Ҳ.Р. ШОКИРОВА

КАРРАЛИ ВА ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Х. Р. ШОКИРОВА

КАРРАЛИ ВА ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетларнинг, педагогика институтларининг, олий техника ўқув юртларининг талабалари учун ўқув қўлланма сифатида рухсат этган

Тошкент
«Ўзбекистон»
1992

Мазкур қўлланма математик анализ курсининг ўрганишга қийин, бироқ татбиқий масалалар учун муҳим аҳамият касб этадиган икки ва уч каррали интеграллар, биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар, биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллар, Грин, Стокс ва Остроградский формулалари каби бўлимлари бўйича мисол ва масалалар ечишга бағишланган. Унда зарур назарий материаллар қисқача баён этилган ёки тегишли адабиётлар кўрсатилган. Қўлланма мустақил ишлашга доир машқларни ҳам ўз ичига олади. Ҳар бир ўрганилган мисол ва масала чизма билан таъминланган.

Қўлланмадан университетлар, педагогика институтлари ҳамда олий техника ўқув юртларининг талабалари фойдаланишлари мумкин. Уни ёзишда муаллифнинг Тошкент Давлат университетининг математика факультетида математик анализдан амалий машғулотлар олиб бориш жараёнида эришган кўп йиллик тажрибаси асос бўлди.

Махсус муҳаррир — проф. Ғ. НАСРИТДИНОВ

Ш $\frac{1602070000-65}{351(04)-92}$ 92

ISBN 5-640-01-271-4

Сўз боши

Мазкур ўқув қўлланманинг яратилишига аввало муаллифнинг Тошкент Давлат университети талабаларига математик анализдан кўп йиллар давомида муттасил амалий машғулотлар олиб бориши сабаб бўлди. Қолаверса, бунга математик анализнинг қийин ўзлаштириладиган бўлимлари бўйича жумҳуриятда таниқли математикларимиз тавсияси билан ёзилган методик ишланмалар асос қилиб олинди. Асосий мақсад каррали (икки ва уч каррали), биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли ҳамда сирт интегралларининг таърифини, хоссаларини мисоллар билан мустаҳкамлаш, талабада уларни ҳисоблаш қоидалари бўйича кўникма ҳосил қилиш, Грин, Остроградский, Гаусс ва Стокс формулалари амалда қандай қўлланилишини намойиш қилиш, уларнинг геометрик, механик масалаларни ечишга татбиғини мисолларда кўрсатишдан иборат. Шу мақсад билан ёзилган ўқув қўлланма беш бобдан иборат бўлиб, ҳар бир бобда қисқача зарур назарий маълумот берилади ҳамда яна, хусусан, қайси адабиётдан фойдаланиш лозимлиги кўрсатилади. Унда жаъми 118 та мисол тўлиқ методик кўрсатмалар билан ечиб берилган бўлиб, уларга тегишли 162 та чизма чизилган. Мустақил ишлаш учун 543 та номерда 570 та мисол жавоблари билан тавсия этилган. Аслида, яратилган ўқув қўлланма математик анализнинг юқорида зикр этилган қийин мавзуларига бағишланган ҳамда ечиб берилган мисолларда баён этилган тўлиқ методик йўлланмалар билан таъминланган машқлар тўпламидир.

Ниҳоясида муаллиф ўқув қўлланманинг ёзилишида раҳнамолик қилган, қимматли маслаҳатларини аямаган ЎзФА нинг мухбир аъзоси А. С. Саъдуллаевга, физика-математика фанлари доктори, проф. А. А. Аъзамовга, проф. Ғ. Насритдиновга ҳамда доц. А. Ворисовга самимий миннатдорчилигини билдиради, шунингдек, қўлланманинг математик жиддийлиги ва тилининг равонлигига эришишда сарф этган беминнат меҳнати учун махсус муҳаррир проф. Ғ. Насритдиновга алоҳида миннатдорчилик изҳор қилади.

Муаллиф

МАХСУС МУҲАРРИРДАН

Ҳурматли китобхон! Қўлингиздаги ноёб китоб физика-математика фанлари номзоди, доцент Ҳафиза Расул қизи қаламларига мансуб ўқув қўлланмадир. Мазкур қўлланма муаллифнинг 40 йилдан ортиқроқ вақт мобайнида олиб борган юксак педагогик фаолияти самарасидан иборат. Математик анализ бўйича узоқ вақт муттасил амалий машғулотлар олиб бориши, ўз ишига фидойилик билан қараши Ҳафиза опага кўплаб «чиройлик» мисол-масалалар тўплаш ва қатор янгиларини тузиш имконини берди. Йиғилган ва тузилган мисоллар кўп марта синовдан ўтказилди, талабаларга ўргатилди. Талабаларнинг меҳр қўйган устози Ҳафиза опа шу мисолларни уларга ғоятда юқори методик савияда ўргатадилар. Шу боисдан уларга жумҳуриятимизда кўзга кўринган математикларимиздан ЎзФА нинг мухбир-аъзоси, проф. А. С. Саъдуллаев, проф. А. Аъзамов, доц. А. Ворисов ва бошқалар математик анализнинг қийин ўзлаштириладиган бўлимлари бўйича методик ишланмалар, сўнгра ўқув қўлланма ёзишни тавсия этдилар ва бу ишнинг амалга ошишида доим раҳнамолик қилиб турдилар. Ҳафиза опа эса бешта методик ишланма, ниҳоят, қўлингиздаги ўқув қўлланмани ёзиб, ўзларига билдирилган ишончни шараф билан оқладилар.

Ўқув қўлланманинг асосий мазмунини, бир томондан икки ва уч каррали, биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли ва сирт интеграллари, Грин, Остроградский, Гаусс ва Стокс формулалари ҳамда уларнинг татбиқлари бўйича ечилган 118 та мисол ташкил этса, иккинчи томондан, унда мустақил ечиш учун жавоблари билан тавсия этилган 543 та номерда берилган 570 та мисол ташкил этади. Тавсия этилган мисолларнинг ҳаммаси ечиб берилса, мазкур қўлланмадан беш баравар катта китоб бўлур эди. Муаллифда эса, бу мисоллар ечилиб, алоҳида дафтарга ёзиб қўйилган. Қанчалик улкан меҳнат!

Ўқув қўлланмани юқорида зикр этилган мавзулар бўйича машқлар тўплами деб атаса ҳам бўлади. Шу хусусияти билан у И. И. Ляшко ва бошқа украин математиклари нашр қилган Б. П. Демидович тўпламидаги масалаларнинг ечимларидан тузилган китобдан тубдан фарқ қилади. Бинобарин, мазкур ўқув қўлланма математик анализнинг каррали, эгри чизиқли ва сирт интеграллари қисмига оид ўзбек тилидаги биринчи ва яқин орада ягона масалалар тўплами бўлиб қолади, деб ўйлаймиз.

Ўқув қўлланманинг муҳим хислатларидан бири шуки, унда ечиб берилган ҳар бир мисолда юксак методик санъат қўлланади. Мисол ечиш давомида учрайдиган барча ҳоллар кўриб чиқилади. Бунда «бу ҳол аввалгига ўхшаш кўрилади» деган ибора учрамайди, зеро, каррали, эгри чизиқли ва сирт интегралларида ҳар бир ҳол алоҳида методик маҳорат, алоҳида чизма талаб этади. Хусусан, уч каррали интегрални такрорий интегралга келтиришда декарт, цилиндрик ва сферик координаталарнинг ҳар бирида 6 тадан, жами 18 та ҳол рўй беради. Муаллиф ҳамма ҳолларни изчиллик билан кўриб чиқади, ўхшашлари йўқ! Умумий ҳолда ҳар бир координата системасида n каррали интеграл такрорий интегралга $n!$ та усул билан келтирилиши қайд қилиб ўтилади. Бу соддагина факт математик анализга оид китобларда алоҳида таъкидлаб ўтилган эмас.

Ўқув қўлланманинг муҳим хислатларидан яна бири ечиб кўрсатилган мисолларнинг ҳар бирига алоҳида, зарур ҳолларда эса бир неча чизма илова қилинганлигидир. Интеграллаш соҳаси ва унинг турли текислик ёки сиртлар билан кесишишидан ҳосил бўлган фигуралар зўр ҳафсала билан, пухта ва яққол тасаввур берадиган тарзда чизилганки, китоб ҳатто геометриядан ҳам методик қўлланма даражасига етган десак муболаға бўлмайди.

Яна шуни зикр қилиб ўтамизки, мазкур ўқув қўлланмада сўз юритилаётган мавзулар умидли талабаларимиз ва улардан етишиб чиқаётган аспирантларимиз томонидан етарли савияда ўзлаштирилмай келинаётганлиги илмий изланишларда салбий роль ўйнаяпти. Зеро, ўша мавзуларни чуқурроқ ва кенгроқ ўрганиш жоиздир. Бироқ мавжуд дарсликлар ҳам, масалалар тўпламлари ҳам бу вазифани бажаришда қўлланма сифатида бир мунча оқсайди. Ана шунинг учун ҳам Ҳафиза опа Расул қизи томонидан яратилган ўқув қўлланма муҳим аҳамият касб этади. У ўзбек тилидагина эмас, ҳам бошқа тилларда чоп этилишга лойиқдир. Китоб ҳақида юқорида баён этилган фикрлар фақат менинг фикрим эмас, бундай фикрларни китоб қўлёзмасига тақриз ёзган таниқли математикларимиз ҳам айтиб ўтишган.

Ўйлаймизки, эътиборингизга ҳавола этилаётган ўқув қўлланма ўз фаолиятларида математик анализ асосларидан фойдаланадиган мутахассислар, бевосита шу соҳада мутахассис бўлиб чиқадиган талабалар ва, шунингдек, ёш математиклар учун бебаҳо совға бўлиб хизмат қилади.

Проф. *Ғ. Насритдинов*

I боб

ИККИ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Икки каррали $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dx\,dy$ интеграллар назарияси ва уларнинг баъзи татбиқларини ўрганиш учун аввало, масалан, Фихтенгольц уч жилдлик дарслигининг [1] 16-бобини, яна 17-боб 2-§ ининг 626—629-бандларини, шунингдек, Т. Азларов, Ҳ. Мансуровнинг [2] ўқув қўлланмасидан 18-бобни ўрганиб чиқиш лозим. Уч каррали $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ интегралларга оид зарур материални эса [1] китобдаги 18-бобнинг 1-§ ва 2-§ идан ҳамда [2] китоб 18-бобининг 10-§ идан ўқиб ўрганиш лозим.

Мисолларда аналитик усулда берилган сиртларни тўғри тасаввур эта олиш учун аналитик геометриядан эгри чизиқларга ва сиртларга оид маълумотлар билан яна бир марта (чуқурроқ) танишиб чиқиш керак [3], [4].

Кўп мисолларда ўзгарувчиларни алмаштириш усули натижага тезроқ олиб келади. Шунинг учун ўқувчи

а) қутб координаталар системаси (r, φ);

б) цилиндрик координаталар системаси (r, φ, z);

в) сферик координаталар системаси (r, φ, θ);

г) ихтиёрий аффин координаталар системаси (u, v, w)

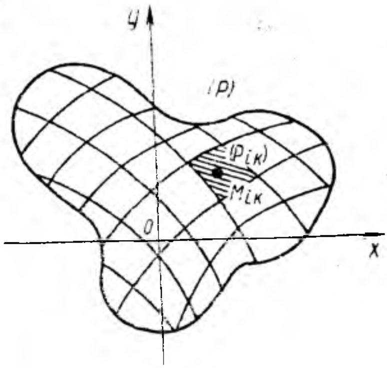
ва бу системалар билан (x, y, z) декарт координаталар системаси орасидаги боғланишларни етарли даражада ўзлаштирган бўлиши керак.

1-§. Икки каррали интегралларни таъриф бўйича ҳисоблаш

Аввал икки каррали интегралнинг икки таърифини, аниқроғи Риман интегралининг таърифини ҳамда «$\varepsilon - \delta$» тилидаги таърифини баён этамиз. Текисликдаги юзи нолга тенг бўлмаган, боғланган ёки боғланмаган, чегараланган (P) соҳада узлуксиз $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Шу (P) соҳани икки хил силлиқ (бўлакли — силлиқ) эгри чизиқлар тўри билан чекли сондаги (масалан, mn та) $(P_{1,1})$, $(P_{1,2})$, . . . , $(P_{1,m})$, $(P_{2,1})$, . . . , $(P_{2,m})$, $(P_{i,k})$, . . . , $(P_{n,1})$, $(P_{n,2})$, . . ., $P_{n,m})$ соҳачаларга ажратамиз (1-чизма); $(P_{i,k})$ соҳачанинг юзи $P_{i,k}$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$ бўлсин. Исталган $(P_{i,k})$ соҳачадан ихтиёрий $M_{i,k}$

нуқта оламиз, функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(M_{i,k})$ билан $P_{i,k}$ нинг кўпайтмасини $\sigma_{i,k}$ деб белгилаймиз:

$$\sigma_{i,k} = f(M_{i,k}) P_{i,k}. \quad (1.1)$$



1-чизма

Барча $\sigma_{i,k}$ кўпайтмаларини i ва k индекслар (номерлар) бўйича мос равишда 1 дан n гача ва 1 дан m гача жамлаб, $f(x, y)$ функция учун (P) соҳадаги (Риман маъносидаги)

$$\sigma(m, n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(M_{i,k}) P_{i,k} \quad (1.2)$$

интеграл йиғиндисини ҳосил қиламиз. $\sigma(m,n)$ нинг миқдори берилган $f(x, y)$ функциянинг кўринишига, (P) соҳани $(P_{i,k})$ соҳачаларга ажратиш усулига ва ҳар бир $(P_{i,k})$ соҳачага тегишли $M_{i,k}$ нуқтанинг олинишига боғлиқдир. $(P_{i,k})$ соҳачалар $d(P_{i,k})$ диаметрларининг энг каттасини $\Delta = \max d(P_{i,k})$ деб белгилаймиз. Равшанки, агар Δ сон нолга интилса, m ва n лар чексизга интилади. Аммо $m \to \infty$, $n \to \infty$, дан, умуман айтганда, $\Delta \to 0$ келиб чиқмайди.

(1.2) интеграл йиғиндининг $\Delta \to 0$ даги чекли лимити, яъни

$$\lim_{\Delta \to 0} \sigma(m, n) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \sigma(m, n) = I \quad (1.3)$$

сон $f(x,y)$ функциядан (P) соҳа бўйича олинган икки каррали (Риман маъносида) интеграл дейилади ва

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP \quad \text{ёки} \quad \iint_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy \quad (1.4)$$

символ билан белгиланади.

Икки каррали интегралнинг шу таърифига тенг кучли бўлган бошқа таърифлари ҳам бор. Биз, масалан, унинг «$\varepsilon - \delta$» тилидаги таърифини келтирамиз:

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, (P) соҳа турли усуллар билан диаметрлари δ дан кичик, яъни $\Delta = \max d(P_{i,k}) < \delta$ бўлган $(P_{i,k})$ соҳачаларга ажратилишига ва бу соҳачалардан $M_{i,k}$ нуқтанинг олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда шундай чекли I сон мавжуд бўлсаки, (1.2) интеграл йиғинди учун

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(M_{i,k}) \cdot P_{i,k} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, унда I сон $f(x, y)$ функциядан (P) соҳа бўйича олинган икки каррали (Риман маъносида) интеграл дейилади.

Икки каррали интегралнинг юқорида келтирилган икки таърифи тенг кучли эканини кўрсатиш қийин эмас.

Икки каррали интегралларни таъриф бўйича ҳисоблаганда (1.3) дан кўринадики, икки каррали лимитни ҳисоблашга тўғри келади. Бунинг учун эса, (1.2) йиғиндини топиш зарур бўлади. Қуйида икки каррали интегралларни таъриф бўйича ҳисоблашга оид 5 та мисол кўрилади. Аввал биз кўриладиган мисолларда керак бўладиган баъзи тенгликларни келтирамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\, n(n+1); \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2; \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1): \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}\, n^2 (n+1)^2; \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall \alpha \neq 2m\pi, \ m \in Z; \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall \alpha \neq 2m\pi, \ m \in Z; \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(x+k\alpha) = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \sin\left(x+\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall \alpha \neq 2m\pi, \ m \in Z; \tag{1.11}$$

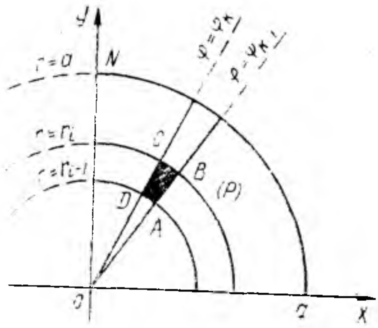
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x+k\alpha) = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \cos\left(x+\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall \alpha \neq 2m\pi, \ m \in Z. \tag{1.12}$$

Эслатма. Қуйида кўриладиган мисолларда (P) соҳа шундай усул билан соҳачаларга бўлинганки, $m \to \infty$ ва $n \to \infty$ бўлганда $\Delta = \max d(P_{i,k}) \to 0$ бўлади. Шунинг учун (1.3) нинг $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sigma(m, n) = I$ муносабатидан фойдаланиш етарли бўлади.

1-мисол. Ушбу $I_1 = \iint\limits_{(P)} xy\,dx\,dy$ икки каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бу ерда

$$(P) = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Ечиш. (P) соҳа маркази $O\ (0;\ 0)$ да ва радиуси a га тенг бўлган доиранинг 1-октантда жойлашган чорагидир. Бу соҳани концентрик айланалар ва $O\ (0,\ 0)$ дан чиққан нурлар ёрдамида $n \cdot m$ та $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчакка ўхшаш (2-чизма) соҳачаларга ажратиш қулайроқдир. Интеграл остидаги функциянинг қийматини исталган $M_{i,k}$ нуқтада, масалан, соҳачанинг «юқори чап» учида ($ABCD$ учун 2-чизмада C нуқтада) ҳисоблашимиз мумкин. Энди координаталар боши $O\,(0,0)$ билан $\overset{\frown}{MN}$ айлана ёйи орасига маркази $O\ (0, 0)$ да ва радиуслари мос равишда $\frac{a}{n},\ 2\frac{a}{n},\ \ldots,\ (n-1)\frac{a}{n}$ ларга тенг бўлган $(n-1)$ та концентрик айланалар ўтказамиз, уларнинг кутб координаталар системасидаги (2-чизма) тенгламалари $r = r_i$ ёки $r = \frac{a}{n} i,\ i = \overline{1, n} - 1$ бўлади; агар шу формулада $i = \overline{0, n}$ дейилса, $i = 0$ учун $r = 0 - O\,(0, 0)$ ни ҳосил қиламиз, $i = n$ да эса берилган (P) соҳа чегарасининг айлана чорагидан иборат қисми тенгламаси $r = a$ га эга бўламиз. Биринчи чоракда учи $O\ (0, 0)$ нуқтада бўлган $(m-1)$ та нур ўтказамиз:



2-чизма

$$\varphi = \varphi_k,\ \varphi_k = \frac{\pi}{2m} k,\ k = \overline{1, m} - 1.$$

Агар $k = \overline{0, m}$ дейилса, $k = 0$ учун $\varphi = 0$ (Ox ўқининг мусбат йўналтирилган қисми) ва $k = m$ учун $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Oy ўқнинг мусбат йўналтирилган қисми) тенгламалар ҳосил бўлади. Ихтиёрий $(P_{i,k})$ соҳача сифатида $ABCD$ соҳачани оламиз, унинг C учи учун: $x_c = r_i \cos\varphi_k$ $y_c = r_i \sin\varphi_k$, ёки $x_c = \frac{a}{n} i \cos\frac{\pi}{2m} k$, $y_c = \frac{a}{n} i \sin\frac{\pi}{2m} k$. Энди шу C учни $M_{i,k}$ нуқта деб оламиз ва шу нуқтада $f(x,y) = xy$ функция қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(M_{i,k}) = \frac{a^2}{n^2} i^2 \cos\frac{\pi k}{2m} \sin\frac{\pi k}{2m} = \frac{a^2}{2n^2} i^2 \sin\frac{\pi k}{m}.$$

Энди $ABCD$ соҳачанинг $P_{i,k}$ юзини топамиз. 2-чизмадан кўринадики,

$$P_{i,k} = S_{ABCD} = S_{OBC} - S_{OAD}.$$

Маълумки, доиравий секторнинг юзи $S=\frac{1}{2}R^2\alpha$, бу ерда R—доира радиуси, α— сектор бурчагининг радиан ҳисобидаги қиймати. Чизмада $\alpha=\Delta\varphi=\frac{\pi}{2m}$. Демак, $P_{i,k}$ юз $P_{i,k}=\frac{1}{2}(r_i^2-r_{i-1}^2)\Delta\varphi$, яъни

$$P_{i,k}=\frac{\pi}{4m}\left[\frac{a^2}{n^2}i^2-\frac{a^2}{n^2}(i-1)^2\right]=\frac{\pi a^2}{4n^2m}(2i-1)$$

формула бўйича ҳисобланади. Интеграл йиғинди $\sigma(m,n)$ ни ҳосил қилиш учун биз интеграл йиғиндининг умумий ҳади

$$\sigma_{i,k}=f(M_{i,k})P_{i,k}=\frac{\pi a^4}{8n^4m}(2i^3-i^2)\sin\frac{\pi k}{m} \tag{1.13}$$

ни топиб, i ва k ларга мос равишда улар қабул қилиши мумкин бўлган 1 дан n гача ва 1 дан m гача қийматларни бериб жамлаб чиқамиз:

$$\sigma(m,n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sigma_{i,k}. \tag{1.14}$$

Равшанки, (1.13) даги $\sigma_{i,k}$ ифода i ва k ларнинг узлуксиз функцияси. Шу сабабли (1.14) йиғиндини ҳисоблашда олдин i кейин k (ёки аксинча) индекс бўйича ҳисоблаш мумкин. Мисолда $\sigma_{i,k}$ ифода бири фақат i га, иккинчиси фақат k га боғлиқ бўлган иккита ифода кўпайтмасидан иборат бўлгани учун σ (m, n иккита) йиғинди кўпайтмасига тенг:

$$\sigma(m,n)=\frac{\pi a^4}{8n^4m}\sum_{i=1}^{n}(2i^3-i^2)\sum_{k=1}^{m}\sin\frac{\pi}{m}k.$$

Юқорида келтирилган (1.7)—(1.9) формулаларга асосан.

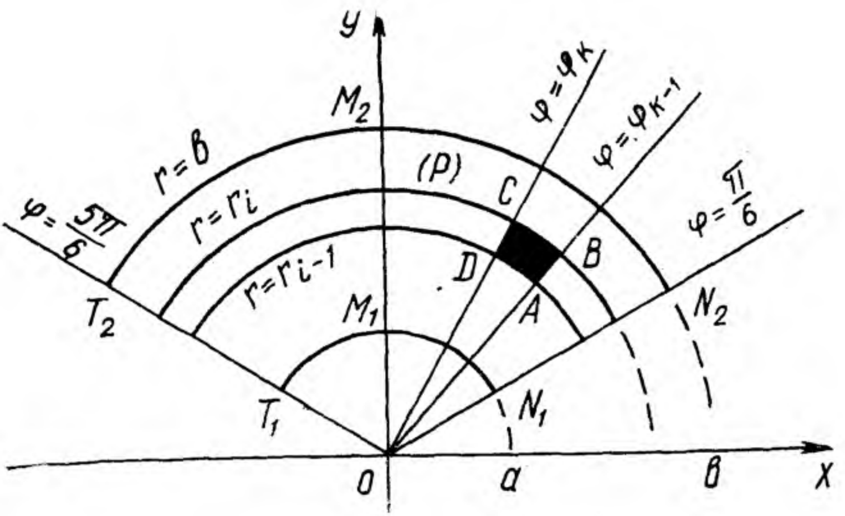
$$(\sigma(m,n)=\frac{\pi a^4}{8n^4m}\left[2\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\frac{\sin\frac{(m+1)\pi}{2m}\sin\frac{m\pi}{2m}}{\sin\frac{\pi}{2m}}=$$

$$=\frac{a^4}{8}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{6n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]\cos\frac{\pi}{2m}\,\frac{\pi/2m}{\sin\frac{\pi}{2m}}\cdot 2 \tag{1.15}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Охирги кўпайтувчи учун $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ лимитдан фойдаланиб, $\sigma(m,n)$ йиғиндининг $n\to\infty$ ва $m\to\infty$ даги икки каррали лимитини ҳисоблаймиз ва узил-кесил

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sigma(m,n)=\frac{a^4}{8}\left[\frac{1}{2}-0\right]\cdot 1\cdot 2\cdot 1=\frac{a^4}{8}$$



2а- чизма

натижага эга бўламиз. Демак, $I_1 = \frac{a^4}{8}$.

2- мисол. Ушбу $I_2 = \iint\limits_{(P)} (3x + y)\ dx\ dy$

икки каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бу ерда

$$(P) = \left\{(x, y);\ a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2, y \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} x,\ y \geqslant -\frac{1}{\sqrt{3}} x\right\}.$$

Ечиш. (P) соҳа марказлари $O\,(0,0)$ да, радиуслари a ва b га тенг айланалар ҳамда Ox ўқининг мусбат йўналиши билан $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ ва $\alpha_2 = \frac{5\pi}{6}$ бурчаклар ташкил этган иккита $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x$ тўғри чизиқлар билан чегараланган (2*а*- чизма). Қутб координаталар системасида уларнинг тенгламалари мос равишда $r = a$, $r = b$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ бўлади. (P) соҳани қуйидаги усул билан n^2 та $(P_{i,k})$ $(i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n})$ соҳачаларга ажратамиз. Бу мисолда концентрик айланалар ва нурлар сони бир хил қилиб олинган. Қўрилаётган ҳол умумиятликка ҳалал бермайди.

1) $M_1 = M_2 = b - a$ кесмани n та тенг $\Delta r = \frac{b-a}{n}$ бўлакка ажратиб, $(n - 1)$ та $r = r_i$, $r_i = a + \Delta r \cdot i$, $i = \overline{1, n-1}$ тенгламалар билан тавсифланадиган концентрик айланалар ўтказамиз;

2) Икки тўғри чизиқ (аниқроғи, икки $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ва $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ нур)

орасидаги $\frac{2\pi}{3}$ га тенг бурчакни, ҳар бири $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3n}$ га тенг бўлган, n та бурчакка ажратувчи $(n-1)$ та нур ўтказамиз. Уларнинг тенгламалари $\varphi = \varphi_k$, $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \Delta\varphi\cdot k$ ёки $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n}k$, $k = \overline{1, n-1}$ кўринишга эга.

