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$;

25) $\int \arcsin^2 x\,dx$; ***26)*** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; ***27)*** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

28) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; ***29)*** $\int (e^x+2x)^2\,dx$; ***30)*** $\int (e^x-\sin x)^2\,dx$;

31) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; ***32)*** $\int \sqrt[3]{x}\ln^2 x\,dx$; ***33)*** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

34) $\int x\cos^2 x\,dx$; ***35)*** $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$; ***36)*** $\int x^2e^{3x}\,dx$;

37) $\int xe^{-2x}\,dx$; ***38)*** $\int (x^2+1)\sin 2x\,dx$.

Р е ш е н и е п. 1. Воспользовавшись формулой интегрирования по частям $(5.4)^{\text{т}}$

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

получим:

$$\int \ln(x+8)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+8), \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{1}{x+8}\,dx, \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x}{x+8}\,dx = x\ln(x+8) - \int \frac{x+8-8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x+8}{x+8}\,dx + \int \frac{8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - x + 8\ln|x+8| + C = (x+8)\ln(x+8) - x + C.$$

Р е ш е н и е п. 2. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (x^2-x+1)\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = (x^2-x+1)\,dx, \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ v = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C.$$

Р е ш е н и е п. 3. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (3x-2)\ln^2 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \\ dv = (3x-2)\,dx, \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}\,dx, \\ v = \dfrac{3x^2}{2} - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \ln^2 x\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\frac{2\ln x}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - 2\int\left(\frac{3x}{2} - 2\right)\ln x\,dx.$$

Последний интеграл также возьмем по частям:

$$\int\left(\frac{3x}{2} - 2\right)\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = \left(\dfrac{3x}{2} - 2\right)dx, \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ v = \dfrac{3x^2}{4} - 2x \end{array}\right| =$$

$$= \ln x\left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) - \int\left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\ln x - \int\left(\frac{3x}{4} - 2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\ln x - \frac{3x^2}{8} + 2x + C.$$

Окончательно получим:

$$\int(3x-2)\ln^2 x\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\ln x + \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

Р е ш е н и е п. 4. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u = \arcsin 2x, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$$

Тогда будем иметь:

$$du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx,$$

$$v = \int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} 1 - 4x^2 = t, \\ -8x\,dx = dt, \\ x\,dx = -\dfrac{1}{8}\,dt, \end{array}\right| = -\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{t} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Поэтому

$$\int\frac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \arcsin 2x \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

Р е ш е н и е п. 5. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (x+8)\sin 3x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x+8, \\ dv = \sin 3x\, dx, \\ du = dx, \\ v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$
$$= -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\, dx = -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Р е ш е н и е п. 6. Воспользуемся формулой интегрирования по частям дважды:

$$\int (x^2-3)\cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2-3, \\ dv = \cos x\, dx, \\ du = 2x\, dx, \\ v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= (x^2-3)\sin x - 2\int x\sin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x\, dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= (x^2-3)\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\, dx\right) =$$
$$= (x^2-3)\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C =$$
$$= (x^2-5)\sin x + 2x\cos x + C.$$

Р е ш е н и е п. 7. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int x\cos(x-4)\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \cos(x-4)\, dx, \\ du = dx, \\ v = \sin(x-4) \end{array} \right| =$$
$$= x\sin(x-4) - \int \sin(x-4)\, dx = x\sin(x-4) + \cos(x-4) + C.$$

5.2. Интегрирование некоторых классов функций

5.2.1. Общие задачи

387. Найти интегралы от рациональных функций:

1) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+2x+2}\,dx$; ***2)*** $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx$; ***3)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

4) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$; ***5)*** $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+4x+5}$; ***6)*** $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x}$; ***8)*** $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$; ***9)*** $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx$;

10) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{(x+4)^2}\,dx$; ***11)*** $\displaystyle\int \frac{x^2-14x+52}{(x-4)(x+2)(x-5)}\,dx$;

12) $\displaystyle\int \frac{5x^2-14x+3}{(2x+1)(x-1)(x-2)}\,dx$; ***13)*** $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2(x+2)}\,dx$;

14) $\displaystyle\int \frac{3x^2-10x+19}{(x-1)^2(x+5)}\,dx$; ***15)*** $\displaystyle\int \frac{x^2-7x-17}{(x^2+4x+8)(x-3)}\,dx$;

16) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-5x^2-11x-10}{(x^2+2x+2)(x-3)}\,dx$; ***17)*** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}\,dx$;

18) $\displaystyle\int \frac{2x^3+25x^2+61x-82}{(x^2+6x-7)(x+5)}\,dx$; ***19)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$; ***20)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$;

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$; ***22)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2-3}$; ***23)*** $\displaystyle\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx$;

24) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x-2}\,dx$; ***25)*** $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+7}\,dx$; ***26)*** $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$;

27) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$; ***28)*** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$; ***29)*** $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\,dx$;

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-9)(x^2+2)}$; ***31)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; ***32)*** $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$.

Решение п. 1. Выпишем знаменатель и выделим в нем полный квадрат:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Подставим полученное выражение в исходный интеграл и сделаем замену:

$$\int \frac{2x-3}{(x+1)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t, \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t-1)-3}{t^2+1}dt = \int \frac{2t-5}{t^2+1}\,dt.$$

Далее разобьем подынтегральную дробь на две и воспользуемся известными методами:

$$\int \frac{2t-5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \ln(t^2+1) - 5\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$
$$= \ln(x^2+2x+2) - 5\,\mathrm{arctg}(x+1) + C.$$

Решение п. 2. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Поэтому, разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3} = 1 + \frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}.$$

Значит,

$$\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx = x + \int \frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}\,dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части сначала разложим на множители знаменатель:

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x^2+3)(x-1).$$

Теперь разобьем подынтегральную дробь на простейшие дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов. Имеем:

$$\frac{3x^2-x+6}{(x^2+3)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+3C}{(x^2+3)(x-1)}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в конечном и начальном числителе, получим систему

$$\begin{cases} A + C = 3, \\ -A + B = -1, \\ -B + 3C = 6, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$.

Возвращаясь к вычислению интеграла, будем иметь:

$$\int \frac{3x^2 - x + 6}{(x^2+3)(x-1)}\,dx = \int \frac{x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C.$$

388. Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$; ***2)*** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx$; ***3)*** $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$;

4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; ***5)*** $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; ***6)*** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$; ***8)*** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$; ***9)*** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

10) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; ***11)*** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; ***12)*** $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$;

13) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; ***14)*** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;

15) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$; ***16)*** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$; ***17)*** $\int \frac{1-\sqrt[3]{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}\,dx$;

18) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}\,dx$; ***19)*** $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$; ***20)*** $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx$;

21) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}\,dx$; ***22)*** $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\,dx$;

23) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; ***24)*** $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,dx$; ***25)*** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$;

26) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; ***27)*** $\int \frac{5x+6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$; ***28)*** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

29) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; **30)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

31) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; **32)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

Решение п. 1. Сделаем замену:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{2x-1}=t, \\ 2x-1=t^4, \\ x=\frac{1}{2}(t^4-1), \\ dx=2t^3\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^3\,dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1}.$$

Мы получили интеграл от рациональной функции. Для вычисления отнимем и добавим в числителе единицу, разобьем интеграл на сумму интегралов и воспользуемся таблицей интегралов:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1} &= 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = \\ &= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C. \end{aligned}$$

Решение п. 2. Сделаем замену:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}+2=t, \\ x=(t-2)^2, \\ dx=2(t-2)dt \end{array} \right| = \int \frac{(t-2)^2-1}{t}\cdot 2(t-2)\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt.$$

Полученный интеграл представим в виде суммы:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt &= 2\int \left(\frac{t^3}{t}-6\frac{t^2}{t}+11\frac{t}{t}-6\frac{1}{t}\right)dt = \\ &= 2\int t^2\,dt-12\int t\,dt+22\int dt-12\int \frac{1}{t}\,dt = \\ &= \frac{2}{3}t^3-6t^2+22t-12\ln|t|+C = \\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{x}+2)^3-6(\sqrt{x}+2)^2+22(\sqrt{x}+2)-12\ln(\sqrt{x}+2)+C = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2x+6\sqrt{x}-12\ln(\sqrt{x}+2)+C. \end{aligned}$$

389. Найти интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$; ***2)*** $\int \sin^2 x \cos x\,dx$; ***3)*** $\int \sin 5x \sin 2x\,dx$;

4) $\int \cos 3x \cos 4x\,dx$; ***5)*** $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx$;

6) $\int \sin x \cos^3 x\,dx$; ***7)*** $\int \sin^2 x\,dx$; ***8)*** $\int \cos^2 x\,dx$;

9) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$; ***10)*** $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$; ***11)*** $\int \frac{dx}{\sin x}$;

12) $\int \frac{dx}{\cos x}$; ***13)*** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$; ***14)*** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$; ***15)*** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$;

16) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$; ***17)*** $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$; ***18)*** $\int \cos^6 3x\,dx$;

19) $\int \sin^4 2x\,dx$; ***20)*** $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; ***21)*** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$;

22) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; ***23)*** $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; ***24)*** $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; ***25)*** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

26) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$; ***27)*** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; ***28)*** $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

29) $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$; ***30)*** $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$;

31) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$; ***32)*** $\int \frac{7+6\sin x - 5\cos x}{1+\cos x}\,dx$;

33) $\int \frac{2-\sin x + 3\cos x}{1+\cos x}\,dx$; ***34)*** $\int \frac{dx}{5-4\sin x + 2\cos x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Для вычисления интеграла применим формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Тогда

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Р е ш е н и е п. 2. Произведем замену:

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Р е ш е н и е п. 24. С помощью универсальной тригонометрической подстановки сведем данную задачу к интегрированию рациональной функции. Будем иметь:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}.$$

Вычислив последний интеграл с помощью таблицы интегралов:

$$\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

и произведя обратную замену, окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

5.2.2. Экономический профиль

390. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 60 - 0{,}04q + 0{,}003q^2,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если издержки производства 100 ед. продукции составляют 7 000 ден. ед. в месяц; б) фиксированные издержки; в) издержки производства 250 ед. продукции; г) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 65,5 ден. ед.

391. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 50 + 0{,}02q,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 25 000 ден. ед. в месяц; б) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 75 ден. ед.

392. Функция предельной прибыли имеет вид

$$M\pi(q) = 25 - 0{,}004q,$$

где q — количество единиц продукции. Прибыль предприятия составляет 35,8 тыс. ден. ед., если продано 1 200 изделий. Найти функцию прибыли. Определить, при каком значении q прибыль будет максимальной.

393. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 30q\, e^{0{,}001q^2},$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 20 000 ден. ед. в месяц; б) функцию средних издержек.

5.3. Определенный интеграл

394. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^2 (6x^2 - 5)\,dx$; ***2)*** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$; ***3)*** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$; ***5)*** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/3} \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$; ***6)*** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_1^2 \left(5x^2 - \frac{3}{x^2}\right) dx$; ***8)*** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin 3x \cos 2x\,dx$; ***9)*** $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{0} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Р е ш е н и е п. 1. Воспользуемся свойством линейности определенного интеграла и применим формулу Ньютона — Лейбница (5.29)[т]:

$$\int\limits_0^2 (6x^2 - 5)\,dx = 6\int\limits_0^2 x^2\,dx - 5\int\limits_0^2 dx = 6\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 - 5x\bigg|_0^2 =$$

$$= 6\left(\frac{8}{3} - 0\right) - 5(2 - 0) = 16 - 10 = 6.$$

395. Воспользовавшись подходящим методом, найти интегралы:

1) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx$; ***2)*** $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$; ***3)*** $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos y\,dy}{4+\sqrt{\sin y}}$; ***5)*** $\int\limits_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$; ***6)*** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1}$;

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$; ***8)*** $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$; ***9)*** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; ***10)*** $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$;

11) $\int\limits_{-3}^{0} (x-2)e^{-x/3}\,dx$; ***12)*** $\int\limits_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}$;

13) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; ***14)*** $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx$; ***15)*** $\int\limits_0^2 \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$;

16) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; ***17)*** $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; ***18)*** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$;

19) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; ***20)*** $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x+x^2}$; ***21)*** $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$;

22) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; ***23)*** $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; ***24)*** $\int\limits_0^2 \sqrt{x}\ln x\,dx$;

25) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\cos^2 x\,dx$; ***26)*** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; ***27)*** $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$;

28) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$; ***29)*** $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$; ***30)*** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;

31) $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$; **32)** $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; **33)** $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

34) $\displaystyle\int\limits_1^3 \ln x\,dx$; **35)** $\displaystyle\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; **36)** $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$; **37)** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$;

38) $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}}$; **39)** $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$; **40)** $\displaystyle\int\limits_{e^3}^{e^8} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

41) $\displaystyle\int\limits_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$; **42)** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$; **43)** $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$.

Решение п. 1. Вычислим интеграл с помощью замены переменной. При этом дополнительно следует проконтролировать, как изменятся границы интегрирования. Именно:

$$\int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2=t, \\ 2xdx=dt, \\ xdx=\frac{1}{2}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_0^1 e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

Решение п. 2. Выполнив замену $\ln x = t$, получим:

$$\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l} \ln x=t, \\ \frac{1}{x}\,dx=dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline e & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_0^1 \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^1 =$$

$$= -\cos 1+\cos 0 = 1-\cos 1.$$

Решение п. 3. Воспользуемся свойством четности подынтегральной функции. Тогда

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь выполним замену $x = \sin t$. Получим:

$$2\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t\, dt, \\ \begin{array}{r|c} x & t \\ \hline 1/2 & \pi/6 \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| = 2\int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\operatorname{tg} t\Big|_0^{\pi/6} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Р е ш е н и е п. 4. Выполним замену $4 + \sqrt{\sin y} = t$. Получим:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos y\, dy}{4 + \sqrt{\sin y}} = \left| \begin{array}{l} 4 + \sqrt{\sin y} = t, \\ \sin y = (t-4)^2, \\ \cos y\, dy = 2(t-4)\, dt, \\ \begin{array}{r|l} y & t \\ \hline \pi/2 & 5 \\ 0 & 4 \end{array} \end{array} \right| = \int_4^5 \frac{2(t-4)\, dt}{t} =$$

$$= 2\left(\int_4^5 dt - 4\int_4^5 \frac{dt}{t}\right) = 2\left(t\Big|_4^5 - 4\ln|t|\Big|_4^5\right) = 2 - 8\ln\frac{5}{4}.$$

Р е ш е н и е п. 5. Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\, dx = \int_{-3/2}^{2} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4}\, dx =$$

$$= \int_{-3/2}^{2} \frac{(x^2+3x+4)-(5x+3)}{x^2+3x+4}\, dx = \int_{-3/2}^{2} dx - \int_{-3/2}^{2} \frac{5x+3}{x^2+3x+4}\, dx.$$

Первый из полученных интегралов вычисляется элементарно:

$$\int_{-3/2}^{2} dx = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

В знаменателе подынтегральной функции второго интеграла выделим полный квадрат:

$$x^2+3x+4=x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-3/2}^{2}\frac{5x+3}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx=\left|\begin{array}{l} x+\frac{3}{2}=t,\\ dx=dt,\\ \begin{array}{r|c} x & t\\ \hline 2 & 7/2\\ -3/2 & 0\end{array}\end{array}\right|=\int\limits_{0}^{7/2}\frac{5\left(t-\frac{3}{2}\right)+3}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{7/2}\frac{5t-\frac{9}{2}}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt=5\int\limits_{0}^{7/2}\frac{t\,dt}{t^2+\frac{7}{4}}-\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{7/2}\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{7/2}\frac{d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{t^2+\frac{7}{4}}-\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\bigg|_0^{7/2}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\bigg|_0^{7/2}-\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\bigg|_0^{7/2}=$$

$$=\frac{5}{2}\left(\ln 14-\ln\frac{7}{4}\right)-\frac{9}{\sqrt{7}}(\operatorname{arctg}\sqrt{7}-\operatorname{arctg}0)=\frac{5}{2}\ln 8-\frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

Окончательно получим:

$$\int\limits_{-3/2}^{2}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx=\frac{7}{2}-\frac{15}{2}\ln 2+\frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

Р е ш е н и е п. 6. Воспользуемся методом интегрирования рациональных функций. Для этого разложим знаменатель на множители. Получим:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Разобьем подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты в числителях последней и первой дроби, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A, \\ C=A, \\ A+A+A=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/3, \\ B=-1/3, \\ C=1/3. \end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части последнего равенства. Будем иметь:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_{-1}^{0} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2,$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t, \\ dx=dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1/2 \\ -1 & -1/2 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= 0 - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{1/2} =$$

$$= -2\sqrt{3}\operatorname{arctg} 1\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим, что при вычислении использовалось свойство четности подынтегральной функции. Окончательно

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(-\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2.$$

Решение п. 7. Воспользуемся формулой понижения степени для тригонометрических функций. Будем иметь:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^{\pi/2} dx - 3\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx + 3\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,dx - \int_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx\right).$$

Вычислим каждый из полученных интегралов:

$$\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x \cdot \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 2x)\,d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Окончательно получим:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 3\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{5\pi}{32}.$$

Решение п. 10. Воспользуемся формулой интегрирования по частям для определенного интеграла $(5.34)^{\text{т}}$. Получим:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\,dx =$$

$$= -(\pi(-1) - 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

Р е ш е н и е п. 11. Воспользуемся методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int\limits_{-3}^{0}(x-2)e^{-x/3}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x-2,\\ dv=e^{-x/3}\,dx,\\ du=dx,\\ v=-3e^{-x/3}\end{array}\right|=-3(x-2)e^{-x/3}\Big|_{-3}^{0}+3\int\limits_{-3}^{0}e^{-x/3}\,dx=$$

$$=6-15e-9e^{-x/3}\Big|_{0}^{\pi}=6-15e-9+9e=-6e-3.$$

Р е ш е н и е п. 12. Разделив числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\sqrt{3x+2}$, получим:

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}=\int\limits_{0}^{2}\frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}}\frac{dx}{(3x+2)^2}.$$

Выполним замену:

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}}\frac{dx}{(3x+2)^2}=\left|\begin{array}{c} \sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}=t,\quad 2-x=3xt^2+2t^2,\\ x=\dfrac{2-2t^2}{3t^2+1},\quad dx=\dfrac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt,\\ 3x+2=\dfrac{8}{3t^2+1},\\ \begin{array}{c|c} x & t\\ \hline 2 & 0\\ 0 & 1\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{1}^{0}\frac{4t-1}{1+4t}\,\frac{(3t^2+1)^2}{64}\,\frac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt.$$

Разделив числитель на знаменатель, будем иметь:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\left(t-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{4t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\ln|4t+1|\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln 5\right)=\frac{\ln 5}{32}.$$

5.4. Приложения определенного интеграла

5.4.1. Общие задачи

396. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

1) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; ***2)*** $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

3) $y = x^2 + 4$, $y = 5$; ***4)*** $y = 5 - x^2$, $y = 4$;

5) $y = (x + 4)(-x - 3)$ и осью абсцисс; ***6)*** $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

7) $y = 2x - x^2$, $y = x$; ***8)*** $y = x^2$, $y = 2x + 3$;

9) $y = x^2 - 3$, $y = 6 - 2x^2$; ***10)*** $y = 9^x$, $y = 9$, $x = 0$;

11) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$; ***12)*** $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$; ***13)*** $y = x^2 - 2$, $y = -x$;

14) $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, $y = \cos x$, $x = 0$; ***15)*** $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$;

16) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$; ***17)*** $y = (1 - x)(x - 5)$, $y = 4$, $x = 5$;

18) $y = x^2 - 3x$, $y = -2$, $y = 0$; ***19)*** $y^2 + x = 4$, $y^2 - 3x = 12$;

20) $y = x^2$, $y = 2 - |x|$; ***21)*** $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$;

22) $y = |x^2 - 1| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$; ***23)*** $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$;

24) $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$ $(a > 1)$;

25) $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$, $x = 3$, $x = 5$;

26) $y = x^3$, $y = (x - 2)^2$ и осью абсцисс;

27) $y = x^3$, $y = x^2 - x + 1$ и осью ординат; ***28)*** $x^2 + y^2 = 8$, $y = \dfrac{x^2}{2}$;

29) $x^2 + y^2 = 9$, $y = 3 - x$, расположенной в первой четверти;

30) $x^2 + y^2 = 16$, $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; ***31)*** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Р е ш е н и е п. 1. Сделаем чертеж (рис. 5.1).

Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции:

$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$$

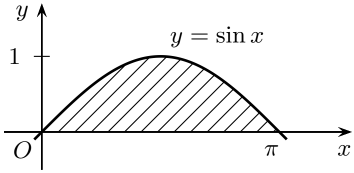

Рис. 5.1

397. Определить длину дуги кривой:

1) $y = \sqrt{x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; ***2)*** $y = \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; ***3)*** $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, $y \geqslant 0$;

4) $y = \dfrac{4}{5}\sqrt[5]{x^4}$, $0 \leqslant x \leqslant 9$; ***5)*** $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{6}$;

6) $y = \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; ***7)*** $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant \ln 7$;

8) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$; ***9)*** $y = 1 - x^2$, отсеченной осью Ox;

10) $y = 2\ln\dfrac{4}{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; ***11)*** $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$;

12) $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; ***13)*** $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

14) $y = \arcsin e^x$, $-\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2$;

15) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{16}$;

16) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $\dfrac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$.

Р е ш е н и е п. 1. Сделаем чертеж (рис. 5.2).

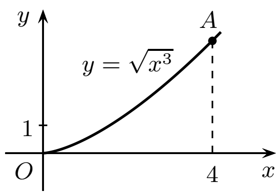

Рис. 5.2

Для нахождения длины дуги кривой OA воспользуемся формулой (5.37)$^{\text{т}}$. При этом

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Тогда

$$L = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1+\frac{9}{4}x = t,\ \frac{9}{4}\,dx = dt,\ dx = \frac{4}{9}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{10} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}\,dt = \frac{4}{9}\int\limits_1^{10} t^{1/2}\,dt = \frac{4}{9}\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

398. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми:

1) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ вокруг оси Ox;

2) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$ вокруг оси Ox;

3) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 3$ вокруг оси Ox;

4) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси Ox; ***5)*** $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox;

6) $y = 3\sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x^2$ вокруг оси Ox;

7) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ вокруг оси Ox;

8) $y = \sqrt{x+1}$, $x + y = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

9) $y = \cos x$, $y = 1 - x$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

10) $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

11) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг оси Oy;

12) $y = x^2$, $8x = y^2$ вокруг оси Oy;

13) $y = \arcsin x$ вокруг оси Oy; ***14)*** $y^2 = 4x$, $y = x$ вокруг оси Oy;

15) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Oy;

16) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ вокруг оси Oy;

17) $y = \arccos\dfrac{x}{5}$, $y = \arccos\dfrac{x}{3}$, $y = 0$ вокруг оси Oy;

18) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 0$ вокруг оси Oy;

19) $y = \dfrac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$ вокруг оси Oy;

20) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.

Р е ш е н и е п. 1. Сделаем чертеж (рис. 5.3).

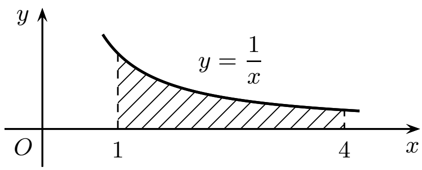

Рис. 5.3

Для вычисления объема тела, полученного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox, применим формулу (5.38)$^{\text{т}}$:

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \left.\frac{1}{x}\right|_1^4 = -\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

5.4.2. Экономический профиль

399. Найти среднее значение издержек $K = K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от x_1 до x_2 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение:

1) $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;

2) $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$;

3) $K(x) = \log_2(x+1)$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

4) $K(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$.

Р е ш е н и е п. 1. Среднее значение издержек можно вычислить по формуле

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} K(x)\,dx.$$

Подставив исходные значения в указанную формулу, получим:

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{3-0} \int\limits_0^3 (3x^2 + 4x + 2)\,dx = (x^3 + 2x^2 + 2x)\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(27 + 12 + 6 - 0) = 15.$$

Для того чтобы найти объем продукции, при котором издержки принимают значение, равное 15, следует решить уравнение

$$K(x) = 15 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4x + 2 = 15.$$

Корнями этого уравнения являются числа $x_1 = 5/3$ и $x_2 = -3$. По смыслу задачи искомый объем равен $5/3$.

400. Определить объем продукции, произведенной рабочим за k-й час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $z = z(t)$:

1) $z(t) = \dfrac{2}{3t+4} + 3$, $k = 2$; ***2)*** $z(t) = \dfrac{3}{3t+2} + 5$, $k = 5$;

3) $z(t) = xe^{-x}$, $k = 3$; ***4)*** $z(t) = \cos \dfrac{x}{4} + 1$, $k = 1$.

Р е ш е н и е п. 1. Объем V продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, выражается формулой

$$V = \int\limits_{t_1}^{t_2} z(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right) dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+3| + 3t\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3.$$

401. Определить дисконтированный доход K за T лет при процентной ставке $p\%$, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили m млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на n млн руб.:

1) $T = 3$, $p = 8$, $m = 10$, $n = 1$; ***2)*** $T = 5$, $p = 10$, $m = 5$, $n = 2$;

3) $T = 10$, $p = 5$, $m = 20$, $n = 1$; ***4)*** $T = 4$, $p = 10$, $m = 7$, $n = 3$.

Р е ш е н и е п. 1. Несложно вычислить, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = m + nt = 10 + t$. В силу того что дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-\frac{p}{100}t}\,dt,$$

в данном случае получим:

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = 10 + t, \\ dv = e^{-0{,}08t}\,dt, \\ du = dt, \\ v = -12{,}5e^{-0{,}08t} \end{array} \right| =$$

$$= -12{,}5(10+t)e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 + 12{,}5\int_0^3 e^{-0{,}08t}\,dt =$$

$$= -162{,}5e^{-0{,}24} + 125 - 156{,}25e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 =$$

$$= -162{,}5e^{-0{,}24} + 125 - 156{,}25e^{-0{,}24} + 156{,}25 \approx 30{,}5.$$

402. Определить запас товаров на складе, образуемый за k дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t)$:

1) $f(t) = 3t^2 + 3t + 4$, $k = 2$; ***2)*** $f(t) = 5t - t^2 + 6$, $k = 4$;

3) $f(t) = te^{-t^2}$, $k = 1$; ***4)*** $f(t) = te^{-t}$, $k = 3$.

Р е ш е н и е п. 1. Запас товаров на складе, образуемый за k дней, можно вычислить по формуле

$$V = \int_0^k f(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int_0^2 (3t^2 + 3t + 4)\, dt = \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 4t \right)\Bigg|_0^2 = 22.$$

5.5. Несобственные интегралы

403. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$; ***2)*** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$; ***3)*** $\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\, dx$; ***4)*** $\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi\, dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; ***6)*** $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$; ***7)*** $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1} dx$; ***8)*** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2} dx$;

9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$; ***10)*** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; ***11)*** $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Р е ш е н и е п. 1. По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} x^{-3}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{-2A^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е п. 3. По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \cos 3x\, dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\sin 3x \Bigg|_1^A \right) = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} (\sin 3A - \sin 3).$$

Так как

$$\lim_{A\to+\infty} \sin 3A$$

не существует, то данный несобственный интеграл расходится.

Р е ш е н и е п. 4. По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{1/3}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}.$$

Выполним замену $\operatorname{arctg} 3x = t$. Тогда

$$\int\limits_{1/3}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} 3x = t, \\ \dfrac{3\,dx}{1+9x^2} = dt, \\ \begin{array}{r|r} x & t \\ \hline A & \operatorname{arctg} 3A \\ 1/3 & \pi/4 \end{array} \end{array} \right| = \frac{\pi}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3A} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\frac{1}{t}\Bigg|_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3A} = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Значит, исходный интеграл

$$\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = -\frac{\pi}{3} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi}\right) = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{2}{3}.$$

404. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; ***2)*** $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; ***3)*** $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; ***4)*** $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$; ***6)*** $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; ***7)*** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$; ***8)*** $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

9) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}dx$; ***10)*** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$; ***11)*** $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\ln x dx$;

12) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; ***13)*** $\displaystyle\int\limits_0^e \sin(\ln x)\,dx$.

Р е ш е н и е п. 1. Подынтегральная функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

является неограниченной в любой окрестности точки $x=0$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2.$$

Р е ш е н и е п. 2. Найдем область определения подынтегральной функции. Для этого приравняем знаменатель нулю:

$$9x^2-9x+2,\quad D=81-72-9,\quad x_1=\frac{9-3}{18}=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{9+3}{18}=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, заключаем, что подынтегральная функция является неограниченной в любой окрестности точки $x=1/3$. Тогда по определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int_0^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}=\frac{1}{9}\lim_{\varepsilon\to1/3^-}\int_0^\varepsilon\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}=\frac{A}{x-\frac{1}{3}}+\frac{B}{x-\frac{2}{3}}=\frac{Ax-\frac{2}{3}A+Bx-\frac{1}{3}B}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}.$$

Сравнив коэффициенты в числителях последней и исходной дроби, составим и решим систему:

$$\begin{cases}A+B=0,\\-\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}B=1,\end{cases}\quad\begin{cases}B=-A,\\-\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}A=1,\end{cases}\quad\begin{cases}A=-3,\\B=3.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^\varepsilon\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}=3\left(-\int_0^\varepsilon\frac{dx}{x-\frac{1}{3}}+\int_0^\varepsilon\frac{dx}{x-\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=3\left(-\ln\left|x-\frac{1}{3}\right|\Big|_0^\varepsilon+\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|\Big|_0^\varepsilon\right)=$$

$$=3\left(-\ln\left|\varepsilon-\frac{1}{3}\right|+\ln\frac{1}{3}+\ln\left|\varepsilon-\frac{2}{3}\right|-\ln\frac{2}{3}\right).$$

Окончательно для исходного интеграла будем иметь:

$$\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2} = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 1/3^-}\left(-\ln\left|\varepsilon-\frac{1}{3}\right| + \ln\frac{1}{3} + \ln\left|\varepsilon-\frac{2}{3}\right| - \ln\frac{2}{3}\right) = \infty,$$

т.е. исходный интеграл расходится.

