К. П. Иванов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К. П. ИВАНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1996

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит задачи по всем разделам элементарной математики. Отличительная черта этого сборника заключается в том, что он рассчитан на учащихся со средним уровнем подготовки.

Представленные в сборнике задачи подобраны таким образом, чтобы охватить многообразие методов решения. В начале каждого параграфа размещены вспомогательные теоретические сведения и примеры решения задач. Эти вступления не претендуют на полноту изложения — они отражают лишь основы методик и содержат главные расчетные формулы.

В сборник входят как задачи из известных публикаций [1–21], отвечающие определенным требованиям, так и собственный материал автора. В конце книги размещен перечень используемых обозначений с указанием равносильных формулировок. Ответы к задачам снабжены необходимыми указаниями.

Задачи не разделены по категориям сложности вследствие условности такой дифференциации, однако знаком "*" помечены те из них, при решении которых могут возникнуть некоторые затруднения.

Такая подача материала и подбор задач продиктованы желанием автора инициировать самостоятельность учащихся в процессе подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Автор надеется, что настоящий сборник окажется полезным и будет способствовать развитию творческих способностей учащихся и формированию навыков решения задач.

ГЛАВА 1. АРИФМЕТИКА И ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

§ 1.1. Арифметические действия с числами

Основные правила действия с числами хорошо известны. Обратим внимание лишь на несколько соотношений:

1. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$,
2. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$,
3. $\dfrac{a}{b} : c = \dfrac{a}{bc}$,
4. $a : \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac}{b}$,
5. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$,
6. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{bc+ad}{bd}$.

Здесь $b \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$, и a, b, c, d — числа.

Полезно также знать, что справедливо правило дробей, согласно которому если верна дробь $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то верно и соотношение $\frac{m_1 a \pm m_2 b}{m_3 a \pm m_4 b} = \frac{m_1 c \pm m_2 d}{m_3 c \pm m_4 d}$ (знаки согласованы) при условии, что $m_3 a \pm m_4 b \neq 0$ ($m_3 c \pm m_4 d \neq 0$).

Вычислить:

1. $\left(2 : 3\frac{1}{5} + \left(3\frac{1}{4} : 13\right) : \frac{2}{3} + \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}\right) \times \left(\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,3+1,1(6)}\right)$.

2. $\dfrac{0,5 + 0,25 + 0,166\ldots + 0,125}{0,(3) + 0,4 + \frac{14}{15}} + \frac{(3,75-0,625)0,348}{12,8\ 0,25}$.

3. $\left(26\frac{2}{3} : 6,4\right) \cdot \left(19,2 : 3\frac{5}{9}\right) - \dfrac{8\frac{4}{7} : 2\frac{26}{77}}{0,5 : 18\frac{2}{3} \cdot 11} - \frac{1}{18}$.

4. $\dfrac{0,725 + 0,6 + \frac{7}{40} + 0,42(6) + 0,12(3)}{0,128 \cdot 6\frac{1}{4} - \left((0,0345) : \frac{3}{25}\right)}$.

5. $\frac{1}{3}\Big[\big((520 \cdot 0,43) : 0,26 - 217 \cdot 2\frac{3}{7}\big) -$
$- \big(31,5 : 12\frac{3}{5} + 114 \cdot 2\frac{1}{3} + 61\frac{1}{2}\big)\Big]$.

Решить уравнения:

6. $2\frac{2}{3} : \left\{(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37} + 2,8\right\} - \frac{7}{15} = 0,2$.

7. $0,9 + \left\{\left[3,25 - \left(6\frac{9}{16} - 0,025x\right) \cdot 0,6\right] : 0,75\right\} : 6\frac{2}{3} = 1,2$.

8. $\left[0,72 - \left(10 - \frac{9,99999}{1,1-x}\right) \cdot 0,625\right] : 0,225 = 0,7$.

9. $\left[3,25 - \frac{(6,5625-2,5x)\cdot 0,53}{0,75}\right] : 6\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

10. $(1 - 0,021 : 0,06) : 0,13x = \left(2\frac{1}{3} - \left(2\frac{3}{16} - \frac{2}{3}\right)\right) : \frac{3}{8}$.

Вычислить (рационально):

11. $\frac{7^2}{2\cdot 9}+\frac{7^2}{9\cdot 16}+\frac{7^2}{16\cdot 23}+\ldots+\frac{7^2}{65\cdot 72}$.

12. $10101\left(\frac{5}{111111}+\frac{5}{222222}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}\right)$.

13. $333\left(\frac{71}{111111}+\frac{573}{222222}-\frac{2}{3\cdot 7\cdot 37}\right)$.

14. $182\left(\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}+\dfrac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}\right)\frac{80808080}{91919191}$.

15. $158\left(\dfrac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\dfrac{5+\frac{4}{13}+\frac{6}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\frac{505505505}{711711711}$.

16. $(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24})$.

17. $(10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8):(4\cdot 5^5\cdot 10^6)$.

18. $(12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}+4\cdot 5^{2n-1}):(4\cdot 5^{2n-2})$.

19. $(36\cdot 18^n-8\cdot 2^{n-4}\cdot 9^n-3^{n+1}\cdot 6^{n+1}):18^{n-1}$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [7, 18, 20].

§ 1.2. Задачи на делимость чисел

Для доказательства на делимость используют *признаки делимости* на 2, 3, 5, 11 и т. д. Пусть $N=N_1N_2\ldots N_k$, где $k=2M$ или $k=2M+1$. Тогда:

1. $N=N_1N_2\ldots N_k$ делится на 2, если N_k — четное.
2. $N=N_1N_2\ldots N_k$ делится на 3, если $\sum_{i=1}^k N_i$ делится на 3.
3. N делится на 5, если $N_k=0$ либо 5.
4. N делится на 11, если либо $\sum_{p=1}^M N_{2p+1}=\sum_{p=1}^M N_{2p}$, либо $\sum_{p=1}^M N_{2p+1}-\sum_{p=1}^M N_{2p}=11t$; $t\in N$.

Пример. Доказать, что $(n+2)(n^2+n+6)$ делится на 6.

Решение. Поскольку $(n+2)(n(n+1)+6)=(n+2)(n+1)n+6(n+2)$, то каждое из слагаемых делится на 6, что и требовалось доказать.

1. Найти наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 получается в остатке 3, при делении на 5 в остатке 4, а при делении на 6 в остатке 5.

2. При делении числа на 225 в остатке получается 150. Разделится ли искомое число на 75?

3. Изменится ли при делении частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?

4. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

5. Доказать, что если правильная дробь несократима, то вновь полученная, которая дополняет данную до 1, тоже несократима.

6. Доказать, что из любых 11 разных чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 10.

7. Доказать рационально, что

$$\frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999}.$$

8. Доказать, что $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33.

9. Доказать, что выражение

а) $n^7 - n$ делится на 42;

б) $n^3 - n$ делится на 24;

в) $n^p - n$ делится на p (если p простое) при любом $n \in N$.

10. Доказать, что сумма двух нечетных последовательных чисел делится на 4.

11. Доказать, что разность квадратов двух последовательных чисел (нечетных) делится на 8.

12. Доказать, что сумма четырех последовательных чисел (натуральных) не может быть простым числом.

13. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 7, 18, 20].

§ 1.3. Упрощение алгебраических выражений

Для упрощения алгебраических выражений используются следующие формулы:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$;

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Полезно знать, что $\sqrt{x^2} = |x|$ и вообще $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Справедлива формула сложных радикалов

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} A, B \geqslant 0 \\ A^2 - B \geqslant 0. \end{cases}$$

Иногда при решении примеров применяется метод перехода к новым переменным. При этом пример записывается в новых символах, которыми обозначаются определенные выражения или переменные. После упрощения производится возврат к исходным обозначениям.

Пример. Доказать: $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Решение. Пусть $T=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. После преобразований находим $T^3=18+3T$, откуда $T^3-3T-18=0$. Ясно, что $T=3$ — корень этого уравнения. Следовательно, данное уравнение можно представить в виде произведения: $T^3-3T-18=(T-3)(T^2+3T+6)$. Поскольку второй сомножитель не имеет вещественных корней, то $T=3$ — единственный корень и равенство доказано.

Упростить:

1. $\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

2. $\sqrt[n]{Y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{Y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

3. $\left(\frac{(Z^{2/p}+Z^{2/q})^2-4Z^{2/p+2/q}}{(Z^{1/p}-Z^{1/q})^2+4Z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

4. $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

5. $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}$.

6. $\sqrt{(x+2)^2-8x}/(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})$.

7. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

8. $\frac{(m^2-1/n^2)^m\cdot(n+1/m)^{n-m}}{(n^2-1/m^2)^n\cdot(m-1/n)^{m-n}}$.

9. $\frac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

10. $\left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$

11. $\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$.

12. $\frac{\sqrt[4]{7^3\sqrt{54}+15^3\sqrt{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}}$.

13. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2^4\sqrt{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

Проверить равенства:

14. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2.$

15. $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8.$

16. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$

17. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$

18.* $\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{1/9}-\sqrt[3]{2/9}+\sqrt[3]{4/9}.$

19.* $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=1/3\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\right).$

20. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

21. $\frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

22. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

23. $\frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

24. $\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}.$

Упростить:

25. $|x^2-1|+x|x+1|.$

26. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$

27. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}.$

28. $\frac{n^4-9n^3+12n^2+9n-13}{n^4-10n^3+22n^2-13n}.$

29. Разложить на множители:

$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(a+c)^3+(a-b)(a+b)^3.$$

30. Доказать:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+d}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0.$$

Доказать тождества:

31.* $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2.$

32.* $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-d-b)^2+(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2).$

33.* $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$

34.* $(p^2-q^2)^4+(2pq+q^2)^4+(2pq+p^2)^4=2(p^2+pq+q^2)^4.$

35. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$

36. $\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)} = \frac{b-d}{a-c}$.

37. Доказать, что из равенства

$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 = (y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$

следует $x = y = z$.

38. Доказать, что из равенств

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1$$

следует

$$-1 \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant 1.$$

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 7, 8, 19].

§ 1.4. Текстовые алгебраические задачи

При решении текстовых задач особых рекомендаций не требуется, однако отметим, что следует внимательно относиться к контролю за размерностью величин используемых в задаче, равно как и определять эту размерность в случае, когда вводятся новые понятия.

1. В сосуде емкостью 6 л содержится 4 л 70%-го раствора серной кислоты. Во втором сосуде той же емкости — 3 л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора следует перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получилось r раствора серной кислоты. Найти все r, при которых задача имеет решение.

2. Из двух жидкостей, плотности которых равны 2 г/см^3 и 3 г/см^3 соответственно, составлена смесь. Сколько граммов каждой жидкости взято и какова плотность смеси, если 4 см^3 смеси весят в десять раз меньше, чем вся первая жидкость, а 50 см^3 смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь?

3. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по массе, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по массе, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

4. Имеются три смеси, составленные из трех компонентов A, B и C. В первую смесь входят только компоненты A и B в массовом отношении 3:5. Во второй смеси содержатся только компоненты B и C в массовом отношении 1:2. Третья смесь состоит только из компонентов A и C в массовом отношении 2:3. В каком отношении следует взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси компоненты A, B и C содержались в массовом отношении 3:5:2?

5. Три одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из второго и третьего сосудов отливают по a л (строго больше половины) спирта и доливают водой. Затем из третьего сосуда отливают a л смеси и доливают его водой. После этого объем спирта в первом и втором сосудах, вместе взятых, в $6/5$ раза больше, чем объем спирта в первом и третьем сосудах, вместе взятых. Какую часть емкости сосуда составляет величина a?

6. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5%-й раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-й раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

7. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч после его выезда из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в три раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найти расстояние между городами A и B.

8. Первая и вторая бригады одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения задания. На выполнение работы указанным способом ушло 5,5 ч. Первая бригада за все время, пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 ч больше, чем это было на самом деле, то она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, то задание было бы выполнено в 1,5 раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?

9. Из пункта A в пункт B выехал автомобилист, и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через 2 ч после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от B до A?

10. Две трубы, действуя вместе в течение 1 ч, наполняют водой 3/4 бассейна. Если сначала первая труба наполнит 1/4 часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до 3/4 бассейна, то на это понадобится 2,5 ч. Если первую трубу выключить на 1 ч, а вторую — на полчаса, то они наполнят бассейн более чем наполовину. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

11. Два бегуна стартуют из одного пункта кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположного пункта. Пробежав три круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 мин?

12. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно навстречу друг другу выходят две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B. Продолжив свой путь после первой встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 км от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли обе против течения, то лодка, вышедная из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 км от B. Найти расстояние между городами A и B.

13. Два парохода, скорость которых в стоячей воде одинакова, отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 мин и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в два раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на 1 ч позже, чем второй пароход отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются в 20 км от A. Если первый пароход отходит от A на 30 мин раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути они встречаются в 5 км выше K. Найти скорость течения реки и время, за которое второй пароход проходит расстояние от А до К.

14. Автозавод изготовляет легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 больше, чем в первый день, а грузовых машин — на 50 больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?

15. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что вместе они делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более 3 ч. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

16. К бассейну емкостью 300 м^3 подведены 3 трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью выливается. Если все три трубы включены одновременно, то объем воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м^3. Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м^3 воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершив наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин. Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы с начала и до конца вода поступала только через вторую трубу.

17. Совхоз располагает тракторами четырех марок: А, Б, В и Г. Бригада из четырех тракторов (два трактора марки Б, по одному трактору марок В и Г) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки А и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а три трактора марок А, Б и В — четыре дня. За сколько времени выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?

18. Туристский клуб разработал маршруты нескольких походов: а) двухдневный байдарочный поход; б) двухдневный велосипедный поход; в) восьмидневный комбинированный поход (четыре дня на байдарке, четыре дня пешком); г) пятидневный поход (один день на плоту, один день на байдарке и три дня пешком); д) шестидневный поход (три дня на плоту и три дня пешком). Третий маршрут длиннее второго на 40 км, второй длиннее первого на 80 км, а длина четвертого маршрута 90 км. Предполагается, что при каждом данном способе передвижения за каждый день проходится одно и то же расстояние. Найти протяженность пятого маршрута.

19. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй — емкостью по 800 м^3, а третий — емкостью 400 м^3. Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем третий. Первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй — в тот момент, когда первый вынул уже 300 м^3 грунта. Когда третий экскаватор выполнил 2/3 своей работы, второй вынул 100 м^3 грунта. Первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько кубических метров грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

20. Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого куска и 1 г из второго. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

21. Две трубы подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20%-го раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный раствор, то получится 30%-й раствор кислоты. Какой концентрации получится кислота, если подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый?

22. Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в два раза. Скорость какого автомобиля, первого или второго, больше и во сколько раз? (Известно, что трерий автомобиль не обгонял первых двух.)

23. Из пункта A в пункт C в 9 ч утра отправился скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт С, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позднее чем через 3 ч после его отправления, потом проходит пункт В не ранее 14 ч того же дня и, наконец, прибывает в пункт С одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт А первого пассажирского поезда.

24. Из А в В по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из А в В, из В в А навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 ч и затем прибывает в А, затратив на весь путь менее 3 ч 20 мин. Успеет ли плот преодолеть пусть из А в В за 5 ч, если расстояние между А и В равно 20 км?

25. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

26. Пункты А и В расположены на одной реке так, что плот, плывущий из А в В со скоростью течения реки, проходит путь от А до В за 24 ч. Весь путь от А до В и обратно моторная лодка преодолевает не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь (т.е. путь от А до В и обратно) занял бы у лодки не более 7 ч. Найти время, за которое моторная лодка проходит путь из А в В в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

27. В 9 ч утра из пункта А выезжает велосипедист, который едет в пункт В. Через 2 ч после выезда велосипедиста из А в В выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позднее 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт В, мгновенно поворачивает и едет из В в А. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт А в 17 ч того же дня. Найти время прибытия велосипедиста в пункт В, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

28. От пристани А вниз по реке, скорость течения которой v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить значения v, при которых к моменту возвращения катера в А плот проходит более 15 км.

29. Расстояние между пунктами A и B равно 7 км. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше, чем через 1 час. Если бы первый шел вдвое быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость движения второго была бы на 2 км/ч больше его фактической скорости, то к моменту встречи второй прошел бы большую часть пути. Скорость какого пешехода больше?

30. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются позднее, чем через 5 ч после выезда. На следующий день они выезжают одновременно в одну и ту же сторону из пунктов C и D, расстояние между которыми 36 км, причем велосипедист, едущий впереди, движется со скоростью, что и накануне. Достаточно ли второму велосипедисту двух часов, чтобы догнать первого?

31. Из города A в город B, находящийся от A на расстоянии 105 км, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в город A позже, чем автобус приходит в город B.

32. Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждых двух горлиц — также 1 монета, за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждого вида?

33. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг куплено на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 720 руб, а за все книги — 6600 руб. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше 4440 руб. Сколько куплено тетрадей?

34. Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшегося другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на 1 числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

35. Имеются одинаковые наборы почтовых марок, состоящие из гашеных и негашеных марок, причем в каждом наборе число гашеных марок более чем на 2 превосходит число негашеных. Если в каждом наборе число гашеных марок увеличить в 4 раза, а число негашеных оставить без изменения, то число гашеных марок в одном наборе превысит число негашеных в нем не более чем на 20, а общее число марок во всех имеющихся наборах станет равным 44. Определить число имеющихся наборов и число гашеных и негашеных марок в каждом наборе.

36. Четыре школьника сделали в магазине канцтоваров следующие покупки: первый купил пенал и резинку, заплатив 400 руб; второй купил резинку и карандаш, заплатив 120 руб; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 500 руб; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

37. Около дома посажены липы и березы, причем общее их число более 14. Если увеличить вдвое число лип, а число берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое число берез, не изменяя числа лип, то лип все равно будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

38. В киоске были проданы одинаковые комплекты из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в три раза, а красных — в два раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных в нем не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько было в каждом комплекте синих и красных карандашей.

39. Группа студентов из 30 человек получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем "троек" было больше, чем "пятерок", и меньше, чем "четверок". Кроме того, число "четверок" делилось на 10, а число "пятерок" было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

40. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10560 руб, за альбомы 560 руб. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги большем чем на 1000 руб превосходит цену одного альбома?

41. Между пунктами A и B расположен пункт C, причем расстояние AC = 17 км, BC = 3 км. Из пункта A в пункт B выехала машина, которая, не проехав и двух километров, остановилась. Через некоторое время она двинулась дальше в пункт B, и в этот же момент из пункта C в пункт B отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист, каждый из которых, достигнув B, сразу же повернет назад. С кем раньше поравняется машина — с пешеходом или велосипедистом, если ее скорость в 4 раза больше скорости велосипедиста и в 8 раз больше скорости пешехода?

42. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, который сначала двигался с ускорением 4 км/ч^2, а после того, как его скорость возросла от 0 до v, продолжал двигаться равномерно со скоростью v. Расстояние между пунктами A и B равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость v.

43. Самолет совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью v. Затем летчик включает тормоза, и движение самолета становится равнозамедленным, причем в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до места полной остановки равен 4 км. Отношение времени, за которое самолет проходит первые 400 м, к времени, за которое самолет проходит весь путь по земле, равно 4:65. Определить скорость v.

44. Расстояние между расположенными по одному шоссе пунктами A и B равно 120 км. Одновременно из пункта A и пункта B выехали велосипедист и мотоциклист соответственно. Через 2 ч после начала движения они поравнялись друг с другом. Если бы скорость велосипедиста была в 2 раза больше, а скорость мотоциклиста на 10 км/ч меньше, чем на самом деле, то момент, когда они поравнялись друг с другом, наступил бы на 1 ч позднее, чем в действительности. Определить, за какое время велосипедист проезжает расстояние между пунктами A и B.

45. Имеются два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой A, а затем второе поле было убрано вместе бригадами A и B. После того как была убрана 1/3 всей площади, оказалось, что время, необходимое на окончание уборки, в 21/13 раза меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Известно, кроме того, что если бы второе поле убирала только бригада B, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Во сколько раз производительность бригады A больше производительности бригады B?

46. Вода из цилиндрического бассейна глубиной h вытекает по двум трубам разной пропускной способности, первая из которых расположена на дне бассейна, а вторая — на боковой стенке. Если при наполненном целиком бассейне открыть только вторую трубу, то вода будет протекать через нее в течение времени, которое в 4/3 раза меньше времени, необходимого для слива всей воды из бассейна только через одну первую трубу. При действии обеих труб продолжительность слива всей воды из бассейна, наполненного целиком, в 4/3 раза больше, чем наполненного на 2/3. Пропускная способность труб не зависит от уровня воды над трубой. На какой высоте расположена вторая труба?

47. По двум взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку движутся две автомашины со скоростями v_1 и v_2. Определить минимальное в процессе движения расстояние между машинами, если в начальный момент времени расстояния машин от перекрестка были равны d_1 и d_2 соответственно.

48. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч^2. Каково должно быть значение a, чтобы через 3 ч после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B?

49. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью 24 м/с. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и $a_2 (a_1 < 0, a_2 < 0)$ и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 с раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4$м/с^2. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение заднего автомобиля.

50. Грузовой лифт спускается с башни высотой 320 м. Сначала он движется со скоростью 20 м/с, а потом его скорость мгновенно переключается и становится равной 50 м/с. Спустя некоторое время после начала движения лифта с вершины башни сбрасывают камень, который совершает свободное падение и достигает земли одновременно с лифтом. Известно, что в процессе движения камень был все время выше лифта, причем максимальная разность высот между ними составляла 60 м. В момент переключения скорости лифта скорость камня превышала 25 м/с, но была меньше 45 м/с. Определить, спустя какое время после начала движения лифта сбросили камень. При решении задачи ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

51. Некто нанял пароход для перевозки грузов на расстояние в 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 золотых монет, но требует вернуть 9 золотых монет за каждый час пребывания парохода в пути. Предполагается, что пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если эта скорость будет равна v км/ч, то в конце пути хозяин обязан выплатить команде премию, равную $10v$ золотым монетам. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать максимальное число золотых монет? Какое это число?

52. Требуется построить некоторое число одинаковых жилых домов с общей площадью 40 тыс.м^2. Затраты на постройку одного дома, имеющего N м^2 жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома площадью 1600 м^2 обходится в 184,8 тыс. долл., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей; найти эту сумму.

53. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути некоторое число остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей остановке. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай когда в пункт B приедет менее 12 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

54. (Ньютон) Трава на лугу растет одинаково быстро и густо. Известно, что 60 коров съели бы траву за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву за 100 дней?

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 21].

§ 1.5. Абсолютная величина (модуль)

Определение. Абсолютной величиной (модулем) числа x называется число, определяемое по формуле

$$|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x),$$

где $\mathrm{sgn}(x) = 1$ при $x \geqslant 0, \mathrm{sgn}(x) = -1$ при $x < 0$.

Из определения сразу следуют основные свойства:

1. $|x| = |-x|$;

2. $|x| \geqslant 0$; если $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$;

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x/y| = |x|/|y|\ (y \neq 0)$;

4. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ при $\forall x, y \in R$. Геометрически $|x|$ — расстояние на числовой оси от точки x до 0;

5. $|x| + |y| = |x + y| \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y \geqslant 0$;

6.
$$|R(x)| < Q(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) > 0, \\ -Q(x) < R(x) < Q(x); \end{cases}$$

7.
$$|R(x)| > Q(x) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q(x) < 0,\ R(x) - \text{любое}; \\ \begin{cases} Q(x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} R(x) > Q(x), \\ R(x) < -Q(x); \end{array} \right. \end{cases} \end{array} \right.$$

8.
$$|R(x)| = Q(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} R(x) = \pm Q(x), \\ Q(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 1. Найти область определения следующего равенства: $|x^{1992} - a| = a - x^{1992}$.

Решение. Имеем $a - x^{1992} \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$, поскольку $x^{1992} \geqslant 0$. Следовательно, $x^{1992} \leqslant a$, $|x| \leqslant \sqrt[1992]{a}$.

Ответ. $|x| \leqslant \sqrt[1992]{a}$ при $a \geqslant 0$.

Пример 2. $|x^2 - |x|| < 2x$.

Решение. Так как $x > 0$, то $|x^2 - x| < 2x \Rightarrow -2x < x^2 - x < 2x$, откуда $-2 < x - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$.

Ответ. $0 < x < 3$.

Пример 3. $|x - x^2| > -x$.

Решение. При $\forall x > 0$ неравенство справедливо. Если $x < 0$, то $x^2 - x > -x$, так как $x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \neq 0$.

Ответ. $\forall x \neq 0$.

Пример 4. $x^2 < |x| + 2$.

Решение. $|x|^2 < |x| + 2$, $|x| = t$, $t^2 - t - 2 < 0$, $-1 < |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$.

Ответ. $-2 < x < 2$.

Пример 5. $\frac{|x-1|}{x-2} < 1$.

Решение. Если $x > 2$, то $x - 1 > x - 2 \Rightarrow x \in \varnothing$. Если $x < 2$, то неравенство очевидно.

Ответ. $x < 2$.

Решить уравнения и неравенства:

1. $|x-1| = 3$.
2. $|x+1| + |x+2| = 2$.
3. $|x-2| + |4-x| = 3$.
4. $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$.
5. $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = |x+2|$.
6. $|13-2x| - 11 = 2|x|$.
7. $|4-5x| > \frac{1}{5}$.
8. $|x-2| < \frac{x}{2}$.
9. $||x|-3| > 1$.
10. $|3-|x-2|| \leqslant |x-7|$.
11. $|x^2+3-2x| = 1$.
12. $(x+1)(|x|-1) = -\frac{1}{2}$.
13. $|x^2-3x+3| = 2$.
14. $|x^2-1| + x + 1 = 0$.
15. $|x| + x^3 = 0$.
16. $|x^2+1-x| = |x^2+2x-3|$.
17. $|x^2+2x| - 2x + 1 \geqslant 0$.
18. $|x^2-3| + 2x + 1 \geqslant 0$.
19. $|3+5x-2x^2| < \frac{1-x}{2}$.
20. $|3x+2| - x^2 - x \leqslant 0$.
21. $||x+1| - |x|| \leqslant x$.
22. $||x^2-x| - x^2| \geqslant x$.
23. $|x+1| > |x-1|$.
24. $||x-1|-1| = 1 - |x-1|$.
25. $|x^2+2ax-3a^2| < (x-a)$.
26. $|||x-a|-2a|+a| = a$.
27. $|||||xa|-ax|+ax|-ax|+ax| = -ax$.
28. $||x|-a| > -a$.
29. $|||||x|-ax|-x|-x|+x| = -x$.
30. $\frac{|x+3|}{x-2} \geqslant 1$.

31. $\frac{|x-1|}{x-2} \leqslant 1$.

32. $||\ldots||||x+1|+2|+3|+\cdots+n| = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$.

33. $x|x+1| = a$.

34. Найти наименьшее значение функции
$f(x) = |x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$ при $a < b < c < d$.

35. Найти a, при котором минимум функции

$$f(x) = 3|x-a| + |x^2+x-2|$$

меньше двух.

36. $|x^2+2x| = |x^2-3x|$.

37. $|x-a| < (x-a)^2 - 2$.

38. $|x-1| < |x-2| < |x-3| < \cdots < |x-n|$, $n \in N$, $n > 1$.

39. $||x^2-2x| - |x^2-3x|| < x-4$.

40. $||x-a| - |x-b|| < \frac{a+b}{2}$, $0 < a < b$.

41. $|x^2-1| + |1-x| = x|x-1|$.

42. $||x-1|-12| = |x-1|-3$.

43. $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{|x-3|} > \ldots \frac{1}{|x-n|}$.

При составлении задач использованы работы [9, 16].

§ 1.6. Простейшие неравенства

При решении неравенств применяют следующие методы:

I. *Метод интервалов.* Рассмотрим неравенство вида

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} < \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)},$$

где $R_1(x), R_2(x), Q_1(x), Q_2(x)$ — многочлены некоторых степеней. Запишем это неравенство как

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} - \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} < 0.$$

Приведем его к общему знаменателю:

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} - \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{R_1(x)Q_2(x) - R_2(x)Q_1(x)}{R_2(x)Q_2(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} < 0.$$

Здесь $R(x) = R_1(x)Q_2(x) - Q_1(x)R_2(x)$, $Q(x) = R_2(x)Q_2(x)$. Представим многочлены знаменателя и числителя $R(x)$ и $Q(x)$ в виде

$$R(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k} \times$$
$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{\beta_m},$$
$$Q(x) = (x - x_1')^{\alpha_1'} \cdot \ldots \cdot (x - x_p')^{\alpha_p'} \times$$
$$\times (x^2 + p_1' x + q_1')^{\beta_1'} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m' x + q_m')^{\beta_m'},$$

где α_i, β_i, α_i', β_i' — целочисленные показатели; x_i, x_j' — вещественные корни многочленов $R(x)$ и $Q(x)$, соответственно.

На числовой оси отметим корни x_i, x_j', обозначив их y_l ($l = 1, \ldots N$; N – порядок многочлена).

Отношение $R(x)/Q(x)$ меняет знак только в точках y_l. Решение исходного неравенства определяется интервалами, на которых $R(x)/Q(x) < 0$.

II. *Метод сведения в систему.* Рассмотрим неравенство вида $R(x)/Q(x) < 0$.

Это неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} R(x) > 0, \\ Q(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} R(x) < 0, \\ Q(x) > 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

которые решаются с помощью метода интервалов.

III. *Комплексный метод* — сочетание методов I и II.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x - 1)^1 (x - 2)^2 (x - 3)^3 \cdot \ldots \cdot (x - 1995)^{1995} > 0.$$

Решение. Отметим на числовой оси целочисленные точки. В этих точках неравенство не выполняется (соотношение обращается в нуль). Рассмотрим интервалы между точками $2k - 1$ и $2k + 1$, так как в точках $x = 2k$ знак неравенства не изменяется.

Ясно, что при $x > 1995$ неравенство верно. Отметим этот интервал знаком "+". Тогда в интервале $1993 < x < 1995$ неравенство несправедливо. Отметим данный интервал знаком "–". Этому интервалу соответствует значение $k = 997$. Знак произведения изменится в интервале $1991 < x < 1993$, которому соответствует $k = 996$, и неравенство в нем будет выполнено. Так же рассматриваются и другие интервалы.

Таким образом, можно установить следующее правило: если интервалу соответствует четное число k, то в нем неравенство справедливо (кроме точки $x = 2k$); если k нечетное, то неравенство несправедливо.

Пример 2. При каких a оба корня уравнения $f(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1?

Решение. Ясно, что данные условия реализуются, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 9a^2 - 16a(a+1) \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ (a+1) > 0, \\ \dfrac{+3a}{2(a+1)} > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(1) < 0, \\ (a+1) < 0, \\ \dfrac{+3a}{2(a+1)} > 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

т. е.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9a^2 - 16a^2 - 16a \geqslant 0, \\ a + 1 - 3a + 4a > 0, \\ a > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(7a+16) \leqslant 0, \\ 2a > -1, \\ a > -1, \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing, \\ \begin{cases} a(7a+16) \leqslant 0, \\ a < -\dfrac{1}{2}, \\ a < -1, \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -1 > a \geqslant -\dfrac{16}{7}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{16}{7} \leqslant a < -1$.

Решить неравенства:

1. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

2. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

3. $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0$.

4. $\frac{3x^2-7x+2}{x^2-10x+25} < 2$.

5. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0$.

6. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$.

7. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$.

8. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$.

9. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0$.

10. $\frac{x^4-2x^2-8}{(x^2+2x+1)^3} < 0$.

11. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$.

12. $\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2} < 0$.

13. $\frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

14. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} < \frac{1-2x}{x^3+1}$.

15. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56$.

16. $\frac{(x^3+3x^2-x-3)^{13}}{(x^2+3x-10)^{111}} < 0$.

17. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2} > 0$.

18. $(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0$.

19. $\frac{x^2-7|x|+10}{(x^2-6x+9)^3} < 0$.

20. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

21. При каких a оба корня уравнения $f(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1?

22. При каких a один из корней уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

23. При каких a корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ различны и $x_{1,2} \in (-1, 1)$?

24. При каких k корни уравнения $kx^2 - (k+1)x + 2 = 0$ действительны и $|x_{1,2}| < 1$?

25. При каких a неравенство $(a-1)x^2 + (2a-3)x + a - 3 > 0$ выполняется хотя бы при одном $x < 1$?

26. При каких m из неравенства $x^2 - (3m+1)x + m > 0$ следует неравенство $x > 1$?

27. Найти все a, при которых из неравенства $x^2 - a(1+a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$.

28. При каких p система неравенств $-9 < \frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6$ выполняется $\forall x \in R$?

Доказать неравенства ($a, b, c, d > 0$):

29. $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

30. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geqslant 8$.

31. $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

32. $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} < 3$.

33. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

34. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}} \leqslant \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+d}}$.

Решить неравенства:

35. $\frac{(x^2+2x+6)^{1992} - 13(x^2+2x+6)^{100} - 10284}{(x^2+2x-3)^{13}} < 0$.

36. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) < 24$.

37. $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-a} < \ldots < \frac{1}{x-1996a}$, $a > 0$.

38. $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{(x-3)}$.

39. $(x^2-2)^{192} - 2(x^2-2)^{96} - 3 < 0$.

40. $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \leqslant 6\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

41. $(x^2-2)^{192} - 2(x^2-2)^{64} - 3 < 0$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 7], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 1.7. Проблема корней

Определение. Корнем многочлена $R(x)$ называется такое число $x = x_0$, что $R(x_0) = 0$.

Рассмотрим выражение

$$R(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

где a_i — коэффициенты; n — степень многочлена. Тогда справедлива

Теорема Гаусса. Любой многочлен $R(x)$ может быть представлен в виде

$$R(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_p)^{\alpha_p}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x+p_mx+q_m)^{\beta_m},$$

причем $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p+2\beta_1+\cdots+2\beta_m=n$, а все квадратичные выражения не имеют действительных корней.

Следствие. Многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один вещественный корень.

Теорема о рациональных корнях. Если существует рациональный корень уравнения $R(x)=0$, то $x_0=\frac{\pm m}{-l}$, m является делителем a_n, l — делителем a_0.

Эта теорема позволяет угадывать корни, при этом вопрос проверки легче делать по **схеме Горнера**:

$$\frac{a_0\ a_1\ a_2\ldots a_n\ x_0}{b_0\ b_1\ b_2\ldots b_n}.$$

Здесь $b_0=a_0$, $b_1=b_0x_0+a_1$, $b_i=b_{i-1}x_0+a_i$, $i=1,2,\ldots n$. Если $b_n=0$, то x_0 — корень и справедливо разложение

$$R(x)=(x-x_0)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}).$$

Теорема Виета. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $R(x)=0$, то

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_{n-1}+\ldots+x_{n-1}x_n=+\frac{a_2}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ на двучлен $(x-a)$ равен $P(a)$.

Пример. $6x^3-7x^2+2x-1=0$. Рассмотрим многочлен $P(x)=6x^3-7x^2+2x-1$. Найдем корни этого многочлена. Согласно теореме о рациональных корнях запишем возможные значения корней: $x_0=\pm(1/2,\ 1,\ 1/3,\ 1/6)$. Из всех данных значений корнем многочлена является только $x_0=1$. Проверим это, воспользовавшись схемой Горнера:

6	−7	+2	−1	1
6	−1	1	0	

Следовательно, $R(x)$ можно представить в виде произведения. Тогда $6x^3 - 7x^2 + 2x - 1 = (x-1)(6x^2 - x + 1)$.

Разложить на произведение:

1. $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$.

2. $6x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$.

3. $x^5 - 1 = 0$.

4. $6x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$.

5. $x^3 - 6x^2 - 8x - 1 = 0$.

Найти корни уравнений:

6. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

7. $x^4 - \frac{50}{2x^4 - 7} = 14$.

8. $\frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

9. $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4\,(Z = x + x^{-1})$.

10. $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$.

11. $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.

12. $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$.

13. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$.

14. $(x+1)^5 + (x-1)^5 = 32x$.

15. $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc = 0$.

16. $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

17. $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.

18. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$.

19. $(2x+a)^5 - (2x-a)^5 = 242a^5$.

20. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

21. $(x-6)^6 + (x-4)^6 = 64$.

22. $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$.

23. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

24. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

25. $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$.

26. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

27. $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$.

28. Найти коэффициент p и свободный член q уравнения $x^4 + x^3 - 18x^2 + px + q = 0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

29. Доказать, что при условии $ab = c$ сумма двух корней уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ равна 0.

30. Решить уравнение $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$, если известно, что существуют корни x_1 и x_2, такие, что $|x_1| = 1/|x_2|$ и $x_1 x_2 < 0$.

31. Решить уравнение $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ и $6x^3 - 3x^2 - 2x = 0$, если известно, что уравнения имеют общий корень.

32. Найти все три корня $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, если $ad = bc$.

33. Доказать, что корни уравнения $x + x^{-1} = \cos 40^0$ являются корнями уравнения $x^4 + x^{-4} = 2\cos 160^0$.

Решить уравнения:

34. $\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1.$

35. $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a + b + c.$

36. $x^2 \frac{(x+b)(x+c)}{(x-b)(x-c)} + b^2 \frac{(b+c)(b+x)}{(b-c)(b-x)} + c^2 \frac{(c+x)(c+b)}{(c-x)(c-b)} = (c+b)^2.$

37. Пусть $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Доказать, что по крайней мере одно из уравнений $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ имеет вещественные корни.

38. Каковы должны быть p и q, чтобы корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ были бы числа p и q?

39. Найти все a, b, чтобы многочлен $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился на $x^2 + ax + b$.

40. Найти остаток от деления многочлена $x^{100} - x^{50} + 2x^{25} - 4$ на $x^2 - 1$.

41. Доказать, что если a, b, c — нечетные числа, то корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ не могут быть рациональными.

42. Доказать, что всякий рациональный корень уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

где a_i, $i = 1, 2, \ldots n$ — целые числа, является целым числом.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 7, 20].

§ 1.8. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Определение. Арифметическая прогрессия ($\div$) — последовательность чисел $\{a_n\}$, $n \in N$, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным числом d, называемым разностью $\div$, т. е. $a_n = a_{n-1} + d$.

Основные формулы:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad \forall n \in N,$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad \forall n,\, k \in N,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{— сумма } n \text{ членов,}$$

$$a_m + a_n = a_k + a_l, \quad \text{если } k + l = m + n.$$

Определение. Геометрическая прогрессия ($\div\div$) — последовательность $\{b_n\}$, $n \in N$, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное число q ($q \neq 0$), называемое знаменателем прогрессии, т. е. $b_n = b_{n-1} \cdot q$.

Основные формулы:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad \forall n \in N,$$

$$b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}, \quad \forall n,\, k \in N,$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{— сумма } n\text{- членов, } q \neq 1.$$

При $|q| < 1$ и неограниченном возрастании числа n сумма S_n стремится к пределу:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q}$$

— сумма бесконечно убывающей прогрессии.

Пример. Известно, что $a_{2n} = -a_{2m}$ и $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия. Существует ли $a_i = 0$ и чему равно i?

Решение. Легко догадаться, что $a_{m+n} = 0$. Докажем это. Так как

$$a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2}$$

и $k = m + n$, $p = m - n$, то

$$a_{m+n} = \frac{a_{m+n-p} + a_{m+n+p}}{2}.$$

Тогда

$$a_{m+n} = \frac{a_{2n} + a_{2m}}{2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

1. Найти формулу общего члена арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если известно, что $a_1 = 5$, $a_2 = -5$.

2. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью d и S_n — сумма первых n ее членов.

Найти:

1) S_{20}, если $a_n = 2n - 5$, $n \in N$;

2) a_1 и d, если $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$;

3) a_1 и d, если $a_1 a_{11} = 44$, $a_2 + a_{10} = 24$;

4) n, если $a_2 + a_{2n} = 42$, $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = 126$;

5) a_k, если $a_m = n$, $a_n = m\,(n \neq m)$;

6) S_{20}, если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$;

7) a_n, если $a_4 = -4$, $a_{11} = -17$;

8) a_n, если $S_n = n^2$;

9) S_{12}, если $a_1 = -3$, $a_3 a_7 = 24$;

10) S_{10}, если $a_5 = 9$, $a_2 + a_9 = 20$;

11) S_8, если $a_1 + a_8 = 25$, $a_3 + a_5 = 19$;

12) S_{16}, если $S_4 = -28$, $S_6 = 58$;

13) a_1 и d, если $S_n = 3n^2 + n$;

14) a_1 и d, если $S_n = 2n^2 - 3n$;

15) a_{10}, если $S_n = 3n^2 - 2n$;

16) a_1 и d, если $4S_n = S_{n^2}$;

17) a_1 и d, если $a_5 = 18$, $4S_n = S_{2n}$;

18) a_7, если $a_n = 22$, $n = a_1 a_2$, $a_2 + a_n = 20$.

3. Найти сумму:

1) $1 + 2 + 3 + \dots + n$;

2) $2 + 4 + 6 + \dots + (2n + 2)$;

3) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$;

4) $3 + 8 + 13 + \dots + (5n + 3)$;

5) всех натуральных трехзначных чисел;

6) всех натуральных трехзначных чисел, делящихся на 3;

7) всех натуральных трехзначных чисел, не делящихся на 3;

8) всех натуральных двузначных чисел, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 13;

9) первых 100 натуральных чисел, каждое из которых при делении на 5 дает в остатке 2;

10) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

4. Могут ли данные числа быть членами одной арифметической прогрессии:

1) $1, \sqrt{3}, 3$; 2) $\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; 4) $2, 6, \frac{9}{2}$?

5. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма их равна 33, а произведение равно 1287. Найти эти числа.

6. Четыре положительных числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, разность которой равна 2. Произведение этих чисел равно 19305. Найти эти числа.

7. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма ее первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

8. Найти трехзначное число, цифры которого являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии и которое делится на 45.

9. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ такова, что $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 12,5$. Найти первый член и разность этой прогрессии.

10. Первый член арифметической прогрессии равен 2, второй и третий соответственно равны квадратам двух последовательных натуральных чисел. Найти разность этой прогрессии.

11. Сумма четырех последовательных чисел арифметической прогрессии равна 1, сумма кубов этих же чисел равна 0,1. Найти эти числа.

12. Найти числа, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии, зная, что сумма первой четверки этих чисел равна 68, сумма последней четверки равна -36, а сумма всех этих чисел равна 68.

13. Найти формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, если известно, что при любом значении n сумма первых n ее членов равна $\frac{1}{2}(n^2 - 6n)$.

14. Найти условие, при котором три числа a, b и c являются членами некоторой арифметической прогрессии.

15. Могут ли цифры

1) трехзначного; 2) четырехзначного простого числа быть последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с положительной разностью?

16. Решить уравнение:

1) $5^2 5^4 5^6 \ldots 5^{2x} = 0,04^{-28}$; 2) $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$;

3) $(x+1) + (x+4) + \cdots + (x+28) = 155$.