Энди $(P_{i,k})$ соҳачани $ABCD$ билан белгилаймиз, унинг $P_{i,k}$ юзи, 1-мисолдан маълумки, қуйидаги

$$P_{i,k} = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\varphi = \frac{1}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})\,\Delta\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta r\,[2a + \Delta r\,(2i-1)]\,\Delta\varphi = \left(a + \Delta r\,\frac{2i-1}{2}\right)\Delta r\,\Delta\varphi$$

формула билан ҳисобланади, унда $\Delta r = \frac{b-a}{n}$.

$(P_{i,k})$ соҳачанинг исталган $M_{i,k}$ нуқтасини, масалан, C нуқтани олайлик. Бу нуқта учун $x_c = r_i\cos\varphi_k$, $y_c = r_i\sin\varphi_k$ бўлиб, шу нуқтада интеграл остидаги $f(x, y) = 3x + y$ функция қийматини топиш мумкин:

$$f(M_{i,k}) = r_i(3\cos\varphi_k + \sin\varphi_k) = (a + i\,\Delta r)\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\,\Delta\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\,\Delta\varphi\right)\right].$$

Энди (1.2) формула бўйича интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma(n,n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(M_{i,k})\,P_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a + i\,\Delta r)\,\left(a + \right.$$
$$\left. + \Delta r\,\frac{2i-1}{2}\right)\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\,\Delta\varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\,\Delta\varphi\right)\right]\Delta r\,\Delta\varphi =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[a^2 + a\,\Delta r\left(2i - \frac{1}{2}\right) + \Delta r^2\left(i^2 - \frac{i}{2}\right)\right]\Delta r\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[3\cos\left(\frac{\pi}{6} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + k\,\Delta\varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\,\Delta\varphi\right)\right]\Delta\varphi.$$

Йиғиндиларни ҳисоблашда (1.5), (1.9), (1.11), (1.12) формулалардан фойдаланамиз:

$$\sigma(n,n) = \Delta\varphi\left[3\cdot\frac{\sin\frac{n}{2}\Delta\varphi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n+1}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\frac{n}{2}\Delta\varphi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n+1}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right]\cdot\Delta r\cdot\left(na^2 + \right.$$

$$+a\,\Delta r\left[2\,\frac{n(n+1)}{2}-n\,\frac{1}{2}\right]+\Delta r^2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{4}\right]\Bigg\}.$$

Агар $\Delta r=\frac{b-a}{n}$, $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{3n}$ эканини эътиборга олсак, юқоридаги ифодани соддалаштириб, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sigma(n,n)=\left[3\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3n}\right)\right)\frac{\Delta\varphi/2}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\,2+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3n}\right)\right)\frac{\Delta\varphi/2}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\,2\right]\cdot\Bigg\{a^2+$$

$$+a(b-a)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+(b-a)^2\left[\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\Bigg\}\cdot(b-a).$$

Энди берилган интеграл қийматини топиш мақсадида $\sigma(n,n)$ учун топилган ифоданинг $n\to\infty$ даги лимитини ҳисоблаймиз (бунда $n\to\infty$ да $\Delta\varphi\to0$ эканини эътиборга оламиз);

$$I_2=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\varphi\to0)}}\sigma(n,n)=(b-a)\left[a^2+a(b-a)+(b-a)^2\,\frac{1}{3}\right]\times$$

$$\times\left[3\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}\cdot2+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}\cdot2\right]=(b-a)\,\frac{1}{3}(3a^2+3\,ab-$$

$$-3\,a^2+b^2-2\,ab+a^2)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot2=\frac{\sqrt{3}}{3}\,(b-a)(a^2+ab+b^2)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(b^3-a^3).$$

Шундай қилиб, $I_2=\iint\limits_{(P)}(3x+y)\,dx\,dy=\frac{\sqrt{3}}{3}(b^3-a^3).$

3- мисол. $f(x,y)=2-x$ функция учун $(P)=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant a^2,$ $y\geqslant0,\ x\geqslant0\}$ соҳада Дарбунинг бирор бўлинишга нисбатан қуйи $s(f)$ ва юқори $S(f)$ интеграл йиғиндилари тузилсин. (P) соҳа $r=\frac{a}{n}\,i,\ i=\overline{0,n}$ ва $\varphi=\frac{\pi}{2n}\,k,\ k=\overline{0,n}$ чизиқлар тўри билан соҳачаларга бўлинсин. Қуйи ва юқори йиғиндиларнинг $n\to\infty$ даги лимитлари ҳисоблансин.

Ечиш. (P) соҳанинг берилиши ва унинг n^2 та $(P_{i,k})$ соҳачаларга бўлиниши 1- мисолдаги ҳолга айнан ўхшайди (2- чизма), шунинг учун $P_{i,k}$ (яъни $ABCD$ шакл учун) юзнинг қийматини $m=n$ деб аниқлаймиз: $P_{i,k}=\frac{\pi a^2}{4n^3}(2i-1)$. Берилган $f(x,y)=2-x$ функция қиймати $ABCD$ дан олинган нуқтанинг абсциссасига боғлиқ, аниқроғи, у камаювчи функциядир. $ABCD$ соҳа учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли:

$$r_i > r_{i-1},\ \varphi_{k-1} < \varphi_k,\ \cos\varphi_{k-1} > \cos\varphi_k > 0,$$

$$r_i \cos\varphi_{k-1} > r_{i-1}\cos\varphi_k,$$

яъни 2-чизмадаги B нуқтанинг абсциссаси D нуқта абсциссасидан катта. Демак, (r_i, φ_{k-1}) нуқтада $f(x, y)$ функциянинг $\left[2 - \frac{a}{n} i \times \times \cos\frac{\pi(k-1)}{2n}\right]$ қиймати унинг (r_{i-1}, φ_k) нуқтадаги $\left[2 - \frac{a}{n}(i-1)\cos\frac{\pi k}{2n}\right]$ қийматидан кичик. Энди (1.2) формулага асосан Дарбунинг қуйи интеграл йиғиндисини ёзамиз:

$$s(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[2 - \frac{a}{n} i \cos\frac{\pi}{2n}(k-1)\right]\cdot\frac{\pi a^2}{4n^3}(2i-1) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{3n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\sum_{k=1}^{n}\left[2 - \frac{a}{n} i\cos\frac{\pi(k-1)}{2n}\right].$$

Қулайлик учун олдин ички йиғиндини, сўнгра ташқи йиғиндини ҳисоблаймиз:

$$s(f) = \frac{\pi a^2}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[2n - \frac{a}{n} i \frac{\sin\frac{n\pi}{4n}\cos\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\pi/4n}\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[2n(2i-1) - \frac{a}{n}(2i^2 - i)\cdot\frac{\sin\pi/4\cos(\pi/4 - \pi/4n)}{\sin\pi/4n}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4n^3}\cdot\left\{2n\cdot n^2 - \frac{a}{n}\left[2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\pi/4n}\right\} = \frac{\pi a^2}{4}\left\{2 - \frac{a}{n}\left[\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)\frac{\pi/4n}{\sin\pi/4n}\cdot\frac{4n}{\pi}\right\}.$$

Энди $n \to \infty$ да $I_к = \lim\limits_{n\to\infty} s(f)$ лимитни ҳисоблаймиз:

$$I_к = \frac{\pi a^2}{4}\left[2 - a\left(\frac{2}{3} - 0\right)\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{\pi}\right] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left(2 - \frac{8a}{3\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^3}{3}.$$

Юқоридагига ўхшаш Дарбунинг юқори интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$S(f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[2-\frac{a}{n}(i-1)\cos\frac{\pi k}{2n}\right]\cdot\frac{\pi a^2}{4n^3}(2i-1)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\sum_{k=1}^{n}\left[2-\frac{a}{n}(i-1)\cos\frac{\pi k}{2n}\right]=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[2n-\frac{a}{n}(i-1)\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{2\cdot 2n}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin \pi/4n}\right]=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[2n(2i-1)-\frac{a}{n}(2i^2-3i+1)\cdot\frac{\sin\pi/4\cdot\cos(\pi/4+\pi/4n)}{\sin\pi/4n}\right]=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4n^3}\cdot\left\{2\,n\cdot n^2-\frac{a}{n}\left[2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\frac{n(n+1)}{2}+n\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\pi/4\cdot\cos(\pi/4+\pi/4n)}{\sin\pi/4n}\right\}=\frac{\pi a^2}{4}\cdot\left\{2-a\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right)\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\pi/4n}\cdot\frac{4}{\pi}\right\}.$$

Энди $n\to\infty$ да юқори интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаймиз:

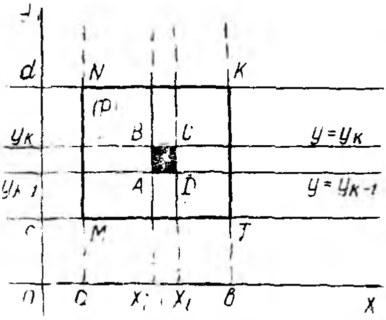
$$I_{ю}=\frac{\pi a^2}{4}\left[2-a\left(\frac{2}{3}+0\right)\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{\pi}\right]=\frac{\pi a^2}{4}\left(2-\frac{4a}{3\pi}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}-\frac{a^3}{3}.$$

Шундай қилиб, $I_{қ}=I_{ю}=\dfrac{\pi a^2}{2}-\dfrac{a^3}{3}$, яъни Дарбунинг қуйи ва юқори интеграл йиғиндилари $n\to\infty$ да бир хил лимитга эга. Равшанки, бу лимит $f(x,y)=2-x$ функциядан $(P)=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0\}$ соҳа бўйича олинган икки каррали $I_3=\iint\limits_{(P)}(2-x)\,dx\,dy$ интеграл қийматига тенг.

4-мисол. Ушбу $f(x,y)=(mx+p)\,(ly+q)$ функция учун $(P)=\{(x,y)\colon a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ соҳада интеграл йиғинди тузилсин ва унинг $n\to\infty$ даги лимити топилсин.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси (P) тўртта $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$ тўғри чизиқ билан чегараланган (3-чизма) тўғри бурчакли $MNKT$



3- чизма

тўртбурчакдир. Шу тўртбурчак Oy ўқига параллел $x=x_i$, $x_i = a+\Delta x\cdot i$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $i=\overline{0,n}$, тўғри чизиқлар билан ҳамда Ox ўқига параллел $y=y_k$, $y_k = c+\Delta y\cdot k$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, $k=\overline{0,n}$ тўғри чизиқлар билан $ABCD$ кўринишдаги n^2 та тўртбурчакларга бўлинади. (P) соҳанинг ҳар бир бўлакчасининг юзи $ABCD$ нинг юзига, яъни $\Delta x\cdot\Delta y$ га тенг бўлади. Энди $f(x,y)$ функция қийматини $ABCD$ нинг ихтиёрий $M_{i,k}$ нуқтасида, масалан, C нуқтада ҳисоблаймиз:

$$f(M_{i,k}) = f(x_i, y_k) = (ma+mi\Delta x+p)(lc+lk\Delta y+q).$$

Ниҳоят, интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_k)P_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(ma+mi\Delta x+p)(lc+lk\Delta y+q)\Delta x\Delta y = \left[man+m\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+pn\right]\left[lcn+l\frac{d-c}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+qn\right]\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n} = \left[ma+m(b-a)\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+p\right]\cdot\left[lc+l(d-c)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+q\right](b-a)(d-c).$$

Бу $\sigma(n)$ ифоданинг $n\to\infty$ даги лимитини ҳисоблаймиз:

$$I_4 = \lim_{n\to\infty}\sigma(n) = (b-a)(d-c)\left(m\cdot\frac{a+b}{2}+p\right)\left(l\cdot\frac{c+d}{2}+q\right).$$

Равшанки, бу лимит $I = \iint\limits_{(P)}(mx+p)(ly+q)\,dx\,dy$ интегралнинг қийматидан иборат.

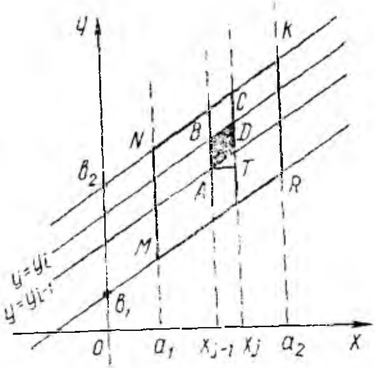
5- мисол. Ушбу $I_5 = \iint\limits_{(P)}(mx+y)\,dx\,dy$ икки каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бу ерда

$$(P) = \{(x,y)\colon a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ kx+b_1\leqslant y\leqslant kx+b_2,\ b_1<b_2,\ a_1<a_2\}.$$

Ечиш. (P) соҳа 4- чизмада тасвирланган. У $MNKP$ параллелограммдан иборат. Шу (P) соҳани $MNKP$ нинг вертикал томонига параллел $(n-1)$ та $x=x_j$, $x_j = a_1+\frac{a_2-a_1}{n}j$, $j=\overline{1,n-1}$ тўғри чизиқлар билан ҳамда оғма томонига параллел $(n-1)$ та $y=y_i$, $y_i=kx+\frac{b_2-b_1}{n}i$, $i=\overline{1, n-1}$ тўғри чизиқлар билан n^2 дона $(P_{i,j})$ $(i=\overline{1, n},\ j=\overline{1, n})$ соҳачаларга бўламиз; уларнинг ҳар бири $ABCD$ кўринишдаги параллелограммдан иборат бўлиб, шу соҳача

$$y=y_{i-1},\ y_{i-1}=b_1+kx+\frac{b_2-b_1}{n}(i-1);$$

$$y=y_i,\ y_i=b_1+kx+\frac{b_2-b_1}{n}i,$$



4-чизма

$$x=x_{j-1},\ x_{j-1}=a_1+\frac{a_2-a_1}{n}(j-1),$$

$$x=x_j,\ x_j=a_1+\frac{a_2-a_1}{n}j$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган. $(P_{i,j})$ нинг юзи $P_{i,j}=S_{ABCD}=CD\cdot AT$, $AT\perp CD$ (4-чизма). Равшанки, $AT=x_j-x_{j-1}=\Delta x=\frac{a_2-a_1}{n}$, $CD=y_i-y_{i-1}=\Delta y=\frac{b_2-b_1}{n}$. Демак, $P_{i,j}=\Delta x\cdot\Delta y$.

Интеграл остидаги $f(x, y)$ функция қийматини $(P_{i,j})$ соҳанинг исталган, масалан, $D(x_j,\ y_{i-1})$ нуқтасида олишимиз мумкин:

$$f(x_j,\ y_{i-1})=mx_j+y_{i-1}=m(a_1+\Delta x\cdot j)+b_1+kx_j+\Delta y(i-1)=$$
$$=(m+k)a_1+(m+k)\Delta x\cdot j+b_1+\Delta y(i-1).$$

Энди интеграл йиғиндини тузиш мумкин:

$$\sigma(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_j,\ y_{i-1})\cdot P_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(m+k)a_1+(m+k)\cdot\Delta x\, j+$$
$$+b_1+\Delta y(i-1)]\,\Delta x\cdot\Delta y.$$

Бу $\sigma(n)$ ни ҳисоблаш учун олдин ички йиғиндини (j бўйича), кейин ташқи йиғиндини (i бўйича) ҳисоблаб чиқамиз:

$$\sigma(n)=\sum_{i=1}^{n}\Big[(m+k)a_1 n+(m+k)\Delta x\cdot\frac{n(n+1)}{2}+b_1 n+\Delta y\, n(i-$$
$$-1)\Big]\Delta x\,\Delta y=\Big[(m+k)a_1 n^2+(m+k)\Delta x\frac{n^2(n+1)}{2}+b_1 n^2+$$
$$+\Delta y\, n\,\frac{n(n-1)}{2}\Big]\Delta x\,\Delta y=\Big[(m+k)a_1+(m+k)(a_2-a_1)\times$$
$$\times\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)+b_1+(b_2-b_1)\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big](b_2-b_1)(a_2-a_1).$$

Энди $\sigma(n)$ нинг $n \to \infty$ даги лимити берилган икки каррали интегралга тенг бўлади: $I_5 = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \Big[(m+k)a_1 + (m+k)\cdot\frac{1}{2}(a_2 - a_1) + b_1 + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)\Big] (b_2 - b_1)(a_2 - a_1) = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)([m+k)(a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)]$.

Машқлар. I. Қуйидаги икки каррали интеграллар таъриф бўйича ҳисоблансин:

1.1. $\iint\limits_{(P)} (3 + x^2 + y^2)\, dx\, dy$, $\quad (P) = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \leqslant 16,\ y \geqslant 0,\ y \geqslant \sqrt{3}x\}$.

1.2. $\iint\limits_{(P)} (4 + 2x - y)\, dx\, dy$, $(P) = \{(x, y)\colon\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 25,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

1.3. $\iint\limits_{(P)} 5xy\ dx\, dy$, $(P) = \left\{(x, y)\colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqslant -\sqrt{3}x\right\}$.

1.4. $\iint\limits_{(P)} (3 - 2x)(4y + 5)\, dx\, dy$, $(P) = \{(x, y)\colon -2 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

1.5. $\iint\limits_{(P)} (3x - 1)\ (2y + 7)\, dx\, dy$, $(P) = \{(x, y)\colon -2 \leqslant x \leqslant 3,\ -1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

1.6. $\iint\limits_{(P)} (3y - 4x)\, dx\, dy$, $(P) = \{(x, y)\colon\ 1 \leqslant x \leqslant 5,\ 2 \leqslant y \leqslant 6\}$.

1.7. $\iint\limits_{(P)} (2x + 5y)\, dx\, dy$, бу ерда (P) соҳа $y = 1$, $y = 3$, $3y = x - 5$, $3y = x - 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган.

1.8. $\iint\limits_{(P)} (x^2 + y)\, dx\, dy$, бу ерда (P) соҳа $x = -2$, $x = 4$, $y = 5x - 1$, $y = 5x + 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган.

1.9. $\iint\limits_{(P)} (3y - 2x)\, dx\, dy$, бу ерда (P) соҳа $y = -2$, $y = 4$, $y = 3x - 2$, $y = 3x + 7$ тўғри чизиқлар билан чегараланган.

Кўрсатма: Ҳар бир мисолда тегишли интеграл йиғиндини тузиш учун қулай бўлган усул билан (P) соҳани $(P_{i,k})$ соҳачаларга ажратинг ва интеграл остидаги $f(x, y)$ функция қийматини ихтиёрий, аммо қулайликка эга бўлган $M_{i,k}$ нуқтада ҳисобланг.

II. Қуйидаги икки каррали интеграллар учун берилган соҳада. Дарбунинг бирор бўлинишга нисбати қуйи $s(f)$ ва юқори $S(f)$ интеграл йиғиндилари тузилсин. Сўнгра қуйи ва юқори йиғиндиларнинг $n \to \infty$ даги лимити ҳисоблансин:

1.10. $\iint\limits_{(P)} (2+7y)\,dx\,dy$, $(P) = \{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \sqrt{3}x\}$.

1.11. $\iint\limits_{(P)} y(5-4x)\,dx\,dy$, $(P) = \{(x,y): -1 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

1.12. $\iint\limits_{(P)} (3x+4y-5)\,dx\,dy$, $(P) = \{(x, y): 1 \leqslant x \leqslant 7,\ 2+x \leqslant y \leqslant \leqslant 5+x\}$.

1.13. $\iint\limits_{(P)} (7-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, $(P) = \{(x, y): 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 36,\ y \geqslant x,\ y \geqslant -x\}$.

2- §. Декарт координаталар системасида икки каррали интегрални такрорий интегралга келтириш

Каррали интегралларни ҳисоблаш жараёнида улар аввал такрорий интегралга келтирилади. Бунда берилган интегрални ҳисоблаш учун аввал ички, сўнгра ташқи интегрални ҳисоблаш лозим бўлади. Ички ва ташқи интегралларнинг интеграллаш чегараларини қўйиш муҳим аҳамият касб этади. Бу эса берилган соҳанинг шаклига ва уни чегараловчи эгри чизиқларга (сиртларга) боғлиқ. Аксинча, агар берилган икки каррали интегралда интеграллаш тартиби ва интеграллаш чегаралари кўрсатилган бўлса, у ҳолда интеграллаш соҳасини ҳам чизиш (тасвирлаш) мумкин.

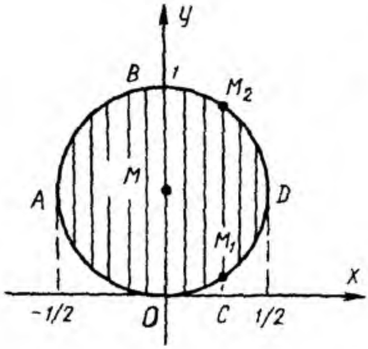
Қуйида келтирилган мисолларда интеграллаш ўзгарувчилари тўғри бурчакли x, y декарт координаталаридан иборат. Ушбу $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dx\,dy$ интеграл белгиси остидаги $dx\,dy$ кўпайтма томонлари Ox ва Oy ўқларига параллел бўлган элементар тўғри тўртбурчакнинг (соҳачанинг) юзини ифодалайди, яъни $dS = dx\,dy$. Шунинг учун (P) оддий соҳани $x = \text{const}$ ($y = \text{const}$) тўғри чизиқлар билан ажратиб икки каррали интегралнинг интеграллаш чегараларини қўямиз.

6- мисол. $\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy$, $(P) = \{(x, y): x^2+y^2 \leqslant y\}$, интегралда интеграллаш чегаралари икки хил тартибда қўйилсин.

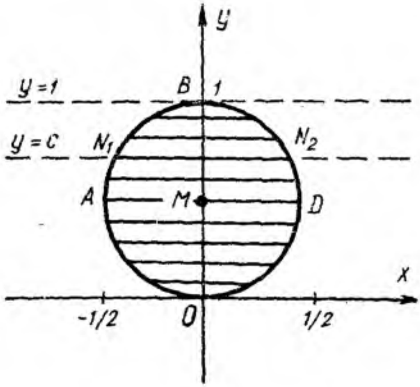
Ечиш. (P) соҳа маркази M (0; 1/2) нуқтада ва радиуси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган доирадан иборат:

$$x^2+(y-1/2)^2 \leqslant 1/4.$$

Ташқи интегрални x бўйича интеграллсак, доиранинг юзини Oy га параллел тўғри чизиқлар ёрдамида бўлиб чиқамиз. Энг четки чап



5-чизма



6-чизма

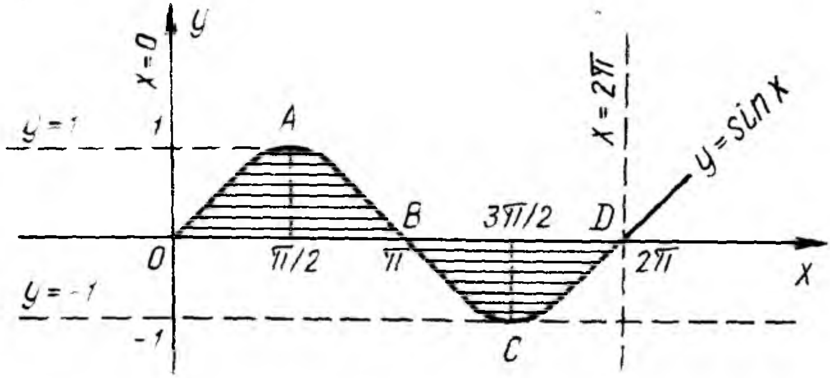
$x = -1/2$ ва ўнг $x = +1/2$ тўғри чизиқлар доира айланасига уриниб, шу уриниш нуқталарида уни икки бўлакка (ярим айланага) ажратади: $\overset{\frown}{AOD}$ ярим айлана учун $y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$ ва $\overset{\frown}{ABD}$ учун эса $y = 1/2 + \sqrt{1/4 - x^2}$.

Ҳар бир $x = c$, $c \in [-1/2; +1/2]$ тўғри чизиқ аввало $\overset{\frown}{AOD}$ ни M_1 нуқтада, сўнгра $\overset{\frown}{ABD}$ ни M_2 нуқтада кесади. Олинган абсциссанинг $x = c$ қиймати учун y ўзгарувчи M_1 нинг ординатасидан M_2 нинг ординатасигача ўзгаради (5-чизма). Демак, $\forall x \in [-1/2; +1/2]$ лар учун $y \in \left[1/2 - \sqrt{1/4 - x^2}; \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 - x^2}\right]$ бўлади ва берилган икки каррали интеграл қуйидаги такрорий интеграл кўринишида ёзилади:

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{1/2 - \sqrt{1/4 - x^2}}^{1/2 + \sqrt{1/4 - x^2}} f(x, y)\, dy, \quad (P) = \left\{(x, y): -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right\}.$$

Иккинчи хил тартибда интеграллаш чегараларини қўйиш учун энди доира юзини Ox га параллел бўлган тўғри чизиқлар билан бўлиб чиқамиз (6-чизма). Бу тўғри чизиқлар ичида энг пастдагиси Ox ўқи ($y = 0$) ва энг юқоридагиси $y = 1$ тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, улар доира айланасига уриниш нуқтасида уни икки ярим айланага ажратади. Демак интегралда y ўзгарувчи 0 дан 1 гача ўзгаради. Ҳар бир $y = \text{const}$ $(0 < c < 1)$ тўғри чизиқ $x^2 + y^2 = y$ айланани аввало $\overset{\frown}{OAB}$ ёйнинг N_1 нуқтасида, сўнгра $\overset{\frown}{ODB}$ ёйнинг N_2 нуқтасида кесиб ўтади ва x ўзгарувчи. N_1 нинг абсциссасидан N_2 нинг абсциссасигача ўзгаради. $\overset{\frown}{OAB}$ да $x = -\sqrt{y - y^2}$, $\overset{\frown}{ODB}$ да $x = \sqrt{y - y^2}$. Шундай қилиб, берилган икки каррали интеграл



7- чизма

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

$$(P) = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant 1;\ -\sqrt{y-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{y-y^2}\}$$

такрорий интеграл кўринишида ҳам ёзилиши мумкин.

7- мисол. $I = \int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$ такрорий интегралда интеграллаш тартиби ўзгартирилсин.

Ечиш. (P) соҳа $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ тўғри чизиқлар ва $y = \sin x$ эгри чизиқ орасидаги ёпиқ соҳадир (7- чизма). Энди $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ оралиқда $y = \sin x$ функцияга тескари бўлган бир қийматли функцияни аниқлаймиз. Тригонометриядан тескари доиравий функциялар хоссаларига асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$\overset{\frown}{OA}$ нинг тенгламаси: $x = \arcsin y$;

$\overset{\frown}{ABC}$ нинг тенгламаси: $x = \pi - \arcsin y$;

$\overset{\frown}{CD}$ нинг тенгламаси: $x = 2\pi + \arcsin y$.