Р е ш е н и е п. 5. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

является неограниченной в любой окрестности точки $x = 3$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\varepsilon\to 3-0}\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 3-0}\left(-\frac{1}{x-3}\Bigg|_0^{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 3-0}\left(-\frac{1}{\varepsilon-3} - \frac{1}{3}\right) = \infty.$$

Значит, данный интеграл расходится.

Глава 6

Дифференцирование функций двух переменных

6.1. Функция двух переменных. Дифференциал

6.1.1. Общие задачи

405. Вычислить частные значения функций:

1) $z = x^2 \cos y$ в точке $M(2, \pi/3)$;

2) $z = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ при $x = 3$ и $y = 1$, а также при $x = 1$ и $y = 3$;

3) $z = \sqrt{xy^2 + x + 1}$ в точках $M(1/2, 1)$ и $P(2, -1)$.

Р е ш е н и е п. 1. Подставляем в функцию z абсциссу точки M вместо x и ординату вместо y:

$$z\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 2^2 \cos\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

406. Найти области определения следующих функций:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; ***2)*** $z = \arcsin(x + y)$; ***3)*** $z = \dfrac{1}{y - 3x}$;

4) $z = \ln(x + y)$; ***5)*** $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$; ***6)*** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$;

7) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y}$; ***8)*** $z = \sqrt{xy}$; ***9)*** $z = \arccos(2 - x^2 - y^2)$;

10) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$; ***11)*** $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$; ***12)*** $z = y + \sqrt{x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Область определения функции z состоит из всех точек плоскости, для которых

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

и потому представляет собой круг с центром в начале координат и единичным радиусом, включающий свою границу — окружность.

Р е ш е н и е п. 2. Координаты точек области определения удовлетворяют условию

$$-1 \leqslant x + y \leqslant 1, \quad \begin{cases} x + y \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта область представляет собой полосу, ограниченную параллельными прямыми $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.

407. Найти множества точек разрыва данных функций:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3x - y^2 + 2}{x^2 + y^2}$; ***2)*** $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$;

3) $f(x,y) = e^{\frac{2}{x^2+y^2}}$; ***4)*** $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{(x-y)^4}$;

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$; ***6)*** $f(x,y) = \dfrac{8}{4 - x^2 - y^2}$;

7) $f(x,y) = \dfrac{x + 3y}{2y - x}$; ***8)*** $f(x,y) = \dfrac{1}{y - x^2}$.

Р е ш е н и е п. 1. Являясь элементарной, данная функция непрерывна на всей своей области определения. Единственная точка разрыва — это нуль знаменателя, расположенный в начале координат $O(0,0)$.

408. Найти частные производные функции:

1) $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$; ***2)*** $z = 2x^3 - 6x^2 y + y^3$;

3) $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$; ***4)*** $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$;

5) $z = \dfrac{y - 2x}{x + 2y}$; ***6)*** $z = y^x$; ***7)*** $z = \dfrac{x}{y}$; ***8)*** $z = x^2 \cos(x + 3y)$;

9) $z = \ln(3x^2 - y^4)$; ***10)*** $z = \sin\sqrt{x - y^3}$; ***11)*** $z = \arcsin 2x^3 y$;

12) $z = e^{2x^2 - y^5}$; ***13)*** $z = \operatorname{tg}\dfrac{3x - y^2}{x}$; ***14)*** $r = \rho^2 \sin^4\theta$;

15) $u = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$; ***16)*** $z = e^{xy(x^2 + y^2)}$; ***17)*** $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$;

18) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$; ***19)*** $u = z^{xy^2}$; ***20)*** $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$;

21) $u = (x - y)(x - z)(y - z)$.

Решение п. 1. Дифференцируем функцию ρ по каждой из ее переменных, считая другую переменную постоянной:

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = 4u^3\cos^2\varphi, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = u^4 \cdot 2\cos\varphi(-\sin\varphi) = -u^4\sin 2\varphi.$$

Решение п. 2. Дифференцируем функцию z по переменной x, считая y постоянной, а затем по переменной y, считая x постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 12xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2 + 3y^2.$$

Решение п. 19. При нахождении частных производных по каждой из трех переменных считаем остальные две переменные постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^{xy^2}\ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2}\ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2 - 1}.$$

409. Для функции

$$f(x, y) = x^2\sin^2 y$$

вычислить частные производные f'_x и f'_y в точке $(-1, \pi/4)$.

410. Для функции

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{x - y}$$

вычислить значения $f'_x(3, -4)$ и $f'_y(-12, 5)$.

411. Для функции $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ вычислить частные производные f'_x и f'_y в точке $(3,2)$.

412. Проверить выполнение теоремы Шварца на примере смешанных частных производных второго порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{y^2}$; ***2)*** $z = \ln(x - 2y)$; ***3)*** $z = \dfrac{x^2}{1-y}$; ***4)*** $z = x^2 \sin\sqrt{y}$;

5) $z = y^{x^2}$; ***6)*** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

413. Найти частные производные второго порядка функции z:

1) $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$; ***2)*** $z = x^4 - 5x^2y - 2y^3$; ***3)*** $z = \dfrac{x-y}{x+y}$;

4) $z = \sin(x^2 + y^3)$; ***5)*** $z = \sin y \ln x + e^x \ln y$; ***6)*** $z = \sqrt{2xy + y^2}$;

7) $z = xy + \dfrac{y}{x}$; ***8)*** $z = \operatorname{tg} xy^2$; ***9)*** $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$; ***10)*** $z = \sin x \cos y$;

11) $z = x + y + \dfrac{xy}{x-y}$; ***12)*** $z = xe^y$; ***13)*** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x}$;

14) $z = \ln(x + e^{xy})$; ***15)*** $z = x^{2y}$; ***16)*** $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Р е ш е н и е п. 1. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

414. Показать, что функция z удовлетворяет данному дифференциальному уравнению:

1) $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$;

2) $z = y^{\frac{y}{x}} \sin\dfrac{y}{x}$, $\quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$;

3) $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, \quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y};$

4) $z = e^{\frac{x}{y}}, \quad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x};$

5) $z = \dfrac{xy}{x-y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}.$

Р е ш е н и е п. 1. Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Подставляем найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x}\frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\left(\ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\right) =$$
$$= \frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{\ln(x^2-y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Получили, что левая часть уравнения тождественно равна правой. А это и означает, что функция z удовлетворяет данному уравнению.

415. Показать, что уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $z = e^x\cos y;$ ***2)*** $z = \ln(x^2+y^2).$

416. Показать, что уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $u(x,t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x;$

2) $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$, где φ, ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

417. Найти полный дифференциал данной функции:

1) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; ***2)*** $z = 2x^4 + y^4 - x^2y^3 + 5xy$;

3) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$; ***4)*** $z = yx^y$; ***5)*** $z = e^{y^2 - xy}$;

6) $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$; ***7)*** $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$; ***8)*** $z = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$;

9) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; ***10)*** $z = \cos\dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$; ***11)*** $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$;

12) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{t}$; ***13)*** $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; ***14)*** $z = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$;

15) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$; ***16)*** $z = \sqrt{u + \sqrt{u^2 + v^2}}$;

17) $z = (x^2 + y^2)\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$; ***18)*** $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$;

19) $u = x^2yz^4$; ***20)*** $u = \dfrac{y}{xz}$; ***21)*** $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$;

22) $u = x^{\frac{y}{z}}$; ***23)*** $u = x^{y^z}$.

Р е ш е н и е п. 1. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Выписываем полный дифференциал в виде $(6.4)^{\text{т}}$:

$$dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Р е ш е н и е п. 18. Находим частные производные:

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2 + z^2)^3}}, \quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2 + z^2)^3}}.$$

Выписываем полный дифференциал $(6.4)^{\text{т}}$:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2 + z^2)^3}}.$$

418. Найти полный дифференциал функции:

1) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$;

2) $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}1$.

419. Вычислить приближенно, заменяя приращение функции ее дифференциалом:

1) $1{,}07^{3{,}97}$; ***2)*** $\sqrt{(4{,}03)^2 + (3{,}05)^2}$; ***3)*** $1{,}03 \cdot 9{,}98$; ***4)*** $1{,}94e^{0{,}12}$;

5) $1{,}04^{2{,}03}$; ***6)*** $\operatorname{arctg} \dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; ***7)*** $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$; ***8)*** $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$;

9) $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$; ***10)*** $\cos 2{,}36 \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$;

11) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

Р е ш е н и е п. 1. Число $1{,}07^{3{,}97}$ представляет собой значение функции $f(x, y) = x^y$ при $x = 1{,}07$ и $y = 3{,}97$. Легко вычислить, что при $x_0 = 1$ и $y_0 = 4$

$$f(x_0, y_0) = 1^4 = 1.$$

Находим приращения переменных:

$$\Delta x = x - x_0 = 1{,}07 - 1 = 0{,}07, \quad \Delta y = y - y_0 = 3{,}97 - 4 = -0{,}03.$$

Вычисляем частные производные в точке (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} f'_x &= yx^{y-1}, & f'_x(x_0, y_0) &= 4 \cdot 1^{4-1} = 4, \\ f'_y &= x^y \ln x, & f'_y(x_0, y_0) &= 1^4 \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Находим приближенное значение $f(x, y)$, заменяя приращение функции полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \Delta f &\approx f(x_0, y_0) + df = \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \\ &= 1 + 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 1 + 0{,}28 = 1{,}28. \end{aligned}$$

420. Найти производную dz/dt, если известно, что:

1) $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = a\sin t$, $y = a\cos t$;

3) $z = e^{xy}\ln(x+y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$;

4) $z = x^5 + 2xy - y^3$, $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$;

5) $z = xy \operatorname{arctg} xy$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$;

6) $z = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$; ***7)*** $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$;

8) $z = xy + xyu$, $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$;

9) $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$;

10) $z = x^2y^3u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$.

Р е ш е н и е п. 1. Не прибегая к формуле $(6.5)^{\text{т}}$ производной сложной функции, просто подставим x и y в z:

$$z(t) = e^{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = e^{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^{a^2}.$$

Так как производная постоянной равна нулю, то $dz/dt = 0$.

Р е ш е н и е п. 4. Здесь непосредственная подстановка приводит к усложнению выкладок и результата. Применяем формулу $(6.5)^{\text{т}}$ для производной сложной функции:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (5x^4 + 2y)(-2\sin 2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2} =$$
$$= -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

Р е ш е н и е п. 8. По формуле $(6.5)^{\text{т}}$ производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} = (y + yu)\cos t + (x + xu)\frac{1}{t} + (xy)e^t =$$
$$= (1+u)\left(y\cos t + \frac{x}{t}\right) + xye^t.$$

421. Найти производную по направлению функции

$$z = x^2 + y^2$$

в точке $M(1,1)$. Рассмотреть случаи, когда направление составляет с осью Ox угол:

1) $\pi/3$; ***2)*** $\pi/6$; ***3)*** $\pi/2$.

Решение п. 1. Выписываем направляющие косинусы заданного направления:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Находим частные производные функции z в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2.$$

Тогда по формуле $(6.9)^{\text{т}}$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 1.$$

422. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке $M(1,1)$ функции $z = x^3y - 5xy^2 + 8$.

423. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла функции $z = \ln(e^x + e^y)$.

424. Найти производную функции

$$u = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M(1,2,-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами $(2,4,-3)$.

425. Найти производную функции

$$u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$$

в точке $M(2,3,1)$ по направлению:

1) радиуса-вектора точки M; ***2)*** вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

426. Найти градиент функции z в точке M:

1) $z = x^2 + 2y^2 - 5$, $M(2,-1)$; ***2)*** $z = 4 - x^2 - y^2$, $M(1,2)$;

3) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $M(0,3)$; ***4)*** $z = (x-y)^2$, $M(1,1)$;

5) $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$, $M(1,1)$.

Р е ш е н и е п. 1. Находим частные производные функции z и их значения в точке M:

$$z'_x = 2x, \quad z'_x(2,-1) = 4, \qquad z'_y = 4y, \quad z'_y(2,-1) = -4.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} z = \left(z'_x(M), z'_y(M)\right) = (4,-4).$$

427. Найти градиент функции u:

1) $u = x^2yz^3$; ***2)*** $u = x^2 + y^2 - z^2$; ***3)*** $u = e^{xy} - yz^2$;

4) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Р е ш е н и е п. 1. По определению

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(2xyz, x^2z^3, 3x^2yz^2\right).$$

428. Найти $\operatorname{grad} u$ и $|\operatorname{grad} u|$ в точке M:

1) $u = x^2 - y^2 + yz - x$, $M\,(1,0,-1)$;

2) $u = 3x^2 - xy^3 + xz - z^2$, $M(1,2,3)$;

3) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $M(1,-1,2)$; ***4)*** $u = 4 - x^2 - y^2 + z^2$, $M(3,2,1)$;

5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(-1,2,0)$; ***6)*** $u = xyz$, $M(3,-1,2)$;

7) $u = z\sin(x-y)$, $M\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, 1\right)$; ***8)*** $u = \dfrac{x+y}{z}$, $M(2,0,1)$;

9) $u = \operatorname{arctg}(x + 2y + z^2)$, $M(1,1,0)$.

Р е ш е н и е п. 1. По определению градиента

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = (2x-1, -2y+z, y).$$

Подставляем координаты точки M:

$$\operatorname{grad} u(M) = (2\cdot 1 - 1, -2\cdot 0 + (-1), 0) = (1,-1,0).$$

Находим модуль градиента, определяющий значение максимального роста функции u:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

6.1.2. Экономический профиль

429. Найти значение производственной функции Кобба — Дугласа

$$F(K, L) = 0{,}85K^{3/4}L^{1/3},$$

если величина капитала $K = 625$, а затраты труда $L = 216$.

430. Поток пассажиров z выражается функцией $z = x^2/y$, где x — число жителей; y — расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл.

Р е ш е н и е. Производная $z'_x = 2x/y$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей.

Производная $z'_y = -x^2/y^2$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами.

431. Найти предельные полезности для следующих функций полезности:

1) логарифмической функции $u(x, y) = a_1 \ln(x - c_1) + a_2 \ln(y - c_2)$;

2) функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1 - b_1}(x - c_1)^{1-b_1} + \frac{a_2}{1 - b_2}(y - c_2)^{1-b_2}.$$

Р е ш е н и е п. 2. Выполняем дифференцирование:

$$u'_x = \frac{a_1}{1 - b_1}(1 - b_1)(x - c_1)^{-b_1} = a_1 x^{-b_1},$$
$$u'_y = \frac{a_2}{1 - b_2}(1 - b_2)(x - c_2)^{-b_2} = a_2 x^{-b_2}.$$

432. Пусть

$$z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$$

производственная функция, где x — затраты живого труда; y — затраты овеществленного труда. Найти эластичности E_{zx} и E_{zy} в точке $(1, 1)$.

433. Найти эластичности функции Кобба — Дугласа $z = ax^{\alpha}y^{\beta}$.

434. Для функции $z = f(x, y)$ *коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = -\frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d \ln \dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}}.$$

Найти коэффициент эластичности замещения:

1) для функции Кобба — Дугласа $z = ax^\alpha y^\beta$;

2) функции с постоянной эластичностью замещения

$$z = e_0\Big(e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\Big)^{-\frac{k}{\beta}}.$$

Решение п. 1. В данном случае

$$\sigma_{xy} = -\frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d \ln \dfrac{a\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{a\beta x^\alpha y^{\beta-1}}} = -\frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d \ln \dfrac{\alpha y}{\beta x}} = -\frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d\Big(\ln \dfrac{\alpha}{\beta} - \ln \dfrac{x}{y}\Big)} = \frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d \ln \dfrac{x}{y}} = 1.$$

6.2. Экстремум функции двух переменных

6.2.1. Общие задачи

435. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$; ***2)*** $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;

3) $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$; ***4)*** $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$;

5) $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$; ***6)*** $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;

7) $z = 2xy - 4x - 2y$; ***8)*** $z = xy(1 - x - y)$;

9) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; ***10)*** $z = x^3 - y^3 - 3xy$;

11) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; ***12)*** $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

13) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; ***14)*** $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$;

15) $z = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + y$; ***16)*** $z = \dfrac{1+2x-2y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;

17) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$;

18) $z = e^{x/2}(x+y^2)$; ***19)*** $z = e^{x/2}(x+y^2)$;

20) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$;

21) $z = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

Решение п. 1. Определяем частные производные:

$$z'_x = 2x + y - 2, \quad z'_y = x + 2y - 3.$$

Находим подозрительные на экстремум, т.е. стационарные, точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-2=0, \\ x+2y-3=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-2=0, \\ -3x+1=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = 2 - 2x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, единственной стационарной точкой функции z является точка $M_0(1/3, 4/3)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = 1, \quad z''_{yy} = 2.$$

Отсюда имеем, что в точке M_0

$$A = z''_{xx}(M_0) = 2, \quad B = z''_{xy}(M_0) = 1, \quad C = z''_{yy}(M_0) = 2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = 3.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то, согласно теореме 6.8[т], в точке M_0 данная функция имеет минимум, причем

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - 4 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}.$$

436. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в области D:

1) $z = x^2y(2-x-y)$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$;

2) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, D — замкнутый треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = -5$;

3) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D — треугольник, определяемый неравенствами $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$;

4) $z = 3x + y - xy$, D — треугольник, ограниченный прямыми $y = x$, $y = 4$, $x = 0$;

5) $z = xy - x - 2y$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x = 3$, $y = x$, $y = 0$;

6) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

7) $z = xy + x + y$, D — квадрат, задаваемый неравенствами $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$;

8) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, D — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$;

9) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, D — прямоугольник $ABCD$ с вершинами $A(4, -3)$, $B(4, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, -3)$;

10) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$;

11) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$;

12) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$;

13) $z = x^2 + y^2$, D — ромб, определяемый неравенством $3|x| + 4|y| \leqslant 12$;

14) $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$, D — ромб, определяемый неравенством

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leqslant 1;$$

15) $z = x^2 + 2xy - 10$, D — фрагмент параболы, ограниченный линиями $y = 0$, $y = x^2 - 4$;

16) $z = x^2/2 - xy$, D — фрагмент параболы, ограниченный линиями $y = 8$, $y = 2x^2$;

17) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$;

18) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi/2$;

19) $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Решение п. 1. Находим частные производные функции z:

$$z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2, \quad z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y.$$

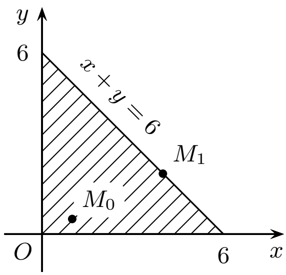

Рис. 6.1

Ищем стационарные точки внутри треугольника D (рис. 6.1):

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 2x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Внутри треугольника D имеют место неравенства $x > 0$ и $y > 0$. Это позволяет сократить левую и правую части первого из уравнений полученной системы на xy и второго — на x^2:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4 - 3(2 - 2y) - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4y = 2. \end{cases}$$

Отсюда имеем стационарную точку $M_0(1, 1/2)$. Очевидно, что она лежит внутри треугольника D. Для этой точки

$$z(M_0) = 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Исследуем функцию z на границе области. На сторонах $x = 0$ и $y = 0$ треугольника D функция z принимает нулевые значения. Для стороны $x + y = 6$ воспользуемся тем, что $y = 6 - x$, и представим функцию z как функцию $z_1(x)$ одной переменной x, заданную на отрезке $[0, 6]$:

$$z_1(x) = x^2(6-x)\big(2 - x - (6-x)\big) = (6x^2 - x^3)(-4) = 4x^3 - 24x^2.$$

Ищем стационарные точки функции $z_1(x)$:

$$z_1'(x) = 0, \quad 12x^2 - 48x = 0, \quad x(x-4) = 0.$$

Имеем два корня: $x = 0$ и $x = 4$. Из них только $x = 4$ лежит внутри интервала $(0, 6)$. Ему соответствуют точка $M_1(4, 2)$, в которой

$$z(M_1) = z_1(4) = 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 = 16(16 - 24) = -128.$$

Очевидно, что на концах отрезка $[0, 6]$, соответствующих вершинам $(6, 0)$ и $(0, 6)$ треугольника D, функция $z_1(x)$ обращается в нуль.

Мы доказали, что наименьшее и наибольшее значения функции z в треугольнике D может достигаться либо на сторонах $x = 0$ и $y = 0$, где она обращается в нуль, либо в точках M_0 и M_1. Следовательно,

$$z_{\text{наим}} = z(M_1) = -128, \quad z_{\text{наиб}} = z(M_0) = \frac{1}{4}.$$

437. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D. На границе подозрительные на условный экстремум точки искать с помощью функции Лагранжа:

1) $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 45$;

2) $z = x + y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 4$;

3) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$;

4) $z = xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$; ***5)*** $z = 3xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 2$;

6) $z = -x^2 - y^2 + 4x - 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 72$;

7) $z = 1 - x^2 - y^2$, D: $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$;

8) $z = -x^2 - y^2 - 4x + 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$;

9) $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 20$;

10) $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$;

11) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем стационарные точки функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(2, -1)$, которая принадлежит области D. Вычисляем значение функции в этой точке:

$$z(M_0) = 4 + 1 - 8 - 2 = -5.$$

Для поиска максимума и минимума на границе применим метод множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 45).$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4 + 2\lambda x = 0, \\ 2y + 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{1+\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{1+\lambda}, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases}$$

Подставляем значения x и y из двух первых уравнений в третье:

$$\frac{4}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} = 45, \quad \frac{5}{(1+\lambda)^2} = 45, \quad (1+\lambda)^2 = \frac{1}{9}.$$

Отсюда имеем:

$$1 + \lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad 1 + \lambda_2 = -\frac{1}{3},$$

$$x_1 = \frac{2}{1/3} = 6, \; y_1 = -\frac{1}{1/3} = -3, \quad x_2 = \frac{2}{-1/3} = -6, \; y_1 = -\frac{1}{-1/3} = 3.$$

Итак, на границе обнаружены две стационарные точки функции Лагранжа: $M_1(6, -3)$ и $M_2(-6, 3)$. В этих точках

$$z(M_1) = 36 + 9 - 24 - 6 = 15, \quad z(M_2) = 36 + 9 + 24 + 6 = 75.$$

Сравнивая значения функции z в точках M_0, M_1 и M_2, приходим к выводу, что

$$z_{\text{наим}} = z(2, -1) = -5, \quad z_{\text{наиб}} = z(-6, 3) = 75.$$

438. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 6 - 4x - 3y$$

на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

439. Найти расстояние между кривой и прямой:

1) $y = x^2$, $x - y - 5 = 0$; ***2)*** $x^2 - y^2 = 3$, $y - 2x = 0$;

3) $9x^2 + 4y^2 = 36$, $3x + y - 9 = 0$;

4) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$, $9x - 7y + 16 = 0$.

Решение п. 1. Приравнивая ординаты данных двух линий, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 = x - 5, \quad x^2 - x + 5 = 0,$$

не имеющему решений. Это означает, что данные парабола и прямая не имеют общих точек, что видно также из рис. 6.2.

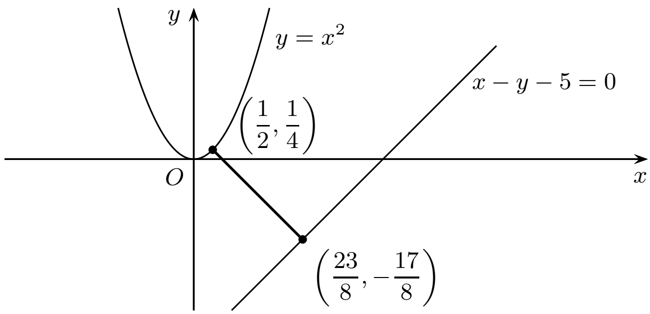

Рис. 6.2

Возьмем произвольную точку $M(x, x^2)$ параболы и точку $N(y, y - 5)$ прямой. Тогда квадрат расстояния между этими точками, который обозначим $f(x, y)$, может быть вычислен по формуле

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - y + 5)^2.$$

Для решения поставленной задачи достаточно найти минимум функции $f(x, y)$.

Находим стационарные точки функции f:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x-y) + 4x(x^2 - y + 5) = 0, \\ -2(x-y) - 2(x^2 - y + 5) = 0. \end{cases}$$

Сложим оба уравнения:

$$(4x - 2)(x^2 - y + 5) = 0.$$

Если бы выполнялось равенство $x^2 - y + 5 = 0$, то из второго уравнения системы следовало бы, что и $x - y = 0$. А это означало бы, что парабола и прямая имеют общую точку, что, как мы знаем, неверно. Таким образом,

$$4x - 2 = 0, \quad x = 1/2.$$

Подставим полученное значение x во второе уравнение системы:

$$-2\left(\frac{1}{2} - y\right) - 2\left(\frac{1}{4} - y + 5\right) = 0, \quad 4y = \frac{23}{2}, \quad y = \frac{23}{8}.$$

Делаем вывод, что единственной стационарной точкой функции $f(x, y)$ является точка

$$M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{23}{8}\right).$$

Из геометрических соображений (рис. 6.2) ясно, что минимум функции $f(x, y)$ достигается в некоторой точке, являющейся, согласно необходимому условию локального экстремума, стационарной точкой функции $f(x, y)$. Этой точкой будет M_0, поскольку других стационарных точек функция $f(x, y)$ не имеет.

Итак, расстояние между данными параболой и прямой совпадает с расстоянием между их точками $(1/2, 1/4)$ и $(23/8, -17/8)$ и равно

$$\sqrt{f(M_0)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{23}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{23}{8} + 5\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{19}{8}\right)^2 + \left(\frac{19}{8}\right)^2} = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

440. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1, 2, 3)$ до прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}.$$

6.2.2. Экономический профиль

441. На производстве изготавливается продукция двух видов в количестве x и y единиц. Цены продукции каждого вида составляют $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$ ден. ед. за единицу продукции. Функция издержек имеет вид $C = x^2 + xy + y^2$. Найти максимум прибыли.

Решение. Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Ищем стационарные точки функции прибыли:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ -6 + 3x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = 8 - 2 \cdot 2 = 4. \end{cases}$$

Имеем стационарную точку $M_0(2, 4)$. Вычисляем вторые производные функции $P(x, y)$:

$$A = P''_{xx} = -2, \quad B = P''_{xy} = -1, \quad C = P''_{yy} = -2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$ и $A < 0$, то по теореме 6.8$^{\text{т}}$ точка M_0 является точкой локального максимума прибыли, причем

$$P_{\max} = P(M_0) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2^2 - 2 \cdot 4 - 4^2 = 28.$$

442. Цены товаров двух видов равны $P_1 = 32$ и $P_2 = 24$ ден. ед. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид

$$C = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2.$$

443. Определить, какие линейные размеры должен иметь открытый прямоугольный бассейн объемом $V = 32\,\text{м}^2$, чтобы на облицовку его поверхности плиткой было затрачено минимальное количество средств.

Решение. Обозначим через x м, y м и h м длину, ширину и глубину бассейна. По условию

$$h = \frac{V}{xy} = \frac{32}{xy}\ \text{м}.$$

Определим, при каких значениях x и y площадь бассейна

$$S = xy + 2xh + 2yh = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

будет минимальной.

Находим частные производные площади $S = S(x, y)$:

$$S'_x = y - \frac{64}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{64}{y^2}.$$

Находим стационарные точки функции $S(x, y)$ при $x > 0$ и $y > 0$:

$$\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y - \dfrac{64}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{64}{y^2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 y = 64, \\ xy^2 = 64, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(x - y) = 0, \\ xy^2 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x^3 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(4, 4)$.

Из практических соображений ясно, что функция $S(x, y)$ достигает своего минимума в некоторой конечной точке, лежащей внутри I координатной четверти (попытайтесь строго доказать данное утверждение). Эта точка является стационарной и, следовательно, совпадает с M_0.

Таким образом, бассейн должен иметь длину и ширину, равные 4 м. Его глубина

$$h = \frac{32}{xy} = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2\,\text{м}.$$

444. Определить, каковы должны быть наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок δ и вместимостью V, чтобы на его изготовление затрачивалось наименьшее количество материала.

445. Завод должен изготовить партию закрытых цилиндрических железных бочек заданного объема V. Какими выбрать радиус основания R и высоту H бочек, чтобы минимизировать затраты железа?

446. Вычислить, при каких радиусе основания R и высоте H на производство открытого цилиндрического стакана заданного объема V будет уходить минимальное количество стекла.

447. Золотой кулон имеет форму полого кругового конуса и должен иметь объем V. Чему должны быть равны радиус основания R и высота H кулона, чтобы затрачивать на его производство минимальное количество золота?

448. Молочный завод выпускает мороженое в вафельных стаканчиках, имеющих форму открытого кругового конуса. Какими должны быть радиус основания R и высота H стаканчика, чтобы на производство порции заданного объема V уходило как можно меньше вафли?

449. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

450. Требуется отгородить участок земли площадью S в форме равнобокой трапеции так, чтобы боковые стороны и одно из оснований были огорожены проволочной сеткой, а второе основание примыкало к длинной каменной стене. Какой должна быть форма участка, чтобы минимизировать затраты на покупку сетки?

451. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом. Указать такие начальный и конечный пункты канала, чтобы минимизировать стоимость его строительства, которая тем больше, чем длиннее канал.