17. Даны две арифметические прогрессии: $5, 8, 11, 14, \ldots$ и $3, 7, 11, 15, \ldots$ Сколько равных членов будет среди первых 100 членов первой последовательности и 98 членов второй последовательности?

18. Решить уравнение

$$x^3 + x^2 = a,$$

зная, что его корни являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

19. Какая зависимость должна существовать между p и q для того, чтобы уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имело четыре корня, являющихся четырьмя последовательными членами некоторой арифметической прогрессии?

20. Могут ли стороны прямоугольного треугольника являться последовательными членами некоторой арифметической прогрессии?

21. Найти отношения сторон треугольника, зная, что один из его углов равен 120^0 и что длины сторон являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

22. Длины сторон треугольника являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой равна 2 см. Площадь треугольника равна 6см^2. Определить длины сторон.

23. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами и являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, причем периметр треугольника равен 15.

24. Найти все арифметические прогрессии, у каждой из которых среднее арифметическое первых ее n членов равно n.

25. Найти все значения x, для каждого из которых следующие числа:

1) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$;

2) $1 + \sin x$, $\sin^2 x$, $1 + \sin 3x$;

3) $\lg 2^x$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$;

4) $\cos^4 \frac{x}{2}$, $\frac{1}{2} \sin 2x$, $-\sin^4 \frac{x}{2}$;

5) $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{5x-1}$, $\sqrt{12x+1}$

являются последовательными (в указанном порядке) членами арифметической прогрессии.

26. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — арифметические прогрессии. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

1) $\{a_n + b_n\}$; 2) $\{a_n - b_n\}$; 3) $\{a_n b_n\}$;
4) $\{a_n/b_n\}$, если $b_n \neq 0$; 5) $\{|a_n|\}$?

27. Найти арифметическую прогрессию, в которой, сколько бы ни было взято членов, сумма их всегда равна утроенному квадрату числа этих членов.

28. Дана арифметическая прогрессия $1, 18, 35, \ldots$ Указать все члены этой прогрессии, которые можно записать с помощью одних троек.

29. Найти четыре целых числа, являющихся последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, при условии, что наибольшее из них равно сумме квадратов трех остальных.

30. Найти условие, при котором три числа a, b и c были бы k-м, p-м и q-м членами некоторой арифметической прогрессии.

31. Найти четыре четных положительных числа, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, при условии, что произведение суммы трех последних на сумму двух крайних равно кубу полусуммы двух первых.

32. Найти сумму n членов арифметической прогрессии

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \cdots + \frac{1}{x}.$$

33. Найти такую арифметическую прогрессию, в которой между суммой ее первых n членов и суммой kn следующих существовало бы постоянное отношение, не зависящее от n.

34. Доказать, что в арифметической прогрессии между любыми двумя последовательными членами можно вставить по k чисел, таких, что новая последовательность будет составлять также арифметическую прогрессию.

35. Доказать, что если положительные числа a, b и c $(a \leq b \leq c)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

36. Доказать, что если числа $\frac{1}{a^2+b^2}$, $\frac{1}{c^2+a^2}$, $\frac{1}{b^2+c^2}$ являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии соответственно, то числа a^2, b^2, c^2 являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

37. Даны две арифметические прогрессии $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Известно, что $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ и $b_1 = 1/a$, $b_2 = 1/b$, $b_3 = 1/c$. Доказать, что $a = b = c$.

38. Доказать, что если положительные числа a, b и c, где $a \leqslant b \leqslant c$, являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$3(a^2 + b^2 - c^2) = 6(a - b)^2 - (a + b + c)^2.$$

39. Доказать, что если S_n обозначает сумму первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, то:

1) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$;

2) $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$;

3) $\frac{S_n}{n}(m - p) + \frac{S_m}{m}(p - n) + \frac{S_p}{p}(n - m) = 0$, если числа n, m и p различны;

4) $\frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} = \frac{m-n}{m+n}$;

5) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

40. Доказать, что если второй член арифметической прогрессии есть среднее пропорциональное между первым и четвертым членами, то шестой член будет средним пропорциональным между четвертым и девятым членами.

41. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ являются членами арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда числа a^2, b^2 и c^2 содержатся в некоторой арифметической прогрессии.

42. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и существуют такие числа m и k, что $S_m = m^2 p$, $S_k = k^2 p$, где m, k и p — некоторые натуральные числа. Доказать, что $S_p = p^3$.

43. Доказать, что если $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, то:

1) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$,

если $a_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

44. Доказать, что

$$\frac{n+1}{a_1 a_{2n+2}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}} < \frac{n+1}{a_1 a_{2n+1}},$$

где $\{a_n\}$ — возрастающая арифметическая прогрессия с положительными членами.

45.* Доказать, что для всякой арифметической прогрессии

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

выполняются равенства

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0,$$
$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0,$$
$$a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0.$$

46. Доказать, что, если a_i — целые нечетные числа, не делящиеся на 3 и составляющие арифметическую прогрессию, то число $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{32}^2$ делится на 384.

47. Первый член и разность арифметической прогрессии являются целыми числами. Доказать, что произведение четырех последовательных членов прогрессии, увеличенное на четвертую степень ее разности, является квадратом целого числа.

48. Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q и S_n — сумма первых n ее членов. Найти:

1) b_{13}, если $b_{11} = 25$, $b_{15} = 400$;

2) b_{32}, если $b_{13} = 8$, $b_{51} = 128$;

3) b_7, если $b_4 = 5$, $b_{16} = 45$;

4) b_{14}, если $b_5 = 1/12$, $b_{17} = 1/144$;

5) S_4, если $b_1 = 3$, $q = 5$;

6) S_6, если $b_2 = 8$, $b_3 = 4$;

7) b_1, если $q = 5$, $S_5 = 781/75$;

8) n, если $b_1 = 5$, $q = 3$, $S_n = 200$;

9) S_{12}, если $b_1 = \sqrt[3]{2} - 1$, $b_3 = (\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{4}$;

10) b_1 и q, если $b_1 + b_2 + b_3 = 62$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 2604$;

11) S_6, если $b_1 = -2$, $b_6 = -486$;

12) q, если $b_1 = \sqrt{2}$, $b_9 = 16\sqrt{2}$;

13) b_1, если $q = -1/2$, $S_8 = 85/64$;

14) b_7, если $q = \sqrt{2}$, $S_7 = 15\sqrt{2} + 14$;

15) n, если $b_1 = 9$, $b_n = 64/81$, $S_n = 25\frac{34}{81}$;

16) q, если $b_1 = \sqrt{3}$, $b_n = 4\sqrt{3}$, $S_n = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$;

17) n, если $b_1 = -2$, $q = -3/2$, $S_n = 8\frac{5}{16}$;

18) b_n, если $b_1 = \sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$, $S - n = 4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$;

19) b_1, если $q = 1/2$, $b_n = 2$, $S_n = 254$;

20) n, если $q = 3/2$, $b_n = 27/8$, $S_n = 8\frac{19}{24}$;

21) q, если $b_1 = 15$, $S_3 = 21\frac{2}{3}$;

22) b_3, если $b_1 = \sqrt{2}$, $S_3 = 4\sqrt{2} + \sqrt{6}$;

23) b_1, если $b_3 = 18$, $S_3 = 26$;

24) q, если $b_3 = 135$, $S_3 = 195$;

25) b_1, если $q = 3/2$, $b_6 = 2\frac{17}{32}$;

26) S_4, если $q = 3$, $b_4 = 54$;

27) b_1 и q, если $S_n = 3^n - 1$;

28) b_1 и q, если $b_1 + b_2 + b_3 = 70$; $b_1 b_2 b_3 = 8000$;

29) S_n, если $b_1 = a$, $b_n = b$;

30) b_1 и q, если $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$;

31) b_1 и q, если $b_1 + b_2 + b_3 = 14$, $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 = 584$;

32) b_1 и q, если $b_1 + b_2 + b_3 = 13$, $3(b_1 + b_2) = b_2 + b_3$;

33) b_1, q и n, если $b_2 + b_6 = 34$, $b_3 + b_7 = 68$, $S_n = 63$;

34) b_2, если $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364$.

49. Найти сумму квадратов первых n членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 6 и знаменатель равен q ($q^2 \neq 1$).

50. Число членов геометрической прогрессии четное, сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

51. Даны две прогрессии с положительными членами — арифметическая $\{a_n\}$ и геометрическая $\{b_n\}$, у которых $a_1 = b_1$, $a_3 = b_3$, $a_2 \neq b_2$. Какое из двух чисел a_2 или b_2 больше и почему?

52. Между числами 3 и 19683 вставить семь чисел, таких, чтобы все девять чисел являлись членами геометрической прогрессии $\{b_n\}$. Если $b_1 = 3$, то найти b_5.

53. По преданию индийский шах позволил изобретателю шахматной игры самому себе назначить награду. Изобретатель просил, чтобы ему за первую клетку шахматной доски было дано одно пшеничное зерно, за вторую — два, за третью — четыре и т. д. В общем за каждую следующую клетку в 2 раза больше, чем за предыдущую. Узнать, сколькими цифрами изображается число зерен, предназначенное изобретателю шахмат; прочитать полученное число.

54. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — геометрические прогрессии, то является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $\{a_n + b_n\}$; 2) $\{a_n - b_n\}$; 3) $\{a_n b_n\}$;

4) $\{a_n / b_n\}$, если $b_n \neq$; 5) $\{|a_n|\}$?

55. Какому условию удовлетворяют три числа a_1, a_2, a_3, которые одновременно являются последовательными членами как геометрической, так и арифметической прогрессии?

56. Доказать, что любые три разных числа не могут одновременно быть последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий.

57. Могут ли быть членами одной и той же геометрической прогрессии три числа:

1) 10, 11 12; 2) 18, 8, 64/27;

3) 2, $\sqrt{6}$, 4,5; 4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$?

58. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника являться последовательными членами некоторой геометрической прогрессии?

59. Найти острые углы α, β, γ, если они являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $\pi/12$, а их тангенсы — последовательными членами геометрической прогрессии.

60. Решить уравнение:

1) $1 + x + x^2 + \dots + x^{109} = 0$;

2) $3^{1+\sin x^2+\sin^2 x^2+\dots+\sin^n x^2} = \sqrt[3]{9}$.

61. Найти все числа x, y и z, если известно, что $2x^4 = y^4 + z^4$, $xyz = 8$ и числа $\log_y x$, $\log_z y$ и $\log_x z$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

62. Найти все значения x, при каждом из которых данные три числа в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) 9, $3^{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x}$;

2) $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 11)$.

63. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{x_3}{x_4}, \\ x_1 = 8x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15. \end{cases}$$

64. Вычислить сумму:

1) $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{222\dots2}_{n \text{ цифр}}$;

2) $7+77+777+\dots+\underbrace{777\dots7}_{n\text{ цифр}}$.

65. Вычислить при каждом натуральном $n \geqslant 3$

$$\sqrt{\underbrace{44\dots4}_{2n\text{ цифр}}+\underbrace{11\dots1}_{(n+1)\text{ цифра}}-\underbrace{66\dots6}_{n\text{ цифр}}}.$$

66. Доказать, что

$$\underbrace{(66\dots6)^2}_{n\text{ цифр}}+\underbrace{88\dots8}_{n\text{ цифр}}=\underbrace{44\dots4}_{2n\text{ цифр}}.$$

67. Доказать, что число $\underbrace{(11\dots1)}_{n\text{ цифр}}\cdot\underbrace{(100\dots05)}_{(n+1)\text{ цифра}}+1$ является квадратом натурального числа.

68. Доказать, что число $\underbrace{99\dots97}_{(n-1)\text{ цифра}}\underbrace{00\dots02}_{(n-1)\text{ цифра}}\underbrace{99\dots9}_{n\text{ цифр}}$ является кубом натурального числа.

69. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-3x+a=0$, а числа x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+b=0$. Найти a и b, если числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются членами возрастающей геометрической прогрессии.

70. Доказать, что при каждом натуральном n:

1) $1+2+2^2+\dots+2^{5n-1}$ кратно 31;

2) $1+3+3^2+\dots+3^{6n-1}$ кратно 364.

71. Доказать, что если сумма $2n$ первых членов геометрической прогрессии, у которой первым членом является a и знаменателем q, равна сумме n первых членов геометрической прогрессии, у которой первый член b и знаменатель q^2, то $b=a+aq$.

72. Доказать, что для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ при любом натуральном $n\geqslant 2$ сраведливо равенство:

1) $b_2+b_4+b_6+\dots+b_2n=\frac{q}{1+q}S_{2n}$;

2) $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\dots+\frac{1}{b_n}=\frac{S_n}{b_1b_n}$.

73. Доказать, что в геометрической прогрессии сумма квадратов нечетного числа первых ее членов делится без остатка на сумму тех же членов.

74. Доказать, что сумма n первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, в которой $b_p=(-1)^pa^{4p}$ при каждом натуральном p, равна $\frac{a^4}{a^4+1}\left((-a^4)^n-1\right)$.

75. Доказать, что если S_n есть сумма n первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, то

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

76. Доказать, что если $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, то последовательность $\{b_{n-1} - b_n\}$ также является геометрической прогрессией.

77. Доказать, что если все члены геометрической прогрессии $\{b_n\}$ положительны, $b_{p+k} = a$ и $b_{p-k} = b$, то

$$b_k = a \sqrt[2k]{\left(\frac{b}{a}\right)^p}.$$

78. Доказать, что если xy, y^2, z^2 являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа y, z, $2y - z$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

79. Доказать, что если a, b, c, d являются последовательными членами геометрической прогрессии, то:

1) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$;

2) $(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2$.

80. Доказать, что, если три числа x, y, z являются последовательными членами геометрической прогрессии, то

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

81. Доказать, что во всякой геометрической прогрессии $\{b_n\}$

$$(b_4 + b_5 + b_6)^2 = (b_1 + b_2 + b_3)(b_7 + b_8 + b_9).$$

82. Доказать, что если в геометрической прогрессии $\{b_n\}$ $b_n = a$, $b_p = b$, $b_k = c$, то $a^{p-k} b^{k-n} c^{n-p} = 1$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [9, 12, 13].

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. НАЧАЛО АНАЛИЗА

§ 2.1. Системы уравнений и неравенств

1. Простейшей является линейная система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_i, b_i, c_i — числа, x, y — неизвестные.

Теорема 1. Если $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$, то существует и единственно решение системы.

Теорема 2. Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, то существует бесконечное множество решений системы.

Теорема 3. Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, то система решений не имеет.

2. $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - az + b = 0,$

если $a^2 - 4b \geqslant 0$, то $x = z_1$, $y = z_2$ либо $x = z_2$, $y = z_1$.

3. $\begin{cases} F_1(x \pm y,\, xy,\, x^2 + y^2,\, x^3 \pm y^3,\, x^4 + y^4, \ldots) = 0, \\ F_2(x \pm y,\, xy,\, x^2 + y^2,\, x^3 \pm y^3,\, x^4 + y^4, \ldots) = 0. \end{cases}$

Система решается введением переменных

$$x + y = t,\ xy = p.$$

4.

$$\begin{cases} F_1(x,\, y) = C_1, \\ F_2(x,\, y) = C_2, \end{cases} \qquad (*)$$

где F_1, F_2 — однородные функции одинаковой степени.

Определение. Функция $F(x,\, y)$ называется однородной степени k, если при $x = tx_1$ и $y = ty_1$ функция $F(x,\, y) = t^k\, F(x_1,\, y_1)$. Тогда система $(*)$ равносильна системе

$$\begin{cases} F_1/F_2 = C_1/C_2, \quad \text{если} \quad C_2 \neq 0, \\ F_i = C_i, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Пример 1. $\begin{cases} (x + y)^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Найти a. Система уравнений имеет два решения.

Р е ш е н и е. Запишем систему уравнений следующим образом: $x + y = \pm\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 = a$, $a \geqslant 0$. Первое уравнение описывает пару прямых, второе — окружность радиусом $\sqrt{a}$. Система имеет одно решение, если радиус равен расстоянию от начала координат до прямых, $\sqrt{a} = \sqrt{6}/2 \Rightarrow a = 3/2$.

О т в е т. $d = 3/2$.

П р и м е р 2. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Пусть $x + y = t$, $xy = p$. Тогда систему запишем в виде

$$\begin{cases} t^3 + p^3 - 3pt = 17, \\ p + t = 5. \end{cases}$$

Далее при $\begin{cases} t + p = u, \\ tp = v \end{cases}$ имеем

$$\begin{cases} u^3 - 3vu - 3v = 17, \\ u = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + p = 5, \\ tp = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2,\ p = 3, \\ t = 3,\ p = 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow \qquad x,\ y \in \varnothing, \\ \\ \quad \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = 2, \\ x = 2,\ y = 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Ответ. $(x,\ y) \in \{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$.

П р и м е р 3. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Система однородна, поэтому $(x^2+2y^2)/(x^2-2xy) = -17/3 \Rightarrow 3y^2 - 17xy + 10x^2 = 0$. Введем переменную $t = x/y$. Тогда $10t^2 - 17t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 3/2$, $t_2 = 1/5$. Таким образом, исходная система эквивалентна двум системам, при решении которых получаем искомые x и y:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - 2xy = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{5}, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

Ответ. $(x, y) \in \left\{(\pm 3,\ \pm 2),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

Пример 4. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

Решение. $2xy - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow 2z^2+2xz+2yz+y^2+x^2=0$, $(z+y)^2+(z+x)^2=0$. $x=y=-z$, $z=4$.

Ответ. $x=y=-4$, $z=4$.

1. Определить a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=5, \\ 2x-2y=4, \\ ax+ay=6 \end{cases}$$

имеет решение.

2. При каких a и b система

$$\begin{cases} 3x-4y=12, \\ 9x+ay=b \end{cases}$$

является совместимой и при каких неопределенной (т. е. имеющей решение и неимеющей).

Решить систему уравнений:

3. $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3|x|+5y+9=0, \\ 2x-|y|-7=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x|+|y|=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ |x+y|=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-2y+4z=0, \\ 2x+y+3z=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0, \\ abx-acy+dcz=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y - 8z = -13, \\ 5x + 3y - z = 0, \\ 2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6yz - 8xz + 15xy + 51x + 18y + 8 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yx + zx = -5, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12. \end{cases}$

14. $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ yz + y + z = -3, \\ xz + x + z = -5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - yz = 14, \\ y^2 - xz = 28, \\ z^2 - xy = -14. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ y^2 + yz + z^2 = 7, \\ z^2 + xz + x^2 = 19. \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy + xz = 8, \\ xy + yz = 9, \\ xz + yz = -7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x + y} = 1, \\ \dfrac{6xz}{x + z} = 1, \\ \dfrac{7zy}{z + y} = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$

20. $$\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27, \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27, \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{31}{7}, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} (x + y)(xy + 1) = 18xy, \\ (x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = 208x^2y^2. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} = 3, \\ \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} = 5, \\ \sqrt{x + z} + \sqrt{y + x} = 4. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} \sqrt[3]{u + v} + \sqrt[3]{v + w} = 3, \\ \sqrt[3]{v + w} + \sqrt[3]{w + u} = 1, \\ \sqrt[3]{w + u} + \sqrt[3]{u + v} = 0. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x}x + \sqrt{y}y = 35. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x} + y = 56. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - 2y + 2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$$

44. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

46. $\begin{cases} (x/y)^2 + (x/y)^3 = 12, \\ (xy)^2 + (xy)^3 = 6. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x/y + (x/y)^2 + (x/y)^3 = 14, \\ x + y = 3. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 8x + 8/y = 3y^2, \\ y + 1/x = 3x^2. \end{cases}$

49. $\begin{cases} y + z = 2/(xyz), \\ z + x = 3/(xyz), \\ x + y = 4/(xyz). \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$

51. $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

52. $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2. \end{cases}$

53. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y + 1} = 1, \\ \sqrt{x + 1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[4]{x - y} = 8, \\ \sqrt[4]{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3} = 12. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \sqrt{2x+2y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

34. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u} + v^{-1/2}\sqrt[3]{v} = 3/2, \\ uv = 64. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \sqrt[3]{(y+1)/x} - 2\sqrt[3]{x/(y+1)} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right)^2} = 1{,}6, \\ xy = 2. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{y+1} = 1. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{xy+21} = 13, \\ \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{xy+2} = 5. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 10(x^4+y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

58. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-0,25. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$ **62.** $\begin{cases} x^n+y^n=(a+b)/(xyz), \\ y^n+z^n=(b+c)/(xyz), \\ z^n+x^n=(c+a)/(xyz), \ n=2l. \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dfrac{a^3x}{y^2z^2}=\dfrac{b^3y}{z^2x^2}=\dfrac{c^3z}{x^2y^2}=1, \\ a,\ b,\ c>0. \end{cases}$

64.* $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{2a}{1+a^2}, \quad |a|\neq 1, \\ \dfrac{x-y}{1-xy}=\dfrac{2b}{1+b^2}, \quad |b|\neq 1. \end{cases}$

65. Найти все такие вещественные значения a, чтобы при любом вещественном b нашлось такое вещественное c, при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx-y=ac^2, \\ (b-6)x+2by=c+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

66. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{a}-\dfrac{a}{x^2-y^2}-b=0, \\ \dfrac{x^2-y^2}{a}-\dfrac{a}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{b}=0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=x, \\ x/y=\sqrt{(1+x)/(1-y)}. \end{cases}$

68. $\begin{cases} 3x + 2\sqrt{xy^2 + 9x^2y}/3 = \left(x - \dfrac{1}{3}\right) y, \\ (6x + y)/y = (x + 5)/3. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \sqrt{(x - y)/x^4} + 1/x = 4/(9\sqrt{x - y}), \\ (x + y)/(x - y) - (x - y)/(x + y) = 4,8. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dfrac{2z(x - 1)}{x + z - 1} = -3, \\ \dfrac{5(x - 1)(y + 1)}{x + y} = 3, \\ \dfrac{11z(y + 1)}{y + z + 1} = 3. \end{cases}$

71. Для всех $a \neq 0$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + yz + 2az - 1 = 0, \\ xy + yw + 2aw = 0, \\ w^2 + yz + 2ay - 1 = 0, \\ xz + zw + 2ax = 0. \end{cases}$$

72. $\begin{cases} x + 1/y = 1, \\ xy^2 + 1/(x^2y) = 1 + y/x. \end{cases}$

73. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z, \\ x - y \geqslant z. \end{cases}$

74. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет два решения?

В этом параграфе использованы задачи из работ [1—7], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 2.2. Иррациональные уравнения и неравенства

Определение. Иррациональным уравнением называется соотношение вида

$$R\left(\sqrt[k]{f(x)}\right) = 0, \qquad (*)$$

где $k \in N$.

Область определения $D(R)$:

$$D(R) = \{x | f(x) \geqslant 0, \quad k = 2l\},$$
$$D(R) = \{x | \forall f(x), \quad k = 2l + 1\}.$$

Методы решения. Пусть $k = 2e$. Тогда

1. *Метод уничтожения корня по обозначению*:

$$\sqrt[k]{f(x)} = \varphi(x), \qquad \begin{cases} f(x) = \varphi^k(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1(\varphi(x)) = 0, \\ f(x) = \varphi^k(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

2. *Метод сведения в систему*:

$$R\left(\sqrt[k]{f_1(x)},\ \sqrt[p]{f_2(x)}\right) = 0 \quad (p = 2m,\ m \in N),$$
$$\sqrt[k]{f_1(x)} = \varphi_1 \geqslant 0,$$
$$\sqrt[p]{f_2(x)} = \varphi_2 \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} R(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \\ F(\varphi_1, \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы получается исключением x из введенных обозначений.

3. *Метод решения по параметру*. Уравнение

$$R\left(\sqrt[k]{f(x, a)}\right) = 0$$

решается по a, при этом x считается параметром. После упрощения получается значение x.

4. *Метод графиков*. Уравнение (*) записывается таким образом, чтобы оно имело "правую" и "левую" части, которые подбираются, исходя из возможности исследования их поведения как функций с последующим построением графиков. Наиболее часто встречающаяся ситуация — это наличие единственной точки пересечения графиков, которая и дает решение задачи. При этом допускается и отгадывание корней в силу единственности решения (точки пересечения).

5. *Метод оценки правой и левой частей*:

$$\sqrt[k]{f(x)} = \varphi(x).$$

Пусть $\sqrt[k]{f(x)} \geqslant Z$ и $\varphi(x) \leqslant Z$. Тогда $\sqrt[k]{f(x)} = Z = \varphi(x)$.

6. *Использование тригонометрии*:

$$f\left(\sqrt[k]{1-x^2}\right) = 0.$$

Вводят $x = \sin\alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$f\left(\sqrt[k/2]{\cos\alpha}\right) = 0$$

и т. д.

Иррациональное неравенство

$$\sqrt{\varphi(x)} \geqslant f(x)$$

равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \leqslant 0, \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi \geqslant f^2(x), \end{cases} \end{array}\right.$$

а неравенство

$$\sqrt{\varphi(x)} \leqslant f(x)$$

— системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi \leqslant f^2(x). \end{cases}$$

Пример 1. $x^2 + x + \sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{2}$.

Решение. ОДЗ$=\{x|x \geqslant -1\}$. Очевидно, что $x = 1$, а так как

$$x^2 + x - (2+\sqrt{2}) = -\sqrt{x+1},$$

то это корень единственный.

Пример 2. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

Решение. Умножим уравнение на $\sqrt{2}$. Тогда

$$\sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1} + \sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9} = 14.$$

Обозначив $\sqrt{2x-5} = \varphi$, имеем $\sqrt{\varphi^2+2\varphi+1} + \sqrt{\varphi^2+64+9} = 14$, откуда $2\sqrt{2x-5}+4 = 14$, $\sqrt{2x-5} = 5$, $x = 15$.

Ответ. $x = 15$.

Пример 3. $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$.

Решение. ОДЗ$=\{x,\, y | x \geqslant 1,\, y \geqslant 1\}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Рассмотрим функцию

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}.$$

Введем обозначение $\frac{1}{x}=t$. Тогда $f(t)=t-t^2$, $f'(t)=1-2t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\max f(x)$. Отсюда $\sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{f\left(\frac{1}{y}\right)}=1$ только при $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=y=2$.

Решить уравнения:

1. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

2. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

3. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

4. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

5. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

6. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$.

7. $\frac{z}{z+1}-2\sqrt{\frac{z+1}{z}}=3$.

8. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=2$.

9. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}$.

10. $\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-x}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-x}}{2}}=\sqrt{4+\sqrt{x}}+\sqrt{16-x}$.

11. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

12. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+3}+3x-16$.

13. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$.

14. $\frac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\frac{4}{3}x+2$.

15. $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$.

16. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

17. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

18. $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$

19. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$

20. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

21. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$

22. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-10}.$

23. $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}.$

24. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1.$

25. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0.$

26. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$

27. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$

28. $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}.$

29. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1},\quad n\in N.$

30. $\sqrt{1-x^2}=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2.$

31. $\sqrt{\frac{x-1}{2}}-\sqrt{\frac{3-x}{2}}=\frac{x^2+9}{6x}.$

32. $\sqrt{5x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+8}=|x-1|.$

33.* $\sqrt{8x^3+4x^2+1}-\sqrt{8x^3-4x^2+1}=\sqrt{13x^3}-\sqrt{5x^3}.$

34.* $\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{11}+\sqrt{7}.$

Решить иррациональные уравнения с параметром:

35. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=a.$

36. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a.$

37. $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=ax.$

38. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}\quad (a>1).$

39. $x+\sqrt{x^2-2ax}=b\quad (a\neq b).$

40. $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2\quad \frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}.$

41.* $x=\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\sqrt{a-x}+\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}\quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0).$

42. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

43. $\left(\sqrt{1+a}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=ax \quad a\neq 0.$

44. $\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)^4\left(x-\sqrt{x^2-a}\right)=a \quad a\neq 0.$

Решить следующие неравенства:

45. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3.$

46. $x-4<\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}.$

47. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0.$

48. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0.$

49. $\sqrt{2\left(x-\sqrt{x^2-2^2}\right)}>\frac{x+2}{5\sqrt{x-2}}.$

50. $\sqrt{|10x-1|}\geqslant 2x+1.$

51. $18\sqrt{2x-3}-9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)}\geqslant 2\sqrt{x-2}.$

52. $\frac{x^2+4-(a+3)x}{\sqrt{x-2}}+2\sqrt{x^2-ax-2}<0, \quad a>1.$

53. $\frac{(1-x)^2}{(\sqrt{8+x}+3)^2}+7>x.$

54. $\sqrt{-x^2+6x-5}>4-x.$

55. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a \quad (a>0).$

56. $\sqrt{2ax-x^2}\geqslant a-x.$

57. $\sqrt{a^2-x^2}>x+1 \quad (a>0).$

58. $\sqrt{1-x^2}<a-x.$

59. $\sqrt{x^2+2x-15}+\sqrt{x^2-8x+15}>\sqrt{4x^2-18x+18}.$

60. $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)<3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right).$

61. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}\leqslant x^2.$

62. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 6, 11, 17], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 2.3. Показательные уравнения и неравенства

Определение. Показательным уравнением (неравенством) называется уравнение (неравенство) вида

$$R\left((\varphi(x))^{\psi(x)}\right)=0 \quad \left(R((\varphi(x))^{\psi(x)})\geqslant 0\right).$$

Область определения

$$D(R) = \{x | \varphi(x) > 0\}.$$

При решении уравнение (неравенство) приводится к одному из следующих видов:

1. $(\varphi(x))^{\psi_1(x)} = (\varphi(x))^{\psi_2(x)} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi(x) = 1, \\ \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \psi_1(x) = \psi_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2. $(\varphi_1(x))^{\psi(x)} = (\varphi_2(x))^{\psi(x)} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \psi(x) = 0, \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x). \end{array}\right.$$

3. $Aa^{\psi_1(x)} = Bb^{\psi_2(x)}$, где A, a, B, b — числа. Решается логарифмированием.

4. $(\varphi_1(x))^{\psi_1(x)} = (\varphi_2(x))^{\psi_2(x)}$. Решается графическим методом с установлением точного числа корней и исследованием правой и левой частей. Неравенство

$$(\varphi(x))^{\psi_1(x)} > (\varphi(x))^{\psi_2(x)}$$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ \psi_1(x) > \psi_2(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ \psi_1(x) < \psi_2(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $5^{x^2+2x-3} = 7^{x-1}$.

Решение. $\left(5^{x+3}\right)^{x-1} = 7^{x-1} \quad \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3 + \log_5 7. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение $13 \cdot 11^{x+2} = 5 \cdot 9^{x-2}$.

Решение. Логарифмируя, имеем

$$(x+2)\lg 11 - (x-2)\lg 9 = \lg 5/13$$
$$x = \lg(5/13 \cdot 121 \cdot 81)/\lg(11/9)$$

Пример 3. Решить неравенство $x^{x^2-x-1} > x^2$.

Решение.

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - 1 > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x - 1 < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x < \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $0 < x < 1 \quad \cup \quad x > (1+\sqrt{13})/2.$

Пример 4. При каких c неравенство $a^{2(x-y)} - 6a^{-2x} - a^{-y} \geqslant 0$, где $x^2 + y^2 = c^2$, имеет хотя бы одно решение?

Решение. Если $z = a^{2x-y}$, то $z^2 - z - 6 > 0$, откуда $a^{2x-y} > 3$ или

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 2x - y \log_a 3, \\ x^2 + y^2 = c^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2x - y < \log_a 3, \\ x^2 + y^2 = c^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Система имеет простое геометрическое истолкование как пересечение окружности с множеством "над" и "под" кривой $2x - y = \log_a 3$, что дает $c > \frac{1}{5}\log_a^2 3$.

Ответ. $c > \frac{1}{5}\log_a^2 3$.

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81.$

2. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x(0,125)^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}.$

3. $2^{x^2-3}5^{x^2-3} = 0,01(10^{x-1})^3.$

4. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}.$

5. $3\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} = 0,2.$

6. $10^{2/x} + 25^{1/x} = 4,25\cdot 50^{1/x}.$

7. $8^{2/x} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0.$

8. $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$.

9. $9^x+6^x=2^{2x+1}$.

10. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

11. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6,5+3,25+1,625+\ldots$

12. $|2^x-1|+|2^x-2|=1$.

13. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

14. $\sqrt[x]{a^2}+\sqrt[x]{b^2}=m\sqrt[x]{ab}$.

15. $\left(\frac{57}{37}\right)^x+\left(\frac{57}{37}\right)^{1-x}=10$.

16. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

17. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=7^x+7^{x-1}+7^{x-2}$.

18. $2^x=x+1$.

19. $x^{\sqrt[n]{x}}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^x$, $n\in N$, $n\neq 1$.

20. $25^{|1-2x|}=5^{|4-6x|}$.

21. $5^x 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$.

22. $x^{2-\lg^2 x-\lg x^2}=x^{-1}$.

23. $5^{\log_2 x}+2\cdot x^{\log_2 5}=15$.

24. $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$.

25. $x^{x^2-5x+8}=x^2$.

26. $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$.

27. $6^x-2^x=32$.

28. $6^x+5^x=61^{x/2}$.

29. $9^{-|x|}=2^{-(|x+1|+|x-1|)}$.

30. $x^2 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$.

31. $3^x\cdot 4^x=5^x$.

32. $(0,4)^{\log_2^2 x+1}=(6,25)^{2-\log_2 x^3}$.

33. $\frac{4}{25^{-x}+8+16\cdot 25^x}-\frac{5^x}{1+4\cdot 25^x}+\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{23}}{5}+\frac{1}{100}$.

34. $1+b(x)+b^2(x)+\cdots=(4\cdot 3^{x-1}+1)^{-1}$, где $b(x)=2\cdot 3^x-9^x-1$.

35. $13^{\frac{x}{13}+1}+13^{\frac{x}{13}}+13^{\frac{x}{13}-1}+\cdots=15^{2x+1}+15^{2x}+15^{2x-1}+\ldots$

Решить следующие системы уравнений:

36. $\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5, \\ x^{y^2+2} = 125. \end{cases}$

38. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

41. $\begin{cases} (x+y)2^{y-2x} = 6,25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5. \end{cases}$

42. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$

43. $\begin{cases} (x^2+y)2^{y-x^2} = 1, \\ 9(x^2+y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-y/2} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$

47. $\begin{cases} y^x = \dfrac{3}{2} + y^{-x}, \\ y^{\frac{5}{2}+x} = 64. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2^{\log_x 7} = x^{\log_2 x}, \\ 2^{\log_y 10} = x^{\log_2 x}. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^y = 64, \\ \log_2 x + y = 5. \end{cases}$

51. $\begin{cases} |x|^{\frac{2}{|x|}} + 2|y|^{\frac{1}{|y|}} = 3, \\ |y|^{|x|} = |x|^{|y|}. \end{cases}$

Решить неравенства:

52. $x^2 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$.

53. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

54. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.

55. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

56. $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

57. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.

58. $(0,3)^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots} < \sqrt[3]{0,3^{3x^2+5x}} < 1$.

59. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5$.

60. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$.

61. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

62. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} > 17$.

63. $10 > 5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x}$.

64. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$.

65. $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

66. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^3$.

67. $|x|^{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}} < 1$.

68. $(x+4) \cdot 3^{1-|x-1|} - x \geqslant (x+1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

69. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} \geqslant 9^{-\frac{1}{x}}$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 11, 17], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 2.4. Логарифмические уравнения и неравенства

Определение. $\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$.

Логарифмическое уравнение (неравенство) есть уравнение (неравенство) вида

$$R\left(\log_{\varphi(x)} \psi(x)\right) = 0 \quad (\geqslant 0).$$

Известно, что

$$D(R) = \{x | \psi(x) > 0,\, \varphi(x) > 0,\, \varphi(x) \neq 1\}.$$

Основные логарифмические соотношения:

1. $\log_a \varphi(x)\psi(x) = \log_a \varphi(x) + \log_a \psi(x), \quad a > 0,\ a \neq 1.$
2. $\log_a \varphi(x)/\psi(x) = \log_a \varphi(x) - \log_a \psi(x).$
3. $\log_{\varphi^k(x)} \psi^p(x) = \frac{p}{k} \log_{\varphi(x)|} \psi(x).$
4. $\log_a b = \log_c b/\log_c a \quad b, c > 0,\ c \neq 1.$
5. $a^{\log_a b} = b,\ a^{\log_c d} = d^{\log_c a}.$

Логарифмические неравенства:

Неравенство
$$\log_a \varphi(x) > \log_a \psi(x)$$
равносильно системе
$$\begin{cases} a > 1, \\ \varphi(x) > \psi(x) > 0 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < \varphi(x) < \psi(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy + \log_x y = 0, \\ y^{\sin x} = 1. \end{cases}$$

Решение. Ясно, что $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$. Тогда либо $y = 1$, либо $x = k\pi\,(k > 0)$. Далее $\log_x y = \log_x x^{-xy}$, $y = x^{-xy} \quad \Rightarrow$ $y^{1/y} = x^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} = (k\pi)^{-1}$. Графически очевидно, что решение $y = 1/x$ — единственное.

Ответ. $x = k\pi$, $y = 1/(k\pi)$, $k > 0$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_x 2 + \log_{x^2} 2 + 2\log_{2x} 2 = 1$.

Решение. $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 1/2$,
$$1/\log_2 x + 1/(2\log_2 x) + 2/(1 + \log_2 x) = 1.$$
Обозначим $\log_2 x = t$. Тогда $2t^2 - 5t - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3, t_2 = -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \cup x = 1/\sqrt{2}$.

Ответ. $x = 8$, $x = 1/\sqrt{2}$.

Решить следующие уравнения:

1. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 1/2 = 0.$

2. $\lg(x + 1,5) = -\lg x.$

3. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0,0001.$

4. $\log_x 9x^2 \log_x^2 x = 4.$

5. $\log_{1/2}^2 4x + \log_2 x^2/8 = 8.$

6. $\log_{10}(\log_{10} x) + \log_{10}(\log_{10} x^3 - 2) = 0.$

7. $2 \cdot \log_x 27 - 3 \cdot \log_{27} x = 1.$

8. $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1.$

9. $\log_3 x \log_9 x \cdot \log_{27} x \log_{81} x = 2/3$.
10. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 - \lg x$.
11. $2^{\log_3 x^2 \cdot \log_3 x} = 400$.
12. $27 \cdot x^{\log_{27} x} = x^{10/3}$.
13. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.
14. $2\lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 4$.
15. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.
16. $\log_2(9 - 2^x)/(3 - x) = 1$.
17. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$.
18. $\log_x 125x \log_{25}^2 x = 1$.
19. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$.
20. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12 - x)$.
21. $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$.
22. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.
23. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.
24. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} = 3$.
25. $\log_{10}^4(x-1)^2 + \log_{10}^2(x-1)^3 = 25$.
26. $\frac{10x^{\log_{10}^2 x}}{x^3} = \frac{x^{3\log_{10} x}}{10}$.
27. $\log_2 x \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x^2 - 6$.
28. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) = 10$, $(n \in N)$.
29. $2 \cdot \log_9^2 x = \log_3 x(\log_3 \sqrt{2x+1} - 1)$.
30. $(1 + \log_x \frac{4-x}{10}) \lg x = \lg\lg 10^3 - 1$.
31. $3 \cdot \log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.
32. $\log_{(x+1)}(x^3 - 9x + 8)\log_{(x-1)}(x+1) = 3$.
33. $\frac{2-\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.
34. $\sqrt{\log_2 2x^2 \cdot \log_4 16x} = \log_4 x^3$.
35. $\log_{0,5} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{4} = 0$.
36. $\sqrt{\log_x \sqrt{7x} \log_7 x} = -1$.
37. $\sqrt{\log_x ax} \log_a x = -\sqrt{2}$.
38. $(\log_a^2 x + 2)\log_{a^2 x} a = \log_x a \cdot \log_a x^2/a$.
39. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.
40. $\sqrt{2\left(\log_2 \frac{x^2}{64} - 1\right)(2 + \log_4 8x)} = \log_2 2x$.
41. $\log_3 x \log_4 x \log_5 x = \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x$.
42. $\log_3 3/x \log_2 x - \log_3 x^3/\sqrt{3} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.
43. $\lg^2 \cos x = \lg(1 - \sin x)\lg(1 + \sin x)$.
44. $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

45. $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x$.

46. $x^{\log_3^3 x - 3\log_3 x} = 3^{-\log_{2\sqrt{2}} 64 + 8}$.

47. $x^2 \log_3 x^2 - (2x^2+3)\log_9(2x+3) = 3\log_3 \frac{x}{2x+3}$.

48. $\log_x 3 \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$.

49. $\log_{10}^2 \left(1+\frac{4}{x}\right) + \log_{10}^2 \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) = 2\log_{10}^2 \left(\frac{2}{x-1} - 1\right)$.

50. $\log_{10}(x-10)\log_{10}(x+10) = \log_{10}(x^2-100) - 1$.

51. $\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.

52. $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$.

53. $\log_5 x^3/\sqrt{5} = 1/2 + \log_5 x/\log_3 1/\sqrt{x}$.

54. $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3)$.

55. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3(x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$.

56. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

57. $x^{\log_a x} = a^{(\log_a x)^3}$, $a \neq 1$.

58. $(15)^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x+1} = 1$.

59. $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$.

60. $a^{\log_a 2} = x^{\log_x(x^2-x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

61. $1 + \frac{\log_a(p-x)}{\log_a(x+q)} = \frac{2-\log_{(p-q)}4}{\log_{(p-q)}(x+q)}$.

62. $\log_{(3x+7)}(9+12x+4x^2) + \log_{(2x+3)}(6x^2+23x+21) = 4$.

63. $\frac{5}{3+\log_2 x} = 2 + \log_{\sqrt{x}} \frac{1}{2}$.

64. $\frac{11\log_x 3 - 1}{\log_3 x - 2} = 2 + \log_{\sqrt{x}} 3$.

65. $\log_{\operatorname{tg} x} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 2x} = 3 - \log_{\operatorname{tg} x} 2 - \log_{(\operatorname{tg} x - 1)} \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

66. $\log_2(5\cos x - 2) + \log_{1/2}(1 - 6\sin^2 x \cos^2 x) = 3$.

67. $2\log_3\sqrt{x} = 6 - \sqrt{\log_3 x}$.

68. $\log_2\left|\frac{1}{2} - \cos x\right| = -1$.

Решить неравенства:

69. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+1)} < 0$.

70. $\log_{0,3}(x+1)/\log_{0,3} 100/9 < 1$.

71. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$.

72. $\left(\log_{0,2}(x-1)\right)^2 > 4$.

73. $\log_x\left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right) > 0$.

74. $\log_{(|x-1|)} 0,5 > 0,5$.

75. $\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$.

76. $\frac{(x-1/2)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0$.

77. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

78. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0$.

79. $2\log_{\log_3 x}3<1$.

80. $\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\frac{1}{2}$.

81. $(\log_2(x-1))^{-1}<(\log_2\sqrt{x+1})^{-1}$.

82. $\log_5 x+\log_x\frac{x}{3}<\frac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

83. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0$.

84. $\log_x\log_2(4^x-12)\leqslant 1$.

85. $\log_x\log_3(9^x-6)\geqslant 1$.

86. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2+4x-4)}<1$, $x\in Z$.