Берилган интегрални иккита интеграл йиғиндиси кўринишида ёзамиз:

$$\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy.$$

Иккинчи интеграл учун $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $\sin x \leqslant y \leqslant 0$ тенгсизликлар ўринли. Шу сабабли ордината y $\sin x \leqslant y \leqslant 0$ оралиқда ўсувчи. Энди иккинчи интегралдаги ички интегрални ордината y ўсадиган оралиқ бўйича ёзиб оламиз:

$$\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy - \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{0} f(x, y)\, dy.$$

7-чизмадан кўринадики,

$$(OAB) = \{0 \leqslant y \leqslant 1;\ \arcsin y \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin y\},$$

$$(BCD) = \{-1 \leqslant y \leqslant 0;\ \pi - \arcsin y \leqslant x \leqslant 2\pi + \arcsin y\}$$

Демак,

$$I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\, dx - \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y)\, dx.$$

8-мисол. Ушбу $\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y)\, dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\, dy$ такрорий интеграллар йиғиндисида интеграллаш тартиби ўзгартирилсин.

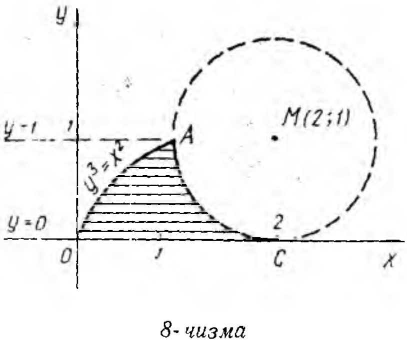
Ечиш. Берилган интеграл икки такрорий интеграл йиғиндисидан иборат: $I = I_1 + I_2$; $I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y)\, dy$, $I_2 = \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\, dy$.

Шу интеграллар кўринишидан равшанки, (P_1) ва (P_2) соҳалар қуйидаги кўринишга эга:

$$(P_1) = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant x^{2/3}\},$$

$$(P_2) = \{1 \leqslant x \leqslant 2;\quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}\}.$$

Бунда (P_1) — пастдан $y = 0$, юқоридан $y^3 = x^2$ ярим кубик парабола, чапдан $x = 0$, ўнгдан $x = 1$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак, (P_2) эса пастдан $y = 0$, юқоридан маркази $M(2;\ 1)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ айлананинг $\overset{\frown}{AC}$ ёйи, чапдан $x = 1$, ўнгдан $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак (8-чизма). Энди $(P) = (P_1) \cup (P_2)$ соҳани кўрамиз. Бу соҳа пастдан $y = 0$, юқоридан $y = 1$ горизонтал чизиқлари билан, чапдан $y^3 = x^2$ ярим кубик парабола, ўнгдан $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ айлана ёйлари билан чегараланган соҳадир. Шунинг учун (P) соҳани Ox ўқига параллел бўлган кесмалар билан қоплаб чиққанда $y \in [0;\ 1]$ ва x ўзгарувчи ярим кубик параболанинг $\overset{\frown}{OA}$ даги нуқта абсциссаси $x = y^{3/2}$ дан айлананинг $\overset{\frown}{AC}$ ёйидаги нуқта абсциссаси $x = 2 - \sqrt{2y - y^2}$ гача ўзгаради. Шундай қилиб, $(P) = \{(x, y): 0 \leqslant y \leqslant 1;\ y^{3/2} \leqslant x \leqslant 2 - \sqrt{2y - y^2}\}$ бўлиб, берилган такрорий интеграллар йиғиндиси кўринишидаги интеграл интеграллаш тартиби ўзгартирилганда битта $\int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\, dx$ такрорий интеграл кўринишида ёзилади.



8-чизма

Машқлар. 1. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ёки маълум шартлар билан берилган (P)

соҳа учун $\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy$ икки каррали интегралда интеграллаш чегаралари икки хил тартибда қўйилсин.

2.1. $y=0,\ y=3,\ y=x,\ y=x-6.$

2.2. $y=1,\ 2y=x,\ 2y=8-x,\ y=0.$

2.3. $y=x,\ y=x+3,\ y=2x,\ y=2x-3.$

2.4. $y=x^2,\ x-y+2=0.$

2.5. $x^2+y^2\geqslant 2a^2,\ x^2+y^2\leqslant 2ax.$

2.6. $y=2x-x^2,\ y=-x.$

2.7. $y=x^2-4x,\ y=x.$

2.8. $xy=4,\ y\geqslant\frac{1}{2}x^2,\ y\leqslant 6.$

2.9. $y\leqslant 9-x^2,\ y\geqslant 2x^2.$

2.10. $y=x,\ y=4x,\ xy\geqslant 4,\ y\leqslant 8.$

2.11. $y=x,\ y=4x,\ xy\geqslant 4,\ y\leqslant 6.$

2.12. $y=\sqrt{2ax},\ x^2+y^2\geqslant 2ax,\ x=0,\ x=2a,\ y=0.$

2.13. $y=x^2-4x,\ 2x-y=5;$

2.14. $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\sqrt{3-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

2.15. $xy=9,\ x+y=10,\ 1\leqslant y\leqslant 3.$

2.16. $y^2+8x=16,\ y^2-24x=48.$

2.17. $y\geqslant x^2+4x,\ y=x+4.$

2.18. $y^2\geqslant x^2-4x,\ y\leqslant x,\ x\geqslant 1.$

2.19. $y^2-3x=4,\ y^2+4x=11.$

2.20. $y^2\leqslant 6+3x,\ y^2\leqslant 8-4x,\ |y|\leqslant\sqrt{2}.$

II. Қуйидаги икки каррали интегралда интеграллаш тартиби ўзгартирилсин.

2.21. $\int\limits_1^{10} dx \int\limits_{-\lg x}^{\lg x} f(x, y)\,dy.$

2.22. $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_{x}^{3x} f(x, y)\,dy.$

2.23. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x, y)\,dy.$

2.24. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} f(x, y)\,dy.$

2.25. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+4} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{2} dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx.$

2.26. $\int\limits_0^{6} dy \int\limits_{\sqrt{6y-y^2}}^{\sqrt{6y}} f(x, y)\,dx.$

2.27. $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{\sqrt{e^y}}^{e^y} f(x, y)\,dx + \int\limits_1^{2} dy \int\limits_{\sqrt{e^y}}^{e} f(x, y)\,dx.$

2.28. $\int\limits_{0}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{3\ln y} f(x, y)\, dx.$

2.29. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-2}^{y+2} f(x, y)\, dx + \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx.$

2.30. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2-4}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2.31. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)\, dy.$

2.32. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2.33. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\frac{1}{2a}(a^2-x^2)}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2.34. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{y\sqrt{3}} f(x, y)\, dx.$

2.35. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{3-x} f(x, y)\, dy.$

2.36. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx.$

2.37. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{e}^{e^y} f(x, y)\, dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{e^{y/2}}^{e^2} f(x, y)\, dx.$

2.38. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\frac{1}{2}(1+x)}^{0} f(x, y)\, dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\frac{1}{2}(1+x)}^{-\sqrt{x}} f(x, y)\, dy.$

2.39. $\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2}-x} f(x, y)\, dy.$

2.40. $\int\limits_{-1}^{-\sqrt{3}/2} dx \int\limits_{1/2}^{\frac{1}{2}+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x, y)\, dy.$

2.41. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x, y)\, dy.$

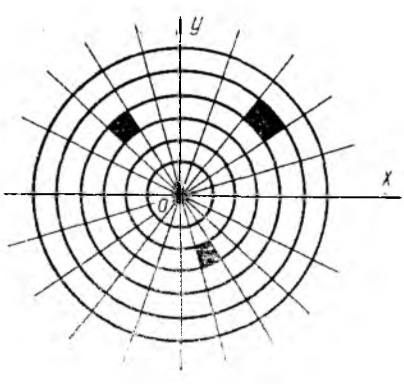
2.42. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx.$

3-§. Қутб координаталар системасида икки каррали интегрални такрорий интегралга келтириш

Энди (r, φ) қутб координаталар системасида (P) соҳани юзачаларга бўлишни кўриб ўтамиз. Бу системада $\varphi = \text{const}$ муносабат 0 қутбдан чиқиб қутб ўқининг мусбат йўналиши билан (соат миллари йўналишига қарама-қарши йўналишда) φ бурчак ташкил этувчи нурлар оиласини тавсифлайди $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Ушбу $r = \text{const}$ муносабат эса маркази O қутбда ва радиуси r га тенг бўлган концентрик айланалар оиласини тавсифлайди, унда равшанки, $r \geqslant 0$. Чизиқларнинг юқорида тавсифланган икки оиласи бутун текисликни юзачаларга бўлади (9-чизма). Ҳар бир юзача икки айлана $(r = r_1,\ r = r_2)$ ва икки нур $(\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2)$ билан чегараланган бўлиб, уни юзи учун $\Delta S = r d\varphi\, dr$ формула (юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар аниқлигида) ўринли. Агар икки каррали интегралда интеграллаш ўзгарувчилари декарт координаталаридан иборат бўлса, унда (x,y)декарт координаталарини (r, φ) қутб координаталарига $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ формулалар бўйича алмаштириш лозим. Шу алмаштириш натижасида

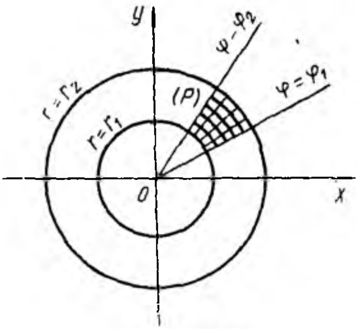
$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(P_1)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr\, d\varphi \qquad (1.19)$$

формула ҳосил бўлади. ([1] дан XVI б., 4-§; [2] дан 18-б, 7-§ га қ.). Бунда (P_1) соҳа қутб координаталари ёрдамида тавсифланган (P) соҳанинг ўзи. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштиришга оид материал 5-§ да берилган.



9-чизма

9-мисол. Қутб координаталарига ўтилганда интегралнинг чегаралари ўзгармас бўлиши учун ушбу $\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy$ интегралда (P) соҳа қандай бўлиши керак?



10-чизма

Ечиш. Юқорида айтиб ўтилган $\varphi = \text{const}$, r-const чизиқлар оиласидан кўриниб турибдики, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ шартларни қаноатлантирувчи (P) соҳа (10-чизма) $O(0, 0)$ дан чиққан икки $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ нур ва маркази $O(0, 0)$ да бўлган концентрик $r = r_1$, $r = r_2$ айланалар билан чегараланган бўлиши керак. Шу ҳолда биз қуйидагига эга бўламиз:

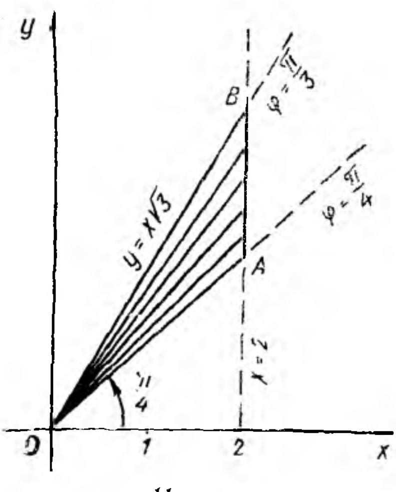
$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\, dr =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} r\, dr \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

10-мисол. Ушбу $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dy$ интегралда (r, φ) қутб координаталарга ўтилсин, такрорий интегралда интеграллаш чегаралари икки хил тартибда қўйилсин.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси (P), равшанки, $x = 0$, $x = 2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$ тўғри чизиқлар билан чегараланган OAB учбурчакдан иборат (11-чизма). Бу тўғри чизиқларнинг (r, φ) системадаги тенгламаларини аниқлаймиз:

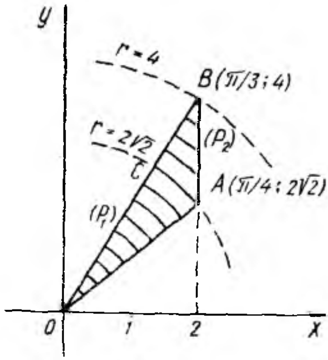
OA учун $y = x$, яъни $\varphi = \pi/4$,
OB учун $y = \sqrt{3}\,x$, яъни $\varphi = \pi/3$,
AB учун $x = 2$, яъни $r = 2/\cos\varphi$
ёки $\varphi = \arccos\dfrac{2}{r}$.



11-чизма

Ташқи интегрални φ бўйича ёзиш учун (P) соҳани O қутбдан чиққан $\varphi = \text{const}$ нурлар билан тўлдириб чиқамиз ва $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ эканлигини аниқлаймиз. Бу нурларнинг ҳар бирида (P) соҳага тегишли нуқталарнинг r радиус — вектори 0 (ноль) дан $x = 2$ тўғри чизиқнинг AB кесмасидаги нуқтанинг радиус— вектори қийматигача ўзгаради, яъни $0 \leqslant r \leqslant 2/\cos\varphi$. Натижада берилган интегрални қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{0}^{2/\cos\varphi} f(r)\cdot r\,dr.$$



12- чизма

Энди ички интегрални φ бўйича ёзиш талаб этилса, у ҳолда ташқи интеграл r бўйича ёзилиши керак. Шунинг учун (P) соҳани маркази қутбда ва радиуси $r = \text{const}$ бўлган концентрик айланалар ёйлари билан тўлдириб чиқамиз. r нинг энг кичик қиймати $r_1 = 0$ ва энг катта қиймати $r_2 = 4$ бўлади. Лекин $r = 2\sqrt{2}$ $(OA = 2\sqrt{2})$ айлана (P) соҳани иккита (P_1) — OAC доиравий сектор ва (P_2) — ABC эгри чизиқли учбурчакларга ажратади (12- чизма). Бу (P_1) ва (P_2) соҳалар қуйидагича тавсифланади:

$$(P_1) = \left\{(r,\varphi): 0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{2};\quad \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}\right\},$$

$$(P_2) = \left\{(r,\varphi): 2\sqrt{2} \leqslant r \leqslant 4;\ \arccos\frac{2}{r} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл ташқи интеграл r бўйича ёзилганда иккита такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} r f(r)\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} r f(r)\,dr \int\limits_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{12}\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) r f(r)\,dr.$$

Машқлар. Кўрсатилган (P) соҳа учун $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dx\,dy$ интегралда қутб координаталарга ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) ўтиб, интеграллаш чегаралари икки хил тартибда қўйилсин:

3.1. $(P) = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$.
3.2. $(P) = \{(x,y): a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2,\ a > 0,\ b > 0\}$.
3.3. $(P) = \{(x,y): (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),\ x \geqslant 0\}$.
3.4. (P) соҳа — $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчак.
3.5. (P) соҳа $x^2 = ay$, $y = a$ $(a > 0)$ чизиқлар билан чегараланган.
3.6. $(P) = \{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.
3.7. $(P) = \{(x,y): 0 \leqslant y \leqslant 2,\ y \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\,y\}$.
3.8. $(P) = \{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\,x\}$.
3.9. $(P) = \{(r,\varphi): r \geqslant 2\cos\varphi,\ r \leqslant 4\cos\varphi\}$.
3.10. $(P) = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x + y \geqslant 2\}$.

3.11. $(P) = \{(x\ y) : x^2 + y^2 \geqslant 8,\ x^2 + y^2 \leqslant 4x\}$.
3.12. $(P) = \{(x,\ y) : x^2 + y^2 \geqslant 18,\ x^2 + y^2 \leqslant 6\ y\}$.
3.13. $(P) = \{(x,\ y) : x^2 + y^2 + 4x \geqslant 0,\ x^2 + y^2 + 8x \leqslant 0\}$.
3.14. $(P) = \{(x,y) : x \geqslant y,\ x + y \leqslant 6,\ y \geqslant 0\}$.
3.15. $(P) = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 4x,\ |y| \leqslant x\}$.
3.16. $(P) = \{(r,\varphi) : r \geqslant 2 \sin \varphi,\ r \leqslant 5 \sin \varphi$ (1 чоракдаги қисми)$\}$
3.17. $(P) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 16,\ x^2 + y^2 \geqslant 4x\}$.
3.18. $(P) = \{(r,\varphi) : r \leqslant 2 \cos 3\varphi,\ r \geqslant 1$ (1 ва IV чоракдаги қисми)$\}$.
3.19. $(P) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$.
3.20. $(P) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4x,\ x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$.
3.21. $(P) = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x \leqslant y \leqslant 3x\}$.
3.22. $(P) = \{(r,\varphi) : r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ (1 чоракдаги қисми)$\}$.
3.23. $(P) = \{(r,\varphi) : r \geqslant 2 + \sin\varphi,\ r \leqslant 2 + \cos\varphi\}$.

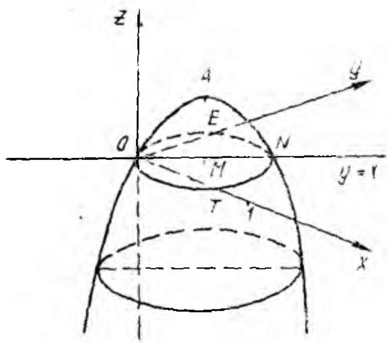
4- §. Икки каррали интегралларни ҳисоблашга доир мисоллар

Аниқ интегралларни ҳисоблаш, умуман айтганда, қийин масала. Бу интеграл остидаги функцияга ҳамда интеграллаш соҳасига боғлиқ. Агар интеграл остидаги функция бўлакли — узлуксиз бўлса, интегрални ҳисоблаш яна қийинлашади. Биз шу параграфда учта мисол келтирамиз, улардан кейинги иккитасида интеграл остидаги функция бўлакли — узлуксиз бўлган ҳол кўрилади.

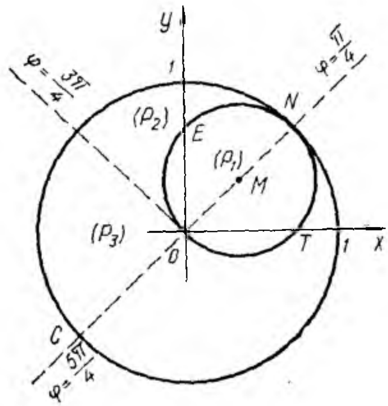
11- мисол. Ушбу $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx\,dy$ икки каррали интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Берилган интегралда модуль остидаги функцияни $z(x,\ y)$ деб белгилаймиз. Уни $z = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўринадики, $z(x,\ y)$ функция $(x,\ y,\ z)$ декарт координаталар системасида учи $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ нуқтада, ўқи эса Oz га параллел бўлган параболоидни тасвирлайди. Параболоид Oz ўқининг манфий йўналиши томон «кенгайиб» боради (13- чизма). Энди $z(x,\ y)$ функциянинг ишорасини текширамиз: а) агар $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ тенгсизлик бажарилса, $z(x,\ y) \geqslant 0$ бўлади. Демак, $(x,\ y)$ текисликдаги маркази $M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ нуқтада ва радиуси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган (P_1) доиранинг барча нуқталарида $|z(x,y)| = z(x,\ y)$ тенглик ўринли. Шу билан бирга (P_1) нинг контурида $z = 0$ бўлади.

б) $(x,\ y)$ текисликнинг қолган қисмида $z(x,\ y) < 0$ ва $|z(x,\ y)| = -z(x,\ y)$ тенглик ўринли. Интеграллаш соҳаси (P) маркази $O(0,\ 0)$ да ва радиуси 1 га тенг бўлган доирадан иборат.



13- чизма



14- чизма

Равшанки, интеграл остидаги функция ва интеграллаш соҳаси (P) $y = x$ биссектрисага нисбатан симметрик. Шунинг учун интегралнинг $y \geqslant x$ соҳадаги қийматини ҳисоблаб, 2 га кўпайтирсак, берилган интеграл қийматини топган бўламиз. Энди интеграллаш соҳасини чизамиз (14- чизма) ва (r, φ) қутб координаталарга ўтамиз: $z(x, y)$ функция $z = r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r^2$ кўринишда ёзилади. (P_1) нинг контурида $z = 0$, демак, кичик айлана тенгламаси $r = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ ва (P) нинг контурида $r = 1$ бўлади.

14- чизмадан кўринадики,

$$\left(ONEO\right) = \left\{\left(\varphi, r\right): \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}; 0 \leqslant r \leqslant \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$ соҳада $z \geqslant 0$: $$\left(P_2\right) = \left(OENB\right) = \left\{\left(\varphi, r\right): \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}; \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant r \leqslant 1\right\}$$ соҳада $z \leqslant 0$; $$\left(P_3\right) = \left(OBC\right) = \left\{\left(\varphi, r\right): \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}; 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$$ соҳада $z < 0$

тенгсизликлар ўринли. Берилган интегрални ушбу

$$I = 2\iint\limits_{(ONE)} z\,dx\,dy - 2\iint\limits_{(OENB)} z\,dx\,dy - 2\iint\limits_{(OBC)} z\,dx\,dy$$

кўринишда ёзамиз ва унда қутб координаталарига ўтиб ҳисоблаймиз:

$$I = 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} r^2\left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r\right] dr -$$

$$-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^{1} r^2\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-r\right]dr -$$

$$-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^2\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-r\right]dr =$$

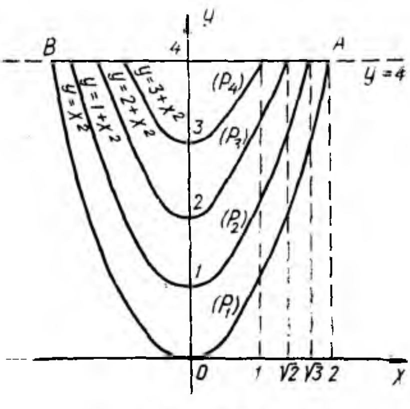
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\cos^4\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi+$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi.$$

Энди ҳосил бўлган йиғиндидаги биринчи интегралда $t=\varphi-\frac{\pi}{4}$, иккинчи интегралда $t=\varphi-\frac{3\pi}{4}$ алмаштириш бажарамиз ва узил-кесил топамиз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2}{3}\cos t+\frac{2}{3}\sin t+\frac{1}{3}\cos^4 t\right)dt=\frac{9\pi}{16}.$$

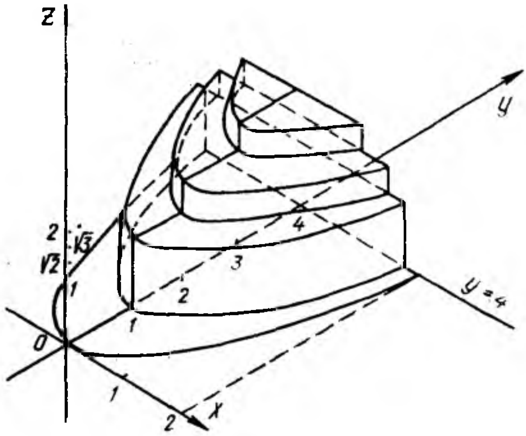
Шундай қилиб, берилган интеграл қиймати $\frac{9\pi}{16}$ га тенг.



15-чизма

12-мисол. Ушбу $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$ икки каррали интеграл ҳисоблансин, унда $[y-x^2]$ — ифод анинг бутун қисмини (антьени) англатади.

Ечиш. (P) соҳа $(x,\ y)$ текисликда $y=x^2$ парабола ва $y=4$ тўғри чизиқ билан чегараланган соҳадан иборат. Интеграл остидаги $z(x,\ y)=\sqrt{[y-x^2]}$ функция (P) соҳада бўлакли — узлуксиз. Униг шу соҳадаги қийматларини аниқлаймиз (15- чизма). Равшанки,



16- чизма

а) $z(x,\ y)=0$, агар $(x,\ y)\in(P_1)=\{(x,\ y): x^2\leqslant y<1+x^2\}$;

б) $z(x,\ y)=1$, агар $(x,\ y)\in(P_2)=\{(x,\ y): 1+x^2\leqslant y<2+x^2\}$;

в) $z(x,y)=\sqrt{2}$, агар $(x,\ y)\in(P_3)=\{(x,\ y): 2+x^2\leqslant y<3+x^2\}$;

г) $z(x,y)=\sqrt{3}$, агар $(x,\ y)\in(P_4)=\{(x,\ y): 3+x^2\leqslant y<4\}$.

Ҳисобланаётган интеграл учта интеграл йиғиндисига тенг, яъни

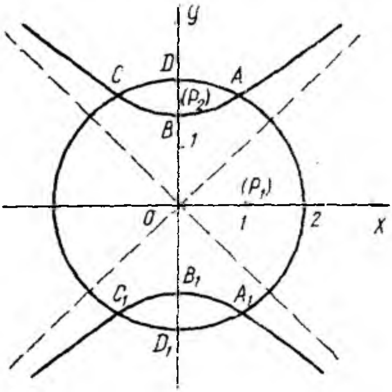
$$\iint\limits_{(P_2)} dx\,dy+\iint\limits_{(P_3)}\sqrt{2}\,dx\,dy+\iint\limits_{(P_4)}\sqrt{3}\,dx\,dy.$$

Бу интеграл миқдор жиҳатдан 16- чизмада кўрсатилган зинасимон жисмнинг ҳажмига тенг. Ҳар бир (P_i), $i=2,\ 3,\ 4$ соҳа Oy ўққа нисбатан симметриклигини ва $\iint\limits_{(P_i)} dx\,dy$ интеграл эса (P_i) соҳанинг S_i юзига тенглигини назарда тутиб, бу юзларни ҳисоблаб чиқамиз (равшанки, $\iint\limits_{(P_1)} 0\ dx\ dy=0$, (P_1) соҳанинг юзи S_1):

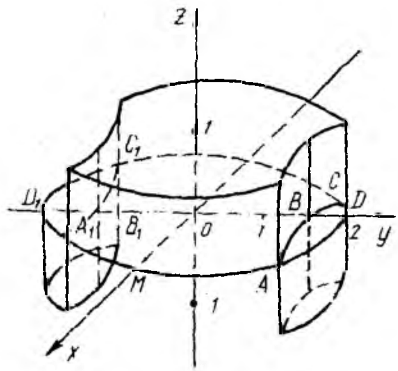
$$S_4=\iint\limits_{(P_4)} dx\ dy=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_{3+x^2}^4 dy=\frac{4}{3};$$

$$S_3=\iint\limits_{(P_3)} dx\ dy=2\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{2+x^2}^4 dy-S_4=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3};$$

$$S_2=\iint\limits_{(P_2)} dx\ dy=2\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx\int\limits_{1+x^2}^4 dy-\left(S_3+S_4\right)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$



17-чизма



18-чизма

Шундай қилиб, берилган интеграл қиймати $S_2 + \sqrt{2}S_3 + \sqrt{3}S_4 = \frac{4}{3}\left(4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$ миқдорга тенг.