Глава 7

Дифференциальные уравнения

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

452. Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

1) $y = Cx$; ***2)*** $y = x^2 + Cx$; ***3)*** $Cy = x^2 + y^2$; ***4)*** $y = Ce^{2x}$;

5) $y^2 = 2Cx$; ***6)*** $y = \sqrt{1 - x^2} + C$; ***7)*** $y = \sin(Cx)$;

8) $\ln \dfrac{x}{y} = 1 + Cy$; ***9)*** $\ln y = C \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; ***10)*** $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$;

11) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cy^2$; ***12)*** $y = Ce^{1-x^2}$; ***13)*** $\arcsin \dfrac{y}{x} + x = C$.

Р е ш е н и е п. 1. Продифференцируем данное равенство по x:

$$y' = C.$$

Подставим найденное выражение для C в исходное равенство:

$$y = y'x \quad \text{или} \quad y'x - y = 0.$$

Р е ш е н и е п. 5. Продифференцируем данное равенство по x:

$$2yy' = 2C \quad \text{или} \quad C = yy'.$$

Подставим найденное выражение для C в исходное равенство:

$$y^2 = 2yy'x \quad \text{или} \quad y = 2y'x.$$

453. Найти общее решение дифференциальных уравнений. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$; ***2)*** $y''' = e^{3x} + \sin^2 \dfrac{x}{2}$; ***3)*** $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

4) $y'' = 3\sin^2 x \cos x$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y'(0) = 0$; ***5)*** $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

6) $y^{(4)} = e^x - 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$;

7) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; ***8)*** $\dfrac{y'''}{x} = \sin 3x$; ***9)*** $y'' = \operatorname{arctg} x$.

Р е ш е н и е п. 1. Это уравнение вида

$$y''' = f(x).$$

Интегрируя, получаем:

$$y'' = \int \frac{6}{x^3}\,dx = -3x^{-2} + C_1,$$

$$y' = \int (-3x^{-2} + C_1)\,dx = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + C_1 x + C_2\right)\,dx = 3\ln|x| + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

или

$$y = 3\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Р е ш е н и е п. 4. Это уравнение вида $y'' = f(x)$. Интегрируем его:

$$y' = \int 3\sin^2 x \cos x\,dx = 3\int \sin^2 x\,d(\sin x) = \sin^3 x + C_1,$$

$$y = \int (\sin^3 x + C_1)\,dx = C_1 x - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C_1 x + C_2.$$

Для нахождения частного решения воспользуемся начальными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = -1 + \dfrac{1}{3} + C_2, \\ 0 = 0 + C_1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Окончательно получаем:

$$y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1.$$

7.2. Решение уравнений первого порядка

7.2.1. Общие задачи

454. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$; ***2)*** $(x^2-1)y' = 2xy^2$;

3) $x^2y' = 1 + \cos 2y$; ***4)*** $y' = e^{x-y}$; ***5)*** $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$;

6) $y' - 2xy - y = 0,\ y(0) = 1$; ***7)*** $y'\sin x = y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

8) $2\sqrt{y}\,dx = dy,\ y(0) = 1$; ***9)*** $y' = \dfrac{\sin y}{1+x^2},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

10) $3x^2y\,dx + 2\sqrt{4-x^3}\,dy = 0$; ***11)*** $e^{x+y}\,dx + y\,dy = 0$;

12) $xy' = \dfrac{y}{\ln x},\ y(e) = 1$; ***13)*** $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$;

14) $y' = y\ln y$; ***15)*** $(2x+1)\,dy + y^2\,dx = 0,\ y(4) = 1$.

Решение п. 1. Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому

$$xy\,dx + (x+1)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,dy = -xy\,dx.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x+1}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = C(x+1)e^{-x}.$$

Решение п. 6. Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому

$$\frac{dy}{dx} = y(2x+1).$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y} = (2x+1)\,dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int (2x+1)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = x^2 + x + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = Ce^{x^2+x}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию:

$$1 = Ce^0,$$

откуда $C = 1$. Осталось подставить найденное значение в общее решение:

$$y = e^{x^2+x}.$$

455. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $x\,dy - (x+y)\,dx = 0,\ y(1) = 2;$ ***2)*** $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x},\ y(1) = 1;$

3) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0;$

4) $(x^2 + xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0;$ ***5)*** $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x);$

6) $x(x+2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0;$ ***7)*** $xy' = y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2};$

8) $y' = \dfrac{x-y}{x-2y};$ ***9)*** $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x},\ y(1) = 0;$

10) $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0;$ ***11)*** $y' = \dfrac{xy + y^2e^{-x/y}}{x^2};$

12) $(x + 2y + 1)\,dx + (3 - 2x)\,dy = 0;$

13) $(x - 2)\,dx + (y - 2x + 1)\,dy = 0;$

14) $(6x + y - 1)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0;$

15) $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0;$ ***16)*** $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

Р е ш е н и е п. 1. Это однородное уравнение. Выполним замену:

$$y = ux, \quad dy = u\,dx + x\,du.$$

Подставим указанные выражения в исходное уравнение:

$$x(u\,dx + x\,du) - x(1+u)\,dx = 0,$$
$$u\,dx + x\,du - (1+u)\,dx = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Перенесем слагаемые, содержащие dx, вправо:

$$x\,du = (1+u)\,dx - u\,dx, \quad x\,du = dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$u = \ln|x| + C.$$

Учитывая замену, получаем общее решение уравнения:

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$2 = 1 \cdot (\ln 1 + C).$$

Значит, $C = 2$. Тогда частное решение имеет вид

$$y = x(\ln|x| + 2).$$

Р е ш е н и е п. 2. Это однородное уравнение. Произведем замену:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Подставим указанные выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u = \frac{ux}{x}\ln\frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u\ln u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Произведем необходимые преобразования:

$$x\frac{du}{dx} = u\ln u - u, \quad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1).$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \ln u = Cx + 1, \quad u = e^{Cx+1}.$$

Учитывая замену, получаем общее решение уравнения:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$1 = 1 \cdot e^{C+1}.$$

Значит, $C = -1$. Тогда частное решение имеет вид

$$y = xe^{1-x}.$$

Р е ш е н и е п. 12. Представим уравнение в виде

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}.$$

Это уравнение можно привести к однородному. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = -\frac{5}{4}.$$

Выполним замену:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

т.е.

$$x = X + \frac{3}{2}, \quad y = Y - \frac{5}{4}.$$

Будем иметь:

$$Y' = \frac{X + \frac{3}{2} + 2\left(Y - \frac{5}{4}\right) + 1}{2\left(X + \frac{3}{2}\right) - 3}, \quad Y' = \frac{X + 2Y}{2X}.$$

Получили однородное уравнение. Решим его стандартным образом. Пусть

$$Y = uX, \quad Y' = u'X + u.$$

Тогда

$$u'X + u = \frac{X + 2uX}{2X}, \quad u'X + u = \frac{1+2u}{2}, \quad X\frac{du}{dX} = \frac{1}{2}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dX}{2x}, \quad \int du = \int \frac{dX}{2x},$$

откуда

$$u = \frac{1}{2}\ln|X| + C.$$

Произведем обратную замену:

$$Y = X\left(\frac{1}{2}\ln|X| + C\right).$$

Окончательно будем иметь:

$$y + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right), \quad 4y + 5 = (2x-3)\left(\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right).$$

456. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $y' - y = e^x$; ***2)*** $y' = x + y$; ***3)*** $y' + x^2 y = x^2$; ***4)*** $xy' + y = 3$;

5) $x^2 y' = y^2 + xy$; ***6)*** $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x},\ y(1) = 0$;

7) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1$; ***8)*** $x^2 y' + 2xy = \ln x,\ y(1) = 2$;

9) $xy' - 3y = x^4 e^x,\ y(1) = e$; ***10)*** $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

11) $y' + y = x\sqrt{y}$; ***12)*** $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; ***13)*** $(x + y^2)\,dy + dx = 0$;

14) $xy' - y^2 \ln x = -y$; ***15)*** $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

16) $y\,dx + (4\ln y - 2x - y)\,dy = 0$; ***17)*** $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3},\ y(1) = 1$;

18) $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$; ***19)*** $(y' + y)(x^2 + 1) = e^{-x},\ y(0) = 1$;

20) $xy' + y = xy^2$.

Р е ш е н и е п. 1. Это линейное уравнение. Решим его двумя способами.

Первый способ (метод Лагранжа). Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

откуда $\ln|y| = x + \ln|C|$, или $y = Ce^x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^x,$$

где $C(x)$ — некоторая функция. Найдем:

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^x.$$

Отсюда $C'(x) = 1$, или $C(x) = x+C$. Следовательно, общее решение данного уравнения

$$y = (x + C)e^x.$$

Второй способ (метод Бернулли). Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v+v'u$. С учетом указанной замены исходное уравнение примет вид

$$u'v + v'u - uv = e^x,$$
$$u'v + u(v' - v) = e^x. \tag{7.1}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' - v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx,$$

откуда $\ln|v| = x + \ln|C|$, или $v = Ce^x$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (7.1):

$$u'e^x = e^x, \quad u' = 1.$$

Значит, $u = x + C$. Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x + C)e^x.$$

Решение п. 5. Запишем уравнение в виде

$$x^2y' - xy = y^2.$$

Это уравнение Бернулли. Путем замены $y = 1/u$ его можно свести к линейному, однако удобнее сразу применить метод Бернулли.

Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x. При этом $y' = u'v + v'u$. Тогда данное уравнение примет вид

$$x^2(u'v + v'u) - xuv = u^2v^2,$$
$$x^2u'v + xu(xv' - v) = u^2v^2. \tag{7.2}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xv' - v = 0, \quad x\,\frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln|v| = \ln|x| + \ln|C|$, или $v = Cx$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (7.2):

$$x^3u' = u^2x^2, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Значит,

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| - C, \quad u = \frac{1}{C - \ln|x|}.$$

Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{x}{C - \ln x}.$$

Решение п. 13. Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Поэтому преобразуем его следующим образом:

$$x + y^2 + x' = 0, \quad x' + x = -y^2.$$

Решим полученное уравнение методом Бернулли. Полагаем $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — некоторые функции от y. При этом $x' = u'v + v'u$. Тогда данное уравнение примет вид

$$u'v + v'u + uv = -y^2,$$
$$u'v + u(v' + v) = -y^2. \tag{7.3}$$

Подберем функцию $v = v(y)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + v = 0, \quad \frac{dv}{dy} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dy,$$

откуда $\ln|v| = -y + \ln|C|$, или $v = Ce^{-y}$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^{-y}$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (7.3):

$$u'e^{-y} = -y^2, \quad du = -y^2 e^y\, dy.$$

Значит,

$$u = -y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + C.$$

Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$x = (-y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + C)e^{-y} = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2.$$

7.2.2. Экономический профиль

457. Модель роста в условиях конкурентного рынка имеет вид

$$y' = mlp(y)y,$$

где $y = y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t; m — норма инвестиций; l — норма акселерации; $p(y)$ — цена реализованной продукции. Найти выражение для объема реализованной продукции y, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, $l = 2$, $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$.

Р е ш е н и е. Модель роста в условиях конкурентного рынка в данном случае задается уравнением

$$y' = (2 - y)y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y(y-2)} = dt, \quad \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + \ln|C|,$$

откуда

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t},$$

или
$$y = \frac{2}{1 - Ce^{-2t}}.$$

Принимая во внимание начальное условие, найдем константу C:
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1 - Ce^{0}}, \quad C = -3.$$

Таким образом, объем реализованной продукции описывается равенством
$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

458. Пусть национальный доход возрастает со скоростью, пропорциональной его величине, а дефицит в расходах правительства прямо пропорционален доходу. Найти функцию, описывающую изменение национального долга, если в начальный момент времени национальный доход был равен 100 млн ден. ед., а национальный долг — 50 млн ден. ед.

Р е ш е н и е. Пусть $Y = Y(t)$ — функция, описывающая изменение национального дохода. Тогда производная $Y'(t)$ показывает скорость изменения национального дохода. Учитывая условие задачи, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
$$\frac{dY}{dt} = kY,$$
где k — коэффициент пропорциональности. Поэтому
$$\frac{dY}{Y} = dt, \quad Y = C_1 e^{kt}.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную C_1:
$$C_1 = 100.$$

Таким образом, изменение национального дохода описывается функцией $Y = 100\, e^{kt}$.

Пусть теперь $D = D(t)$ — функция, описывающая изменение национального долга. Так как дефицит в расходах приводит к возрастанию долга, то
$$\frac{dD}{dt} = qY,$$
где q — коэффициент пропорциональности.

Подставив найденное значение Y, решим это уравнение:

$$dD = 100q\, e^{kt}\, dt, \quad D = \frac{100q}{k} e^{kt} + C_2.$$

Найдем константу C_2:

$$50 = \frac{100q}{k} + C_2, \quad C_2 = 50 - \frac{100q}{k}.$$

Окончательно заключаем, что функция, описывающая изменение национального долга, имеет вид

$$D = 50 + \frac{100q}{k}\left(e^{kt} - 1\right).$$

459. Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени $t = 0$ из рекламы получили информацию x_0 человек из общего числа N потенциальных покупателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей. Функция $x(t)$, описывающая зависимость количества людей, знающих о продукции, от времени, называется *логистической функцией*. Сделаем предположение, что скорость роста количества людей, знающих о продукции, пропорциональна как числу осведомленных в данный момент покупателей, так и числу неосведомленных покупателей. Получить представление для логистической функции.

Р е ш е н и е. Если $x(t)$ — количество людей, знающих о продукции, то

$$N - x(t)$$

количество людей, которые о ней не знают. Учитывая предположение, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Решим это уравнение:

$$\frac{dx}{x(N - x)} = k\,dt, \quad \frac{1}{N}\ln\frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную C:

$$C = \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{N - x_0}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{N-x_0}, \quad \ln\frac{x}{N-x} = Nkt + \ln\frac{x_0}{N-x_0}.$$

Потенциируя, получаем $\dfrac{x}{N-x} = \dfrac{x_0}{N-x_0}\, e^{Nkt}$, откуда

$$x = \frac{N\dfrac{x_0}{N-x_0}\, e^{Nkt}}{1 + \dfrac{x_0}{N-x_0}\, e^{Nkt}}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\dfrac{e^{Nkt}x_0}{N-x_0}$:

$$x = \frac{N}{1 + \dfrac{N-x_0}{x_0}\, e^{-Nkt}}.$$

Обозначим через $\alpha = N/x_0$ отношение количества всех людей к количеству людей, знающих о продукции в начальный момент времени. Окончательно получим:

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)\, e^{-Nkt}}.$$

460. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Пусть скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t),$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода. Найти функцию дохода $Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

Решение. В данном случае функция дохода удовлетворяет уравнению

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

или

$$Y'(t) - 2Y(t) = -4t.$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Положим

$$Y = uv, \quad Y' = u'v + uv'.$$

Тогда

$$u'v + uv' - 2uv = -4t, \quad u'v + u(v' - 2v) = -4t.$$

Определим функцию v:

$$\frac{dv}{dt} = 2v, \quad \frac{dv}{v} = 2\,dt, \quad \ln|v| = 2t,$$

откуда $v = e^{2t}$. Осталось определить функцию u:

$$u'e^{2t} = -4t, \quad u' = -4te^{-2t}.$$

Интегрируя, получаем:

$$u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Значит,

$$Y = uv = (2te^{-2t} + e^{-2t} + C)e^{2t} = 2t + 1 + Ce^{2t}.$$

Используя начальное условие $Y(0) = 2$, найдем постоянную C:

$$2 = 1 + C,$$

откуда $C = 1$. Окончательно функция дохода имеет вид

$$Y = 2t + 1 + e^{2t}.$$

461. Пусть $y = y(t)$ — функция, характеризующая изменение национального дохода, $C(t)$ — функция, характеризующая непроизводственное потребление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери. Простейшая модель воспроизводства национального дохода имеет вид

$$y(t) = B\frac{dy}{dt} + C(t),$$

где B — коэффициент капиталоемкости национального дохода, т.е. отношение производственного накопления к приросту национального дохода. Найти функцию $y(t)$, если $C(t) = 2t + 1$, $B = 1/3$ и в начальный момент времени национальный доход составлял $5/9$.

462. Функция предложения промышленной продукции предприятия, являющаяся функцией цены предшествующего года, имеет вид

$$S = 3p - 8(t-1) + 2\frac{dp}{dt}.$$

Спрос на данный товар определяется ценой на промышленную продукцию этого года, и функция спроса имеет вид

$$q = -p + 7t - \frac{dp}{dt}.$$

Определить цену равновесия на товар, т.е. цену, при которой спрос равен предложению.

463. Пусть сумма A руб. положена в банк под $r\%$ годовых. Если начисление процентов осуществляется непрерывно, то закон изменения суммы $P(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$P' = \frac{r}{100}P.$$

Через какое время сумма вклада удвоится, если $r = 10$?

Решение. Решим уравнение

$$P' = \frac{1}{10}P.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{10}\,dt, \quad \ln|P| = \frac{1}{10}t + \ln|C|,$$

откуда $P = Ce^{t/10}$. Так как первоначальная сумма равна A, то

$$A = Ce^0, \quad C = A,$$

т.е. $P = Ae^{t/10}$. Теперь определим момент времени, когда сумма вклада удвоится, т.е. станет равной $2A$:

$$2A = Ae^{t/10}, \quad e^{t/10} = 2.$$

Значит,

$$t = 10\ln 2 \approx 6{,}93.$$

464. Пусть $q = q(p)$ — функция, характеризующая изменение спроса на некоторую продукцию в зависимости от цены p. Найти эту функцию при условии, что эластичность постоянна и равна $E = -1/3$, а $q(1) = 1$.

7.3. Линейные уравнения второго порядка

7.3.1. Общие задачи

465. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$; ***2)*** $y'' - 6y' + 9y = 0$; ***3)*** $y'' + 8y' + 25y = 0$;

4) $y'' - 3y' - 4y = 0$; ***5)*** $y'' + 4y' + 4y = 0$; ***6)*** $y'' - 2y' + 2y = 0$;

7) $y'' - 5y' + 6y = 0$; ***8)*** $y'' - 9y = 0$; ***9)*** $y'' + 4y' = 0$;

10) $y'' + 2y' + 5y = 0$; ***11)*** $y'' - y = 0$; ***12)*** $y'' + y = 0$;

13) $y'' - 7y' + 10y = 0$; ***14)*** $y'' + 10y' + 25y = 0$;

15) $y'' + 6y' + 10y = 0$; ***16)*** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;

17) $y''' - 8y = 0$; ***18)*** $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$; ***19)*** $y^{(4)} - 16y = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$
$$D = 25 - 16 = 9,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-3}{2} = 1,\ \lambda_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу $(7.20)^{\text{т}}$)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Р е ш е н и е п. 2. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$
$$D = 36 - 36 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу $(7.21)^{\text{т}}$)

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Р е ш е н и е п. 3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = -36 < 0$. Поэтому определим числа

$$\alpha = -\frac{8}{2} = -4, \quad \beta = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу $(7.22)^{\text{т}}$)

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

466. Решить уравнения Эйлера:

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; ***2)*** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$; ***3)*** $xy'' + y' = 0$;

4) $xy'' + 4xy' + 2y = 0$; ***5)*** $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$;

6) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Выполним подстановку $x = e^t$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Значит, исходное уравнение примет следующий вид:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$D = 1 + 24 = 25,$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, \ \lambda_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{4t}.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

Р е ш е н и е п. 5. Выполним подстановку

$$2x+1=e^t, \quad x=\frac{1}{2}(e^t-1).$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=2e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)2e^{-t}}{\dfrac{1}{2}e^t}=4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Значит, исходное уравнение примет вид

$$e^{2t}4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-4e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+4y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$
$$D=4-4=0,$$
$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\frac{-2}{2}=1.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y=C_1e^t+C_2te^t.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1).$$

467. Проинтегрировать уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$; ***2)*** $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$;

3) $y''-y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; ***4)*** $y''+y=\operatorname{tg}x$; ***5)*** $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$;

6) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; **7)** $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$; **8)** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$;

9) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$; **10)** $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

Решение п. 1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda^2 = -4, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

а фундаментальными решениями будут

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x.$$

Вычислим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

и дополнительные определители ($f(x)$ — правая часть исходного уравнения):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0 - \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Определим функции:

$$C_1(x) = \int \frac{\Delta_1}{W}\,dx = \int \frac{-\operatorname{tg} 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\Delta_2}{W}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + C_2.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x = \\ &= \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)\sin 2x = \\ &= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|. \end{aligned}$$

468. Проинтегрировать уравнения со специальной правой частью:

1) $y'' + 2y' + y = e^x$; ***2)*** $y'' + y' - 2y = 6x^2$;

3) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; ***4)*** $y'' + 4y' - 5y = 1$;

5) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$; ***6)*** $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$;

7) $y'' + 2y' + y = (x+3)e^{-x}$; ***8)*** $2y'' + 3y' + y = (1-2x)e^{-x}$;

9) $y'' + 4y' + 4y = (1-4x)e^{-2x}$; ***10)*** $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$;

11) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$; ***12)*** $y'' + 4y = 3\sin 2x$;

13) $y'' + y = x\cos x$; ***14)*** $y'' + 9y = \dfrac{5}{4}\sin 3x + x\cos 3x$;

15) $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x$; ***16)*** $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\sin\dfrac{4}{5}x$;

17) $y'' - y' = x^2 - e^{3x}$; ***18)*** $y'' + y = e^x + \sin x$;

19) $y'' - 3y' + 2y = \sin x\sin 2x$; ***20)*** $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Р е ш е н и е п. 1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$
$$D = 4 - 4 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$P_0(x)e^{\alpha x},$$

где $P_0 = 1$ — многочлен нулевой степени, а $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = Ae^x.$$

Найдем производные:

$$\varphi'(x) = Ae^x, \quad \varphi''(x) = Ae^x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y и найдем A:

$$Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = e^x, \quad 4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Значит,

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}e^x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x.$$

Р е ш е н и е п. 6. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$
$$D = 9 + 16 = 25,$$
$$\lambda_1 = \frac{-3-5}{2} = -4, \quad \lambda_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1e^x + C_2xe^{-4x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1 = x + 1$ — многочлен первой степени, а $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = (Ax + B)e^x x^1 = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Найдем производные:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B),\\
\varphi''(x) &= e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x(2Ax + B + 2A) =\\
&= e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).
\end{aligned}$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y:

$$e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) + 3e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) - \\ - 4(Ax^2 + Bx)e^x = (x+1)e^x.$$

Сократим это уравнение на e^x и приведем подобные слагаемые:

$$10Ax + 2A + 5B = x + 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 2A + 5B = 1, \end{cases}$$

откуда $A = 1/10$, $B = 4/25$.

Значит,

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1e^x + C_2e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x.$$

Р е ш е н и е п. 10. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{3x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$P_0(x)\sin\alpha x,$$

где $P_0 = 13$ — многочлен нулевой степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Найдем производные:

$$\varphi'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$\varphi''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 5(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) +$$
$$+ 6(A\cos 3x + B\sin 3x) = 13\sin 3x.$$

Приравняв коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получим:

$$\begin{cases} -9A - 15B + 6A = 0, \\ -9B + 15A + 6B = 13, \end{cases} \qquad \begin{cases} A + 5B = 0, \\ 15A - 3B = 13, \end{cases}$$

откуда $A = 5/6$, $B = -1/6$.

Значит,

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

469. Решить задачу Коши:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$;

2) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

3) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$;

4) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

5) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

6) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$;

7) $y'' + 4y = 4(\cos 2x + \sin 2x)$, $y(\pi) = \pi$, $y'(\pi) = 2\pi$;

8) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

9) $y'' + y = x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

10) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е п. 1. Найдем общее решение уравнения. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad D = 16 - 12 = 4,$$
$$\lambda_1 = \frac{4-2}{2} = 1,\ \lambda_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Чтобы найти частное решение, воспользуемся начальными условиями. Из условия $y(0) = 6$ следует уравнение

$$6 = C_1 + C_2.$$

Чтобы воспользоваться условием $y'(0) = 10$, найдем производную:

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x},$$

т.е. $10 = C_1 + 3C_2$.

Получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Значит, частным решением исходного уравнения будет

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

7.3.2. Экономический профиль

470. Установить зависимость цены P от времени t при условии рыночного равновесия, если функции спроса $D(t)$ и предложения $S(t)$ определяются формулами:

1) $D(t) = 2P'' - 2P' - 3P + 10$, $S(t) = 3P'' + 2P' + 5P + 2$;

2) $D(t) = 3P'' - P' - 5P + 3$, $S(t) = 4P'' + P' - 4P + 2$;

3) $D(t) = 2P'' - 3P' - P + 7$, $S(t) = 4P'' + 2P' + P + 3$.

471. Рассмотрим экономическую модель паутинообразного типа с запасами товаров, в которой скорость изменения цены P зависит от величины запаса. Если спрос и предложение являются линейными функциями цены, т.е.

$$D = \alpha + aP, \quad S = \beta + bP,$$

а λ — постоянная, определяющая скорость реакции (т.е. изменения цены при изменении запасов товара), то процесс изменения цены описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \lambda(b - a)P = \lambda(\alpha - \beta).$$

Найти закон изменения цены во времени при условии, что $a < 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$.

Р е ш е н и е. Решим указанное уравнение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \omega^2 = 0,$$

где

$$\omega^2 = \lambda(b - a).$$

По условию задачи $\omega > 0$. Поэтому общее решение однородного уравнения

$$P_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Несложно убедиться, что это решение можно записать в виде

$$P_0 = C \cos(\omega t - \varepsilon),$$

где C, ε — некоторые постоянные.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Учитывая правую часть, его следует искать в виде $\varphi = A$. Подставив φ в исходное уравнение, будем иметь:

$$\lambda(b - a)A = \lambda(\alpha - \beta),$$

откуда

$$A = \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

Окончательно закон изменения цены описывается функцией

$$P = P_0 + \varphi = C \cos(\omega t - \varepsilon) + \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

Глава 8

Ряды

8.1. Числовые ряды

472. Написать формулу общего члена ряда:

1) $1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^3}+\ldots;$ ***2)*** $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}+\dfrac{1}{\ln 5}+\ldots;$

3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{9}+\ldots;$ ***4)*** $1+\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{6}+\dfrac{16}{24}+\ldots;$

5) $1-1+1-1+\ldots;$ ***6)*** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\ldots;$

7) $\dfrac{1}{2+3}+\dfrac{1}{4+3}+\dfrac{1}{8+3}+\dfrac{1}{16+3}+\ldots;$

8) $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\ldots;$

9) $1+2\dfrac{1}{4}+2\dfrac{7}{9}+3\dfrac{1}{16}+3\dfrac{6}{25}+\ldots.$

Р е ш е н и е п. 1. Каждый член данного ряда начиная со второго представляет собой дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — третья степень числа n. Первый член $1=1/1^3$. Таким образом,

$$a_n=\frac{1}{n^3}.$$

473. Найти сумму ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n};$ ***2)*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n};$ ***3)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)};$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; **5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; **7)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-2}{(n+1)!}$; **8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

Р е ш е н и е п. 1. Члены этого ряда 1, 1/2, 1/4, ... представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 1/2$. Воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Р е ш е н и е п. 3. Общий член этого ряда

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

можно представить в виде

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда частичная сумма ряда

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \ldots + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

474. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда. В соответствующем случае сделать вывод о сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; ***2)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$; ***3)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; ***4)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$; ***6)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; ***8)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$.

Решение п. 1. Так как общий член ряда $a_n = \frac{1}{2n-1}$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется, о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Решение п. 2. Так как общий член ряда $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости не выполняется, ряд расходится.

475. Пользуясь признаками сравнения, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; ***2)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; ***3)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$; ***4)*** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n}$; ***6)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1}$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n(n+2)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$; ***9)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2^n}$; ***10)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)}$;

11) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots$; ***12)*** $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \ldots$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$; ***14)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; ***15)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$; ***17)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin \dfrac{\pi}{n^2}$.

Р е ш е н и е п. 1. Общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Данный ряд является обобщенным гармоническим рядом. В силу того что $\alpha = 1/2 < 1$, ряд расходится.

Р е ш е н и е п. 2. Общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. Так как

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1/2 < 1$, то и исходный ряд сходится по признаку сравнения.

Р е ш е н и е п. 6. Общий член ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1}.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; при этом $b_n = \dfrac{1}{n}$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n}{3n^3 + 4n^2 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Значит, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

сходятся или расходятся одновременно. В силу того что последний ряд расходится, исходный ряд также расходится по признаку сравнения в предельной форме.

476. Пользуясь признаком Д'Аламбера, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$; ***2)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; ***3)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(3n-1)}$; ***4)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n\sqrt{2n+3}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(2n+1)}{3^n}$; ***6)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; ***8)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$;

9) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$; ***10)*** $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$.

Решение п. 1. Общий член ряда $a_n=\frac{n+1}{n!}$. Найдем:

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)!}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}=0<1,$$

то исходный ряд сходится по признаку Д'Аламбера.

477. Пользуясь признаком Коши, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; ***2)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; ***3)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; ***4)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$; ***6)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{3n-1}{2n+10}\right)^n$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$; ***9)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; ***10)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$.

Решение п. 1. Общий член ряда $a_n=\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+5}=\frac{2}{3}<1,$$

то исходный ряд сходится по признаку Коши.

478. Пользуясь интегральным признаком, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; *2)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$; *4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; *6)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$; *7)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$.

Р е ш е н и е п. 1. Так как $a_n = \frac{1}{n\ln n}$, то

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

Очевидно, что функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2, +\infty)$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x) = \int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A\to+\infty}\left(\ln|\ln x|\Big|_2^A\right) =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}(\ln\ln A - \ln\ln 2) = \infty.$$

Значит, исходный ряд расходится по интегральному признаку.

479. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$; *5)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+4}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n-1}{n!}$; *7)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2^n}{n!}$; *8)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{\ln n+2}}$; *10)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; *11)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$; ***13)*** $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}-\ldots$;

14) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$; ***15)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n(n^2+1)}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+7)}{3n^2+7n+1}$; ***17)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$; ***18)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^3}$.

Р е ш е н и е п. 1. Данный ряд является знакопеременным. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Так как $|\cos n|\leqslant 1$, то и

$$\frac{|\cos n|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\ldots\ .$$

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha=2$. Значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$$

сходится по признаку сравнения, а исходный ряд сходится абсолютно.

Р е ш е н и е п. 2. Данный ряд является знакочередующимся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1,$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

расходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 1/2$, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

расходится по признаку сравнения, а исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Применим признак Лейбница. При этом

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

В силу того что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \ldots,$$

данный ряд сходится по признаку Лейбница, причем условно.

8.2. Функциональные ряды

480. Найти область сходимости функционального ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; ***2)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{x^{2n+1}}$; ***3)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2 x^n}$; ***4)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^n x}{n}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi x}{4}$; ***6)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; ***7)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; ***9)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$; ***10)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$;

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; ***12)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$; ***13)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$;

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{2^n}$; ***15)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{x^n}$.

Р е ш е н и е п. 1. Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

При каждом фиксированном x данный ряд является обобщенным гармоническим рядом, который сходится при всех $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$. Таким образом, область сходимости данного ряда $(1, +\infty)$.

Р е ш е н и е п. 2. Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2+3}{x^{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}.$$

Применим признак Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3}{|x|^{2(n+1)+1}} = \frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}\cdot\frac{|x|^{2n+1}}{n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{(n^2+3)|x|^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{|x|^{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^2+3} = \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Для того чтобы этот ряд сходился, достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{|x|^{2n}} < 1,$$

которое выполняется при

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Заметим, что при $x \in (-1, 1)$ вычисленный выше предел будет больше единицы, т.е. при $x \in (-1, 1)$ исходный ряд расходится.

Осталось выяснить поведение ряда при $x = \pm 1$. Подставим эти значения в данный ряд. Если $x = 1$, то получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{1^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

который расходится по следствию из необходимого условия сходимости числового ряда. Аналогично, если $x = -1$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(-1)^{2n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

также расходится. Значит, областью сходимости исходного ряда является

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

481. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; ***2)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-3)^n$; ***3)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$; ***4)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 5^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; ***6)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+3)^n}{n!}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$; ***9)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{4^{n-1}}$; ***10)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n+1}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; ***12)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$; ***13)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{2n-1}}{3^{2n}(3n+2)}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{4n-3}$; ***15)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2(x+4)^n}{2n^2-3}$; ***16)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+3x)^n$;

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; ***18)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5-2x)^n}{2n+1}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+1)^n$; ***20)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}(2-x)^n$.

Р е ш е н и е п. 1. Данный ряд является степенным, причем

$$c_n = \frac{1}{n}, \quad x_0 = 0.$$

Сначала найдем радиус сходимости по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Имеем: $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \frac{n+1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, интервал сходимости

$$(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1).$$

Осталось исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится (он является гармоническим рядом).

Если $x = -1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница (причем условно).

Значит, область сходимости исходного ряда $[-1, 1)$.

Р е ш е н и е п. 6. Данный ряд является степенным, причем

$$c_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad x_0 = 0.$$

Сначала найдем радиус сходимости по формуле

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Получим:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, $R = 1$ и интервал сходимости

$$(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1).$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Этот ряд расходится по следствию из необходимого условия сходимости, так как
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Если $x=-1$, то
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$
Этот ряд также расходится (аналогично).

Значит, область сходимости исходного ряда $(-1,1)$.

482. Разложить функции в ряд Маклорена и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x)=2^x$; ***2)*** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$; ***3)*** $f(x)=x^2e^{-3x}$;

4) $f(x)=\sin x^2$; ***5)*** $f(x)=\sin^2 x$; ***6)*** $f(x)=x^2\cos 3x$;

7) $f(x)=\ln(1+2x^2)$; ***8)*** $f(x)=\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; ***9)*** $f(x)=\ln(5+2x)$;

10) $f(x)=\ln(x^2+5x+6)$; ***11)*** $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$;

12) $f(x)=\ln(6+x-x^2)$; ***13)*** $f(x)=\dfrac{1}{3+2x}$;

14) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$; ***15)*** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$;

16) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$; ***17)*** $f(x)=\sqrt[3]{27+x}$.

Р е ш е н и е п. 1. Воспользуемся разложением
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Преобразуем исходную функцию. Поскольку $2=e^{\ln 2}$, то
$$f(x)=\left(e^{\ln 2}\right)^x=e^{\ln 2\cdot x}.$$

Теперь подставим в разложение функции e^x вместо x выражение $\ln 2\cdot x$. Тогда получим:
$$2^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2\cdot x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n.$$
Очевидно, что это разложение справедливо при $x\in(-\infty,\infty)$.

Р е ш е н и е п. 6. Воспользуемся разложением

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Теперь подставим в разложение функции $\cos x$ вместо x выражение $3x$. Тогда получим:

$$\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (3x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Осталось умножить последнее равенство на x^2:

$$x^2 \cos 3x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n+2}.$$

Очевидно, что это разложение справедливо при $x \in (-\infty, \infty)$.

483. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1;$ ***2)*** $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x_0 = -1;$

3) $f(x) = e^x,\ x_0 = -2;$ ***4)*** $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x_0 = 2;$

5) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4;$ ***6)*** $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

7) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2+2x+2},\ x_0 = -1.$

Р е ш е н и е п. 1. Вычислим значение функции и ее производных при $x = 1$:

$$f(1) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!,$$

. . . .

Ряд Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Поэтому в данном случае

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \\ + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Несложно выяснить, что этот ряд сходится при $x \in (0, 2]$.

Для решения данной задачи можно поступить и иначе. Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

Преобразуем исходную функцию:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)).$$

Теперь подставим в разложение функции $\ln(1+x)$ вместо x разность $x-1$. Получим:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится при $-1 < x - 1 \leqslant 1$, т.е. при $0 < x \leqslant 2$.

Ответы

Глава 1. Линейная алгебра

1. ***2)*** $\begin{pmatrix} -4 & -18 & 16 \\ -26 & -8 & 8 \\ -2 & 6 & -18 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ -6 & -12 & 2 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 24 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 23 & 6 & -2 \\ -47 & -24 & 12 \\ 1 & 12 & 16 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} -8 & -6 & 14 \\ -22 & -12 & 8 \\ 2 & 2 & 24 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} -14 & -6 & -34 \\ -37 & 5 & 15 \\ 14 & -21 & -22 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -27 & 18 & 0 \\ 18 & -21 & -15 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; ***9)*** $\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 2 & -2 \\ -22 & 4 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} -43 & 6 & 43 \\ -14 & 6 & 5 \\ 16 & -10 & -8 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 8 & 33 \\ 10 & 9 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\begin{pmatrix} 28 & 12 & -13 \\ 11 & 18 & 0 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\begin{pmatrix} -1 & -30 & -32 \\ -14 & -10 & -20 \\ -41 & 2 & -29 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 43 & -24 & -22 \\ -1 & -13 & 1 \end{pmatrix}$; ***15)*** $\begin{pmatrix} 45 & -30 & -24 \\ 33 & -22 & 21 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} 41 & -30 & 31 \\ 34 & 0 & -10 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 22 & -24 & 17 \\ -13 & -10 & 0 \\ 5 & -8 & -25 \end{pmatrix}$; ***18)*** $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 25 \\ 22 & 14 & 11 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} 15 & 45 & 0 \\ -30 & -5 & -20 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & -14 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$; ***21)*** $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$.

2. ***2)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & -10 \\ -22 & -54 & -8 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 9 & 30 & 0 \\ -22 & -5 & -20 \\ -5 & -5 & -35 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 14 & -3 & 0 & -14 \\ 6 & -44 & -26 & -9 \end{pmatrix}$; ***5)*** $\begin{pmatrix} 8 & -14 & -14 & 2 \\ -8 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -5 & -13 & 4 & 15 \\ -20 & 16 & 12 & -17 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} -4 & -10 & -22 & 26 \\ 3 & 0 & -12 & -14 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 14 & -10 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 11 & 24 \\ 15 & 23 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} -38 & 6 & -20 \\ 2 & 21 & 2 \\ 45 & 0 & 24 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} -17 & 16 \\ -7 & -30 \\ 9 & -19 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} -19 & -10 \\ 8 & -18 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\begin{pmatrix} 13 & -5 & 23 & 11 \\ -5 & -11 & -7 & -19 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} 3 & -34 & 13 \\ -8 & 28 & -18 \\ 17 & 28 & 15 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 24 \\ 15 & 28 & -6 \\ -7 & 17 & 27 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -15 \\ 5 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; ***17)*** $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -4 \\ 5 & 4 & 8 \\ -6 & -9 & -11 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} -1 & -29 & 17 \\ -12 & 46 & -26 \\ 12 & -41 & 23 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 19 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} -4 & 12 & -24 \\ -2 & 6 & -12 \\ -2 & 1 & -19 \end{pmatrix}$.

3. ***2)*** $\begin{pmatrix} -4 & -20 & -20 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} 12 & -10 & -4 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} 17 & -15 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} -20 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 23 \\ -15 \end{pmatrix}$; ***9)*** $\begin{pmatrix} -18 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} -3 \\ -17 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 8 & 10 & -10 & -4 \\ 16 & 20 & -20 & -8 \\ 4 & 5 & -5 & -2 \\ -8 & -10 & 10 & 4 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -20 & 10 \\ 12 & -6 & 12 & -6 \\ -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

4. ***1)*** $AB = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -3 & -20 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}$;

2) $AB = BA = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$; ***3)*** $AB = \begin{pmatrix} -27 & 33 \\ 17 & -29 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -17 & 21 \\ 21 & -39 \end{pmatrix}$;

4) $AB = \begin{pmatrix} -84 & 12 \\ 32 & -24 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -72 & -32 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$; ***5)*** $AB = BA = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

6) $AB = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 12 & -17 \end{pmatrix}$; ***7)*** $AB = \begin{pmatrix} -3 & -50 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 16 & -14 \end{pmatrix}$;

8) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -43 \\ -22 & -52 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ -3 & -66 \end{pmatrix}$; ***9)*** $AB = \begin{pmatrix} 54 & -9 \\ -6 & 28 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 55 & 3 \\ 9 & 27 \end{pmatrix}$;

10) $AB = \begin{pmatrix} -9 & -24 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ 26 & 21 \end{pmatrix}$; ***11)*** $AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$;

12) $AB = \begin{pmatrix} 18 & -10 \\ -2 & -14 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 18 & -1 \\ -20 & -14 \end{pmatrix}$;

13) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 10 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -21 & -13 & 7 \\ 8 & 11 & -3 \\ -18 & -14 & 6 \end{pmatrix}$;

14) $AB = \begin{pmatrix} -21 & 6 & -3 \\ 9 & 6 & 7 \\ 31 & -10 & 5 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

15) $AB = BA = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

16) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -20 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -3 & -15 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -3 & -13 & 0 \end{pmatrix}$;

17) $AB = \begin{pmatrix} -12 & -6 & -15 \\ -12 & -12 & -5 \\ 16 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 12 \\ -9 & -12 & 3 \\ -20 & 0 & 25 \end{pmatrix}$.

5. 2) $\begin{pmatrix} 24 & 5 \\ -16 & -15 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 18 & -71 \end{pmatrix}$; **5)** $\begin{pmatrix} -16 & 16 \\ -88 & -12 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 60 & -25 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; **7)** $\begin{pmatrix} 18 & -23 \\ 18 & 43 \end{pmatrix}$; **8)** $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$; **9)** $\begin{pmatrix} -48 & -62 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} -30 & 74 \\ -50 & 70 \end{pmatrix}$; **11)** $\begin{pmatrix} 46 & 67 & 60 \\ 23 & 44 & 30 \\ -30 & -50 & -48 \end{pmatrix}$; **12)** $\begin{pmatrix} 48 & -12 & -3 \\ -2 & 29 & -4 \\ 48 & -2 & -5 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 6 & 38 & 5 \\ 12 & -34 & -15 \\ -15 & 48 & 20 \end{pmatrix}$; **14)** $\begin{pmatrix} 48 & -12 & 41 \\ 24 & 17 & 18 \\ 48 & 29 & 43 \end{pmatrix}$; **15)** $\begin{pmatrix} 40 & 38 & 45 \\ 68 & 76 & 90 \\ -4 & -74 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 42 & 74 & -10 \\ -30 & -41 & 18 \end{pmatrix}$; **17)** $\begin{pmatrix} 12 & -23 & 24 \\ 0 & -13 & 6 \\ 24 & 30 & 2 \end{pmatrix}$; **18)** $\begin{pmatrix} -78 & 72 & -7 \\ -51 & 33 & -6 \\ 12 & -96 & -34 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 87 & -96 & 81 \\ 0 & 9 & 18 \\ -69 & 62 & -87 \end{pmatrix}$.

6. 1) $\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 69 & -80 \\ -40 & 49 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} 173 & 35 \\ -35 & -142 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} 113 & 84 \\ 42 & -13 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 104 & 0 \\ 50 & 4 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} 38 & 19 \\ -19 & 0 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\begin{pmatrix} -58 & -32 & 112 \\ -48 & -26 & 8 \\ 0 & 0 & -106 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} -8 & -73 & 3 \\ 0 & 61 & 0 \\ 9 & -17 & -11 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -58 & -63 & 40 \\ 56 & 20 & 97 \end{pmatrix}$; ***15)*** $\begin{pmatrix} 90 & 42 & -8 \\ 51 & -28 & -13 \\ 87 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} -70 & 0 & -9 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & -76 \end{pmatrix}$; ***17)*** $\begin{pmatrix} 154 & 0 & 0 \\ 82 & 3 & -1 \\ 104 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; ***18)*** $\begin{pmatrix} 14 & 10 & 7 \\ 12 & 33 & 18 \\ -3 & 12 & 12 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 6 & 17 & 0 \\ 96 & 74 & 133 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} 48 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. ***2)*** $AA^T = \begin{pmatrix} 39 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & -12 & 12 \\ -8 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ -12 & 6 & 3 & 9 & -9 \\ 12 & -6 & -3 & -9 & 9 \end{pmatrix}$;

3) $AA^T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 47 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 6 & 8 \\ 15 & 25 & 15 & 10 \\ 6 & 15 & 18 & 0 \\ 8 & 10 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

4) $AA^T = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 5 & -5 \\ 2 & -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $AA^T = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -10 & 31 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -5 \\ -5 & 25 & -5 & 10 \\ 4 & -5 & 10 & -11 \\ -5 & 10 & -11 & 13 \end{pmatrix}$;

8) $AA^T = \begin{pmatrix} 41 & 37 & 22 \\ 37 & 34 & 19 \\ 22 & 19 & 13 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 34 & 41 \\ 41 & 54 \end{pmatrix}$;

9) $AA^T = \begin{pmatrix} 20 & -26 & -8 \\ -26 & 41 & 14 \\ -8 & 14 & 5 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 33 & -30 \\ -30 & 33 \end{pmatrix}$;

10) $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -4 & 20 & 10 \\ -3 & 10 & 10 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

11) $AA^T = \begin{pmatrix} 44 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 11 & 0 \\ -13 & 29 & -11 & 11 \\ 11 & -11 & 13 & 3 \\ 0 & 11 & 3 & 10 \end{pmatrix}$;

12) $AA^T = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 41 & -27 \\ -3 & -27 & 18 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 34 & -23 \\ -23 & 38 \end{pmatrix}$.

8. ***2)*** 5; ***3)*** 13; ***4)*** -16; ***5)*** -30; ***6)*** -57; ***7)*** 10; ***8)*** -24; ***9)*** -10; ***10)*** 2; ***11)*** -44; ***12)*** -42; ***13)*** -33; ***14)*** 0; ***15)*** 16; ***16)*** -61; ***17)*** -26; ***18)*** -55; ***19)*** -6; ***20)*** -6; ***21)*** 0; ***22)*** $ad-bc$; ***23)*** 1; ***24)*** $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$.

9. ***2)*** $1; 2$; ***3)*** $1; 5$; ***4)*** $(2,-3)$; ***5)*** $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; ***6)*** $\dfrac{9}{2}$; ***7)*** 5; ***8)*** $1; -\dfrac{1}{2}$; ***9)*** $(2,-1)$; ***10)*** $(-1,2)$; ***11)*** $\dfrac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$.

10. ***2)*** -98; ***3)*** -27; ***4)*** -5; ***5)*** -26; ***6)*** -18; ***7)*** -45; ***8)*** -27; ***9)*** -27; ***10)*** -55; ***11)*** -1; ***12)*** 97; ***13)*** 62; ***14)*** 102; ***15)*** -21; ***16)*** -30; ***17)*** 40; ***18)*** -100; ***19)*** 88; ***20)*** -14; ***21)*** 0; ***22)*** $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$; ***23)*** 0; ***24)*** 0; ***25)*** 0; ***26)*** $-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; ***27)*** 0; ***28)*** 0; ***29)*** 1.

11. ***2)*** $x\geqslant -\dfrac{41}{21}$; ***3)*** 2; ***4)*** -3, $-\dfrac{5}{2}$; ***5)*** -4, 1, 2; ***6)*** $x\leqslant -\dfrac{36}{5}$; ***7)*** $-\dfrac{5}{3}$, 2; ***8)*** 1; ***9)*** $\left(-\sqrt{23},\sqrt{23}\right)$.

12. ***2)*** 106; ***3)*** -30; ***4)*** -55; ***5)*** -30; ***6)*** 156; ***7)*** -54; ***8)*** 9; ***9)*** -52; ***10)*** 72; ***11)*** -35; ***12)*** 100; ***13)*** -44; ***14)*** -57; ***15)*** 32; ***16)*** 60; ***17)*** -16; ***18)*** 46; ***19)*** -18; ***20)*** -92; ***21)*** $3x^3+9x$; ***22)*** $9a+12b-9c+3d$; ***23)*** 0; ***24)*** $4x+4y+4z-20t$; ***25)*** $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

13. ***2)*** -4; ***3)*** 168; ***4)*** 42; ***5)*** $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$; ***6)*** -99; ***7)*** 0.

14. ***2)*** $\prod_{j<k}(x_k-x_j)$. У к а з а н и е. Данный определитель именуется *определителем Вандермонда.* Для его вычисления из каждой строки, начиная с последней, следует поочередно вычесть предыдущую строку, умноженную на x_1, а затем разложить полученный определитель по первому столбцу; ***3)*** $2^{n-2}(n+1)$; ***4)*** $(-1)^{n-1}3^n$; ***5)*** a^n-b^n; ***6)*** $(a_0+a_1+\ldots+a_n)x^n$.

15. ***2)*** $\begin{pmatrix} 13/6 & 5/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\begin{pmatrix} -38/3 & 5/3 \\ 7/3 & -1/3 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\begin{pmatrix} -23/12 & 5/6 \\ 5/4 & -1/2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -4/3 & -1 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1/10 \\ -1 & -1/5 \end{pmatrix}$; ***8)*** $\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 7/12 & -1/4 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} 11/3 & -2/3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$; ***11)*** $\begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; ***14)*** $\begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} -11/2 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; ***17)*** $\begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 13/24 & 3/8 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$; ***19)*** $\begin{pmatrix} -7/6 & 5/12 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

16. ***2)*** $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -24 & 6 & -12 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; ***3)*** $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \\ -1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$; ***4)*** $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$;

5) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***6)*** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -20 & -8 & 8 \\ -5 & -3 & 2 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; ***7)*** $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -15 & 15 \\ 15 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 5 \\ -20 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***9)*** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ***10)*** $\begin{pmatrix} -15 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

11) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ***12)*** $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; ***13)*** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -8 & -3 \\ -1 & -12 & -3 \\ -4 & -32 & -11 \end{pmatrix}$;

14) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 12 & -5 \end{pmatrix}$; ***15)*** $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 6 & -9 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; ***16)*** $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$;

17) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & -12 & 6 \\ -9 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; ***18)*** $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 4 & -25 & -12 \\ -8 & 30 & 22 \end{pmatrix}$;

19) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -18 & -11 \end{pmatrix}$; ***20)*** $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 18 \end{pmatrix}$.

17. ***1)*** $\dfrac{1}{66}\begin{pmatrix} 21 & -6 & -9 & -39 \\ -1 & -28 & 35 & 27 \\ 23 & -16 & -13 & -27 \\ -13 & 32 & -7 & 21 \end{pmatrix}$; ***2)*** $\dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. ***1)*** $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; ***2)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; ***3)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

4) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; ***5)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; ***6)*** $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; ***7)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

8) $X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; ***10)*** $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; ***11)*** $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

12) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; ***13)*** $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; ***14)*** $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

15) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; ***16)*** $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***17)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

18) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***19)*** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; ***20)*** $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$;

21) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; ***22)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; ***23)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

19. ***1)*** 1; ***2)*** 1; ***3)*** 2; ***4)*** 2; ***5)*** 2; ***6)*** 2; ***7)*** 2; ***8)*** 1; ***9)*** 2; ***10)*** 2; ***11)*** 3; ***12)*** 2; ***13)*** 2; ***14)*** 2; ***15)*** 2; ***16)*** 3; ***17)*** 3; ***18)*** 3; ***19)*** 2; ***20)*** 3; ***21)*** 2; ***22)*** 3; ***23)*** 4; ***24)*** 2; ***25)*** 2; ***26)*** 4; ***27)*** 2; ***28)*** 2; ***29)*** 3; ***30)*** 3; ***31)*** 2; ***32)*** 2; ***34)*** 2; ***35)*** 4; ***36)*** 4; ***37)*** 3.

20. ***2)*** $x = 1,\ y = -2$; ***3)*** $x = -3,\ y = -2$; ***4)*** $x = 3,\ y = -5$; ***5)*** $x = 5,\ y = 1$; ***6)*** $x = 5,\ y = -5$; ***7)*** $x = -1,\ y = 1$; ***8)*** $x = -2,\ y = -2$; ***9)*** $x = 1,\ y = 1$; ***10)*** $x = 4,\ y = -2$; ***12)*** $x = 0,\ y = 1,\ z = -1$; ***13)*** $x = -1,\ y = 1,\ z = -1$; ***14)*** $x = 1,\ y = -2,\ z = 0$; ***15)*** $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -5,\ x_4 = 2$; ***16)*** $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2$; ***17)*** $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$; ***18)*** $x = -1,\ y = -2,\ z = 0$; ***19)*** $x = 0,\ y = 1,\ z = -1$; ***20)*** $x = -1,\ y = 1,\ z = -1$; ***21)*** $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$; ***22)*** $x = -1,\ y = -2,\ z = 0$; ***23)*** $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 3$; ***24)*** $x_1 = -1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2$; ***25)*** $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$; ***26)*** $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$; ***27)*** $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$; ***28)*** $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 3$;

29) $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=-3,\ x_4=3$; ***30)*** $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=-2,\ x_4=-2$;

31) $x_i=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b-a_i}{a_i-a_j}\prod_{\gamma=i+1}^{n}\frac{a_\gamma-b}{a_\gamma-a_i}$, $i=\overline{1,n}$. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что определитель системы — это определитель Вандермонда, рассмотренный в задаче 14.2.

21. ***1)*** $x=2,\ y=1$; ***2)*** $x=1,\ y=1$; ***3)*** $x=1,\ y=-5$; ***4)*** $x=4,\ y=-5$;
5) $x=4,\ y=-3$; ***6)*** $x=4,\ y=-1$; ***7)*** $x=5,\ y=1$;
8) $x=3,\ y=-5$; ***9)*** $x=5,\ y=-2$; ***10)*** $x=1,\ y=2$;
11) $x=\alpha,\ y=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; ***12)*** система несовместна;
13) $x=-1,\ y=4,\ z=3$; ***14)*** $x=-2,\ y=2,\ z=1$; ***15)*** $x=3,\ y=4,\ z=-1$;
16) $x=4,\ y=-2,\ z=2$; ***19)*** $x=-1,\ y=3,\ z=4$; ***20)*** $x=4,\ y=4,\ z=-1$;
21) $x=3\alpha-1,\ y=2\alpha+1,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; ***22)*** $x=-1,\ y=1,\ z=-1$;
23) $x=-2\alpha-1,\ y=2\alpha+1,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; ***24)*** система несовместна;
25) $x=-1,\ y=-2,\ z=-1$; ***26)*** $x=0,\ y=1,\ z=-1$;
27) система несовместна; ***28)*** $x=-1,\ y=-2,\ z=-1$;
29) система несовместна; ***30)*** $x=3\alpha-3,\ y=-\alpha+1,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;
31) $x=-1,\ y=-2,\ z=0$; ***32)*** $x=3\alpha-3,\ y=2\alpha+1,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;
33) система несовместна; ***34)*** $x=-2\alpha-3,\ y=2\alpha+1,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;
36) $x=0,\ y=1,\ z=-1$; ***37)*** $x=0,\ y=-3,\ z=-1$;
38) $x=0,\ y=-2,\ z=-1$; ***39)*** $x=3,\ y=-3,\ z=0$;
40) $x_1=-3,\ x_2=5,\ x_3=-3,\ x_4=4$; ***41)*** $x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=2,\ x_4=3$;
42) $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=2,\ x_4=1$; ***43)*** $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=4$;
44) $x_1=1,\ x_2=5,\ x_3=-3,\ x_4=2$; ***45)*** $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=-2,\ x_4=1$;
46) $x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=-5,\ x_4=4$; ***47)*** $x_1=1,\ x_2=4,\ x_3=-3,\ x_4=2$;
48) $x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=3-2\alpha,\ x_4=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;
49) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=4$;
51) $x_1=\alpha-\dfrac{53}{18}\beta+\dfrac{20}{9},\ x_2=-\dfrac{5}{2}\alpha+\dfrac{5}{6}\beta-\dfrac{5}{3},\ x_3=\dfrac{2}{9}\beta-\dfrac{1}{9},\ x_4=\alpha,\ x_5=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
52) $x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma,\ x_4=\alpha+2\beta-\gamma,\ x_5=-\alpha+\beta+\gamma,\ x_6=-\alpha+3\beta+2\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$;
53) $x_k=\dfrac{n}{2}-k+1,\ k=\overline{1,n}$.

22. ***1)*** Общее решение: $x_1=2-\alpha+2\beta,\ x_2=\alpha,\ x_3=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$; частное решение: $x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=0$;
2) общее решение: $x_1=4+3\alpha,\ x_2=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; частное решение: $x_1=4,\ x_2=0$;
3) система несовместна;
4) общее решение: $x_1=3+\alpha+2\beta,\ x_2=\alpha,\ x_3=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$; частное решение: $x_1=3,\ x_2=0,\ x_3=0$;
5) общее решение: $x_1=5+3\alpha,\ x_2=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; частное решение: $x_1=5,\ x_2=0$;

6) общее решение: $x_1 = \beta$, $x_2 = \gamma$, $x_3 = -3 - 2\alpha + 3\beta + 3\gamma$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = 5 + \alpha + \beta + 3\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$;

7) система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$;

8) система несовместна; ***9)*** система несовместна;

10) общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = 1 + \alpha$, $x_3 = -3 + 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$;

11) общее решение: $x_1 = 5+\alpha-2\beta-2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 3-\alpha+3\beta+3\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$;

12) система несовместна;

13) общее решение: $x_1 = -1 + 2\alpha$, $x_2 = -2 + 3\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$;

14) система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$;

15) общее решение: $x_1 = -3 - \alpha + \beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = 2 + 3\alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$;

16) система несовместна;

18) общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -2 + 3\alpha$, $x_3 = -2 - \alpha$, $x_4 = 2 - 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$;

19) система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$;

20) общее решение: $x_1 = 3 - \alpha$, $x_2 = -3 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 5 + 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$;

21) система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$;

22) общее решение: $x_1 = -1 + \alpha - 2\beta$, $x_2 = -1 + \alpha - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 3 - 2\alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$;

23) общее решение: $x_1 = 3 + \alpha - 2\beta$, $x_2 = -1 + 2\alpha + 2\beta$, $x_3 = 5 - \alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$;

24) система несовместна; ***25)*** система несовместна;

26) система несовместна; ***27)*** система несовместна;

28) система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$;

29) общее решение: $x_1 = -2 - \alpha$, $x_2 = -2 - \alpha$, $x_3 = -2 - \alpha$, $x_4 = 1 + 2\alpha$, $x_5 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$;

30) общее решение: $x_1 = 1 + \alpha$, $x_2 = 2 + \alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -1 - \alpha$, $x_5 = -2 - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$, $x_5 = -2$;

31) система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2$;

32) система несовместна.