87. $\sqrt{1-(9(\log_{1/8}x)^2)}>1-4\log_{1/8}x$.

88. $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

89. $\log_p\left(\frac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}\right)<0$.

90. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x>2$.

91. $\log_x(x+1)<\log_{1/x}(2-x)$.

92. $\log_{1/2}\frac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2}\leqslant 0$.

93. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$.

94. $\frac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}}\leqslant\frac{1}{\log_{1/2}(x+1)}$.

95. $\log_x\frac{3}{8-2x}\geqslant -2$.

96. $\log_x 10-\frac{1}{2}\log_a 10>0, \quad 0<a<1$.

97. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0,25$.

98. $x^{\log_a x+4}<a^4x \quad (0<a<1)$.

99. $|\log_3 x|<|\log_3 x/9|$.

100.* $\frac{\log_2(x+1)^3-\log_3(x+1)^5}{x^2-1}\geqslant 0$.

101. $\log_x(x-a)>2$.

102. $\log_a x>\sqrt{\frac{6}{(\log_a x-1)\log_x a}}$.

103. $\log_{p-x+1}(p^2-2px)\leqslant 2$.

104. $2\cdot(2\log_2^2 x+9\log_{1/2}x+10)^{-1}<3\cdot(\log_{1/2}^2 x-2\log_2 x-8)^{-1}$.

105. $\log_3(9^x-25)+\log_{1/3}\left(3^{x-1}\frac{1}{3}\right)\leqslant 1+2^{\frac{\log_2 7}{\log_2 9}}$.

106. $x^{\log_3(x^2-2x-2)}>1$.

107. $\left(\log_4\frac{x^2+x-3}{2}\right)^{x-2}\leqslant 1$.

108. $x^{\frac{3}{2}-\log_2 x^2}\geqslant x^{\log_2^2 x-\frac{3}{2}}$.

109. $\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3)>\log\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1$.

110. $\sqrt{x^2+3-4x}\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)\leqslant 0.$

Решить уравнения:

111. $2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0, \quad a>1.$

112. $\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0.$

113. $\log_x\frac{4x+5}{6-5x}<-1.$

114. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$

115. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18.$

116. $\lg_x 5\sqrt{5}-\frac{5}{4}=(\log_x\sqrt{5})^2.$

117. $\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a.$

118. $9^{-(\log_3\sqrt{x+1}-\log_3\sqrt{x^2-1})}=\sqrt{2(x-1)}.$

119. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2.$

120. $\sqrt{4\log_4 x-2}+\sqrt{1+\log_2 x}=4.$

121. $\log_{\sin 3x}(\cos x-\cos 2x)=1.$

122. $\log_{(x-1)}(2x^3-10x^2+13x-1)=3.$

123. $\log_2\log_3(2x+3)+\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x+1}{2x+3}=1.$

124. $\log_{x^2}(x+1)^2=1.$

125. $\log_{8\cos^2 x}\sin x+1/2=0.$

126. $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4).$

127. $\log_{(1-x)}(3-x)=\log_{(3-x)}(1-x).$

128. $\log_{10}(x^2-8)\log_{10}(2-x)=\log_5(x^2-8)/\log_5(2-x).$

129. $\log_5 x\log_3 x=\log_5 x+\log_3 x.$

Решить системы уравнений:

130. $\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$

131. $\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

132. $\begin{cases} xy=a^2, \\ \lg^2 x+\lg^2 y=2,5\cdot\lg^2 a^2\ (a<0). \end{cases}$

133. $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4, \\ \log_4 x-\log_4 y=1. \end{cases}$

134. $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27, \\ \log_3 y-\log_3 x=1. \end{cases}$

135. $\begin{cases} log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0, \\ \log_4 \dfrac{x}{y} - \log_4 x \log_4 y = 0. \end{cases}$

136. $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy), \\ \lg^2(x-y) + \lg x \lg y = 0. \end{cases}$

137. $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y, \\ y^{\log_3 x} = 81x. \end{cases}$

138. $\begin{cases} \log_2 y = \log_4(xy-2), \\ \log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1. \end{cases}$

139. $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1, \\ \log_2 y = \sqrt{x}. \end{cases}$

140. $\begin{cases} \log_2(x+y) + 2\log_3(x-y) = 5, \\ 2^x - 5 \cdot 2^{\frac{x+y-1}{2}} + 2^{y+1} = 0. \end{cases}$

141. $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x(x-3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}. \end{cases}$

142. $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(x+y) = \lg y \lg(x-y), \\ \lg y \lg(x+y) = \lg x \lg(x-y). \end{cases}$

143. $\begin{cases} \log_2(10-2^y) = 4-y, \\ \log_2 \dfrac{x+3y-4}{3y-x} = \log_2(x-1) - \log_2(3-x). \end{cases}$

144. $\begin{cases} \lg^2 x(\lg_x^2 y - \lg_x y + 1) = 13, \\ \lg xy = \sqrt{\log_y x}|\lg y| - 7. \end{cases}$

145. $\begin{cases} \log_{2/3}^2 x + \log_{2/3}^2 y - \log_{2/3}^2(x+y) = 1, \\ \lg_{3/2} x \cdot \log_{3/2} y + \log_{3/2}(x+y) = 0. \end{cases}$

146. $\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 6, \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 162, \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = \sqrt[4]{48}. \end{cases}$

147. $\begin{cases} 1 + \log_4^{-1} x = \log_x\left((x^2+y^2)/(yz)\right), \\ 1 + \log_5^{-1} y = \log_y\left((y^2+z^2)/(zx)\right), \\ 1 + \log_6^{-1} z = \log_z\left((x^2+z^2)/(xy)\right). \end{cases}$

148. $\begin{cases} xy + \log_x y = 0, \\ \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^2 + \sin^2 x = 0. \end{cases}$

149. $\begin{cases} (4y^2 - y + 6)2^x = 20y, \\ x + \log_2 y = 2. \end{cases}$

150. $\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2y - x), \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \log_{|xy|}(x - y) = 1, \\ 2\log_5 |xy| \log_{|xy|}(x + y) = 1. \end{cases}$

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 2, 4] и конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 2.5. Производная, пределы, касательная

Определение (предел последовательности). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall n > N$
$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Предел последовательности геометрически — это стремление членов последовательности к точке, называемой пределом (A).

Определение (предел функции). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta(\varepsilon)\forall x$
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (производная функции в точке). $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Для вычисления пределов справедливы следующие соотношения:

1. $\frac{\text{const}}{\pm\infty} = \pm 0, \quad \frac{\text{const}}{\pm 0} = \pm\infty$, $\text{const} > 0$;
2. $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$;
3. $(1 + x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e \quad (e \approx 2,7\ldots)$.

Обозначение ± 0 означает стремление некой переменной к 0 справа и слева соответственно.

Для производной выполняются соотношения при $\exists u', v'$:

1. $(u + v)' = u' + v'$. 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 3. $(u/v)' = (u'v - v'u)/v^2$, $v \neq 0$. 4. $(u\,(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$. 5. $(\text{const} \cdot u(x))' = \text{const} \cdot u'(x)$,

а также табличные производные:

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x; \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a = \text{const}); \quad (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x});$$

$$(1/x)' = -1/x^2; \quad (\log_a x)' = 1/(x \ln a); \quad (\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x.$$

Для касательной в точке $x = x_0$ и функции $f(x)$

а) $y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$; $y_0 = f(x_0)$

б) $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к оси OX.

Пример. Написать уравнение касательной к кривой $y = (-x)^{3/2}/\sqrt{2}$ в точке графика, ближайшей к точке $(-5, 0)$.

Решение. d — расстояние от точки $M(x, y)$ до точки $(-5, 0)$. Имеем

$$d(x, y) = \sqrt{(x+5)^2 + \left(\frac{(-x)^{3/2}}{\sqrt{2}} - 0\right)^2}.$$

Тогда $d'(x) = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 10/3$, откуда $\min\limits_{(-\infty, 0)} d(x) = d(-2)$. Следовательно, $M_1(-2, 2)$. В этом случае касательная определяется уравнением

$$y = -\frac{3}{2}x - 1 \quad \left(y'(-2) = -\frac{3}{2}\right).$$

Ответ. $y = -\frac{3}{2}x - 1$.

Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\left(\frac{4}{x^2 - x - 1} - \frac{1 - 3x + x^2}{1 - x^3}\right)^{-1} + 3\frac{x^4 - 1}{x^3 - x - 1}\right]$.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x \cdot 2x^2 + 1}{(5x - 1)(x^2 + 2x - 1)}$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2}\right)$.

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $\quad a > b,\ a \neq 0$.

13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to a} \left\{ \left[\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}} \right)^{-1} - \frac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{3/4}-a^{1/4}x^{1/2}+a^{1/2}x^{1/4}-a^{3/4}} \right]^{-1} - \right.$

$\left. -\sqrt{2}^{\log_4 a} \right\}^8$.

16. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}-2^{1-x}}}$.

17. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 8x \operatorname{ctg} 3x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2+3x-1)\operatorname{tg} x}{x^2+2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x-\operatorname{tg} x}{x^2 \sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{3x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 7(\pi-x)}{5(x-\pi)^n}$, $n = 1, 2$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

32. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

38. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

39. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

40. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

41. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$.

43. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

44. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

Найти производную функций:

45. $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

46. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

47. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

48. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$.

49. $y=\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$.

50. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

51. $y=e^{-x^2}+\ln 2$.

52. $y=\frac{\ln 3\sin x+\cos x}{3^x}$.

53. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$.

54. $y=a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}$.

55. $y=\ln\left(\ln^2(\ln^3 x)\right)$.

56. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

57. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

58. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

59. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

60. На графике функции $y=x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

61. Доказать, что касательные к кривой $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках пересечения с осями координат параллельны.

62. Определить угол наклона касательной к кривой $y = \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}}$ в начале координат.

63. Доказать, что не существует точек на графике $y = x^3 + x^2 + x + 1$, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

64. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?

65. Под каким углом к оси OX наклонена касательная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке пересечения с осью OY?

66. Под каким углом к оси OX наклонена касательная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $(2, -4)$?

67. Прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ является касательной к кривой $y = \frac{x^4}{2} - 4$. Найти координаты точек касания.

68. Написать уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проведенных через точку пересечения кривых.

69. Написать уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2, -5)$.

70. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная параллельна биссектрисе первого координатного угла?

71. Доказать, что парабола $y = a(x - x_1)(x - x_1)$, $a \neq 0$, $x_1 < x_2$, пересекает ось OY под равными углами.

72. Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$, $x = y^2$?

73. При каком соотношении между коэффициентами a, b, c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси OX?

74. При каких p, q кривая $y = x^3 + px + q$ касается оси OX?

75. При каком a кривая $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

76. К графику $y = (x + 1)/\sqrt{x}$ проведена касательная в той точке, где угловой коэффициент равен 2, причем касательная не проходит через начало координат. Найти точки пересечения этой касательной с координатными осями.

77. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX, кривой $y = (x - 1)^5 + 1$ и касательной к ней, параллельной прямой $10x - 2y = 3 = 0$ и пересекающей OX в точке с положительной абсциссой.

78. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX, кривой $y = \frac{1}{2}(-x)^{3/2}$ и касательной к ней, проведенной в точке кривой, ближайшей к точке $(-5, 0)$.

79. Написать уравнение общей касательной к кривым $y = x^2 + 8x + 4$ и $y = x^2 + 4x + 8$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [2, 17, 19].

§ 2.6. Исследование функций, построение графиков

Схема исследования функции $y = f(x)$ обычно такова:

1. Устанавливают область определения функции $D(f)$.

2. Определяют множество допустимых значений функции $E(f)$.

3. Исследуют функцию на четность или нечетность: если $D(f)$ симметрична относительно 0 и $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D(f)$ ($f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D(f)$), то функция называется четной (нечетной). При этом исследование функции, равно как и построение графика, можно ограничить условием $x \geqslant 0$, так как при четности график симметричен относительно оси OY (при нечетности — центрально симметричен). В случае отсутствия четности и нечетности говорят, что функция является функцией общего вида, и исследуют ее при $\forall x \in D(f)$.

4. Определяют, периодична ли функция: если существует такое $T > 0$, что $f(x) = f(x + T)$ при $\forall x \in D(f)$, то функцию называют T-периодической, а исследование ее свойств ограничивают промежутком $[0, T]$.

5. Находят, если возможно, корни функции $x_i : f(x_i) = 0$.

6. Исследуют функцию на монотонность, для чего:

а) составляют уравнение $f'(x) = 0$;

б) находят точки разрыва функции $f'(x)$ и корни уравнения (критические точки);

в) отмечают эти точки на оси Ox в области $D(f)$ и устанавливают знак $f'(x)$ в промежутках между ними. Знак производной может меняться только в критических точках. При $f'(x) > 0$ функция монотонно возрастает, при $f'(x) < 0$ — монотонно убывает.

7. Исследуют функцию на непрерывность, для чего находят точки x_i разрыва $f(x)$ и пределы функции $f(x)$ при $x \to x_i \pm 0$. Функция называется непрерывной в точке, если

$$\lim_{x\to x_i+0} f(x) = \lim_{x\to x_i-0} f(x) = f(x_i).$$

8. Исследуют поведение функции при $x \to \pm\infty$, если $\pm\infty \in D(f)$.

Оформляют график в виде линий, соединяющих характерные точки.

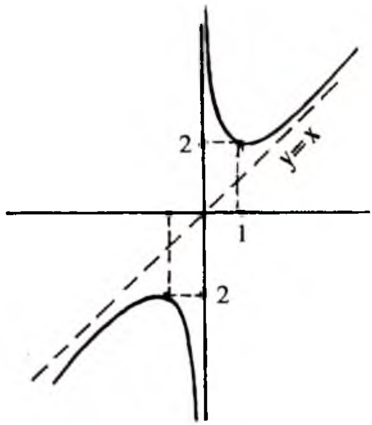

Рис. 1

Пример 1. Построить график функции

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

1. $D(f) = \{x | x \neq 0\}$.

2. $E(f) = R \setminus \{0\}$.

3. Функция нечетная: $f(-x) = \frac{x^2+1}{-x} = -f(x)$. График строится на половине $D(f)$ (при $x > 0$).

4. Непериодична.

5. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$; $f'(x) < 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f'(x) > 0$ при $|x| > 1$. Следовательно, $x = 1$ — точка min и $\min f(x) = f(1) = 2$.

6. $f(x) = \frac{x^2+1}{x} \neq 0$.

7. $\lim_{x \to +0} f(x) = +\infty$.

8. Строим график при $x > 0$ и, используя свойство центральной симметрии, отображаем его в область, где $x < 0$ (рис. 1).

Найти участки монотонности следующих функций:

1. $y = 3x - x^3$.

2. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

3. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$.

4. $y = x + \sin x$.

5. $y = x + (\sin 2x)$.

6. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

7. $y = \frac{x^2}{2x}$.
8. $y = x^n e^{-x}$.
9. $y = x^2 - \ln x^2$.
10. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$, если $x > 0$ и $]f(0) = 0$.

Найти точки экстремума функций:

11. $y = \frac{x}{\ln x}$.
12. $y = \frac{\ln x + 2}{x}$.
13. $y = x^2 e^{-x}$.
14. $y = x^3 e^{-x}$.

Исследовать на монотонность:

15. $y = 3\sin x - 4\cos x$.
16. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.
17. $y = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.
18. Доказать, что $f(x) = \sin x + 2x$ возрастает при $\forall x \in R$.
19. Найти p, такое, что $y = \cos x - px + q \searrow \forall x \in R$.

Исследовать и изобразить функции:

20. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.
21. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.
22. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.
23. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.
24*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.
25. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.
26. $y = x + \frac{1}{x}$.
27. $y = e^{2x - x^2}$.
28. $y = x + e^{-x}$.
29. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.
30. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.
31. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
32. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$.
33. $y = \frac{x^3}{x^2+2}$.
34. $y = \frac{1}{x^2+8x}$.
35. $y = \frac{x+2}{x^2-9}$.
36. $y = \frac{4}{x^2-2x+2}$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [2, 12, 16, 17, 20].

§ 2.7. Исследование на существование и единственность

Обычно задача формулируется так:

$$f(x,\ a, b) = 0,$$

где x — аргумент; a, b — параметры. При каких a и b задача имеет ровно n решений (по крайней мере n решений и т. д.)?

Методы решения состоят в сведении (расщеплении) уравнения к функции вида:

1. $f_1(x) = \varphi(a, b)$. Строят график $y = f_1(x)$, который с прямыми $y = \text{const}$ должен иметь n пересечений, что и определяет решение. Далее задача рассматривается для параметров a и b.

Если п. 1 не дает результата, то принимают $f_2(x, a) = \varphi_1(b)$ и ситуация повторяется с той лишь разницей, что график зависит от параметра.

2.] $F(\varphi(x, a)) = 0$. Производя замену $t = \varphi(x, a)$, строят функции $y = F(t)$ и $t = \varphi(x, a)$, которые исследуют в отдельности.

Пример. При каких a уравнение $\cos\left(\sqrt{a - x^2}\right) = 1$ имеет ровно восемь решений?

Решение. $a \geqslant x^2$, $a - x^2 = 4k^2\pi^2$, $k \geqslant 0$, $a = 4k^2\pi^2 + x^2$. Построим кривые $a = 4k\pi + x^2$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ (рис. 2).

Из графика видно, что $36\pi^2 < a < 64\pi^2$.

Ответ. $36\pi^2 < a < 64\pi^2$.

1. В зависимости от p найти a, такие, что $x^3 + 2px^2 + p = a$ имеет три разных корня.

2. При каких q, a уравнение $ax^3 + 2x + 1 = q$ имеет три разных корня?

3. Для каких q при $\forall p > 0$ функция $f(x) = px^5 - p^2x^4 + p^3qx^3 + 1$ возрастает при $x \in \left(0, \frac{p}{5}\right)$?

4. Для каких b и $a \leqslant 0$ функция $f(x) = ax^5 + bx^4 - b^2x^3 - 1$ убывает $\forall x \in [0, \infty)$?

5. Сколько корней имеет уравнение $f'(x) - af(x) = 0$, если $f(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2}(x - x_3)^{m_3}$? Здесь $x_1 < x_2 < x_3$, $m_1, m_2, m_3 \in N$.

6. При каких a уравнение $\cos x \cos 2x \cos 3x + a = \cos 2x$ имеет более одного решения при $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$?

7. При каких a уравнение $\sin x \cos 2x \sin 3x = a$ имеет ровно два корня $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$?

8. При каких $a > 0$ уравнение $\sin ax = \frac{1}{3}$ имеет единственное решение на $[\pi, 2\pi]$?

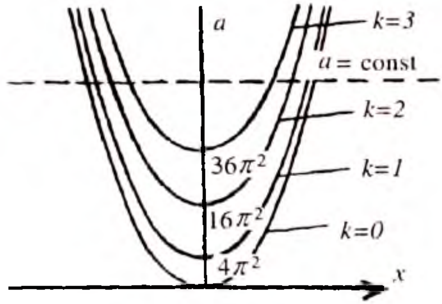

Рис. 2

9. При каких $a > 0$ уравнение $\cos ax = \frac{1}{9}$ имеет единственное решение $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?

10. При каких $a \exists b \in (0, 1)$ уравнение $x \cos x \sin b - a \sin x \cos b = x \cos x \cos b$ имеет по крайней мере два решения $x \in (0, \frac{3}{2}\pi)$?

11. При каких a и b уравнение $x^2 - 2x \ln \frac{x}{a} + 2 \ln \frac{x}{b} - 1 = 0$ имеет по крайней мере два решения $x \in (0, 1)$?

12. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} y = \sin(a + \pi x) + \sin(a - \pi x), \\ 3 \sin a = \dfrac{\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2}}{y^2 + 1} \end{cases}$$

имеет единственное решение при $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $y \in (-\infty, 0]$?

13. При каких $a > \frac{1}{2}$ система

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{1 + ax^2}, \\ 5\sqrt{3} \cos a = (\cos(a + y) + \cos(a - y))\,(1 + x^2) \end{cases}$$

имеет решения в области $x \in [2, \forall)$, $y \in R$.

14. При каких a уравнение $\cos \sqrt{a - x^2} = 1$ имеет восемь решений?

15. При каких a уравнение $\sin \sqrt{a - x^2} = 1$ имеет семь решений?

16. При каких a система

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для $\forall b \in R$.

18. Найти все a, b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{xy-1}{xy+1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases} \qquad x > 0$$

имеет единственное решение.

19. Найти все a, b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

20. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $\forall b > 0$.

21. При каких a система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

22. При каких a система

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

23. При каких a система

$$\begin{cases} x^y = a, \\ \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4} + y, \end{cases} \qquad x > 0$$

имеет единственное решение?

24. При каких a система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$?

25. Найти все a, b, при которых система

$$\begin{cases} (1+x)^y + (1+y)^x = a^2, \\ (b^2+1)^{x^2+y^2} = (b^4+1)^{xy} \end{cases}$$

имеет решение.

26. При каких a система

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \sin x = a, \\ \dfrac{y}{x} + \sin y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение для $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 2\pi]$?

27. При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

28. При каких a уравение $\frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = |\cos a|$ имеет решение?

29. Дана система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = p \sin \alpha, \\ \cos x \cos y = p \cos \alpha. \end{cases}$$

При каком p найдется такое α, что система имеет решение?

30. При каком a уравнение $\left(a - x^2 - \cos \frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-2, 3]$ нечетное число различных корней?

31. Найти все значения a, при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$ не превосходит числа решений уравнения $x + (3a-2)^2 3^x = (8^a - 4)\log_3(3^a - 1/2) - 3x^3$.

32. Найти $\alpha \in (2, 5)$, что $\exists$ хотя бы одно $x \in [2, 3]$, удовлетворяющее уравнению $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [2, 4].

§ 2.8. Задачи на наибольшее и наименьшее значения. Интеграл

I. *Задача на наибольшее(наименьшее) значение* решается следующим образом.

1. Если отрезок замкнут, $x \in [a, b]$, находят корни производной $f'(x) = 0$. Пусть x_i — точки min, x_i' — точки max. Имеем

$$f_{\text{наиб}} = \max\{f(x_i'), f(a), f(b)\},$$
$$f_{\text{наим}} = \min\{f(x_i), f(a), f(b)\}.$$

2. Если множество $D(f)$ "открыто", например (a, b) или $[a, \infty)$, то под наибольшим понимают самое большое значение, достигаемое функцией, т.е. $f_{\text{наиб}} \geqslant f(x)\ \forall x \in D(f)$.

II. *Понятие неопределенного интеграла.*

Если $f(x)$ — непрерывная функция и $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

C — константа.

Основные свойства:

1. $\int Cf(x) = C\int f(x)dx$.
2. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Таблица простейших интегралов:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

III. *Определенный интеграл:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная $(f(x) \geqslant 0)$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2, \quad x \in [-2, 2]$.

2. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1, \quad x \in [-2, 1]$.

3. $y = x^5 - x^3 + x + 2, \quad x \in [-1, 1]$.

4. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, \quad x \in [-5, -1].$

5. $y = \frac{\sin 2x}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

6. $y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in [0, \pi].$

7. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}, \quad x \in [-3, 3].$

8. $y = x + \cos x, \quad x \in [0, \pi/2].$

9. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x, \quad x \in [\pi/6, \pi/3].$

10. $y = 1/2 \cos 2x + \sin x, \quad x \in [0, \pi/2].$

11. $y = x/2 - 1/4 \sin 2x + 1/3 \cos^3 - \cos x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$

12. $y = \cos^2 x + \sin x, \quad x \in [0, \pi/4].$

13. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}, \quad x \in [3/4, 2].$

14. $y = x + \frac{8}{x^4}, \quad x \in [-2, -1].$

15. $y = \left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2, \quad x \in (0, \pi).$

16. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad x \in [0, 1].$

17. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x$.

18. Найти b, такое, чтобы наибольшее значение функции $|-2x^2 + x + b|$ на участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ было наименьшим.

19. При каком значении $x \in (0, \pi/2)$ функция $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin^4 x}$ принимает наименьшее значение?

20. При каком x функция

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + x}}}} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 - x}}}}$$

принимает наибольшее значение?

21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}x, \quad x \in [1/2, 4].$$

22. Найти наибольшие значения функции $f(x) = \frac{1}{x^2+4\pi x+41} + \cos x, \quad x \in R.$

23. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x, \quad x \in [-\pi/6, \pi/6]$$

Вычислить интегралы:

24. $\int \cos^2 x dx.$

25. $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x dx.$

26. $\int_0^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

27. $\int_0^{\pi/4} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt$.

28. $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{\cos^2(2x/9)}$.

29. $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.

30. $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2} dx$.

31. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$.

32. $\int_9^{-54} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{9}} dx$.

33. $\int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.

34. $\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x} dx$.

35. $\int_0^{2e} \frac{dx}{0,5x+1}$.

36. $\int_0^{0,5} \left(4x - \frac{1}{2x+1}\right) dx$.

37. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$.

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx$.

39. $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

40. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

41. $\int_0^{1} \frac{x dx}{\sqrt{9+16x}}$.

42. $\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10} - \sqrt{x+1}}$.

43. $\int_{-2}^{2} \left(10^{x/4} - \sin \pi x\right) dx$.

Вычислить площадь, ограниченую кривыми:

44. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$.

45. $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 1/2$, $x = 5/2$.

46. $y = 5/x$, $y = 6 - x$.

47. Доказать: $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}$.

48. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 - 3x^2} d = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

49. Вычислить S фиг., ограниченной графиками:

$$y = \frac{1}{2}\left|(x^2 - 6x + 8)\right|, \quad y = 2 + \frac{2}{x}\left|(x - 3)\right|.$$

50. Найти a: $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leqslant a$.

51. Найти решения уравнения:

$$\int_{-a}^{a} (x + 2a^2 - a) dx = -\sin 2a,$$

принадлежащие $[-3/2, -1/2]$.

52. Найти A и B, если $f(x) = A3^x + B$ удовлетворяет $f(0)$ $2, \int_1^2 f(x)dx = 12$.

Задачи 1—16, 26—46 взяты из работы [1], 22 — из [3], задачи 17—21 и 47—52 — из конкурсных заданий в СПбГУ.

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

При решении задач в данной главе используются следующие формулы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1 - \operatorname{tg}^2\alpha),\ \alpha \neq \pm\pi/4 + k\pi;\ \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2;\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;\ \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (-1)^k\beta + k\pi;$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm\beta + 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi.$$

$$\sin x\sin y = 0,5\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right);\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x\cos y = 0,5\left(\cos(x + y) + \cos(x - y)\right);\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\sin x\cos y = 0,5\left((x + y) + \sin(x - y)\right);$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \varphi),\ \varphi = \arcsin\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

Правило 1. $f\left(\alpha + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \pm co f(\alpha)\,\forall\alpha;\ k \in Z$, где f — любая тригонометрическая функция; cof — сопряженная ей функция (для $\sin\alpha$ это $\cos\alpha$, для $\cos\alpha$ — это $\sin\alpha$ и т. д.).

Правило 2. $f(\alpha + k\pi) = \pm f(\alpha)\ \forall\alpha;\ k \in Z$.

$$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |a| > 1,\ x \in \varnothing, \\ |a| \leqslant 1,\ x = (-1)^k \arcsin a + k\pi; \end{array}\right.$$

$$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |a| > 1,\ x \in \varnothing, \\ |a| \leqslant 1,\ x = \pm\arccos a + 2\pi k; \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + k\pi.$$

Известны также соотношения

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{arcctg} a < \pi,$$

$$\sin^2 x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\arcsin\sqrt{a} + k\pi,\ 0 \leqslant a \leqslant 1,$$

$$\cos^2 x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\arccos\sqrt{a} + k\pi,\ 0 \leqslant a \leqslant 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{a} + k\pi,\ a > 0.$$

Решения $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$ записывают в общем виде редко, рассматривая их как частные случаи. Кроме того, используют следующие свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x;\ \cos(-x) = \cos x;\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;\ \arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x),\ |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;\ \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Тригонометрические неравенства упрощаются сведением к простейшим типа

$$\sin ax > b,\ \cos ax < b,\ \operatorname{tg} ax < b,$$

которые затем решаются с использованием свойств тригонометрических функций.

Рассмотрим случай $\cos ax < b$. Обозначим $ax = t$. Тогда

$$\cos t < b.$$

1. $b \geqslant 1$ — решение $\forall t$;

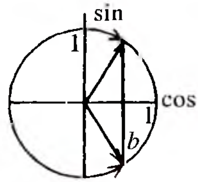

Рис. 3

2. $-1 < b < 1$. На рис. 3 изображена дуга, косинус которой удовлетворяет неравенству. Следовательно, имеем:

а) $a > 0$, $\frac{\arccos b + 2\pi k}{a} < x < \frac{(2k+1)\pi - \arccos b}{a}$;

б) $a < 0$, $\frac{2\pi - \arccos b + 2k\pi}{a} < x < \frac{\arccos b + 2\pi k}{a}$;

в) $a = 0$, $b = 1$, $x = 2\pi k$. ;

г) $a = 0$, $b \neq 1$, $x \in \varnothing$;

3. $b \leqslant -1$, $x \in \varnothing$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x \sin 3x \sin 101x = 1$.

Решение. Очевидно, что $|\sin x| = 1$. Следовательно, либо $\sin x = 1$, либо $\sin x = -1$. Тогда проверка дает $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$.

Пример 2. Решить неравенство $\sin^2 30x - 2\sin 30x - 3 \geqslant 0$.

Решение. Так как $\sin 30x = t$, то $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leqslant -1 \cup t \geqslant 3 \quad \Rightarrow \quad \sin 30x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\pi/60 + k\pi/15$.

Ответ. $x = -\pi/60 + k\pi/15$, $k \in Z$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{\arcsin\left(\frac{2}{x-x^2}\right)}{\arccos\left(\frac{x}{3}\right)(x^2-2)} > 0$.

Решение. Так как $\arccos \frac{x}{3} \geqslant 0 \quad \forall x : |x| \leqslant 3$, то

$$\left|\frac{1}{x-x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |x^2 - x| \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -1, \end{array}\right.$$

откуда $\left[\begin{array}{l} 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ -3 \leqslant x \leqslant -1, \end{array}\right.$ но

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 < \dfrac{2}{x-x^2} < 1, \\ x^2 - 2 > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -1 < \dfrac{2}{x-x^2} < 0, \\ x^2 - 2 < 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ |x| > \sqrt{2}, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 0, \\ x < -1, \end{array}\right. \\ |x| < \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Учитывая $\left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ -3 < x < -1, \end{array}\right.$ получаем $-\sqrt{2} < x < -1$.

Ответ. $-\sqrt{2} < x < -1$.

§ 3.1. Тождественные преобразования

Доказать тождества:

1. $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1} = \frac{2}{3}$.

2. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

3. $\sin^{-1}2\alpha\cdot\sin^{-1}(60^0-2\alpha)\cdot\sin^{-1}(60^0+2\alpha) = 4\sin^{-1}6\alpha$.

4. $\frac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{15\alpha}{2}$.

5. $\frac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

6. $\sin\frac{\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{7\pi}{2}\right)\right)} = \frac{1}{8}$.

7. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin(4\pi-\alpha))\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\pi/6+\alpha)\operatorname{tg}(\alpha-\pi/6)$.

8. $\frac{2\cos(\pi/6-2\alpha)-\sqrt{3}\sin(5\pi/2-2\alpha)}{\cos(9\pi/2-2\alpha)+2\cos(\pi/6+2\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}$.

9. $\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1 = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

10. $1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\pi/4-\alpha/2)}$.

11. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

12. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha = 2\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1$.

13. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = (5+3\cos 4\alpha)/8$.

14. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

15. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha = \sin 5\alpha$.

16. $\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)} = 1$.

17. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

18. $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

19. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1 = -2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

20. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$.

21. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

22. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\dots+\cos^2 n\alpha = \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{n}{2}$.

23. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}$.

24. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31} = \frac{1}{32}$.

25. $\sin 10^0\sin 20^0\sin 30^0\dots\sin 90^0 = \frac{3}{256}$.

26. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{14\pi}{15}=-\frac{1}{2^{14}}$.
27. $\sin 18^0\sin 54^0=1/4$.
28. $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=\frac{9}{25}$.
29. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.
30. $\cos\left(\frac{11\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$.
31. $\sin 84^0\sin 24^0\sin 48^0\sin 12^0=\frac{1}{16}$.
32. $\operatorname{tg}12^0\operatorname{tg}24^0+\operatorname{tg}24^0\operatorname{tg}54^0+\operatorname{tg}54^0\operatorname{tg}12^0=1$.

Вычислить:

33. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.
34. $\sin 20^0\cos 50^0\sin 60^0\cos 10^0$.
35. $\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+9\cos\alpha-1}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=4$.
36. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{27}{65}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9},\ \frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\beta<0$$

37. $\operatorname{ctg}\beta$, если $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$
38. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.
39. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$.
40. $\operatorname{tg}\beta$, если $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$.
41. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.
42. $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right)\right)$.
43. $\cos 260^0\sin 130^0\cos 160^0$.
44. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.
45. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.
46. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.
47. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если $\cos 2\alpha=m$.
48. $\cos 15^0$.
49. $\sin 18^0$.
50. $\sin 6^0$.
51. $\cos(\theta+\varphi)$ и $\sin(\theta+\varphi)$, если $\cos\theta+\cos\varphi=a$ и $\sin\theta+\sin\varphi=b$.
52. Доказать, что

$$\arcsin x+\arcsin y=\eta\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi,$$
$$\text{где } \eta=1,\ \varepsilon=0,\ \text{ если } xy<0,\ x^2+y^2\leqslant 1;$$
$$\eta=-1,\ \varepsilon=-1,\ \text{ если } x^2+y^2>1,\ x<0,\ y<0;$$
$$\eta=-1,\ \varepsilon=1,\ \text{ если } x^2+y^2>1,\ x>0,\ y>0.$$

53. Пусть
$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b},\ \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}.$$
Доказать, что $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$.

54. Исключить φ из уравнений:
$$\cos(\alpha-3\varphi)=m\cos^3\varphi,\quad \sin(\alpha-3\varphi)=m\sin^3\varphi.$$

В этом параграфе использованы задачи из работ [4, 17].

§ 3.2. Тригонометрические уравнения

Решить уравнения:

1. $1-\sin^4 x-\frac{5}{3}\cos^4 x=0$.

2. $\cos x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=1$.

3. $8\cos^4 x-\cos 4x=1$.

4. $1+\sin 2x=\cos x+\sin x$.

5. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

6. $4\sin^4 x=5\cos^2 x+2\cos 2x+2$.

7. $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$.

8. $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$.

9. $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=0$.

10. $12\sin^2 x+3\sin 2x-2\cos^2 x=2$.

11. $3\cos^2 x-8\sin 2x=-4$.

12. $2\cos 4x-3\sin 4x=1$.

13. $1-3\cos^2 x=2\sin x\cos x$.

14. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}$.

15. $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\cos x\sin 4x$.

16. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$.

17. $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$.

18. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.

19. $\sin 5x+\sin 7x=5\sin 6x$.

20. $\sin x-\sin 9x=3\cos 5x$.

21. $\sin(x-a)=\sin x+\sin a$.

22. $\sin^5 x+\cos^5 x=1$.

23. $\sin 5x+\cos 8x=2,\quad |x|<10$.

24. $\sin 3x\cos 5x=1$.

25. $\sin x=\cos 7x,\quad |x|>3$.

26. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

27. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0$.

28. $4\sin x + \cos x = 4$.
29. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0,25$.
30. $\sin 2z - 4\cos 2z = 4$.
31. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1$.
32. $\sin x + \sin \frac{1}{\pi} = \sin\left(x - \frac{1}{\pi}\right)$.
33. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$.
34. $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + \cos^2 \frac{x}{2}(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}) + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \sin x = 4$.
35. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) = \operatorname{tg}(x - 140^\circ) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.
36. $\frac{\cos^2 x(1+\operatorname{ctg} x)-3}{\sin x - \cos x} = 3\cos x$.
37. $\frac{1}{2\operatorname{ctg}^2 x+1} + \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$.
38. $\cos z \cos 2z \cos 4z \cos 8z = \frac{1}{16}$.
39. $\frac{40\left(\sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2}\right)}{16\sin \frac{t}{2} - 25\cos \frac{t}{2}} = \sin t$.
40. $\sin^{-1} t - \sin^{-1} 2t = \sin^{-1} 4t$.
41. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} + 2\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} - 3 = 0$.
42. $\frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} + \frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z} + 2 = 0$.
43. $\frac{1-\sin^6 z - \cos^6 z}{1-\sin^4 z - \cos^4 z} = 2\cos^2 3z$.
44. $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.
45. $2\cos 13x + 3\cos 3x + 3\cos 5x - 8\cos x \cos^3 4x = 0$.
46. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$.
47. $\sin^2 2t + \cos^2 2t = \frac{3}{2}(\sin^4 2t + \cos^4 2t) + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$.
48. $\sin t^2 = \sin t$.
49. $\sin^3 z \sin 3z + \cos^3 z \cos 3z = \cos^3 4z$.
50. $2\sin^4 x + 1,25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x$.
51. $\sin 3t - \sin t = \frac{8\cos t \operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2} t}$.
52. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg}(z + 60^0)\operatorname{tg}(z + 120^0) = \sqrt{3}$.
53. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.
54. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} 2z$.
55. $\frac{2(\cos^3 x + 2\sin^3 x)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x$.
56. $\operatorname{tg}^4 x = 36\cos^2 2x$.
57. $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5$.
58. $\operatorname{tg} x \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg} x} = \sin 6x$.
59. $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} + \frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z} + \frac{5}{2} = 0$.
60. $\operatorname{tg}(t^2 - t)\operatorname{ctg} 2 = 1$.
61. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + 1) = 1$.
62. $\operatorname{tg}(35^0 + x)\operatorname{ctg}(10^0 - x) = 2/3$.
63. $1 + \sin z + \cos z + \sin 2z + \cos 2z = 0$.
64. $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$.

65. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

66. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

67. $37 \operatorname{tg}^3 x = 11 \operatorname{tg} x$.

68. $\sin 3x = a \sin x$.

69. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha + 1 = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha$.

70. $(\cos^2 x + \cos^{-2} x)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$.

71. $\frac{1 - \sin t + \ldots + (-1)^n \sin^n t + \ldots}{1 + \sin t + \ldots + \sin^n t + \ldots} = \frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}$.

72. $\cos z \sqrt{\operatorname{tg}^2 z - \sin^2 z} + \sin z \sqrt{\operatorname{ctg}^2 z - \cos^2 z} = 2 \sin z$.

73. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} - \sin x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} + \sin x} = 1$.

74. $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$.

75. $\sqrt{1 - 2 \sin 4x} + \sqrt{6} \cos 2x = 0$.

76. $\sin \pi \sqrt{t} + \sin \pi t = 0$.

77. $\sin^{10} 3x + \cos^{10} 3x = 4 \frac{\sin^6 3x + \cos^6 3x}{4 \cos^2 6x + \sin^2 6x}$.

78. $\operatorname{ctg}^2 z = \cos^2 4z + 1$.

79. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} t) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} t)$.

80. $\sin^8 2x + \cos^8 2x = 41/128$.

81. $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

82. $\frac{\operatorname{tg} t}{2 - \cos^{-2} t}(\sin 3t - \sin t) = \frac{2}{\operatorname{ctg}^2 t - 3}$.

83. $\operatorname{tg}(\pi \cos t) = \operatorname{ctg}(\pi \sin t)$.

84. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.

85. $(5 + 3 \sin^2 x)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$.

86. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg}^2 5x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{tg}^2 5x$.

87. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x - 2 = 0$.

88. $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2$.

89. $(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)^2 - \cos(x + 4 \operatorname{tg} x) = -1$.

90. $(4 - \cos 2x)(2 + 3 \sin y) = 12 + 13 \cos^{-2} 3z$.

91. $2 \operatorname{tg} \pi t^2 - \operatorname{tg} \pi t + \operatorname{tg} \pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = 0$.

92. $3 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x$.

93. $(3 - \sin z)(4 - \sin^{-2} z) = 12 + \cos^2 y$.

94. $4 - 4(\cos z - \sin z) - \sin 2z = 0$.

95. $5 \sin 2z - 11(\cos z + \sin z) + 7 = 0$.

96. $(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$.

97. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 6$.

98. $(1 + \operatorname{tg} x) = (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x)$.

99. $\sin^4 \pi x + \cos^4 \pi x = \sin(2\pi x)$.

100. $\sin x \sin 5x = \sec 4x$.

101. $\sin 11z + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7z + \frac{1}{2} \cos 7z = 0$.

102. $\cos(7\pi x) \sin(6\pi x) = \cos(5\pi x) \sin(8\pi x)$.

103. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=-\frac{1}{2}$.

104. $(a-1)\sin^2 x+a\sin x-2=0$.

105. $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\frac{5}{4}$.

106. $\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}\sin^2 2x+\cos 2x=0$.

107. $\frac{\sin 2x}{2}=\frac{\sin^3 x+3\cos^3 x}{\sin x+3\cos x}$.

108. $\cos 3x\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin 3x\cos^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{8}$.

109. $6\operatorname{tg} x+\frac{5}{\operatorname{tg} 3x}=\operatorname{tg} 2x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

110. $8\cos 6x\cos^3 x-\cos 9x-\cos 3x=0,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

111. $\sin 2x+\frac{\cos 3x-\sin 3x}{\sin x+\cos x}=2\sin^2 2x,\quad x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

112. $\frac{1+2\cos 2x}{2\cos x}=\operatorname{tg}^2 x-3,\quad x\in[0,\ 2\pi]$.

113. $\frac{3(1-\sin 3x)}{\sin x-\cos 2x}=2\cos 2x-7,\quad x\in(-\pi,\ \pi)$.

114. $a\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0,\quad a\in R$.

115. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),\quad x\in[-\pi,\ \pi]$.

116. $\sin 2x(0,1-\cos x)=\sin 2x+0,2\sin^3 x$.

117. $\sin|x|=|\sin 2x|$.

118. $4(\cos 2x+\sin 2x)=7\left(\cos x+(1+\sqrt{2})\sin x\right)$.

119. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2$.

120. $\sqrt{3}\cos^3 x-3\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+1=0$.

121. $\sin x+\cos x=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}}{\cos x}$.

122. $\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x}=\sin x$.

123. $2\sin 7x=(\sin 6x+2\operatorname{tg} 4x)\cos 7x$.

124. $\frac{\cos^4 2x+\cos 4x-2}{\cos x(3+\cos^2 2x)}=\sin x$.

125. $\cos^2 2x+4\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\cos 2x$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1—4, 10] и конкурсных заданий в СПбГУ, МГУ.

§ 3.3. Тригонометрические неравенства

Решить неравенства:

1. $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}>2$.

2. $\frac{\operatorname{tg}^2 x-2}{\operatorname{tg}^2 x-1}<\frac{1}{2}$.

3. $\sin^2 x-2\sin x-1<0,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

4. $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|<1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

5. $\left|\cos^2 x-\cos x-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$.

6. $\frac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}>2$.