13- мисол .Ушбу $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\, dx\, dy$ икки каррали интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Интеграл остидаги функция бўлакли — узлуксиз бўлиб, $x^2 - y^2 + 2 = 0$ эгри чизиқда унинг қиймати аниқланмаган. Шунинг учун бу ҳолда унинг қийматини нолга тенг деб оламиз. Шунда берилган функция $x^2 - y^2 + 2$ ифоданинг ихтиёрий қийматида аниқланган бўлади:

$$z(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} +1, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 > 0, \\ 0, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 = 0, \\ -1, & \text{агар } x^2 - y^2 + 2 < 0. \end{cases}$$

Бу $z(x, y)$ функциянинг графиги учта бўлакдан иборат бўлиб, $z = 0$ бўлганда xOy текисликда $y^2 - x^2 = 2$ гипербола ҳосил бўлади; $z > 0$ бўлганда $z = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ тенглама $y^2 - x^2 = 2$ гиперболанинг икки тармоғи орасидаги xOy текисликнинг Ox ўқини ўз ичига олган қисмига параллел бўлиб, Oz ўқини $(0, 0, 1)$ нуқтада кесиб ўтган текислик қисмини тасвирлайди; $z < 0$ бўлганда $z = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ тенглама $z = -1$ текисликнинг шундай қисмини тасвирлайдики, унинг xOy текисликдаги проекцияси $y^2 - x^2 = 2$ гипербола билан чегараланиб, $|y| \geqslant \sqrt{2}$ тенгсизликни қаноатлантиради.

(P) соҳа Ox ва Oy ларга нисбатан симметрик ва $z(x,y)$ функция ўзаро симметрик нуқталарда бир хил қийматга эга; шунинг учун интегрални $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ бўлганда, яъни биринчи квадрантда ҳисоблаймиз ва натижани 4 га кўпайтирамиз (17- чизма). Берилган интеграл қиймати 18- чизмада тасвирланган жисм ҳажмига тенг. Энди 17- чизмадаги белгиларга асосан ёзамиз:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} Sgn\,(x^2-y^2+2)\,dx\,dy = 4\left(\iint\limits_{(P_1)} dx\,dy - \iint\limits_{(P_2)} dx\,dy\right) =$$

$$= 4\left(S - 2\iint\limits_{(P_2)} dx\,dy\right),$$

бу ерда $S=\pi$ — радиуси 2 га тенг бўлган доира чорагининг юзи ва демак, $I = 4\pi - 8\iint\limits_{(P_2)} dx\,dy$. Охирги интегрални ҳисоблаш учун (P_2) ни чегараловчи чизиқлар тенгламасини ёзамиз: $\breve{DA}$ да $y=\sqrt{4-x^2}$ (айлана ёйи), $\breve{BA}$ да $y=\sqrt{2+x^2}$ (гипербола ёйи), BD да $x=0$, демак,

$$(P_2) = \{(x,\ y): 0\leqslant x\leqslant 1;\ \sqrt{2+x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қиймати учун узил-кесил топамиз:

$$4\pi - 8\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = 8\ \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{3}.$$

Машқлар. I. Қуйидаги икки каррали интеграллар ҳисоблансин:

4.1. $\iint\limits_{(P)} (x-y)\ dx\ dy$, бу ерда (P) — учлари $(1,1,)$, $(4,1)$, (4.4) нуқталарда бўлган учбурчак.

4.2. $\iint\limits_{(P)} y\ dx\ dy$, бу ерда (P) — $y=3x^2$, $y=6-3x$ эгри чизиқлар билан чегараланган соҳа.

4.3 $\iint\limits_{(P)} x\ dx\ dy$, бу ерда (P) — $x^2+y^2=4x-2y+4$ эгри чизиқ билан чегараланган соҳа,

4.4. $\iint\limits_{(P)} (|x|+|y|)\ dx\ dy$, $(P) = \{(x,\ y):\ |x|+|y|\leqslant 1\}$.

4.5. $\iint\limits_{(P)} \ln(1+x^2+y^2)\ dx\ dy$, $(P) = \{(x,\ y): x^2+y^2\leqslant 2\}$.

4.6. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

4.7. $\iint\limits_{(P)} xy^2\ dx\ dy$, бу ерда (P) — $y^2=2\ px$, $x=p\ (p>0)$ чизиқлар орасидаги соҳа:

4.8. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^{3x}\ dx.$

4.9. $\iint\limits_{(P)} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): \pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\}$.

4.10. $\iint\limits_{(P)} (x+y)\, dx\, dy$, бу ерда $(P) - y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ чизиқлар билан чегараланган соҳа;

4.11. $\iint\limits_{(P)} 2|x|\, dx\, dy$, бу ерда (P) — учлари $(-1;\ 4)$, $(5;\ 4)$, $(1;\ 1)$, $(4;\ 1)$ нуқталарда бўлган трапеция.

4.12. $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\, dx\, dy$, $(P) - y=x^2$, $y^2=x$ чизиқлар орасидаги соҳа.

4.13. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{36-x^2-y^2}\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y):\ x^2+y^2 \leqslant 6x\}$.

4.14. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant a^2, y \geqslant 0\}$.

4.15. $\iint\limits_{(P)} [5-x^2-y^2]\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 5\}$.

4.16. $\iint\limits_{(P)} [2x+y]\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

4.17. $\iint\limits_{(P)} \operatorname{sgn}(5x-y-2)\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): -2 \leqslant y \leqslant 4-x^2\}$.

4.18. $\iint\limits_{(P)} \operatorname{sgn}(x^2+y^2-4)\, dx\, dy$, $(P)=\{(x, y): |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 4\}$.

II. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи $S=\iint\limits_{(P)} dx\, dy$ формула бўйича ҳисоблансин:

4.19. $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=e^x$.

4.20. $(x^2+y^2)^2=2ax^3,\ a>0$.

4.21. $y=0,\ y=x,\ x^2+y^2=2x$.

4.22. $x^2+y^2=16,\ x^2=12(y-1)$.

4.23. $y=\frac{1}{3}x^3,\ y=4-\frac{2}{3}x^2$.

4.24. $y=x^2-2x+3,\ y=3x-1$.

4.25. $y=x^2-2x+3,\ y=4-2x$.

4.26. $y^2+8x=16,\ y^2-2x=48$.

4.27. $y=x^2+4x,\ y=x+4$.

4.28. $xy=1,\ xy=4,\ y^2=x,\ y^2=3x$.

5- §. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

Кўпинча икки каррали интегралларни ҳисоблашда ўзгарувчиларни алмаштириш тезроқ натижага олиб келади. Биз қуйида зарур назарий маълумотларни келтирамиз.

Иккита тўғри бурчакли xOy ва uOv координаталар системаси иккита текисликда берилган бўлсин ва (x, y) текисликда (P) деб, (u, v) текисликда эса (Δ) деб белгиланган чегараланган ёпиқ соҳалар олинган бўлсин (19- чизма). Узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

ва

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

функциялар системаси (P) ва (Δ) соҳалар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатсин, дейлик. У ҳолда $\mathrm{I}(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ бўлиб, қуйидаги

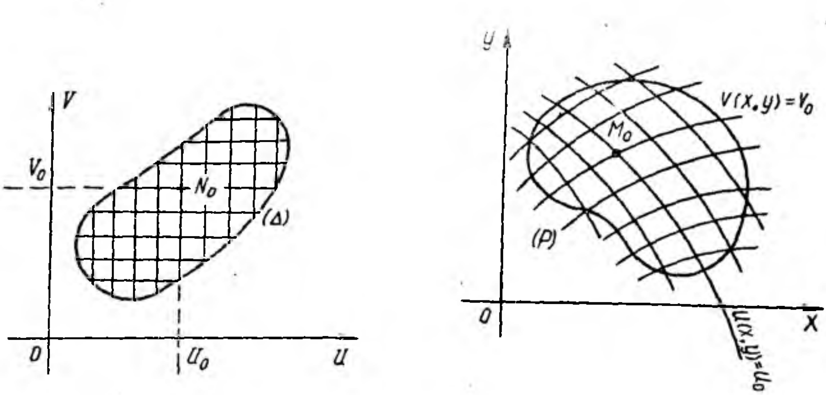
$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left|\mathrm{I}(u, v)\right| du\, dv \tag{1.22}$$

ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ўринли. Бу формуладан $u = r$, $v = \varphi$ ва $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ бўлганда 3- § даги (1.19) формула келиб чиқади.

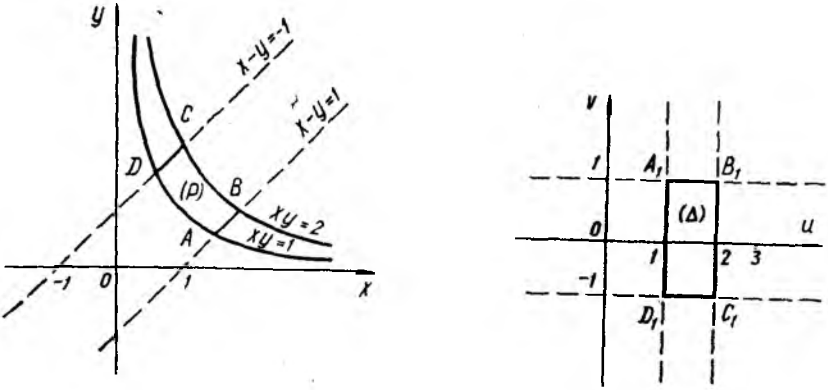
(1.22) формулада $\mathrm{I}(u, v)$ якобианни ҳисоблаганда унинг

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right]^{-1} \tag{1.23}$$

тенгликлар билан ифодаланган хоссасидан фойдаланиш мумкин.



19- чизма



20-чизма

Агар қаралаётган соҳалар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлса, u, v сонларни (P) соҳа нуқталарининг координаталари (эгри чизиқли) деб аташади. u ўзгарувчига турли (барча жоиз) ўзгармас u_0 қийматлар бериб, (x, y) текисликда координата чизиқларининг оиласини ҳосил қиламиз. v ўзгарувчига турли (барча жоиз) ўзгармас v_0 қийматлар бериб, бошқа бир координата чизиқлари оиласига эга бўламиз.

(x, y) текисликдаги координата чизиқларининг тўри (u, v) текисликдаги $u = u_0$, $v = v_0$ тўғри чизиқлар тўрининг аксидан иборат.

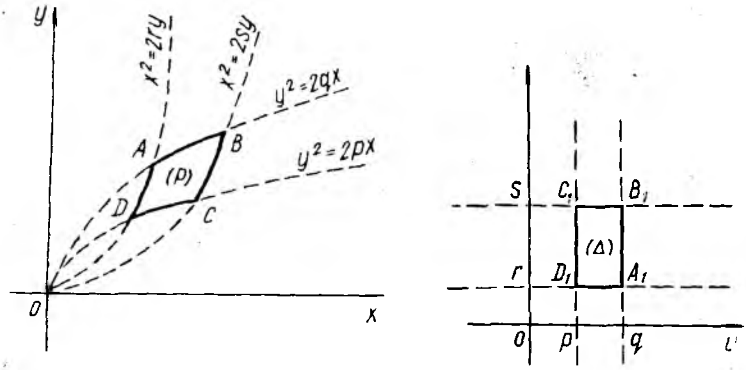
Келажакда мисолларни ечишда аввало координата чизиқларининг тўрини чизиб, сўнгра эгри чизиқли (u, v) координаталарнинг зарур системасини тайинлаш қулай бўлади.

14- мисол. Ўзгарувчилар қандай алмаштирилганда $xy = 1$, $xy = 2$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$ чизиқлар билан чегараланган $ABCD$ (20- чизма) эгри чизиқли тўртбурчак томонлари янги координата ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакка аксланади? $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак юзи топилсин.

Ечиш. (P) соҳа (яъни $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак) $xy = \text{const}$ оилага тегишли иккита гипербола ва $x - y = \text{const}$ оилага тегишли иккита тўғри чизиқ билан чегараланган. Янги эгри чизиқли координаталарни $u = xy$, $v = x - y$ деб оламиз. Параметрларнинг $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = +1$ қийматлари янги (u, v) координаталар системасида Ou, Ov ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқларни тасвирлайди. Натижада $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак $A_1B_1C_1D_1$ тўғри тўртбурчакка аксланади (20- чизма). Энди алмаштириш якобианини ҳисоблаймиз:

$$I(u, v) = \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right]^{-1} = -\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{\sqrt{v^2 + 4u}}.$$

Энди янги координаталар бўйича интеграллаш чегараларини қўйиш



21- чизма

қийин эмас. $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак юзи учун узил-кесил топамиз:

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} |I(u, v)|\, du\, dv = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{1}^{2} \frac{du}{\sqrt{v^2+4u}} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 2\ \ln(\sqrt{5}-1) \qquad \text{(юза бир.)}.$$

15- мисол. Ушбу $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<$ $<p<q,\ 0<r<s)$ чизиқлар билан чегараланган соҳа юзи S топилсин.

Ечиш. Изланаётган S юз параболаларнинг икки тур оиласига тегишли чизиқлар билан чегараланган. Бу параболалар оиласини координата чизиқлари тўри деб, уларнинг параметрларини янги (u, v) эгри чизиқли координаталар деб қабул қиламиз, яъни $u = \frac{y^2}{2x}$, $v =$ $= \frac{x^2}{2y}$. Бу алмаштириш натижасида (21- чизма) (P) соҳа (яъни $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак) ушбу $(\Delta) = \{p \leqslant u \leqslant q,\ r \leqslant v \leqslant s\}$ тўғри бурчакли тўртбурчакка акслаади. Алмаштириш якобианини ҳисоблаймиз: $|I(u, v)| = \frac{4}{3}$. Энди изланган юза осонгина топилади:

$$S = \frac{4}{3} \int\limits_{p}^{q} du \int\limits_{r}^{s} dv = \frac{4}{3}(q-p)(s-r) \qquad \text{(юза бир)}.$$

Кўп мисолларда эгри чизиқли координаталарнинг бир тури бўлган умумлаштирилган r, φ қутб координаталар

$$x = a\, r \cos^{\alpha} \varphi,\ y = b\, r\ \sin^{\alpha}\ \varphi\ (r \geqslant 0) \tag{1.24}$$

формулалар орқали киритилади. Бу ерда a, b, α лар ўзгармас миқдорлар бўлиб, уларнинг қиймати координата чизиқлари оиласига боғлиқ ҳолда олинади. Шу (1.24) алмаштириш якобианини ҳисоблаб қўямиз:

$$\frac{D(x,\ y)}{D\ (r,\ \varphi)} = \alpha \cdot a\, b\, r \cos^{\alpha-1}\varphi \cdot \sin^{\alpha-1}\varphi. \tag{1.25}$$

16- мисол. Ушбу $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4,$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\,\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0,\ y > 0)$$

чизиқлар билан чегараланган (P) соҳа юзи ҳисоблансин.

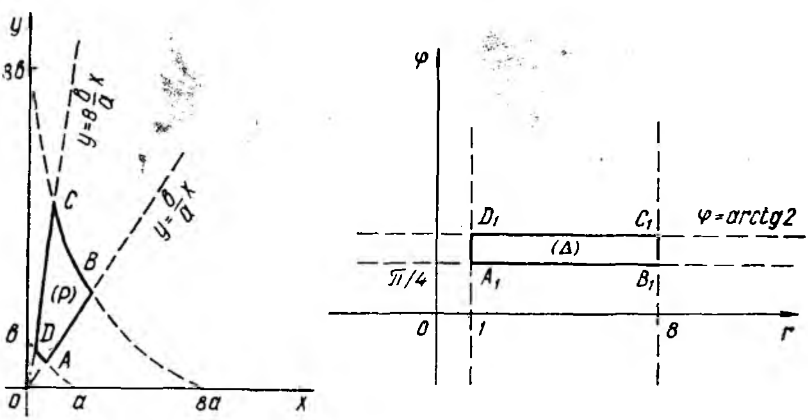
Ечиш. (P) соҳани чегараловчи эгри чизиқлар иккита ғоилага тегишли, демак, юқоридаги мисолларда қўлланилган усул билан

$$\frac{y}{b} = v\,\frac{x}{a}, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = u$$

формулалар ёрдамида янги u, v ўзгарувчиларни киритса бўлади. Лекин $x = ar\cos^3\varphi$, $y = br\sin^3\varphi$ $(r \geqslant 0)$ формулалар орқали олинган умумлаштирилган қутб координаталар масала ечишни осонлаштиради. Керакли ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \text{ эгри чизиқда } r = 1;$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4 \text{ эгри чизиқда } r = 8;$$



22-чизма

$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ тўғри чизиқда $\varphi=\pi/4$ ва $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ тўғри чизиқда $\varphi=$ $=\operatorname{arc\,tg} 2$, $I(r, \quad \varphi)=3ab\,r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Шундай қилиб, берилган (P) соҳа ушбу

$$(\Delta)=\{(r, \varphi):\ 1\leqslant r\leqslant 8;\ \pi/4\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arc\,tg} 2\}$$

соҳага аксланади (22- чизма). Энди изланаётган S юзни ҳисоблаш қийин эмас:

$$S=\iint\limits_{(P)}dx\,dy=\iint\limits_{(\Delta)}|I(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi=3ab\int\limits_1^8 r\,dr\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arc\,tg}2}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\operatorname{arc\,tg}2}=$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\frac{6}{25}\right)\quad\text{(юза бир.).}$$

Кўрсатма. Биз юқорида ушбу $\sin 4\varphi=\frac{4\operatorname{tg}\varphi\,(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2}$ формуладан фойдаландик.

17- мисол. Ушбу $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси $(P)=\{(x, y): x^4+y^4\leqslant 1\}$ Ox ва Oy ўқларига нисбатан симметрик ва интеграл остидаги $f(x, y)$ функция x ва y ўзгарувчиларга нисбатан жуфт функция. Шунинг учун $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ соҳада интеграллашни бажариб, чиққан натижани 4 га кўпайтирамиз. Алмаштиришни

$$x=r\sqrt{\cos\varphi},\quad y=r\sqrt{\sin\varphi}\,,\quad r\geqslant 0$$

формулалар ёрдамида киритамиз. Унда якобиан учун

$$I(r, \varphi)=\frac{1}{2}r\cos^{-1/2}\varphi\cdot\sin^{-1/2}\varphi$$

ифодага эга бўламиз. Равшанки, (P) соҳада $r\leqslant 1$ ва унинг $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ бўлган чорагида $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ тенгсизликлар ўринли. Шундай қилиб,

$$(\Delta)=\{(r, \varphi): 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}.$$

Ниҳоят, берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{(P)}(x^2+y^2)\,dx\,dy=4\iint\limits_{(\Delta)}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,|I(r, \varphi)|\cdot dr\,d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^1 r^3dr\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)\cos^{-1/2}\varphi\cdot\sin^{-1/2}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(\operatorname{ctg}^{1/2}\varphi+\operatorname{tg}^{1/2}\varphi)\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^{1/2}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2\cos\pi/4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Демак, берилган интеграл қиймати $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ га тенг.

Машқлар. I. Қуйидаги мисолларни қараётганда ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланилсин:

5.1. Ушбу $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{2-y}^{3-y} f(x+y,\ x-y)\,dx$ интегралда янги $u = x + y$, $v = x - y$ ўзгарувчиларга ўтилсин.

5.2. (P) соҳа $xy = 1$, $xy = 4$, $x - 2y = 2$, $x - 2y + 1 = 0$ $(x > 0$, $y > 0)$ чизиқлар билан чегараланган. Ушбу а) $\iint\limits_{(P)} dx\,dy$ ва б) $\iint\limits_{(P)} (x - 2y)\,dx\,dy$ интеграллар ҳисоблансин.

5.3. Ушбу $\iint\limits_{(P)} \left(\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}}\right)^3 dx\,dy$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда (P) соҳа $x = 1$, $y = -1$, $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}} = 1$ чизиқлар билан чегараланган.

5.4. (P) соҳа $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ астроида билан чегараланган. Ушбу а) $\iint\limits_{(P)} x\,dx\,dy$ ва б) $\iint\limits_{(P)} x^2\,dx\,dy$ интеграллар ҳисоблансин.

5.5. Ушбу $\iint\limits_{(P)} xy\,dx\,dy$ интеграл ҳисоблансин, бунда (P) соҳа $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$ чизиқлар билан чегараланган.

5.6. Ушбу $\iint\limits_{(P)} \sqrt{xy}\,dx\,dy$ интеграл ҳисоблансин, унда (P) соҳа $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ чизиқ билан чегараланган.

II. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юза ҳисоблансин:

5.7. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

5.8. $(x + y)^5 = 6x^2y^2$.

5.9. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

5.10. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$.

5.11. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = 4xy$ $(a > 0,\ b > 0)$.

5.12. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ кардиоида билан $x^2 + y^2 = ay\sqrt{3}$ айлана орасидаги юза.

5.13. $x^3 + y^3 = axy$ — Декарт япроғининг сиртмоғи.

5.14. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

5.15. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$, $y > 0$.

5.16. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$.

5.17. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$

$\frac{x}{a} = 9\,\frac{y}{b} \quad (x > 0,\ y > 0).$

5.18. $xy = a^2,\ xy = b^2,\ x = \alpha y,\ x = \beta y\ (x > 0,\ y > 0)$.

5.19. $xy = a^2,\ xy = b^2,\ y^2 = mx,\ y^2 = nx$
$(0 < a < b,\ 0 < m < n)$.

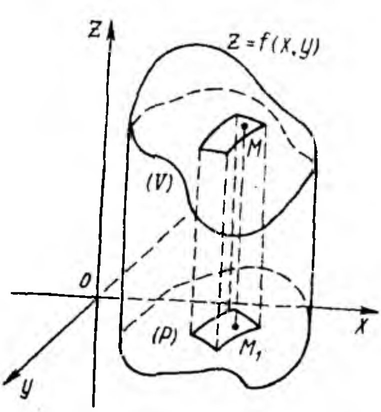
6- §. Икки каррали интеграллар ёрдамида ҳажм ва силлиқ сирт юзаларини ҳисоблаш

Икки каррали интеграллар турли масалаларни, айниқса, геометрик ва механик масалаларни ечишда кенг қўлланилади. 5-§ да юза ҳисоблашга доир бир неча мисол кўрилган. Энди фазовий жисмнинг ҳажмини ва силлиқ сирт юзасини ҳисоблашга доир мисоллар кўрамиз. Икки каррали интеграл геометрик нуқтаи назардан (x, y, z) декарт координаталар системасида юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан ва қуйидан (x, y) текисликдаги (P) текис шакл билан, ёнларидан ясовчиси Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт билан чегараланган (V) жисмнинг (23- чизма) ҳажмини англатади. Шунинг учун тавсифланган ҳажм ушбу

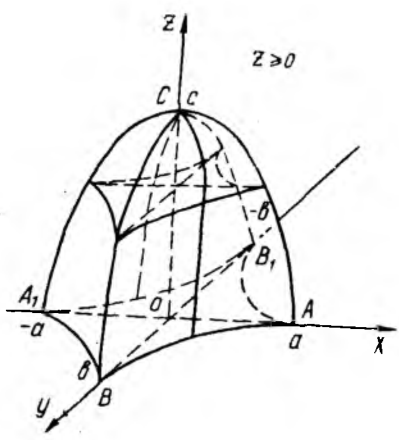
$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy \tag{1.26}$$

икки каррали интеграл билан ёки ўзгарувчиларни алмаштириш натижасида

$$V = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v),\ y(u, v)) \cdot \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv \tag{1.27}$$



23- чизма



24- чизма

интеграл билан ифодаланади. Биз аввал ҳажмларни ҳисоблашга оид мисоллар кўрамиз.

18- мисол. Қуйидаги $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ сирт билан чегараланган жисм ҳажми топилсин.

Ечиш. Берилган сирт тенгламаси x, y, z ўзгарувчилар ўрнига $-x$, $-y$, $-z$ ларни қўйганда ўз кўринишини сақлайди. Демак, шу сирт билан чегараланган фазовий жисм xOz, xOy, yOz координата текисликларга нисбатан симметрик жойлашган (24- чизма). Шунинг учун берилган жисм ҳажми V унинг биринчи октантдаги ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) қисми ҳажмининг (уни V_1 деймиз) 8 бараварига тенг: $V = 8V_1$.

Масалани ечиш учун умумлаштирилган қутб координаталар системасидан фойдаланамиз. Бу ҳолда маълумки,

$$x = ar\cos^3\varphi,\ y = br\sin^3\varphi,\ r \geqslant 0,$$

$$\frac{D(x, y)}{D(z, \varphi)} = 3abr\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi.$$

(V_1) ни юқоридан чегаралаб турган сиртнинг тенгламаси

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1-\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right],\quad z = c\sqrt{1-r^2}$$

кўринишда бўлади; (V_1) пастдан эса xOy $(z = 0)$ текислик билан чегараланган. Энди (V_1) нинг xOy даги проекцияси, яъни (P_1) соҳани чегараловчи эгри чизиқнинг янги (r, φ) системадаги тенгламаси $z = 0$ кўринишга эга, бундан $r = 1$ келиб чиқади.

Энди (P_1) ва (Δ) соҳаларни ёзиш мумкин:

$$(P_1) = \left\{(x, y): x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1\right\},$$

$$(\Delta) = \{(r, \varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Ниҳоят, изланган ҳажмни ҳисоблаш мумкин:

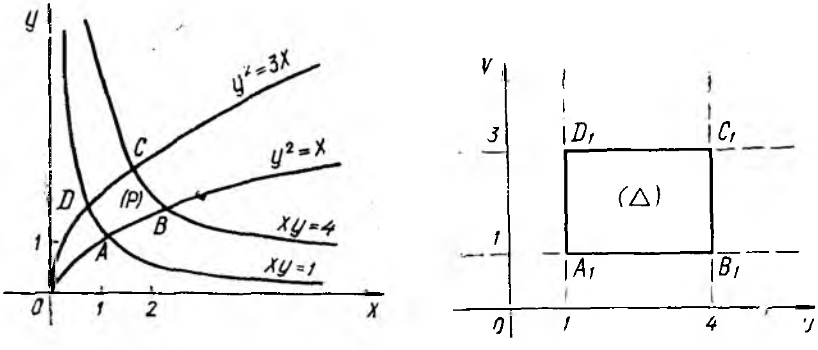
$$V = 8\iint\limits_{(P_1)} z(x, y)\,dx\,dy = 8\iint\limits_{(\Delta)} c\sqrt{1-r^2}\left|\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}\right| dr\,d\varphi =$$

$$= 24abc\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr = \frac{\pi abc}{2}.$$

Шундай қилиб, $V = \frac{\pi abc}{2}$ (куб. бир.)