23. ***1)*** Система совместна при любом значении λ; при $\lambda = 8$ общее решение имеет вид $(-2\alpha + 2\beta + 4, -2\alpha + 3, \alpha, \beta)$, а при $\lambda \neq 8$ — вид $(-2\alpha + 4, -2\alpha + 3, \alpha, 0)$;

2) при $\lambda \neq 3$ система несовместна; при $\lambda = 3$ она совместна, и общее решение имеет вид
$$\left(\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}, \alpha\right);$$

3) при $\lambda = 1$ система несовместна; при $\lambda \neq 1$ она совместна, и общее решение имеет вид
$$\left(\alpha, -\frac{9}{8}\alpha + \frac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda}, \frac{5}{\lambda - 1}, \frac{1}{4}\alpha + \frac{5}{4 - 4\lambda}\right);$$

4) при $\lambda \neq -3$ система несовместна; при $\lambda = -3$ она совместна, и общее решение имеет вид $(9, -\alpha - 13, \alpha)$;

5) при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ она совместна, и общее решение имеет вид
$$\left(\frac{5}{8}\alpha + 1, \alpha, -\frac{7}{4}\alpha\right);$$

6) при $\lambda = 0$ система несовместна; при $\lambda \neq 0$ она имеет единственное решение:
$$\left(-3 + \frac{3}{\lambda}, 2 - \frac{6}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}\right).$$

24. ***2)*** $200, 450, 500$; ***3)*** $200, 300, 250$; ***4)*** $350, 400, 250$; ***5)*** $450, 250, 200$;
6) $300, 300, 450$; ***7)*** $300, 250, 200$; ***8)*** $450, 250, 450$; ***9)*** $350, 250, 200$;
10) $250, 400, 500$; ***11)*** $350, 500, 250$; ***12)*** $300, 250, 500$; ***13)*** $400, 300, 450$;
14) $200, 500, 500$; ***15)*** $250, 500, 300$; ***16)*** $350, 300, 400$; ***17)*** $500, 300, 350$;
18) $500, 250, 450$; ***19)*** $300, 400, 400$; ***20)*** $300, 350, 300$; ***21)*** $450, 350, 500$;
22) $500, 250, 250$; ***23)*** $200, 350, 400$; ***24)*** $500, 200, 350$; ***25)*** $500, 350, 450$;
26) $250, 250, 450$; ***27)*** $400, 400, 400$; ***28)*** $450, 300, 300$;
29) $500, 400, 450$; ***30)*** $450, 200, 300$.

25. ***2)*** $X = (700, 700)$; ***3)*** $X = (800, 600)$; ***4)*** $X = (500, 800)$; ***5)*** $X = (400, 600)$;
6) $X = (900, 700)$; ***7)*** $X = (700, 500)$; ***8)*** $X = (800, 800)$; ***9)*** $X = (400, 800)$;
10) $X = (500, 500)$; ***11)*** $X = (400, 500)$; ***12)*** $X = (400, 500)$; ***13)*** $X = (800, 800)$;
14) $X = (500, 600)$; ***15)*** $X = (600, 600)$; ***16)*** $X = (700, 600)$; ***17)*** $X = (500, 500)$;
18) $X = (800, 800)$; ***19)*** $X = (800, 600)$; ***20)*** $X = (600, 600)$.

26. ***1)*** $X = (500, 700, 700)$; ***2)*** $X = (700, 700, 500)$; ***3)*** $X = (800, 600, 700)$;
4) $X = (600, 700, 600)$; ***5)*** $X = (800, 600, 800)$; ***6)*** $X = (400, 600, 700)$;
7) $X = (900, 500, 600)$; ***8)*** $X = (700, 500, 700)$; ***9)*** $X = (700, 600, 800)$;
10) $X = (900, 500, 700)$; ***11)*** $X = (600, 800, 500)$; ***12)*** $X = (400, 500, 800)$;
13) $X = (400, 800, 500)$; ***14)*** $X = (700, 600, 500)$; ***15)*** $X = (500, 700, 800)$;
16) $X = (400, 600, 500)$; ***17)*** $X = (800, 800, 800)$; ***18)*** $X = (400, 700, 600)$.

27. ***2)*** $X = (400, 500, 600, 600)$; ***3)*** $X = (900, 600, 800, 700)$;
4) $X = (800, 600, 800, 800)$; ***5)*** $X = (500, 800, 800, 500)$;

6) $X = (800, 600, 500, 500)$; ***7)*** $X = (700, 500, 800, 600)$;
8) $X = (900, 600, 800, 700)$; ***9)*** $X = (800, 500, 800, 600)$;
10) $X = (700, 500, 600, 800)$; ***11)*** $X = (800, 700, 500, 800)$;
12) $X = (700, 600, 700, 600)$; ***13)*** $X = (600, 600, 700, 500)$;
14) $X = (500, 600, 500, 600)$; ***15)*** $X = (900, 800, 800, 600)$.

29. ***1)*** $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$; ***2)*** $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; ***3)*** $\mathbf{a} \downarrow\uparrow \mathbf{b}$; ***4)*** угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый; ***5)*** $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$; ***6)*** $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| \geqslant |\mathbf{b}|$. **30.** $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

32. $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 5)$, $\overrightarrow{BA} = (3, 0, -5)$. **33.** 5, 5.

35. Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника.

37. $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. **38.** $(6, -1, 2)$, $(6, 3, 9)$, $(0, 4, 7)$, $\left(1, -\dfrac{3}{2}, -2\right)$. **39.** 6, $\sqrt{8}$.

41. 0, $\dfrac{5}{7}$. **42.** $\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\beta = -\dfrac{5}{2}$. **43.** $\dfrac{5}{3}(\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

44. ***1)*** 3; ***2)*** $-5\sqrt{2}$; ***3)*** 40; ***4)*** -12; ***5)*** 0.

45. ***1)*** 5; ***2)*** 4; ***3)*** 19; ***5)*** -28. **47.** $-\dfrac{3}{2}$. **48.** $\dfrac{\pi}{3}$. **49.** -5.

50. $\sqrt{5 - \sqrt{8}}$. **51.** -61. **52.** 40. **53.** 15, $\sqrt{593}$.

54. ***1)*** $\dfrac{3}{4}$; ***2)*** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; ***3)*** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **55.** $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = -\dfrac{7\sqrt{7}}{4\sqrt{13}}$. **56.** 0. **57.** 107.

59. ***1)*** -10; ***2)*** 0; ***3)*** 1; ***4)*** $\sqrt{3} - 2$.

60. ***1)*** $\dfrac{\pi}{4}$; ***2)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***3)*** $\dfrac{\pi}{3}$; ***4)*** 2°; ***5)*** $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$. **61.** -3.

62. ***1)*** 91; ***2)*** $(26, 26)$.

63. ***1)*** 84; ***2)*** $(66, 46, 88)$; ***3)*** 32; ***4)*** 64; ***5)*** 50; ***6)*** 56; ***7)*** $\sqrt{14}$.

66. 30°, 60°, 90°. **68.** $(-4, -6, 12)$. **69.** $(2, 3, 7)$. **70.** $(0, 1, 2)$. **71.** $\left(1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

72. $(0, 0, 0, 0)$; система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима. **73.** $(0, 4, 3)$.

74. ***2)*** Нет; ***3)*** нет; ***4)*** нет; ***5)*** да; ***6)*** да; ***7)*** да; ***8)*** нет; ***9)*** да;
10) да; ***11)*** да; ***12)*** нет; ***13)*** нет; ***14)*** нет; ***15)*** нет; ***16)*** да;
17) да; ***18)*** да; ***19)*** нет; ***20)*** нет; ***21)*** да; ***22)*** да; ***23)*** нет; ***24)*** нет;
25) нет; ***26)*** да; ***27)*** нет; ***28)*** да; ***29)*** да; ***30)*** да.

75. ***2)*** $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$; ***3)*** $2, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$; ***4)*** $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$; ***5)*** $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$;
6) $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; ***7)*** $2, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$; ***8)*** $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$; ***9)*** $2, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$;
10) $3, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

76. ***2)*** $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$; ***3)*** $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$; ***4)*** $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0)$;

5) $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$; ***6)*** $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$;
7) $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$; ***8)*** $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$;
9) $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***10)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***11)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$;
12) $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***13)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***14)*** $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$;
15) $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$; ***16)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***17)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$;
18) $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$; ***19)*** $\mathbf{a}_4 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_5 = (0,0,1,0,0)$; ***20)*** $\mathbf{a}_4 = (0,0,1,0)$.

77. 1) $(3,5)$; ***2)*** $(3,2)$; ***3)*** $(3,-2)$; ***4)*** $(1,5)$; ***5)*** $(-2,-2)$; ***6)*** $(5,-2)$;
7) $(3,3)$; ***8)*** $(2,4)$; ***9)*** $(3,0)$; ***10)*** $(5,3)$; ***12)*** $(3,4,-2)$; ***13)*** $(3,-2,1)$;
14) $(2,4,-3)$; ***15)*** $(-1,2,-3)$; ***16)*** $(-1,1,-1)$; ***17)*** $(4,3,3)$; ***18)*** $(5,-3,-2)$;
19) $(4,5,1)$; ***20)*** $(3,-2,3)$; ***21)*** $(1,3,3,-3)$; ***22)*** $(-1,3,1,2)$; ***23)*** $(2,4,-2,-3)$;
24) $(-2,3,-2,-3)$; ***25)*** $(5,2,3,-2)$; ***26)*** $(5,-1,3,-2)$; ***27)*** $(2,1,-3,3)$;
28) $(3,2,-3,-4)$; ***29)*** $(3,-3,1,-1)$; ***30)*** $(4,3,-3,1)$.

78. 1) Общее решение: $x_1 = -2\alpha - 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-2,0,1,1)$, $(-2,1,2,0)$;

2) общее решение: $x_1 = \beta$, $x_2 = \gamma$, $x_3 = -\alpha - 2\beta - 2\gamma$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \alpha + 2\beta + 2\gamma$; базис подпространства решений: $(0,0,-1,1,1)$, $(1,0,-2,0,2)$, $(0,1,-2,0,2)$;

3) общее решение: $x_1 = -2\alpha + 3\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -2\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-2,0,-2,1)$, $(3,1,2,0)$;

4) общее решение: $x_1 = -\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -\alpha - 2\beta$, $x_4 = \beta$; базис подпространства решений: $(-1,1,-1,0)$, $(1,0,-2,1)$;

5) общее решение: $x_1 = 3\alpha + \beta + \gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha + \beta + \gamma$; базис подпространства решений: $(3,0,1,0,-1)$, $(1,1,0,0,1)$, $(1,0,0,1,1)$;

7) общее решение: $x_1 = -2\alpha + 2\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -\alpha + 3\beta$, $x_4 = \beta$; базис подпространства решений: $(-2,1,-1,0)$, $(2,0,3,1)$;

8) общее решение: $x_1 = 2\alpha - 2\beta + 3\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 2\alpha + \beta - \gamma$; базис подпространства решений: $(2,0,1,0,2)$, $(-2,1,0,0,1)$, $(3,0,0,1,-1)$;

9) общее решение: $x_1 = \alpha + 2\beta - 2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha - 2\beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1,0,1,0,-1)$, $(2,1,0,0,-2)$, $(-2,0,0,1,3)$;

10) общее решение: $x_1 = \alpha - 2\beta + 2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 3\alpha + \beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1,0,1,0,3)$, $(-2,1,0,0,1)$, $(2,0,0,1,3)$;

11) общее решение: $x_1 = \alpha - \beta - \gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha - 2\beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1,0,1,0,-1)$, $(-1,1,0,0,-2)$, $(-1,0,0,1,3)$;

12) общее решение: $x_1 = -\alpha + \beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 2\alpha + 3\beta$; базис подпространства решений: $(-1,-1,1,0,2)$, $(1,-2,0,1,3)$;

13) общее решение: $x_1 = 2\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha + 2\beta$, $x_3 = 2\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2,1,2,1,0)$, $(1,2,2,0,1)$;

14) общее решение: $x_1 = 3\alpha + 2\beta$, $x_2 = 3\alpha - 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = -2\alpha + 2\beta$; базис подпространства решений: $(3,3,1,0,-2)$, $(2,-2,0,1,2)$;

15) общее решение: $x_1 = -\alpha + 3\beta$, $x_2 = 3\alpha + 3\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 2\alpha + 2\beta$; базис подпространства решений: $(-1,3,1,0,2)$, $(3,3,0,1,2)$;

16) общее решение: $x_1 = -\alpha + 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -2\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-1, 0, -2, 1)$, $(2, 1, 2, 0)$;

17) общее решение: $x_1 = 3\alpha + 3\beta$, $x_2 = 2\alpha + 3\beta$, $x_3 = 3\alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(3, 2, 3, 1, 0)$, $(3, 3, 3, 0, 1)$;

18) общее решение: $x_1 = 2\alpha - 2\beta$, $x_2 = \alpha + 2\beta$, $x_3 = 3\alpha - 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, 1, 3, 1, 0)$, $(-2, 2, -2, 0, 1)$;

19) общее решение: $x_1 = 2\alpha - \beta$, $x_2 = -\alpha + 2\beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 1, 1, 0)$, $(-1, 2, 2, 0, 1)$;

20) общее решение: $x_1 = 2\alpha + \beta$, $x_2 = -\alpha + \beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 0, 1)$;

21) общее решение: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = -2\alpha$, $x_4 = 2\alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-1, -2, -2, 2, 1)$;

22) общее решение: $x_1 = 2\alpha - \beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$, $x_3 = 3\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 3, 1, 0)$ $(-1, -2, 2, 0, 1)$;

23) общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 2\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, -1, 1, 2, 2)$;

24) общее решение: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-1, 2, 1, -1, 2)$;

25) общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = -2\alpha$, $x_4 = -2\alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, -1, -2, -2, 1)$;

26) общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, 2, 1, -1, 2)$;

27) общее решение: $x_1 = -2\alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = -\alpha$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-2, -2, -1, 1, 1)$.

79. ***2)*** $\arccos\dfrac{3}{5}$. **82.** Да.

83. ***2)*** $\mathbf{b}_3 = (-1, 6, 8, 1)$, $\mathbf{b}_4 = (-37, -16, 7, 3)$;
3) $\mathbf{b}_3 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (-59, 64, -17, 6)$.

84. ***1)*** $\mathbf{b}_3 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$; ***2)*** $\mathbf{b}_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **85.** $(-2, 11, -1)$.

86. ***1)*** X_1, $\lambda_1 = 1$; ***2)*** X_1, $\lambda_1 = 1$; X_2, $\lambda_2 = -1$; ***3)*** X_1, $\lambda_1 = 1$; X_2, $\lambda_2 = 1$;
4) X_1, $\lambda_1 = 0$; X_2, $\lambda_2 = 0$.

87. ***2)*** $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 5\lambda - 12$; $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$;
3) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$;
4) $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 35\lambda + 24$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 8$;
5) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$;
6) $\lambda^4 - \lambda^3$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$;
7) $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 5$; $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 5$.

88. ***2)*** $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, -1)$;
3) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-3, -1)$; ***4)*** $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (-2, -1)$;

5) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1)$; $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{b}_1^2 = (2,1)$; ***6)*** $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{b}_1^1 = (-4,-1)$;
7) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-4,-1)$; ***8)*** $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-3,2)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,1)$;
9) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-5,2)$; $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{b}_1^2 = (2,-1)$; ***10)*** $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (5,2)$;
11) $\lambda_1 = -5$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,1)$;
12) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (3,-1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,1)$; ***13)*** $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-2,1)$;
14) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (5,-2)$; ***16)*** $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,0)$;
17) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,1,1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (1,-2,-2)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (1,0,1)$;
18) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,2)$;
19) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,-1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1,2,2)$; $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{b}_1^3 = (2,-3,-4)$;
20) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,1)$;
21) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,-2)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1,0,-1)$; $\lambda_2 = -3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-4,-2,-5)$;
22) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,1,1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (1,-2,-1)$;
23) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,0)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1,2,0)$;
24) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,0)$, $\mathbf{b}_2^1 = (3,5,1)$;
25) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,-1)$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1,-1,2)$;
26) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,0)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1,-3,-3)$;
27) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,-1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1,-2,-2)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,-3,-4)$;
28) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,-1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1,2,2)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (0,-1,-2)$;
29) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,1,2)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1,-2,-1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_2^1 = (1,0,4)$;
30) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,-1,-1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1,2,0,2)$, $\mathbf{b}_3^1 = (-2,-3,0,-4)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (4,6,1,8)$;
31) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (1,1,1,-1)$;
32) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,-1,-1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1,-2,-2,-2)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (-2,-3,-2,-4)$; $\lambda_4 = 1$, $\mathbf{b}_1^4 = (2,2,1,4)$;
33) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,1,-1,1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,-2,1,0)$;
34) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,1,1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1,0,0,2)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (0,-1,2,0)$, $\mathbf{b}_2^2 = (2,0,1,-4)$;
35) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,1,1,1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (0,0,-1,2)$;
36) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,1,1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (2,-2,1,4)$;
37) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,1,1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (0,-2,1,4)$;
38) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,-1,1,1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (0,1,0,-2)$, $\mathbf{b}_2^2 = (2,-2,1,2)$;
39) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,1,-1,-1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1,-2,2,0)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2,3,-2,0)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (2,-4,3,0)$;
40) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1,1,1,-1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (1,2,0,0)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (2,3,2,-2)$; $\lambda_4 = 2$, $\mathbf{b}_1^4 = (0,0,1,0)$;
41) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1,-1,-1,1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1,0,0,0)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (2,1,0,-2)$, $\mathbf{b}_2^2 = (-4,-2,-1,2)$;

42) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (2, -3, 4, 0)$, $\mathbf{b}_3^1 = (0, 0, 1, 0)$;

43) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, -3, 4, 2)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (-2, -4, 5, 4$.

Глава 2. Аналитическая геометрия

89. $5\sqrt{2}$. **91.** $(4, 0)$, $(-2, 0)$. **93.** Да, $\angle A$. **94.** 34. **95.** $(3, -2)$, 10. **96.** $(3, 2)$.

97. $\left(2, -\dfrac{7}{3}\right)$, $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$. **99.** $(6, -2)$, $(2, -4)$. **100.** $(-4, 3)$, $(2, 7)$, $(6, -1)$.

101. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Указание. Воспользоваться тем, что точка пересечения медиан делит медианы в отношении $2 : 1$.

102. $8\sqrt{2}/3$. Указание. Воспользоваться тем, что по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}$.

103. $\sqrt{82}$. **104.** $OC = 5$, $OD = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}$. **105.** 6. **107.** 20.

108. 26. **109.** $(3, 0)$, $(-7, 0)$.

110. ***1)*** $y = \sqrt{3}x - 6$; ***2)*** $y = 2$; ***4)*** $y = -x + 3$.

111. ***1)*** $\alpha = 0$, $\alpha = 1$; ***2)*** $\alpha = \dfrac{1}{3}$. **113.** $y = 0$, $y = 3$, $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$.

114. $x + y - 1 = 0$. **115.** $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.

116. ***2)*** $-x - 5y - 3 = 0$; ***3)*** $-4x - 3y + 32 = 0$; ***4)*** $-4x + 5y + 40 = 0$;
5) $-4x + y - 10 = 0$; ***6)*** $-4x + 3y + 32 = 0$; ***7)*** $-4x - 3y + 16 = 0$;
8) $-4x - 5y + 8 = 0$; ***9)*** $4x - y + 16 = 0$; ***10)*** $4x - y - 30 = 0$;
11) $x + y - 1 = 0$; ***12)*** $-2x - 3y - 18 = 0$; ***13)*** $-4x + 5y + 8 = 0$;
14) $-2x - 5y - 26 = 0$; ***15)*** $-2x - 3y + 26 = 0$.

117. ***1)*** $x = 3$, $y = 2$, $2x + y - 14 = 0$;
2) $2x + 3y - 8 = 0$, $2x - y = 0$, $2x - 3y + 16 = 0$. **118.** $k = -2/3$, $b = 5/3$.

119. $(0, 5/3)$. **120.** 1. **121.** $4x + y - 6 = 0$ или $3x + 2y - 7 = 0$.

122. $\operatorname{arctg} 2$. **123.** $y = \dfrac{12}{5}x - 13$.

124. ***2)*** $k = -7/2$, $b = 0$; ***3)*** $k = 0$, $b = 5/2$. **125.** 6, -9.

126. $(2, 0)$. **127.** $4x + 3y - 12 = 0$.

129. ***1)*** $\dfrac{x}{3/2} + \dfrac{y}{-3} = 1$; ***2)*** $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$; ***3)*** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1$; ***4)*** $\dfrac{x}{1/3} + \dfrac{y}{-1/2} = 1$.

130. $x + 2y - 8 = 0$. **131.** $x + y - 7 = 0$. **132.** $\alpha = 3$, $\beta = -4$.

133. $2x - y - 4 = 0$ или $x - 2y + 4 = 0$. **134.** $x + 2y - 8 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$.

135. $x + y + 4 = 0$ и $x - y - 8 = 0$. **136.** $(2, 0)$, $(0, -3)$ или $(-4, 0)$, $(0, 3/2)$.

137. 5. **138.** $C = \pm 90$.

139. ***2)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$; ***3)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***4)*** $\operatorname{arctg} 5$; ***5)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$; ***6)*** 0; ***7)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$; ***8)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***9)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***10)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{23}{15}$; ***11)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{17}{7}$; ***12)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$; ***13)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{9}$; ***14)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$; ***15)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{7}$; ***16)*** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$. **140.** $\angle A = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle B = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\angle C = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

141. $x + 3y - 6 = 0$. **142.** $x = 2 + y\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$.

145. ***1)*** 4 и -9; ***2)*** 8 и -2; ***3)*** $3/4$ и -12; ***4)*** $-3/2$ и $2/3$.

146. ***2)*** $x + 3y + 10 = 0$; ***3)*** $2x - y - 9 = 0$; ***4)*** $4x - 3y + 7 = 0$; ***5)*** $2x + 5y - 9 = 0$; ***6)*** $4x - 5y - 11 = 0$; ***7)*** $2x - 3y - 7 = 0$.

147. ***1)*** $2x - y + 4 = 0$; ***2)*** $3x - y + 5 = 0$.

148. ***2)*** $3x - y - 9 = 0$; ***3)*** $x + 4y - 7 = 0$; ***4)*** $3x + 2y + 1 = 0$; ***5)*** $x + 2y - 7 = 0$; ***6)*** $5x - y + 2 = 0$; ***7)*** $5x + 2y - 4 = 0$. **150.** 3 и 4. **151.** $7y - 5x - 4 = 0$.

152. $3x - 4y - 25 = 0$. **153.** $(2, 4)$. **154.** 1.

155. ***2)*** $3\sqrt{2}$; ***3)*** $4\sqrt{2}$; ***4)*** $\dfrac{33}{5}$; ***5)*** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$; ***6)*** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; ***7)*** $\dfrac{54\sqrt{17}}{17}$; ***8)*** $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$; ***9)*** $8\sqrt{2}$; ***10)*** $\dfrac{9}{5}$; ***11)*** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$; ***12)*** $\dfrac{27\sqrt{5}}{5}$; ***13)*** $\dfrac{26\sqrt{5}}{5}$; ***14)*** $12\sqrt{2}$; ***15)*** $\dfrac{21\sqrt{10}}{5}$. **156.** 5. **157.** $9/2$. **158.** 49. **159.** 4. **160.** $\pm 4/3$.

161. $x - y + 2 = 0$. **162.** $(5, 2)$. **163.** $(6, 6)$.

165. $5x + y - 3 = 0$. У к а з а н и е. Найти обе биссектрисы углов, образованных прямыми AB и AC. Затем выбрать ту, от которой точки B и C находятся по разные стороны.

166. ***1)*** Перпендикулярны; ***2)*** пересекаются; ***3)*** совпадают; ***4)*** параллельны; ***5)*** совпадают; ***6)*** перпендикулярны; ***7)*** пересекаются; ***8)*** параллельны; ***9)*** пересекаются; ***10)*** перпендикулярны.

167. ***2)*** $(-1, 6)$; ***3)*** $(-1, 4)$; ***4)*** $(3, 6)$; ***5)*** $(3, 6)$; ***6)*** $(3, -2)$; ***7)*** $(-5, 4)$; ***8)*** $(-1, 6)$; ***9)*** $(-1, -2)$; ***10)*** $(-1, 4)$.

168. ***1)*** $a \neq \pm 2$; ***2)*** $a = -2$; ***3)*** $a = 2$. **169.** $5x + 13 = 0$. **170.** $2x + y - 6 = 0$.

171. $7x + 7y - 6 = 0$. **172.** $x - y - 8 = 0$. **173.** $(-3, -1)$. **174.** $4x - 3y - 7 = 0$.

175. $5x - 3y - 2 = 0$, $7x + 6y + 4 = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. **176.** $\pm\sqrt{2}$. **177.** 13.

178. $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **179.** $(0, 2)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, 6)$.

180. $(-3, 1)$. **181.** $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

182. $3x + y - 14 = 0$. **183.** $y = 2x$, $x - 3y = 15$, $3x + y = 25$.

184. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **185.** $y - 2 = 0$.

186. $x + 2y + 2 = 0$. **187.** $5y + 2x - 28 = 0$, $11x - 10y - 4 = 0$, $y = x$.

188. $C(17, 12)$, $D(9, 3)$. **189.** $y = x + 3$.

190. ***2)*** 9 тыс. ден. ед. **191.** 800 ден. ед. **192.** 400 ден. ед.

193. $p(t) = 12\,000 - 1\,500t$, 1125 ден. ед.

194. Если $x < 4$, то выгоднее осуществлять перевозки автотранспортом, если $x > 4$ — водным.

197. $P(q) = 20q - 10\,000$, $q = 500$ — точка безубыточности. **198.** 70.

199. $R(q) = 500q$, $C(q) = 12\,000 + 300q$, 60.

200. ***3)*** 3 ден. ед. Указание. После введения субсидии s закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S = p + 3 - s$;

4) $(21/8, 27/4)$, доход государства $R = 189/64$. Указание. Если налог составляет 20%, то вся рыночная цена составляет 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. После введения данного налога закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S = 1{,}2(p + 3)$.

201. $(30, 260)$. **202.** $(10, 180)$.

203. ***1)*** $(50, 150)$; ***2)*** $(140/3, 470/3)$, $1400/3$; ***3)*** $2600/3$;

4) $(155/3, 440/3)$. **204.** 2 000 и 1 000 ден. ед. **205.** 4 000 и 6 000 ден. ед.

206. $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.

207. ***1)*** $(1, -3)$, $R = 1$; ***3)*** $(-7/3, 3)$, $R = 5$; ***4)*** $(2, -3)$, $R = 4$;

5) $(-1, 2/3)$, $R = \sqrt{19}/3$.

208. ***1)*** $x^2 + y^2 = 16$; ***2)*** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$; ***3)*** $x^2 + (y - 3)^2 = 25$;

4) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 8$; ***5)*** $(x - 1)^2 + y^2 = 25$; ***6)*** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;

7) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 20$, $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$; ***8)*** $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

209. $4y - x - 17 = 0$. **210.** $3y + 4x - 23 = 0$. **211.** $\dfrac{b^2}{1 + k^2} = R^2$.

212. $2x + y = 8$, $2y - x = 11$. **213.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

214. ***1)*** $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; ***3)*** $\dfrac{x^2}{10^2} + \dfrac{y^2}{8^2} = 1$; ***4)*** $\dfrac{x^2}{(5/2)^2} + \dfrac{y^2}{(3/2)^2} = 1$.

215. ***1)*** 4, 3, $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$, $\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $\varepsilon = \sqrt{7}/4$;

2) 2, 4, $\left(0, -2\sqrt{3}\right)$, $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$; ***3)*** 6, 3, $\left(-3\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(3\sqrt{3}, 0\right)$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$;

5) 5, 4, $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $\varepsilon = 0{,}6$. **216.** $\left(5/2, \pm 3\sqrt{3}/2\right)$.

217. Точки A, C, D лежат внутри эллипса, а точка B — вне его.

218. 16. **219.** $\sqrt{2}/2$.

220. ***1)*** $(-1, -2)$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{5{,}5}$; ***2)*** $(5, 2)$, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$. **221.** $\dfrac{(x - 2)^2}{100} + \dfrac{y^2}{91} = 1$.

222. ***1)*** Половина эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса $\dfrac{x^2}{203/9}+\dfrac{y^2}{7}=1$, расположенная в левой полуплоскости;

4) половина эллипса $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2/27}=1$, расположенная в верхней полуплоскости.

223. ***1)*** $(2,2)$, $(3/2,3)$; ***2)*** прямая проходит вне эллипса.

224. ***1)*** $|m|<5$; ***2)*** $|m|>5$;

3) $m=\pm5$. Указание. *Касательной к эллипсу* называется прямая, пересекающая эллипс в единственной точке.

225. ***1)*** $3x+2y-10\sqrt{10}=0$, $3x+2y+10\sqrt{10}=0$;

2) $2x-3y+25=0$, $2x-3y-25=0$. **226.** $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

227. ***1)*** $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$; ***2)*** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$; ***3)*** $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$;

4) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$; ***5)*** $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{576}=1$.

228. ***1)*** 3, 4, $(-5,0)$, $(5,0)$, $\dfrac{5}{3}$, $y=\pm\dfrac{4}{3}x$;

2) 1, 4, $\left(-\sqrt{17},0\right)$, $\left(\sqrt{17},0\right)$, $\sqrt{17}$, $y=\pm4x$;

3) $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{3}$, $\left(-\dfrac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}},0\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}},0\right)$, $\dfrac{\sqrt{73}}{3}$, $y=\pm\dfrac{8}{3}x$;

4) $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{4}$, $\left(-\dfrac{\sqrt{41}}{20},0\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{41}}{20},0\right)$, $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$, $y=\pm\dfrac{5}{4}x$;

5) 1, 1, $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$, $\sqrt{2}$, $y=\pm x$;

6) 2, 4, $\left(-2\sqrt{5},0\right)$, $\left(2\sqrt{5},0\right)$, $\sqrt{5}$, $y=\pm2x$.

229. ***1)*** Часть гиперболы $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{81/4}=1$, расположенная в верхней полуплоскости;

2) ветвь гиперболы $x^2-\dfrac{y^2}{16}=-1$, расположенная в нижней полуплоскости;

3) ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{81/4}-\dfrac{y^2}{9}=1$, расположенная в левой полуплоскости;

4) ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{4}=-1$, расположенная в верхней полуплоскости;

5) ветвь гиперболы $-\dfrac{(x+2)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{4/45}=1$ над прямой $y-1=0$;

6) ветвь гиперболы $\dfrac{(x-10)^2}{36}-\dfrac{(y+2)^2}{12}=1$ слева от прямой $x-10=0$.