7. $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$
8. $\operatorname{tg} x > \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2.$
9. $|\sin x| > \operatorname{ctg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$
10. $|\sin x| > |\cos x|, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$
11. $1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} < \frac{1}{3 - 4\cos^2 x}, \quad 0 < x < \pi.$
12. $\log_{1/2} \sin x > 1, \quad 0 < x < \pi.$
13. $\sin 3x < \sin x.$
14. $\sin x \sin 3x > \sin 5x \sin 7x.$
15. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}.$
16. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1.$
17. $\sin^4 x + \cos^4 x \geqslant \frac{5}{8}.$
18. $\sin^2 x \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x.$
19. $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x.$
20. $\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{7} - \cos x}, \; 0 \leqslant x < 2\pi.$
21. $\log_2 \cos x > \log_2 \operatorname{tg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$
22. $\sin|\lg x| + \cos|\lg x| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$
23. $\cos^2 2x / \cos^2 x \geqslant 3 \operatorname{tg} x.$
24. $\frac{(1+\sin x)}{1-\cos x} + \frac{1-\sin x}{1-\cos x} \leqslant a.$
25. $\cos x - \frac{1}{\cos x} \leqslant a, \quad a > 0.$
26. $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x.$
27. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x.$
28. $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x < 1/2.$
29.* $(32\sin^8 x)^{-2} + 4\sin^6 x \leqslant 1 - \sin^4 x.$
30. $\sin(2\pi \cos x) > 0.$

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 4, 7, 11—13, 15, 17, 19], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 3.4. Обратные тригонометрические функции

Доказать:
1. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$
2. $\arcsin x + \arcsin y = \arccos(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \; 0 \leqslant x, y \leqslant 1.$
3. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1-xy}{x+y}\right), \quad x, y > 0.$
4. $2\arcsin x = \arccos(1 - 2x^2), \quad x \in [0, 1].$
5. $\frac{1}{2}\arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$
6. $\sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \leqslant 1.$
7. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$

8. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9. $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вычислить:

10. $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

11. $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

12. $\sin\left(\arccos -\frac{1}{4}\right)$.

13. $\cos\left(\arcsin -\frac{3}{5}\right)$.

14. $\sin(\operatorname{arctg} 2)$.

15. $\cos\left(\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

16. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$.

17. $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

18. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

19. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}\right)$.

20. $\arcsin(\sin 5)$.

Доказать, что

21. $2\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$.

22. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

23. $3\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$.

24. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

25. $\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{\pi}{2}$.

26. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнения:

27. $\arcsin(1-x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

28. $\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x = 0$.

29. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2}$.

30. $2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

31. $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right) = 1$.

32. $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 = \pi^2$.

33. $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$.

34. $\arccos|x| = \arcsin 2x$.

Решить неравенства:

35. $\arccos x > \arccos\frac{1}{3}$.

36. $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$

37. $\arcsin x > \arccos x$

38. $\arcsin x < \arccos(1-x)$.

39. $\arccos x < \arccos x^2$.

40. $\frac{1}{\arcsin|x|} < \frac{1}{\arccos x} - 1$.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 4, 13].

§ 3.5. Смешанные задачи с использованием тригонометрии, системы уравнений

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x+y)/\cos(x-y) = \dfrac{1}{9}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin \pi x + \sin \pi y = 1, \\ x + y = 1/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin x\pi \sin \pi y = 3/4, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{tg} \pi y = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y, \\ \cos(3\pi(x+y)) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin x = \cos 2y, \\ \cos y = \sin 2x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \cos\left(\pi \dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right) = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1/n. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \log_2 x \log_y 2 + 1 = 0, \\ \sin x \cos y = 1 - \cos x \sin y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(1-y+x^2)\cos 2x = \cos(y-1-x^2)\sin x \cos x, \\ \log_{2x} \dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}} = 2 - x, \ (y - 1 - x^2 + 2x \geqslant 0). \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy = 1, \\ \arcsin x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \arcsin x \arcsin y = \pi^2/12, \\ \arccos x \arccos y = \pi^2/24. \end{cases}$

12.* Найти a, при которых существует хотя бы одно решение

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right| \\ = 11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2\left(x^2+(y-a)^2\right)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

13. Решить уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}\right)+\log_{1/2}\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

14. Найти значения $\alpha \in [0,\pi/2]$, при которых наименьшее значение функции

$$f(x)=3x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$$

на отрезке $[-\sin\alpha,\cos\alpha]$ принимает наименьшее значение.

15. Найти целые корни уравнения

$$\cos\left(\pi\left(\sqrt{9x^2+160x+800}-3x\right)/8\right)=1.$$

16. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left(a-x^2-\cos(11x\pi/4)\right)\sqrt{8-ax}=0$$

имеет нечетное число корней на отрезке $[-2,3]$.

17. Найти все пары (x,y), такие, что

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$
$$=(\arccos x)^2+\arcsin^2 x-5\pi^2/4.$$

18. Найти все b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} 2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+b^2 8(b+1)+5b<0, \\ x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2 \end{cases}$$

выполняется при $\forall x, y$.

19. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x\operatorname{ctg} x-\sin x=a\cos 2x,\quad x\in[0,2\pi]?$$

20. Выразить сумму $\frac{\sin^8\varphi}{a^3}+\frac{\cos^8\varphi}{b^3}$ только через a и b, если

$$\sin^4\varphi/a+\cos^4\varphi/b=1/(a+b),\quad a,b>0.$$

21. Расположить в порядке возрастания числа

$$a_1 = \log_{1/2}(\sin 2x), \quad a_2 = 1 - \log_2 \sin x,$$

$$a_3 = \log_{1/2}(1 - \cos 2x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

22. Решить уравнение

$$\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sin^2\frac{\pi x}{2} + \cos^6\frac{\pi x}{2}.$$

23. Решить неравенство

$$\frac{\lg(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - \lg 4}{\lg(\sin x + \cos x)} < 2, \quad x \in [0, 2\pi].$$

24. При каких a разрешимо уравнение

$$(a^2 + 2)\cos 4x + 1 = 4a(\cos^4 x + \sin^4 x)?$$

25. При каких $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ функция

$$y = 1/\cos x + 1/\sin^4 x$$

принимает наименьшее значение?

26. При каком a уравнение

$$(2 - \sin^2 x)/(1 + \sin x) = a$$

для $x \in [0, 2\pi]$ имеет ровно один корень?

Решить системы:

27. $\begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{2 + \sin 2x + 2\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)} = 6, \\ \cos y(1 + 2\cos x - \cos y) = \cos x(1 + \cos x). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \sin^2(-2x) - 3\sqrt{2}\operatorname{tg} 5y = (3\sqrt{2} - 1)/2, \\ \operatorname{tg}^2 5y - (3 - \sqrt{2})\sin 2x = (3\sqrt{2} - 1)/2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sin x - 1/\sin x = \sin y, \\ \cos x - 1/\cos x = \cos y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin^2 2y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = \pi/4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right), \\ 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

33. Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворяет уравнению

$$(3\cos x - 2)(14\sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

34. Доказать, что существует треугольник, каждый угол которого удовлетворяет уравнению

$$(65\sin x - 56)(80 - 64\sin x - 65\cos^2 x) = 0.$$

35. Пусть углы треугольника удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0.$$

Доказать, что треугольник равносторонний.

36. Доказать, что уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$$

не имеет корней.

В этом параграфе использованы задачи из работ [1, 4, 7, 11, 12, 17], а также из конкурсных заданий в СПбГУ и МГУ.

§ 3.6. Трансцендентные уравнения

Решить уравнения:

1. $2\cos\frac{\pi x}{2} = x^2 + 4x + 5.$

2. $x^2 = -\cos x.$

3. $\sin\pi x = x - 1.$

4. $\log_\pi x = 1 + \sin x \log_\pi 2.$

5. $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}.$

6. $\log_{\sin x} 2 \log_{\sin^2 x} 3 = 1.$

7. $\sin(5\operatorname{arctg} 3x) = 1.$

8. $\sin(\pi\lg x) + \cos(\pi\lg x) = 1.$

9. $\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(3\operatorname{arcctg} x).$

10. $\sqrt[3]{1 + \lg\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg\operatorname{tg} x} = 2.$

11. $\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arcctg} x) = a.$

12. $3x = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\right) = 0.$

13. $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \pi$.
14. $\arcsin(\lg x^2) - \operatorname{arctg}(\lg x) = \frac{\pi}{3}$.
15. $\operatorname{arctg}(2\cos x) - \operatorname{arctg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right) = \pi/4$.
16. $\sqrt{(\cos x)^{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}} = 1$.
17. $\operatorname{arctg}(2 + \sin x) - \operatorname{arctg}(1 + \sin x) = \pi/4$.
18. $\arcsin 2^{x+2} + \arcsin(4\sqrt{3}\cdot 2^x) = \pi/2$.
19. $\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \pi/6$.
20. $\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x)$.
21. $\sin(\pi \operatorname{arctg} x^2) = 1/2$.
22. $\arccos x + \arccos\left((x + \sqrt{3 - 3x^2})/2\right) = \pi/3$.

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЯ

§ 4.1. Векторная алгебра

Определение. Вектором $\mathbf{a}$ называется направленный отрезок. Число, равное его длине, называется модулем вектора $|\mathbf{a}|$.

Вектор определяется координатами x, y, z, которые есть проекции его на оси координат. В прямоугольной системе координат с орт-векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ координаты x, y, z — коэффициенты в разложении

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Длина вектора определяется выражением

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Действия с векторами:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$c\mathbf{a} = (ca_x, ca_y, ca_z), \text{ где } c \text{ — число},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\left(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

$$\mathbf{a} \| \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 1. Доказать, что если вектор $\mathbf{c}$ делит противоположную сторону треугольника в отношении $m : n$, то

$$\mathbf{c} = \frac{n}{m+n}\mathbf{a} + \frac{m}{m+n}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — векторы сторон треугольника (рис. 4); $\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{m}{n}$.

Доказательство:

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} + \mathbf{b}_1 = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \frac{m}{n},$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \frac{m}{n} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \pm (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \frac{m}{n} = \mathbf{c},$$

$$\mathbf{c}\frac{m+n}{n} = \mathbf{a} + \frac{m}{n}\mathbf{b},$$

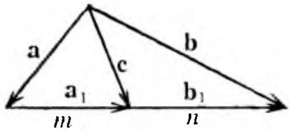

Рис. 4

$$\mathbf{c} = \frac{m}{m+n}\mathbf{b} + \frac{n}{m+n}\mathbf{a}.$$

Вычислить скалярное произведение векторов:

1. $\mathbf{a} = \{2, 4, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{3, 5, 7\}$.

2. $\mathbf{a} = \{-2, 3, 11\}$, $\mathbf{b} = \{5, 7, -4\}$.

3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. $(2\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta})(4\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

5. Разложить вектор $\mathbf{d} = \{1, 1, -2\}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{a} = \{1, 1, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, 0\}$ и $\mathbf{c} = \{0, 2, 3\}$.

6. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \{2, 3, -4\}$ и $\mathbf{b} = \{\alpha, -6, 8\}$ параллельны?

7. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \{1, \alpha, -2\}$ и $\mathbf{b} = \{\alpha, 3, -4\}$ взаимно перпендикулярны?

8. Зная, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2\pi/3$, найдите, при каком значении α векторы $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ перпендикулярны.

9. При каком значении α векторы $\mathbf{l} = \{6, \alpha, -8\}$ и $\mathbf{m} = \{-3, -1, 4\}$ параллельны?

10. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $120°$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$. Определите $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

11. Найдите угол между векторами $\mathbf{a} = \{-1, 2, -2\}$ и $\mathbf{b} = \{6, 3, -6\}$.

12. Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \{1, 2, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{2, -1, 0\}$.

13. Даны три силы $\mathbf{M} = \{3, -4, 2\}$, $\mathbf{W} = \{2, 3, -5\}$ и $\mathbf{P} = \{-3, -2, 4\}$, приложенные к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения равнодействующей, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5, 3, -7)$ в положение $M_2(4, -1, -4)$.

14. При каких значениях x векторы $\mathbf{a} = \{x, 3, 4\}$ и $\mathbf{b} = \{5, 6, 3\}$ перпендикулярны?

15. Даны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Докажите, что вектор $(\mathbf{bc})\mathbf{a} - (\mathbf{ac})\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$.

16. Даны векторы $\mathbf{a} = \{2, 3, -5\}$, $\mathbf{b} = \{3, 0, 1\}$ и $\mathbf{c} = \{4, -3, 2\}$. Найдите координаты и длину вектора $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

17. Найдите (в градусах) угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

18. Найдите угол между векторами $2\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}/2$, если $\mathbf{a} = \{-4, 2, 4\}$, $\mathbf{b} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$.

19. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, вычислите $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

20. Даны точки $A(-2, -3, 8)$, $B(2, 1, 7)$, $C(1, 4, 5)$, $D(-7, -4, 7)$. Будут ли коллинеарны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

21. Найдите вектор $\mathbf{a}$, коллинеарный вектору $\mathbf{b} = \{3, 6, 6\}$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 27$.

22. Найдите вектор $\mathbf{a}$, коллинеарный вектору $\mathbf{b} = \{2, -1, 0\}$, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$.

23. Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ и удовлетворяющего условию $\mathbf{x} \cdot a = 3$.

24. Найдите вектор $\mathbf{a}$, коллинеарный вектору $\mathbf{b} = \{1, -3, 1\}$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 22$.

25. Найдите вектор $\mathbf{b} = \{x, y, z\}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \{2\sqrt{2}, -1, 4\}$, если $|\mathbf{b}| = 10$.

26. Найдите вектор $\mathbf{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a} = \{2, 3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 3\}$ и удовлетворяет условию $\mathbf{c}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -6$.

27. Вектор $\mathbf{b}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \{8, -10, 13\}$, образует с осью Oz острый угол; зная, что $|\mathbf{b}| = \sqrt{37}$, найдите его координаты. В ответе запишите сумму координат вектора $\mathbf{b}$ с точностью до 0,01.

28. Найдите вектор $\mathbf{b}$, зная, что он удовлетворяет условиям: скалярное произведение $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 3$, где $\mathbf{c} = \{1, -1, 2\}$, вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$, $\mathbf{a} = \{-2, -1, 1\}$, $\mathbf{d} = \{3, 5, -2\}$.

29. Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{cases} 2\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{a}, \\ \mathbf{p} + 2\mathbf{q} = \mathbf{b}, \end{cases}$$

если известно, что в прямоугольной системе координат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют вид $\mathbf{a} = \{1, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1\}$.

30. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 7\}$. Определите разложение вектора $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

31. Даны векторы $\mathbf{a} = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{b} = \{3, -5, 6\}$. Вычислите

$$\text{пр}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}(2\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

32. Вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 18\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ образует с осью Oy тупой угол. Найдите его координаты, зная, что длина вектора $\mathbf{x}$ равна 14.

33. Вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет следующим условиям: а) $\mathbf{x}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 7{,}5\mathbf{k}$; б) $\mathbf{x}$ образует острый угол с осью Oz; в) $|\mathbf{x}| = 50$. Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$.

34. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{-1, 1, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{2, 0, 1\}$. Найдите вектор $\mathbf{x}$, если известно, что он компланарен плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярен вектору $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \cdot x = 7$.

35. В пространстве даны два вектора $\mathbf{a} = \{1, 1, 2\}$ и $\mathbf{b} = \{-1, 3, 1\}$. Найдите единичный вектор, лежащий в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и образующий угол $\alpha = \pi/4$ с вектором $\mathbf{a}$.

36. Даны три ненулевых вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ коллинеарен $\mathbf{c}$, а $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$.

37. Вершины треугольника $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Найдите его внутренний угол при вершине A.

38. Докажите, что точки $A(-2, -3)$, $B(-3, 1)$, $C(7, 7)$, $D(3, 0)$ служат вершинами трапеции. Найдите длину средней линии трапеции.

39. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$ и $C(1, -2, 1)$. Вычислите внешний угол треугольника при вершине A и координаты вектора $\mathbf{a}$, сонаправленного с вектором $\overline{AB}$ и имеющего длину вектора $\overline{AC}$.

40. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$. Найдите его четвертую вершину D и угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

41. Треугольник задан координатами своих вершин $A(2, 1, 2)$, $B(1, 0, 0)$ и $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Вычислите углы треугольника и длину медианы m, проведенной к стороне BC.

42. В треугольнике ABC точка $A(-1, 2, 3)$ — вершина прямого угла. Найдите координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой (MN), где $M(-1, 3, 2)$, $N(1, 1, 3)$ и $\widehat{ABC} = 30^0$.

43. В трапеции $ABCD$ вектор $\overline{BC} = \lambda\overline{AD}$. Докажите, что вектор $\mathbf{p} = \overline{AC} + \overline{BD}$ коллинеарен $\overline{AD}$ (а, значит, и $\overline{BC}$), и в записи $\mathbf{p} = \alpha\overline{AD}$ найдите коэффициент α.

44. Дан треугольник ABC. Длины векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CD}$, где CD — медиана треугольника ABC.

45. Докажите, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нулю.

46. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали BD, которая пересекает прямую AD в точке E; Q — точка пересечения диагоналей квадрата. Выразите через векторы $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CQ}$ сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$.

47. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что векторы $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны.

48. Дан параллелограмм $ABCD$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ равны a, b, c соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

49. Дан параллелограмм $ABCD$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ равны a, b, c соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AB}$.

50. Зная векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, на которых построен параллелограмм, выразите через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне $\mathbf{p}$.

51. Дана трапеция $ABCD$. Длина основания AD в три раза больше длины основания BC. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ равны a, b, c соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$.

52. В треугольнике проведены медианы AD, BE, CF. Вычислите $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.

53. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AD \| BC$, $AB \| CD$). На стороне AD выбрана точка K, а на AC — точка L, так, что $|\overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{AD}|/5$, $|\overrightarrow{AL}| = |\overrightarrow{AC}|/6$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BL}$ коллинеарны, и в записи $\overrightarrow{KL} = \lambda \overrightarrow{BL}$ найдите коэффициент пропорциональности λ.

54. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $AD \| BC$, K — середина BC, L — середина DC. Обозначим $\overrightarrow{AK} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AL} = \mathbf{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

55. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, M — середина DE, N — середина AM, P — середина BC. Разложите вектор $\overrightarrow{NP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

56. В треугольнике ABC длины сторон $|AB| = 6$, $|AC| = 8$ и угол $A = 90°$; AM и BN — биссектрисы углов A и B. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{BN}$.

57. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$.

58. В треугольнике ABC через M обозначена точка пересечения медиан. Докажите, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$.

59. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Найдите сумму $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

60. В треугольнике ABC точка M — центр вписанной окружности. Найдите вектор $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \gamma\overline{MC}$, если $\alpha = |\overline{BC}|$, $\beta = |\overline{CA}|$, $\gamma = |\overline{AB}|$.

61. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $\overline{OA}\sin 2A + \overline{OB}\sin 2B + \overline{OC}\sin 2C = 0$.

62. Дана прямоугольная система координат с началом в точке O. Прямая пересекает ось абсцисс в точке C и ось ординат — в точке A так, что $\widehat{OCA} = \alpha$ и $\alpha > \pi/4$. Точка D — середина AC, а точка A_1 симметрична точке A относительно прямой OD. Определите стороны треугольника ACA_1, если известны координаты точки $C(1, 0)$.

63. Дана прямоугольная система координат с началом в точке O. Прямая пересекает ось абсцисс в точке C и ось ординат — в точке A так, что $\widehat{OCA} = \alpha$ и $\alpha > \pi/4$. Точка D — середина AC, а точка A_1 симметрична точке A относительно прямой OD. Найдите отношение площадей треугольников ODC и OCA_1.

64. Доказать, что точки $A(5, 0)$, $B(0, 2)$ и $C(2, 7)$ являются вершинами прямоугольного треугольника. Найдите его площадь и укажите все перемещения плоскости, переводящие его в треугольник с вершинами $(-5, 0)$, $(0, -2)$ и $(-2, -7)$.

65. Доказать, что точки $A(3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 7)$ и $D(5, 6)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Вычислите его площадь и укажите все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

66. При каких значениях x и y точки с координатами $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, 7)$ и $D(x, y)$ являются последовательными вершинами равнобочной трапеции $ABCD$? Для каждой трапеции найдите площадь и укажите все перемещения плоскости, переводящие ее в трапецию с вершинами $(2, 0)$, $(7, 0)$, $(0, -7)$ и $(0, -2)$.

67. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, пересекающихся в этой вершине. Найдите величину равнодействующей этих трех сил.

68. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с нижним основанием $ABCD$, верхним — $A_1B_1C_1D_1$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что на прямой MM_1, где M и M_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно, найдется точка O, такая, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OM}_1$. Покажите, что $\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{OM}_1$ и найдите λ.

69. Найдите сумму скалярных произведений векторов, начала которых находятся в центре грани куба, а концы — в вершинах (таких векторов восемь). Длина ребра куба равна b.

70. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ плоский угол при вершине прямой. Точки D и E — середины ребер AC и SB соответственно. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{EC}$.

71. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=x^2-4x+5$ заданы точка $A(x_1,y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка $B(x_2,y_2)$ с ординатой $y_2=1$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

72. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на части кривой $y=x^2-2x+3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1,y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка $B(x_2,y_2)$ с ординатой $y_2=11$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

73. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=2x^2-3x+5$ заданы точки $A(x_1,y_1)$ с абсциссой $x_1=1$ и точка B — точка пересечения этой кривой с кривой $y=2x^2-2x+3$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

74. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=x^2$ заданы две точки A и B, такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\mathbf{i}=1$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\mathbf{i}=-2$, где $\mathbf{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$.

75. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=2^{x+2}$ заданы две точки A и B, такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\mathbf{i}=-1$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\mathbf{i}=2$, где $\mathbf{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$.

76. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y=6/x$ заданы две точки A и B, такие, что $\overrightarrow{OA}\cdot\mathbf{i}=-2$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\mathbf{i}=3$, где $\mathbf{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

77. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y = x^2 + x + 10$ проведена касательная в точке $A(x_0, y_0)$, где $x_0 = 1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

78. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y = 2\sqrt{x}$ проведена касательная в точке $A(x_0, y_0)$, где $x_0 = 1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

79. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y = 8/x^2$ проведена касательная в точке $A(x_0, y_0)$, где $x_0 = 2$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$.

80. Напишите уравнение образа параболы $y = x^2 - 2x + 1$ при параллельном переносе $\mathbf{p} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

§ 4.2. Планиметрия. Задачи на доказательство

1. Докажите, что угол $\widehat{C}$ треугольника ABC будет прямым в том и только в том случае, если длины сторон этого треугольника связаны равенством $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

2. У двух выпуклых четырехугольников совпадают середины сторон. Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

3. Докажите, что в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон этого четырехугольника равны.

4. Вокруг трапеции описана окружность. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда данная трапеция равнобочная.

5. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Точки E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами AB и CD. Докажите, что отрезок EK параллелен основаниям трапеции.

6. Через концы дуги окружности, содержащей $120°$, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Докажите, что длина этой окружности равна длине исходной дуги.

7. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

8. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине 20^0. Докажите, что $|a|^3 + |b|^3 = 3|a||b|^2$.

9. В треугольнике длины сторон a, b и c связаны равенством $|a|^2 + |b|^2 = 5|c|^2$. Докажите, что медианы к сторонам a и b взаимно перпендикулярны.

10. Две окружности касаются внешне друг друга в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Докажите, что $\widehat{ACB} = \pi/2$.

11. Докажите, что радиус r вписанного в многоугольник круга равен $2S/p$, где S и p — соответственно площадь и периметр многоугольника.

12. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Докажите, что сумма площадей $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ постоянная при любом выборе точки O.

13. $ABCD$ — квадрат. На стороне CD взята точка M, K — точка пересечения стороны BC с биссектрисой угла $\widehat{BAM}$. Докажите, что $|MA| = |BK| + |DM|$.

14. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\widehat{B}$ прямой, BD — высота, опущенная на гипотенузу AC. Докажите, что BD равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ADB и CDB.

15. Каждая сторона выпуклого четырехугольника пересекается некоторой окружностью в двух точках, причем длины отрезков сторон, лежащих внутри окружности, равны. Докажите, что в данный четырехугольник можно вписать окружность.

16. Величина одного из углов треугольника равна 30^0. Докажите, что длина стороны, противоположной этому углу, равна радиусу описанной окружности.

17. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

18. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше его периметра.

19. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

20. Докажите, что если прямая, соединяющая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобочная.

21. Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, и продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в одной точке.

22. Докажите, что линия, соединяющая центры двух пересекающихся окружностей, делит пополам их общую хорду.

23. Докажите, что общие внешние касательные двух окружностей пересекаются на линии центров или параллельны ей; общие внутренние касательные пересекаются на линии центров.

24. Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон постоянна.

25.* Через центр равностороннего треугольника проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

26. Докажите, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, постороенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют квадрат.

27. Дан равнобедренный треугольник ABC, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{R(R-2r)}$.

28. Докажите, что расстояние от любой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин.

29. Докажите, что если стороны одной трапеции равны соответствующим сторонам второй трапеции, то эти трапеции равны.

30. Докажите, что в трапеции, диагонали которой служат биссектрисами углов при одном из оснований, длины трех сторон равны.

31. Пусть a и b $(a > b)$ — длины оснований трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции, а его длина равна $(a-b)/2$.

32. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Докажите, что точка O делит пополам отрезок, отсекаемый от прямой боковыми сторонами трапеции.

33. Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Докажите, что верно и обратное утверждение, т.е. если прямая, проходящая через вершину, делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то эта прямая — биссектриса.

34. Пусть m, β, h — медиана, биссектриса и высота треугольника соответственно, проведенные к одной и той же стороне треугольника. Докажите, что точка пересечения биссектрисы с этой стороной лежит между точками пересечения медианы и высоты с этой стороной (или ее продолжением). Докажите, что эти точки совпадают в том и только в том случае, если треугольник равнобедренный.

35. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC, лежащие против углов $\widehat{A}, \widehat{B}$ и $\widehat{C}$ соответственно, $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что справедливы следующие соотношения:

1) $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$ — теорема синусов;

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ — теорема косинусов;

3) $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$;

4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

5) $S = pr$;

6) $R = \frac{abc}{4S}$;

7) если m_a, β_a, h_a — длины медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из $\widehat{A}$, то

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2};$$

$$\beta_a = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin\left(\widehat{A}/2\right)} \cdot \frac{ac}{b+c};$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

36. Через точку A, лежащую вне круга, проведены две прямые, одна из которых касается окружности, служащей границей круга, в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D. Докажите, что $|AD||AC| = |AB|^2$ (теорема о касательной и секущей).

37. В треугольнике высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части. Докажите, что углы этого треугольника по величине равны $30°$, $60°$ и $90°$.

38. В трапеции сумма углов при большем основании равна 90°. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности длин оснований.

39. Докажите, что при пересечении биссектрис внутренних углов параллелограмма, не являющегося ромбом, получается прямоугольник, длины диагоналей которого равны разности смежных сторон параллелограмма.

40. Докажите, что если в трапеции хотя бы одна из диагоналей в точке пересечения с другой делится пополам, то эта трапеция — параллелограмм.

41. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух отпротивоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

42. Докажите, что если длины двух медиан треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

43. Докажите, что если длины двух высот треугольник равны, то треугольник равнобедренный.

44.* Докажите, что ограниченная фигура не может иметь два центра симметрии.

45. Докажите, что если выпуклый четырехугольник имеет ось симметрии, то либо около него можно описать окружность, либо в него можно вписать окружность.

46. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

47. Докажите, что в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенным в ту же вершину.

48. В круге диаметра d проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что $|AD|^2 + |CB|^2 = d^2$.

49. На диаметре круга радиусом 1 как на стороне построен равносторонний треугольник. Докажите, что площадь части треугольника, находящейся вне круга, равна $(3\sqrt{3} - \pi)/6$.

50. Даны три равных приложенных друг к другу квадрата $ABCD$, $DCEF$, $FEPQ$. Докажите, что $\widehat{CAD} + \widehat{EAF} + \widehat{PAQ} = 90^\circ$.

51. Докажите, что биссектрисы внутреннего и прилежащего к нему внешнего углов треугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что верно и обратное утверждение: прямая, проходящая через вершину треугольника перпендикулярно биссектрисе внутреннего угла при этой вершине, является биссектрисой внешнего угла.

52. Дан равнобедренный треугольник. Из произвольной точки P основания восставлен перпендикуляр. Докажите, что сумма длин отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с боковыми сторонами или их продолжениями не зависит от выбора точки P на основании.

53. В ромб, не являющийся квадратом, вписан квадрат. Докажите, что его стороны параллельны диагоналям ромба.

54. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

55. Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} \leqslant 3/2$.

56. Пусть a, b, c и d — длины последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь. Докажите, что

1) $(a + c)(b + d) \geqslant 4S$;
2) $ac + bd \geqslant 2S$;
3) $ab + cd \geqslant 2S$;
4) $ad + bc \geqslant 2S$.

57. Через точку M, взятую внутри круга, проведена хорда (AB) (точки A и B лежат на окружности). Докажите, что величина $|AM| \cdot |MB|$ постоянна для всех таких хорд.

Следующие задачи на нахождение геометрических мест точек (т.е. множества всех точек, удовлетворяющих какому-либо требуемому свойству) тесно связаны с задачами на доказательство. При решении этих задач бывает удобно использовать координатный метод.

Конечно, задачи на отыскание геометрических точек можно решать и чисто геометрическими методами, используя те или иные геометрические теоремы.

58. На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найдите множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до данных прямых равна сумме величин, обратных данным расстояниям.

59. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми равно 1. Найдите множество точек, расстояния которых до двух данных точек относятся как $m : n$.

60. На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найдите множество всех точек плоскости: 1) произведение расстояний от которых до данных прямых равно модулю разности этих расстояний; 2) модуль разности расстояний от которых до данных прямых равен модулю разности величин, обратных к данным расстояниям.

61. На плоскости даны прямая и не лежащая на ней точка. Найдите множество точек, равноудаленных от данной прямой и данной точки.

62. Найдите множество точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B постоянна.

63. Найдите множество точек, сумма расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

64. Найдите множество точек, разность расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

65. Даны два непараллельных отрезка AB и CD. Найдите множество точек M, для которых площади треугольников AMB и CMD равны.

66. Найдите множество середин хорд, проходящих через данную точку внутри данной окружности.

67. Концы отрезка длиной a скользят по сторонам данного прямого угла. Найдите множество точек, пробегаемых серединой данного отрезка.

68. Найдите геометрическое место точек плоскости, таких, что касательные, проведенные из этих точек к данной окружности, образуют между собой угол α.

§ 4.3. Планиметрия. Задачи на вычисление

Приведем основные формулы, часто используемые при решении планиметрических задач.

I. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, лежащих против углов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ соответственно; $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной в этот треугольник окружностей, h_a, m_a, β_a — высота, медиана и биссектриса, проведенные к стороне, противолежащей углу $\widehat{A}$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. В частности, если $\widehat{A}$ прямой, то получаем теорему Пифагора.

Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{ — формулаГерона};$$

$$S=pr;\quad S=\frac{abc}{4R}.$$

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей строго внутри треугольника (центр тяжести). Точка пересечения делит медианы на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от соответствующей вершины;

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2-ac\cos\widehat{B}};\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}.$$

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей строго внутри треугольника. Точка пересечения биссектрис равноудалена от сторон треугольника (центр вписанной окружности).

Биссектриса при пересечении со стороной делит ее на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника;

$$\beta_a=\frac{\sin\widehat{B}}{\sin\left(\widehat{A}/2\right)}\cdot\frac{ac}{b+c}.$$

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр):

$$h_a=b\sin\widehat{C};\quad h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Три перпендикуляра, восставленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной окружности с радиусом R, причем

$$R=\frac{abc}{4S};\quad R=\frac{a}{2\sin\widehat{A}}=\frac{b}{2\sin\widehat{B}}=\frac{c}{2\sin\widehat{C}};$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II. Пусть a,b — смежные стороны параллелограмма $ABCD$, $\widehat{A}$ — угол между этими сторонами, h_a — высота, опущенная на сторону a, d_1 и d_2 — длины диагоналей, S — площадь параллелограмма. Справедливы следующие утверждения:

1) $h_a = b\sin\widehat{A}$;

2) $S = ah_a = ab\sin\widehat{A}$;

3) $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A}$, $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\widehat{A}$, $d_1^2 = d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;

4) Точка пересечения диагоналей параллелограмма является центром симметрии параллелограмма. Отсюда, в частности, следует, что диагонали делятся точкой пересечения пополам.

5) Параллелограмм можно вписать в окружность в том и только в том случае, если он является прямоугольником.

6) В параллелограмм можно вписать окружность в том и только в том случае, если он является ромбом.

III. Пусть a и b — длины оснований трапеции, c и d — длины ее боковых сторон, h — высота, S — площадь трапеции. Справедливы следующие утверждения:

1) $S = \frac{1}{2}(a + b)h$;

2) В трапецию можно вписать окружность в том и только в том случае, если $a + b = c + d$;

3) Трапецию можно вписать в окружность в том и только в том случае, если она равнобочная.

IV. Пусть, наконец, R — радиус некоторого круга, S — его площадь, l — длина окружности, являющейся границей данного круга. Тогда $l = 2\pi R$, $S = \pi R^2$.

1. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 10 см, но меньше гипотенузы на 10 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

2. В треугольнике ABC медиана $BD = AB\cdot\sqrt{3}/4$, а $\widehat{DBC} = \pi/2$. Найдите угол $\widehat{ABD}$.

3. В треугольнике основание на 4 см меньше высоты, а площадь этого треугольника равна 96см^2. Найдите основание и высоту треугольника.

4. Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 12 см. Вычислите длину медианы, проведенной к большей стороне.

5. Длина основания равнобедренного треугольника равна a, а угол при вершине — α. Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

6. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α, а площадь его равна S. Найдите длину основания треугольника.

7. В прямоугольном треугольнике медианы острых углов равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$ см. Найдите гипотенузу треугольника.

8. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

9. Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону MP на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Определите периметр треугольника MNP, если $|MN| - |NP| = 18$.

10. В треугольнике ABC известны отношения длин сторон BC и AC к радиусу описанной окружности, равные 2 и 1,5 соответственно. Найдите отношение длин биссектрис внутренних углов $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$.

11. В треугольнике ABC сторона AB равна 2 см. Из вершины B к стороне AC проведена медиана BD, длина которой равна 1 см. Найдите площадь треугольника ABC, если $\widehat{BDA} = 30^0$.

12. Найдите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

13. В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Найдите $\widehat{MAN}$, если $\widehat{BAD} = 60^0$.

14. Периметр ромба равен 48, а сумма диагоналей равна 26. Найдите площадь этого ромба.

15. Найдите угол между диагоналями прямоугольника с периметром $2p$ и площадью $\frac{3}{16}p^2$.

16. В квадрате $ABCD$ точка M — середина BC, а O — точка пересечения DM и AC. Найдите угол $\widehat{MOC}$.

17. Средняя линия трапеции равна 10 см. Она делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

18. В равнобочной трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB и меньшего основания BC равны 2 см и $BD \perp AB$. Вычислите площадь этой трапеции.

19. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\pi/3$, а сторона AB равна 3 см. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника ABE.

20. Параллелограмм с периметром 44 см разделен диагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6 см. Определите стороны параллелограмма.

21. Дан параллелограмм, в котором острый угол равен 60^0. Найдите отношение сторон параллелограмма, если отношение квадратов диагоналей равно 1/3.

22. В трапеции основания равны 5 см и 15 см, а диагонали 12 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

23. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой, соединяющего середины ее диагоналей.

24. Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная длину ее диагонали l и угол α между этой диагональю и большим основанием.

25. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD\|BC)$ расстояние от вершины A до прямой CD равно длине боковой стороны. Найдите углы трапеции, если $AD : BC = 5 : 1$.

26.* Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если основания трапеции равны a и b.

27. В прямоугольной трапеции отношение оснований равно 4, а отношение диагоналей равно 2. Найдите острый угол трапеции.

28. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Известно, что $AD = 10$ см, $BC = 2$ см, $AB = CD = 5$ см. Биссектриса угла $\widehat{BAD}$ пересекает луч $[BC)$ в точке K. Найдите длину биссектрисы угла $\widehat{ABK}$ в треугольнике ABK.

29. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AD острого угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $AO : OD = (\sqrt{3}+1) : (\sqrt{3}-1)$. Найдите острые углы треугольника.

30. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD, опущенная на сторону AB, — $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найдите длину стороны AC.

31. Длина диагонали BD трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны AD равна n. Найдите длину основания CD, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C, равны между собой.

32. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L — прямые, а угол при вершине M равен $\operatorname{arctg}(2/3)$. Найдите длину диагонали NQ, если известно, что сторона LQ вдвое меньше стороны MN и на 21 м больше стороны LN.

33. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$м^2. Угол $\widehat{BAC}$

равен 120^0. Величина угла $\widehat{ABC}$ больше величины угла $\widehat{ACB}$. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2 м. Найдите длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B.

34. Дан квадрат $ABCD$ со стороной длиной 1. Точка принадлежит стороне CD и $CD/KD = 5$. Найдите расстояние от вершины C до прямой AK.

35. В трапеции углы при одном из оснований равны $20°$ и $70°$, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

36. Одно из оснований трапеции служит диаметром окружности радиусом R, а другое отсекает от окружности дугу α радиан $(0 < \alpha < \pi)$. Определите площадь трапеции.

37. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

38. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны — 15 см. Определите радиусы вписанной и описанной окружностей.

39. В круге радиусом 12 см длина хорды AB равна 6 см, а хорды BC — 4 см. Найдите длину хорды, соединяющей концы дуги AC.

40. На сторонах AB и AC угла $\widehat{BAC}$, равного $2\pi/3$, как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образованных полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 4$, $AC = 2$.

41. В треугольнике ABC заданы $AC = b$, $\widehat{ABC} = \alpha$. Определите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.

42. В окружности радиусом r проведена хорда длиной $r/2$. Через один конец хорды проходит касательная к этой окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.

43. Через концы дуги окружности, содержащей $120°$, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную касательными и данной дугой, вписана окружность. Вычислите длину окружности, если радиус исходной окружности равен R.

44. Две окружности радиусами R и r касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и

B — точки касания. Вычислите длины сторон треугольника.

45. Две окружности радиусами R и $r (R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

46. Две окружности радиусами R и r касаются внешне в точке A. На окружности радиусом r взята точка B, диаметрально противоположная точке A, и в этой точке построена касательная l. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и прямой l.

47. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей K_1 и K_2, касающихся внешне. Радиусы этих окружностей равны соответственно r_1 и r_2. На отрезке O_1O_2 как на диаметре построена окружность K_3. Вычислите радиус окружности, касающейся внешне окружностей K_1 и K_2 и внутренне — окружности K_3.

48. В треугольнике PQR величина угла QRP равна $\pi/3$. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиусом 2, вписанной в треугольник, и окружности радиусом 3, касающейся прямых PQ и PR.

49. Дан треугольник ABC, длины сторон которого равны: $AB = 15$, $BC = 12$, $AC = 18$. Центр вписанной окружности делит биссектрису угла C на две части CO и OD. Во сколько раз длина CO больше длины OD?

50. В угол величиной α радиан вписана окружность радиусом R. Между вершиной угла и центром окружности проведена касательная к этой окружности, перпендикулярная биссектрисе данного угла. Определите площадь отсеченного треугольника.

51. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной в треугольник окружности равен r, а описанной — R.

52. Окружность касается большего катета треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найдите ее радиус, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

53. В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг, диаметр которого лежит на стороне c. Найдите радиус полукруга.

54. В равнобедренном треугольнике величина угла при основании равна $\pi/6$. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на 2. Найдите длину основания треугольника.

55. Около круга радиусом r описана прямоугольная трапеция, меньшая из сторон которой равна $3r/2$. Вычислите площадь трапеции.

56. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Найдите длину средней линии трапеции, если величина острого угла при ее основании равна α.

57. В окружность радиусом R вписана трапеция, у которой боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию, а угловая мера дуги, стягиваемой этим основанием, равна α. Найдите площадь трапеции.

58. В правильный треугольник с длиной стороны 10 см вписан круг. В этот круг вновь вписан правильный треугольник, в него — снова круг и т.д. Найдите сумму площадей всех кругов, образованных в результате последовательного вписывания.

59. Величины углов треугольника относятся как 2:3:7. Длина наименьшей стороны равна a. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

60. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиусом r. Высота, проведенная к основанию, делится окружностью в отношении 1:2. Найдите площадь треугольника.

61. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\hat{A}$ прямой, величина угла $\hat{B}$ равна 30^0, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

62. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

63. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите стороны треугольника.

64. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов на отрезки длиной 6 см и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

65. На большем катете как на диаметре описана полуокружность. Определите ее длину, если меньший катет равен 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы с полуокружностью, равна 24 см.

66. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне AB. Некоторая окружность касается стороны BC параллелограмма $ABCD$ в точке P и касается прямой, проходящей через вершины A и B этого же параллелограмма, в точке A. Через точку P проведен перпендикуляр PQ к стороне AB (точка Q — основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла $\widehat{ABC}$, если известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $1/2$, а площадь пятиугольника $QPCDA$ равна S.

67. Вокруг трапеции с высотой H описана окружность. Основания трапеции видны из центра окружности под углами α и β. Найдите радиус окружности и площадь трапеции.

68. Круг радиусом 13 см касается двух смежных сторон квадрата, длина стороны которого равна 18 см. На какие два отрезка делит круг каждую из двух других сторон квадрата?

69. В треугольнике ABC углы $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, $|AC| = b$. На стороне CB взята точка D так, что $BD = 3DC$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или ее продолжения за точку A. Найдите радиус этой окружности.

70. На стороне угла с вершиной A взяты точки C и D (C между A и D) так, что $AC = 2CD$. Через точки C и D проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке B. Между точками A и B взята точка E. Известно, что $\widehat{DAE} = \alpha$, $\widehat{DEA} = \beta$, $AE = k$. Найдите радиус окружности.

71. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите длины основания трапеции.

72. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите длину высоты трапеции.

73. Окружность радиусом 3, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Окружность радиусом 4 касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC в точке E. Найдите ED, если угол $\widehat{BCA}$ равен $2\pi/3$.

74. Координаты вершин треугольника $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$. Вычислите длину медианы BB_1 и величину угла $\widehat{B}$.

75. Определите площадь равнобедренной трапеции, у которой длины оснований равны 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

76. Вычислите площадь прямоугольной трапеции с основаниями 7 см и 3 см и острым углом 60°.

77. Дана трапеция $MNPQ$ с основаниями MQ и NP. Прямая параллельная основаниям, пересекает боковую сторону MN в точке A, а сторону PQ — в точке B. $S_{ANPQ} : S_{MABQ} = 2 : 7$. Найдите AB, если $NP = 4$, $MQ = 6$.

78. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной длиной 4 см проведена медиана к боковой стороне. Найдите длину основания треугольника, если длина медианы равна 3 см.

79. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

80. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

81. В треугольнике ABC величины углов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ составляют арифметическую прогрессию. Наименьшая сторона в 4 раза меньше наибольшей стороны. Найдите тангенс наименьшего угла.

82. Длины сторон треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Наибольшая сторона треугольника превосходит наименьшую на 1,6 м. Определите периметр и площадь треугольника.

83. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании в 3 раза больше косинуса угла при вершине. Найдите синус угла при основании.

84. Найдите длины сторон прямоугольного треугольника, если $R = 15$ см, $r = 6$ см, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

85. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь $S = 2bc/5$. Найдите третью сторону треугольника.

86. Найдите угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

87. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD, которая пересекает сторону AC в точке F. Отрезок EF делит треугольник ABC на две равные по площади фигуры. Найдите длину EF, если $BD = 4$ см, $AD : DC = 2 : 7$.

88. В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что его диаметр лежит на гипотенузе и центр его делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите длину дуги полуокружности, заключенной между точками касания ее с катетами.

89. В треугольнике длины сторон 10 см, 12 см, 18 см. Проведена окружность, касающаяся двух меньших сторон, а центр находится на большей стороне. Найдите ее радиус.

90. Из одной точки проведены к окружности две касательные длиной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определите радиус окружности.

91. Из точки A к окружности с центром в точке N проведены две касательные, которые касаются окружности в точках B и M. Хорда BM пересекает отрезок NA в точке K. Длина отрезка NK в 13/4 раза меньше длины отрезка KA; $AB = 4$ см. Найдите площадь треугольника BAK.

92. Около круга описана равнобедренная трапеция, у которой средняя линия имеет длину 5 см. Определите периметр и длину боковой стороны трапеции.

93. В трапеции $MPQF$ длины оснований MF и PQ равны 24 см и 4 см соответственно. Высота трапеции имеет длину 5 см. Точка N делит боковую сторону на отрезки MN и NP. Длина отрезка MN в 3 раза больше длины отрезка NP. Найдите площадь треугольника NQF.

94. В ромб, который своей диагональю делится на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом 2 см. Найдите сторону ромба.

95. В прямоугольном треугольнике ABC на высоте CK как на диаметре построена окружность, которая пересекает катеты CA и CB соответственно в точках M и N. Длина отрезков $CM =$ 12 см, $CN = 18$ см. Найдите AC и BC.

96. Около круга радиусом R описан равнобедренный треугольник с углом 120^0. Определите стороны треугольника.

97. В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание AD имеет длину 12 см, $AB = 6$ см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до точки K пересечения продолжений боковых сторон.

98. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями длиной в 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

99. Окружность радиусом r касается изнутри двух окружностей радиусами R_1 и R_2, причем центры всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех данных.

100. На катете AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что полуокружность, построенная на отрезке PC как на диаметре, касается гипотенузы AB. В каком отношении полуокружность делит отрезок PB?

101. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и параметром 4 см имеет наибольшую площадь?

102. Сумма двух сторон треугольника равна a, а угол, заключенный между ними, равен 30^0. Каковы должны быть длины сторон треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

103. Сумма диагоналей параллелограмма равна 8 см. Найдите минимум суммы квадратов всех сторон параллелограмма.

104. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основанием треугольника. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

105. В равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и основанием 8 см вписан прямоугольник наибольшей площади, две вершины которого лежат на основании. Найдите площадь этого прямоугольника.

106. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найдите длины сторон этого прямоугольника.

107. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

108. Боковая сторона равнобочной трапеции конгруэнтна ее меньшему основанию, длина которого равна a. Какова должна быть длина большего основания трапеции, чтобы ее площадь была наибольшей?

109. На окружности радиусом R дана точка A. На каком расстоянии от точки A следует провести хорду BC, параллельную касательной к окружности в точке A, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

110. Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b?

111. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиусом R, найдите прямоугольник наибольшей площади.

112. Из всех прямоугольников с площадью 9дм^2 найдите тот, у которого периметр наименьший.

113. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60^0 вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

114. Найдите стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольную трапецию с основаниями 24 см и 8 см и высотой 12 см.

115. Найдите стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18 см, 24 см и 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

116. В равнобедренный треугольник со сторонами 15 см, 15 см и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найдите длины сторон параллелограмма.

117. В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

118. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Каковы должны быть катеты этого треугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

§ 4.4. Стереометрия. Задачи на доказательство

1. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости?

2. Докажите, что если три прямые в пространстве обладают тем свойством, что любые две из них пересекаются, то либо они проходят через общую точку, либо все лежат в одной плоскости.

3. В пространстве даны точки A, B, C, и D, причем $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Докажите, что $AD \perp BC$.

4. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Докажите, что $AC + BD > 2MN$.

5. Наклонная образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости. Докажите, что наклонная перпендикулярна плоскости.

6. На двух параллельных плоскостях расположены отрезки AB и CD. Концы этих отрезков являются вершинами некоторой треугольной пирамиды. Докажите, что объем пирамиды не будет меняться, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

7. Докажите, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

8. Докажите, что всякий выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

9. Всегда ли можно трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

10. Докажите, что если у выпуклого трехгранного угла все двугранные углы острые, то и все плоские углы также острые.

11. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

12. Докажите, что две треугольные пирамиды равны или симметричны, если их соответствующие ребра равны.

13. Докажите, что следующие четыре условия равносильны:

1) боковые ребра пирамиды равны;

2) боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды;

3) боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды;

4) около основания пирамиды можно описать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

14. Докажите, что следующие три условия равносильны:

1) высоты боковых граней пирамиды равны;

2) высота пирамиды образует одинаковые углы с боковыми гранями;

3) боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом (отметим, что при этом двугранные углы при основании пирамиды могут оказаться разными!).

15. Докажите, что двугранные углы при основании пирамиды равны тогда и только тогда, когда в основание пирамиды можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

16. Докажите, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то и все ребра этой пирамиды равны.

17. Докажите, что если в треугольной пирамиде сумма длин противоположных ребер одна и та же для любой пары таких ребер, то вершины этой пирамиды являются центрами четырех шаров, попарно касающихся друг друга.

18. *Докажите*, что в треугольной пирамиде высота проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, в том и только в том случае, если противоположные ребра пирамиды перпендикулярны.

19. Все ребра одной пирамиды соответственно меньше ребер другой. Можно ли утверждать, что объем первой из них также меньше объема второй?

20. Дана правильная треугольная пирамида. Из произвольной точки P ее основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. *Докажите*, что сумма длин отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней не зависит от выбора точки P на основании.

21. Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью?

22. *Докажите*, что если все диагонали параллелепипеда равны по длине, то он прямоугольный.

23. *Докажите*, что если все грани параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они являются ромбами.

24. Существует ли многогранник, все грани которого являются параллелограммами и попарно параллельны, но который, однако, не является призмой?

25. *Докажите*, что объем правильной усеченной пирамиды равен $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где h — ее высота, а S_1 и S_2 — площади оснований.

26. *Докажите*, что все касательные к шару, проведенные из одной точки, имеют одинаковую длину.

27. *Докажите*, что треугольную призму можно вписать в шар в том и только в том случае, если эта призма прямая.

28. *Докажите*, что во всякую треугольную пирамиду можно вписать шар и вокруг этой пирамиды можно описать шар. При этом 1) все биссекторные плоскости двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке, и эта точка и является центром вписанного шара; 2) все плоскости, проведенные через середины ребер данной пирамиды, перпендикулярны этим ребрам, пересекаются в одной точке, и эта точка является центром описанного шара.

29. *Докажите*, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то вписанный в тетраэдр и описанный вокруг него шары концентричны.

30. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида; S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади четырех ее граней, r — радиус вписанного в пирамиду шара. Докажите, что объем V этой пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$.

31. Шар касается одной из граней треугольной пирамиды и плоскостей, содержащих другие ее грани. Докажите, что у всякой треугольной пирамиды имеется четыре таких шара.

32.* Пусть r — радиус вписанного в треугольную пирамиду шара, R_1, R_2, R_3 и R_4 — радиусы шаров, касающихся каждой из граней пирамиды соответственно и плоскостей, содержащих другие ее грани. Докажите, что

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

33. Докажите, что для того чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы вокруг основания этой пирамиды можно было описать окружность.

34. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой OS.

35. Докажите, что в прямоугольном параллелограмме $A\ B\ C\ D\ A'\ B'\ C''\ D'$ квадрат площади сечения $A'\ BD$ в 8 раз меньше суммы квадратов площадей граней.

36. Докажите, что если все ребра тетраэдра касаются одного шара, то суммы длин всех пар противоположных ребер одинаковы.

37. Какую наибольшую боковую поверхность может иметь прямоугольный параллелепипед, длина диагонали которого равна a? Докажите, что наибольшую боковую поверхность будет иметь куб.

38. В пирамиде все двугранные углы при основании равны по величине α. Докажите, что площадь боковой поверхности и площадь основания этой пирамиды связаны соотношением $S_{осн} = S_{бок} \cos\alpha$.

39. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения взята точка A. Докажите, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна линии пересечения плоскостей α и β. Чему равен этот угол?

40. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S : $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{ASC} = \widehat{ASB} = 60^0$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB и AC лежат на поверхности шара. Докажите, что ребро SA является диаметром этого шара.

41. Сфера касается трех сторон основания треугольной пирамиды в их серединах и пересекает боковые ребра в их серединах. Докажите, что пирамида правильная.

42. Сфера касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Плоские углы при вершине этой пирамиды равны. Докажите, что пирамида правильная.

43. Докажите, что если в призму (не обязательно прямую) вписан шар, то 1) высота призмы равна диаметру шара; 2) точки касания шара с боковыми гранями лежат на сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно боковым ребрам.

44. Докажите, что если в призму можно вписать прямой круговой цилиндр, то эта призма прямая, длина ее бокового ребра равна длине образующей цилиндра и в основание призмы можно вписать круг.

45. Если призма вписана в прямой круговой цилиндр, то она прямая, ее высота равна образующей цилиндра и основание призмы является вписанным многоугольником. Докажите.

46. Шар вписан в усеченный конус. Докажите, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.

47. Вокруг сферы описана четырехугольная усеченная пирамида. Докажите, что объемы пирамиды и шара относятся как их полные поверхности.

§ 4.5. Стереометрия. Задачи на вычисление

Приведем формулы, которые могут потребоваться при вычислении площадей поверхностей и объемов пространственных фигур:

$$S_1 = S\cos\alpha,$$

где S — площадь данной плоской фигуры, а S_1 — площадь ее ортогональной проекции на другую плоскость, α — угол между плоскостями;

$$S = pl,$$

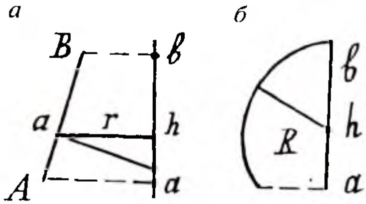

Рис. 5

где S — площадь боковой поверхности призмы, p — периметр ортогонального сечения, l — длина образующей призмы;

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2},$$

где S и S_1 — площади параллельных сечений пирамиды, a и a_1 — длины сходственных элементов сечения, h и h_1 — расстояния сечений от вершины пирамиды или расстояния каких-либо сходственных элементов сечений от вершины пирамиды;

$$S = ph/2,$$

где S — площадь боковой поверхности правильной пирамиды, p — периметр основания, h — апофема боковой грани;

$$S = 2\pi Rh, \quad S_1 = \pi R(R + l),$$

где S — площадь боковой поверхности прямого цилиндра, S_1 — площадь его полной поверхности, R — радиус окружности основания, h — высота цилиндра;

$$S = \pi Rl, \quad S_1 = \pi R(R + l),$$

где S — площадь боковой поверхности прямого конуса, S_1 — площадь его полной поверхности, R — радиус окружности основания, l — длина образующей конуса;

$$S = \pi(R + r)l,$$

где S — площадь боковой поверхности прямого усеченного конуса, R и r — радиусы его оснований, l — длина образующей;

$$S = 2\pi ra = 2\pi Rh,$$

где S — площадь поверхности вращения отрезка AB длиной a (рис. 5,a) около оси ab, не пересекающей отрезка, r — расстояние середины отрезка от оси вращения, h — длина проекции ab отрезка AB на ось вращения, R — радиус окружности с центром на оси вращения касающейся отрезка AB в его середине;

$$S = 2\pi Rh,$$

где S — площадь поверхности вращения дуги $\breve{AB}$ окружности радиусом R вокруг оси ab (рис. 5,б), на которой лежит центр окружности (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения), h — длина проекции дуги $\breve{AB}$ на ось вращения;

$$S = 4\pi R^2,$$

где S — площадь поверхности шара (площадь сферы), R — радиус шара;

$$V = abc,$$

где V — объем прямоугольного параллелепипеда, a, b, c — длины его сторон;

$$V = Sh,$$

где V — объем призмы, S — площадь многоугольника, лежащего в основании призмы, h — ее высота;

$$V = Sl,$$

где V — объем наклонной призмы, S — площадь перпендикулярного сечения к образующей призмы, l — длина ее бокового ребра;

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где V — объем пирамиды, S — площадь многоугольника, лежащего в основании пирамиды, h — высота пирамиды;

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)h,$$

где V — объем усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади ее оснований, h — высота усеченной пирамиды;

$$V = \pi R^2 h,$$

где V — объем кругового цилиндра, R — радиус круга, лежащего в основании цилиндра, h — высота цилиндра;

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где V — объем кругового конуса, R — радиус круга, лежащего в основании конуса, h — высота конуса;

$$V = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)h,$$

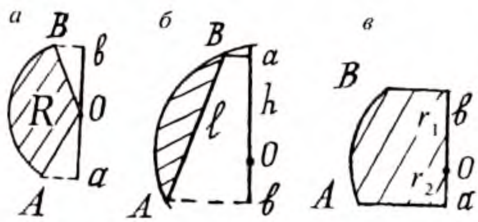

Рис. 6

где V — объем кругового усеченного конуса, R и r — радиусы кругов, лежащих в основании конуса, h — высота конуса;

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где V — объем шарового сектора с центром на оси вращения ab, R — радиус шарового сектора, h — высота шарового пояса (рис. 6,*а*), служащего основанием шарового сектора (точка A или B, или обе могут лежать на оси вращения ab). На рис. 6,*а* изображено лишь сечение сектора осевой полуплоскостью;

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где V — объем шара, R — его радиус;

$$V = \frac{1}{6}\pi l^2 h,$$

где V — объем кольца с центром на оси вращения ab, (рис. 6,*б*) l — длина хорды AB кольца, h — длина проекции ab хорды AB на ось вращения (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения ab). На рис. 6,*б* изображено лишь сечение кольца осевой полуплоскостью;

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\pi h,$$

где V — объем шарового слоя с центром на оси вращения ab (рис. 6,*в*), r_1 и r_2 — расстояния точек A и B от оси вращения ab (r_1 и r_2 — радиусы кругов, ограничивающих слой), h — высота шарового пояса, служащего основанием шаровому слою (точка A или B или обе могут лежать на оси вращения). На рис. 6,*в* изображено лишь сечение шарового слоя осевой полуплоскостью;

$$V = \frac{1}{6}h(\hat{S} + 4S_1 + \bar{S}),$$

где V — 1) объем любого многогранника, у которого основания — различные неправильные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а боковая поверхность образована треугольниками или трапециями, вершины которых совпадают с вершинами многоугольников, лежащих в основании; 2) объем цилиндра; 3) объем конуса; 4) объем шарового слоя; $\hat{S}$ и $\bar{S}$ — площади фигур, расположенных в параллельных плоскостях (оснований), S_1 — площадь сечения тела плоскостью, параллельной основаниям и находящейся от них на равных расстояниях, h — высота (расстояние между основаниями).

1. Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми L_1 и L_2, если расстояние между точками $A \in L_1$ и $B \in L_2$, равноотстоящими от оснований $C \in L_1$ и $D \in L_2$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2l$, а $DC = AC = BD = l$

2. *Даны* две скрещивающиеся под углом α прямые L_1 и L_2. Расстояние между точками $A \in L_1$ и $B \in L_2$, равноотстоящими от оснований $C \in L_1$ и $D \in L_2$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно m. Найдите расстояние между прямыми, если $AC = BD = l$.

3. Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу AB, равна 9,6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр $CM = 28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

4. Точки A, B, C, принадлежащие окружности, делят длину окружности в отношении 1:2:2 ($\smile AC = \smile BC$). Найдите расстояние от центра окружности O до плоскости γ, если известно, что плоскость γ отстоит от точек A и B на расстояние d, а от точки C — на расстояние b.

5.* *Даны* ромб $ABCD$ и плоскость β. Найдите расстояние от вершины D до плоскости β, проходящей через вершину A, если расстояния от точек B и C до плоскости β равны b и c соответственно.

6. Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

7. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Определите боковую поверхность полученной пирамиды, если длина ребра куба равна a.

8. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

9. Плоскость пересекает прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием по ромбу с острым углом α. Под каким углом пересекает эта плоскость боковые ребра параллелепипеда?

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания AC и BD пересекаются в точке M, $\widehat{AMB} = \alpha$. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $B_1M = b$, $BMB_1 = \beta$.

11. Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

12. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ — квадрат со стороной 5 см. Длина ребра AA_1 также равна 5 см, и это ребро образует с ребрами AB и AD углы, равные $60°$. Найдите длину диагонали BD_1.

13. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

14. Найдите площадь боковой поверхности и объем прямого параллелепипеда, зная, что его высота равна h, диагонали составляют с основанием углы α и β, а его основанием служит ромб.

15. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

16. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Определите объем призмы, если ее большая диагональ имеет длину l и образует с плоскостью основания угол β.

17. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом α. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна S. Найдите объем отсеченной пирамиды.

18. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Площадь этого сечения равна Q. Найдите объем призмы.

19. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Боковая сторона трапеции и ее меньшее основание имеют равные длины. Найдите объем призмы, если диагональ призмы равна a и образует с плоскостью основания угол β.

20. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найдите объем призмы.

21. Определите объем прямой призмы, у которой основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом α, если боковое ребро призмы имеет длину l и составляет с диагональю большей боковой грани угол β.

22. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной c и острым углом $30°$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $45°$. Определите объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

23. Прямая призма имеет в основании равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из его сторон под углом α к плоскости основания, отсекает от призмы треугольную пирамиду объемом V. Определите площадь сечения.

24. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы $60°$. Найдите площадь полной поверхности призмы.

25. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

26. Длина диагонали правильной четырехугольной призмы равна l, диагональ образует с плоскостью основания угол, величина которого равна α. Найдите объем призмы.

27. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая это основание под углом α и три боковых ребра призмы. Определите площадь полученного сечения и его острый угол, если сторона основания призмы равна b.

28. Определите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна a.

29. Основание призмы — правильный треугольник, сторона которого 4 см. Одна из боковых граней, перпендикулярная плоскости основания, — ромб, длина диагонали которого равна 6 см. Найдите объем призмы.

30. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Определите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.

31. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, основание которого имеет длину a и угол при основании α. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

32. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определите объем призмы.

33. Основание призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом длиной a см. Боковое ребро, противоположное гипотенузе, с катетами составляет острые углы α и β. Длина бокового ребра b см. Найдите объем призмы.

34. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна S. Зная, что угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α, найдите сторону основания.

35. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине α. Определите объем пирамиды.

36. Найдите угол между апофемой боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, зная, что разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

37. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см, двугранный угол при основании равен 30^0. Найдите объем пирамиды.

38. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет длину l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

39. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

40. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно одной из боковых граней пирамиды. Найдите площадь сечения, если боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом α, а сторона основания пирамиды равна a.

41. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой грани, проходящей через меньший катет основания, если $\operatorname{tg}\alpha = 3/2$, $\operatorname{tg}\beta = 2/3$, $a = 8$ см.

42. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC, у которого катет $A_1C = b$ и $\widehat{B} = \beta$. Боковые грани пирамиды, проходящие через катеты AC и BC, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань образует с основанием угол α. Найдите объем пирамиды.

43. Дана пирамида $SACB$ с вершиной в S. Ее основание — прямоугольный треугольник ACB. В этом треугольнике AB — гипотенуза, ее длина $2\sqrt{3}$ см. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания. Двугранный угол, составленный боковыми гранями SAC и SAB равен 30^0. Высота пирамиды 1 см. Найдите площадь боковой поверхности.

44. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной c и острым углом α, если боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β.

45. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 5 см. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

46. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

47. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противоположная ему сторона имеет длину R. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найдите площаполной поверхности пирамиды.

48. Определите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого равны α и β, а радиус описанного около основания круга R. Боковые ребра наклонены к плоскости основния под углом φ.

49. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α. Найдите объем пирамиды.

50. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и апофемой равен α, длина бокового ребра пирамиды равна l. Найдите объем пирамиды.

51. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α, радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

52. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 45^0. Определите объем пирамиды.

53. Найдите высоту правильного тетраэдра, объем которого равен V.

54. Найдите объем правильного тетраэдра, высота которого равна H.

55. В правильной треугольной пирамиде, объем которой равен V, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Определите площадь полной поверхности пирамиды.

56. Найдите объем и площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, зная, что плоскость, проходящая через сторону основания и середину высоты пирамиды, наклонена к основанию под углом φ, а сторона основания равна a.

57. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны на расстояние d.

58. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основнию и делящей две стороны основания пополам. Определите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна a, а высота пирамиды равна H.

59. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — $2a$, через середину бокового ребра перпендикулярно к нему проведена плоскость. Определите площадь образовавшегося сечения.

60. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $2/3$. Определите косинус угла между боковыми гранями пирамиды.

61. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найдите площадь сечения и объем пирамиды, зная, что длина стороны основания равна a, а угол между сечением и основанием равен α.

62. Высота правильной треугольной призмы равна H. Через одно из ребер нижнего основания и противоположную ему вершину верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если угол образовавшегося треугольника при заданной вершине призмы равен α.

63. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R.

64. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а плоский угол при вершине равен 2α. Найдите площадь поверхности шара, описанного вокруг пирамиды.

65. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны l. Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен α. Найдите объем пирамиды.

66. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

67. Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α, сумма высоты пирамиды и радиуса окружности, вписанной в основание пирамиды, равна a. Найдите объем пирамиды.

68. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и каждое из них равно b. Найдите объем пирамиды.

69. В тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AD и BC, если $AB = AC$ и $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$.

70. Стороны треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны 13, 14 и 15 см. Двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

71. В треугольной пирамиде боковые ребра равны, а в основании ее лежит прямоугольный треугольник, высота которого, опущенная из вершины прямого угла, равна h. Двугранные углы, образованные гранями пирамиды, пересекающимися по катетам основания, равны α и β. Найдите объем пирамиды.

72. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом φ при вершине. Все боковые ребра пирамиды имеют длину a. Определите объем пирамиды, если длина радиуса вписанной в основание окружности равна r.

73. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Определите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен R.

74. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол β. Определите объем пирамиды.

75. В треугольной пирамиде $SABC$ две равные боковые грани ASB и BSC перпендикулярны плоскости основания, а грань ASC наклонена к ней под углом β. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен r и $\widehat{ABC} = \alpha$.

76. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна m, а двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен 2α. Через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру. Найдите объем части пирамиды, лежащей ниже плоскости.

77. Площадь боковой поверхности треугольной пирамиды равна S, каждое из боковых ребер равно l. Найдите плоские углы при вершине пирамиды, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\pi/4$.

78. Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники. Основание и противолежащий ему угол каждого такого треугольника равны a и α соответственно. Найдите объем пирамиды.

79.* В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а площади двух дургих равны P и Q соответственно. В каком отношении высота пирамиды делит сторону основания?

80.* В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, опирающаяся на гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания. Площади двух других граней равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите гипотенузу основания, если известно, что она делится высотой пирамиды в отношении $1:p$.

81. Найдите радиус вписанного в треугольную пирамиду шара, если все ее углы при вершине прямые, а длины боковых ребер равны a, b и c.

82.* Найдите объем треугольной пирамиды, если площади ее граней равны S_0, S_1, S_2 и S_3, а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью S_0, равны между собой.

83.* $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром длиной единица. O — центр шара радиусом $\sqrt{2}$, касающегося ребер AS, AC и AB (или их продолжений). Найдите длину отрезка OK, где K — середина ребра SC.

84.* В тетраэдре ABC ребра AC, BC и CD взаимно перпендикулярны. Точка N лежит в плоскости ABC и одинаково удалена от ребер AB, BC и CD. Точка N лежит в плоскости BCD и одинаково удалена от тех же ребер. Найдите MN, если $BC = CD = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

85. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 3 см, а боковое ребро — 5 см. Найдите объем пирамиды.

86. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

87. Плоский угол боковой грани при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

88. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

89. Основанием пирамиды служит прямоугольник, две боковые грани ее перпендикулярны основанию, две другие боковые грани образуют с основанием углы α и β. Определите объем пирамиды, если длина наибольшего из боковых ребер равна l.

90. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

91. Угол между боковыми ребрами и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60^0, длина бокового ребра равна a. Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

92. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и составляет с боковой гранью угол α. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите объем пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

93. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

94. Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1. Точка M лежит в основании $ABCD$ пирамиды и одинаково удалена от ребер AS и DS, а $MS = MC$. Точка N лежит на грани BSC и также одинаково удалена от тех же ребер, причем $NS = NC$. Найдите площадь треугольника BMN.

95. Основанием пирамиды служит ромб, длины диагоналей которого равны 6 м и 8 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину 1 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96. Основанием пирамиды служит ромб со сторой a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с ним угол β. Определите объем пирамиды и площадь боковой поверхности.

97. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды угол β. Найдите объем пирамиды.

98. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

99. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если угол при основании боковой грани равен α, а радиус окружности, которая вписана в эту грань, равен R.

100. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна h, боковое ребро и диагональ боковой грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

101. В правильной шестиугольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным ребром основания равен α, сумма радиусов окружностей, вписанной в основание и описанной около него, равна m. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

102. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна m. Двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

103. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее равен $38 см^3$, а площади оснований относятся как 9:4. Определите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

104. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2. Найдите площадь S сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна основаниям и равноудалена от них.

105. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найдите высоту пирамиды.

106. Разность между длиной апофемы и высотой правильной четырехугольной пирамиды равна m, а угол между ними равен α. Найдите объем пирамиды.

107. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h. Через диагональ основания пирамиды и середину противолежащего ребра проведено сечение, образующее угол α с диагональной плоскостью, проведенной через ту же диагональ основания. Найдите площадь сечения.

108. Найдите плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковыми ребром и плоскостью основания пирамиды.

109. Основание пирамиды – прямоугольник, площадь которого равна 12 $см^2$. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а две другие составляют с основанием углы 30^0 и 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

110. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом γ. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

111. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого имеет длину d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

112. Основание пирамиды — параллелограмм с тупым углом α. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а остальные две составляют с ней углы β и γ. Найдите площадь меньшей боковой грани, если меньшее боковое ребро имеет длину 8 см.

113. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найдите радиус описанного шара.

114. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

115. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основния равен α.

116. В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом α. Определите объем конуса, если сторона основания пирамиды имеет длину a.

117. В конус, образующая которого по длине равна l и наклонена к основанию под углом d, вписана пирамида, в основании которой прямоугольник с острым углом 2α между диагоналями. Найдите расстояние от основания высоты до боковой грани, проходящей через меньшую сторону основания.

118. В усеченный конус вписан шар радиусом R. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

119. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найдите объем пирамиды.

120. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти величину угла между осью конуса и его образующей, зная, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.

121. Найдите объем и площадь полной поверхности конуса, если в его основании хорда длиной a стягивает дугу α, а угол между высотой и образующей конуса равен β.

122. Определите площадь полной поверхности цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат и площадь боковой поверхности равна S.

123. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание конуса по хорде длиной a, стягивающей дугу β. Найдите объем и площадь боковой поверхности конуса.

124. Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая в основании дугу 120^0. Определите площадь сечения, если радиус основания конуса равен R и плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол α.

125. Треугольник ABC вращается вокруг стороны BC, $\hat{A} = 120^0$. Найдите площадь той поверхности, которая получается вращением ломаной, составленной из сторон CA и AB, если $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 5$.

126. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S. Угол между его высотой и образующей равен α. Найдите объем шара.

127. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, если известно, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади полной поверхности конуса как 7:4.

128. Образующая конуса наклонена к плоскости основания конуса под углом φ. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через центр вписанного в конус шара параллельно основанию, равна S. Найдите объем конуса.

129. В прямой конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник, вписан цилиндр (нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса). Отношение площади боковой поверхности конуса к площади боковой поверхности цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найдите величину угла между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

130. Определите площадь боковой поверхности конуса, зная радиус R описанного вокруг него шара и угол α, под которым из центра шара видна образующая конуса.

131. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Площадь полной поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

132. Около шара радиусом R описан прямой круговой конус, в котором угол между образующей и плоскостью основания равен α. Определите площадь полной поверхности и объем конуса.

133. В шар радиусом R вписан конус, в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α.

134. В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол, равный α. Найдите объем конуса.

135. Радиус основания цилиндра равен 26 см, длина образующей 48 см. На каком расстоянии от оси цилиндра следует провести сечение, параллельное оси цилиндра, чтобы оно имело форму квадрата?

136. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена плоскость, которая отсекает от окружности основания дугу в α радиан. Площадь сечения равна S. Определите объем цилиндра.

137. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m : n$. Площадь сечения равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

138. Высота конуса, равная h, является диаметром сферы, которая делит боковую поверхность конуса в отношении $m : n$ (считая от вершины). Найдите радиус основания конуса.

139.* Два равных конуса с общей вершиной A расположены по разные стороны от плоскости P так, что только одна образующая каждого конуса (AB для одного конуса и AC для другого) принадлежит плоскости P. Известно, что $\widehat{BAC} = \beta$, а угол между высотой и образующей каждого конуса равен φ. Найдите угол между линией пересечения плоскостей оснований конусов и плоскостью P.

140.* Точка O — общая вершина двух конгруэнтных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежат плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, а величина угла между высотой и образующей каждого конуса равна φ, причем $2\varphi < \beta$. Найдите величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B.

141. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найдите объем усеченного конуса.

142. Шар радиусом $\sqrt[3]{2}$ см равновелик прямому конусу, площадь боковой поверхности которого в три раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

143. В шаре радиусом r из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определите их длину.

144.* Четыре сферы радиусом r расположены так, что каждая из них касается трех других. Найдите радиус сферы, которая касается каждой из данных сфер.

145.* На плоскости размещены четыре шара: два шара радиусом a и два одинаковых шара с неизвестным радиусом x так, что каждый шар касается трех других и плоскости. Найдите радиус x.

146. Сфера, центр которой находится в вершине конуса, касается его основания. Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса, если сфера делит конус на части равных объемов.

147. Сфера с центром в вершине конуса делит его на две равновеликие части. Найдите радиус этой сферы, если радиус основания конуса равен a, а величина угла при вершине его осевого сечения равна α.

148.* В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α, вписан шар радиусом R. Найдите объем части конуса, расположенной над шаром.

149. Расстояние от центра вписанного в конус шара до вершины конуса равно a. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен α. Найдите объем конуса.

150. В конус вписан шар, площадь большого круга которого равна S. Найдите площадь полной поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 2α.

151.* Сфера вписана в прямой круговой конус с углом α при вершине осевого сечения. В эту сферу вписан конус с таким же углом при вершине осевого сечения. Найдите величину угла α, если отношение объема первого конуса к объему второго конуса равно 27.

152. Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а ее радиус равен радиусу этого основания. Высота конуса больше радиуса основания конуса. Через окружность, по которой сфера пересекается с боковой поверхностью конуса, проведена плоскость. Каким должен быть угол при вершине осевого сечения конуса, чтобы эта плоскость делила конус на две одинаковые по объему части?

153. Шар касается всех граней куба. Найдите отношение площадей поверхности и отношение объемов этих фигур.

154. Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна S. Определите площадь полной поверхности конуса, если наибольший угол между его образующими равен α.

155. Найдите отношение площади полной поверхности прямого кругового конуса, вписанного в шар, к площади поверхности этого шара, если известно, что угол при вершине осевого сечения конуса равен α и $\alpha > \pi/2$.

156. В прямой круговой конус с углом $60°$ при вершине осевого сечения вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый из них касается двух других, основания и боковой поверхности конуса. Найдите радиус основания конуса.

157. В конус вписан шар радиусом r. Найдите объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

158. Найдите отношение объема шара к объему прямого кругового цилиндра, вписанного в этот шар, если известно, что меньший угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен α и диаметр основания больше высоты цилиндра.

159. В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса S.

160. В конус, радиус основания которого равен r, а угол, составленный высотой и образующей, равен α, вписан цилиндр так, что его боковая поверхность относится к боковой поверхности конуса как $m : n$. Найдите объем цилиндра.

161. В конус вписан полушар так, что большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найдите площадь полной поверхности полушара и его объем, если образующая конуса, равная l, составляет с плоскостью основания угол β.

162. В конус, у которого площадь боковой поверхности равна S, а угол наклона образующей к плоскости основания равен φ, вписана треугольная пирамида, имеющая основанием прямоугольный треугольник с острым углом α. Определите объем пирамиды.

163. Угол между плоскостью основания и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

164.* В треугольную пирамиду, все ребра которой имеют длину a, вписан шар. В один из трехгранных углов пирамиды вновь вписан шар так, что он касается первого. Найдите объем второго шара.

165. Высота правильной четырехугольной пирамиды и радиус описанной сферы равны соответственно h и $r (r \leqslant h)$. Найдите площадь основания пирамиды.

166. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания равен α. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

167. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плоскость, параллельная основанию пирамиды. Определите площадь боковой поверхности полученной усеченной пирамиды.

168. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Найдите объем пирамиды.

169. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Длина высоты пирамиды равна H, а радиус основания описанного конуса равен R. Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов.

170. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ. Около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом 2φ. Определите объем пирамиды.

171. Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l, а ее боковая грань образует с плоскостью основания угол α.

172. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр с радиусом основания r. Высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды. Плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды.

173. В цилиндр вписан параллелепипед, диагональ которого образует с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью — угол β. Найдите объем цилиндра, если сторона основания большей боковой грани параллелепипеда равна a.

174. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d. Плоскость, проходящая через эту диагональ и вершину второго основания призмы, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

175.* В основании правильной призмы лежит треугольник, вершины которого являются серединами ребер основания правильной пирамиды. Какая часть объема призмы находится вне пирамиды, если известно, что высота пирамиды в 3 раза меньше высоты призмы?

176.* $SABC$ — правильный единичный тетраэдр. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину ребра BC. Найдите радиус сферы, если ее центр лежит внутри тетраэдра.

177.* Сфера касается бокового ребра AA' и непараллельных ребер оснований AB и $A'D'$ единичного куба $ABCDA'B'D'C'$ и проходит через точку M ребра CC', причем $CM = 1/3$. Найдите радиус сферы.

178.* Внутри цилиндра высотой $3a$ помещены три одинаковых шара радиусом a так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания, а третий — верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.

179. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол φ. При каком значении φ объем конуса будет наименьшим? Чему равен этот объем?

180. В полушар радиусом R вписан конус так, что вершина его находится в центре полушара. Найдите радиус основания конуса, при котором объем его будет максимальным.

181. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который противолежит данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β. Найдите объем пирамиды. При каком значении α объем будет наибольшим?

182. Найдите отношение высоты к радиусу основания цилиндра, который при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность.

183. В полушар радиусом R вписан цилиндр так, что плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема.

184. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Какими должны быть его размеры, чтобы поверхность без крышки была наименьшей?

185. Конус объемом V описан около шара. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Найдите объем шара. При каком значении α объем будет наибольшим?

186. Около цилиндра с радиусом основания r и высотой h опишите конус наименьшего объема, если плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают. Определите объем этого конуса.

187. Через ребро AB правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, $AB = a$.

188. Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, у которого $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{BAC} = \varphi$, $AC = b$. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а угол между гранью SBC и плоскостью основания равен α. Определите объем пирамиды. При каком угле φ объем пирамиды наибольший?

189. В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиусом r. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая шар. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее значение.

190. В правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна H, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен β, вписан конус. Через апофему боковой грани пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее значение.

191. Найдите отношение площади поверхности, полученной при вращении ромба вокруг большей диагонали, к площади поверхности, полученной при вращении этого ромба вокруг меньшей диагонали, если известно, что меньший угол между сторонами ромба равен α.

192. Найдите отношение объема тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг большей стороны, к объему тела, полученного при вращении этого прямоугольника вокруг меньшей стороны, если известно, что в прямоугольнике меньший угол между диагоналями равен α.

193. Прямоугольный треугольник с катетом длиной a и прилежащим к этому катету острым углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной к биссектрисе этого угла. Найдите объем тела вращения.

194. Длина меньшей стороны параллелограмма a, острый угол параллелограмма α, угол между меньшей диагональю и большей стороной β. Найдите объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

195. Дан треугольник ABC, причем $BC = a$, $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = 90^0 + \alpha$. Определите объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг его высоты, опущенной из вершины A.

196. Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, высота AB равна h, острый угол $\widehat{ADC}$ равен α. Найдите объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой AB, если точка E — середина отрезка CD.

197. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания угол β. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды V. При каких значениях β радиус шара наибольший?

198. Конус описан около полушара радиусом R так, что центр основания конуса лежит в центре шара. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. Найдите объем конуса. При каком значении α объем будет наименьшим?

В этом параграфе использованы задачи из работ [16—19].

ГЛАВА 5. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти такой параметр b, чтобы наибольшее значение функции
$$|-2x^2+x+6|$$
на промежутке $x \in [0,1]$ было наименьшим.

2. Решить уравнение
$$(\cos 2x+\cos x+1)^2 = 2(2\cos x+1)(\cos 2x-\cos x).$$

3. Решить уравнение
$$\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) = \sin^2\frac{\pi x}{2}+\cos^4\frac{\pi x}{2}.$$

4. Решить уравнение
$$5^{x^2-6x+6} = \frac{1}{125}\sin\frac{\pi x}{6}.$$

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_{27}(2y-x) = \log_3(y-x), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

6. Найти значения параметра a, при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2+a+4x+3 \leqslant 0, \\ 2a-x+2 \geqslant 0. \end{cases}$$
удовлетворяет лишь одному значению.

7. Решить систему
$$\begin{cases} xy+\log_x y = 0, \\ y^{\sin x} = 1, \quad \dfrac{x}{\pi}+\dfrac{y}{\pi} \leqslant 2. \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \lg(y^x) = 2x\lg(2y-x), \\ \sqrt{x}-x = \sqrt{y}-y. \end{cases}$$

9. Решить неравенство
$$\sqrt{2(x-\sqrt{x^2-a^2})} > \frac{x+a}{5\sqrt{x-a}} \quad (a>0).$$

10. Решить уравнение

$$\cos 3\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin 3x\cos^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{8}.$$

11. Для каких значений параметра a наибольшее на промежутке $[1,2]$ значение функции

$$y=ax+\frac{2}{x}$$

достигается в правой его точке?

12. Даны точки $A(0,3)$, $B(4,5)$ на оси OX. Найти точку C, такую, чтобы периметр ABC был наименьшим.

13. При каких a, b система

$$\begin{cases} 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0,\\ ax+by=5\end{cases}$$

имеет решения?

14. Для каких a, b графики функций

$$f(x)=2x^4a^2x^2+b=1$$

и

$$g(x)=2ax^3-1$$

имеют лишь две общие точки?

15. При каких a разрешимо уравнение

$$(a^2+2)\cos 4x+1=4a(\cos^4 x+\sin^4 x)?$$

16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2z(x-1)}{x+z-1}=-3,\\[2mm] \dfrac{5(x-1)(y+1)}{x+y}=3,\\[2mm] \dfrac{11z(y+1)}{y+z+1}=3.\end{cases}$$

17. Решить неравенство

$$\left(\log_4\left(\frac{x^2+x-3}{2}\right)\right)^{x-2}\leqslant 1.$$

18. Решить неравенство

$$x^2 \leqslant (3x-2)(-1+\sqrt{x+1})^2.$$

19. При каких натуральных n справедливо неравенство

$$\frac{7n^2 - n + \cos(n^2+2)}{n^4 + 7n - n\log_3 10} > 1?$$

20. При каком a уравнение

$$\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1-\frac{x}{4}-\frac{1}{x^2}} = a$$

имеет три корня?

21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = x + \sqrt{(x+6x+9)(2x+x+1)}$$

на промежутке $[-4, -5/4]$.

22. Найти такую область (a, b), что $\forall x \in R$ справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\cos y} = 2x - |2-2x| - 1, \\ 3^{y^2+y-6} = x. \end{cases}$$

Список применяемых обозначений

Символ	Понятие	Пояснение
N	Множество натуральных чисел	$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Z	Множество целых чисел	$Z = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
R	Множество действительных чисел	
R_+	Положительные числа	$x \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in R_+$
R_-	Отрицательные числа	$x \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in R_-$
$\mathrm{Re}\ z$	Вещественная часть комплексного числа z	$\mathrm{Re} z = x,\ z = x + iy$
$\mathrm{Im}\ z$	Мнимая часть комплексного числа z	$\mathrm{Im} z = y,\ z = x + iy$
i	Мнимая единица	$i^2 = -1$
π	Число "пи"	$\pi = 3,141592653589\ldots$
e	Число "ϵ"	$e = 2,718281828459\ldots$
$\varnothing$	Пустота	$x \in \varnothing$ — таких x не существует
$[\varnothing]$	Пустое множество	
$\mid\ \mid$	Абсолютная величина числа (модуль)	$\lvert x\rvert = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
$\{\ \}$	Множественные скобки	$\{a_n\}$ — последовательность элементов
(a, b)	Интервал точек от a до b	Множество точек от a до b не включая a и b
$[a, b]$	Промежуток, отрезок	Множество точек от a до b включая a и b
$\div$	Арифметическая прогрессия	
$\div\div$	Геометрическая прогрессия	
$\parallel$	Параллельность	
$\perp$	Перпендикулярность	
$\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$	Угол между векторами	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}\,\mathbf{b})$	Скалярное произведение векторов	Или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Векторное произведение векторов	Или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$
$\subset, \supset$	Включение для множеств	$A \subset B$ — множество A содержится в множестве B (A есть подмножество множества B); $A \supset B$ — множество A содержит множество B
$\overline{\subset}, \overline{\supset}$	Отрицание включения	

Символ	Понятие	Пояснение
$\in$	Принадлежность	$d \ni A$ — элемент d принадлежит множеству A
$\notin$ или $\overline{\in}$	Отрицание принадлежности	$d \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A
$\ni$	Содержание	$A \ni a$ — множество A содержит элемент a
$\cup$	Объединение двух множеств	$A \cup B$
$\cap$	Пересечение двух множеств	$A \cap B$
$]$	Допущение	"Пусть"
$\vee$	Дизъюнкция	"Или"; $a \vee b$ — a или b
$\wedge$	Конъюнкция	"И"; $a \wedge b$ — a и b
$\{$	Совместность	Знак системы
$[$	Объединение	"Либо"
$\Leftrightarrow$	Равносильность	Необходимо и достаточно
$\Rightarrow$	Следствие	Следует
$!$	Единственность	Единственный
$\exists$	Квантор существования	$\exists x\ :\ x^2 < 1$ — существует такое x, для которого $x^2 < 1$
$\forall$	Квантор общности	$\forall x \in R \sin \leqslant 1$ — для всех $x \in R$ справедливо неравенство $\sin x \leqslant 1$
$\operatorname{sgn} x$	Знак числа a	$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0 \end{cases}$
$f(x)$	Значение функции в точке x	$y = f(x)$
$D(f)$	Область определения функции f	$D(f) = \{x\|$
$E(f)$	Множество значений функции f	$E(f) = \{y\|\forall x \in D(f)\}$
$f'(x_0)$	Производная в точке x_0	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
lg	Десятичный логарифм	Основание 10
ln	Натуральный логарифм	Основание e
$\max f[a,b]$ $(\min f[a,b])$	Наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на $[a,b]$	Наибольшее (наименьшее) значение в точке x_0
$x_{\min}(x_{\max})$	Точка минимума (максимума)	В точке достигается минимум (максимум)
$f_{\min}(f_{\max})$	Значение функции в точке минимума (максимума)	$f_{\min} = f(x_{\min})$ $(f_{\max} = f(x_{\max}))$

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Б. И., Максимов В. М., Лурье М. В., Колесниченко А. В. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1972. 607 с.
2. Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1983. 397 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 511 с.
4. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1972. 526 с.
5. Задачи по математике. Начало анализа/ Ред. В. В. Вавилов и др. М.: Наука, 1990. 608 с.
6. Ермаков С. М., Сабанеев В. С. Варианты письменных работ по математике. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1974. 104 с.
7. Кречмар В. А. Задачник по алгебре, М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 427 с.
8. Лурье М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений. М.: Наука, 1990. 94 с.
9. Матвеев Н. М. Варианты письменныъ работ и билеты для устных заданий. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1966. 70 с.
10. Международные математические олимпиады. М.: Просвещение, 1967. 173 с.
11. Моденов П. С. Сборник задач по математике. М.: Сов. наука, 1952. 383 с.
12. Нестеренко Ю. В., Олехин С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1986. 511 с.
13. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. М.: Сов. Наука, 1958. 527 с.
14. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. М.: Высшая школа, 1967. 536 с.

15. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Ред. Г.Н.Яковлев, М.: Наука, 1981. 719 с.
16. Рыжков В. Н., Г. Д. Курдеванидзе, Панфилов Н. Г. Сборник задач математических олимпиад. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1987.
17. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы/ Ред. М. И. Сканави. М.: Высш. школа, изд. 4, 1980. 540 с.
18. Сборник задач по математике для поступающих в вузы/ Ред. А. И. Приленко. М.: Высш. школа, 1983. 238 с.
19. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных решений. М.: Просвещение, 1968. 310 с.
20. Шахно К. У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Минск: Высш. школа, 1964. 521 с.
21. Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1954. 544 с.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

§ 1.1

1. $1/2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 4. **5.** 1. **6.** 1. **7.** $145\frac{5}{6}$. **8.** 0,0011. **9.** $1\frac{19}{24}$. **10.** $2\frac{4}{13}$. **11.** $3\frac{29}{72}$. **12.** $\frac{7}{22}$. **13.** $\frac{3}{14}$. **14.** 20. **15.** 401. **16.** 8. **17.** 57. **18.** 330. **19.** 315.

§ 1.2

1. 959. **2.** Да. **3.** Частное не изменится, а остаток увеличится в 3 раза.

§ 1.3

1. $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **2.** $\sqrt[m]{y}$. **3.** $|Z^{1/p} - Z^{1/q}|$. **4.** $\sqrt{x}$. **5.** $a + b + c$. **6.** $x \in (0, 2) \Rightarrow -\sqrt{x}$; $x \in (2, \infty) \Rightarrow \sqrt{x}$. **7.** $\sqrt{6x}$. **8.** $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$. **9.** $1 + 3x^2$. **10.** $1/2$. **11.** $x + y$. **12.** $3/5$. **13.** 0. **24.** $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow -1$, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \Rightarrow \frac{2+x-x^2}{x^3+x}$, $x \in [1, \infty) \Rightarrow 1$. **25.** $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow -(x + 1)$, $x \in (-1, 1) \Rightarrow x + 1$, $x \in (1, \infty) \Rightarrow 2x^2 + x - 1$. **26.** $x \in (1, 2)$, $2\sqrt{x-1}$, $x \in (2, \infty)$, 2. **27.** $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow 6$; $x \in [0, 6)$, $6 - 2x$; $x \in [6, \infty)$, -6. **28.** $(n + 1)/n$. **29.** $-2(b - c)(c - a)(b - a)(a + b + c)$.

§ 1.4

1. $\frac{4x-280}{90-x} \leqslant x \leqslant 76\frac{2}{3}$. **2.** 1080/11 г, 1350/11 г, 27/11 г/см^3. **3.** 5 г и 20 г. **4.** 20:6:3. **5.** 2/3. **6.** Первая труба подает жидкость быстрее в 2 раза. **7.** 180 км. **8.** 2,5 ч. **9.** 8 ч 45 мин. **10.** 2 ч и 4 ч. **11.** 0,5 круга в минуту. **12.** 100 км. **13.** 7,5 км/ч; второй пароход доходит от А до К за 20 мин. **14.** 450 и 550. **15.** 16 ч. **16.** 22,5 мин. **17.** 15/7 дня. **18.** 90 км. **19.** 600 м^3. **20.** 12,5 г. **21.** 0,5. **22.** Скорость первого автомобиля в 9/8 раза больше, чем второго. **23.** 16 ч 30 мин. **24.** Не успеет. **25.** 9 пятиэтажных домов и 8 девятиэтажных домов. **26.** 4 ч. **27.** 18 ч. **28.** $5 < v < 10$. **29.** Скорость второго пешехода больше. **30.** Не хватит. **31.** $30 < v \leqslant 33{,}6$. **32.** 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей. **33.** 2 тетради. **34.** 14 и 25 орехов. **35.** 2 набора,состоящие из 5 гашеных и 2 негашеных марок каждый. **36.** 390 руб. **37.** 11 лип и 5 берез. **38.** Продано 3 комплекта. В каждом комплекте было 7 синих и 3 красных карандаша. **39.** 11 "двоек", 7 "троек", 10 "четверок", 2 "пятерки". **40.** 8 книг. **41.** Машина встретит велосипедиста. **42.** $v = 8$ км/ч. **43.** $v = 100$ м/с. **44.** За 12 часов. **45.** В 6 раз. **46.** $(1/2)h$. **47.** $S = \left((U_1 d_2 - U_2 d_1)/(U_1^2 + U_2^2)\right)^{1/2}$. **48.** $a = 14$. **49.** Второй автомобиль остановился раньше; $a = -8$ м/с^2. **50.** 2 с. **51.** 30 км/ч, 900 монет. **52.** $2800\sqrt{2}$ долл., 8 домов. **53.** Невозможен. **54.** 22 коровы.

§ 1.5

1. 4, -2. **2.** $x = -5/2$, $x = -1/2$. **3.** $3/2$, $9/2$. **4.** $3/2$. **5.** $x < -2$, $x > 2$. **6.** $1/2$. **7.** $x > 21/25$, $x < 19/25$. **8.** $4/3 < x < 4$. **9.** $|x| < 2$, $|x| > 4$. **10.** $x \leqslant 6$. **11.** $x \in \varnothing$. **12.** $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_{2,3} = -1 \pm 1/\sqrt{2}$. **13.** $x_{1,2} = 1/2(3 \pm \sqrt{5})$. **14.** $x = -1$. **15.** $x = 0, -1$. **16.** $x = 4/3$, $x = 1/4(-1 \pm \sqrt{17})$. **17.** $\forall x \in R$. **18.** $x \leqslant -1 - \sqrt{3}$, $x \geqslant 1 - \sqrt{5}$. **19.** $1/8(9 - \sqrt{193}) < x < 1/8(11 - \sqrt{201})$. **20.** $x \geqslant 1 + \sqrt{3} \cup x \leqslant -2 - \sqrt{2}$.

21. $x \geqslant 1$. **22.** $\forall x \in R$. **23.** $x > 0$. **24.** $0 \leqslant x \leqslant 2$. **25.** Если $a \leqslant -1/4$, то $x \in (-1-3a,\ 1-3a)$, если $-1/4 < a < 1/4$, то $x \in (a,\ 1-3a)$, если $a \geqslant 1/4$, то $x \in \varnothing$. **26.** Если $a < 0$, то $x \in \varnothing$, если $a \geqslant 0$, то $x = 3a,\ -a$. **27.** Если $a \geqslant 0$, то $x \leqslant 0$, если $a \leqslant 0$, то $x \geqslant 0$. **28.** Если $a > 0$, то $\forall x \in R$, если $a \leqslant 0$, то $\forall x \neq 0$. **29.** Если $a = -1$, то $x \in R$, если $a \pm -1$, то $x = 0$. **30.** $x > 2$. **31.** $x < 2$. **32.** $x = 0,\ -2$. **33.** Если $a > 0$, то $x = (1/2)(-1+\sqrt{1+4a})$; $a = 0$, $x = 0 \cup x = -1$; при $-1/4 \leqslant a < 0$ имеем $x_{1,2} = (1/2)(-1 \pm \sqrt{1+4a})$, $x_3 = (-1/2)(1+\sqrt{1-4a})$; при $a < \frac{1}{4}$ имеем $x = (1/2)(-1-\sqrt{1-4a})$. **34.** $f_{\min} = c+d-a-b$. **35.** $0 < a < 5/3 \cup -8/3 < a < -1$. **36.** $x = 0$, $x = 1/2$. **37.** $x > 2+a \cup x < a-2$. **38.** $x < 3/2$. **39.** $x \in \varnothing$. **40.** Если $a < b < 3a$, то $x < a \cup (a+b)/4 < x < 3(a+b)/4 \cup x > b$, а если $b > 3a$, то $(a+b)/4 < x < 3(a+b)/4$. **41.** $x = 1$. **42.** $x = 13/2$, $x = -17/2$. **43.** $x < 3/2$.

§ 1.6

1. $x \leqslant -2 \cup x > 2$. **2.** $-1 < x < 2 \cup 2 < x < 3$. **3.** $x < 1 \cup 4/3 < x < 2$. **4.** $-16 < x < 3$. **5.** $x < 1 \cup x > 2$. **6.** $1 < x < 6$. **7.** $-1 < x < 5$. **8.** $x < -2 \cup -1 < x \leqslant 0$. **9.** $-8 < x \leqslant 1$. **10.** $-2 < x < -1 \cup -1 < x < 2$. **11.** $-1 < x < 1$. **12.** $-2 < x < 0 \cup 0 < x < 1$. **13.** $x < -7 \cup -1 < x < 0 \cup 0 < x < 1 \cup 3 < x$. **14.** $x < -1 \cup -1 < x \leqslant 2$. **15.** $-\sqrt{14} < x < -3 \cup -1 < x < 1 \cup 3 < x < \sqrt{14}$. **16.** $x < -5 \cup -3 < x < -1 \cup 1 < x < 2$. **17.** $x < -2 \cup 1 < x < 2 \cup x > 3$. **18.** $-3 < x < -1$. **19.** $-5 < x < -2 \cup 2 < x < 3 \cup 3 < x < 5$. **20.** $x < 3$. **21.** $-16/7 \leqslant a < -1$. **22.** $-2-\sqrt{11} < a < -2+\sqrt{11}$. **23.** $a \in \varnothing$. **24.** $k \geqslant 3+\sqrt{8}$. **25.** $a > 3/4$. **26.** $m \in \varnothing$. **27.** $a > -1 \cup a < -3$. **28.** $-3 < p < 6$. **35.** $-1 < x < 3$. **36.** $-5 < x < 0$. **37.** $x < 0$, $x > 1996a$. **38.** $x \in \varnothing$. **39.** $|x| < \sqrt{\sqrt[96]{3}+2}$. **40.** $x \leqslant -\sqrt{\frac{7-\sqrt{45}}{2}} \cup 0 < x \leqslant \sqrt{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}$. **41.** $|x| < \sqrt{2+\sqrt[64]{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}}$.

§ 1.7

1. $(x-2)(x^2-4x+7)$. **2.** $(2x+1)(3x^2+x+2)$. **3.** $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$. **4.** $(2x+1)(3x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$. **5.** $(x+1)\left(x-\frac{7+\sqrt{53}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{53}}{2}\right)$. **6.** $x = 1$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{24}/2$. **8.** $x_{1,2} = \pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4} = \pm b\sqrt{a}$. **9.** $x_1 = 1$, $x_{3,4} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$. **10.** $x_1 = 1/8$, $x_2 = -2$. **11.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$, $x_{3,4} = (-11 \pm \sqrt{105})/4$. **12.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. **13.** $x_1 = x_2 = 3$, $x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$. **14.** $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. **15.** $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. **16.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$. **17.** Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то $x_1 = 1/a$, $x_2 = -\sqrt[3]{a}$. **18.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2/3$. **19.** Если $a = 0$, то $x \in R$, если $a \neq 0$, то $x_{1,2} = \pm a$. **20.** $x_1 = -3$, $x_2 = -5$. **21.** $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. **22.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **23.** $x_1 = -1/2$. **24.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = -7$, $x_4 = -1/2$. **25.** $x_1 = x_2 = 2/3$, $x_3 = -5/3$. **26.** $x_{1,2} = \pm 1/2$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. **27.** $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$. **28.** $p = -60$, $q = 36$. **30.** $x_1 = 2/3$, $x_2 = -3/2$, $x_3 = 1/2$. **31.** $x_1 = 1/2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}/3$. **32.** $x_1 = -b/a$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-d/b}$, если $bd < 0$. **34.** $x = a+b+c$, если $1/a+1/b+1/c-4/(a+b+c) \neq 0$, иначе $\forall x \in R$. **35.** $x = ab+bc+ac$, если $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \neq 0$, иначе $x \in R$. **36.** $x_1 = 0$, $x_2 = -2(b+c)$. **38.** $p = 0$, $q = 0$, $p = 1$, $q = 2$. **39.** $a = -12$, $b = -2$; $a = -7$, $b = -1$. **40.** $2x-4$.

§ 1.8

1. $a_n = 5-10(n-1)$. **2.** 1) $S_{20} = 320$; 2) $a_1 = 14$, $d = -3$ или $a_1 = 2$, $d = 3$; 3) $a_1 = 2$, $d = 2$ или $a_1 = 22$, $d = -2$; 4) $n = 6$; 5) $a_k = m+n-k$; 6) $S_{20} = 100$; 7) $a_n = -1-(n-1)$; 8) $a_n = 1+2(n-1)$; 9) $S_{12} = 129$ или $S_{12} = -69$;

10) $S_{10} = 100$; 11) $S_8 = 100$; 12) $S_{16} = 1488$; 13) $a_1 = 4$, $d = 6$; 14) $a_1 = -1$, $d = 4$; 15) $a_{10} = 55$; 16) $a_1 = 4$, $d = 8$; 17) $a_1 = 2$, $d = 4$; 18) $a_7 = 13$. **3.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) $n(n+1)$; 3) n^2; 4) $\frac{5n^2+11n+6}{2}$; 5) 494550; 6) 165 150; 7) 329 400; 8) 1620; 9) 25 100; 10) 5050. **4.** 1) Нет; 2) Нет; 3) Нет; 4) Да. **5.** 9, 11, 13. **6.** 9, 11, 13, 15. **7.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **8.** 135, 630, 765. **9.** $a_1 = 0,5$, $d = 0,5$. **10.** $d = 7$. **11.** 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 или 0,4, 0,3, 0,2, 0,1. **12.** 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12. **13.** $a_n = -2,5 + (n-1)$. **14.** $\frac{a-b}{b-c}$ — рациональное число. **15.** 1) Не могут, 2) 4567. **16.** 1) $x = 7$, 2) $x = 55$, 3) $x = 1$. **17.** 25. **18.** $-\frac{1}{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$. **19.** $4p^2 = 25q$. **20.** Да: $3a$, $4a$, $5a$. **21.** 3:5:7. **22.** $2(\sqrt{6}-1)$ см, $2\sqrt{6}$ см, $2(\sqrt{6}+1)$ см. **23.** 3, 5, 7, или 4, 5, 6, или 5, 5, 5. **24.** $a_n = 1 + 2(n-1)$. **25.** 1) 0, 1. $161 - 72\sqrt{5}$, 2) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $(-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k$, $k \in z$, 3) $\log_2 5$, 4) $\pi/2 + \pi k$, $(-1)^k\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$, 5) 10, 2. **26.** 1) Да, 2) Да, 3) Не всегда, например $a_n = b_n = n$, 4) Не всегда, например $a_n = -6 + n - 1$, 5) Не всегда, например $a_n = n$, $b_n = n+1$. **27.** 3, 9, 15. **28.** Числа, содержащие $16k+4$ троек, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ **29.** -1, 0, 1, 2. **30.** $(p-q)a + (q-k)b + (k-p)c = 0$. **31.** 6, 6, 6, 6 или 10, 14, 18, 22, или 14, 70, 126, 182, или 0,144, 288, 432. **32.** $S_n = \frac{x-1}{2}$. **33.** $a_n = a_1(2n-1)$, где a_1 — произвольное число. **48.** 1) $b_{13} = 100$, 2) $b_{32} = 32$, 3) $b_7 = 5\sqrt{3}$, 4) $b_{14} = \sqrt[4]{12}/144$, 5) $S_4 = 468$, 6) $S_6 = 31,5$, 7) $b_1 = 1/75$, 8) $n = 4$, 9) $S_{12} = 15$, 10) $b_1 = 2$, $q = 5$ или $b_1 = 50$, $q = 1/5$, 11) $S_6 = -728$, 12) $q = \sqrt{2}$, 13) $b_1 = 2$, 14) $b_7 = 8\sqrt{2}$, 15) $n = 7$, 16) $q = \sqrt{2}$, 17) $n = 6$, 18) $b_n = 9$, 19) $b_1 = 128$, 20) $n = 5$, 21) $q = 1/3$ или $q = -4/3$, 22) $b_3 = 3\sqrt{2}$ или $b_3 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$, 23) $b_1 = 2$ или $b_1 = 32$, 24) $q = 3$ или $q = -3/4$, 25) $b_1 = 1/3$, 26) $S_4 = 80$, 27) $b_1 = 2$, $q = 3$, 28) $b_1 = 10$, $q = 2$ или $b_1 = 40$, $q = 1/2$, 29) $S_n = \frac{b\sqrt[n-1]{b} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{b} - \sqrt[n-1]{a}}$, 30) $b_1 = 1$, $q = 5$ или $b_1 = 25$, $q = 1/5$, 31) $b_1 = 2$, $q = 2$ или $b_1 = 8$, $q = 1/2$, 32) $b_1 = 1$, $q = 3$, 33) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 6$, 34) $b_2 = 6$. **49.** $S_n = \frac{b_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. **50.** $q = 2$. **51.** Указание. $\frac{a_1+a_3}{2} > \sqrt{a_1 a_3}$. **52.** $b_5 = 243$ или $b_5 = -243$. **53.** 18 446 744 073 709 551 615 зерен, т.е. 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда (биллиона) 709 миллионов 551 тысяча 615. **54.** 1) Не всегда, например $\{2^n + 2^n\}$ и $\{2^n + 3^n\}$, 2) Не всегда, например $\{2^n - 2^{n-1}\}$ и $\{3^n - 2^n\}$, 3) Да, 4) Да, 5) Да. **55.** $a_1 = a_2 = a_3 \geqslant 0$. **57.** 1) Нет, 2) Могут, например $b_1 = 18$, $q = 2/3$, $b_2 = 8$, $b_3 = 64/27$, 3) Могут: $q = \sqrt[2n-2m]{\frac{6}{4,5^2}}$, 4) Нет. **58.** Могут: $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **59.** $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. **60.** 1) $x = -1$, 2) $\left\{\pm\sqrt{(-1)^{m+1}\pi/6 + \pi m}, m \in N\right\}$. **61.** $x = y = z = 2$. **62.** 1) $\{\pi k; \pi/12 + \pi k; 5\pi/12 + \pi k, k \in z\}$, 2) $x = \log_2 5$. **63.** Неизвестные являются членами геометрической прогрессии с $x_1 = 8$ и $q = \frac{1}{2}$. **64.** 1) $\frac{2((10^{n+1}-10)-9n)}{9}$, 2) $\frac{7((10^{n+1}-10)-9n)}{9}$. **65.** $\underbrace{66\ldots67}_{(n-1)\text{цифра}}$. **69.** $a = 2$, $b = 32$.

ГЛАВА 2

§ 2.1

1. $a = 9/4$, $x = 7/3$, $y = 1/31$. **2.** $a = -12$, $b = 36$; $a = -12$, $b \neq 36$. **3.** $x = 3$, $y = 2$; $x = -5$, $y = 2$. **4.** $x_1 = 3/2$, $y_1 = 11/2$; $x_2 = 1/2$, $y_2 = 11/2$. **5.** $x = 44/7$, $y = -39/7$. **6.** $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$; $x_3 = -3$, $y_3 = -1$; $x_4 = -1$,

$y_4 = -3$. **7.** $x + y = 1$, $x, y \leqslant 0$; $x + y = -1$, $x, y \leqslant 0$. **8.** $x = -2t$, $y = t$, $z = t$, $\forall t \in R$. **9.** $((a-c)(b-c))^{-1} = x$, $y = ((a-b)(b-c))$. **10.** $\{1, 2, 1\} \cup \{1, -1, 2\}$. **11.** $\left(1/\sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{2}{\sqrt{9}}\right)$. **12.** $\{-3, -1\} \cup \{-1, 2\} \cup \{3, 1\}$. **13.** $\{3, -2, 1\} \cup \{-2, 3, 1\} \cup \left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}, -1\right\} \cup \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, -1\right\}$. **14.** $\{3, 1, -2\} \cup \{-5, -3, 0\}$. **15.** $\{3, 5, -1\} \cup \{-3, -5, 1\}$. **16.** $\{2, -1, 3\} \cup \{-2, 1, -3\} \cup \{-7/\sqrt{13}, 5/\sqrt{13}, -11/\sqrt{13}\} \cup \{7/\sqrt{13}, -5/\sqrt{13}, 11/\sqrt{13}\}$. **17.** $\{-4, -3, 1\} \cup \{4, 3, -1\}$. **18.** $\{1/2, 1/3, 1/4\}$. **19.** $\{-1, 1, 0\} \cup \{1, -1, 0\}$. **20.** $\{3, 3, 3\}$. **21.** $\{2, -1\} \cup \{-1, 2\} \cup \{-2, 1\} \cup \{1, -2\}$. **22.** $\{7 + 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\} \cup \{2 + \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}\} \cup \{7 - 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\} \cup 2 + \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3}\} \cup \{7 + 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\} \cup \{7 - 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\} \cup \{2 - \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}\} \cup \{2 - \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3}\}$. **23.** $\{2, -2\}$. **24.** $\{3, -2, 6\}$. **25.** $\{16, 1\}, \{1, 16\}$. **26.** $\{1, 1\}$. **27.** $\{-4, 5, 3\}$. **28.** $\{4, 9\} \cup \{9, 4\}$. **29.** $\{49, 49\}$. **30.** $\{2, 3\} \cup \{13/3, -5/3\}$. **31.** $\{5, 4\} \cup \{-9, 25\}$. **32.** $\{5, 4\}$. **33.** $\{4, -4\} \cup \{-4, 8\}$. **34.** $\{64, 1\}, \{1, 64\}$. **35.** $\{1, 7\}, \{49/64, 41/8\}, \{7, -8\}$. **36.** $\{\sqrt{10}, \sqrt{6}\} \cup \{\sqrt{10}, -\sqrt{6}\}$. **37.** $\{4, 1\} \cup \{121/64, 169/64\}$. **38.** $\{1, 2\} \cup \{-1, -2\}$. **39.** $\{1,0\}$. **40.** $\{6,10\}, \{10,6\}$. **41.** $\{2, -1\} \cup \{-1, 2\} \cup \{-2, 1\} \cup \{1, -2\}$. **42.** $\{1,-2,3\} \cup \{1,-3,2\} \cup \{2,-1,3\} \cup \{2,-3,1\} \cup \{3,-1,2\} \cup \{3,-2,1\}$. **43.** $\{3,1\} \cup \{1,3\} \cup \{-1,-3\} \cup \{-3,-1\}$. **44.** $\{-2,3\} \cup \{3,-2\}$. **45.** $\{1,2\} \cup \{2,1\}$. **46.** $\{2,1\} \cup \{-2,-1\}$. **47.** $\{2,1\}$. **48.** $\{1,2\}$. **49.** $\{\varnothing\}$. **50.** $\{6,9\} \cup \{9,6\}$. **51.** $\{4,4,-4\}$. **52.** $\{0,0\} \cup (x, y) \in \{2,4\} \cup \{4,2\}$. **53.** $\{2,3\} \cup \{-2,-3\} \cup \{2,-3\} \cup \{-2,3\}$. **54.** $\{0,0\}$. **55.** $\{26, 10\} \cup \{650, -646\}$. **56.** $\{25/3, 16/3\}$. **57.** $\{5,4,5\}$. **58.** $\{4,4\} \cup \{4,5\,3,5\}$. **59.** $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4\} \cup \{-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4\}$. **60.** $\{5,3\} \cup \{5,4\}$. **61.** $\{\pm 8\sqrt{26}/13, \pm 27\sqrt{26}/13\}$. **62.** $\left\{\pm \sqrt[n]{\frac{a}{n+\sqrt[3]{abc}}}, \pm \sqrt[n]{\frac{b}{n+\sqrt[3]{abc}}}, \pm \sqrt[n]{\frac{c}{n+\sqrt[3]{abc}}}\right\}$. **63.** $\left\{\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a}, \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{b}, \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{c}\right\}$. **64.** $\{(a+b)/(ab+1), (a-b)/(1-ab)\} \cup \{(1+ab)/(a+b), (1-ab)/(a-b)\}$. **65.** $-\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{12}$. **66.** Если $b < 1$, то решений нет; если $b \geqslant 1$, то $\left\{\pm\sqrt{\frac{a}{4b}(1+\sqrt{5})(b^2+1)}, \pm\sqrt{\frac{a}{4b}(1+\sqrt{5})(b^2-1)}\right\}$. **67.** $\{1/4, 1/5\}$. **68.** $\{4, 12\}$. **69.** $\{3,2\} \cup \{45/2, -135/4\}$. **70.** $\{1/4, -2/3, 3/2\}$. **71.** $x_{1,2} = w_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+1}$, $y_{1,2} = z_{1,2} = -a$; $x_{3,4} = w_{3,4} = 0$, $y_{3,4} = z_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2+1}$. **72.** $\{(-1 \pm \sqrt{5})/2, (3 \pm \sqrt{5})/2\} \cup \{(3 \pm \sqrt{5})/2, (1 \mp \sqrt{5})/2\}$. **73.** $\{2, -1/2, 5/2\}$. **74.** $a = 5/2$.

§ 2.2

1. $x = 2$. **2.** $x = 2$. **3.** $x = 2$, $x = -7$. **4.** $x = 1$, $x = -1/3$. **5.** $x = 5$. **6.** $x = 1$. **7.** $z = -4/3$. **8.** $x = 0$. **9.** $x = (4b - a)/3$, $y = (4a - b)/3$, если $a = 0$, то $x \in \varnothing$. **10.** $x = 16$. **11.** $x = 1$. **12.** $x = 3$. **13.** $x = 63/5$, $x = -17/5$. **14.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **15.** $x = 5$. **16.** $x = 3$. **17.** $x = 2$. **18.** $x = y = 2$. **19.** $x = 2/3$, $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **20.** $\frac{25}{16}$. **21.** $1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **22.** 11. **23.** 3. **24.** 0; 2. **25.** ± 2. **26.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$. **27.** $\frac{5}{3}, \frac{5}{4}$. **28.** $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$. **29.** $x = \frac{(2+\sqrt{3})^n + 1}{(2+\sqrt{3})^n - 1}$; $x = \frac{(2-\sqrt{3})^n + 1}{(2-\sqrt{3})^n - 1}$. **30.** $x = \frac{1}{9}\left(1 + \sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}} - 3}\right)^2$. **31.** 3. **32.** $x = 1$; $x = \frac{7+\sqrt{33}}{2}$. **33.** $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{65} - 7\right)} - 1\right)$. **34.** $x = 2$. **35.** Если $a \leqslant 2$, то $x \in \varnothing$; $a \geqslant 2$, то $x = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2}$. **36.** Если $a > 2$, то $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2-1}}$; если $a < 2$, то $x \in \varnothing$; если $a = 2$, то $x = 0$. **37.** $x = \pm\sqrt[8]{2a^2/(4-a^2)}$, если $2 \leqslant a^2 < 4$, $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} x$. **38.** $x = \frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$, $a \geqslant -\frac{1}{4}$. **39.** Если $b(b-2a)(b-a) \geqslant 0$, то $x = \frac{b^2}{2(b-a)}$. **40.** $x = \frac{a^2}{4}\left(1+\sqrt{4\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^4}}-3}\right)^2$. **41.** $x = a - \frac{1}{4}abc\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2$, если $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$. **42.** Если $a < 1$, то $x \in \varnothing$; если $a \geqslant 1$, то $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. **43.** $x = 0$; если $\sqrt{2}-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}+1$, то $x = 0 \cup x = \frac{4a(1-a^2)}{(a^2+1)^2}$. **44.** Если $a \leqslant 1$, то $x = \frac{a+1}{2}$, $a > 1$, $x \in \varnothing$. **45.** $x \in [0, 5]$. **46.** $-1 \leqslant x < 8$. **47.** $-1 \leqslant x < 0$. **48.** $-3/4 < x < 1$. **49.** $\frac{24-5\sqrt{5}}{11}a < x < \frac{24+5\sqrt{5}}{11}a$ при $a = 2$. **50.** $x \leqslant 0 \cup \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. **51.** $x \geqslant 2$. **52.** $\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2} < x < a+1$. **53.** $-8 \leqslant x < 8$. **54.** $\left(\frac{7-\sqrt{7}}{2}; 5\right]$. **55.** Если $a \geqslant 4$, $x \in \varnothing$; если $2 < a < 4$, то $-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$; если $a = 2$, то $-2 < x < 2$; если $0 < a < 2$, то $-a \leqslant x \leqslant a$. **56.** Если $a \geqslant 0$, то $a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 2a$; если $a < 0$, то $\frac{a(2+\sqrt{2})}{2} \leqslant x \leqslant 0$. **57.** Если $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то $\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$; если $a = 1$, то $-1 < x < 0$; если $a > 1$, то $-a \leqslant x < \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$. **58.** Если $a \leqslant -1$, то $x \in \varnothing$; если $-1 < a < 1$, то $-1 \leqslant x < \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$; если $a = 1$, то $-1 \leqslant x < 1$; если $1 < a < \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x < \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2} \cup \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$; если $a = \sqrt{2}$, то $\forall x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$; если $a > \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **59.** $5\frac{2}{3} < x < \infty$. **60.** $-1 \leqslant x < -3/4$. **61.** $|x| > \sqrt{12}$. **62.** $\left[-2, \frac{2}{3}\right) \cup \left(4\frac{\sqrt{2}}{3}, 2\right]$.

§ 2.3

1. 81. **2.** $\{-\frac{1}{5}, 3\}$. **3.** $\{1, 2\}$. **4.** $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. **5.** 0. **6.** $\{1/2, -1/2\}$. **7.** $\{3, 3\cdot\log_6 2\}$. **8.** $\{2, 4, 1/3\}$. **9.** 0. **10.** $\{2, -2\}$. **11.** 4. **12.** $\forall x \in [0, 1]$. **13.** $\{-1, 2, 3, 4\}$. **14.** Если $m \leqslant 2$, то $x \in \varnothing$; если $m > 2$, то $x = \lg(a/b)/\lg\left(\left(m \pm \sqrt{m^2-4}\right)/2\right)$. **15.** $\log_{\frac{57}{37}}\left(\left(185 \pm 2\sqrt{8029}\right)/37\right)$. **16.** 3/2. **17.** $2 + 7/57/\lg 7/2$. **18.** $x = 1$. **19.** $1; (1/n)^{n/n-1}$. **20.** 0,6. **21.** 2. **22.** $\{1, 10, 10^{-3}\}$. **24.** $3, 4+\log_5 3$. **25.** $\{1, 2, 3\}$. **26.** $\log_2 3; 1$. **27.** $x = 2$. **28.** $x = 2$. **29.** $\{2\log_9 2, -2\log_9 2\}$. **30.** $\pm 1/2$, $x \geqslant 3$. **31.** 0. **32.** $\{2, 32\}$. **33.** $\varnothing$. **34.** -1. **35.** $\left\{\log_{\sqrt[13]{13}/225}\left(16\frac{1}{14}/14\frac{1}{12}\right)\right\}$. **36.** $\{1/2, -\frac{3}{2}\}$. **37.** $\{5, 1\} \cup \{5, -1\}$. **38.** $\{3, 2\}$. **39.** $\{1, 1\}$. **40.** $\{3, 3\} \cup \{5, 1\}$. **41.** $\{9, 16\}$. **42.** $\{10, 3/2\} \cup \{1/5, 75\} \cup \{15, 1\}$. **43.** $\{\sqrt{3}, 1\} \cup \{-\sqrt{3}, 1\}$. **44.** $\{\sqrt{2}, 2\} \cup \{\sqrt[3]{4}/2, -3\}$. **45.** $\{1, 4\}$. **46.** $\{8, 9\} \cup \{27\log_5^3 2, 4\log_2^2 5\}$. **47.** $\{1/2, 4\}$. **48.** $\{1/4, 1/3\}$. **49.** $\left\{\log_2^{2/3} 10/\log_2^{1/3} 7; \log_2^{2/3} 7/\log_2^{1/3} 10\right\}$. **50.** $\{4, 3\} \cup \{8, 2\}$. **51.** $|x| = 1$, $|y| = 1$. **52.** $|x| < \sqrt{3}$. **53.** $x > 0$. **54.** $x > 3$. **55.** $x > 0$. **56.** $-1 < x < 1$. **57.** $x > 2$. **58.** $(-2, -\frac{5}{4}) \cup (0, 1/3)$. **59.** $0 < x < 1/2 \cup 2 < x$. **60.** $x < 0 \cup 2 < x < 3 \cup 3 < x < 3{,}5 \cup x > 4$. **61.** $0 < x < 2$. **62.** $1/4 < x < 1 \cup 1 < x < 4$. **63.** $1/5 < x < 5$. **64.** $-1 < x < 0 \cup 0 < x < 1 \cup 1 < x < 2$. **65.** $0 < x < 16$. **66.** $-2 < x \leqslant -1 \cup -1/2 \leqslant x \leqslant 0$. **67.** $1/2 < x < 1 \cup -3 < x < -1$. **68.** $0 \leqslant x \leqslant 1 \cup x \leqslant -1$. **69.** $x \leqslant 0$, $x \geqslant \log_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} 3/2$.

§ 2.4

1. -5/4. **2.** 0,5. **3.** $\{1/100,\ 1/10,\ 10,\ 100\}$. **4.** 1/9, 3. **5.** 1/128, 2. **6.** 10. **7.** $\{9, 1/27\}$. **8.** 1. **9.** $\{9,\ 1/9\}$. **10.** $\{10, 10^{-9/2}\}$. **11.** 9. **12.** $\{3, 27^3\}$. **13.** 1/12. **14.** -100. **15.** $\{1/9,\ 9\}$. **16.** 0. **17.** 2. **18.** $\{5,\ 1/625\}$. **19.** $\sqrt{3}$. **21.** $\{1/9,\ 9\}$. **22.** 100. **23.** 16. **24.** $\{4, \sqrt[3]{4}/2\}$. **25.** $\{11,\ 1{,}1\}$. **26.** $\{0, 1, 100, \sqrt{10}\}$. **27.** $\{8,\ 9\}$. **28.** 1023. **29.** $\{1, 4\}$. **30.** 3. **31.** $\{1/2, 1/8\}$. **32.** 3. **33.** 7. **34.** $\left\{\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{9-\sqrt{29}}{2}\right\}$. **35.** $x = 0$. $x_2 = 4$, $x = \sqrt{2}/2$. **36.** $x = 1/49$. **37.** $x = 1/a^2$. **38.** $\{a\}$, $\{\frac{1}{a}\}$, $\{a^2\}$. **39.** $\{2, \frac{1}{4}\}$. **40.** 32. **41.** $\{1, 60\}$. **42.** $\{1, \sqrt{3}/8\}$. **43.** $2\pi n$. **44.** 1/4. **45.** $\{1\}$. **46.** $\{9,\ 1/9\}$. **47.** $3, \sqrt{3/2}$. **48.** $\{9,\ 1/9\}$. **49.** $\{\sqrt{6}, \sqrt{2}\}$. **50.** 20. **51.** $3, \sqrt{2}$. **52.** 9. **53.** $\sqrt[3]{5/9}$. **54.** $\{2 \pm \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}\}$. **55.** 3. **56.** $\left\{2^{-\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{2}}\right\}$. **57.** $\{1, a\}$. **58.** $\{1/3,\ 1/15\}$. **59.** $\left\{2, 2^{\frac{-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}}\right\}$. **60.** 2. **61.** $\frac{p-q}{2} \pm \sqrt{pq}$, $0 < q < x < p$. **62.** -1/4. **63.** $\{4, 1/2, \sqrt{2}\}$. **64.** $\left\{27, \frac{1}{9\sqrt{3}}\right\}$. **65.** $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} + k\pi$. **66.** $\pm\frac{1}{2}\arccos 2/3 + k\pi$. **67.** $\{81\}$. **68.** $\{\pi/2 + k\pi, 2k\pi\}$. **69.** $(-\infty, 7/3) \cup (3, \infty)$. **70.** (-1, 91/9). **71.** $(1, \infty)$. **72.** $(1, 1{,}04) \cup (26, \infty)$. **73.** $(1/3, 1) \cup (1, 2)$. **74.** $(0; 0{,}75) \cup (1{,}25; 2)$. **75.** (a^4, a^{-1}), если $0 < a < 1$, и (a^{-1}, a^4), если $a > 1$. **76.** $(0, 0{,}5) \cup (2, 3)$. **77.** $(0, 0{,}5) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$. **78.** (4. 10). **79.** $(1, 3) \cup (3^9, \infty)$. **80.** $(5, \infty)$. **81.** $(1, 2) \cup (3, \infty)$. **82.** $(0, \sqrt{5}/5) \cup (1, 3)$. **83.** $(3, \infty)$. **84.** $(\log_4 13, 2]$. **85.** $(\log_9 7, 1) \cup (1, \infty)$. **86.** $\{-5, 1\}$. **87.** [0,5, 1). **88.** (-3, -1). **89.** Если $0 < p < 1$, то $(p, 1) \cup (1/p, \infty)$; если $p > 1$, то $(p^{-1}, 1)$. **90.** $(2, \infty)$. **91.** $(0, 1) \cup \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 2\right)$. **92.** $\left(-\infty, \frac{\sqrt{17}+1}{4}\right]$. **93.** $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$. **94.** $(-1, 0), (1, \infty)$. **95.** $(0, 1) \cup [4/3, 4)$. **96.** $(0, a^2) \cup (1, \infty)$. **97.** $\left(0, 3^{\frac{2}{\log_3 7 - \log_7 3}}\right)$. **98.** $(0, a) \cup (a^{-4}, \infty)$. **99.** (0, 3). **100.** $0 \leqslant x < 1$. **101.** Если $a < 0$, то $1 < x < (1 - \sqrt{1-4a})/2$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $0 < a \leqslant 1/4$, то $a < x < (1 - \sqrt{1-4a})/2 \cup (1 + \sqrt{1-4a})/2 < x < 1$; если $\frac{1}{4} < a < 1$, то $a < x < 1$; если $a \geqslant 1$, то $x \in \varnothing$. **102.** Если $a > 1$, то $x > a^3$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^3$. **103.** Если $p \leqslant -2 \cup p = 0$, то $x \in \varnothing$; если $-2 < p < 0$, то $1 - \sqrt{-2p} \leqslant x < p + 1$; если $p > 0$, то $x < p/2$. **104.** $0 < x < \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \cup 4 < x < 4\sqrt{2}$. **105.** $\log_3 5 < x \leqslant 2$. **106.** $x > 3$. **107.** $x \leqslant (-1 - \sqrt{45})/2 \cup 2 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{45}-1}{2}$. **108.** $0 < x \leqslant 1/8 \cup 1 \leqslant x \leqslant 2$. **109.** $-1 \leqslant x \leqslant 0$. **110.** 1. **111.** $a^{\frac{-11\pm\sqrt{41}}{10}}$. **112.** $10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}$. **113.** $1/2 < x < 1$. **114.** $\{4\}$. **115.** 8. **116.** $\{5, \sqrt[5]{5}\}$. **117.** Если $a > 1$, то $x = a^{a^2}$, $x = a^{a^{-2}}$; если $a \in (0, 1)$, то $x \in \varnothing$. **118.** 3. **119.** $\left\{2^{\sqrt{2}}, 2^{-\sqrt{2}}\right\}$. **120.** $\{8\}$. **121.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **122.** $\{5\}$. **123.** $\sqrt{2}$. **124.** 5. **125.** $(-1)\pi/8 + \pi k$, $(-1)^n\frac{3\pi}{8} + \pi n$. **126.** 2^{12}. **127.** $\{2 - \sqrt{2}\}$. **128.** {-3, -8}. **129.** {15,1}. **130.** 3, 9. **131.** {2/9, 1/9}. **132.** $(-a^3, -1/a) \cup (-1/a, -a^3)$. **133.** $\{8, 2\} \cup \{1/2, 1/8\}$. **134.** $\{3, 9\}, \{1/9, 1/3\}$. **135.** $\{1/2.\ 1/4\}$, $\{1/8,\ 64\}$. **136.** $\{\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$, $\{2, 1\}$. **137.** $\{9, 27\} \cup \{1/9, 1/3\}$. **138.** {3,2}. **139.** {1. 2}. **140.** {5,5, 2,5}. **141.** {16, 4}. **142.** $\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$. **143.** $\{2, 3\} \cup \{c, 1\}\ \forall c \in (1, 3)$. **144.** $\{10^{-1}, 10^{-4}\} \cup \{10^{-4}, 10^{-1}\}$. **145.** $\{3/2,\ 1/2\}$, $\{1/2, 3/2\}$. **146.** $\{9, 3, \sqrt{3}\} \cup \{9, 1/3, 1/\sqrt{3}\} \cup \{1/9, 1/3, \sqrt{3}\} \cup \{1/9, 3, 1/\sqrt{3}\}$. **147.** $\{2/\sqrt{21}, 2/\sqrt{35}, 2/\sqrt{15}\}$. **148.** $\{k\pi, 1/k\pi\}$, $k \in N$. **149.** {1, 2}.

150. $\{0,1\} \cup \{1,1\} \cup \left\{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$. **151.** $\{(5+\sqrt{5})/2, (5-\sqrt{5})/2\}$.