19- мисол. Ушбу $z^2 = xy\,(z \geqslant 0)$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажми топилсин.

Ечиш. Жисм қуйидан xOy $(z = 0)$ текислик билан, юқоридан эса $z = \sqrt{xy}$ конус сирти билан чегараланган. Ён томондан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган гиперболик $(xy = c)$ цилиндрлар ва параболик $(y^2 = mx)$ цилиндрлар билан чегараланган. Шунинг



25- чизма

учун (V) жисмнинг xOy даги (P) проекцияси $ABCD$ эгри чизиқли тўртбурчак билан чегараланган соҳадан иборат (25- чизма). Бу соҳани аналитик ифодалаш ноқулайликларга эга. Аммо уни ушбу $xy = u$, $y^2 = vx$ алмаштириш натижасида (Δ) соҳага акслантирсак, (Δ) соҳани аналитик ифодалаш осон бўлади (бу соҳа тўғри тўртбурчакдан иборат), яъни

$$(\Delta) = \{(u, v): 1 \leqslant u \leqslant 4;\ 1 \leqslant v \leqslant 3\}.$$

Алмаштириш якобиани учун $I(u, v) = \dfrac{1}{3v}$ ифодага эгамиз.

Энди изланган ҳажмни ҳисоблаймиз:

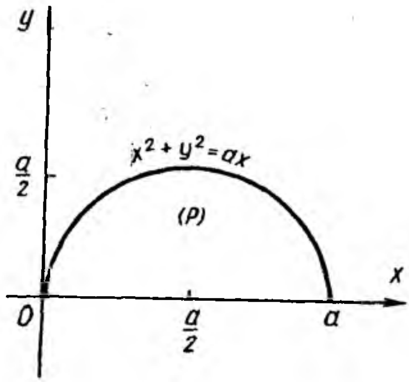
$$V = \iint\limits_{(P)} \sqrt{xy}\, dx\, dy = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\, du \int_1^3 \frac{dv}{v} = \frac{14}{9}\ln 3.$$

Шундай қилиб, $V = \dfrac{14}{9}\ln 3$ (куб. бирл.).

20- мисол. Ушбу $cz = xy$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$, $y > 0$ ($a > 0$, $c > 0$) сиртлар билан чегараланган жисм ҳажми топилсин.

Ечиш. (V) жисм юқоридан $cz = xy$ гиперболик параболоид билан, пастдан xOy текислик билан ва $x^2 + y^2 = ax$ доиравий цилиндрик сиртнинг биринчи октантдаги қисми билан чегараланган. Равшанки, (V) нинг xOy даги (P) проекцияси (26- чизма) қуйидагича

$$(P) = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant a;$$
$$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}\}$$



26- чизма

тавсифланади. Энди изланган ҳажмни ҳисоблаш мумкин:

$$V=\iint\limits_{(P)}\frac{xy}{c}\,dx\,dy=\frac{1}{c}\int\limits_0^a x\,dx\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}}y\,dy=\frac{a^4}{24\,c}\,.$$

Демак,

$$V=\frac{a^4}{24\,c}\qquad\text{(куб. бирл.)}$$

Машқлар. Қуйидаги сиртлар билан чегараланган ҳажмлар топилсин:

6.1. $z=9-y^2$ — цилиндр, координата текисликлари ва $3x+4y=12$ $(y\geqslant 0)$ — текислик.

6.2. $z=\ln x$, $z=\ln y$ — цилиндрлар ва $z=0$, $x+y=2e$ $(x\geqslant 1)$ текисликлар.

6.3. $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$ — цилиндрлар ва $z=0$, $z=x+2y$ текисликлар.

6.4. $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ — цилиндрлар, $z=x^2+y^2$ параболоид ва $x+y=0$, $x-y=0$, $z=0$ текисликлар.

6.5. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

6.6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$, $x>0$.

6.7. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.

6.8. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}$, $y>0$, $z>0$.

6.9. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

6.10. $z=x^2y$, $y^2=a^2-2ax$, $y^2=m^2+2mx$, $y=0$, $z=0$ $(a>0,\ m>0)$.

6.11. $z=5xy$, $y^2=2x$, $y^2=3x$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $z=0$.

6.12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

6.13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $z=0$.

6.14. $z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=2ax$, $z=0$ $(a>0)$.

6.15. $z=\frac{x^2+y^2}{4}$, $x^2+y^2=8y$, $z=0$.

6.16. $z=x^2+y^2+1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=4$.

6.17. $z+y=2$, $z=0$, $y=x^2$.

6.18. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.

6.19. $3z=y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$.

6.20. $x^2+y^2=3z,\ x+z=6.$

6.21. $\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}+\sqrt{\frac{z}{15}}=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$

6.22. $z=3x,\ z=0,\ y=2x-x^2,\ y=-x.$

6.23. $z=2x^3,\ z=0,\ y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\sqrt{3-x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$

6.24. $z=2+x,\ z=0,\ y^2+8x=16,\ y^2-24x=48.$

Энди икки каррали интеграл ёрдамида силлиқ сирт юзларини ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

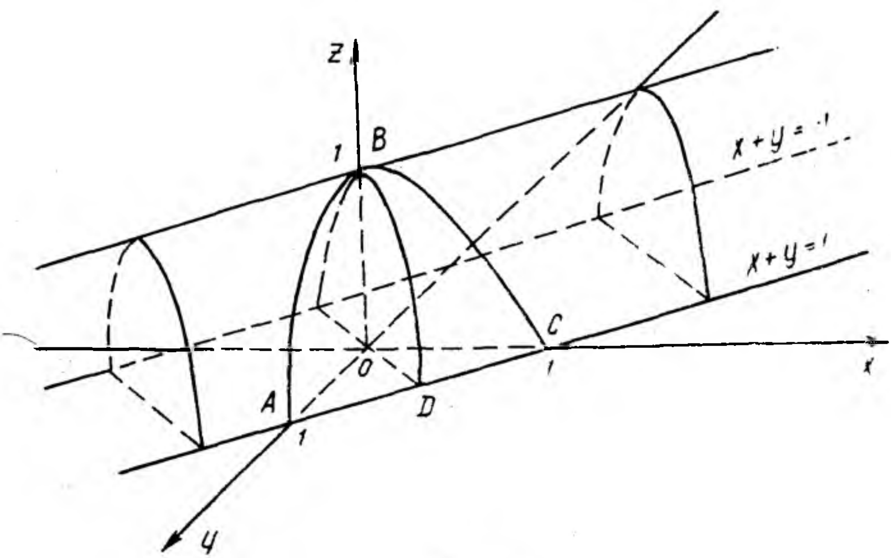
(S) сиртнинг тенгламаси ошкор $z=f(x,y)$ кўринишда берилган бўлсин. Бу сиртнинг xOy даги проекцияси юзини ҳисоблаб бўладиган (квадратланувчи) (D) соҳа бўлиб, бу соҳанинг ҳар бир нуқтасида $z=f(x,y)$ функция узлуксиз $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда бу (S) силлиқ сиртнинг юзи

$$S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \quad (1.28)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Биз қуйида тенгламаси ошкор $z=f(x,y)$ кўринишда берилган силлиқ сирт юзини ҳисоблашга оид мисоллар кўрамиз.

21-мисол. Ушбу $(x+y)^2+z=1$ сиртнинг биринчи октантдаги $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.\ x^2+y^2+z^2\neq ()$ қисмининг юзи ҳисоблансин.

Ечиш. Берилган сирт параболик цилиндр бўлиб, унинг энг юқо-



27-чизма.

рида (Oz ўқи бўйича) жойлашган ясовчиси $x+y=0$ текислик билан $z=1$ текисликнинг кесишиш чизиғидан иборат. Сирт Oz ўқининг манфий йўналишига қараб «кенгайиб» боради (27-чизма) ва xOy текисликни $x+y=\pm 1$ иккита тўғри чизиқ бўйлаб кесиб ўтади. Бизга керакли (D) соҳа биринчи квадрантда жойлашган бўлиб, уни $(D)=\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу 27-чизмада OAC учбурчакдан иборат.

Энди $z=1-(x+y)^2$ кўринишдаги ошкор тенгламадан $z'_x=z'_y=-2(x+y)$ хусусий ҳосилаларни топиб, $S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+8(x+y)^2}\,dxdy$ интеграл билан ифодаланадиган силлиқ сирт юзини ҳисоблаймиз,

Янги ўзгарувчиларни $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\sin^2\varphi$, $r \geqslant 0$ (бу ҳол учун $I(r, \varphi)=2r\cos\varphi\sin\varphi$) кўринишда умумлаштирилган қутб координаталари ёрдамида киритиб, (D) соҳа ΔOAC ни (r, φ) текисликдаги $(\Delta)=\left\{(r, \varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$ соҳага акслантирамиз.

Энди изланаётган юзни топиш қийин эмас:

$$S=2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 r\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+8r^2}\,dr=13/12.$$

Шундай қилиб, $S=13/12$ (юз бирл.)

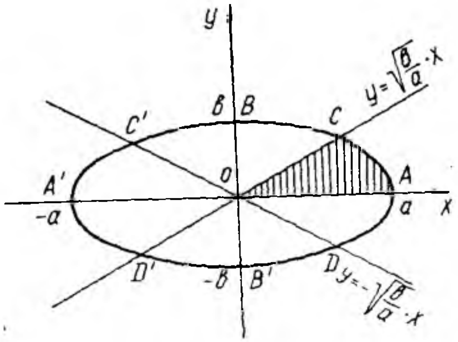
22-мисол. Ушбу $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$ сиртнинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ цилиндр ичидаги қисмининг ($z \geqslant 0$ ҳол учун) юзи топилсин.

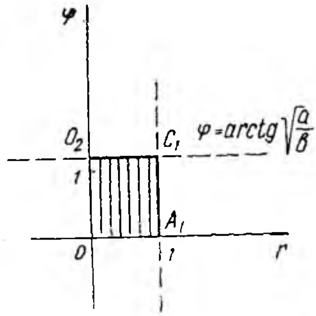
Ечиш. Берилган $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$ сирт гиперболик параболоиддир. У xOy текислик билан $y=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$ тўғри чизиқлар бўйлаб кесишади ва $z \geqslant 0$ қийматлар учун сиртнинг xOy даги проекцияси $|y| \leqslant \sqrt{\frac{b}{a}}\,|x|$ шартни қаноатлантирувчи текислик қисмидан иборат. Цилиндрик сирт эса xOy текисликдан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ тенгламалар билан тавсифланадиган эллипсни ажратади. Шундай қилиб, юзи изланаётган сирт қисмининг xOy даги (D) проекцияси $ODAC$ ва $OD_1A_1C_1$ шакллардир (28-чизма). Берилган сирт кўринишидан ва 28-чизмадан кўриниб турибдики, изланаётган юзани ҳисоблаш учун унинг чорагини $\left(\frac{1}{4}\text{ ни}\right)$ ҳисоблаб, 4 га кўпайтириш етарли, яъни ушбу

$$S=4\iint\limits_{(OAC)}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

икки каррали интегрални ҳисоблаш лозим. Бу интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталарга ўтамиз:

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,\quad I(r, \varphi)=abr,\ r \geqslant 0.$$





28-чизма

Ўзгарувчиларни шундай алмаштирсак, эллипс учун $r=1$, $y=$ $=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$, тўғри чизиқ учун $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (x, y) текисликдаги OAC соҳа (r, φ) текисликдаги

$$(\Delta)=\left\{(r,\varphi):0\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}};\quad 0\leqslant r\leqslant 1\right\}$$

соҳага аксланади. Энди юқоридаги интеграл учун интеграллаш чегараларини қўямиз ва ҳисоблаймиз:

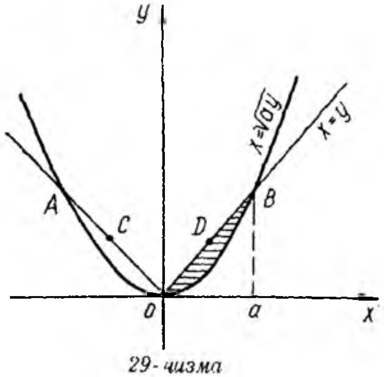
$$S=4ab\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,rdr=$$

$$=\frac{4ab}{3}(2\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Шундай қилиб, $S=\frac{4ab}{3}(2\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$ (кв. бир.)

23-мисол. Ушбу $y^2+z^2=x^2$ сирт юзасидан $x^2=ay$ сирт қандай юзали қисмини ажратади?

Ечиш. Топиш керак бўлган юза $y^2+z^2=x^2$ доиравий конус сиртнинг қисмилан иборат. Бу конус сирт (x, y) текислик билан $y=\pm x$ тўғри чизиқлар бўйлаб кесишади, унинг симметрия ўқи Ox ўқидир. $x^2=ay$ цилиндрик сиртнинг ясовчилари Oz ўқига параллел ва (x, y) текисликдаги йўналтирувчиси $x^2=ay$ параболадан иборат. Демак, интеграллаш соҳаси (P) иккита симметрик



29-чизма

$OBDO$ ва $OACO$ бўлаклардан иборат. Бу соҳалар устида эса конус сиртининг (x, y) текисликка нисбатан симметрик жойлашган $z \geqslant 0$ ва $z \leqslant 0$ тенгсизликлар билан тавсифланадиган қисмлари бор. Шунинг учун изланган юзани ушбу

$$S = 4 \iint\limits_{(OBDO)} \sqrt{1 + (z_x^1)^2 + (z_y^1)^2} \, dx\, dy$$

формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин (29- чизма).

Берилган конус сиртининг изланаётган юзи учун $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ва хусусий ҳосилаларни ҳисоблаб, $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ ифодани топамиз. 29- чизмадан кўринадики,

$$(P) = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant a;\ \ y \leqslant x \leqslant \sqrt{ay}\}.$$

Энди изланаётган юзани ҳисоблаш қийин эмас:

$$S = 4\sqrt{2}\int_0^a dy \int_y^{\sqrt{ay}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(y - \frac{a}{2}\right)^2}\, dy = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}.$$

Шундай қилиб, $S = \dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ (кв. бирл.).

Машқлар. Қуйида кўрсатилган сиртларнинг юзлари топилсин.

6.25. $y^2 + z^2 = x^2$ сиртнинг $x^2 - y^2 = a^2$ — цилиндр ва $y = \pm b$ — текисликлар билан ажратилган қисми,

6.26. $z^2 = 4x$ сиртнинг $y^2 = 4x$ — цилиндр ва $x = 1$ — текислик билан ажратилган қисми.

6.27. $(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1$ сиртнинг $z = 0$ текислик билан ажратилган қисми.

6.28. $x^2 + y^2 = \pm ax$ цилиндрларнинг $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шар ичидаги қисми.

6.29. $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2$ цилиндрик сиртнинг 1- октантдаги қисми ($x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$).

6.30. $(x^2 + y^2)z = x + y$ сиртнинг $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ \ x > 0,\ y > 0$ соҳадаги қисми.

6.31. $az = xy$ гиперболик параболоид сиртининг $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ цилиндр ичидаги қисми.

6.32. $z^2 = 2xy$ конус сиртнинг $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} < 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z = 0,$ $x^2 + y^2 \neq 0,\ a > 0,\ b > 0$ соҳадаги қисми.

6.33. $3z = 2(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$ сиртнинг $x = 0,\ y = 0,\ \ x + y = 1$ текисликлар орасида жойлашган қисми.

6.34. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конус сиртнинг $x^2 + y^2 = 2x$ цилиндр ичида жойлашган қисми.

6.35. $x^2+y^2=2az$ параболоид сиртининг $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(a>0)$ цилиндрик сирт ичида жойлашган қисми.

6.36. $az=xy$ гиперболик параболоид сиртининг $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ цилиндр ичида жойлашган қисми.

6.37. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2z}{c}=1$ сиртнинг $x=0$, $y=0$, $z=0$ координата текисликлар орасида жойлашган қисми.

6.38. $z^2=2xy$ конус сиртнинг $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ текисликлар орасида жойлашган қисми.

6.39. $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ гиперболик параболоид сиртининг $(x^2+y^2)^2=$ $=x^2-y^2$ цилиндр ичида жойлашган қисми.

6.40. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ва $x+2z=a$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг тўла сирти $(a>0)$.

6.41. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a, b, c>0)$ сиртнинг 1-октантдаги қисми.

6.42. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера сиртининг $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$ цилиндр ичидаги қисми.

6.43. $x^2+y^2=6z$ сиртнинг $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$ цилиндр ичидаги қисми.

6.44. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ сиртнинг $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ цилиндр ичидаги қисми.

6.45. $z^2=4x$ сиртнинг $y^2=4x$, $x=1$ сиртлар билан ажратилган қисми.

7-§. Икки каррали интеграллар ёрдамида механикага оид масалаларни ечиш

Мазкур параграфда икки каррали интеграллар ёрдамида берилган бир жинсли пластинканинг массаси, оғирлик марказини, маълум эгри чизиқлар билан чегараланган юзанинг координата ўқларига нисбатан инерция моментларини топишга оид мисоллар кўрилади.

24-мисол. Ушбу $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x>0,\ y>0)$ эгри чизиқ билан чегараланган бир жинсли пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. Механикадан маълумки, бир жинсли пластинка оғирлик марказининг координаталарини ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iint_{(S)}\rho\, x\, dx\, dy,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iint_{(S)}\rho\, y\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

формулалар бўйича ҳисобланади. (1.29) формулада миқдор

$$M=\iint_{(S)}\rho\, dx\, dy. \qquad (1.30)$$

(S) пластинка массасини, ρ эса ҳар бир нуқтадаги масса зичлигини англатади. Бир жинсли пластинка учун $\rho = 1$ деб қабул қилинган.

Кўрилаётган мисол учун интеграллаш соҳаси $y = x$ биссектрисага нисбатан симметрик бўлган лемнискатанинг битта япроғидан иборат. Шунинг учун $y_0 = x_0$. Энди (x_0, y_0) оғирлик марказини топиш учун қутб координаталарига ўтамиз: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, бунда якобиан учун $I(r, \varphi) = r$ ифодага эгамиз. Лемниската тенгламаси $r^2 = a^2\sin 2\varphi$ кўринишга эга ва интеграллаш соҳаси қутб координаталарда қуйидагича ёзилади:

$$(S) = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi}\}.$$

Энди пластинка массасини ҳисоблаймиз:

$$M = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr = \frac{a^2}{2}.$$

Ниҳоят, бундан фойдаланиб (1.29) формулалар бўйича оғирлик маркази координаталарини топамиз (бизнинг ҳолда $x_0 = y_0$):

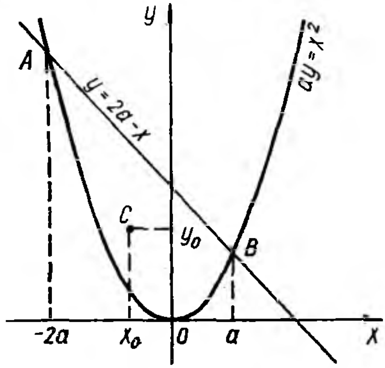
$$y_0 = x_0 = \frac{2}{a^2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2\cos\varphi\, dr =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} a \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\varphi\cos^{5/2}\varphi\, d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} a\, \frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(7/4)}{\Gamma(3)} = \frac{\pi a}{8}.$$

Шундай қилиб, пластинканинг оғирлик маркази $\left(\frac{\pi a}{8};\ \frac{\pi a}{8}\right)$ нуқтада жойлашган.

25-мисол. Ушбу $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$ чизиқлар билан чегараланган бир жинсли пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. Пластинка бир жинсли бўлгани учун $\rho = 1$ бўлади. Изланган оғирлик марказини топиш учун аввалги мисолда келтирилган (1.29) ва (1.30) формулалардан фойдаланамиз. (S) парабола ва тўғри чизиқ билан чегараланган соҳа (30-чизма). Шу (S) соҳани топиш учун



30-чизма

$$\begin{cases} ay = x^2, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

системадан абсциссаси энг кичик бўлган A ва абсциссаси энг катта бўлган B нуқталарни топамиз. Шу нуқталар учун $x_A = -2a$, $x_B = a$.

Энди (S) соҳани ёзиш мумкин:

$$(S)=\left\{(x,\,y):-2a\leqslant x\leqslant a;\ \ \frac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant 2a-x\right\}.$$

Ниҳоят, пластинка массасини ва оғирлик маркази координаталарини топамиз:

$$M=\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\frac{9}{2}\,a^2;$$

$$x_0=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}xdx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=-\frac{a}{2};$$

$$y_0=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\frac{8a}{5}.$$

Шундай қилиб, оғирлик маркази $\left(-\frac{a}{2};\ \frac{8a}{5}\right)$ нуқтада жойлашган.

26-мисол. Ушбу $r=a\,(1+\cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган юзанинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан I_x ва I_y инерция моментлари топилсин (зичлиги $\rho=1$ деб қаралсин).

Ечиш. Берилган юзанинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$I_x=\iint_{(S)}\rho\,y^2\,dx\,dy,\quad I_y=\iint_{(S)}\rho\,x^2\,dxdy \tag{1.31}$$

формулалар ёрдамида топилади.

Қутб координаталар системасида қуйидагига эгамиз:

$$(S)=\{(\varphi,\,r):-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant r\leqslant a\ (1+\cos\varphi)\}.$$

Энди инерция моментларини ҳисоблаймиз:

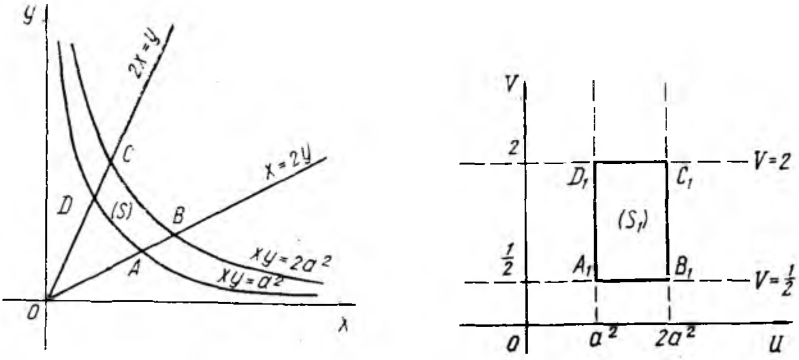
$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,d\,\varphi\int_{0}^{a\,(1+\cos\varphi)}r^3dr=32a^4\int_{0}^{\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\,d\,\varphi=$$

$$=32a^4\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma\ (7)}=\frac{21\,\pi\,a^4}{32};$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi\,d\,\varphi\int_{0}^{a(1+\cos\varphi)}r^3dr=\int_{-\pi}^{\pi}d\,\varphi\int_{0}^{a(1+\cos\varphi)}r^3\,dr-I_x=$$

$$=8a^4\int_{0}^{\pi}\cos^8\frac{\varphi}{2}\,d\,\varphi-I_x=$$

$$=\frac{8a^4\ \Gamma(^1/_2)\ \Gamma(^9/_2)}{\Gamma(5)}-I_x=\frac{49\,\pi\,a^4}{32}.$$



31-чизма

Демак, $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4, \quad I_y = \frac{49}{32}\pi a^4.$

27-мисол. Ушбу $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ $(x > 0, y > 0)$ чизиқлар билан чегараланган юзанинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан I_x ва I_y инерция моментлари топилсин ($\rho = 1$).

Ечиш. (S) юза шундайки (31-чизма), мисолни ечишда эгри чизиқли координаталар тезроқ натижага олиб келади. Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз: $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, бунда $I\ (u, v) = \frac{1}{2v}$.

Юқоридаги алмаштиришдан $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$ ифодаларни топамиз. Натижада интеграллаш соҳаси (S) янги (S_1):

$$(S_1) = \left\{(u, v) : a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2;\ \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2\right\}$$

соҳага аксланади.

Аввало (S) соҳа $y = x$ биссектрисага нисбатан симметрик, шунинг учун $I_x = I_y$ бўлади. Энди инерция моментларини топамиз:

$$I_x = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} u du \int_{1/2}^{2} dv = \frac{9a^4}{8};$$

$$I_y = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} u du \int_{1/2}^{2} \frac{dv}{v^2} = \frac{9a^4}{8}.$$

Демак,

$$I_x = I_y = \frac{9a^4}{8}.$$

Машқлар. Қуйидаги мисолларни ечинг ($\rho = 1$ деб олинган).

7.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geqslant 0$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

7.2. $x^2+y^2=R$, $y=\pm\operatorname{tg}\alpha\cdot x$, $x>0$ (α — ўткир бурчак) доиравий секторнинг оғирлик маркази топилсин.

7.3. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ муносабатлар билан аниқланган соҳа шаклидаги пластинка оғирлик маркази топилсин.

7.4. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (ўнг япроқ) эгри чизиқ билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

7.5. $y=a+\frac{x^2}{a}$, $y=2x$, $x=0$ чизиқлар билан чегараланган юза учун Ox ва Oy ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.

7.6. $x^2+y^2=a^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳа шаклидаги пластинка учун I_x, I_y инерция моментлари топилсин.

7.7 $y^2=4x+4$ ва $y^2=-2x+4$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

7.8 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эгри чизиқ билан чегараланган юза учун I_x, I_y инерция моментлари топилсин.

7.9. $\frac{x}{9}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган юза учун I_x, I_y лар топилсин.

7.10. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ эгри чизиқ билан чегараланган юза учун қутб моменти топилсин.

Эслатма. Қутб моменти ушбу

$$I_0=\iint_{(S)}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

7.11. $x^2+y^2\leqslant 16$, $x\geqslant 2\sqrt{3}$ тенгсизликлар билан аниқланадиган пластинканинг (доиравий сегментнинг) оғирлик маркази топилсин.

7.12. $xy=1$, $xy=2$, $y=2x$, $x=2y$ чизиқлар билан чегараланган юза учун Ox ва Oy ўкларга нисбатан инерция моментлари топилсин.

7.13. Агар $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ доиравий ҳалқанинг ҳар бир нуқтасидаги масса зичлиги $\rho=x^2y^2$ формула билан аниқланса, унинг массаси топилсин.

7.14. $x^2+y^2\leqslant 2x$ доиранинг ($\rho=1$) қутб моменти топилсин.