230. ***2)*** $(2,-2)$, 2, 3; ***3)*** $(5,3)$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$.

231. $\dfrac{(x-3)^2}{144}-\dfrac{(y-2)^2}{25}=1.$ **232.** $3x-2y+19=0$, $3x+2y+11=0$.

233. $\left(6,\pm 6\sqrt{2}\right)$, $r_1=2+\sqrt{2}$, $r_2=-2+\sqrt{2}$. **234.** $\left(6,12\sqrt{7}\right)$, $\left(6,-12\sqrt{7}\right)$.

235. $(2,2)$. **236.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1.$

237. ***1)*** $y^2=4x$; ***2)*** $y^2=8x$, $y^2=-8x$; ***3)*** $y^2=-8x$; ***4)*** $y^2=12x$. **238.** $x^2=y$.

239. ***1)*** $(3,0)$, $x=-3$; ***2)*** $(-2,0)$, $x=2$; ***3)*** $(0,-2)$, $y=2$.

240. ***2)*** Парабола $(y-3)^2=-5(x-1)$;

3) часть параболы $y^2=-2x$, расположенная во втором квадранте;

4) парабола $3(y-1)^2=-4(x-3)$; ***5)*** парабола $(x-1)^2=-\dfrac{1}{3}(y+1)$;

6) часть параболы $x^2=25y$, расположенная в первом квадранте;

7) часть параболы $x^2=-25y$, расположенная в третьем квадранте.

241. $(x-4)^2=12(y+1)$.

243. ***1)*** $x+2y+2=0$; ***2)*** $x-2y-2=0$; ***3)*** $2x-y-16=0$.

244. $(1,1)$, $(-7,9)$. **245.** 4. **246.** $y^2-6y-4x+17=0$.

247. ***2)*** Окружность $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$;

3) эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$; ***4)*** гиперболу $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$;

5) точку $(2,1)$; ***6)*** мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{-1}+\dfrac{(y+1)^2}{-1/4}=1$;

7) гиперболу $y^2-(x-3)^2=1$; ***8)*** параболу $(x-1)^2=-(y-5/2)$;

9) прямые $x=2$ и $x=4$; ***10)*** мнимые прямые.

248. ***2)*** $(x-1)^2+(y-8)^2=113$; ***3)*** $(x+7)^2+y^2=116$; ***4)*** $x^2+(y+6)^2=45$;

5) $(x+5)^2+(y+2)^2=116$; ***6)*** $x^2+(y+1)^2=9$; ***7)*** $(x+2)^2+(y-5)^2=146$;

8) $(x-2)^2+(y+7)^2=50$; ***9)*** $x^2+(y+1)^2=20$; ***10)*** $(x+1)^2+(y+2)^2=13$;

11) $(x-1)^2+(y-3)^2=18$; ***12)*** $x^2+(y-5)^2=26$; ***13)*** $x^2+(y+6)^2=45$;

14) $(x+1)^2+(y+3)^2=10$; ***15)*** $(x-4)^2+y^2=25$.

249. ***1)*** Окружность $(x-1)^2+(y-1/2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$;

3) окружность $\left(x-\dfrac{44}{15}\right)^2+\left(y+\dfrac{81}{15}\right)^2=\left(\dfrac{23}{15}\right)^2$;

4) гипербола $\dfrac{(x+33/4)^2}{(15/4)^2}-\dfrac{(y-1)^2}{(15/\sqrt{2})^2}=1$;

5) эллипс $\dfrac{(x-49/12)^2}{(5/12)^2}+\dfrac{(y+3)^2}{(1/\sqrt{6})^2}=1$; ***6)*** гипербола $\dfrac{(x-6)^2}{\left(\sqrt{13}\right)^2}-\dfrac{(y+4)^2}{\left(2\sqrt{26}\right)^2}=1$;

7) окружность $\left(x+\frac{37}{15}\right)^2+\left(y-\frac{9}{15}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1198}}{15}\right)^2$;

8) окружность $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$;

9) окружность $\left(x-\frac{39}{16}\right)^2+\left(y+\frac{13}{12}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{21489}}{16}\right)^2$;

10) гипербола $\frac{(x-18)^2}{8^2}-\frac{(y-3)^2}{\left(8\sqrt{3}\right)^2}=1$;

11) гипербола $\frac{(y-4)^2}{\left(2\sqrt{10}\right)^2}-\frac{(x+8)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$; ***12)*** эллипс $\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y+5)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$;

13) окружность $(x-5)^2+\left(y+\frac{14}{3}\right)^2=\left(2\sqrt{19}\right)^2$;

14) окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$;

15) окружность $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{56}{5}\right)^2=\left(\frac{6\sqrt{82}}{5}\right)^2$.

Глава 3. Предел последовательности и функции

250. ***1)*** $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=1$; ***3)*** $x_1=4$, $x_2=8$, $x_3=16$, $x_4=32$;

4) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=2$; ***5)*** $x_1=6$, $x_2=11$, $x_3=18$, $x_4=27$;

6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{4}{9}$, $x_4=\frac{5}{16}$; ***7)*** $x_1=4$, $x_2=4$, $x_3=\frac{64}{9}$, $x_4=16$;

9) $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=0$;

10) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=2$. Указание. Квадратные скобки служат для указания целой части числа (см. рис. 3.52$^{\text{т}}$);

12) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-6$, $x_4=24$; ***13)*** $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=0$.

251. ***1)*** $x_n=\frac{1}{2n-1}$; ***2)*** $x_n=\frac{1}{n^2}$; ***3)*** $x_n=\frac{n+1}{n}$; ***4)*** $x_n=(-1)^n n$;

5) $x_n=n^2+1$.

252. ***1)*** Ограниченная; ***2)*** ограниченная; ***3)*** ограниченная;

4) ограниченная снизу, неограниченная сверху;

5) ограниченная снизу, неограниченная сверху;

6) ограниченная снизу, неограниченная сверху;

7) ограниченная сверху, неограниченная снизу; ***9)*** неограниченная.

253. ***4)*** Строго убывающая; ***6)*** убывающая; ***7)*** строго возрастающая;

8) строго убывающая; ***9)*** не монотонная; ***10)*** монотонная.

254. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 8$, $x_7 = 13$.

258. ***1)*** 2; ***2)*** 6; ***3)*** 34.

260. ***1)*** 2; ***2)*** 1; ***3)*** $-\frac{2}{3}$; ***5)*** 2; ***6)*** $\frac{1}{2}$; ***7)*** 1; ***8)*** 1; ***9)*** $\frac{4}{21}$; ***10)*** 2; ***11)*** ∞;
12) 0; ***13)*** 0; ***15)*** ∞; ***16)*** 0; ***17)*** 0; ***18)*** $\frac{7}{9}$; ***19)*** 0; ***20)*** ∞; ***21)*** 0; ***22)*** 3;
23) ∞; ***24)*** 0; ***25)*** $\frac{1}{2}$; ***26)*** ∞; ***27)*** $\frac{1}{2}$; ***28)*** $\frac{1}{3}$; ***29)*** $-\frac{3}{7}$; ***30)*** 6; ***32)*** 0; ***33)*** $\frac{1}{2}$;
34) 1/3. Указание. Дополнить данное выражение до разности кубов, умножив и разделив его на сопряженное ему выражение;
35) $\frac{1}{2}$; ***36)*** ∞; ***37)*** 1; ***39)*** 1; ***40)*** ∞; ***41)*** 2; ***42)*** -1; ***43)*** 0;
44) 0; ***45)*** 1; ***46)*** $\frac{5}{8}$. Указание. Привести дроби к общему знаменателю;
47) $\frac{1}{4}$; ***48)*** 1; ***49)*** 1; ***50)*** 3; ***52)*** $\frac{1}{2}$; ***53)*** 1;
54) 0. Указание. Воспользоваться формулой

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

55) $\frac{1}{3}$; ***56)*** $\frac{4}{3}$; ***57)*** 1;
58) $\frac{4}{3}$. Указание. Применить формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q};$$

59) $\frac{1}{6}$. **266.** Нет. **269.** 1. **270.** $\frac{a+2b}{3}$.

272. ***2)*** $\frac{5}{4}$; ***3)*** $\sqrt{1+x^2}$; ***4)*** $\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$; ***5)*** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

273. ***1)*** -3; ***2)*** $\frac{1}{3}$; ***3)*** $\sqrt{2}+3$; ***4)*** $\frac{3-x}{x^2-1}$; ***6)*** $\frac{a+4}{a^2+2a}$; ***7)*** $\frac{a^2+a+2}{a^2-1}$; ***8)*** $\frac{2x+3}{4x^2-1}$.

274. ***1)*** 2; ***2)*** $-\frac{27}{8}$; ***3)*** $\frac{-5}{2\sqrt[3]{5}}$; ***4)*** $\frac{-x^3}{2^x}$; ***6)*** $\frac{2^{1/x}}{x^3}$; ***7)*** $\frac{1}{x^3\,2^x}$; ***8)*** $(b-2)^3\,2^{b-2}$.

275. ***1)*** $D = [-1, +\infty)$; ***3)*** $D = (-2, 0]$; ***4)*** $D = [-1/3, 1]$;
5) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$; ***6)*** $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$;
7) $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$; ***8)*** $D = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$;
9) $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; ***10)*** $D = \big(0, \sqrt{2}\big) \cup \big(\sqrt{2}, +\infty\big)$.

276. ***2)*** $E = [1, +\infty)$; ***3)*** $E = [-2, 8]$; ***4)*** $E = [4, +\infty)$;

5) $E = (0, 1]$; ***6)*** $E = [-9, -5]$; ***7)*** $E = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$;

8) $E = (-1/2, 1/2)$; ***9)*** $E = [2, +\infty)$; ***10)*** $E = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$;

11) $E = \{-\pi/2, \pi/2\}$; ***12)*** $E = [0, 1)$.

277. ***2)*** Четная; ***4)*** нечетная; ***5)*** четная; ***6)*** нечетная; ***7)*** общего вида;

8) нечетная; ***9)*** общего вида; ***10)*** четная; ***11)*** четная; ***12)*** общего вида.

278. ***3)*** Периодическая, $T = 3\pi$; ***4)*** непериодическая;

5) периодическая, $T = 2\pi$. Указание. Убедиться, что период суммы двух периодических функций равен наименьшему общему кратному их периодов;

6) периодическая, $T = 8\pi$; ***7)*** непериодическая; ***8)*** периодическая, $T = \pi/2$;

9) периодическая, $T = 4\pi$; ***10)*** периодическая, $T = \pi/3$.

279. ***2)*** $x = \dfrac{y-2}{3}$; ***3)*** $x = \dfrac{2}{y} - 3$; ***4)*** $x = y^2$, $y \in [0, +\infty)$; ***5)*** $x = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{y}{2}$;

6) $x = \sqrt[3]{y+2}$; ***7)*** $x = \dfrac{2}{1-y}$.

280. ***2)*** $f(g(x)) = (2x-1)^3$, $g(f(x)) = 2x^3 - 1$;

3) $f(g(x)) = x$, $x > 0$, $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$;

4) $f(g(x)) = 6x - 14$, $g(f(x)) = 6x - 3$; ***5)*** $f(g(x)) = |\cos x|$, $g(f(x)) = \cos|x|$.

281. ***1)*** $u = 2x - 3$, $y = u^{99}$; ***3)*** $v = -x^2$, $u = 3^v$, $y = \arcsin u$;

4) $w = 5x + 3$, $v = \sin w$, $u = v^3$, $y = \sqrt{u}$; ***5)*** $v = \dfrac{1-x}{1+x}$, $u = \ln v$, $y = u^2$.

282. ***16)*** Указание. Выделить полный квадрат в выражении под знаком модуля;

22) Указание. Воспользоваться тем, что $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$;

23) Указание. Воспользоваться тем, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x;$$

26) Указание. Провести построение графика отдельно для промежутков $(-\infty, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ и $[0, +\infty)$.

283. ***1)*** Монотонная ограниченная; ***2)*** строго монотонная ограниченная;

3) ограниченная; ***4)*** не обладает свойствами монотонности и ограниченности;

5) не обладает свойствами монотонности и ограниченности;

6) монотонная. Указание. См. задачу 282.19. **285.** $q_0 = 2$, $p_0 = 17$.

286. $p_0 = 3$, $Q_0 = \dfrac{17}{31}$.

287. ***11)*** Указание. Воспользоваться тем, что по определению предела переменная x, стремясь к числу $a = 1$, не принимает этого значения.

288. ***2)*** $4/5$; ***3)*** 2.

290. ***1)*** 15; ***3)*** 3; ***4)*** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; ***5)*** 0; ***7)*** ∞; ***8)*** ∞; ***9)*** 0; ***10)*** ∞; ***12)*** $\dfrac{3}{16}$;

13) $-\dfrac{13}{11}$; ***14)*** $-\dfrac{47}{75}$; ***16)*** $-\dfrac{3}{4}$; ***17)*** $-\dfrac{3}{16}$; ***18)*** $\dfrac{7}{8}$; ***19)*** $\dfrac{7}{4}$; ***20)*** $-\dfrac{2}{27}$;

21) $-\dfrac{1}{2}$; ***22)*** $\dfrac{9}{28}$; ***23)*** -3; ***24)*** $-\dfrac{37}{24}$; ***25)*** $\dfrac{7}{4}$; ***26)*** -2; ***27)*** 2; ***28)*** -1;

29) $\dfrac{2}{5}$; ***30)*** $\dfrac{1}{2}$; ***32)*** $\dfrac{4}{3}$; ***33)*** $-\dfrac{3}{11}$; ***34)*** $\dfrac{4}{3}$; ***35)*** $-\dfrac{5}{39}$; ***36)*** -8; ***37)*** $\dfrac{1}{2}$;

38) $-\dfrac{4}{3}$; ***40)*** $-\dfrac{1}{56}$; ***41)*** $\dfrac{1}{20}$; ***42)*** $\dfrac{8}{5}$; ***43)*** -1; ***44)*** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; ***45)*** $\dfrac{1}{4}$; ***46)*** $\dfrac{1}{4}$;

47) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; ***48)*** $\dfrac{1}{8}$; ***49)*** $-\sqrt{2}$; ***50)*** $\dfrac{1}{8}$; ***52)*** $-\sqrt{2}$; ***53)*** $\dfrac{2}{3}$; ***54)*** 2; ***55)*** $-\dfrac{1}{3}$;

56) -2; ***57)*** $\dfrac{1}{4}$; ***58)*** $\dfrac{4}{9}$; ***59)*** $\dfrac{4}{3}$. Указание. Положить $x = t^{12}$;

60) $-1/12$. Указание. Пользуясь формулой $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, дополнить числитель до разности кубов;

61) -12; ***63)*** 2; ***64)*** $-\dfrac{1}{2}$; ***65)*** -3; ***66)*** 0; ***67)*** ∞; ***68)*** 1; ***69)*** 0;

70) 5; ***71)*** 2; ***72)*** 1; ***73)*** 2; ***74)*** -2; ***76)*** 0; ***77)*** ∞; ***78)*** 2;

79) 0; ***80)*** ∞; ***81)*** $-\dfrac{1}{2}$; ***82)*** $-\dfrac{1}{14}$; ***83)*** $-\dfrac{1}{2}$; ***84)*** $\dfrac{1}{3}$.

291. ***4)*** $2/5$. Указание. Представить тангенс как отношение синуса и косинуса и воспользоваться тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$;

5) $\dfrac{1}{2}$. Указание. Воспользоваться формулой $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

6) $\dfrac{9}{4}$; ***8)*** $\dfrac{1}{2}$; ***9)*** 1; ***10)*** 2; ***12)*** $\dfrac{4}{3}$; ***13)*** $\dfrac{9}{4}$; ***14)*** $-\dfrac{1}{2}$; ***16)*** 1;

17) $-\dfrac{1}{12}$; ***18)*** -4; ***20)*** -6; ***21)*** $-\dfrac{1}{2}$; ***22)*** -4; ***23)*** $\dfrac{1}{4}$; ***24)*** $\dfrac{1}{2}$;

25) -1. Указание. Положить $t = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}$; ***26)*** $\dfrac{4}{\pi}$; ***27)*** 2.

292. ***2)*** e^k. Указание. Обозначить $y = kx$; ***4)*** $e^{3/2}$; ***5)*** e^{-6}; ***7)*** e^{-9}; ***8)*** e;

9) e; ***10)*** ∞; ***11)*** 0; ***13)*** e^2; ***14)*** e^2; ***15)*** e; ***16)*** $e^{9/2}$; ***17)*** e^{-1}; ***18)*** e^{-6};

19) e^5; ***20)*** $e^{3/5}$; ***21)*** $e^{3/4}$; ***22)*** e^{-1}. Указание. Сделать замену $y = \sin x$;

23) e^{-2}. Указание. Воспользоваться формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$;

24) e; ***25)*** $e^{2/3}$; ***26)*** $1/\sqrt{e}$; ***27)*** $1/\sqrt{e}$.

293. ***3)*** $1/2$; ***4)*** 2; ***5)*** $1/4$. Указание. В знаменателе вынести за скобки e^x;

6) 1; ***7)*** $4\ln 2 - 4$; ***8)*** -2; ***9)*** k; ***11)*** 3; ***12)*** $-1/2$;

13) $\sqrt{3}$; ***14)*** 2; ***15)*** km; ***16)*** $1/2$; ***18)*** $1/75$;

19) $1/2$. Указание. В числителе вынести за скобку $\sqrt[4]{1+x^2}$.

294. ***2)*** $f(3-0) = 2$, $f(3+0) = 3$; ***3)*** $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$;

4) $f(2-0) = -\pi/2$, $f(2+0) = \pi/2$; ***5)*** $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = 1$;

7) $f(1-0)=-2$, $f(1+0)=1/3$; ***8)*** $f(-0)=1$, $f(+0)=2$.

296. ***2)*** $\dfrac{2}{3}$; ***3)*** $-\dfrac{1}{3}$; ***4)*** $\log_3 7$; ***5)*** $\dfrac{7}{2}$; ***6)*** $\dfrac{1}{4}$; ***7)*** -6; ***8)*** $\dfrac{\ln 2}{4}$;

9) 1; ***10)*** -1; ***11)*** 4; ***13)*** $\dfrac{3}{e}$; ***14)*** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; ***15)*** $\dfrac{1}{4}$; ***16)*** 5;

17) $\dfrac{1}{2}$. Указание. Воспользоваться тем, что $\operatorname{arctg}(x-2)\sim x-2$ при $x\to 2$.

300. ***3)*** $x=0$; ***4)*** $x=2$; ***5)*** $x\neq\pm 2$; ***6)*** $x\in(1,2]$; ***7)*** $x\in[-1/3,1]$;

8) $x\in[-3,-1)\cup(2,3]$.

301. ***2)*** Непрерывна слева; ***3)*** непрерывна справа.

302. ***2)*** Точка неопределенности; ***3)*** точка устранимого разрыва;

4) точка бесконечного скачка; ***5)*** точка неопределенности;

6) точка устранимого разрыва; ***7)*** точка бесконечного скачка;

8) точка конечного скачка; ***9)*** точка бесконечного скачка;

10) точка устранимого разрыва; ***11)*** точка бесконечного разрыва;

12) точка конечного скачка; ***13)*** точка бесконечного скачка;

14) точка неопределенности.

305. ***2)*** В точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=2$;

3) в точках $x=\pm 1$ конечный разрыв со скачком $h=1$;

4) в точке $x=1$ конечный разрыв со скачком $h=3$;

5) в точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=1$;

6) в точке $x=0$ устранимый разрыв, в точке $x=1$ разрыв второго рода;

7) в точке $x_1=-\pi$ скачок $h=\pi$, в точке $x_2=\pi/2$ устранимый разрыв;

8) в точке $x_1=1$ устранимый разрыв, в точке $x_2=2$ скачок $h=4$;

9) в точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=1$, в точке $x=1$ разрыв второго рода;

10) в точке $x_1=-2$ скачок $h=2$, в точке $x_2=2$ устранимый разрыв;

11) в точках $x=\pi/2+\pi n$, где $n=0,1,2,\ldots$, разрыв второго рода;

13) в точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=\pi$;

14) в точках $x=\pm 1$ конечный разрыв со скачком $h=1$;

15) в точке $x=0$ устранимый разрыв;

16) в точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=2$;

17) в точке $x=0$ разрыв второго рода; ***18)*** в точке $x=2$ разрыв второго рода;

19) в точке $x=-2$ разрыв второго рода;

20) в точке $x=0$ конечный разрыв со скачком $h=2$.

306. ***2)*** В точке $x=-1$ устранимый разрыв;

3) в точке $x=0$ разрыв первого рода со скачком $h=\pi$;

4) в точке $x=3$ разрыв второго рода;

5) в точках $x = \pi/2 + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, разрыв второго рода;

6) в точке $x = -1$ устранимый разрыв, в точке $x = 1$ конечный разрыв со скачком $h = 2\pi$.

307. ***1)*** $A = -4$; ***2)*** не существует; ***3)*** $A = -1$.

308. ***1)*** Да; ***2)*** нет; ***3)*** нет; ***4)*** нет; ***5)*** да. **313.** Существует. **316.** Имеет.

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

317. ***2)*** $y' = 8x^3 - 2x^2 - 4$; ***3)*** $y' = x^3 - \dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{16}{x^3} + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;

4) $y' = 15x^2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{2x^4} - \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^9}}$; ***5)*** $y' = e^x(\sin x + \cos x)$;

6) $y' = \operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$; ***7)*** $y' = \dfrac{\ln x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$;

8) $y' = 2x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x}$; ***9)*** $y' = -\dfrac{x \sin x \ln x + \cos x}{x \ln^2 x}$;

10) $y' = \dfrac{(2x+1)3^x \ln 3 - 2 \cdot 3^x}{(2x+1)^2}$; ***11)*** $y' = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$; ***12)*** $y' = \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$;

13) $y' = \dfrac{\sin x - x \ln x \cos x}{x \sin^2 x} + \operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$; ***14)*** $y' = 2\cos 2x$;

15) $y' = \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$; ***16)*** $y' = \dfrac{2}{(2x-5)\ln 3}$; ***17)*** $y' = \dfrac{5}{\cos^2(5x+1)}$;

18) $y' = 21(3x-8)^6$; ***19)*** $y' = \dfrac{1}{2x}$; ***20)*** $y' = \sin 2x$; ***21)*** $y' = -3\sin x \cos^2 x$;

22) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$; ***23)*** $y' = \dfrac{1}{x}$; ***24)*** $y' = \dfrac{1}{4+x^2}$; ***25)*** $y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$;

26) $y' = \dfrac{1}{x^2-1}$; ***27)*** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; ***28)*** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; ***29)*** $y' = -\operatorname{ctg} x$;

30) $y' = \operatorname{tg} x$; ***31)*** $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; ***32)*** $y' = \dfrac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$; ***33)*** $y' = e^x \cos x$;

34) $y' = \dfrac{1}{x \ln x}$; ***35)*** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

318. ***2)*** $y' = \dfrac{5}{2\sqrt{(-25x^2-10x)\arcsin(5x+1)}}$; ***3)*** $y' = (8x-5)3^{4x^2-5x+1}\ln 3$;

4) $y' = e^{4x+1}(\sin 2x + 4\sin^2 x)$; ***5)*** $y' = -\dfrac{3x \arccos^2\left(x^2/2+1\right)}{\sqrt{1-\left(x^2/2+1\right)^2}}$;

6) $y' = \dfrac{2x^3+6x^2-5}{(x^3-2x+1)(x+2)}$; ***7)*** $y' = -3x^2 \cdot 2^{x^3} \sin\left(2^{x^3}\right) \cdot \ln 2$;

8) $y' = \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{4x+1}\left(\operatorname{ctg}^2(x/3) + 12\operatorname{ctg}(x/3) + 1\right)}{\operatorname{ctg}^2(x/3)}$;

9) $y' = 0$; *10)* $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$; *11)* $y' = \sqrt{x^2 + a^2}$;

12) $y' = \dfrac{\operatorname{ctg} x \ln\cos x + \operatorname{tg} x \ln\sin x}{\ln^2\cos x}$; *13)* $y' = 4(2^x + 3x^2)^3(2^x\ln 2 + 6x)$;

14) $y' = \operatorname{tg} x + \dfrac{x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$; *15)* $y' = \dfrac{2x\sin(1 - x^2)}{5\sqrt[5]{\cos^4(1 - x^2)}}$;

16) $y' = -\dfrac{7(x^2 + 1) + 3x\sin 14x}{(x^2 + 1)^2\sin^2 7x}$; *17)* $y' = \dfrac{21\sin x}{4(1 + 3\cos x)^8}$;

18) $y' = \dfrac{21\sin x}{4(1 + 3\cos x)^8}$; *19)* $y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$;

20) $y' = \dfrac{e^x + xe^x}{2\sqrt{xe^x + 1}}$; *21)* $y' = -\dfrac{3\cdot 2^{\arccos 3x}\ln 2 + 6(1 - \arcsin 3x)}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

22) $y' = \dfrac{3e^x + 2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(3e^x + 2^x - 1)^2}} + \dfrac{7\ln^6 x}{x}$; *23)* $y' = -\dfrac{9x\arccos 3x + 3\sqrt{1 - 9x^2}}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

24) $y' = (3x^2 + 4^x\ln 4)\cos(x^3 + 4^x)$; *25)* $y' = \dfrac{x + 2}{2\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}}$;

26) $y' = 3\sin^2 x\cos x\, e^{\sin^3 x}$; *27)* $y' = \dfrac{e^x}{2\left(1 + e^x + \sqrt{1 + e^x}\right)}$;

28) $y' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; *29)* $y' = -\dfrac{\sin(4^x + 4^{-x})(4^x\ln 4 - 4^{-x}\ln 4)}{2\sqrt{\cos(4^x + 4^{-x})}}$;

30) $y' = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}}\ln 4\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$;

31) $y' = 3\left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^2\left(-\dfrac{5^{\arccos x}\ln 5}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{8\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}\right)$;

32) $y' = 12\sin^2\left(\sqrt{x} + \lg x\right)^4\cos\left(\sqrt{x} + \lg x\right)^4\left(\sqrt{x} + \lg x\right)^3\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x\ln 10}\right)$;

33) $y' = -\dfrac{2x(x^2 - 2)}{x^4 - 1}$; *34)* $y' = \dfrac{30\operatorname{tg}^5 5x}{\cos^2 5x} - 7^{\frac{2x}{3x-1}}\dfrac{2\ln 7}{(3x - 1)^2}$;

35) $y' = 5\ln^4(x - 2^{-x})\dfrac{1 + 2^{-x}\ln 2}{x - 2^{-x}}$.

319. *2)* $y' = (x^2 + 3x)^{x-2}\left(\ln(x^2 + 3x) + \dfrac{(x - 2)(2x + 3)}{x^2 + 3x}\right)$;

3) $y' = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}\left(2x\ln\operatorname{tg} 2x + \dfrac{2x^2}{\operatorname{tg} 2x\cos^2 2x}\right)$; *4)* $y' = x^{2^x}\left(2^x\ln 2\ln x + \dfrac{2^x}{x}\right)$;

5) $y' = (x + 2)^2(x + 3)^3 + 2(x + 1)(x + 2)(x + 3)^3 + 3(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$;

6) $y' = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2 + 1)(x + 3)}{5(x - 3)^3}}\left(\dfrac{2x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{3}{x - 3}\right)$;

7) $y' = \dfrac{\cos 2x \sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2 \operatorname{ctg} x} \left(-2 \operatorname{tg} 2x + \dfrac{3}{2(2x-3)} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{\sin 2x} \right);$

8) $y' = \dfrac{2^{x^2-3x}(1-5x)^3\sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10}\sqrt[3]{2x+x^2}} \times$

$\times \left((2x-3)\ln 2 - \dfrac{15}{1-5x} + \dfrac{3}{2(3x+1)} - \dfrac{60}{6x+5} - \dfrac{2+2x}{3(2x+x^2)} \right);$

9) $y' = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \left(\dfrac{\ln(\arcsin 5x)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} + \dfrac{5\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x} \right);$

10) $y' = (3x+1)^{1/x} \left(\dfrac{3}{x(3x+1)} - \dfrac{\ln(3x+1)}{x^2} \right);$

11) $y' = 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{x^x}\left(x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1} \right);$

12) $y' = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3 \right)^{\cos 6x} \left(-6\sin 6x \ln\operatorname{ctg}(4x-1)^3 - \dfrac{24(4x-1)^2\cos 6x}{\sin\left(2(4x-1)^3\right)} \right);$

13) $y' = (\operatorname{tg} 7x)^{\lg(3x+1)} \left(\dfrac{3\ln\operatorname{tg} 7x}{(3x+1)\ln 10} + \dfrac{14\lg(3x+1)}{\sin 14x} \right);$

14) $y' = (\sin 5x)^{\cos 5x}(5\cos 5x \operatorname{ctg} 5x - 5\sin 5x \ln\sin 5x) +$

$+ x^{\cos 5x}\left(\dfrac{\cos 5x}{x} - 5\sin 5x \ln x \right);$

15) $y' = x^{a^x}a^x\left(\ln a \ln x + \dfrac{1}{x} \right) + x^{x^a+a-1}(a\ln x + 1) + a^{x^x}x^x(\ln x + 1)\ln a;$

16) $y' = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}\left(3x^2 \ln\operatorname{ctg} 5x - \dfrac{10(x^3-1)}{\sin 10x} \right);$

17) $y' = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg} x}\left(5\operatorname{ctg}(5x-1)\operatorname{ctg} x - \dfrac{\ln\sin(5x-1)}{\sin^2 x} \right);$

18) $y' = (6x-9)^{x^2}\left(2x\ln(6x-9) + \dfrac{2x^2}{2x-3} \right);$

19) $y' = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)}\left(\dfrac{3\ln\arcsin 8x}{\cos^2(3x-8)} + \dfrac{8\operatorname{tg}(3x-8)}{\sqrt{1-64x^2}\arcsin 8x} \right);$

20) $y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin(3x+7)}\left(3\cos(3x+7) + \dfrac{2\sin(3x+7)}{\sin 2x} \right).$

320. ***2)*** $-\dfrac{4}{5}$; ***3)*** $\dfrac{9}{2}$; ***4)*** $2e(4\ln 2 - 1)$; ***5)*** $\dfrac{\pi-4}{4}$; ***6)*** 16; ***7)*** $\dfrac{1}{15}$;

8) 6; ***9)*** 14; ***10)*** 33; ***11)*** $\dfrac{7\sqrt{3}}{36}$; ***12)*** -1; ***13)*** -18; ***14)*** -125;

15) -25; ***16)*** -1; ***17)*** -1; ***18)*** $\dfrac{1}{4}$; ***19)*** $-\dfrac{1}{8}$.