§ 2.5

1. 2/3. **2.** 3/2. **3.** -7, 2. **4.** 3. **5.** 1,2. **6.** 2/9. **7.** -3. **8.** 3/4. **9.** 3. **10.** $\frac{1}{10}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. **13.** $\frac{3}{2}$. **14.** 1,2. **15.** a^2. **16.** 8. **17.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **18.** -24. **19.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **20.** 0,4. **21.** $\frac{8}{3}$. **22.** -1/2. **23.** 5. **24.** -1. **25.** 25/6. **26.** Если $n = 1$, то 0, если $n = 2$, то 4,9. **27.** $-\sin a$. **28.** 1/4. **29.** 1/2. **30.** 5. **31.** 2. **32.** $(-1)^{m-n}_{m/n}$. **33.** $\frac{1}{2}$. **34.** $\frac{1}{2}$. **35.** 4. **36.** $\frac{1}{p}$. **37.** $\frac{1}{2}$. **38.** $\cos a$. **39.** $-\sin a$. **40.** 1. **41.** 1. **42.** e^{-2}. **43.** $\frac{3}{2}$. **44.** 5^{-5}. **45.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$, $|x| \neq 1$. **46.** $x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}(p-(q+1)x-(p+q-1)x^2)/(1+x)^2$, $x/ne1$. **47.** $(1+2x^2)/\sqrt{1+x^2}$. **48.** $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. **49.** $-\sin 2x \cos(\cos 2x)$. **50.** $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}$. **51.** $-2xe^{-x^2}$. **52.** $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **53.** $y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$. **54.** $a^x a^{a^x}\ln^2 a + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^a x^{a^a-1}$. **55.** $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$, $x > e$. **56.** $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2)}$, $x > -1$. **57.** $e^x\left(1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})\right)$. **58.** $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$. **59.** $y = x+1$. **60.** (4, 0); (1, -27). **62.** $\pi/3$. **64.** (3, -2),(-1, 2/3). **65.** $3\pi/4$. **66.** $\pi/4$. **67.** (1/2, -15/32). **68.** $(-5, 45)$, $y = -20x - 55$, $y = -13x - 20$ и $y = 8x - 13$, $y = 8x - 13$, $y = x + 1$. **69.** $y = 4x - 13$, $y = -4x + 3$. **70.** (0, 2). **72.** $\frac{\pi}{2}$. **73.** $b^2 - 4ac = 0$. **74.** $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$. **75.** $A = \frac{1}{2e}$. **76.** $(0, \frac{4}{27})$, $(-\frac{2}{27}, 0)$. **77.** $\frac{8}{5}$. **78.** $\frac{4}{15}$. **79.** $y = 8x + 4$.

§ 2.6

1. $x < -1$, возрастает ($\nearrow$); $-1 < x < 1$, убывает ($\searrow$); $x > 1, \nearrow$. **2.** См. 1. **3.** $0 < x < 100, \nearrow$; $100 < x, \searrow$. **4.** $\nearrow$. **5.** $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right), \nearrow$; $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \searrow$. **6.** $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right), \nearrow$; $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right), \searrow$, $k \in N$. **7.** $x < 0, \searrow$; $0 < x < \frac{2}{\ln 2}, \nearrow$; $\frac{2}{\ln 2} < x, \searrow$. **8.** $0 < x < n, \nearrow$; $n < x, \searrow$. **9.** $x < -1 \cup 0 < x < 1, \searrow$; $-1 < x < 0 \cup 1 < x, \nearrow$. **10.** $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2\pi k}, e^{\frac{13\pi}{12}+2\pi k}\right), \nearrow$; $\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2\pi k}, e^{\frac{17\pi}{12}+2\pi k}\right), \searrow$; $k \in Z$. **11.** $x = e$ — точка минимума. **12.** $x = 1/e$ — точка максимума. **13.** $x = 0$ — точка минимума ($x = 2$ — точка максимума). **14.** $x_{max} = 3$. **15.** $\nearrow$, если $x \in (\mathrm{arctg}(-3/4) + 2k\pi, \mathrm{arctg}(-3/4) + (2k+1)\pi)$. **16.** $\nearrow$, если $x < -1/2$;$\searrow$, если $x > -1/2$. **17.** $\nearrow$, если $x \in -(\frac{7}{11}, 5)$;$\searrow$, если $x < 7/11 \cup x > 5$. **18.** $p > 1$. **20.** Функция четна, нули $x + \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$, $y_{min}(0) = 1$, $y_{max}(\pm 1) = \frac{3}{2}$. **21.** Функция четная, нули $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{max}(0) = 2$, $y_{min}\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$. **22.** $y_{min}(-1) = 0$, $x = -4$, точка перегиба. **23.** Функция нечетная, экстремумов нет. **24.** $y_{min}(1) = 0$, $y_{max}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$; $x = -1$ — точка перегиба. **25.** Период $T = 2\pi$, четная, нули $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $y_{min}(0) = 1$, $y_{max}(\pm\pi) = -1$, $x = \frac{\pi}{2}$ — точка перегиба. **26.** $y_{max}(-1) = -2$, $y_{min}(1) = 2$, нечетная. **27.** Функция четная относительно $x = 1$, $y_{max}(1) = e$, $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ — точка перегиба. **28.** $y_{min}(0) = 1$. **29.** Функция четная, $y_{min}(0) = 0$. **30.** Функция четная, $y_{max}(\pm 1) = 2^{\sqrt{2}}$. **31.** $x_{min} = 0$. **32.** $x_{min} = 2$, $x_{max} = -2$. **33.** $\nearrow, x \in R$.

34. $x_{\max} = -4$, $\nearrow$, если $x < -8 \cup -8 < x < -4$, $\searrow$, $-4 < x < 0 \cup 0 < x$. **35.** $\searrow x < -3 \cup -3 < x < 3$, $x > 3$. **36.** $x_{\max} = 1$.

§ 2.7

1. Если $p > 0$, то $a \in \left(p, \frac{32}{27}p^3 + p\right)$; если $p < 0$, то $a \in \left(\frac{32}{27}p^3 + p, p\right)$; если $p = 0$, то $x \in \varnothing$. **2.** Если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$; если $a < 0$, то $q \in \left(-\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1, \frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1\right)$. **3.** $\forall q \in [1/5, \infty)$. **4.** $a < -\frac{4}{15}$ и $\forall b \in R$ при $0 > a > -\frac{4}{15}$, $b \leqslant 0$. **5.** $a \neq 0$ — 6 корней, $a = 0$ — 5 корней. **6.** $\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{4}, \frac{19\sqrt{19}-28}{108}\right)$. **7.** $\left(\frac{10-7\sqrt{7}}{108}, 0\right]$. **8.** $\left[\frac{\omega}{2\pi}, \frac{\omega}{\pi}\right] \cup \left[\frac{\pi-\omega}{2\pi}, \frac{\pi-\omega}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2\pi+\omega}{2\pi}, \frac{3\pi-\omega}{\pi}\right]$, где $\omega = \arcsin\frac{1}{3}$. **9.** $[\omega/\pi, 2\omega/\pi] \cup \left[\frac{2\pi-\omega}{\pi}, \frac{2\pi+\omega}{\pi}\right) \cup \left(\frac{4\pi-2\omega}{\pi}, \frac{4\pi-\omega}{\pi}\right)$, где $\omega = \arccos\frac{1}{4}$. **10.** $a \in (-1, \operatorname{tg} 1 - 1)$. **11.** $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$. **12.** $a \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in z$. **13.** $a \in \left(1/2, \frac{12-\pi}{4\pi}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1)\right\}$, $k \in z$. **14.** $a \in (36\pi^2, 64\pi^2)$. **15.** $a = \frac{169}{4}\pi^2$. **16.** $a = 2$. **17.** $a = -1$. **18.** $x = \sqrt{b}$, $y = 0$, $a = 0$, $0 < b \leqslant 1$. **19.** $a = b = -2$. **20.** $a = 1$. **21.** $a = 0$. **22.** $a = 2$. **23.** $a = 1$. **24.** $a = \pm 1$. **25.** $a \geqslant \sqrt{2}$. **26.** $a = 0$, $x = y = \frac{3\pi}{2}$; $a = 2$, $x = y = \frac{\pi}{2}$. **27.** a — иррациональное. **28.** $a = \frac{2m}{2n+1}$, где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **29.** $-1 \leqslant p \leqslant 1$. **30.** $a \leqslant -4$, $a = 1$, $\frac{8}{3} \leqslant a < 4$, $a > 4$. **31.** $2/3$. **32.** $\frac{9\pi}{13}$; $\frac{15\pi}{13}$.

§ 2.8

1. $y_{\text{наим}} = -24$, $y_{\text{наиб}} = 4$. **2.** $y_{\text{наим}} = 17$, $y_{\text{наиб}} = 0$. **3.** $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 3$. **4.** $y_{\text{наим}} = -10/3$, $y_{\text{наиб}} = -2$. **5.** $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 1$. **6.** $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 3\sqrt{3}/8$. **7.** $y_{\text{наим}} = 0{,}8$, $y_{\text{наиб}} = 1$. **8.** $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \pi/2$. **9.** $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 2\sqrt{3}/3$. **10.** $y_{\text{наим}} = 0{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 3/4$. **11.** $y_{\text{наим}} = -\pi/4$, $y_{\text{наиб}} = \pi/4$. **12.** $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 1{,}25$. **13.** $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. **14.** $y_{\text{наим}} = -3/2$, $y_{\text{наиб}} = 7$. **15.** $y_{\text{наим}} = 3$, $y_{\text{наиб}} = -\nexists$. **16.** $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = -\nexists$. **17.** $\triangle y = 2\frac{1}{4}$. **18.** $7/16$. **19.** $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{1 + 2^{2/3}} - 1\right)\right)$. **20.** $x = 0$. **21.** $y_{\text{наим}}(1) = 0$, $y_{\text{наиб}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} - \frac{3}{2}\ln 2$. **22.** $\frac{10}{41-4\pi^2} + 1$. **23.** $y_{\text{наим}} = -4\pi - \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$, $y_{\text{наиб}} = 4\pi - \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$. **24.** $\frac{\pi}{2}$. **25.** $3\pi/4$. **26.** 3. **27.** $(\pi - 2)/4$. **28.** $9\sqrt{3}/2$. **29.** $\sqrt{3}/3$. **30.** 2. **31.** $1/2$. **32.** $-101{,}25$. **33.** $46/15$. **34.** $\left(4 - \sqrt{2}\right)/6$. **35.** $2\ln(e+1)$. **36.** $1/2\ln(e/2)$. **37.** $3\left(\sqrt[3]{9} - 1\right)/4$. **38.** $1/8$. **39.** $3\pi/8$. **40.** $3\pi/16$. **41.** $11/96$. **42.** 12. **43.** $\approx 4{,}89$. **44.** $8/3$. **45.** 1,6. **46.** ≈ 4 кв.ед.. **49.** $\frac{43}{3}$. **50.** 1. **51.** 2π; $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$. **52.** $A = \frac{2}{\ln 3}$, $B = 12\sqrt{12}/\ln^2 3$.

ГЛАВА 3

§ 3.1

33. $3/2$. **34.** $3/16$. **35.** $-85/44$. **36.** $27/(7\sqrt{130})$. **37.** $\frac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha$. **38.** $(6m^2 - 3m^4 + 1)/4$. **39.** $\sin 2\alpha = \frac{2pq}{p^2+q^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$. **40.** $\frac{q-p}{p+q}\operatorname{ctg}\alpha$. **41.** $6/25$. **42.** $\frac{3\pi}{4}$. **43.** $1/8$. **44.** $-119/120$. **45.** $11/2$. **46.** $\sqrt{2}/2$ или $3 - 2\sqrt{2}$. **47.** $m(m^2 + 1)/2$. **48.** $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. **49.** $(-1 + \sqrt{5})/4$. **50.** $(\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}})/8$. **51.** $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$, $2ab/(a^2 + b^2)$. **54.** $m^2 + m\cos\alpha = 2$.

§ 3.2

Здесь и далее $n, k \in Z$

1. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + k\pi$. **2.** $\{2\pi k, (-1)^{k+1}\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$. **3.** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **4.** $-\frac{\pi}{4} + k\pi$;
$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\pi k$. **5.** $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{2}$. **6.** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **7.** $k\pi + \pi/4$; $5\pi/12 + 2k\pi$; $\pi/12 + 2\pi k$.
8. $2\pi k, \pi/2 + 2\pi k$. **9.** $-\pi/4 + k\pi$; $\pi + 2\pi k$. **10.** $-\pi/4 + k\pi$; $\operatorname{arctg} 2/5 + k\pi$.
11. $\operatorname{arctg} 1/2 + k\pi$; $\operatorname{arctg} 7/2 + k\pi$. **12.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-3\pm\sqrt{12}}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}$. **13.** $\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3}) +$
$k\pi$. **14.** $(-1)^k\pi/8 + k\pi/2$. **15.** $k\pi/3$. **16.** $\pi/2 + k\pi$; $\pm\pi/6 + k\pi$; $\pm\frac{1}{2}\arccos(-1/3) + k\pi$.
17. $k\pi/4$. **18.** $\pi/4 - (-1)^k \arcsin(1/(2\sqrt{2})) + k\pi$; $-\pi/4 + (-1)^k \arcsin(1/(2\sqrt{2})) + k\pi$.
19. $k\pi/6$. **20.** $\pi/10 + k\pi/5$. **21.** Если $a = 2\pi k$, то $x \in R$, если $a \neq 2\pi k$, то $\pi + 2k\pi$,
$\pi + a + 2\pi k$. **22.** $2\pi k$; $\pi/2 + 2\pi k$. **23.** $\pi/2$; $5\pi/2$; $-3\pi/2$. **24.** $x \in \varnothing$. **25.** $\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$,
$k = 4, \pm 5, \ldots$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, $k = -3, \pm 4, \ldots$ **26.** $-\pi/4 + k\pi$; $\operatorname{arctg} 3/4 + k\pi$.
28. $\pi/2 + 2\pi k$; $2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k$. **29.** $\pi/8 + k\pi/4$. **30.** $\pi/2 + k\pi$; $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$. **27.** $\pi k/6$.
$180^0 k$. **32.** $2\pi k$; $2\pi k - \frac{1}{\pi}$. **33.** $\pi/4 + 2\pi k$. **34.** $\pi/2 + 2\pi k$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi$. **31.** $30^0 +$
35. $-40^0 + 60^0 k$. **36.** $-\pi/4 + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. **37.** $\pm\pi/12 + k\pi/2$. **38.** $2\pi k/15$,
$k \neq 15e$; $\pi/17 + 2k\pi/17$, $k \neq 17e + 8$. **39.** $2\operatorname{arctg} 4/5 + 2\pi k$. **40.** $\pi/7 + 2\pi k/7$,
$k \neq 7e + 3$. **41.** $k\pi$; $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$. **42.** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **43.** $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$. **44.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$.
45. $\pi k/12$. **46.** $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$. **47.** $\pi + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **48.** $\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$,
$k \geqslant 0$. **49.** $k\pi/3$. **50.** $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. **51.** $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **52.** $-20^0 + 60^0 k$. **53.** $4\pi k$.
54. $k\pi$. **55.** $-\pi/4 + k\pi$, $\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}/2)$. **56.** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$;
$\pm\frac{1}{2}\arccos(-1/3) + k\pi$. **57.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$. **58.** $k\pi/3$; $\pi/12 + k\pi/6$. **59.** $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2} + k\pi/2$;
$\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5} + k\pi/2$. **60.** $(1 \pm \sqrt{9 + 4\pi k})/2; k \geqslant 0)$. **61.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}$. **62.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} +$
$180^0 k - 35^0$; $-\operatorname{arctg} 2 - 35^0 + 180^0 k$. **63.** $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **64.** $\frac{7\pi}{12} + k\pi$.
65. $k\pi$. **66.** $(-1)^k \arcsin\sqrt{2}/10 + \pi/4 + k\pi$. **67.** πk; $k\pi \pm \operatorname{arctg} 5$. **68.** $k\pi$ при
любом a; $\pi k \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}$ при $-1 \leqslant a \leqslant 3$. **69.** $-\alpha + k\pi - \pi/4$ при $\alpha \neq \pi/4$;
$\alpha = \pi/4, x \in \varnothing$. **70.** $k\pi; k\pi/2; 2\pi k/3 - \pi/6$. **71.** $(-1)^k\pi/6 + k\pi$. **72.** $k\pi + \pi/6$;
$\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2} + k\pi$. **73.** $k\pi \pm \pi/6$. **74.** $\pi/2 + 2k\pi$. **75.** $k\pi + 3\pi/8$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \pi/2 +$
$k\pi$. **76.** $\{(1 - \sqrt{1+8k})/2 + 2k$; $\frac{3\pm\sqrt{5+8k}}{2} + 2k$, $k \geqslant 0$. **77.** $k\pi/6$. **78.** $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$.
79. $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{2k+1} + \frac{\pi n}{2}$, $k = 3, 4 \ldots$; $n = -4, -5, \ldots$. **80.** $3\pi k/12 \pm \pi/12$.
81. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} + 2\pi k$. **82.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **83.** $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi$.
84. $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$; $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\pi k}{2}$. **85.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $k\pi$. **86.** $k\pi$; $\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{8}$.
87. $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **88.** $\pi + 4\pi k$. **89.** $2\pi k$. **90.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{\pi k}{3}$. **91.** 0; $\frac{1\pm\sqrt{1+8k}}{4}$,
$k > 0$, $k \neq l(2l + 1)$; $\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$, $k \neq l(2l - 1)$, $l > 0$. **92.** $k\pi$; $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}} +$
$k\pi$. **93.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + n\pi$. **94.** $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **95.** $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi k$.
96. $\frac{\pi}{6} + k\pi$. **97.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$. **98.** $k\pi$; $-\frac{\pi}{4} + k\pi$. **99.** $\frac{(-1)^k}{2\pi}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \frac{k}{2}$.
100. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **101** $\frac{\pi}{9}\left(k + \frac{1}{12}\right)$. **102.** k; $\frac{2k+1}{4}$. **103.** $\pm\frac{\pi}{8} + k\pi$. **104.** Если
$a \leqslant -(4 + 2\sqrt{6})$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-a \pm \sqrt{a^2 + 8a - 8}/2(a - 1)\right) + k\pi$; иначе
$x \in \varnothing$. **105.** $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}$. **106.** $\pi + 2\pi k$. **107.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **108.** $\pi/6 +$
$k\pi, -\pi/2 + k\pi$. **109.** $\{\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\} \cup \{\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), -\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\}$.
110. $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{12}$. **111.** $\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\}$. **112.** $\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. **113.** $-\frac{\pi}{6}$,

$-\frac{5\pi}{6}$. **114.** Если $a < -1 \cup a > \frac{1}{3}$, то $x = \frac{2k\pi}{3}$; $x = \pi + 2\pi k$; $x = 4k\pi \pm \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3a-1}{4a}}\right)$, иначе $x = \frac{2}{3}k\pi$, $x = \pi + 2\pi k$. **115.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$. 32.116; $k\pi$, $2\pi k \pm \arccos\frac{\sqrt{5}-3}{6}$; $2\pi k \pm \arccos\left(-3-\sqrt{5}\right)/6$. **117.** $k\pi$; $\pm\left(\frac{\pi}{3} + 2\epsilon\pi\right)$, где $\epsilon \in N \cup \{0\}$ и $\pm\left(\frac{2\pi}{3} + 2\epsilon\pi\right)$. **118.** $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}) + k\pi$. **119.** $\pm\arccos\sqrt{2}/4(1-\sqrt{5}) + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **120.** $\pm\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\right) + 2\pi k$. **121.** $-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{6}$. **122.** $\{(-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi\}$. **123.** $k\pi/3$. **124.** $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. **125.** $k\pi$; $-\pi/4 + k\pi$.

§ 3.3

1. $k\pi - \operatorname{arctg}2 < x < k\pi - \frac{\pi}{4}$. **2.** $(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{4}) \cup (k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{3})$. **3.** $\left[0, \pi - \arcsin(1-\sqrt{2})\right) \cup \left(2\pi + \arcsin(1-\sqrt{2}), 2\pi\right]$. **4.** $0 \leqslant x < \frac{7\pi}{6} \cup \frac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$. **5.** $0 < x < \frac{\pi}{2} \cup \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \pi$. **6.** $(2\pi k + \arcsin\frac{1}{8}, \frac{\pi}{6} + 2\pi k) \cup (2\pi k + \frac{5\pi}{6}, \pi + 2k\pi - \arcsin\frac{1}{8}) \cup (\pi + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k) \cup (2\pi k - \frac{\pi}{6}, 2\pi k)$. **7.** $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}$. **8.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. **9.** $\left(\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 2\pi\right)$. **10.** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \cup \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$. **11.** $(2k\pi - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}) \cup (2k\pi - \pi, 2k\pi - \frac{\pi}{2})$. **12.** $(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$. **13.** $(2\pi k + \frac{\pi}{4}, 2\pi k + \frac{3\pi}{4}) \cup (2\pi k + \pi, 2\pi k + \frac{5\pi}{4}) \cup (2\pi k - \frac{\pi}{4}, 2\pi k)$. **14.** $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$. **15.** $(\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24} + \frac{k\pi}{2})$. **16.** $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$. **17.** $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$. **18.** $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} < x < 0 \cup 0 < x < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. **19.** $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\operatorname{arctg}2 + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$. **20.** $[0 < x < \arccos\frac{1}{7}) \cup (2\pi - \arccos\frac{1}{7}, 2\pi]$. **21.** $\left(0, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. **22.** $10^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2k\pi + \frac{7\pi}{12}} \cup 10^{-2k\pi - \frac{7\pi}{12}} < x < 10^{-2k\pi + \frac{\pi}{12}}$ $(k = 1, 2, 3\ldots)$; $10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}$. **23.** $[k\pi - 7\pi/12, k\pi - \pi/2) \cup (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/12]$. **24.** $\left[\operatorname{arcctg}\frac{1+\sqrt{2a+3}}{2} + k\pi, \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{2a-3}}{2} + k\pi\right]$ при $a > 3/2$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$ при $a = \frac{3}{2}$, $x \in \varnothing$ при $a < 3/2$. **25.** $\left(2\pi k, \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(2\pi + 2\pi k - \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}, 2\pi k\right)$ при $a > 0$. **26.** $(2\pi k/5 - \pi/10, 2\pi k/5 - \pi/30) \cup (2\pi k/5 + \pi/10, 2\pi k/5 + 7\pi/30)$. **27.** $(k\pi - \pi/8, k\pi) \cup (\pi/8 + k\pi, 3\pi/8 + k\pi) \cup (\pi/2 + \pi k, 5\pi/8 + k\pi)$. **28.** $\left((12k - 7)\frac{\pi}{18}, ((12k+1)\frac{\pi}{18}\right)$. **29.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **30.** $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k - \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \pi\right) \cup \left(2\pi k + \pi, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$.

§ 3.4

10. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **13.** $\frac{4}{5}$. **14.** $2/\sqrt{5}$. **15.** $-2/\sqrt{5}$. **16.** $-3\sqrt{10}/20$. **17.** $-4/3$. **18.** $4\sqrt{2}/9$. **19.** $\pi/3$. **20.** $(5 - 2\pi)$. **27.** 0. **28.** 0. **29.** 1. **30.** $x \in \varnothing$. **31.** $x \in \varnothing$. **32.** $x \in \varnothing$. **33.** $\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. **34.** $1/\sqrt{5}$. **35.** $-1 \leqslant x < \frac{1}{3}$. **36.** $x < \operatorname{tg}1 \cup x > \operatorname{tg}3$. **37.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$. **38.** $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. **39.** $-1 \leqslant x < 0$.

§ 3.5

Здесь $n, k \in z$.

1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$. **2.** $x = \frac{1}{2}(2(k+n)\pi \pm \arccos(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}) \pm \arccos(-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}))$, $y = (n-k)\pi + \frac{1}{2}(\pm\arccos(-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}) \mp$

$\arccos\left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}\right)$. **3.** $x = 2k + 1/6$, $y = 1/6 - 2k$. **4.** $\{1/3 + k, 1/3 + n\}$. **5.** $\{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\} \cup \left\{(2 - \sqrt{14})/6, (2 + \sqrt{14})/6\right\} \cup \left\{(-2 - \sqrt{14})/6, (\sqrt{14} - 2)/6\right\} \cup \left\{(4 \pm \sqrt{2})/6, (4 \mp \sqrt{2})/6\right\}$. **6.** $\{\frac{\pi}{4} + k\pi, 2\pi k\} \cup \{(-1)^k/(12 + \frac{\pi k}{2}), 2\pi k \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\}$. **7.** $\left\{k + n + \sqrt{k^2 - n^2}, k + n - \sqrt{k^2 - n^2}\right\} \cup \left\{k + n - \sqrt{k^2 - n^2}, k + n + \sqrt{k^2 - n^2}\right\}$, $|k| > |n|$. **8.** $x_{1,2} = (5\pi \pm \sqrt{25\pi^2 - 16})/4$, $y_{1,2} = (5\pi \mp \sqrt{25\pi^2 - 16})/4$. **9.** $\{2, 1\}$. **10.** $\{1, 1\}$. **11.** $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **12.** $a = 6k - 1$, $a = 6k$, $a = 6k + 2$, $a = 6k + 3$. **13.** $\{(\pi/6 + 4\pi k), 5\pi/6 + 2\pi k\}$. **14.** $\left\{\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31} - 7}{5}, \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31} - 7}{5}\right\}$. **15.** $\{-31, -7\}$. **16.** $a \leqslant -4 \cup a = 1 \cup 8/3 \leqslant a < 4 \cup a > 4$. **17.** $\{-1, 2\} \cup \{-1, -2\}$. **18.** $b < -1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cup -\frac{1}{2} < b < 0$. **19.** Если $|a| = \sqrt{2} \cup |a| < 1$, то 4 решения; если $|a| = 1$, то — 5; если $|a| > 1$, то — 6 решений. **20.** $1/(a + b)^3$. **21.** a_2, a_1, a_3. **22.** 1. **23.** $\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. **24.** $a \leqslant 1 \cup a \geqslant 3$. **25.** $\arccos\left(2^{-1/3}\sqrt{1 + 2^{2/3}} - 1\right)$. **26.** $\frac{1}{2}$. **27.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = 2\pi n$. **28.** $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}, -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$. **29.** $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$. **30.** $\{\frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_2\pi\} \cup \{(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n\}$. **31.** $\{\pm\frac{\pi}{8}, \mp\frac{\pi}{8}\}$. **32.** $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi n + \pi\right\}$.

§ 3.6

1. $x \in \varnothing$. **2.** $x \in \varnothing$. **3.** $x = 1$. **4.** π. **5.** $k\pi \pm \arcsin\left(\lg 3/\lg(\sqrt{2} + \sqrt{3})\right)$. **6.** $(-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}} + k\pi$. **7.** $\pm\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi/10$. **8.** $10^{2k+1/4}$. **9.** $\forall x \neq \pm\sqrt{3}/3$. **10.** $k\pi + \pi/4$. **11.** $2^{2/(3+2\log_3 2)}$. **12.** 1. **13.** 1; 2. **14.** $10^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}$. **15.** $\pi + 2\pi k$. **16.** $2\pi k, k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$. **17.** $2\pi k - \frac{\pi}{2}$. **18.** $1/2$. **19.** $\log_5 \sqrt{3}$. **20.** $x_1 = -\operatorname{tg} 3/4$, $x_2 = \operatorname{tg} 1/4$, $x_3 = \operatorname{tg} 5/4$. **21.** $x_1 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{1}{6}}$, $x_2 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{13}{6}}$, $x_3 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{25}{6}}$, $x_4 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{37}{6}}$, $x_5 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{49}{6}}$, $x_6 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{5}{6}}$, $x_7 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{17}{6}}$, $x_8 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{29}{6}}$, $x_9 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{41}{6}}$, $x_{10} = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{53}{6}}$. **22.** $0 \leqslant x \leqslant 1$.

ГЛАВА 4

§ 4.1

1. 33. **2.** -33. **3.** -8. **4.** -10. **5.** $\mathbf{d} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b} + \frac{3}{5}\mathbf{c}$. **6.** -4. **7.** -2. **8.** 40. **9.** 2. **10.** 7. **11.** $\arccos(4/9)$. **12.** $\arccos(1/11)$. **13.** 13. **14.** -6. **16.** $\mathbf{d} = \{5, 12, -16\}$, $|\mathbf{d}| = 5\sqrt{17}$. **17.** 90^0. **18.** $3\pi/4$. **19.** -61. **20.** Да. **21.** $\mathbf{a} = \{1, 2, 2\}$. **22.** $\mathbf{a} = \{4, -2, 0\}$. **23.** (1,1/2,-1/2). **24.** $\mathbf{a} = \{2, -6, 2\}$. **25.** $\mathbf{b}_1 = \{4\sqrt{2}, -2, 8\}$, $\mathbf{b}_2 = \{-4\sqrt{2}, 2, -8\}$. **26.** $\mathbf{c} = \{-3, 3, 3\}$. **27.** $\mathbf{b} = \{8/3, -10/3, 13/3\}$, 3,66... **28.** $\mathbf{b} = \{9/16, 3/16, 21/16\}$. **29.** $\cos\alpha = -4/5$. **30.** $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. **31.** $-22/\sqrt{133}$. **32.** $\mathbf{x} = \{-4, -6, 12\}$. **33.** $\mathbf{x} = \{-24, 32, 30\}$. **34.** $\mathbf{x} = \{-3/2, 5/2, 3\}$. **35.** $\left((1 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}/6; (5 \mp 7\sqrt{2})\sqrt{3}/30; (10 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}/30\right)$. В этой записи всюду берутся или верхние, или нижние знаки. *Решение.* Пусть искомый вектор $\mathbf{c} = (x, y, z)$. Тогда $|\mathbf{c}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Имеем

$\cos(\widehat{ac}) = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/(|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|) = (x+y+2z)/\sqrt{6} = 1/\sqrt{2} \Rightarrow x+y+z = \sqrt{3}$. Так как вектор $\mathbf{c}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то вектор $\mathbf{c}$ можно разложить по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b} \Rightarrow x = k - l$, $y = k + 3l$, $z = 2k + l$. Исключая из последних соотношений k и l, получаем $5x + 3y - 4z = 0$. Итак, следует совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 5x + 3y - 4z = 0, \\ x + y + 2z = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$x = 5z - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 7z. \tag{1}$$

Подставляя значения x и y в первое уравнение, после преобразований получаем $150z^2 - 100\sqrt{3}z + 49 = 0$, откуда

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{5\sqrt{6}} = \frac{(10 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}}{30}. \tag{2}$$

Подставляя эти значения для z в соотношения (1), имеем по два значения для x и y:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{(1 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}}{6},$$
$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mp \frac{7}{5\sqrt{6}} = \frac{(5 \mp 7\sqrt{2})\sqrt{3}}{30}. \tag{3}$$

Отметим, что в записи соотношений (2) и (3) верхнему знаку z соответствует верхний знак x и y, а нижнему — нижний. **36.** 0. **37.** $\arccos(4/9)$. **38.** $3\sqrt{34}/2$. **39.** $\pi - \arccos(4/9)$, $\mathbf{a} = 2\overrightarrow{AB} = (4, -2, 4)$. **40.** $D(-1, 1, 1)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = 2\pi/3$. **41.** $\cos\mathbf{A} = (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)/\sqrt{9 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}$, $\cos\mathbf{B} = (1 - \sqrt{2})/\sqrt{6}$, $m = 2\sqrt{9 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}$, $\cos\mathbf{C} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{18+4\sqrt{6}-4\sqrt{3}}}$. **42.** $B\big((2\sqrt{3} - 1)/3, (7 - 2\sqrt{3})/3, (7 + \sqrt{3})/3\big)$; $C\big(-(3 + 2\sqrt{3})/9, (21 + 2\sqrt{3})/9, (21 - \sqrt{3})/9\big)$ или $B\big(-(1+2\sqrt{3})/3, (7+2\sqrt{3})/3, (7-\sqrt{3})/3\big)$; $C\big((2\sqrt{3}-3)/9, (21-2\sqrt{3})/9, (21+\sqrt{3})/9\big)$. **43.** $\alpha = 1 = \lambda$. **44.** $(a^2 + 3b^2 - c^2)/4$. Решение. Известно, что $\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})/2$. Поэтому $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CA}/2 = (\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})/2 = \left(b^2 + ab\cos(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})\right)/2$. Для отыскания $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$ используем теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$, откуда $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$. Следовательно, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(b^2 + (a^2 + b^2 - c^2)/2\right)/2 = (a^2 + 3b^2 - c^2)/4$. **45.** Доказательство. Допустим, что сумма векторов, соединяющих центр правильного n-угольника (в частности, треугольника) с его вершинами, есть некоторый вектор $\mathbf{x}$. Повернем n-угольник вокруг его центра на угол $2\pi/n$. При этом фигура и все рассматриваемые на ней векторы, в том числе и вектор $\mathbf{x}$, повернутся на угол $2\pi/n$. Пусть

$\mathbf{x}$ занял положение $\mathbf{x}^*$. Но при повороте на угол $2\pi/n$ рассматриваемый n-угольник совместится с первоначальным, и, следовательно, все векторы, идущие от центра к вершинам, в совокупности останутся прежними, а значит, и сумма их, т.е. вектор $\mathbf{x}$, будет неизменной. Но два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$, повернутые друг по отношению к другу на угол $2\pi/n$, могут совпадать лишь в случае, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = \mathbf{o}$. **46.** $\overline{AB} + \overline{CE} = -(\overline{CD} + 2\overline{CQ})$. **47.** $\pi/3$. Решение. Обозначим $\left(\widehat{\mathbf{ab}}\right)$. Тогда $0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) = 5 + 10\cos\alpha - 4\cos\alpha - 8 = 6\cos\alpha - 3$. В этом случае $\cos\alpha = 1/2$, $\alpha = \pi/3$.

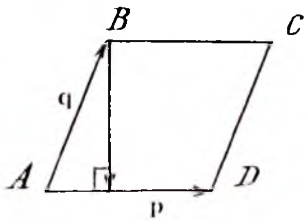

Рис. 7

48. $(a^2 + 3b^2 - c^2)/2$. **49.** $(3a^2 + b^2 - c^2)/2$. **50.** $\pm\left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{pq}}{p^2}\mathbf{p}\right)$. Решение. Для определенности будем считать вектор, совпадающий с высотой, направленным от вершины к стороне $\mathbf{p}$. Тогда (рис. 7) $\overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE}$ (если угол $\widehat{BAD}$ тупой, то точка E лежит вне отрезка AD). Вектор $\overline{AE}$ коллинеарен вектору $\mathbf{p}$. Следовательно, $\overline{AE} = k\mathbf{p}$ (знак k определяет положение точки E). $\overline{BA} = -\mathbf{q}$. Тогда скалярное произведение векторов $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$ равно нулю, т.е. $0 = \overline{BE} \cdot \overline{AD} = (-\mathbf{q} + k\mathbf{p})\mathbf{p} = -\mathbf{pq} - k\mathbf{p}^2$. Отсюда $k = \mathbf{pq}/p^2$, и, следовательно, $\overline{BE} = -\mathbf{q} + \frac{\mathbf{pq}}{p^2}\mathbf{p}$. Если бы мы рассматривали вектор $\overline{EB}$, знаки были бы противоположные. **51.** $3(a^2 + b^2 - c^2)/2$. **52.** 0. **53.** $\lambda = -1/5$. **54.** $\overline{AC} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b})/3$. **55.** $\overline{NP} = \frac{3}{4}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AF}$. **56.** $\cos\alpha = -1/\sqrt{10}$. **57.** 0. **59.** c^2. **60.** 0. **62.** $AC = 1/\cos\alpha$, $AA_1 = 2\sin\alpha$, $CA_1 = \cos 2\alpha/\cos\alpha$. Решение. Из условия задачи следует две возможности расположения точки A: на положительной или на отрицательной полуоси ординат. Для определенности остановимся на случае, когда точка A расположена на отрицательной полуоси ординат (рис. 8).

Другое расположение симметрично относительно оси Ox, и поэтому длины сторон треугольника ACA_1 в обоих случаях одинаковы. Найдем координаты точек A и $A_1(x, y)$. Из треугольника AOC, учитывая, что $OC = 1$ и $\widehat{OCA} = \alpha$, получаем $OA = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, $A(-\operatorname{tg}\alpha, 0)$. Длина $AC = 1/\cos\alpha$. Достраиваем треугольник OAC до прямоугольника. В нем $AB = 1$, $\widehat{ABO} = \alpha$. Тогда $AK = \sin\alpha$. Длина $AA_1 = 2\sin\alpha$. Точка A_1 лежит в четвертом квадранте, так как $\alpha > \pi/4$. Таким образом,

$$x = \text{пр}_{ox}\overline{OA_1} = AA_1 \sin\alpha = 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

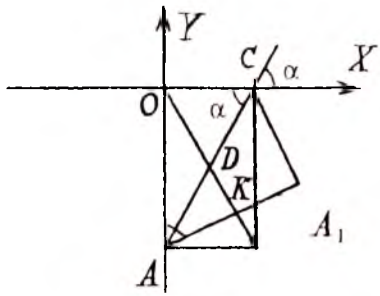

Рис. 8

$$y = \text{пр}_{oy}\overline{OA_1} = \text{пр}_{oy}(\overline{OA} + \overline{AA_1}) = \operatorname{tg}\alpha + AA_1\cos\alpha =$$
$$-\operatorname{tg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha.$$

Итак, точка $A_1(1 - \cos 2\alpha, \operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha)$. Отсюда $|CA_1| = \sqrt{\cos^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2 2\alpha} = |\cos 2\alpha|/\cos\alpha$. **63.** $1/\sin^2\alpha$. **64.** $29/2$. **65.** 20. **66.** $D(2,9)$, $S = 14$ или $D(7,0)$, $S = 22{,}5$. **67.** 5. **68.** $\lambda = 1/4$. **69.** $12b^2$. **70.** $\arccos(2/5)$. **71.** 4. **72.** 26. **73.** 30. **74.** 2. **75.** 10. **77.** -148. **78.** -6. **79.** 3. **80.** $y = x^2 - 4x + 7$.

§ 4.3

1. 50 см. **2.** $\pi/6$. **3.** 12 см, 16 см. **4.** 9,5 см. **5.** $\frac{a\cos(\alpha/2)}{\sin((\pi+3\alpha)/4)}$. **6.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha/2}$. **7.** 14 см. **8.** $ab\sqrt{2}/(a+b)$. **9.** 85. **10.** $7(\sqrt{7}-1)/9\sqrt{2}$. Решение. Обозначим длины сторон AB, BC, CA через c, a, b. Тогда по условию $a/R = 2$, $b/R = 3/2$, т.е. $a = 2R$, $b = 3R/2$. Вместе с тем $a = 2R\sin\hat{A}$. Следовательно, $\sin\hat{A} = 1$, т.е. угол $\hat{A}$ прямой. В прямоугольном треугольнике ABC найдем третью сторону $AB = c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - 9R^2/4} = R\sqrt{7}/2$. Биссектрисы $\beta_b = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$, $\beta_c = |CE| = \sqrt{AC^2 + AE^2}$, $AD = AC\cdot\frac{AB}{|AB|+|BC|} = \frac{bc}{a+c}$, $AE = AB\frac{AC}{|AC|+|BC|} = bc/(a+b)$.

Тогда $AD = \frac{3R\,R\sqrt{7}}{2\cdot2(2R+R\sqrt{7}/2)} = \frac{3R\sqrt{7}}{2(4+\sqrt{7})}$, $AE = \frac{2R\,R\sqrt{7}}{2\cdot2(2R+3R/2)} = \frac{2R\sqrt{7}}{14}$, $\beta_b = \sqrt{\frac{7R^2}{4} + \frac{9\cdot7R^2}{4(4+\sqrt{7})^2}} = \frac{2R\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$, $\beta_c = \sqrt{\frac{9R^2}{4} + \frac{9\cdot7R^2}{4\cdot7^2}} = \frac{3R\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. Искомое отношение $\frac{\beta_b}{\beta_c} = \frac{2R\sqrt{7}\,\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1\;3R\sqrt{2}} = \frac{14R(\sqrt{7}-1)}{(7-1)3R\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{7}-1)}{9\sqrt{2}}$. **11.** $\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)/4$. **12.** $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. **13.** $\arccos(13/14)$. **14.** 25. **15.** $2\operatorname{arctg}(1/3)$. **16.** $\arccos(1/\sqrt{10})$. **17.** 15 см, 5 см. **18.** $3\sqrt{3}$ см^2. **19.** $(9\sqrt{3}/4)$ см^2. **20.** 14 см, 8 см. **21.** 1. Решение. Пусть стороны параллелограмма a и b, меньшая диагональ d_1, а большая d_2. Тогда $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$, но по условию $d_2^2 = 3d_1^2$, поэтому $a^2 + b^2 = 2d_1^2$. По теореме косинусов $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^0 = 2d_1^2 - ab$, т.е. $ab = d_1^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 + 2ab = 4d_1^2$ или $(a+b)^2 = 4d_1^2$, т.е. $a + b = 2d_1$. Получим систему $\begin{cases} a + b = 2d_1 \\ ab = d_1^2 \end{cases}$. Ее решение $a = b = d_1$, т.е. $a/b = 1$.

22. 96 см^2. **23.** $|a-b|/2$. **24.** $l^2\sin\alpha\cos\alpha$. **25.** $0{,}5\arcsin(4/5)$, $\pi - 0{,}5\arcsin(4/5)$.

26. $2ab/|a-b|$. Решение. Пусть $AD > BC$ (рис. 9); для определенности будем считать $AD = a$, $BC = b$.