7.15. Агар $y=x^2-4x$, $y=x$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг ҳар бир нуқтасидаги масса зичлиги $\rho=x+y$ формула билан аниқланса, шу пластинка оғирлик маркази топилсин.

7.16. $xy=4$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=6$ $\left(y\geqslant\frac{1}{2}x^2\right)$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин; шу пластинканинг ҳар бир нуқтаси учун $\rho=5x+3$ деб олинсин.

7.17. $y^2=3x+4$ ва $y^2+4x=11$ ($y\geqslant 0$) чизиқлар билан чегараланган пластинка массаси топилсин, шу пластинканинг ҳар бир нуқтаси учун $\rho=y$ деб олинсин.

7.18. Иккита $\varphi=0$ ва $\varphi=\pi$ нурлар ҳамда $r=a\varphi$. $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ Архимед спирали ёйи билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

7.19. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$ билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

Қуйидаги 7.20—7.24 мисолларда пластинканинг чегарасини аниқловчи чизиқлар берилган. Ҳар бир пластиканинг оғирлик маркази топилсин:

7.20. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $y = 0$.

7.21. $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7.22. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

7.23. $r = a\sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

7.24. $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\varphi$, $\pi/_4 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

7.25. $ay = 2ax - x^2$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юза учун I_x ва I_y инерция моментлари топилсин.

7.26. $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{4} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$ чизиқ билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

7.27. $x + y = 4$, $y = 0{,}5 \cdot x^2$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг оғирлик маркази топилсин.

II боб

УЧ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

8- §. Уч каррали интегрални таърифи бўйича ҳисоблаш

Мазкур бобдаги мисолларни ўрганиш ва машқларни ечиш учун [1] китобдан XVIII бобни ўрганиб чиқиш лозим.

Биз уч каррали интегралнинг Риман таърифини (яъни Риман интеграли таърифини) келтириш билан чегараланамиз.

Бирор фазовий (V) соҳада узлуксиз $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Бу соҳани уч хил силлиқ (бўлакли — силлиқ) сиртлар тўри ёрдамида чекли сондаги (масалан, $m.n.p$ та)

$(V_{1,1,1})$, $(V_{1,1,2})$, ..., $(V_{1,1,p})$, $(V_{2,1,1})$, $(V_{2,1,2})$, ..., $(V_{2,1,p})$, ..., $(V_{i,j,k})$, ..., $(V_{m,n,1})$, $(V_{m,n,2})$, ..., $(V_{m,n,p})$

фазовий соҳачаларга ажратамиз; уларнинг ҳажмларини мос равишда $V_{i,j,k}(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p})$ деб белгилаймиз. Исталган $(V_{i,j,k})$ соҳачадан ихтиёрий $M_{i,j,k}$ нуқта оламиз, функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(M_{i,j,k})$ билан мос соҳачани $V_{i,j,k}$ ҳажмини ўзаро кўпайтирамиз:

$$\sigma_{i,j,k} = f(M_{i,j,k}) \cdot V_{i,j,k} \tag{2.1}$$

ва барча $\sigma_{i,j,k}$ миқдорларни ҳар бир i, j, k индекслар бўйича (мос равишда 1 дан m гача, 1 дан n гача, 1 дан p гача) жамлаб $f(x, y, z)$ функция учун (V) соҳадаги (Риман маъносидаги)

$$\sigma(m, n, p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(M_{i,j,k}) \cdot V_{i,j,k} \tag{2.2}$$

уч каррали интеграл йиғиндини тузамиз. Сўнгра $(V_{i,j,k})$ соҳача $d(V_{i,j,k})$ диаметрларининг энг каттасини $\Delta = \max d\ (V_{i,j,k})$ деб белгилаймиз. Агар Δ сон нолга интилса, равшанки, m, n, p сонлар чексизга интилади. Тескариси, умуман айтганда, тўғри эмас. (2.2) интеграл йиғиндининг $\Delta \to 0$ даги чекли лимити, яъни

$$\lim_{\Delta\to 0} \sigma(m, n, p) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty \\ p\to\infty}} \sigma(m, n, p)$$

сон $f(x, y, z)$ функциянинг (V) соҳа бўйича олинган уч каррали (Риман маъносидаги) интеграли дейилади ва ушбу

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{2.3}$$

символ билан белгиланади.

Биз (V) соҳани кўриладиган мисолларда шундай $(V_{i,j,k})$ соҳачаларга бўламизки, натижада $\Delta \to 0$ да албатта $m \to \infty$, $n \to \infty$, $p \to \infty$ бўлади. Шунинг учун мисолларда $\sigma(m, n, p)$ нинг $m \to \infty$, $n \to \infty$, $p \to \infty$ даги уч каррали лимитини ҳисоблаш етарли бўлади.

Қайд қилиб ўтамизки, агар $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада учала x, y, z аргументи бўйича $(a, b, c) \in (V)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда ушбу $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x, y, z)$ уч каррали лимит учун

6 та $\lim\limits_{x\to a} [\lim\limits_{y\to b} (\lim\limits_{z\to c} f(x, y, z))]$, $\ldots$, $\lim\limits_{z\to c} [\lim\limits_{y\to b} (\lim\limits_{x\to a} f(x, y, z))]$ такрорий лимитлар мавжуд ва улар ўзаро тенг бўлади.

$f(x, y, z)$ функциянинг тузилишига қараб уч каррали лимит учта оддий лимитлар кўпайтмасига тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин. Масалан, узлуксиз $f(x, y, z) = \varphi(x)\cdot g(y)\cdot v(z)$ функция учун

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x, y, z) = \lim_{x\to a} \varphi(x)\cdot \lim_{y\to b} g(y)\cdot \lim_{z\to c} v(z)$$

тенгликка эгамиз. Бу хоссалардан $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ p\to\infty}} \sigma(n, m, p)$ уч каррали лимитни ҳисоблашда фойдаланамиз.

Юқоридаги (2.2) формулада учрайдиган $(V_{i,j,k})$ соҳачанинг ҳажмини ҳисоблаш учун биз уч ҳолни кўриб чиқамиз: (V) соҳа уч хил: 1) сферик (r, φ, θ); 2) цилиндрик (r, φ, z); 3) декарт (x, y, z) координаталари системасидан бирида тавсифланган бўлиши мумкин.

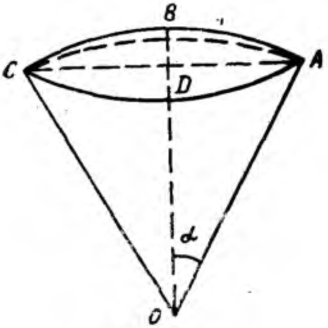
1-ҳол. Геометриядан маълумки, (32-чизма) шар секторининг ҳажми $V = \dfrac{2\pi R^2 h}{3}$ формула билан ҳисобланади, бу ерда $OA = R$, $BD = h$, $\angle AOB = \alpha$, $h = R(1 - \cos\alpha)$ (32-чизма). Демак, шар ҳажми V унинг радиуси R ва сектор ўқ кесимидаги $\angle AOB = \alpha$ бурчакка боғлиқ, яъни

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos\alpha). \tag{2.4}$$

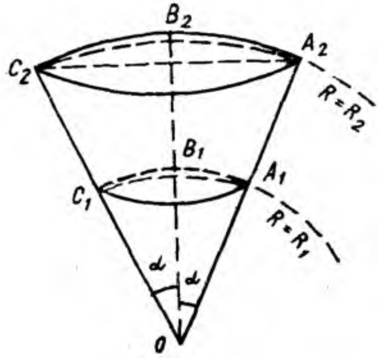
Энди иккита сферик сиртлар ва ўқ кесимидаги бурчак 2α га тенг бўлган конус сирти орасидаги жисмнинг V^* ҳажмини топамиз (33-чизма):

$$V_1 = \frac{2\pi R_1^3}{3}(1 - \cos\alpha),\ OA_1 = R_1;$$

$$V_2 = \frac{2\pi R_2^3}{3}(1 - \cos\alpha),\ OA_2 = R_2; \tag{2.5}$$



32- чизма



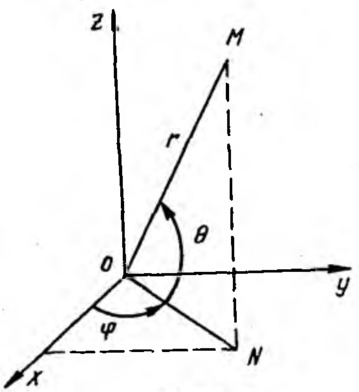
33- чизма

$$V^* = V_2 - V_1 = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos\alpha)\ (R_2^3 - R_1^3).$$

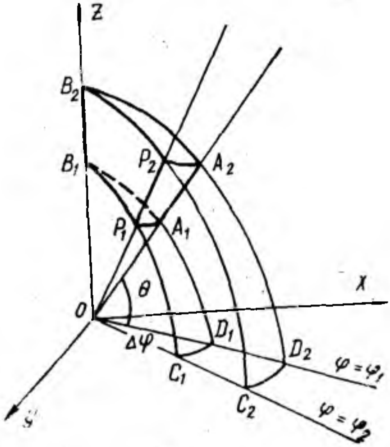
Сферик $(r,\ \varphi,\ \theta)$ координаталарга ўтиш учун $x = r\cos\theta\cdot\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\cdot\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$ (34- чизма) формулалардан фойдаланамиз. 34- чизмадан кўриниб турибдики,

$$\angle\, xON = \varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \angle\, NOM = \theta,$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ OM = r,\ 0 \leqslant r < +\infty.$$

Бу $(r,\ \varphi,\ \theta)$ системада $r = \text{const}$ тенглама сферик сиртни, $\varphi = \varphi_0$ тенглама xOz текислиги билан φ_0 бурчак ташкил этган ярим текисликни ва $\theta = \theta_0$ тенглама эса учи O (0, 0, 0) да бўлган ва ясовчилари xOy текислиги билан θ_0 бурчак ташкил этган доиравий конус сиртини тасвирлайди. Юқоридаги (2.5) формулада α бурчак ўрнига $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$



34- чизма



35- чизма

деб (33- ва 34- чизмаларга қ.), кейинги ҳисоблашларда

$$V^* = \frac{2\pi}{3}(1-\sin\theta)\cdot(R_2^3 - R_1^3) \tag{2.6}$$

формуладан фойдаланамиз.

Энди иккита $r = R_1$, $r = R_2$ сфера, иккита $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ($\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$) ярим текислик ва θ — const конус сирт (35- чизма) билан чегараланган V_3 ҳажмни топиш керак бўлсин. Бу V_3 нинг қиймати $\Delta\varphi$ га пропорционал ва

$$V_3 = \frac{V^*}{2\pi}\cdot\Delta\varphi = \frac{1}{3}(1-\sin\theta)(R_2^3 - R_1^3)\cdot\Delta\varphi \tag{2.7}$$

формула билан ҳисобланади.

Иккита $r = R_1$, $r = R_2$ сфера, иккита $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ярим текислик ва $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ ($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 > 0$) иккита конус орасидаги ΔV ҳажмни (36- чизма) топамиз:

$$\Delta V = V_3(\theta_1) - V_3(\theta_2) = \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\,\Delta\varphi\,[(1-\sin\theta_1) - (1-\sin\theta_2)] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\Delta\varphi\cdot(R^3 - R_1^3)\cdot(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) =$$

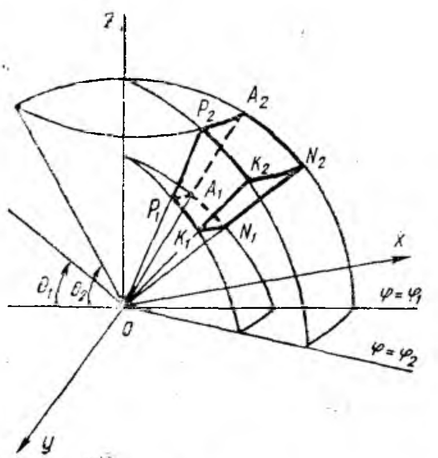
$$= \frac{2}{3}\Delta\varphi\,(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}$$

ёки

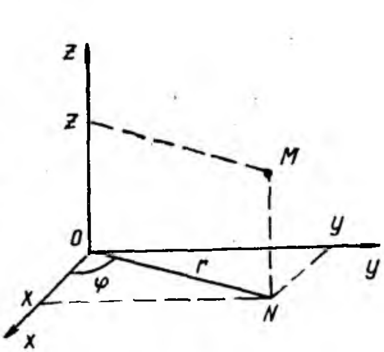
$$\Delta V = \frac{2}{3}(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta R. \tag{2.8}$$

Мисоллар ечишда элементар ($V_{i,j,k}$) соҳачанинг (r, φ, θ) координаталар системасидаги ҳажмини (2.8) формула орқали ёзамиз.

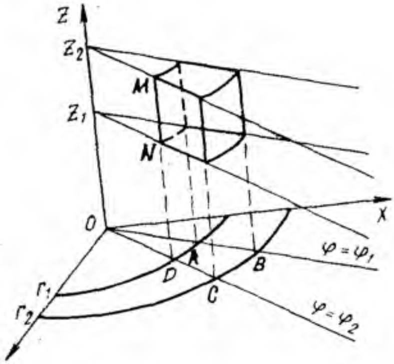
2- ҳол. (x, y, z) фазодаги M (x, y, z) нуқтанинг цилиндрик координаталари (r, φ, z) бўлиб, (x, y, z) лар билан қуйидагича боғланган (37- чизма):



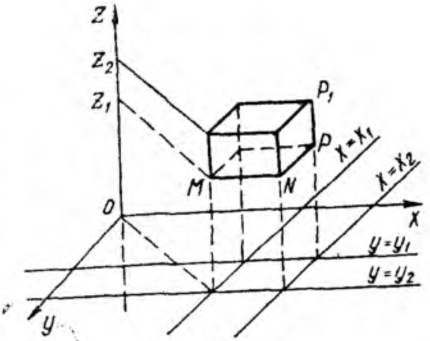
36- чизма



37- чизма



38- чизма



39- чизма

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \ z = z,$$

бу ерда

$$ON = r, \ 0 \leqslant r < +\infty; \ \angle xON = \varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$NM = z, \ -\infty < z < +\infty.$$

Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида $r = r_0$ тенглама ўқи Oz, радиуси r_0 га тенг, ясовчилари Oz га параллел бўлган цилиндрик сиртни, $\varphi = \varphi_0$ тенглама Oz ўқдан ўтувчи ва xOz текислик билан φ_0 бурчак ташкил этган ярим текисликни ва $z = z_0$ тенглама эса (x, y) текисликка параллел ва ундан z_0 масофада ўтувчи текисликни тасвирлайди.

Ушбу иккита $r = r_1$, $r = r_2$ цилиндрик сирт, иккита $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ярим текислик ва иккита $z = z_1$, $z = z_2$ текислик орасидаги ΔV ҳажмни ҳисоблаймиз $(r_1 < r_2, \ \varphi_1 < \varphi_2, \ z_1 < z_2)$.

Икки каррали интегралларни таърифга асосан ҳисоблаганда $ABCD$ шакл (38- чизма) юзаси учун $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\cdot\Delta\varphi$ формулани чиқарган эдик, бу ерда $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

ΔV ҳажм эса S_{ABCD} — асос юзи билан $MN = \Delta z = z_2 - z_1$ баландлик кўпайтмасига тенг, яъни $\Delta V = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta z$, ёки $\Delta r = r_2 - r_1$ десак, ушбу

$$\Delta V = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta z \tag{2.9}$$

формулага эга бўламиз.

3- ҳол. xyz декарт координаталар системасида $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ тўғри бурчакли параллелепипед берилган бўлсин. Унинг учта томони (39- чизма)

$$MN = x_2 - x_1 = \Delta x, \quad PN = y_2 - y_1 = \Delta y, \quad PP_1 = z_2 - z_1 = \Delta z$$

бўлиб, изланаётган ΔV ҳажм эса уларнинг кўпайтмасига тенг бўлади:

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z. \tag{2.10}$$

Энди ҳар бир ҳол учун мисоллар кўрамиз.

1-мисол. Ушбу $\iiint\limits_{(V)} y\, dV$ уч каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бунда (V) соҳа иккита $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ сфера, иккита $z^2 = \operatorname{tg}^2\theta_1 \cdot (x^2 + y^2)$, $z^2 = \operatorname{tg}^2\theta_2 \cdot (x^2 + y^2)$ конус сирт ва иккита $y = \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot x$, $y = \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot x$ ярим текислик билан чегараланган бўлиб, $z > 0$, $0 < a < b$, $\theta_1 < \theta_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$ тенгсизликлар ўринли.

Ечиш. (V) соҳа $r = a$, $r = b$ сфералар, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ конуслар ва $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ярим текисликлар билан чегараланган. Берилган (V) соҳани $(V_{i,j,k})$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p})$ соҳачаларга ажратамиз. Бунинг учун: 1) маркази O $(0, 0, 0)$ да бўлган ва $r = r_i$, $r_i = a + \frac{b-a}{m} i$ $(i = \overline{1,m})$ тенгламали $(m-1)$ та сферик сирт (сфералар); 2) учи O $(0, 0, 0)$ да бўлган $(p-1)$ та $\theta = \theta_k$, $\theta_k = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{p} \cdot k$ $(k = \overline{1,p})$ тенгламали конус сиртлар; 3) Oz ўқидан ўтувчи $(n-1)$ та $\varphi = \varphi_j$, $\varphi_j = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{m} j$ $(j = \overline{1,n})$ тенгламали ярим текисликлар ўтказиб, бутун (V) соҳани $m \cdot n \cdot p$ та $(V_{i,j,k})$ соҳачаларга бўлиб чиқамиз. $(V_{i,j,k})$ соҳача нуқталари учун қуйидаги шартлар бажарилади:

$$r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\ \varphi_{j-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_j,\ \theta_{k-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k$$
$$(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p}).$$

Эслатиб ўтамизки, $r = r_0 = a$, $r = r_m = b$, $\varphi = \varphi_0 = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_n = \varphi_2$, $\theta = \theta_0 = \theta_1$, $\theta = \theta_p = \theta_2$ тенгламалар берилган сиртлар тенгламасидан иборат.

Юқоридаги (2.8) формулага асосан $(V_{i,j,k})$ соҳачанинг ҳажмини ёзамиз:

$$V_{i,j,k} = \frac{2}{3}\left(r_i^2 + r_i r_{i-1} + r_{i-1}^2\right) \cdot \cos\frac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2} \cdot \sin\frac{\Delta\theta}{2} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta r$$

(бу ерда $\Delta\theta = \theta_k - \theta_{k-1}$, $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$, $\Delta r = r_i - r_{i-1}$, ёки $\Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{p}$, $\Delta\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n}$, $\Delta r = \frac{b-a}{m}$). Интеграл остидаги $f(x, y, z) = y$ функцияни $(V_{i,j,k})$ соҳачанинг исталган нуқтасида, масалан қуйидаги сферик

$$r_i = a + \frac{b-a}{n} i,\ \varphi_j = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{m} j,\ \theta_k = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{p} k$$

координаталарга эга бўлган $M_{i,j,k}$ нуқтасида ҳисоблаймиз:

$$f(M_{i,j,k}) = (a + i\,\Delta r) \cdot \sin(\varphi_1 + j \cdot \Delta\varphi) \cdot \cos(\theta_1 + k \cdot \Delta\theta).$$

Интеграл йиғиндининг умумий ҳадини ёзамиз:

$$\sigma_{i,j,k} = f(M_{i,j,k})\cdot V_{i,j,k} =$$

$$=(a+i\Delta r)\cdot\sin(\varphi_1+j\cdot\Delta\varphi)\cdot\cos(\theta_1+k\cdot\Delta\theta)\cdot\frac{2}{3}(r_i^2+r_i r_{i-1}+$$

$$+r_{i-1}^2)\cdot\cos\frac{\theta_k+\theta_{k-1}}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r=$$

$$=(a+i\Delta r)\cdot\sin(\varphi_1+\Delta\varphi\cdot j)\cdot\cos(\theta_1+k\cdot\Delta\theta)\cdot\frac{2}{3}[(a+i\Delta r)^2+$$

$$+(a+i\Delta r)(a+(i-1)\Delta r)+(a+(i-1)\Delta r)^2]\times$$

$$\times\cos\frac{2\theta_1+(2k-1)\Delta\theta}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r=$$

$$=(a+i\Delta r)\cdot\sin(\varphi_1+j\cdot\Delta\varphi)\cdot\cos(\theta_1+k\cdot\Delta\theta)\cdot\frac{2}{3}[3a^2+$$

$$+3a\cdot\Delta r(2i-1)+\Delta r^2(3i^2-3i+1)]\cos\left(\theta_1+\frac{2k-1}{2}\Delta\theta\right)\times$$

$$\times\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r.$$

Ниҳоят, интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma=\sigma(m,n,p)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(M_{i,j,k})\cdot V_{i,j,k}$$

ва уч каррали йиғинди остидаги ифоданинг кўринишига қараб (бу мисолда кўпайтма ҳолида бўлгани учун ва i, j, k ларга нисбатан ажратиш мумкин бўлганлиги учун), уни

$$\sigma=\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{m}(a+i\Delta r)[3a^2+3ar(2i-1)+\Delta r^2(3i^2-$$

$$-3i+1)]\cdot\Delta r\cdot\sum_{j=1}^{n}\sin(\varphi_1+\Delta\varphi\cdot j)\cdot\Delta\varphi\cdot\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\cos(\theta_1+$$

$$+k\cdot\Delta\theta)\cdot\cos\left(\theta_1+\frac{2k-1}{2}\Delta\theta\right),$$

яъни учта йиғиндини $\sigma=\frac{2}{3}\sigma_r\cdot\sigma_\varphi\cdot\sigma_\theta$ кўпайтма кўринишида ёзиш мумкин. Шунинг учун уч каррали лимитни ҳисоблаш учун ушбу

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty\\ p\to\infty}}\sigma=\frac{2}{3}\lim_{m\to\infty}\sigma_r\cdot\lim_{n\to\infty}\sigma_\varphi\cdot\lim_{p\to\infty}\sigma_\theta \qquad (2.11)$$

содда формуладан фойдаланамиз.

Бунинг учун σ_r, σ_φ, σ_θ йиғиндиларни ҳисоблашда 1-бобда келтирилган (1.5) — (1.12) формулалардан фойдаланиб Δr, $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ лар

$$\Delta r = \frac{b-a}{m},\ \Delta\varphi = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{n},\ \Delta\theta = \frac{\theta_2-\theta_1}{p}\ \text{каби}$$

аниқланишини эътиборга оламиз. Энди σ_r, σ_φ ва σ_θ лар учун биринкетин ифодалар топиб, уларнинг мос равишда $m\to\infty$, $n\to\infty$, $p\to\infty$ да лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^{m}[3a^3 + 3a^2\cdot\Delta r\cdot(3i-1) + a\cdot\Delta r^2\ (9i^2-6i+1) +$$

$$+\Delta r^3\ (3i^3-3i^2+i)]\cdot\Delta r = \Big\{3a^3m + 3a^2\cdot\Delta r\cdot\frac{2+(3m-1)}{2}m +$$

$$+a\Delta r^2\left[9\cdot\frac{m\ (m+1)\ (2m+1)}{6} - 6\cdot\frac{m\ (m+1)}{2} + m\right] +$$

$$+\Delta r^3\left[3\cdot\frac{m^2\ (m+1)^2}{4} - 3\cdot\frac{m\ (m+1)\ (2m+1)}{6} +\right.$$

$$\left.+\frac{m\ (m+1)}{2}\right]\Big\}\cdot\Delta r = (b-a)\cdot\Big\{3a^3 + 3a^2\ (b-a)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2m}\right) +$$

$$+a\ (b-a)^2\cdot\left[\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(2+\frac{1}{m}\right) - 3\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right] +$$

$$+(b-a)^3\cdot\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{1}{2m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(2+\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2m^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]\Big\};$$

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_r = (b-a)\left[3a^3 + 3a^2\ (b-a)\cdot\frac{3}{2} + a\ (b-a)^2\cdot 3 + (b-a)^3\cdot\frac{3}{4}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{4}\cdot 3\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{3}{4}\ (b^4 - a^4).$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_\varphi = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sin\ (\varphi_1 + j\cdot\Delta\varphi)\cdot\Delta\varphi =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\varphi\to 0)}}\frac{\sin\dfrac{n\cdot\Delta\varphi}{2}\cdot\sin\left(\varphi_1+\dfrac{n+1}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\Delta\varphi =$$

$$= 2\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\varphi\to 0)}}\frac{\Delta\varphi/2}{\sin\Delta\varphi/2}\cdot\sin\frac{n\ (\varphi_2-\varphi_1)}{2n}\cdot\sin\left(\varphi_1 + \frac{(n+1)\ (\varphi_2-\varphi_1)}{2n}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cdot\sin\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}\ (\varphi_2-\varphi_1)\right) = 2\sin\cdot\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} =$$

$$= \cos\ \varphi_1 - \cos\varphi_2.$$

$$\sigma_\theta = \sum_{k=1}^{p}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\cos\ (\theta_1 + k\cdot\Delta\theta)\cdot\cos\left(\theta_1 + \frac{2k-1}{2}\Delta\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\sum_{k=1}^{p}\left[\cos\left(2\,\theta_1+\frac{4k-1}{2}\,\Delta\,\theta\right)+\cos\frac{\Delta\,\theta}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\sin\frac{\Delta\,\theta}{2}\cdot\left[p\cdot\cos\frac{\Delta\,\theta}{2}+\sum_{k=1}^{p}\cos\left(2\,\theta_1-\frac{\Delta\,\theta}{2}+2k\cdot\Delta\,\theta\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\sin\,\frac{\Delta\,\theta}{2}\cdot\left[p\,\cos\frac{\Delta\,\theta}{2}+\frac{\sin\left(\frac{p}{2}\cdot 2\,\Delta\,\theta\right)\cdot\cos\left(2\,\theta_1-\frac{\Delta\,\theta}{2}+\frac{p+1}{2}\cdot 2\Delta\,\theta\right)}{\sin\frac{2\,\Delta\,\theta}{2}}\right].$$

$$\lim_{p\to\infty}\sigma_\theta=\lim_{\substack{p\to\infty\\(\Delta\theta\to 0)}}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\,\theta}{2}\cdot\frac{\sin\Delta\theta/_2}{\Delta\theta/_2}\cdot\left[p\cdot\cos\frac{\Delta\,\theta}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin(p\cdot\Delta\,\theta)\cdot\cos\left(2\,\theta_1-\frac{\Delta\,\theta}{2}+(p+1)\,\Delta\,\theta\right)}{\frac{\sin\Delta\,\theta}{\Delta\,\theta}}\cdot\frac{1}{\Delta\,\theta}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\lim_{p\to\infty}\left[\frac{\theta_2-\theta_1}{p}\cdot p\cdot\cos\frac{\Delta\,\theta}{2}+\right.$$

$$\left.+\sin\,(\theta_1-\theta_1)\,\cos\left(2\,\theta_1-\frac{\Delta\,\theta}{2}+\left(1+\frac{1}{p}\right)(\theta_2-\theta_1)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\theta_2-\theta_1+\sin\,(\theta_2-\theta_1)\cdot\cos\,(\theta_1+\theta_2)\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\,\left[2\,(\theta_2-\theta_1)+\sin\,2\,\theta_2-\sin 2\,\theta_1\right].$$

Чиққан натижаларни (2.11) га қўйиб, узил-кесил топамиз:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty\\p\to\infty}}\sigma(m,\;n,\;p)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\,(b^4-a^4)\,(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)\cdot\frac{1}{8}\cdot[2\,(\theta_2-$$

$$-\theta_1)+\sin 2\,\theta_2-\sin 2\,\theta_1]=$$

$$=\frac{1}{16}\,(b^4-a^4)\,(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)\,\left[2\,(\theta_2-\theta_1)+\sin 2\,\theta_2-\sin 2\,\theta_1\right].$$

Уч каррали лимитнинг бу қиймати берилган $\iiint\limits_{(V)} ydV$ уч каррали интеграл қийматидан иборат.