321. ***2)*** $y'' = 2e^{x^2}(2x^2+1)$; ***3)*** $y'' = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$; ***4)*** $y'' = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{x^4+4x}{(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}$;

5) $y'' = \dfrac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$; **6)** $y'' = -2\cos 2x$.

322. **2)** $y''' = 2e^x(\cos x - \sin x)$; **3)** $y''' = 2x^2 \sin x - 12\sin x - 12x\cos x$;

4) $y''' = 18\dfrac{x^2-3}{(9+x^2)^3}$; **5)** $y''' = e^{-x}(3-x)$; **6)** $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

323. **2)** $y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1$, $y'' = 12x^2 - 18x + 2$, $y''' = 24x - 18$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$, $n = 5, 6, \ldots$;

3) $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$; **4)** $y^{(n)} = \dfrac{1}{3^n}\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$; **5)** $y^{(n)} = (3\ln 2)^n 2^{3x-5}$;

6) $y' = 2x\ln x + 1$, $y'' = 2\ln x + 3$, $y^{(n)} = (-1)^{n+1}2(n-3)!\,\dfrac{1}{x^{n-2}}$, $n = 3, 4, \ldots$.

324. **2)** $y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$;

3) $y^{(50)} = 2^{50}\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \dfrac{1225}{2}\sin 2x\right)$; **4)** $y^{(4)} = -4e^x\cos x$;

5) $y^{(5)} = \dfrac{274}{x^6} - \dfrac{120}{x^6}\ln x$; **6)** $y^{(8)} = \dfrac{8!}{(1-x)^9}$.

325. **2)** $y = -4x - 1$, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$, $\pi - \operatorname{arctg} 4$; **3)** $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, 0;

4) $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $\dfrac{\pi}{4}$; **5)** $y = 12x - 16$, $y = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{49}{6}$, $\operatorname{arctg} 12$;

6) $y = -5x + 2$, $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{16}{5}$, $\pi - \operatorname{arctg} 5$; **7)** $y = x$, $y = -x$, $\dfrac{\pi}{4}$;

8) $y = -4x - 8$, $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{15}{4}$, $\pi - \operatorname{arctg} 4$; **9)** $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{9}{5}$, $y = -6x + 33$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{6}$.

326. $\left(2, \dfrac{32}{3}\right)$, $\left(3, \dfrac{23}{2}\right)$. **327.** $\left(4, \dfrac{67}{3}\right)$, $\left(5, \dfrac{133}{6}\right)$.

328. $(4, -25)$. **329.** $(2, 10)$. **330.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

331. $y = 4x$, $y = -\dfrac{x}{4}$, $y = -8x + 16$, $y = \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4}$, $y = -8x - 16$, $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{4}$.

332. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$, $y = 8x + 57$. **333.** $k = 7$. **334.** $(1, 0)$.

335. $y = 8 - 4x$, $y = -x/4 - 2$, $\operatorname{tg}\alpha = 15/8$. **336.** $y = x - 2$. **337.** $(e - 1, \ln(e - 1))$.

338. **1)** $\operatorname{tg}\alpha = 3$; **2)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$. **339.** $4/\sqrt{17}$. **340.** $(1/2, 17/4)$.

341. $b = -3$, $c = 4$. **342.** $y = 7x - 14$. **343.** $\dfrac{\pi}{4}$. **344.** $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$. **345.** $(7, 1)$.

346. **2)** $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$; **3)** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **4)** $\operatorname{arctg} 3$; **5)** $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$.

347. **2)** $AC(4) = 0{,}3$, $MC(4) = 0{,}02$; **3)** $AC(1) = e^3$, $MC(1) = 3e^3$;

4) $AC(5) \approx 4{,}95$, $MC(5) \approx 0{,}55$.

348. ***2)*** $E_{\pi/3}(y) = -\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$; ***3)*** $E_2(y) = \dfrac{26}{11}$; ***4)*** $E_{e^2}(y) = \dfrac{1}{2}$.

349. ***2)*** $z(1) = \dfrac{2}{7}$, $v(1) = -\dfrac{4}{49}$, $T_z(1) = -\dfrac{2}{7}$, $z(7) = \dfrac{2}{19}$, $v(7) = -\dfrac{4}{361}$, $T_z(7) = -\dfrac{2}{19}$;

3) $z(1) = 111{,}5$, $v(1) = 8$, $T_z(1) = \dfrac{8}{111}$, $z(7) = 51$, $v(7) = -28$, $T_z(7) = \dfrac{28}{51}$;

4) $z(1) \approx 0{,}63$, $v(1) \approx 0{,}368$, $T_z(1) \approx 0{,}582$, $z(7) \approx 0{,}999$, $v(7) \approx 0{,}001$, $T_z(7) \approx 0{,}001$.

350. ***2)*** $p = 1$, $E_1(q) = -0{,}25$, $E_1(s) = 2$; ***3)*** $p = 3$, $E_3(q) = -0{,}75$, $E_3(s) \approx 0{,}18$;

4) $p = 1$, $E_1(q) = 0$, $E_1(s) = 0$.

351. ***2)*** $dy = -\dfrac{2}{(x-1)^2}dx$; ***3)*** $dy = -\dfrac{1}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}dx$;

4) $dy = \left(2x\,\mathrm{tg}\,3x + \dfrac{3x^2}{\cos^2 3x}\right)dx$; ***5)*** $dy = 2xe^{x^2}dx$; ***6)*** $dy = \dfrac{12x-1}{6x^2-x+3}dx$.

352. ***2)*** 1,1; ***3)*** $1 - \dfrac{1}{20\ln 2}$; ***4)*** $\dfrac{\pi}{4} + 0{,}005$; ***5)*** 214,92; ***6)*** $\dfrac{\pi}{4} + 0{,}005$;

7) $2\dfrac{107}{108}$; ***8)*** $3\dfrac{1}{27}$; ***9)*** $\dfrac{\pi}{4} + 0{,}01$; ***10)*** $\dfrac{3}{100}$; ***11)*** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{360}$; ***12)*** $82\dfrac{2}{25}$;

13) $1 + \dfrac{1}{500\ln 10}$; ***14)*** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{360}$; ***15)*** 4,9; ***16)*** 5,013; ***17)*** 2,012; ***18)*** 3,009;

19) $-0{,}017$; ***20)*** 0,966; ***21)*** 1,037; ***22)*** $\dfrac{\pi}{4} - 0{,}01$; ***23)*** 85,32; ***24)*** $-0{,}04$.

353. ***1)*** 12,16; ***2)*** 0,587; ***3)*** 0,494; ***4)*** 1,925.

354. ***2)*** -1; ***3)*** 0; ***4)*** 1; ***5)*** 0; ***6)*** 1; ***7)*** 3,5; ***8)*** $-\dfrac{1}{3}$; ***9)*** $\dfrac{7}{3}$; ***10)*** 0; ***11)*** $-\dfrac{\pi}{4}$; ***12)*** 0,5;

13) $\dfrac{2}{\pi}$; ***14)*** 1; ***15)*** 1; ***16)*** e^{-2}; ***17)*** 3; ***18)*** e^{-1}; ***19)*** e^{-1}; ***20)*** e^{-1}; ***21)*** e^3.

355. ***2)*** $y_{\min} = e^{-1}$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, 1]$;

3) $y_{\min} = \ln(2/3)$ при $x = -1/3$, возрастает при $x \in [-1/3, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -1/3]$;

4) $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0, 2]$, убывает при $x \in (-\infty, 0], [2, +\infty)$;

5) $y_{\max} = 4 \cdot 3^{3/4}/3$ при $x = 2\sqrt{3}/3$, возрастает при $x \in \left[0, 2\sqrt{3}/3\right]$, убывает при $x \in (-\infty, -2]$, $\left[2\sqrt{3}/3, 2\right]$;

6) точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$;

7) $y_{\min} = 4$ при $x = -1$, $y_{\max} = 5$ при $x = 0$, $y_{\min} = 4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-1, 0], [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -1], [0, 1]$;

8) точек экстремума нет, убывает при $x \in (-\infty, -2), (-2, 8), (8, +\infty)$;

9) $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty, -1], [3, +\infty)$, убывает при $x \in [-1, 3]$;

10) $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$, $y_{\min} = 0$ при $x = 5$, возрастает при $x \in [1,3], [5,+\infty)$, убывает при $x \in (-\infty,1], [3,5]$;

11) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0,+\infty)$, убывает при $x \in (-1,0]$;

12) $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 1/e^2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in \big(-0, 1/e^2\,\big], [0,+\infty)$, убывает при $x \in \big[1/e^2, 1\big]$;

13) $y_{\min} = 0$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [0,1], [1,+\infty)$, убывает при $x \in (-\infty,-1], [0,1]$;

14) $y_{\min} = -4$ при $x = -3$, $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-3,-1], [1,+\infty)$, убывает при $x \in (-\infty,-3], [-1,1]$;

15) $y_{\max} = e^{12}$ при $x = -3$, возрастает при $x \in (-\infty,-3]$, убывает при $x \in [-3,+\infty)$;

16) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 4/27$ при $x = 8/27$, возрастает при $x \in [0, 8/27]$, убывает при $x \in (-\infty, 0]$, $[8/27,+\infty\,)$;

17) точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty,+\infty)$;

18) точек экстремума нет, возрастает при $x \in\ [7/3,+\infty\,)$;

19) $y_{\max} = 17$ при $x = -1$, $y_{\min} = -47$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty,-1], [3,+\infty)$, убывает при $x \in [-1,3]$;

20) $y_{\min} = -\frac{4\sqrt{2}}{16+\sqrt{2}}$ при $x = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$, $y_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{16-\sqrt{2}}$ при $x = -\frac{1}{4} + \sqrt{2}$, возрастает при $x \in \big[-1/4-\sqrt{2}, -1/4+\sqrt{2}\big]$, убывает при $x \in \big(-\infty, -1/4-\sqrt{2}\big]$, $\big[-1/4+\sqrt{2},+\infty\big)$;

21) $y_{\max} = 40/799$ при $x = -1/20$, возрастает при $x \in\ (-\infty,-1/20\,]$, убывает при $x \in\ [-1/20,+\infty\,)$;

22) $y_{\min} = \sqrt{42}/3$ при $x = -2/3$, возрастает при $x \in\ [-2/3,+\infty\,)$, убывает при $x \in\ (-\infty,-2/3\,]$.

356. ***2)*** $\big(1/2, 1/2 - \ln 2\big)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in\ (0, 1/2\,]$, вогнута при $x \in\ [1/2,+\infty\,)$;

3) $\big(-1, 1/\sqrt{e}\big)$, $\big(1, 1/\sqrt{e}\big)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in [-1,1]$, вогнута при $x \in (-\infty,-1], [1,+\infty)$;

4) $(-1,\ln 2)$, $(1,\ln 2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in (-\infty,-1], [1,+\infty)$, вогнута при $x \in [-1,1]$;

5) точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-2,2)$, вогнута при $x \in (-\infty,-2)$, $(2,+\infty)$;

6) $\big(-\sqrt{3}/3, 1/2\big)$, $\big(\sqrt{3}/3, 1/2\big)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in \big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big]$, $\big[\sqrt{3}/3,+\infty\big)$, вогнута при $x \in \big[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\big]$;

7) точек перегиба нет; вогнута при $x \in (-\infty,+\infty)$;

8) $(0,0)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in [0,+\infty]$, вогнута при $x \in (-\infty,0]$;

9) точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty,-1), (1,+\infty)$, вогнута при $x \in (-1,1)$;

10) $\big(-8, -18e^{-8/3}\big)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty,-8]$, вогнута при $x \in [-8,+\infty)$;

11) точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty, 2]$, вогнута при $x \in [2, +\infty)$;

12) $\left(-2, -2/e^2\right)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, -2]$, вогнута при $x \in [-2, +\infty)$;

13) $(-6, -9/2)$, $(0, 0)$, $(6, 9/2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in [-6, 0], [6, +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty, -6], [0, 6]$;

14) точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty, 0)$, вогнута при $x \in (0, +\infty)$;

15) $(1, -2)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, 1]$, вогнута при $x \in [1, +\infty)$;

16) $(1, \ln 2)$, $(3, \ln 2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, 1], [3, +\infty)$, вогнута при $x \in [1, 3]$;

17) $\left(1/2, e^{\operatorname{arctg}(1/2)}\right)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in [1/2, +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty, 1/2]$.

357. ***2)*** $y_{\text{наиб}} = y(3) = 9$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -16$;

3) $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = -19$;

4) $y_{\text{наиб}} = y(0) = y(1) = 0$, $y_{\text{наим}} = y\,(1/4) = -1/4$;

5) $y_{\text{наиб}} = y(e) = e - 1$, $y_{\text{наим}} = y(1) = 1$;

6) $y_{\text{наиб}} = y(-4) = 7e^4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = e$;

7) $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 8$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -12$;

8) $y_{\text{наиб}} = y(1) = 4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = -4$;

9) $y_{\text{наиб}} = y(4) = 6$, $y_{\text{наим}} = y\,(1/16) = -1/8$;

10) $y_{\text{наиб}} = y(-3) = 22$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -3$;

11) $y_{\text{наиб}} = y\,(\pi/4) = (4 - \pi)/4$, $y_{\text{наим}} = y\,(-\pi/4) = (\pi - 4)/4$;

12) $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = y(2) = -13$.

358. ***2)*** $x = 1$, $y = 2x + 2$; ***3)*** $x = 1$, $y = x$; ***4)*** $x = 0$, $y = 1$;

5) $y = x - 1/2$, $y = -x + 1/2$; ***6)*** $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$; ***7)*** $x = 1$;

8) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$, $y = -x$; ***9)*** $x = 1$, $y = 2$; ***10)*** $y = \pi/2$, $y = -\pi/2$;

11) $x = 0$, $y = 2/3$; ***12)*** $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$; ***13)*** $y = 3$; ***14)*** $x = 3$, $y = 0$.

360. ***2)*** $q_{\max} = 9$, $\Pi_{\max} = 78$; ***3)*** $q_{\max} = 4$, $\Pi_{\max} \approx 18$; ***4)*** $q_{\max} = 2$, $\Pi_{\max} \approx 2{,}68$.

361. ***2)*** $\varphi = \pi/3$, $s \approx 109{,}6$; ***3)*** $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$, $s = 186$; ***4)*** $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}$, $s = 89{,}4$.

362. ***2)*** $x_1 = 3/16$, $x_2 = 13/16$; ***3)*** $x_1 = 11/18$, $x_2 = 7/18$;

4) $x_1 = 12/19$, $x_2 = 7/19$. **363.** -43; -44. **364.** б) 22 000; в) 4 225.

365. а) -50; б) $-3{,}2$. **366.** 33,75; 19,75. **367.** $p_0 = 2$; $-1/2$, $1/2$.

368. ***1)*** 179/207; ***2)*** 1,9. **369.** $p_0 = 20$; $-0{,}36$, $0{,}72$. **370.** 185,225; 51,5.

371. $q_{\min} = 3$. **372.** $q_{\min} = 800$.

373. ***1)*** $-7/18$, увеличит; ***2)*** $-7{,}5$, уменьшит. **374.** 25,69; 25,7. **375.** $q = 200$.

376. ***1)*** 1,99; ***2)*** $-0{,}69$.

377. ***1)*** $q = 2$; ***2)*** $q = 5$. **378.** $FC = 1\,000$, $q_{\min} = 2\sqrt{10}$. **379.** $q = 1$; 1, 0.

380. 46, 11, -1, -3, по мере возрастания численности персонала предельная производительность падает.

381. ***1)*** $-0{,}14$; ***2)*** 6. **382.** $q = 58{,}8$. **383.** $-2{,}67$.

Глава 5. Теория интегрирования

384. ***2)*** $\dfrac{x^2}{2} - \ln|x| + C$; ***3)*** $\dfrac{x^2}{2} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$; ***4)*** $\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$;

5) $2x - 6\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x^3} + C$; ***6)*** $\ln|x| - \dfrac{1}{4x^4} + C$; ***7)*** $\dfrac{1}{2}(x - \sin x) + C$;

8) $\dfrac{1}{2}(x + \sin x) + C$; ***9)*** $x - \cos x + C$; ***10)*** $x + \cos x + C$; ***11)*** $-\sin x + C$;

12) $\operatorname{tg} x - x + C$; ***13)*** $-x - \operatorname{ctg} x + C$; ***14)*** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$; ***15)*** $-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$;

16) $-\dfrac{1}{2}\cos x + C$; ***17)*** $\dfrac{1}{8}(x - \sin x) + C$; ***18)*** $3e^x + \operatorname{tg} x + C$;

19) $\dfrac{3\cdot 4^x}{\ln 4} + 3\sqrt[3]{x} + C$; ***20)*** $\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2} - \dfrac{5^{x-1}}{\ln 5} + C$; ***21)*** $\dfrac{4^x}{\ln 4} + \dfrac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \dfrac{9^x}{\ln 9} + C$;

22) $-\dfrac{1}{5^x \ln 5} - \dfrac{1}{2^x \ln 2} + C$; ***23)*** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$; ***24)*** $\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{4} + C$;

25) $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x + C$; ***26)*** $x + \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$; ***27)*** $x^3 + \operatorname{arctg} x + C$;

28) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$; ***29)*** $\dfrac{2}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$;

30) $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x+4}{x-4}\right| + C$; ***31)*** $-x - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{12}{x} + 6\ln|x| + C$.

385. ***7)*** $\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2} + C$; ***8)*** $\dfrac{(2+5x)^{10}}{50} + C$; ***9)*** $\dfrac{1}{3}\ln|3x - 1| + C$;

10) $-\ln|\cos x| + C$; ***11)*** $\ln|\sin x| + C$; ***12)*** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$;

13) $-\dfrac{1}{2}\arccos^2 x + C$; ***14)*** $-\dfrac{1}{3\arcsin^3 x} + C$; ***15)*** $\dfrac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C$;

16) $e^{\sin x} + C$; ***17)*** $-\dfrac{4^{\cos 5x}}{5\ln 4} + C$; ***18)*** $\dfrac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$; ***19)*** $-\dfrac{3}{20}\sqrt[3]{(3 + 5\cos x)^4} + C$;

20) $\dfrac{1}{8}\sqrt[4]{8x^4 + 125} + C$; ***21)*** $\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{3} + C$; ***22)*** $\dfrac{1}{6}\ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12} + 3}\right| + C$;

23) $\ln|\ln x| + C$; ***24)*** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1 + \ln x)^2} + C$; ***25)*** $-\sin\dfrac{1}{x} + C$;

26) $\dfrac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C$; ***27)*** $\ln(1 + x^2) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$;

28) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + e^x + \ln|e^x - 1| + C$; ***29)*** $\cos\left(\dfrac{1}{e^x}\right) + C$; ***30)*** $\arcsin\dfrac{e^x}{2} + C$;

31) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$; ***32)*** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C$; ***33)*** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C$;

34) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$; ***35)*** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; ***36)*** $\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C$;

37) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C.$

386. ***8)*** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; ***9)*** $x\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$;

10) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; ***11)*** $\frac{5x}{2}e^{2x}-\frac{7}{4}e^{2x}+C$;

12) $-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+C$;

13) $\frac{2}{25}\cos 5x+\frac{2}{5}x\sin 5x+\frac{3}{5}\sin 5x+C$; ***14)*** $-\frac{2}{5}e^x\cos 2x+\frac{1}{5}e^x\sin 2x+C$;

15) $\frac{2}{5}e^{2x}\cos x+\frac{1}{5}e^{2x}\sin x+C$; ***16)*** $\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)+C$;

17) $-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)+C$; ***18)*** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$;

19) $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$; ***20)*** $\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+C$;

21) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+7}+\frac{7}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|+C$;

22) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$; ***23)*** $x\ln(x^2+4)-2x+4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;

24) $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C$;

25) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

26) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$; ***27)*** $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$;

28) $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln|x+1|+C$; ***29)*** $\frac{1}{2}e^{2x}+4xe^x-4e^x+\frac{4}{3}x^3+C$;

30) $\frac{1}{2}e^{2x}+e^x(\cos x-\sin x)-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$;

31) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$; ***32)*** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln^2 x-\frac{9}{8}\sqrt[3]{x^4}\ln x+\frac{27}{32}\sqrt[3]{x^4}+C$;

33) $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; ***34)*** $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;

35) $-2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x}+6x\sin\sqrt{x}-12\sin\sqrt{x}+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C$;

36) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$; ***37)*** $-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$;

38) $-\frac{1}{2}x^2\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C.$

387. ***3)*** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; ***4)*** $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$;

5) $x - 3\ln(x^2+4x+5) + 8\,\mathrm{arctg}(x+2) + C$; **6)** $2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C$;
7) $\ln|x| - \ln|x+1| + C$; **8)** $\ln|(x-2)(x+5)| + C$;
9) $-\dfrac{7}{(x-2)^2} - \dfrac{2}{x-2} + C$; **10)** $\dfrac{17}{x+4} + +3\ln|x+4| + C$;
11) $2\ln\left|\dfrac{x+2}{x-4}\right| + \ln|x-5| + C$; **12)** $2\ln|x-1| + \dfrac{3}{2}\ln|2x+1| - \ln|x-2| + C$;
13) $-\dfrac{2}{x+3} + 2\ln|x+3| - \ln|x+2| + C$; **14)** $4\ln|x+5| - \ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + C$;
15) $\ln(x^2+4x+8) - \ln|x-3| - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{2}+1\right) + C$;
16) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \mathrm{arctg}(x+1) - 2\ln|x-3| + C$;
17) $\dfrac{3}{x+2} + 5\ln|x+2| - 5\ln|x+3| + C$;
18) $2x + \dfrac{15}{8}\ln|x+7|\dfrac{1}{8}\ln|x-1| + \ln|x+5| + C$;
19) $\dfrac{1}{3}\ln|x-1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C$;
20) $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + C$;
21) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C$; **22)** $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x\sqrt{3}}{3} + C$;
23) $-3\ln|x| + \dfrac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x-1}{2} + C$;
24) $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 32\ln|x-2| + C$;
25) $\dfrac{1}{3}x^3 - 7x + 7\sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}x\right) + C$; **26)** $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}\ln|x^3-1| + C$;
27) $\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - \ln|x| + 8\ln|x-1| + C$; **28)** $\dfrac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-2| + C$;
29) $\ln|x-2| - \dfrac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C$; **30)** $\dfrac{1}{66}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| - \dfrac{\sqrt{2}}{22}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$;
31) $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+2) + \dfrac{\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$;
32) $-\dfrac{1}{2}\ln|x| + \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4) + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2} + C$.

388. **3)** $-2\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right| + \ln|x-1| - 4\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C$;
4) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C$; **5)** $\ln x - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$;

6) $-\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+$
$+6\sqrt[6]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}-1|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$;

7) $\dfrac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$; ***8)*** $\dfrac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\dfrac{x}{2}+C$;

9) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$; ***10)*** $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C$;

11) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln|\sqrt[3]{3x+1}-1|+C$;

12) $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$;

13) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$;

14) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C$;

15) $\dfrac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$; ***16)*** $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)+C$;

17) $-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{(x-3)^5}+2\sqrt{x-3}+3\sqrt[3]{x-3}-3\ln\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[6]{x-3}+1\right)-$
$-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[6]{x-3}-1\right)\right)+C$;

18) $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-9\ln|\sqrt[6]{x}-1|-3\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$;

19) $\dfrac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$; ***20)*** $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$;

21) $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$;

22) $x-\dfrac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3x+1}+$
$+3\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln(\sqrt[6]{3x+1}+1)+C$;

23) $\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$;

24) $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$; ***25)*** $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$;

26) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+C$; ***27)*** $\dfrac{10}{27}\sqrt{(1-3x)^3}-\dfrac{46}{9}\sqrt{1-3x}+C$;

28) $\dfrac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\dfrac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$;

29) $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x+1)^8}-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$;

30) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$; ***31)*** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$; ***32)*** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

389. ***3)*** $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$; ***4)*** $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$;

5) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{7}\sin 7x + \sin x + \frac{1}{9}\sin 9x\right) + C$;

6) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$; ***7)*** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; ***8)*** $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

9) $-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{15}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{15}\sin x + C$;

10) $-\frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{8}\sin x\cos^3 x + \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{16}x + C$;

11) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$; ***12)*** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$;

13) $-\frac{\cos^4 x}{\sin x} - \cos^2 x\sin x - 2\sin x + C$; ***14)*** $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right) + C$;

15) $\frac{\sin^5 x}{\cos x} - \sin^3 x\cos x + \frac{3}{2}\cos x\sin x - \frac{3}{2}x + C$;

16) $\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C$; ***17)*** $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

18) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C$;

19) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin^3 2x\cos 2x - \frac{3}{32}\sin 4x + C$; ***20)*** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) + C$;

21) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\right) + C$; ***22)*** $x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$;

23) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + C$; ***25)*** $-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$;

26) $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - x + C$; ***27)*** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}\right| + C$;

28) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$; ***29)*** $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C$; ***30)*** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$;

31) $\frac{1}{5}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| - \frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\right| + C$; ***32)*** $12\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 6\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right) - 5x + C$;

33) $-\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right) + 3x + C$; ***34)*** $\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 4\right)\right) + C$.

390. б) 200; в) 29 575; г) 0. **391.** б) 1 250.

392. $\pi = 25q - 0{,}002q^2 + 8\,680$, $q = 6\,250$. **393.** а) $C(q) = 15\,000\,e^{0{,}001q^2} + 5\,000$.

394. ***2)*** $\frac{\pi}{4}$; ***3)*** $\frac{\pi}{3}$; ***4)*** 1; ***5)*** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$; ***6)*** $1 - \frac{\pi}{4}$; ***7)*** $\frac{61}{6}$; ***8)*** $\frac{6}{5}$; ***9)*** $1 - \frac{\pi}{4}$.

395. ***8)*** $e - \sqrt{e}$; ***9)*** $2\sqrt{2} - 2$; ***13)*** $\frac{\pi^2}{32}$; ***14)*** $\frac{2e^3+1}{9}$; ***15)*** $\sqrt{65} - 1$;

16) $2-\ln 2$; ***17)*** $1-\dfrac{2}{e}$; ***18)*** 0; ***19)*** $2\,\mathrm{arctg}\, e-\dfrac{\pi}{2}$; ***20)*** $3\ln 2-\ln 5$; ***21)*** 1;
22) π; ***23)*** $4-\pi$; ***24)*** $\dfrac{8}{9}e^3$; ***25)*** $\dfrac{2}{3}$; ***26)*** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$; ***27)*** $\dfrac{1}{2}$; ***28)*** $2\ln 2-1$;
29) $\ln(e+1)$; ***30)*** $\dfrac{3}{2}$; ***31)*** $\sin 1$; ***32)*** $\dfrac{\pi}{4}$; ***33)*** $4-2\ln 3$; ***34)*** $3\ln 3-2$;
35) $\dfrac{32}{3}$; ***36)*** $2\ln 2-\dfrac{3}{4}$; ***37)*** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; ***38)*** $2\ln 2-\dfrac{1}{2}$; ***39)*** $\dfrac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$;
40) $\dfrac{32}{3}$; ***41)*** $2-\sqrt{5}+2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{5}$; ***42)*** $2-\ln 2$; ***43)*** $\dfrac{17}{6}$.

396. ***2)*** $\dfrac{32}{3}$; ***3)*** $\dfrac{4}{3}$; ***4)*** 12; ***5)*** $\dfrac{1}{6}$; ***6)*** $\dfrac{4}{3}$; ***7)*** $\dfrac{1}{6}$; ***8)*** $\dfrac{32}{3}$; ***9)*** $12\sqrt{3}$; ***10)*** $9-\dfrac{8}{\ln 9}$;
11) $\dfrac{16}{3}$; ***12)*** $\dfrac{5}{12}$; ***13)*** $\dfrac{9}{2}$; ***14)*** $\dfrac{\pi^2}{8}+1$; ***15)*** $\dfrac{3}{2}$; ***16)*** 1; ***17)*** $\dfrac{8}{3}$; ***18)*** $\dfrac{13}{3}$;
19) $\dfrac{32\sqrt{6}}{3}$; ***20)*** $\dfrac{7}{3}$; ***21)*** $\dfrac{11}{2}$; ***22)*** $\dfrac{23}{3}$; ***23)*** $\dfrac{35}{2}-6\ln 6$; ***24)*** $a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{a-1}{\ln a}-\dfrac{a-1}{a\ln a}$;
25) 3; ***26)*** $\dfrac{7}{12}$; ***27)*** $\dfrac{17}{12}$; ***28)*** $\dfrac{4}{3}+2\pi$; ***29)*** $\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{9}{2}$; ***30)*** $4\pi-\dfrac{32}{3}$; ***31)*** 6π.