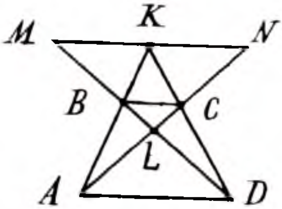

Рис. 9

Тогда $\frac{LC}{AL} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{LC}{AL+LC} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{LC}{AC} = \frac{b}{a+b}$; $\frac{KC}{KD} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{KC}{KD-KC} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow \frac{KC}{CD} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow \frac{KC}{CD} = \frac{NC}{AC} = \frac{b}{a-b}$. Перемножая пропорции $\frac{AC}{KC} = \frac{a+b}{b}$ и $\frac{NC}{AC} = \frac{b}{a-b}$, получаем $\frac{NC}{LC} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{LC+NC}{LC} = \frac{2a}{a-b} \Rightarrow \frac{LN}{LC} = \frac{2a}{a-b}$, но $\frac{LN}{LC} = \frac{MN}{BC} = \frac{2a}{a-b}$, откуда $MN = \frac{2ab}{a-b}$. Если бы было $a < b$, то при выводе их роли поменялись и мы получили бы $|MN| = \frac{2ab}{b-a}$. **27.** $\operatorname{arctg}(2/3)$. **28.** $\sqrt{5/2}$ см. **29.** $\pi/6$ и $\pi/3$. **30.** $\sqrt{7}$ м. **31.** $\sqrt{m^2+n^2}/2$. **32.** $21\sqrt{13}$ см. **33.** $\sqrt{91}$ м. **34.** $1/\sqrt{13}$. **35.** 2 и 6. **36.** $R^2\cos(\alpha/2)\,(1+\sin(\alpha/2))$. **37.** $\operatorname{tg}(\varphi/2)\sin 2\varphi$. **38.** 1 см; 12,5 см. **39.** $(\sqrt{15}+\sqrt{35})$ см. **40.** $(3-\sqrt{7})2$. **41.** $b/\,(2\cos(\alpha/2))$. **42.** $r/8$. **43.** $2\pi R/3$. **44.** $2\sqrt{Rr}$, $2R\sqrt{r/(r+R)}$, $2r/\sqrt{R/(r+R)}$. **45.** $Rr/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$, $Rr/(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2(R > r)$. **46.** $r(r+R)/R$, $r+R$. **47.** $r_1r_2/2(r_1+r_2)$. **48.** $\sqrt{3}$. **49.** В 2 раза. **50.** $2R^2\,(1-\sin(\alpha/2))^2\,/\sin\alpha$. **51.** $2Rr+r^2$. **52.** $15/8$. **53.** $\frac{2}{a+b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$, где $p = (a+b+c)/2$. **54.** $2(3+2\sqrt{3})$. **55.** $9r^2/2$. **56.** $\sqrt{S/\sin\alpha}$. **57.** $2R^2\sin^3\alpha$. **58.** $100\pi/9$ см^2. **59.** a. **60.** $3\sqrt{3}r^2$. **61.** $\sqrt{24-6\sqrt{3}/2}$. **62.** $2a\sqrt{5}$. **63.** 9 см, 12 см, 15 см. **64.** 240 см^2. **65.** 20π см. **66.** $0{,}5\arccos(3-8S)$, $(1/4 < S < 3/8)$. **67.** Пусть $0 < \beta < \alpha \leqslant \pi$. 1) $H/\,(2\sin((\alpha-\beta)/4)\sin((\alpha+\beta)/4))$ и $H^2\operatorname{ctg}((\alpha-\beta)/4)$, если основания трапеции расположены по одну сторону от центра окружности; 2) $H/\,(2\cos((\alpha-\beta)/4)\cos((\alpha+\beta)/4))$ и $H^2\operatorname{tg}((\alpha+\beta)/4)$, если основания трапеции расположены с разных сторон от центра окружности. **68.** 1 см и 17 см. **69.** $\frac{1}{8}b\frac{\sin\alpha(5-4\cos\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **70.** $k\frac{\sin\beta(5-2\sqrt{6}\cos\alpha)}{6\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **71.** 2 см, 14 см. **72.** 4 см. Решение. Так как $S_1/S_2 = 7/13$, то $(b+5)/(5+a) = \frac{7}{13}$, т.е. $7a-13b = 30$. Вместе с тем $a+b = 10$. Следовательно, $a = 8$, $b = 2$. Боковая сторона $l = \frac{a+b}{2} = 5$. Поэтому высота $H^2 = l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 25-9 = 16$, т.е. $H = 4$ см. **73.** $3\sqrt{3}$. **74.** $BB_1 = \sqrt{53}/2$, $\hat{B} = \arccos(11\sqrt{6}/30)$. **75.** $S = 216$ см^2. **76.** $20\sqrt{3}$ см^2. **77.** $AB = 2\sqrt{46}/3$. **78.** $\sqrt{10}$ см. **79.** $\sqrt{65}/2$. **80.** $P = 4ab/(a+b)$. **81.** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/7$, где α — наименьший угол треугольника. **82.** 6 м, 6/5 м^2. **83.** $\sin\alpha = (1+\sqrt{73})/12$, где α — угол при основании треугольника. **84.** 18 см, 24 см, 30 см. **85.** $\sqrt{c^2+b^2 \pm 6bc/5}$. **86.** $\arccos(4/5)$ или $\pi - \arccos(4/5)$. **87.** $EF = 9\sqrt{2/7}$ см. **88.** 6π см. **89.** $40\sqrt{2}/11$ см. **90.** 9 см. **91.** $16\sqrt{7}/11$ см^2. **92.** 20 см, 5 см. **93.** $45/2$ см^2. **94.** $8/\sqrt{3}$ см. **95.** $CA = 39$ см, $CB = 26$ см. **96.** Боковые стороны $2R(2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$, основание $2R(2+\sqrt{3})$. **97.** $OK = 5/14$ см. **98.** $8\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **99.** $R_1 - r$, $R_2 - r$, $(R_1 - r)(R_2 - r)r/(R_1R_2 - r^2)$. **100.** $1/[4(3-2\sqrt{2})]$. **101.** $2(\sqrt{2}-1)$ см. **102.** $a/2$, $a/2$. **103.** 32 см^2. **104.** 4 см. **105.** $8/\sqrt{3}$ см^2. **106.** $a/2$, $h/2$. **107.** $h = H/2$, где h и H — высоты параллелограмма и треугольника соответственно. **108.** $2a$. **109.** $3R/2$. **110.** $(a-b)^3/16(a+b)$, $a > b$. **111.** Квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, $S_{max} = 2R^2$. **112.** Квадрат со стороной 3 дм. **113.** 12 см и $3\sqrt{3}$ см. **114.** 12 см и 9 см. **115.** 9 см и 12 см. **116.** 9 см и 7,5 см. **117.** В круг радиусом $7\sqrt{2}$ см. **118.** $c/\sqrt{2}$ и $c/\sqrt{2}$.

§ 4.4

1. 7. Указание. Рассмотрите случаи, когда по разные стороны плоскости лежат или по две вершины, или одна и три вершины. **2.** Если прямые не проходят через одну точку, то покажите, что они лежат в плоскости, проходящей через три точки их пересечений. **3.** Рассмотрите тетраэдр $ABCD$ и покажите, что вершина D проектируется в точку пересечения высот $\triangle ABC$. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах. **4.** Через AB проведите плоскость, параллельную CD. Через точку A в этой плоскости проведите прямую, параллельную CD и отложите на ней отрезок AD', равный CD. Рассмотрите $\triangle D'DB$, покажите, что $|MN|$ равна длине медианы $\triangle D'BD$, и отсюда получите требуемое неравенство. **5.** Пусть l — наклонная, l_1, l_2 и l_3 — три данные прямые. Докажите, что наклонная l перпендикулярна биссектрисам углов между прямыми l_1 и l_2 и прямыми l_1 и l_3. Отсюда следует, что l перпендикулярна плоскости, в которой лежат l_1, l_2 и l_3. **6.** Достройте треугольную пирамиду до треугольной призмы с основаниями, лежащими в данных плоскостях. Докажите, что объем призмы не будет меняться при параллельном перемещении отрезков, а объем данной треугольной пирамиды равен трети объема построенной призмы. **8.** Рассмотрите сечение четырехгранного угла плоскостями, перпендикулярными линии пересечения плоскостей, проходящих через его противоположные ребра. **9.** Нет. Указание. Рассмотрите трехгранный угол, у которого два плоских угла прямые, а третий не более $\pi/3$. **10.** Докажите, что если α — плоский угол при вершине данного трехгранного угла, то величина не прилежащего к нему двугранного угла больше α. **11.** 0, 1, 3 и 6. **16.** Решение (основанное на теореме о связи площади основания и боковых граней). Пусть величина всех двугранных углов пирамиды равна α; S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней. Получаем

$$\begin{cases} S_1 = \cos\alpha(S_2 + S_3 + S_4), \\ S_2 = \cos\alpha(S_1 + S_3 + S_4), \\ S_3 = \cos\alpha(S_1 + S_2 + S_4), \\ S_4 = \cos\alpha(S_1 + S_2 + S_3). \end{cases}$$

Следовательно, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ и $\cos\alpha = 1/3$. В этом случае высоты пирамиды проектируются в центры вписанных в грани пирамиды окружностей. Отсюда легко получить, что апофемы боковых граней равны (если одна из граней принята за основание). Но тогда и стороны основания равны. Повторяя эти рассуждения для каждой грани, получаем равенство всех ребер пирамиды. **17.** Решение. Обозначим цифрами 1, 2, 3 и 4 вершины пирамиды; a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34} — длины ребер, соединяющих соответствующие вершины; R_1, R_2, R_3 и R_4 — радиусы шаров с центрами в соответствующих вершинах. Тогда решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a_{12}, \\ R_1 + R_3 = a_{13}, \\ R_1 + R_4 = a_{14}, \\ R_2 + R_3 = a_{23}, \\ R_2 + R_4 = a_{24}, \\ R_3 + R_4 = a_{34} \end{cases}$$

при условии $a_{12} + a_{34} = a_{13} + a_{24} = a_{14} + a_{23} = d$, d — данная величина. Записанная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a_{12}, \\ R_1 + R_3 = a_{13}, \\ R_1 + R_4 = a_{14}, \\ R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = d. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} R_1 = (a_{12} + a_{13} + a_{14} - d)/2 > 0, \\ R_2 = (a_{12} + d - a_{13} - a_{14})/2 > 0 \\ R_3 = (a_{13} + d - a_{12} - a_{14})/2 > 0, \\ R_4 = (a_{14} + d - a_{12} - a_{13})/2 > 0, \end{cases}$$

т.е. мы доказали, что такие шары существуют и указали их радиусы (то, что $i = 1, 2, 3, 4$, докажите, используя соотношения между длинами сторон треугольника). **18.** Проведите плоскость через высоту пирамиды и боковое ребро и рассмотрите линию пересечения этой плоскости с основанием пирамиды. **19.** Нет. Постройте соответствующий пример. **20.** Докажите, что эта величина равна $3h_0$, где h_0 — высота пирамиды. Для этого из точки P опустите перпендикуляры на стороны основания и докажите, что сумма их длин постоянна и равна высоте основания, а искомая величина равна $H_0 \operatorname{tg} \alpha$, где α — величина двугранного угла при основании пирамиды. **21.** Треугольник, квадрат, шестиугольник. **24.** Существует. Например, рассмотрите многогранник, который получится, если поставить друг на друга два равных наклонных параллелепипеда так, чтобы совместились их основания. **26.** Пусть M — данная точка, l_1 и l_2 — касательные к шару, K и N — точки касания l_1 и l_2 с шаром. Проведите плоскость через точки M, K и N и воспользуйтесь теоремой о касательных к окружности. **29.** Пусть O — центр описанного вокруг пирамиды шара. Рассмотрите четыре пирамиды, вершины которых совпадают с точкой O, а основаниями являются грани исходного тетраэдра. Докажите, что они равны между собой. Отсюда будет следовать, что точка O равноудалена от плоскостей граней, т.е. является центром вписанного в тетраэдр шара. **32.** Пусть h_k — высота пирамиды, проведенная к грани с площадью S_k. Пусть шар радиусом R_k касается внешним образом этой грани и продолжения плоскостей других граней. Докажите, что $1/R_k = 1/r - 2/h_k$. Далее воспользуйтесь равенством $h_i S_i = r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 3V$. Отсюда

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2S_1}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}\right) + \\ + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2S_2}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}\right) + \\ + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2S_3}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}\right) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2S_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}\right) = \frac{2}{r}.$$

33. Для доказательства достаточности покажите, что центр вписанной сферы совпадает с точкой пересечения перпендикуляра к основанию, восставленного из центра описанного вокруг основания круга, и плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему вершину пирамиды с любой вершиной основания, проведенной через его середину. **34.** Пусть M, N и K — точки касания сферы с гранями трехгранного угла. Рассмотрите пирамиду $SMNK$. Докажите, что $SM = SN = SK$. Отсюда следует, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Используя это, покажите, что продолжение высоты пройдет через точку O, т.е. центр данной сферы. **36.** Воспользуйтесь теоремой о равенстве длин касательных, проведенных к данной сфере из одной точки (см. задачу **26.**). **39.** Докажите, что указанный угол по величине равен двугранному углу, образованному плоскостями α и β. **40.** Пусть точки M, N, K и L — середины сторон SB, SC, AC и AB соответственно, точка O — середина SA. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — прямоугольник, а SAC и SAB — равносторонние треугольники. Далее докажите, что точка O одинаково удалена от точек M, N, K, L, S и A. Отсюда получите, что O — центр данной сферы. **41.** Рассмотрите сечения данного шара плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середины боковых ребер пирамиды. Так как круг, полученный в сечении шара основанием пирамиды, касается сторон основания в их серединах, то докажите, что в основании пирамиды лежит равносторонний треугольник. Рассмотрите прямую, проходящую через центры полученных в сечениях кругов, и докажите, что она перпендикулярна основанию. Далее покажите, что длины боковых ребер пирамиды равны между собой. **46.** Пусть 2α — величина угла при основании осевого сечения данного конуса, l — длина образующей этого усеченного конуса. Тогда $R_1 = r\operatorname{ctg}\alpha$, $R_2 = r\operatorname{tg}\alpha$, $l = R_1 + R_2$, где r — радиус вписанного шара, R_1 и R_2 — радиусы оснований данного конуса. Воспользовавшись формулой для площади боковой поверхности усеченного конуса, получаем

$$S_{\text{бок усеч кон}} = 2\pi(R_1 + R_2)l/2 = \pi r^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2.$$

Далее, так как $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2\ (0 < \alpha < \pi/2)$, то $S_{\text{бок.усеч кон}} \geqslant 4\pi r^2 = S$, где S — площадь поверхности вписанного шара.

§ 4.5

1. $2\pi/3$. *Указание.* Через точку $C \in L_1$ проведите прямую $L_2' \| L_2$, а через точку $B \in L_2$ — прямую $L_2'' \| (CD)$. Пусть B' — точка пересечения L_2' и L_2''. Рассмотрите треугольник $B'CA$. **2.** $\sqrt{m_2 - 4l_2 \sin_2(\alpha/2)}$ либо $\sqrt{m_2 - 4l\cos^2(\alpha/2)}$ в зависимости от взаимного расположения точек A и

B на прямых L_1 и L_2. **3.** 29,6. Указание. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах. **4.** 1) $(d + b\cos\pi/5)/(1+\cos\pi/5)$, если точки A, B и C лежат по одну сторону от плоскости γ; 2) $(d - b\cos\pi/5)/(1+\cos\pi/5)$, если точки A и B лежат по одну сторону от γ, а точка C — по другую сторону; 3) $b\cos\pi/5/(1+\cos\pi/5)$, если A и B лежат по разные стороны от γ. **5.** 1) $|c-d|$, если B и C лежат по одну сторону от плоскости β; 2) $b+c$, если B и C лежат по разные стороны от плоскости β. **6.** На три равные части $\sqrt{3}/3$ каждая. **7.** $3a^2/2$. **8.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg}_2\alpha + \operatorname{ctg}_2\beta}$. **9.** $\arcsin(\operatorname{tg}\alpha/2)$, $0<\alpha<\pi/2$. **10.** $2\sqrt{2b^2}\sin 2\beta\sin((2\alpha+\pi)/4)$. **11.** $b_3/\sqrt{2}$. **12.** $|BD_1| = 5\sqrt{3}$ см. **13.** $2l\sin\alpha\sqrt{2S + l^2\cos^2\alpha}$. **14.** $V = h_3(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)/2$, $S = 2h_2\sqrt{\operatorname{ctg}_2\alpha + \operatorname{ctg}_2\beta}$. **15.** $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **16.** $l_3\sin\beta\cos_2\beta\operatorname{tg}(\alpha/2)/2$. **17.** $S^{3/2}\sin\alpha\sqrt{\sqrt{3}\cos\alpha}/3$. **18.** $Q^{3/2}\sin\varphi\sqrt{\sqrt{3}\cos\varphi}$. **19.** $a^3(\sin\alpha\sin\beta\cos^2\beta)/2$. **20.** $a^3(\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta)/2$. **21.** $l^3(\sin 2\alpha\operatorname{tg}^2\beta)/4$. **22.** $c^3/32$. **23.** $\sqrt{3}(V\operatorname{ctg}\alpha)^{2/3}\sec\alpha$. **24.** $4+6\sqrt{3}$. **25.** $4p^2\sin 2\alpha/(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$. **26.** $l^3(\sin 2\alpha\cos\alpha)/4$. **27.** $7b^2/(8\cos\alpha)$, $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. **28.** $a^3\sqrt{\cos 2\alpha}/\sin\alpha$. **29.** $6\sqrt{21}$ см. **30.** $d^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta/2/2$. **31.** $a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha/2)/8$. **32.** $3d^3(\sin 2\alpha\sin\alpha)/16$. **33.** $a^2b\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta/2}$. Задача имеет решение, если $\sin\alpha > \sin\beta$. **34.** $\sqrt{2S\cos\alpha/\sqrt{3}}/\cos\alpha/2$.

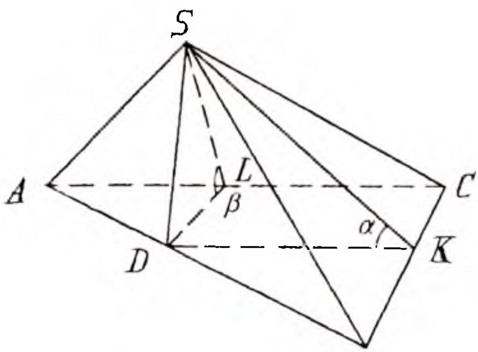

Рис. 10

35. $a^3\sqrt{3\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) - 1/24}(\alpha < 2\pi/3)$. **36.** $\operatorname{arctg}\left((1\pm\sqrt{1 = 8\operatorname{tg}^2\alpha})/2\operatorname{tg}\alpha\right)$. Задача имеет решение при $\operatorname{tg}^2\alpha \leqslant 1/8$. **37.** $125\sqrt{3}/9$ см^3. **38.** $l^3(\sin 2\alpha\cos\alpha)\sqrt{3}/8$. **39.** $d^3/\left(3\sin\alpha/2(3-4\sin^2\alpha/2)\right)$. **40.** $a^2\sqrt{3}/(27\cos\alpha)$. **41.** $32\sqrt{133}/27$ см^2. **42.** $b^2\cos^3\beta\operatorname{tg}\alpha/(6\sin\beta)$. **43.** $(12+13\sqrt{3})/2$ см^2. **44.** $c^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta/3$. **45.** $25(2+2\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{2+4\operatorname{tg}^2\alpha})8$. **46.** $S\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2S\sin\alpha}/(6\sin\alpha\cos\alpha/2)$. **47.** $a^2(1+\cos\beta)/(4\cos\beta\operatorname{tg}\alpha/2)$. **48.** $2R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\varphi$. **49.** $a^3(\cos\alpha/2)(12\sqrt{4\sin^2\alpha/2-1})$. **50.** $\sqrt{3}l^3\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha 4)^{-3/2}$. **51.** $6r^2(1+\sin\alpha/2)^2\operatorname{cosec}\alpha$. **52.** $a^3/24$. **53.** $2\cdot 3^{-1/6}\sqrt[3]{V}$. **54.** $H\sqrt{3}/8$. **55.** $\sqrt{3}(1+\cos\alpha)(3V\operatorname{ctg}\alpha)^{2/3}/\cos\alpha$. **56.** $a^3\operatorname{tg}\varphi/12$,

$a^2\sqrt{3(1+4\,\mathrm{tg}^2\varphi)}/4$. **57.** $4d^3/(9\sqrt{3}\sin\alpha\sin 2\alpha)$. **58.** $3aH/16$. **59.** $2a^2\sqrt{15}/43$. **60.** $1/7$. **61.** $\sqrt{3}a^2/48\cos\alpha$, $a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha/48$. **62.** $H^2\sin\alpha/(4\cos\alpha-2)$. **63.** $R^3\sin^3\alpha\sqrt{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha/2-1/3}$. **64.** $3\pi a^2/(1+2\cos 2\alpha)$. **65.** $b^3(\sin\alpha/2)(\sqrt{1+2\cos\alpha}/6$, $0<\alpha<2\pi/3$. **66.** $a^3(\sin\alpha/2)(\mathrm{tg}\,\beta/6)$. **67.** $\sqrt{3}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha/(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^3$. **68.** $b^3/6$. **69.** $\pi/2$. **70.** $84\sqrt{2}$ см^2. **71.** $h^3(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta)^{3/2}/(12\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$. Решение. Так как все ребра равны, то равны и их проекции на основание. Следовательно, вершина S (рис. 10) проектируется в центр D описанной вокруг треугольника ABC окружности. Треугольник прямоугольный, поэтому точка D — середина гипотенузы.

Пусть $SK\perp BC$ и $SL\perp AC$, $\widehat{SKD}=\alpha$, $\widehat{SLD}=\beta$, $DK=AC/2$, $DL=BC/2$. Тогда $H=SD=AC\cdot\mathrm{tg}\,\beta/2=BC\cdot\mathrm{tg}\,\beta/2$. Положим $AC=k\,\mathrm{tg}\,\beta$ и $BC=k\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где k — некоторый коэффициент, который далее будет найден. Тогда $H=(k\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)/2$. Искомый объем $V=\frac{H}{3}\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{k^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}{12}$. Площадь треугольника $S=(AB\cdot h)2=AC\cdot BC/2$. Из этого соотношения найдем k. Действительно, $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=k\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}$, поэтому $kh\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}=k^2\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $k=h\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}/(\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$. Тогда объем пирамиды

$$V=\frac{h^3\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}}{\mathrm{tg}^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\beta}\,\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}{12}=\frac{h^3(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta)^{3/2}}{12\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

72. $\frac{r^2}{6\sin^2(\varphi/2)}\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\sqrt{a^2\sin^2\varphi-r^2\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)}$. **73.** $\frac{2R^3\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha\cos^3(\alpha/2)}{3(1+\sin(\alpha/2))}=\frac{2}{3}R^3\,\mathrm{tg}\,\beta\sin^2\alpha\cos^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\alpha}{4}$. **74.** $b^3\,(\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta)/6$. **75.** $r\sqrt{1+\cos^4(\alpha/2)\,\mathrm{tg}^2\beta}$. **76.** $m^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}/24$ $(\pi/6\leqslant\alpha)$. **77.** Обозначим $\alpha=\arcsin\left(2S(\sqrt{2}-1)/l^2\right)$. Тогда если $\pi/4<\alpha\leqslant\pi/3$, то искомые углы $\alpha-(\pi/4)$, α, $\alpha+(\pi/4)$; если $\pi/3<\alpha<\pi/2$, то искомые углы $\alpha-(\pi/4)$, α, $\alpha+(\pi/4)$ или $(3\pi/4)-\alpha$, $\pi-\alpha$, $(5\pi/4)-\alpha$. **78.** $a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin(\alpha/2))$. Решение. Пусть $AB=CD=a$, $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\widehat{DAC}=\widehat{DBC}=\alpha$ (рис. 11). Через DC проведем плоскость, перпендикулярную стороне AB. Она пересечет эту сторону в точке k, такой, что $AK=KB$. Тогда объем пирамиды равен $\frac{1}{3}|AB|S_{CDK}$. Из прямоугольного треугольника ADK находим $DK=AK\cdot\mathrm{ctg}(\alpha/2)=a/(2\,\mathrm{tg}(\alpha/2))$. Из прямоугольного треугольника DKM находим $KM^2=KD^2-DM^2=\frac{a^2}{4\,\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2(\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2))}{4\sin^2(\alpha/2)}=\frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2(\alpha/2)}\Rightarrow KM=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$ $(0<\alpha<\pi/2)$. Тогда $S_{CDK}=\frac{1}{2}DC\cdot KM=\frac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin(\alpha/2)}$, и искомый объем пирамиды равен $a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin(\alpha/2))$ $(0<\alpha<\pi/2)$. **79.** $[3a^4-16(P^2-Q^2)]/[3a^4+16(P^2-Q^2)]$. **80.** 1) $2\sqrt{\left|\frac{p+1}{p-1}\right|\,|S_1-S_2|}$ при $p\neq 1$; 2) при $p=1$ длина гипотенузы может принимать любое значение из интервала $]0,2\sqrt{2S}[$ (при этом $S_1=S_2$). **81.** $\frac{abc}{ab+bc+ac+\sqrt{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}}$. **82.** $\frac{1}{3}\sqrt{S_0}\sqrt{1-(S_0/S)^2}\sqrt[4]{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}$, где $S=S_1+S_2+S_3$. **83.** $5\sqrt{3}/6$. **84.** 7. **85.** 32 см^3. **86.** $(a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha)/6$. **87.** $\arccos\left(\sqrt{2}\sin(\varphi/2)\right)$. **88.** $2\arccos(1/\sqrt{1-\cos\alpha})$ $(\alpha>\pi/2)$. Решение. Проведем BM и DM (рис. 12), перпендикулярно ребру SC. Тогда $\widehat{BMD}=\alpha$.

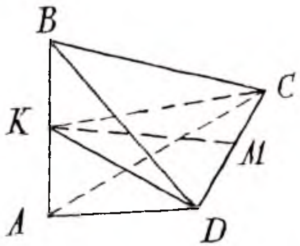

Рис. 11

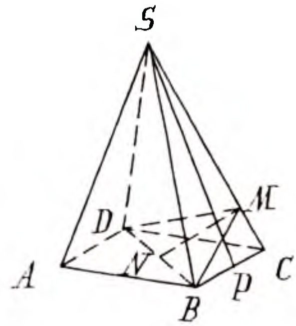

Рис. 12

Искомый угол $\widehat{BSC} = \beta$. Обозначим $BC = a$, $SB = l$; тогда $BN = a\sqrt{2}/2$. Вычислим $\sin(\beta/2)/\sin(\beta/2) = \frac{PB}{SB} = \frac{a}{2l} = \frac{BM}{l}\frac{BN}{BM}\frac{a}{2 \cdot BN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}$. Итак, $\sin(\beta/2) = \sqrt{2}\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)\sin(\alpha/2)$, откуда $\cos(\frac{\beta}{2}) = 1/\left(\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2})\right) = 1/\sqrt{1-\cos\alpha}$ $(\alpha > \pi/2)$ или $\beta = 2\arccos(1/\sqrt{1-\cos\alpha})$ $(\alpha > \pi/2)$. **89.** $l^3(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)/[3(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}]$. **90.** $h\cos\varphi/(1+\cos\varphi) = h\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}(\varphi/2)$. **91.** $a^2\sqrt{3}/6$. **92.** $-4h^3\cos^2\alpha\cos 2\alpha/3$ $(\pi/4 \leqslant \alpha < \pi/2)$; при $0 < \alpha < \pi/4$ указанная плоскость не пересекает пирамиду. **93.** $a^2\sin^2\alpha\cos(\alpha/2)/\sin^2(3\alpha/2)$. **94.** $\sqrt{2}/12$. Указание. Докажите, что точка M совпадает с центром основания пирамиды, а точка N — с центром круга, описанного около грани BSC. **95.** 26 м^2. **96.** $a^3(\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta)/3$, $a^2\sin\alpha(1+\sin\beta)/\cos\beta$. **97.** $a^3(\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta)/6$. **98.** $2R^3(\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\sin^3 2\beta)/3$. **99.** $4r^3\operatorname{ctg}^3(\frac{\alpha}{2})\sqrt{-\cos 2\alpha}/(3\cos\alpha) = 4r^3\operatorname{ctg}^3(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}/3$ $(\pi/4 < \alpha < \pi/2)$. **100.** $2h^2\frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\sqrt{2\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}$. **101.** $6(7 - 4\sqrt{3})m^2\operatorname{tg}\alpha$. **102.** $4\sqrt{3}m^2\cos\alpha\cos^2(\alpha/2)$. **103.** $10\sqrt{19}$ см^2. **104.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2/4$. **105.** $\sqrt{(S\cos\alpha)/[2(1+\sin\alpha - \cos\alpha)]}$. **106.** $m^3(\sin^2\alpha\cos\alpha)/[6\sin^6(\alpha/2)]$. **107.** $0,5h^2\operatorname{tg}\alpha/\cos\alpha$. **108.** $2\arcsin\left((\sqrt{10} - \sqrt{2})/4\right)$. **109.** $12(2 + \sqrt{3})$ см^2. **110.** $2a^2\sin\beta\sin^2(\gamma/2)/\cos\gamma$. **111.** $d\operatorname{ctg}(\alpha/2)\sin^2(\beta/2)/\cos\beta$. **112.** $384\sqrt{10}/169$ см^2. **113.** $a(1+\cos^2\alpha)/[2\sin 2\alpha]$. **114.** $(a/6)\sqrt{\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}(\alpha/2)\right)/\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}(\alpha/2)\right)}$. **115.** $H\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1\right)/4\operatorname{tg}\alpha$. **116.** $(\pi a^3\operatorname{tg}\alpha)/(9\sqrt{3})$. **117.** $l\cos^2\alpha\sqrt{3+\cos^2 2\alpha}/2\sin\alpha$. **118.** $2\pi R^3(3+\cos^2\alpha)/(3\sin^2\alpha)$. **119.** $2V(\cos(\alpha/2)\sin\alpha)/\pi$. **120.** $\operatorname{arcctg} 2$. **121.** $\pi a^3\operatorname{ctg}\beta/\left(24\sin^3(\alpha/2)\right)$, $\pi a^2(1 + \sin\beta)/\left(4\sin\beta\sin^2(\alpha/2)\right)$. **122.** $3S/2$. **123.** $\pi a^3\left(\cos(\beta/2)\operatorname{tg}\alpha\right)/\left(24\sin^3(\beta/2)\right)$, $\pi a^2\sqrt{1 + \cos^2(\beta/2)\operatorname{tg}^2\alpha}/\left(4\sin^2(\beta/2)\right)$. **124.** $R^2\sqrt{3}/(4\cos\alpha)$. **125.** $15\pi(5+2\sqrt{3})/\sqrt{37+10\sqrt{3}}$. **126.** $\sqrt{(2S/\sin 2\alpha)^3}/(8\cos^3\alpha)$. **127.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1/3}$. Решение. Пусть $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, а ASD — осевое сечение конуса. Величину угла между осью конуса и его образующей обозначим α, $0 < \alpha < \pi/2$. Длину радиуса общего основания конуса и цилиндра обозначим r. Площадь полной поверхности цилиндра

$$S_ц = 2\pi r^2 + 2\pi r r\operatorname{ctg}\alpha = 2\pi r^2(1 + \operatorname{ctg}\alpha),$$

а площадь полной поверхности конуса

$$S_к = \pi r^2 + \pi r^2/\sin\alpha = \pi r^2(1+\sin\alpha)/\sin\alpha.$$

По условию задачи $S_ц : S_к = 7:4$, т.е.

$$\frac{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{7}{4}.$$

Так как $1+\sin\alpha \neq 0$, $0<\alpha<\pi/2$, то умножением на $1+\sin\alpha$ данное уравнение приводится к уравнению $\sin\alpha + 8\cos\alpha = 7$. Далее, учитывая, что $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, $\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$, $1 = \cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2)$, преобразуем данное уравнение в уравнение вида

$$15\sin^2(\alpha/2) - 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) - \cos^2(\alpha/2) = 0.$$

Разделив данное уравнение почленно на $\cos^2\alpha/2 \neq 0$, получим уравнение

$$15\operatorname{tg}^2\alpha/2 - 2\operatorname{tg}\alpha/2 - 1 = 0,$$

которое имеет два корня: $\operatorname{tg}\alpha/2 = 1/3$ и $\operatorname{tg}\alpha/2 = -1/5$. Так как по условию задачи $\alpha > 0$, то второе решение надо отбросить. Итак, $\operatorname{tg}\alpha/2 = 1/3 \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arctg}(1/3)$. **128.** $8S\operatorname{tg}\varphi\cos^6\varphi/2\sqrt{S/\pi}$. **129.** $\operatorname{arctg}(2\pm\sqrt{2})/4$. **130.** $2\pi R^2\sin\alpha\sin\alpha/2$. **131.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{4-\sqrt{6}}\right)$. **132.** $\pi R^2(\operatorname{ctg}^2\alpha/2)(1+\cos\alpha)/\cos\alpha$, $\pi R^3(\operatorname{ctg}^3\alpha/2)(\operatorname{tg}\alpha/3)$. **133.** $24\pi R^2\sin^4\alpha/(2+\operatorname{tg}\alpha)^2$. **134.** $-r^3\pi\operatorname{tg}^2\alpha/8\cos^6\alpha$. **135.** 10 см. **136.** $\pi aS/\sin\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$. **137.** $\pi S/\sin(\pi m/(m+n))$ $(m \leqslant n)$. **138.** $h(\sqrt{1+n/m}-1)^{\frac{1}{2}}$. **139.** $\operatorname{arctg}((\sin\beta/2)\operatorname{ctg}\varphi)$. **140.** $\arcsin\left[\frac{2\sin^2\beta/2-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\right]$. Указание. Через точку B проведите в плоскости α прямую, параллельную прямой OA и вычислите угол между этой прямой и плоскостью основания другого конуса. **141.** $7\pi l^3(\sin\alpha/2)(\sin\alpha/54)$. **142.** 4 см. **143.** $2R\sqrt{1+2\cos\alpha}/\sqrt{3}$. **144.** $r(\sqrt{6}-2)/2$, $r(\sqrt{6}+2)/2$. **145.** $a(2-\sqrt{3})$, $a(2+\sqrt{3})$. **146.** $2\arccos\left((1+\sqrt{17})/8\right)$. **147.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^3\operatorname{ctg}\alpha/\frac{2}{\sin^2}\alpha/4}$. **148.** $\frac{\pi R^3}{3}\Big(\cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} - (1-\sin\frac{\alpha}{2})^2(2+\sin\frac{\alpha}{2})\Big)$. **149.** $\pi a^3\left((1+\cos\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha\right)/3$. **150.** $S\left(\frac{1\pm\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^3 \times \operatorname{tg}^2\alpha$. **151.** $2\arcsin\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ или $2\arcsin\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$. **152.** $\arccos(1/\sqrt[3]{2})$. **153.** Отношение площади поверхности шара к площади поверхности куба равно $\pi/6$, отношение их объемов равно $\pi/6$. **154.** $\frac{1}{4}S\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\frac{1+\sin\alpha/2}{\sin\alpha/2} = \frac{S(1+\sin\alpha/2)^3}{2\cos\alpha/2\sin\alpha}$. **155.** $\sin^2\alpha(1+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2})/4$. **156.** $\frac{5r}{\sqrt{3}}$. **157.** $\pi r^2\left[\frac{\left(\sqrt{r^2+(d+2)^2}+r\right)^3}{3}\right] \times (d+r)^2$, $\pi\left[r^2\left(\sqrt{r^2+(d-r)^2}+r\right)^3/3\right](d-r)^2$. **158.** $(4/3)\sin\alpha\cos\alpha/2$. **159.** $(1/\sqrt{\pi})(S\cos\alpha)^{3/2}\operatorname{tg}\alpha/(1+\cos\alpha)^{3/2}$. **160.** $\frac{\pi}{4}r^3\frac{m}{n\sin\alpha}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2m}{n\cos\alpha}}\right)$ (параметры m, n и α должны удовлетворять условию $n\cos\alpha \geqslant 2m$). **161.** $3\pi l^2\sin^2 2\beta/4$, $\pi l^3\sin^3 2\beta/12$. **162.** $S^{3/2}\sin 2\alpha\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}/(3\pi^{3/2})$. **163.** $S(\operatorname{ctg}^2\alpha/2)/(\pi\cos\alpha)$. **164.** $\pi a^3\sqrt{6}/1728$. **165.** $2h(2r-h)$. **166.** $4a^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)^2/\sin^2\alpha = 4a^2\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha/2$, $(4/3)a^3\operatorname{ctg}^2\alpha(1+\cos\alpha)^3$. **167.** $a^2/\cos^4(\alpha/2)$. **168.** $ab\operatorname{tg}\alpha\sqrt{a^2+b^2}/12$. **169.** $\pi R^2H/12$. **170.** $r^3(1+\operatorname{tg}\varphi)(1+\operatorname{ctg}((\pi-\varphi4)/4)/6$. **171.** $\pi l^2\cos\alpha/(1+3\cos^2\alpha)$. **172.** $32r^3\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\alpha/2}$. **173.** $\frac{\pi a^3}{4}\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos^3\beta}{\sqrt{\cos^3(\alpha+\beta)\cos^3(\alpha-\beta)}} =$

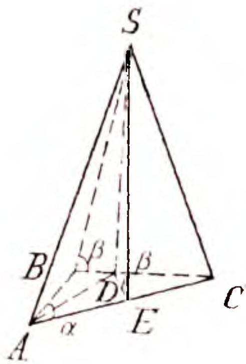

Рис. 13.

$\frac{\pi a^3}{4}\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sqrt{(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)^3}}$. **174.** $\pi d^3(\cos^2\alpha/2)(\operatorname{ctg}\alpha/2)(\operatorname{tg}\beta/8)$. **175.** $29/36$ или 1. **176.** $(1/2)\sqrt{2}$. Указание. Докажите, что сфера касается всех ребер тетраэдра в их серединах, а ее центр совпадает с центром описанной около тетраэдра сферы. **177.** $\sqrt{5}/3$. **178.** $a(3\sqrt{2}+4)/4$. **179.** При $\varphi = \operatorname{arcctg}\sqrt{2}$ объем конуса $2\pi l^3/9\sqrt{3}$. **180.** $R\sqrt{2/3}$. **181.** $S(\operatorname{tg}\alpha/2)(\operatorname{tg}\beta)\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}/3$, $\alpha = \pi/3$. Решение. Пусть в данной пирамиде $ABC = \pi/2$, $SBC\perp ABC$, $\widehat{BAC} = \alpha$ двугранные углы при сторонах AB и AC равны β, соответствующие линейные углы $\widehat{SBC} = \widehat{SED} = \beta$ (рис. 13), причем SD — высота пирамиды, $SE\perp AC$, $DE\perp AC$, $SB\perp AB$. Отметим, что $BD = SD\cdot\operatorname{ctg}\beta = DE$, $SB = SD/\sin\beta$. Легко показать, что $AB = AE$ и $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \alpha/2$. Так как $BC = AB\cdot\operatorname{tg}\alpha$, то площадь треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha},$$

откуда

$$|AB| = \sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Следовательно, высота пирамиды $SD = BD\cdot\operatorname{tg}\beta = AB(\operatorname{tg}\alpha/2)\operatorname{tg}\beta = (\operatorname{tg}\alpha/2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. Тогда объем пирамиды

$$V = S\,(\operatorname{tg}\alpha/2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha/3},$$

где по смыслу задачи на углы α и β накладываются ограничения: $0 < \alpha$, $\beta < \pi/2$. Найдем наибольшее значение функции $V(\alpha)$. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f(\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha/2)\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$, $0 < \alpha < \pi/2$. Тогда

$$f'(\alpha) = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{2\cos^2\alpha/2} - \frac{\operatorname{tg}\alpha/2}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}{4\cos^2\alpha/2\sin^2\alpha\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}.$$

На интервале $(0,\pi/2)$ производная $f'(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $\cos\alpha = 1/2$, т.е. при $\alpha = \pi/3$. Если $\alpha\in(0,\pi/3)$, то $f'(\alpha) \geqslant 0$, если же $\alpha \in$

$(\pi/3, \pi/2)$, то $f'(\alpha) < 0$. Следовательно, при $\alpha = \pi/3$ функция $f(\alpha)$, а следовательно, и $V(\alpha)$ принимает наибольшее значение. **182.** 2. **183.** $R/\sqrt{3}$. **184.** Высота цилиндра должна равняться радиусу круга основания и равняться $\sqrt[3]{V/\pi}$. **185.** $4V(\operatorname{tg}^3\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha = \arccos 1/3$. **186.** Длина радиуса основания конуса равна $2r/2$, $9\pi r^2 h/4$. **187.** 1) $(3a^2h)/(4\sqrt{a^2 3h^2})$ при $h > a/\sqrt{6}$; 2) $(a/2)\sqrt{h^2 + a^2/12}$ при $0 < h < a/\sqrt{6}$. **188.** $b^3 \operatorname{tg}\alpha \sin 2\varphi \cos 2\varphi/24$. Наибольшее значение объем пирамиды принимает при $\varphi = \operatorname{arcctg}\sqrt{2}$. **189.** 1) $2\pi R^3/(R^2 - r^2)$ при $r < R \leqslant (1+\sqrt{2})r$; 2) $R^2\left((R^2+r^2)/(R^2-r^2)\right)^2/2$ при $R > (1+\sqrt{2})r$. **190.** 1) $(H^2 \operatorname{ctg}\beta)/\sqrt{2}$ при $\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2 \leqslant \beta < \pi/2$; 2) $H^2(1+\sin^2\beta)/(4\sin^2\beta)$ при $0 < \beta < \operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)$. **191.** $\operatorname{tg}\alpha/2$. **192.** $\operatorname{tg}\alpha/2$. **193.** $\frac{4\pi a^3}{3}\frac{\cos^4\alpha/2}{\cos^2\alpha}\frac{\alpha}{2}$. **194.** $\pi a^3 \sin^2\alpha \sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\beta$. **195.** $\pi a^3 \sin 2\alpha \sec^2 2\alpha/6$. **196.** $\pi(16S^2 + 6Sh^2\operatorname{ctg}^2\alpha + h^4\operatorname{ctg}^4\alpha)/(24h)$. **197.** $\sqrt{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}(\operatorname{tg}\beta/2)/2$, $\beta = \arccos 1/3$. **198.** $\pi R^3/(3(\cos^2\alpha/2)(\sin\alpha/2))$, $\alpha = 2\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$.

ГЛАВА 5

1. $b = 7/16$. **2.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **3.** $x = 1$. **4.** 3. **5.** $(-1, 0)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$. **6.** $a = -3$; $a = 1$. **7.** $\left(k\pi, \frac{1}{k\pi}\right)$, $k = 1$. **8.** $(0, 1)$; $(1, 1)$; $\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **9.** $\left(\frac{24-5\sqrt{5}}{11}a, \frac{24+5\sqrt{5}}{11}\right)$. **10.** $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $-\frac{\pi}{2} + k\pi$. **11.** $x \geqslant 1$. **12.** $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. **13.** $b = 0$, $a \neq 0$; $b \neq 0$, $a \neq -2b$; $0 < a < 10$, $a = -2b$. **14.** $b > 0$, $a \in \left(-\sqrt[4]{\frac{128}{3}b}, -\sqrt[4]{b}\right) \cup \left(\sqrt[4]{b}, \sqrt[4]{\frac{128}{3}b}\right)$; $b < 0$ $\forall a \in R$. **15.** $a \leqslant 1 \cup a \geqslant 3$. **16.** $x = 1/4$, $y = -2/3$, $z = 3/2$. **17.** $x \leqslant \frac{-1-\sqrt{45}}{2} \cup 2 \leqslant x < \frac{-1\pm\sqrt{45}}{2}$. **18.** $x = 0$; $x \geqslant \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. **19.** $n = 2$. **20.** $x = \sqrt[3]{\frac{7}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$. **21.** $y_{\text{наим}} = y(-3) = -3$; $y_{\text{наиб}} = y(-3/2) = -3/4$. **22.** $a < 0$. **23.** $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $y = -3$; $x = 3^{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2 + (\frac{\pi}{2}+k\pi) - 6}$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 1, \pm 2, \pm 3$.

Оглавление

Издание подготовлено в $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX'е

Лицензия ЛР № 040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 15.08.96. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,69. Усл. кр.-отт. 10,86. Уч.-изд. л. 8,97. Тираж 3000 экз. Заказ 162.

Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Участок оперативной полиграфии типографии Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

Учебное издание

Константин Павлович Иванов

Сборник задач по элементарной математике для абитуриентов

Учебное пособие

Редактор *Т. Ф. Шпагина*
Художественный редактор *Е. И. Егорова*