2-мисол. Ушбу $\iiint\limits_{(V)} x^2dV$ уч каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бунда (V) соҳа иккита $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ цилиндр, иккита $y=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot x$, $y=\mathrm{tg}\,\beta\cdot x$ ярим текислик ва иккита $z=c$, $z=d$ текислик билан чегараланган $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ c<d)$.

Ечиш. Цилиндрик $(r,\ \varphi,\ z)$ координаталар системасида масала шартидаги цилиндрлар тенгламаси $r=a$, $r=b$, ярим текисликлар тенгламаси $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, ниҳоят, текисликлар тенгламаси $z=c$, $z=d$ каби ёзилади. Цилиндрлар учун Oz ўқи симметрия ўқи, $z=c$, $z=d$ текисликлар эса (x, y) текислигига параллел. Энди интеграл йиғиндини тузиш ҳақида. Биз қуйида (V) соҳани $(V_{i,j,k})$ соҳачаларга шундай бўламизки, аввало $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,n}$ (яъни $m=n=p$), қолаверса, $\Delta\to 0$ да $n\to\infty$ бўлади ва аксинча, $n\to\infty$ да $\Delta\to 0$ бўлади. Бу ҳолда (V) соҳа n^3 та $(V_{i,j,k})$ соҳачаларга бўлинади. Бу иш қуйидагича амалга оширилади: 1) $r=a$ ва $r=b$ цилиндрлар орасига $(n-1)$ та $r=r_i$, $r_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ёки $r_i=a+i\cdot\Delta r$ $\left(\text{бу ерда } \Delta r=\frac{b-a}{n},\ i=\overline{1,n-1}\right)$ цилиндрларни жойлаштирамиз;

2) $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ярим текисликлар орасидан эса $(n-1)$ та $\varphi=\varphi_k$, $\varphi_k=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\cdot k$, ёки $\varphi_k=\alpha+k\cdot\Delta\varphi$ $\left(\text{бу ерда } \Delta\varphi=\frac{\beta-\alpha}{n},\ k=\overline{1,n-1}\right)$ ярим текисликлар ўтказамиз;

3) ниҳоят, $z=c$ ва $z=d$ текисликлар орасига уларга параллел бўлган $(n-1)$ та $z=z_j$, $z_j=c+\frac{d-c}{n}j$, ёки $z_j=c+j\cdot\Delta z$ $\left(\text{бу ерда } \Delta z=\frac{d-c}{n},\ j=\overline{1,n-1}\right)$ текисликлар чизамиз.

Ҳар бир $(V_{i,j,k})$ соҳачадаги нуқталар учун қуйидаги шартлар бажарилади: $r_{i-1}\leqslant r\leqslant r_i$, $\varphi_{k-1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_k$, $z_{j-1}\leqslant z\leqslant z_j$, бу ерда $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

$(V_{i,j,k})$ соҳачанинг $V_{i,j,k}$ ҳажми (2.9) формула орқали ҳисобланади:

$$V_{i,j,k}=\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta z\,\left(r_i+r_{i-1}\right)=\frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta z\,[2a+\Delta r\,(2i-1)]=$$
$$=\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)\Delta\varphi\cdot\Delta z\cdot\Delta r.$$

Интеграл остидаги $f(x, y, z)=x^2$ функция (r, φ, z) системада $f(M)=r^2\cos^2\varphi=\frac{1}{2}r^2\,(1+\cos 2\varphi)$ кўринишда ёзилади. Энди $(V_{i,j,k})$ соҳачадан ихтиёрий $M_{i,j,k}\,(r_i, \varphi_k, z_j)$ нуқтани олиб, шу нуқтада функция қийматини ҳисоблаймиз: $f\,(M_{i,j,k})=\frac{1}{2}r_i^2\,(1+\cos 2\varphi_k)$ ва интеграл йиғиндининг $\sigma_{i,j,k}$- ҳадини ёзамиз:

$$\sigma_{i,j,k}=f\,(M_{i,j,k})\cdot V_{i,j,k}=$$
$$=\frac{1}{2}r_i^2\,(1+\cos 2\varphi_k)\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta z\cdot\left(a+\Delta r\,\frac{2i-1}{2}\right).$$

Энди интеграл йиғиндининг узил- кесил ифодасини топиш мумкин:

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\,(M_{i,j,k})\cdot V_{i,j,k} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right) r_i^2\,\Delta r\cdot\sum_{j=1}^{n}\Delta z\cdot\sum_{k=1}^{n}(1+\cos 2\varphi_k)\,\Delta\varphi.$$

Равшанки, бу йиғинди $\sigma\,(n) = \frac{1}{2}\,\sigma_r\cdot\sigma_\varphi\cdot\sigma_z$ кўринишда ёзилган. Шу сабабли ушбу $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma\,(n)$ лимитни

$$\lim_{n\to\infty}\sigma\,(n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sigma_r\cdot\lim_{n\to\infty}\sigma_\varphi\cdot\lim_{n\to\infty}\sigma_z \tag{2.12}$$

формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун қуйидагича содда ҳисоб-китобларни олиб борамиз:

1) $$\sigma_r = \sum_{i=1}^{n}\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)(a+\Delta r\cdot i)^2\cdot\Delta r =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a+\Delta r\,\frac{2i-1}{2}\right)(a^2+2ai\cdot\Delta r+i^2\Delta r^2)\,\Delta r =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[a^3 + a^2\Delta r\left(3i-\frac{1}{2}\right) + a\cdot\Delta r^2\,(3i^2-i) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\Delta r^3\cdot(2i^3-i^2)\Big]\,\Delta r = \Big\{na^3 + a^2\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{3n\,(n+1)}{2} -\right.$$

$$\left.- n\cdot\frac{1}{2}\right] + a\cdot\frac{(b-a)^2}{n^2}\left[3\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{n\,(n+1)}{2}\right] +$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\left[\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right]\Big\}\cdot\frac{b-a}{n} =$$

$$= (b-a)\,\Big\{a^3 + a^2\,(b-a)\left[\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\right] +$$

$$+ a\,(b-a)^2\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] +$$

$$+ (b-a)^3\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{12n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]\Big\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_r = (b-a)\,\Big[a^3 + \frac{3}{2}\,a^2\,(b-a) + a\,(b-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\,(b-a)^3\Big] = \frac{1}{4}\,(b-a)\,(a^3+a^2b+ab^2+b^3) =$$

$$= \frac{1}{4}\,(b^4-a^4);$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\sigma_\varphi=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\cos 2\varphi_k)\cdot\Delta\varphi=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n+\sum_{k=1}^{n}\cos\,(2\alpha+k\cdot 2\Delta\varphi)\right]\cdot\Delta\varphi=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}+\frac{\sin n\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\left(2\alpha+\frac{n+1}{2}\cdot 2\Delta\varphi\right)}{\sin\Delta\varphi}\cdot\Delta\varphi\right]=$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\varphi\to 0)}}\left[\beta-\alpha+\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi}\cdot\sin\,(\beta-\alpha)\cdot\cos\left(2\alpha+\left(1+\frac{1}{n}\right)(\beta-\alpha)\right)\right]=$$

$$=\beta-\alpha+1\cdot\sin\,(\beta-\alpha)\cdot\cos\,(\alpha+\beta)=\beta-\alpha+\frac{1}{2}\,(\sin 2\beta-$$

$$-\sin 2\alpha);$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\sigma_z=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\Delta z=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n\cdot\Delta z)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{d-c}{n}\right)=d-c.$$

Ниҳоят, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_r$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_\varphi$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_z$ лар учун юқорида топилган ифодаларни (2.12) га қўйиб узил-кесил топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(n)=\frac{1}{8}(b^4-a^4)\left[\left(\beta-\alpha\right)-\frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha-\sin 2\beta\right)\right]\cdot(d-c).$$

Бу миқдор берилган $\iiint\limits_{(V)}x^2\,dV$ уч каррали интеграл қийматидан иборат.

3- мисол. Ушбу $\iiint\limits_{(V)}(Ax^2+Dyz)\,dx\,dy\,dz$ уч каррали интеграл таъриф бўйича ҳисоблансин, бунда

$(V)=\{(x,y,z): a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1\leqslant y\leqslant b_2,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2\}$ — параллелепипед.

Ечиш. (V) соҳани олдинги мисолдагидек n^3 та соҳачаларга (шундай бўламизки, $n\to\infty$ да $\Delta\to 0$ бўлсин) бўламиз. Бунинг учун (x, y), (y, z) ва (z, x) координата текисликларига параллел бўлган

$$z=z_i,\ z_i=c_1+\frac{c_2-c_1}{n}i\qquad\left(i=\overline{1,n};\quad\Delta z=\frac{c_2-c_1}{n}\right);$$

$$x=x_j,\ x_j=a_1+\frac{a_2-a_1}{n}j\qquad\left(j=\overline{1,n};\quad\Delta x=\frac{a_2-a_1}{n}\right);$$

$$y=y_k,\ y_k=b_1+\frac{b_2-b_1}{n}\cdot k\qquad\left(k=\overline{1,n};\quad\Delta y=\frac{b_2-b_1}{n}\right)$$

текисликлар ўтказамиз.

Ҳосил бўлган ҳар бир $(V_{i,j,k})$ соҳача учун

$$x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \quad y_{k-1} \leqslant y \leqslant y_k, \quad z_{i-1} \leqslant z \leqslant z_i$$

шартлар бажарилади ва унинг ҳажми (2.10) формулага асосан

$$V_{i,j,k} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

формула ёрдамида топилади.

Интеграл остидаги $f(x, y, z) = Ax^2 + Dyz$ функция қийматини ихтиёрий (x_j, y_k, z_l) нуқтада ҳисоблаймиз:

$$f(x_j, y_k, z_l) = Ax_j^2 + Dy_k \cdot z_i.$$

Сўнгра натижани $V_{i,j,k}$ ҳажмга кўпайтириб, интеграл йиғиндини (уч каррали йиғиндини) тузамиз:

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (Ax_j^2 + Dy_k \cdot z_i)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A(a_1 + \Delta x \cdot j)^2 + D(b_1 + \Delta y \cdot k)(c_1 +$$

$$+ \Delta z \cdot i)]\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

Бу йиғиндини ҳисоблаш учун олдин k индекс, кейин i индекс бўйича ҳадларни қўшиб чиқамиз:

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[nA(a_1 + \Delta x \cdot j)^2 + D(c_1 + \Delta z \cdot i)\left(nb_1 + \Delta y \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{n(n+1)}{2}\right)\right] \cdot \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \sum_{j=1}^{n} \{n^2 \cdot A(a_1 + \Delta x \cdot j)^2 +$$

$$+ D\left[c_1 \cdot n + \Delta z \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] \cdot \left[b_1 n + \Delta y \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]\Big\}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

Энди $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \dfrac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)}{n^3}$ ифода махражидаги n^3 ни йиғинди белгиси остига киритиб, n^3 га қисқартирамиз, кейин j индекс бўйича йиғиндини ҳисоблаймиз:

$$\sigma(n) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{A}{n} \cdot \left(a_1^2 + 2a_1 \cdot \Delta x \cdot j + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta x^2 \cdot j^2\right) + \frac{D}{n}\left(c_1 + \Delta z \cdot \frac{n+1}{2}\right)\left(b_1 + \Delta y \cdot \frac{n+1}{2}\right)\right] =$$

$$= (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) \cdot \left\{\frac{A}{n}\left[na_1^2 + 2a_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(a_2 - a_1)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + n \cdot \frac{D}{n}\left(c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}\right)\left(b_1 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_2 - b_1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}\right)\right\} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) \cdot \{A[a_1^2 +$$

$$+a_1(a_2-a_1)\left(1+\frac{1}{n}\right)+(a_2-a_1)^2\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\Big]+D\Big[c_1+$$
$$+\frac{c_2-c_1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big]\cdot\Big[b_1+\frac{b_2-b_1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big]\Big\}.$$

Энди $n\to\infty$ да $\sigma(n)$ нинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(n)=(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)\cdot\Big\{A\cdot[a_1^2+a_1(a_2-a_1)+$$
$$+(a_2-a_1)^2\cdot\frac{1}{3}\Big]+D\cdot\Big[b_1+\frac{1}{2}\left(b_2-b_1\right)\Big]\cdot\Big[c_1+\frac{1}{2}\left(c_2-c_1\right)\Big]\Big\}=$$
$$=(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)\cdot\Big[\frac{1}{3}A(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)+\frac{1}{4}D(b_1+$$
$$+b_2)(c_1+c_2)\Big]=\frac{1}{3}A(a_2^3-a_1^3)(b_2-b_1)(c_2-c_1)+\frac{1}{4}D(b_2^2-$$
$$-b_1^2)(c_2^2-c_1^2)(a_2-a_1).$$

Топилган миқдор берилган $\iiint\limits_{(V)}(Ax^2+Dyz)\,dx\,dy\,dz$ уч каррали интеграл қийматидан иборат.

Машқлар. Қуйидаги уч каррали интеграллар кўрсатилган соҳа учун таъриф бўйича ҳисоблансин.

8.1. $\iiint\limits_{(V)}x\cdot dV$, бу ерда (V) соҳа

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2,\quad x^2+y^2=z^2$$
$$(x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$$

сиртлар билан чегараланган.

8.2. $\iiint\limits_{(V)}z\,dV$, бу ерда (V) соҳа

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 16,\quad x^2+y^2\leqslant 3z^2,\ x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$$

шартлар билан берилган.

8.3. $\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, бу ерда (V) соҳа

$$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2,\ x=0,\ y=-\sqrt{3}\cdot x\ (z\geqslant 0)$$

сиртлар билан чегараланган.

8.4. $\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot dV$, бу ерда (V) соҳа

$$x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=\frac{1}{3},\ z^2,\ x^2+y^2+z^2=1,$$
$$x^2+y^2+z^2=16,\ y=0,\ x=0\ (z\geqslant 0)$$

сиртлар билан чегараланган.

8.5. $\iiint\limits_{(V)}(3y+4)\,dx\,dy\,dz$, бу ерда (V) соҳа

$$x^2+y^2+z^2=9,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y=-\sqrt{3}\cdot x,\ x^2+y^2=z^2,$$
$$x^2+y^2=3z^2\ (z\geqslant 0)$$

сиртлар билан чегараланган.

Навбатдаги (8.6) — (8.11) интегралларда (V) соҳа бир хил бўлиб,

$$x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=b^2,\ y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x,\ y=\operatorname{tg}\beta\cdot x,$$
$$z=m,\ z=p\ \left(0<a<b;\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2};\ m<p\right)$$

сиртлар билан чегараланган фазовий жисмдан иборат.

8.6. $\iiint\limits_{(V)} zxy\ dV.$

8.7. $\iiint\limits_{(V)} zy\cdot dV.$

8.8. $\iiint\limits_{(V)} z(x^2+y^2)\ dV.$

8.9. $\iiint\limits_{(V)} z^2\sqrt{x^2+y^2}\cdot dV.$

8.10. $\iiint\limits_{(V)} z^3\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot dV.$

8.11. $\iiint\limits_{(V)} z^3(x^2+y^2)\cdot dV.$

Навбатдаги (8.12) — (8.18) интегралларда (V) соҳа деб параллелепипед олинган: яъни

$$(V)=\{(x,y,z): a\leqslant x\leqslant b,\ m\leqslant y\leqslant p,\ c\leqslant z\leqslant d\}.$$

8.12. $\iiint\limits_{(V)} (3x+y-z)\,dx\,dy\,dz.$

8.13. $\iiint\limits_{(V)} (x^2+z)\,dx\,dy\,dz.$

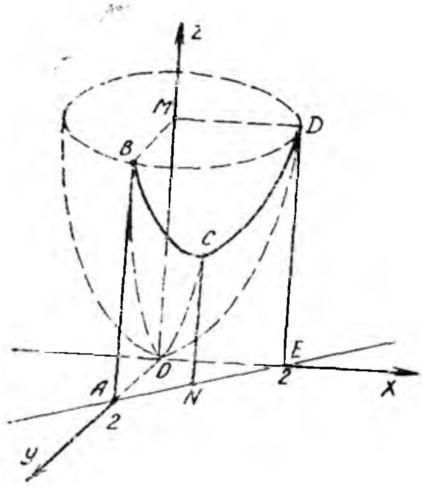
8.14. $\iiint\limits_{(V)} x^2z\,dx\,dy\,dz.$

8.15. $\iiint\limits_{(V)} x^2y^3z^2\,dx\,dy\,dz.$

8.16. $\iiint\limits_{(V)} (4x^2-2y^2)\,dx\,dy\,dz.$

8.17. $\iiint\limits_{(V)} y^3(2x-z)\cdot dV.$

8.18. $\iiint\limits_{(V)} x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$



40- чизма

9- §. Уч каррали интегрални такрорий интегралга келтириш

Уч каррали интегрални такрорий интегралга келтириш икки каррали интегрални такрорий интегралга келтиришга қараганда мураккаброқ. Аввало уч каррали интегрални 6 хил усул билан такрорий интегралга келтириш мумкин, қолаверса, берилган интеграл бир неча такрорий интеграллар йиғиндиси кўринишида ҳам ёзилиши мумкин. Бу (V) соҳага кўпроқ боғлиқ бўлади.

4- мисол. Ушбу $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган соҳа (40- чизма) учун уч каррали интеграл турли усуллар билан такрорий интегралга келтирилсин.

Ечиш. 1- усул. $I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ интегрални тартиб билан z, y, x (ёки z, x, y) лар бўйича олинадиган такрорий интегралга келтирмоқчимиз, дейлик. Бунинг учун Oz ўқига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан (V) соҳани кесиб чиқамиз ва унинг (x, y) текисликдаги проекциясини аниқлаймиз. Бу тўғри чизиқлар (V) соҳа чегараларини олдин $z = 0$ ((x, y) текислигида), кейин $z = x^2 + y^2$ параболоид бўйлаб кесиб ўтади.

(V) соҳанинг (x, y) даги проекцияси $(\triangle) = \triangle\, OAE$ бўлади:

$$(\triangle) = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - x\}.$$

Энди тегишли такрорий интегрални ёзиш қийин эмас:

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz$$

ёки

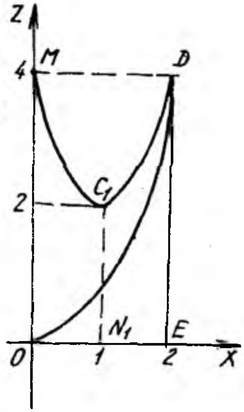
$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-y} dx \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz.$$

2- усул. Энди берилган интегрални тартиб билан y, z ва x лар бўйича олинадиган такрорий интегралга келтирайлик. Бу ҳолда (V) соҳанинг (x, z) текисликдаги проекциясини топиш лозим бўлади. Бунинг учун $z = x^2 + y^2$ ва $x + y = 2$ тенгламалардан y ни чиқариб, тегишли сиртлар кесишиш чизиғининг (x, z) даги проекцияси тенгламасини аниқлаймиз: $MC_1D = \{(x, z): z = 2(x-1)^2 + 2\}$,

$$MC_1 = \left\{(x, z): x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}\right\},$$

$$C_1D = \left\{(x, z): x = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}\right\},\quad OD = \{(x, z): z = x^2\}$$

(41- чизма).



41- чизма

(V) соҳанинг ODE соҳага проекцияланаётган қисмида $0 \leqslant y \leqslant 2-x$ шарт бажарилади; OMC_1D соҳага (V) соҳанинг шундай қисми проекцияланадики, у ерда Oy ўққа параллел тўғри чизиқ олдин $z = x^2+y^2$ параболоидни, сўнгра $x+y=2$ текисликни кесиб ўтади, яъни $\sqrt{z-x^2} \leqslant y \leqslant 2-x$ шарт бажарилади. Энди берилган интегрални икки такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dy + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2(x-1)^2+2} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^{2-x} f(x, y, z)\, dy. \tag{2.2}$$

3- усул. Энди интеграллашни тартиб билан y, x, z лар бўйича олинадиган такрорий интегралга келтирамиз. Бу ҳол учун (41- чизма) (V) нинг (x, z) текисликдаги проекцияси 4 та бўлакка ажралади (бунда (2.2) нинг иккинчи интеграли учта интегралнинг йиғиндиси кўринишида ёзилади):

$$I = \int_0^4 dz \int_{\sqrt{z}}^{2} dx \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dy + \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^{2-x} f(x, y, z)\, dy + \int_2^4 dz \int_0^{1-\sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^{2-x} f(x, y, z)\, dy + \int_2^4 dz \int_{1+\sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}}^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^{2-x} f(x, y, z)\, dy.$$

Шуни қайд қиламизки, x, z, y ёки x, y, z тартибда интеграллаш учун (V) соҳанинг (y, z) текисликдаги проекциясини аниқлаш керак. Шакл $y = x$ биссектриса текислигига нисбатан симметрик бўлгани учун 2- ва 3- усулларда чиқарилган уч каррали интегралларда x ва y ларнинг ўрнини ўзаро алмаштириш етарли:

$$I=\int_0^2 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx+$$
$$+\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2(y-1)^2+2} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx;$$
$$I=\int_0^4 dz\int_{\sqrt{z}}^{2} dy\int_0^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx+$$
$$+\int_0^2 dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx+$$
$$+\int_2^4 dz\int_0^{1-\sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx+$$
$$+\int_2^4 dz\int_{1+\sqrt{\frac{1}{2}(z-2)}}^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{2-y} f(x,\,y,\,z)\,dx.$$

Шундай қилиб, юқорида айтганимиздек, тегишли уч каррали интеграл 6 хил такрорий интегралга, баъзи ҳолларда интеграллар йиғиндисига келтирилиши кўрсатилди.

5-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)\,dz$$

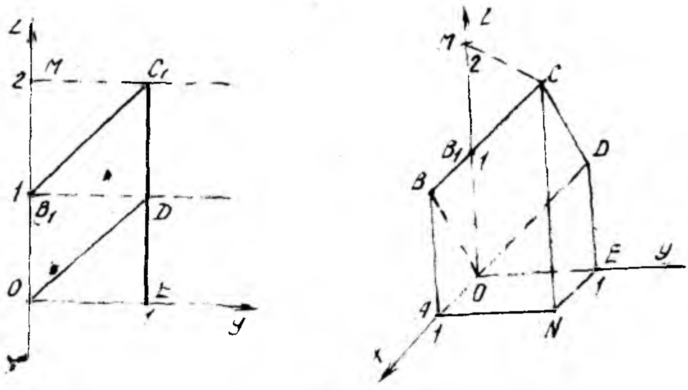
уч каррали интеграл интеграллаш тартибини ўзгартириш натижасида бир каррали (оддий) аниқ интегралга келтирилсин.

Ечиш. Интеграл остидаги функция фақат Z га боғлиқ бўлгани учун биз интеграллаш тартибини шундай ўзгартирамизки, охирида интеграллаш z бўйича олинган бўлсин. Берилган уч каррали интеграл учун равшанки,

$$(V)=\{(x,\,y,\,z)\colon\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1;\ 0\leqslant z\leqslant x+y\}.$$

Аввал (V) соҳани учта (V_1), (V_2), (V_3) соҳага ажратамиз. Бунда (V_1) — (V) соҳанинг $(y,\,z)$ — текисликдаги проекцияси ODE уч бурчакдан, (V_2) — ўша текисликдаги проекцияси OB_1D уч бурчакдан, (V_3) — шу текисликдаги проекцияси B_1DC_1 уч бурчакдан иборат бўлган қисми. Равшанки (42- чизма):

$$(V_1)=\{(x,\,y,\,z)\colon\ 0\leqslant z\leqslant 1;\ z\leqslant y\leqslant 1;\ 0\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$(V_2)=\{(x,\,y,\,z)\colon\ 0\leqslant z\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant z;\ z-y\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$(V_3)=\{(x,\,y,\,z)\colon\ 1\leqslant z\leqslant 2;\ z-1\leqslant y\leqslant 1;\ z-y\leqslant x\leqslant 1\}.$$



42- чизма

Шундай қилиб, берилган интегрални қуйидаги интеграллар йиғиндиси кўринишида (интеграллаш x, y, z тартибда) ёзиш мумкин:

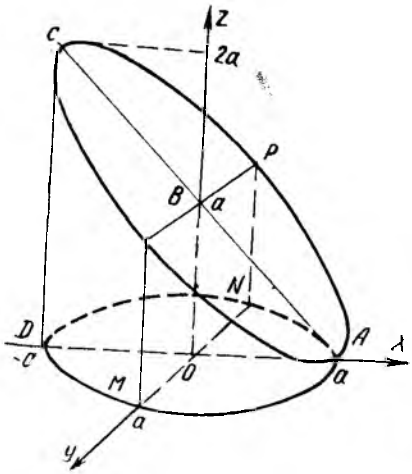
$$I = \int\limits_0^1 f(z)\,dz \int\limits_z^1 dy \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 f(z)\,dz \int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^1 dx +$$
$$+ \int\limits_1^2 f(z)\,dz \int\limits_{z-1}^1 dy \int\limits_{z-y}^1 dx.$$

Уч каррали интегрални ҳисоблаш қоидасига асосан охирги йиғиндини соддалаштирамиз:

$$I = \int\limits_0^1 f(z)\left[\int\limits_z^1 dy \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^1 dx\right] dz + \int\limits_1^2 f(z)\,dz \int\limits_{z-1}^1 dy \int\limits_{z-y}^1 dx =$$
$$= \int\limits_0^1 f(z)\left[\int\limits_z^1 1\cdot dy + \int\limits_0^z (1 - z + y)\,dy\right] dz +$$
$$+ \int\limits_1^2 f(z)\,dz \int\limits_{z-1}^1 (1 - z + y)\,dy = \int\limits_0^1 f(z)\cdot\Big[(1 - z) +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - z + y)^2 \Big|_0^z\Big] dz + \int\limits_1^2 f(z)\cdot\frac{1}{2}(1 - z + y)^2 \Big|_{z-1}^1 \cdot dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(z)\cdot(2 - z^2)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(z)\cdot(2 - z)^2\,dz.$$

Ниҳоят, узил-кесил натижани ёзамиз:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(z)\cdot(2 - z^2)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(z)\cdot(2 - z)^2\,dz.$$



43- чизма

6- мисол. Ушбу $(V)=\{(x, y, z)$: $x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad x+z \leqslant a, \quad z \geqslant 0, \quad a>0\}$ соҳа бўйича олинган уч каррали $I=\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ интегралда интеграллаш чегаралари декарт $(x,\ y,\ z)$, цилиндрик (r, φ, z, θ) ва сферик (r, φ, θ) координаталар системасида қўйилсин.