397. ***2)*** $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$; ***3)*** $6\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})$; ***4)*** $\dfrac{232}{15}$; ***5)*** $2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$;
6) $\ln(1+\sqrt{2})$; ***7)*** $4\sqrt{2}+\ln\left(\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}\right)$; ***8)*** $\dfrac{1}{4}(e^2+1)$;
9) $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$; ***10)*** $4\ln 3-2$; ***11)*** $\arcsin\dfrac{3}{4}$; ***12)*** $\dfrac{\pi+1}{4}$;
13) $1+\ln 2$; ***14)*** $\ln(2+\sqrt{3})$; ***15)*** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; ***16)*** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

398. ***2)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***3)*** 27π; ***4)*** $\dfrac{80\pi}{3}$; ***5)*** $\dfrac{3\pi}{10}$; ***6)*** $\dfrac{65\pi}{6}$; ***7)*** $\pi\left(\dfrac{e^2+e^{-2}}{4}+1\right)$; ***8)*** $\dfrac{5\pi}{6}$;
9) $\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{3}$; ***10)*** $\dfrac{\pi}{4}(e^2+1)$; ***11)*** 6π; ***12)*** $\dfrac{24\pi}{5}$; ***13)*** $\dfrac{\pi}{2}$; ***14)*** $\dfrac{128\pi}{15}$; ***15)*** $\dfrac{96\pi}{5}$;
16) $\dfrac{64\pi}{3}$; ***17)*** $4\pi^2$; ***18)*** $\pi\left(\ln 2-\dfrac{1}{6}\right)$; ***19)*** $\pi\left(2\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$; ***20)*** $\dfrac{4a^2b\pi}{3}$.

399. ***2)*** $K_{\text{ср}}=61$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{91}}{3}$; ***3)*** $K_{\text{ср}}=3-\log_2 e$, $x=\dfrac{8}{e}-1$;
4) $K_{\text{ср}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$, $x\approx 2,26$.

400. ***2)*** $V=\ln\dfrac{17}{14}+5$; ***3)*** $V=\dfrac{3}{e^2}-\dfrac{4}{e^3}$; ***4)*** $V=4\sin\dfrac{1}{4}+1$.

401. ***2)*** $K\approx 37{,}7$; ***3)*** $K\approx 193{,}5$; ***4)*** $K\approx 41{,}5$.

402. ***2)*** $\dfrac{128}{3}$; ***3)*** $\approx 0{,}32$; ***4)*** $\approx 0{,}8$.

403. ***2)*** 1; ***5)*** $\frac{\pi}{4}$; ***6)*** -1; ***7)*** расходится; ***8)*** $\frac{\pi^2}{8}$; ***9)*** расходится; ***10)*** π; ***11)*** $\frac{\pi}{2}$.

404. ***3)*** $\frac{\pi}{2}$; ***4)*** $\frac{1}{\ln 2}$; ***6)*** 0; ***7)*** расходится; ***8)*** $\frac{3\pi^2}{8}$; ***9)*** расходится;
10) расходится; ***11)*** $-\frac{1}{9}$; ***12)*** $\frac{\pi}{3}$; ***13)*** $\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$.

Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных

405. ***2)*** 5, 1/5; ***3)*** $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

406. ***3)*** Вся плоскость Oxy, исключая прямую $y = 3x$;
4) часть плоскости Oxy, лежащая выше прямой $y = -x$;
5) внешняя по отношению к параболе $y^2 = 2x - 4$ часть плоскости Oxy (без границы);
6) внешняя часть круга $x^2 + y^2 = 16$ (без границы круга);
7) расположенная в правой полуплоскости между прямыми $y = -x$ и $y = x$ (без прямой $y = -x$) часть плоскости Oxy;
8) точки I и III координатных углов, включая оси координат;
9) кольцо между окружностями $x^2+y^2 = 1$ и $x^2+y^2 = 3$, включая их границы;
10) вся плоскость Oxy; ***11)*** плоскость Oxy без прямых $y = x$ и $y = -x$;
12) правая полуплоскость, включая ось Oy.

407. ***2)*** $(1, -1)$; ***3)*** $(0, 0)$; ***4)*** линия $x - y = 0$;
5) линии разрыва — прямые $x = k\pi$ и $y = m\pi$, где $k, m \in \mathbb{Z}$;
6) окружность $x^2 + y^2 = 4$; ***7)*** прямая $y = x/2$; ***8)*** линия $y = x^2$.

408. ***3)*** $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2$;
4) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 12xy - 12y^2 - 2x$;
5) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{5y}{(x+2y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5x}{(x+2y)^2}$;
6) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$; ***7)*** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$;
8) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x+3y) - x^2\sin(x+3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2\sin(x+3y)$;
9) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{3x^2 - y^4}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y^3}{3x^2 - y^4}$;
10) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3\frac{y^2\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$;

11) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{6xy}{\sqrt{1-4x^6y^2}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-4x^6y^2}};$

12) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xe^{2x^2-y^5},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-5y^4e^{2x^2-y^5};$

13) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{x^2\cos^2\frac{3x-y^2}{x}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y}{x\cos^2\frac{3x-y^2}{x}};$

14) $\dfrac{\partial r}{\partial \rho}=2\rho\sin^4\theta,\ \dfrac{\partial r}{\partial \theta}=4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta;$ ***15)*** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{y^2}-\dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{2x^2}{y^3};$

16) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y+y^3),\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy(x^2+y^2)}(x^3+3xy^2);$

17) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{\sqrt{x}},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2\sqrt{x}+6y\sqrt[3]{z^2},\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}};$

18) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2};$

20) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{z}{y^2}e^{-\frac{z}{y}},\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{z}{y}};$

21) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(2x-y-z),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=(x-z)(x-2y+z),\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=(x-y)(-y+2z-x).$

409. $f'_x\left(-1,\dfrac{\pi}{4}\right)=-1,\ f'_x\left(-1,\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$ **410.** $f'_x(3,-4)=\dfrac{4}{25},\ f'_y(-12,5)=-\dfrac{12}{169}.$

411. $f'_x(3,2)=56,\ f'_y(3,2)=42.$

413. ***2)*** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-10y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-10x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12y;$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4y}{(x+y)^3},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\dfrac{x-y}{(x+y)^3},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4x}{(x+y)^3};$

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^3)-4x^2\sin(x^2+y^3),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6xy^2\sin(x^2+y^3),$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y\cos(x^2+y^3)-9y^4\sin(x^2+y^3);$

5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin\dfrac{y}{x^2}+e^x\ln y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\cos y}{x}+\dfrac{e^x}{y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin y\ln x-\dfrac{e^x}{y^2};$

6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{y^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}};$

7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^2-1}{x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$

8) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^4\sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2y\cos^2 xy^2+xy^2\sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2},$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x\cos^2 xy^2+2x^2y^2\sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2};$

9) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{1-2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{4x}{(1-2y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{8x^2}{(1-2y)^3}$;

10) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y$;

11) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2}{(x-y)^3}$;

12) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y$;

13) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{4xy+2y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2-2x^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$;

14) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{(x^2y+e^{xy})e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$;

15) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^{2y}\ln^2 x$;

16) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(\cos y + x\sin y + 2\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x(\cos y + x\cos y - \sin y)$,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x(x\sin y + \cos y)$.

417. 2) $dz = (8x^3 - 2xy^3 + 5y)\,dx + (4y^3 - 3x^2y^2 + 5x)\,dy$;

3) $dz = \sin 2x\,dx - \sin 2y\,dy$; **4)** $dz = y^2x^{y-1}\,dx + x^y(1+y\ln x)\,dy$;

5) $dz = e^{y^2-xy}\Big((2y-x)\,dy - y\,dx\Big)$; **6)** $dz = \dfrac{(6x+1)\,dx - 2y\,dy}{2\sqrt{3x^2-y^2+x}}$;

7) $dz = \dfrac{2\,dx - dy}{1+(2x-y)^2}$; **8)** $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2\sin^2\frac{y}{x}}$;

9) $dz = (5y^4 + 4xy^7)\,dx + (20xy^3 + 14x^2y^6)\,dy$;

10) $dz = \dfrac{1}{(x^3+y^3)^2}\sin\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\Big(x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)dy\Big)$;

11) $dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2\,dx + 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)\,dy$;

12) $dv = \dfrac{t}{u^2+t^2}\,du - \dfrac{u}{u^2+t^2}\,dt$;

13) $dz = \left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy$;

14) $dz = \dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\,dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}\,dy$; **15)** $dz = -\dfrac{2\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{2x\,dy}{y\sqrt{x^2+y^2}}$;

16) $dz = \dfrac{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,du + \dfrac{v\,dv}{2\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{u^2+v^2}}$;

17) $dz = 2\dfrac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}(x\,dx + y\,dy)$;

19) $du = 2xyz^4\,dx + x^2z^4\,dy + 4x^2yz^3\,dz$; ***20)*** $du = -\dfrac{y}{x^2z}\,dx + \dfrac{dy}{xz} - \dfrac{y\,dz}{xz^2}$;

21) $du = (3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz$;

22) $du = \dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\,dx + \dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dy - \dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dz$;

23) $du = y^z x^{y^z-1}\,dx + zy^{z-1}x^{y^z}\ln x\,dy + y^z x^{y^z}\ln x\ln y\,dz$.

418. ***1)*** $-7/130 \approx -0{,}054$; ***2)*** $-0{,}1e^2 \approx -0{,}74$.

419. ***2)*** 5,05; ***3)*** 10,28; ***4)*** 2,18; ***5)*** 1,08; ***6)*** 0,82. Указание. Принять $\pi = 3{,}14$;

7) 0,227. Указание. Выразить приращения аргументов в радианах, считая, что $\pi = 3{,}14$;

8) 3,037; ***9)*** $-0{,}03$; ***10)*** $-5{,}37$; ***11)*** 108,972.

420. ***2)*** $a\cos 2t$; ***3)*** 0;

5) $\left(y \operatorname{arctg} xy + \dfrac{xy^2}{1 + x^2y^2}\right)2t + \left(x \operatorname{arctg} xy + \dfrac{x^2y}{1 + x^2y^2}\right)3t^2$;

6) $2e^{2x-3y}\dfrac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t - 1)$; ***7)*** $yx^{y-1}\dfrac{1}{t} + x^y\ln x\cos t$;

9) $-\sin\left(2t + \dfrac{4}{t^2} - \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)\left(2 - \dfrac{8}{t^3} - \dfrac{\ln t - 2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}\right)$; ***10)*** $t^7(8\sin t + t\cos t)$.

421. ***2)*** $1 + \sqrt{3}$; ***3)*** 2. **422.** $-\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$. **423.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **424.** $\dfrac{16}{3}$.

425. ***1)*** $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$; ***2)*** $\dfrac{2}{5}$.

426. ***2)*** $(-2, -4)$; ***3)*** $(3, 0)$; ***4)*** $(-4, -4)$; ***5)*** $(0, -e)$.

427. ***2)*** $(2x, 2y, -2z)$; ***3)*** $(ye^{xy}, xe^{xy} - z^2, -2yz)$;

4) $\left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

428. ***2)*** $\operatorname{grad} u = (1, -12, -5)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{170}$;

3) $\operatorname{grad} u = (2, -2, -4)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{6}$; ***4)*** $\operatorname{grad} u = (-6, -4, 2)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{14}$;

5) $\operatorname{grad} u = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $|\operatorname{grad} u| = 1$; ***6)*** $\operatorname{grad} u = (-2, 6, -3)$, $|\operatorname{grad} u| = 7$;

7) $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $|\operatorname{grad} u| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; ***8)*** $\operatorname{grad} u = (1, 1, -2)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{6}$;

9) $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}, 0\right)$, $|\operatorname{grad} u| = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. **429.** 637,5.

431. ***1)*** $u'_x = \dfrac{a_1}{x - c_1}$, $u'_y = \dfrac{a_2}{y - c_2}$. **432.** $E_{zx}(1, 1) \approx 0{,}67$, $E_{zy} \approx 1{,}33$.

433. $E_{zx} = \alpha$, $E_{zy} = \beta$.

434. ***2)*** $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{\beta + 1}$.

435. ***2)*** $z_{\min} = z\,(1, 2) = -7$; ***3)*** экстремума нет; ***4)*** экстремума нет;

5) $z_{\min} = z(-1, -2) = -11$; ***6)*** $z_{\min} = z(1, 4) = -21$; ***7)*** экстремума нет;

8) $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$; ***9)*** $z_{\min} = z\left(1, -\dfrac{1}{2}\right) = 0$; ***10)*** $z_{\max} = z\,(-1, 1) = 1$;

11) в точках $M_1(-1, -2)$ и $M_2(1, 2)$ экстремума нет; $z_{\max} = z(-2, -1) = 28$, $z_{\min} = z(2, 1) = -28$;

12) $z_{\min} = z(0, 0) = 0$; ***13)*** $z_{\max} = z\,(4, 4) = 12$; ***14)*** $z_{\max} = z(0, 0) = 2$;

15) $z_{\min} = z(1, 1) = 4$, $z_{\max} = z(2, 1) = -28$; ***16)*** $z_{\max} = z(2, -2) = 3$;

17) $z_{\min} = z(1, 3) = 10 - 18 \ln 3$; ***18)*** $z_{\min} = z(-2, 0) = -2/e$;

19) $z_{\min} = z\,(-2, 0) = -2/e$; ***20)*** $z_{\max} = z\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

21) $z_{\max} = z\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

436. ***2)*** $z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 41$; ***3)*** $z_{\text{наим}} = -1/3$, $z_{\text{наиб}} = 2$;

4) $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 4$; ***5)*** $z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 0$; ***6)*** $z_{\text{наим}} = -4$, $z_{\text{наиб}} = 6$;

7) $z_{\text{наим}} = 5$, $z_{\text{наиб}} = 12$; ***8)*** $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 5$; ***9)*** $z_{\text{наим}} = -11$, $z_{\text{наиб}} = 9$;

10) $z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 17$; ***11)*** $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 36$;

12) $z_{\text{наим}} = -1$, $z_{\text{наиб}} = 13$; ***13)*** $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 16$;

14) $z_{\text{наим}} = -24$, $z_{\text{наиб}} = 120$; ***15)*** $z_{\text{наим}} = -15$, $z_{\text{наиб}} = -62/27$;

16) $z_{\text{наим}} = -14$, $z_{\text{наиб}} = 18$; ***17)*** $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 3\sqrt{3}/2$;

18) $z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 1 + \sqrt{3}/2$; ***19)*** $z_{\text{наим}} = -1/8$, $z_{\text{наиб}} = 1$.

437. ***2)*** $z_{\text{наим}} = -2\sqrt{2}$, $z_{\text{наиб}} = 2\sqrt{2}$; ***3)*** $z_{\text{наим}} = -30$, $z_{\text{наиб}} = 2$;

4) $z_{\text{наим}} = -1/2$, $z_{\text{наиб}} = 1/2$; ***5)*** $z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 3$;

6) $z_{\text{наим}} = -120$, $z_{\text{наиб}} = 8$; ***7)*** $z_{\text{наим}} = -2(\sqrt{2} + 1)$, $z_{\text{наиб}} = 2(\sqrt{2} - 1)$;

8) $z_{\text{наим}} = -64$, $z_{\text{наиб}} = 8$; ***9)*** $z_{\text{наим}} = -40$, $z_{\text{наиб}} = 5$;

10) $z_{\text{наим}} = -2$, $z_{\text{наиб}} = 30$; ***11)*** $z_{\text{наим}} = -48$, $z_{\text{наиб}} = z(1, -1) = 2$.

438. $z_{\text{наиб}} = 11$, $z_{\text{наим}} = 1$.

439. ***2)*** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; ***3)*** $\dfrac{9\sqrt{5} - 15}{\sqrt{50}}$; ***4)*** $\dfrac{8}{\sqrt{130}}$. **440.** $\dfrac{1}{14}\sqrt{2730}$.

442. Максимум прибыли равен 176 при $x = 8$, $y = 4$.

444. Длина и ширина равны $2\delta + \sqrt[3]{2V}$, высота равна $\delta + \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

445. $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **446.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

447. $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$. **448.** $R = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}}$.

449. Если R — радиус основания палатки, H — высота цилиндрической части, h — высота конической верхушки, то должны иметь место следующие соотношения: $R = h\sqrt{5}/2$, $H = h/2$.

450. Проволочная сетка должна отклоняться от стены на угол $\pi/3$, участок должен захватывать отрезок каменной стены длиной $4\sqrt[4]{3}\sqrt{S}/3$, его боковые стороны должны быть равны $2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}/3$.

451. Канал должен соединять точку $(1/2, 1/4)$ параболы с точкой $(11/8, -5/8)$ прямой, его длина при этом равна $7\sqrt{2}/8$. Указание. См. задачу 439.1.

Глава 7. Дифференциальные уравнения

452. ***2)*** $y'x - y = x^2$; ***3)*** $y'(x^2 - y^2) = 2xy$; ***4)*** $y' = 2y$; ***6)*** $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x}\arcsin y$; ***8)*** $y = xy'\ln\dfrac{x}{y}$; ***9)*** $y'\sin x = y\ln y$; ***10)*** $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

11) $(1+x^2)y' = xy(1+y^2)$; ***12)*** $y' = -2xy$; ***13)*** $xy' - y + x\sqrt{x^2-y^2} = 0$.

453. ***2)*** $y = \dfrac{1}{27}e^{3x} + \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}\sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

3) $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$; ***5)*** $y = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1x + C_2$;

6) $y = e^x - \dfrac{x^4}{24} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$, $y = e^x - \dfrac{x^4}{24} + 1$;

7) $y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

8) $y = -\dfrac{1}{27}\sin 3x + \dfrac{1}{27}x\cos 3x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

9) $y = \dfrac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) + C_1x + C_2$.

454. ***2)*** $y = -\dfrac{1}{\ln C(x^2-1)}$; ***3)*** $y = \operatorname{arctg}\left(C - \dfrac{2}{x}\right)$; ***4)*** $y = \ln(e^x + C)$;

5) $y = \arcsin x + C$; ***7)*** $y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $y = 1$; ***8)*** $y = (x+C)^2$, $y = (x+1)^2$;

9) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x + C$, $y = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x - 1$; ***10)*** $y = Ce^{\sqrt{4-x^3}}$;

11) $e^x - (y+1)e^{-y} = C$; ***12)*** $y = C\ln x$, $y = \ln x$; ***13)*** $1 + e^y = C(1+x^2)$;

14) $y = e^{Ce^x}$; ***15)*** $y = \dfrac{2}{\ln|2x+1| + C}$, $y = \dfrac{2}{\ln\frac{|2x+1|}{9} + 2}$.

455. ***3)*** $y = x\arcsin(C - \ln|x|)$; ***4)*** $y = x\operatorname{tg}(\ln|x| + C)$; ***5)*** $y = xe^{Cx}$;

6) $y^3 - 3x^2y - x^3 = C$; ***7)*** $y = x + x(Cx+1)^2$; ***8)*** $2y^2 - 2xy + x^2 = C$;

9) $y = x\ln(C + \ln|x|)$, $y = x\ln(1 + \ln|x|)$; ***10)*** $y = Ce^{-2\sqrt{y/x}}$;

11) $e^{x/y}+\ln|x|=C$; ***13)*** $\ln|y-x-1|=C-\dfrac{x-2}{y-x-1}$;

14) $(y+2x-3)^2=C(6x+2y-5)$; ***15)*** $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$;

16) $\ln\dfrac{y+2}{(x-3)^2}+2\operatorname{arctg}\dfrac{y+2}{x-3}=C$.

456. ***2)*** $y=Ce^x-x-1$; ***3)*** $y=1+Ce^{-x^3/3}$; ***4)*** $y=3+\dfrac{C}{x}$;

6) $xe^xy=x^3+C,\ xe^xy=x^3-1$; ***7)*** $x^3y=2x+C,\ x^3y=2x-1$;

8) $y=(x\ln x-x+C)x^{-2},\ y=(x\ln x-x+3)x^{-2}$; ***9)*** $y=x^3(e^x+C),\ y=x^3e^x$;

10) $y=-2\cos^2x+C\cos x$; ***11)*** $y=\left(e^{x/2}(x-1)+C\right)^2e^{-x}$;

12) $y=\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{\ln|\cos x|+C}{x}\right)^2$; ***14)*** $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$;

15) $y=C\sin x-\cos x,\ y=2\sin x-\cos x$; ***16)*** $x=Cy^2+2\ln|y|-y+1$;

17) $y=\left(\dfrac{3}{14}x^{7/2}+C\right)^4x^{-2},\ y=\left(\dfrac{3}{14}x^{7/2}+\dfrac{11}{14}\right)^4x^{-2}$; ***18)*** $x=y^2+Cy$;

19) $y=(\operatorname{arctg}x+C)e^{-x},\ y=(\operatorname{arctg}x+1)e^{-x}$; ***20)*** $y=\dfrac{1}{x(C-\ln x)}$.

461. $y=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{5}{9}$. **462.** $p=\dfrac{15}{4}t-\dfrac{77}{16}+C\,e^{-\frac{4t}{3}}$. **464.** $q=\dfrac{1}{\sqrt[3]{p}}$.

465. ***4)*** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$; ***5)*** $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$;

6) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$; ***7)*** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; ***8)*** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$;

9) $y=C_1+C_2e^{-4x}$; ***10)*** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

11) $y=C_1+C_2e^x$; ***12)*** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; ***13)*** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$;

14) $y=C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}$; ***15)*** $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$;

16) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$; ***17)*** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$;

18) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3\cos 3x+C_4\sin 4x$;

19) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3e^{-2x}+C_4e^{2x}$.

466. ***2)*** $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2\ln x}{x}$; ***3)*** $y=C_1+C_2\ln x$; ***4)*** $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$;

6) $y=\dfrac{C_1}{(x+2)^3}+C_2(x+2)$.

467. ***2)*** $y=C_1e^x+C_2xe^x+\dfrac{1}{x}$; ***3)*** $y=C_1+C_2e^x-4\sqrt{x}$;

4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

5) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$;

6) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$;

7) $y=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}+e^{x^2}$; ***8)*** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$;

9) $y = C_1 + C_2 x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x$;

10) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| + \dfrac{1}{2} \sin x \ln \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

468. ***2)*** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3x^2 - 3x - \dfrac{9}{2}$; ***3)*** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \dfrac{5}{3} e^{-x}$;

4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \dfrac{1}{5}$; ***5)*** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{28}{25}\right) e^{2x}$;

7) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \left(\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2\right) e^{-x}$;

8) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2 + 3x) e^{-x}$;

9) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \left(-\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right) e^{-2x}$;

11) $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \dfrac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x)$;

12) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{3}{4} x \cos 2x$;

13) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{4} x \cos x + \dfrac{1}{4} x^2 \sin x$;

14) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \dfrac{13}{72} x \cos 3x + \dfrac{1}{12} x^2 \sin 3x$;

15) $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \dfrac{1}{4} x e^x \sin 2x$;

16) $y = e^{\frac{3}{5}x} \left(C_1 \cos \dfrac{4}{5}x + C_2 \sin \dfrac{4}{5}x\right) - \dfrac{1}{8} x e^{\frac{3}{5}x} \cos \dfrac{4}{5}x$;

17) $y = C_1 + C_2 e^x - \dfrac{1}{6} e^{3x} - \dfrac{1}{3} x^3 - x^2 - 2x$;

18) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2} x \cos x + \dfrac{1}{2} e^x$;

19) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \dfrac{1}{20} \cos x - \dfrac{3}{20} \sin x + \dfrac{7}{260} \cos 3x + \dfrac{9}{260} \sin 3x$;

20) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x + \dfrac{1}{2} e^x + \dfrac{1}{20} \sin 2x - \dfrac{1}{10} \cos 2x$.

469. ***2)*** $y = x e^{3x}$; ***3)*** $y = 9 - 2e^{-4x}$; ***4)*** $y = 2e^{-\frac{1}{2}x} + x e^{-\frac{1}{2}x}$;

5) $y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2 e^x$; ***6)*** $y = (1 - 3x) e^{3x} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{3}$;

7) $y = 3\pi \sin 2x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$; ***8)*** $y = \dfrac{3}{2} x^2 e^{-2x}$;

9) $y = \cos x + \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right) \sin x + x$; ***10)*** $y = \dfrac{1}{4} e^x - 2e^{2x} + \dfrac{1}{4} e^{3x} (2x^2 - 6x + 7)$.

470. ***1)*** $P(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 1$; ***2)*** $P(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 1$;

3) $P(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t/2} + 4$.

Глава 8. Ряды

472. ***2)*** $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; ***3)*** $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

4) $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ***5)*** $(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

6) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ***7)*** $a_n = \dfrac{1}{2^n+3}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

8) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ***9)*** $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

473. ***2)*** $\dfrac{3}{4}$; ***4)*** $\dfrac{23}{90}$; ***5)*** $\dfrac{1}{4}$; ***6)*** 1; ***7)*** 2; ***8)*** 3.

474. ***3)*** Не выполняется, ряд расходится; ***4)*** не выполняется, ряд расходится;
5) не выполняется, ряд расходится; ***6)*** выполняется;
7) не выполняется, ряд расходится; ***8)*** не выполняется, ряд расходится.

475. ***3)*** Ряд сходится; ***4)*** ряд расходится; ***5)*** ряд сходится; ***7)*** ряд сходится;
8) ряд расходится; ***9)*** ряд расходится; ***10)*** ряд расходится;
11) ряд сходится; ***12)*** ряд сходится; ***13)*** ряд сходится; ***14)*** ряд расходится;
15) ряд сходится; ***16)*** ряд сходится; ***17)*** ряд расходится.

476. ***2)*** Ряд расходится; ***3)*** ряд сходится; ***4)*** ряд расходится;
5) ряд сходится; ***6)*** ряд сходится; ***7)*** ряд расходится; ***8)*** ряд сходится;
9) ряд сходится; ***10)*** ряд расходится.

477. ***2)*** Ряд расходится; ***3)*** ряд расходится; ***4)*** ряд сходится;
5) ряд сходится; ***6)*** ряд сходится; ***7)*** ряд сходится; ***8)*** ряд сходится;
9) ряд расходится; ***10)*** ряд расходится.

478. ***2)*** Ряд сходится; ***3)*** ряд расходится; ***4)*** ряд сходится;
5) ряд расходится; ***6)*** ряд расходится; ***7)*** ряд сходится.

479. ***3)*** Ряд сходится абсолютно; ***4)*** ряд расходится; ***5)*** ряд сходится условно;
6) ряд сходится абсолютно; ***7)*** ряд сходится абсолютно;
8) ряд сходится абсолютно; ***9)*** ряд сходится условно;
10) ряд расходится; ***11)*** ряд сходится условно; ***12)*** ряд сходится условно;
13) ряд сходится абсолютно; ***14)*** ряд сходится абсолютно;
15) ряд расходится; ***16)*** ряд сходится условно; ***17)*** ряд сходится абсолютно;
18) ряд сходится абсолютно.

480. ***3)*** $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$; ***4)*** $\left[\dfrac{1}{10}, 10\right)$; ***5)*** $\mathbb{R} \setminus \{2 + 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$; ***6)*** $\varnothing$;

7) $(-\infty, \infty)$; ***8)*** $[0, \infty)$; ***9)*** $(0, \infty)$; ***10)*** $(-1, 1)$; ***11)*** $(-\infty, -1) \cup \left[-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$;

12) $(-\infty, \infty)$; ***13)*** $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$; ***14)*** $(-2, 2)$; ***15)*** $\varnothing$.

481. ***2)*** 3; ***3)*** $[-1,1]$; ***4)*** $[-4,6)$; ***5)*** $[-1,1]$; ***7)*** $(-\infty,+\infty)$; ***8)*** $[-7,3)$; ***9)*** $(-1,7)$; ***10)*** $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; ***11)*** $(-4,4)$; ***12)*** $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$; ***13)*** $(-2,4]$; ***14)*** $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; ***15)*** $(-5,-3)$; ***16)*** $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$; ***17)*** $(1,3]$; ***18)*** $[2,3)$; ***19)*** $(-2;0)$; ***20)*** $(0,4)$.

482. ***2)*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}x^n$, $(-\infty,\infty)$; ***3)*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!}x^{n+2}$, $(-\infty,\infty)$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$, $(-\infty,\infty)$; ***5)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $(-\infty,\infty)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^{2n}$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; ***8)*** $\frac{2}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $(-1,1)$;

9) $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n\cdot 5^n}x^n$, $\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$;

10) $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2^n+3^n)}{n\cdot 6^n}x^n$, $(-2,2]$; ***11)*** $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n\cdot 2^n}x^n$, $(-1,1)$;

12) $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$, $(-2,2]$; ***13)*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}x^n$, $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$;

14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$, $(-1,1)$; ***15)*** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(5-3^{1-n})x^n$, $(-1,1)$;

16) $1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\,n!}x^{2n}$, $[-1,1]$;

17) $3+\frac{x}{27}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{3^{4n-1}\,n!}x^n$, $[-27,27]$.

483. ***2)*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $(-2,0)$;

3) $e^{-2}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)$, $(-\infty,\infty)$; ***4)*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$, $(1,3)$;

5) $2+\frac{x-4}{4}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2^{2n}}(x-4)^n$, $[0,8]$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n$, $(-\infty,\infty)$; ***7)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}$, $[-2,0]$.

Учебное издание

Ровба Евгений Алексеевич
Ляликов Александр Сергеевич
Сетько Елена Александровна
Смотрицкий Константин Анатольевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧНИК

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Корректор *В.И. Аверкина*
Техническое редактирование
и компьютерная верстка *А.С. Ляликова*

Подписано в печать 12.11.2012. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Modern». Офсетная печать. Усл. печ. л. 18,6.
Уч.-изд. л. 18,64. Тираж 800 экз. Заказ 375.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство "Вышэйшая школа"».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я.Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009. Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.