Ечиш. 1- ҳол. Декарт (x, y, z) координаталар системасида 2 хил усул билан интеграллаш чегараларини қўйиш мумкин. Ҳар бир усулда 6 хил такрорий интеграл ҳосил бўлади. Қайд қилиб ўтамизки, қайси усулни қўлламайлик, турли такрорий интеграллар сони 6 та бўлади. Биринчи усулда (V) соҳанинг бирор координаталар текислигига проекциясини топиб, бу текисликка перпендикуляр бўлган ўққа параллел чизиқлар билан (V) соҳани тўлдириб чиқамиз (юқоридаги 4- мисолга қаранг).

Берилган (V) соҳа ясовчилари Oz га параллел, ўқи Oz ва асосининг радиуси a бўлган доиравий цилиндр ва қуйидан $z=0$, яъни $(x,\ y)$ текислик билан, юқоридан эса Oy ўққа параллел бўлган $x+$ $+z=a$ текислик билан чегараланган (43- чизма).

Масалан, (V) соҳанинг $(x,\ y)$ текисликдаги проекцияси (Δ) маркази $O(0,\ 0,\ 0)$ нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $z=0$ доирадан иборат. Бу (Δ) доирани икки хил усул билан тавсифлаш мумкин:

$$(\Delta_1)=\left\{(x,\ y)\colon -a \leqslant x \leqslant a;\ \ -\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}\right\},$$

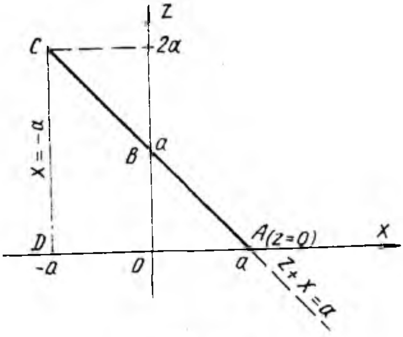
$$(\Delta_2)=\left\{(x,\ y)\colon -a \leqslant y \leqslant a;\ \ -\sqrt{a^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2-y^2}\right\}.$$

Равшанки, $(\Delta)=(\Delta_1)=(\Delta_2)$. Кўриниб турибдики (43- чизма), $(x,\ y)$ текислигига перпендикуляр тўғри чизиқлар (V) соҳа чегараларини олдин $z=0$ текислигида, сўнгра $z=a-x$ текислигида кесиб ўтади. Берилган I интегралнинг чегараларини икки хил усулда ёзиш мумкин:

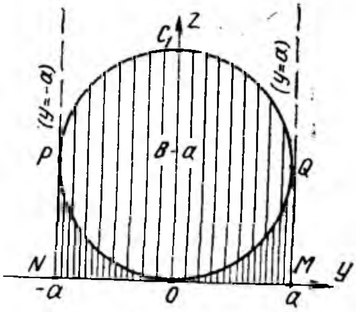
$$I_1=\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a-x} f(x,\ y,\ z)\, dz,$$

$$I_2=\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_{0}^{a-x} f(x,\ y,\ z)\, dz.$$

Равшанки, $I_1=I_2=I$ бўлиб, I_1 ва I_2 лар фақат чегаралари билан фарқ қилади.



44- чизма



45- чизма

Энди (V) соҳанинг (x, z) текисликдаги проекциясини аниқлаймиз. Бу проекция $ACDA$ контур билан чегараланган уч бурчакдир (44- чизма), уни икки усул билан тавсифлаш мумкин:

$$(\Delta_3) = \{(x, z): -a \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant z \leqslant a - x\},$$
$$(\Delta_4) = \{(x, z): 0 \leqslant z \leqslant 2a;\ -a \leqslant x \leqslant a - z\}.$$

Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар (V) соҳани, унинг доиравий цилиндр сиртининг $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ қисмидан $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$ қисмигача кесиб ўтади. Шу маълумотларга асосланиб, I интегралнинг чегараларини яна икки хил усулда ёзиш мумкин:

$$I_3 = \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{a-x} dz \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy,$$

$$I_4 = \int_{0}^{2a} dz \int_{-a}^{a-z} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy.$$

Ниҳоят, (V) соҳанинг (y, z) текисликдаги проекциясини топиш учун аввало бир бўлагини қидирамиз. Бунинг учун $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ва $x = a - z$ текислик тенгламаларидан x ни йўқотамиз, яъни (y, z) текисликда шундай соҳани қидирамизки, бу соҳани чегараловчи контурнинг ҳар бир нуқтаси учун мос келган цилиндр сиртидаги нуқта ва текисликдаги нуқта бир хил абсциссага эга бўлсин. Бу контур маркази Oz ўқида (яъни (y, z) текислигидаги $(0, a)$ нуқтада) ва радиуси a га тенг бўлган $(z - a)^2 + y^2 = a^2$ айланадан иборат бўлиб (45- чизма), соҳанинг мос қисмидаги нуқталар учун абсцисса $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ дан $x = a - z$ гача ўзгаради.

Лекин $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрик сирт (y, z) текислигини PN ва QN тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. Шунинг учун $NOMQOPN$ контур билан чегараланган соҳага цилиндрик сиртнинг $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ ва $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ муносабатлар билан аниқланган қисмлари проекцияланади. Демак, (V) нинг (y, z) даги проекцияси (Δ_5) иккита соҳа йиғиндисидан тузилган: $(\Delta_5) = (\Delta_5') \cup (\Delta_5'')$, бу ерда

$$(\Delta_5') = \{(y, z): -a \leqslant y \leqslant a;\ a - \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant z \leqslant a + \sqrt{a^2 - y^2}\},$$
$$(\Delta_5'') = \{(y, z): -a \leqslant y \leqslant a;\ 0 \leqslant z \leqslant a - \sqrt{a^2 - y^2}\}.$$

Натижада берилган I интеграл икки интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$I_5 = \int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{a - \sqrt{a^2 - y^2}}^{a + \sqrt{a^2 - y^2}} dz \int\limits_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{a - z} f(x, y, z)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{0}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} dz \int\limits_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

Энди (V) нинг (y, z) текисликдаги проекциясида z ни эркли ўзгарувчи деб, берилган уч каррали интегралда интеграллаш чегараларини олтинчи усул билан қўйиб чиқамиз. Бунинг учун шу ҳолда (Δ_5) соҳани янги (Δ_6) соҳа деб белгилаб, уни Oy ўққа параллел чизиқлар билан бўлиб чиқамиз. Чизмадан (45- чизма) кўриниб турибдики, (Δ_5') соҳа янги (Δ_6') соҳа бўлиб, (Δ_5'') соҳа эса, янги икки (Δ_6'') ва (Δ_6''') соҳалар йиғиндисини ташкил этади. Энди $(a - z)^2 + y^2 = a^2$ тенгламага кўра OPC_1 учун $y = -\sqrt{a^2 - (a - z)^2}$ ва OQC_1 учун $y = \sqrt{a^2 - (a - z)^2}$ тенгламаларни топамиз. Энди (Δ_6'), (Δ_6''), (Δ_6''') соҳалар тавсифини ёзиш мумкин:

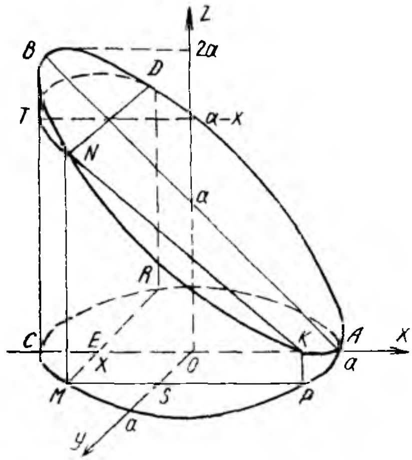
$$(\Delta_6') = \{(z, y): 0 \leqslant z \leqslant 2a;\ -\sqrt{a^2 - (a - z)^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - (a - z)^2}\},$$
$$(\Delta_6'') = \{(z, y): 0 \leqslant z \leqslant a;\ -a \leqslant y \leqslant -\sqrt{a^2 - (a - z)^2}\},$$
$$(\Delta_6''') = \{(z, y): 0 \leqslant z \leqslant a;\ \sqrt{a^2 - (a - z)^2} \leqslant y \leqslant a\}.$$

Абсцисса $x = x(y, z)$ нинг ўзгаришини I_5 интегралнинг ёзилишига қараб олиш мумкин. Шундай қилиб, I интегралнинг олтинчи кўриниши қуйидагича бўлади:

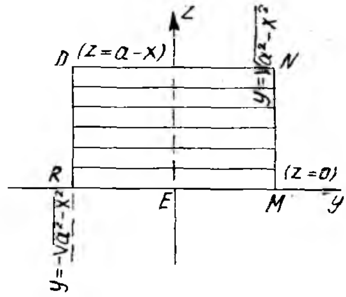
$$I_6 = \int\limits_{0}^{2a} dz \int\limits_{-\sqrt{2az - z^2}}^{\sqrt{2az - z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{a - z} f(x, y, z)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{0}^{a} dz \int\limits_{-a}^{-\sqrt{2az - z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{0}^{a} dz \int\limits_{\sqrt{2az - z^2}}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

Юқорида ўзгарувчи y нинг чегараларини қўйишда $\sqrt{a^2 - (a - z)^2} = \sqrt{2az - z^2}$ муносабатдан фойдаланилди.

Шундай қилиб, биз юқорида берилган уч каррали интеграл учун (V) соҳани турли усул билан проекциялаш ёрдамида 6 хил



46- чизма



46а- чизма

усул билан интеграллаш чегараларини қўйиб чиқиш мумкинлигини кўрдик. Бу берилган уч каррали интегрални ҳисоблаш учун унинг 6 хил такрорий интеграл кўринишдан бирортасидан фойдаланиш етарлилигини англатади.

Яна шуни таъкидлаб ўтамизки, уч каррали интегралнинг 6 хил такрорий интеграл кўринишидаги ифодасига кўра уларда икки ташқи интеграллар ўрнини алмаштириш мумкин.

Интеграллаш чегараларини кесимлар ёрдамида ҳам олти усул билан қўйиб чиқиш мумкин. Унда қайси ўққа перпендикуляр бўлган кесимлардан фойдалансак, шу ўқ ўзгарувчиси *эркли аргумент* бўлади, қолган икки ўзгарувчи функция сифатида олинади. Масалан, $z=\text{const}$ учун z — эркли аргумент, қолганлари учун $y=y(z)$ ва $x=x(y,\ z)$ ёки $x=x(z)$ ва $y=y(x,\ z)$ деб олиш мумкин. Демак, кесимлардан фойдаланиш усулида берилган $\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dV$ уч каррали интегралда икки ички интеграллар ўрнини алмаштириш мумкин бўлади.

Масалан, (V) соҳанинг $x=-a$ текисликдан $x=a$ текисликкача $x=\text{const}$ кесимларини кўрайлик (46- чизма). Бу кесимда $MNDR$ кўринишдаги тўғри бурчакли тўрт бурчаклар ҳосил бўлади. Цилиндрик сирт тенгламасидан кўринадики, MN, RD чизиқлар учун

$$y=+\sqrt{a^2-x^2},\ y=-\sqrt{a^2-x^2}$$

тенгламалар мос келади. MR, ND чизиқлар эса мос равишда $z=0$ ва $x+z=a$ текисликларда ётади (46 a- чизма).

Шундай қилиб, (V) соҳани қуйидагича тавсифлаш мумкин:

$$(V)=\{(x,\ y,\ z): -a\leqslant x\leqslant a;\ -\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2};$$
$$0\leqslant z\leqslant a-x\},$$

$$(V)=\Big\{(x,\ y,\ z):\ -a\leqslant x\leqslant a;\ 0\leqslant z\leqslant a-x;$$
$$-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\Big\}.$$

Берилган уч каррали $I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV$ интегралда бу чегараларни қўйиб, юқорида чиқарилган I_1 ва I_3 такрорий интегралларни ҳосил қиламиз.

Энди (V) соҳани (x, z) текисликка параллел $y = \text{const}$ текисликлар билан бўлиб чиқамиз. $(-a \leqslant y \leqslant a)$. Кесимда $MNKP$ трапеция ҳосил бўлади. Цилиндр тенгламасидан MN, KP тўғри чизиқларга $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$; $x = +\sqrt{a^2 - y^2}$ тенгламалар мос келади. NK, MP чизиқлар эса мос равишда $z = a - x$, $z = 0$ текисликларда ётади.

Агар y ни аргумент деб $x = x(y)$, $z = z(x, y)$ десак, у ҳолда (V) соҳани яна қуйидагича тавсифлаш мумкин:

$$(V) = \left\{(x, y, z)\colon\ -a \leqslant y \leqslant a;\ -\sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - y^2};\ 0 \leqslant z \leqslant a - x\right\}.$$

Энди бундан фойдаланиб, берилган уч каррали интегралга мос такрорий интегрални ёзсак, юқоридаги I_2 интеграл ҳосил бўлади.

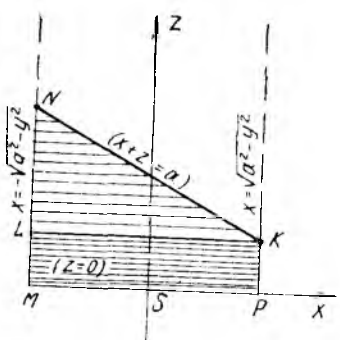
Энди y ни аргумент деб $z = z(y)$ ва $x = x(y, z)$ деймиз. $MNKP$ трапецияни MP га параллел тўғри чизиқлар билан бўлиб чиқамиз. K нуқта учун $z = a - x_K = a - \sqrt{a^2 - y^2}$, N нуқта учун $z = a - x_N = a + \sqrt{a^2 - y^2}$. Демак, трапеция юзи $MPKLM$ ва $LKNL$ шакллардан тузилади (46 б- чизма):

$$MPKLM \text{ учун } 0 \leqslant z \leqslant a - \sqrt{a^2 - y^2},\ -\sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - y^2}$$

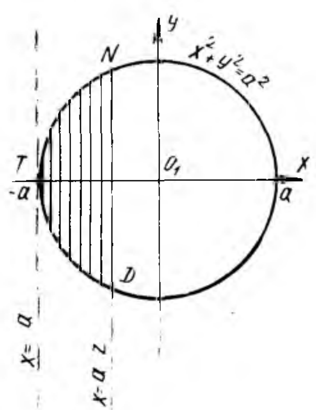
$$\text{ва } LKNL \text{ учун } a - \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant z \leqslant a + \sqrt{a^2 - y^2},$$
$$-\sqrt{a^2 - y^2} \leqslant x \leqslant a - z.$$

Шу маълумотлардан фойдалансак, берилган интеграл I_5 кўринишда ёзилади.

Қолган I_4 ва I_6 кўринишдаги интеграллар Oz ўққа перпендикуляр ((x, y) текисликка параллел) кесимларни текширишдан келиб чиқади.



46б- чизма

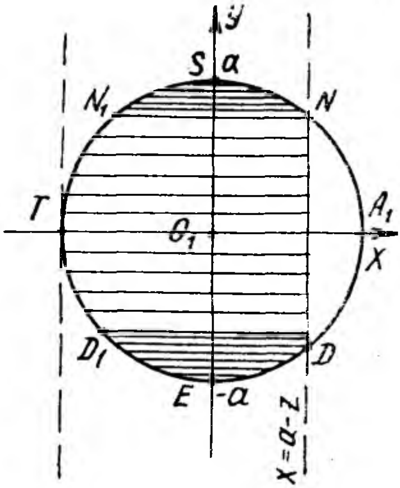


46в- чизма

Эркли аргументни z ҳамда $x=x(z)$ ва $y=y(z, x)$ десак, $0 \leqslant z \leqslant 2a$ учун кесимда доиранинг $TNDT$ қисми (46-в чизма) ҳосил бўлади. Доирани чегараловчи айлана тенгламаси $x^2+y^2=a^2$ бўлиб, ND чизиқ $x=a-z$ текисликда ётади. Бу соҳани Oy ўққа параллел чизиқлар билан бўлиб чиқсак, (V) соҳа қуйидагича тавсифланади:

$$(V)=\{(x, y, z): 0 \leqslant z \leqslant 2a; \quad -a \leqslant x \leqslant a-z;$$
$$-\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}\}.$$

Энди тегишли чегараларни қўйсак, I_4 интеграл ҳосил бўлади.



46г- чизма

Охирги I_6 интегрални кесим усули билан ҳосил қилиш учун 2 ҳолни кўриб чиқамиз:

1) ўзгарувчи z (аргумент) 0 дан a гача ўзгарганда $x \geqslant 0$ ва кесимда ярим доирадан каттароқ шакл (46- г чизма) ҳосил бўлади;

2) ўзгарувчи z a дан $2a$ гача ўзгарганда $x \leqslant 0$ ва кесимда ярим доирадан кичикроқ шакл (46- в чизма) ҳосил бўлади. Энди бу кесимларни Ox ўқига параллел чизиқлар билан бўлиб чиқамиз:

Юқорида I_4 учун келтирилган маълумотлардан фойдалансак, $x \leqslant 0$ ҳол учун (V) соҳанинг (V_1) бир қисми қуйидагича тавсифланади:

$$(V_1)=\{(x, y, z): a \leqslant z \leqslant 2a; \ y_1 \leqslant y \leqslant y_2;$$
$$-\sqrt{a^2-y^2} \leqslant x \leqslant a-z\},$$

бу ерда y_1, y_2 лар $x^2+y^2=a^2$, $x=a-z$ тенгламалардан аниқланади ва $y_1=-\sqrt{a^2-(a-z)^2}$, $y_2=\sqrt{a^2-(a-z)^2}$. Улар мос равишда D ва N нуқталарнинг ординатасидир ($y_1=y_D=-\sqrt{2az-z^2}$; $y_2=y_N=\sqrt{2az-z^2}$).

Ўзгарувчи z (аргумент) 0 дан a гача ўзгарганда $z=\text{const}$ кесимдаги шакл 3 та бўлакка ажралади: иккита доиравий сегмент (DED_1D ва NSN_1N контурлар билан чегараланган) ва доиранинг NN_1TD_1DN контур билан чегараланган қисми. Шаклдаги ёйлар ва нуқталарни кўриб чиқамиз: ETS да $x=-\sqrt{a^2-y^2}$, EA_1S да $x=\sqrt{a^2-y^2}$, DN да $x=a-z$; E нуқтанинг ординатаси $y=-a$, S учун $y=a$, D ва D_1 лар учун $y=y_1=-\sqrt{a^2-(a-z)^2}=-\sqrt{2az-z^2}$, N ва N_1 лар учун $y=y_2=\sqrt{a^2-(a-z)^2}=\sqrt{2az-z^2}$.

Демак, (V) нинг DED_1D сегментдан иборат (V_2) қисми

$$(V_2)=\{(x, y, z): 0 \leqslant z \leqslant a; \ -a \leqslant y \leqslant y_1;$$
$$-\sqrt{a^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2-y^2}\},$$

(V) нинг NSN_1N сегментдан иборат (V_3) қисми

$$(V_3)=\{(x,\ y,\ z):\ 0\leqslant z\leqslant a;\ y_2\leqslant y\leqslant a;\\ -\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2}\},$$

ва, ниҳоят (V) нинг NN_1TD_1DN контур билан чегараланган (V_4) қисми

$$(V_4)=\{(x,\ y,\ z):\ 0\leqslant z\leqslant a;\ y_1\leqslant y\leqslant y_2;\\ -\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant a-z\}$$

каби тавсифланади.

Энди (V_1), (V_2), (V_3), (V_4) соҳаларни ўзаро таққослаймиз. Кўринадики, (V_1), (V_4) соҳаларни бирлаштириш мумкин. $(V_1)\cup(V_4)$ соҳада z аргументнинг чегаралари энди 0 дан $2a$ гача ўзгаради. Бу соҳани (V_1^*) деб белгилаймиз. Шундай қилиб, $(V)=(V_1^*)\cup(V_2)\cup(V_3)$. Шу сабабли (V) соҳа учун берилган $I=\iiint\limits_{(V)} f\ (x,\ y,\ z)\ dV$ уч каррали интеграл I_6 кўринишидаги учта такрорий интеграл йиғиндиси билан ифодаланади.

Берилган уч каррали интеграл учун ҳам кесимлар усули ёрдамида 6 хил такрорий интеграл ҳосил қилдик. Умуман, уч каррали интеграл учун турли такрорий интеграллар сони $3!=6$ та, тўрт каррали интеграл учун — $4!=24$, ниҳоят, n каррали интеграл учун — $n!$ та эканини қайд қилиб ўтамиз.

2- ҳол. Қурилаётган 6- мисолда берилган $I=\iiint\limits_{(V)} f\ (x,\ y,\ z)\ dV$ уч каррали интегрални $(r,\ \varphi,\ z)$ цилиндрик координаталар системасида 6 та турли такрорий интегралга келтириш мумкин. Уларни мос равишда I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 лар билан белгилаймиз, аммо бу I_i, $i=\overline{1,6}$ 1- ҳолдаги I_i лар билан, умуман айтганда, устма-уст тушмайди.

Маълумки $(x,\ y,\ z)$ декарт координаталар системасидан $(r,\ \varphi,\ z)$ цилиндрик координаталар системасига ўтилганда $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ ва $\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ z)}=r$ формулалардан фойдаланилади. Шу алмаштириш натижасида берилган интеграл ушбу

$$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\ dV=\iiint\limits_{(V^*)} f\,(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi, z)\cdot r\cdot dr d\varphi\, dz$$

кўринишга келтирилади, бу ерда (V^*) соҳа (V) соҳанинг янги $(r,\ \varphi,\ z)$ системадаги аксидан иборат.

Энди бундан кейинги мулоҳазаларимизда муҳим бўлган баъзи маълумотларни келтирамиз:

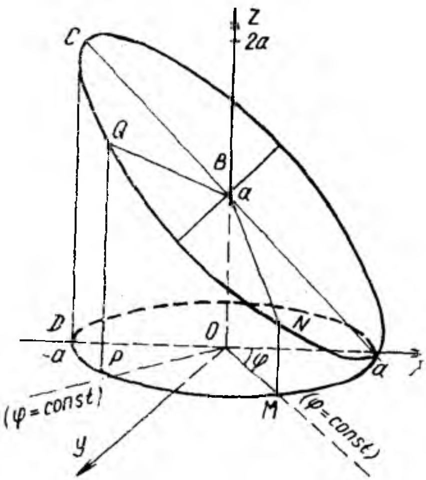
а) $r=\text{const}$ — $(r,\ \varphi,\ z)$ координаталар системасида ўқи Oz ва радиуси r бўлган доиравий цилиндрик сирт тенгламасидан иборат;

б) $\varphi=\text{const}$ — $(x,\ z)$ текислик билан φ бурчак ташкил этиб, Oz ўқидан ўтувчи ярим текислик тенгламасидан иборат;

в) $z = \text{const} - Oz$ ўқига перпендикуляр ((x, y) текисликка параллел) текислик тенгламасидан иборат.

$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV$ уч каррали интегрални цилиндрик координаталар системасида такрорий интегралга келтириш учун кесимлар усулидан фойдаланамиз.

1. (V) соҳани $\varphi = \text{const}$ ярим текисликлар билан бўлиб (кесиб) чиқамиз, яъни φ ни эркли аргумент деб оламиз (47- чизма). Олинган (r, φ, z) системада цилиндрик сиртнинг тенгламаси $r = a$ кўринишга эга, $x + z = a$ текисликнинг тенгламаси эса $z = a - r\cos\varphi$ кўринишда бўлади. Аргумент φ нинг ўзгаришига қараб, яъни $\cos\varphi$ нинг ишорасига боғлиқ ҳолда, кесимда $OMNB$ (47a- чизма) ёки $OPQB$ (47б- чизма) трапеция сатҳи ҳосил бўлади.

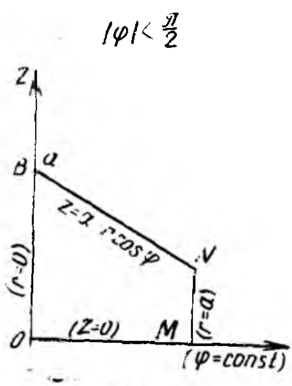


47- чизма

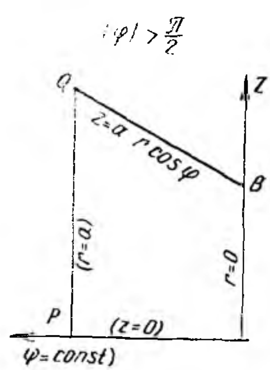
Агар φ — аргумент ҳамда $r = r(\varphi)$, $z = z(\varphi, r)$ деб қарасак, у ҳолда $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$ учун $OMNB$ ($OPQB$) кесимни турли радиусли ($0 \leqslant r \leqslant a$) цилиндрик сиртлар ясовчилари билан (Oz га параллел) (x, y) ($z = 0$) текисликдан то берилган $z = a - r\cos\varphi$ текисликкача тўлдириб чиқамиз. Натижада берилган соҳа қуйидагича тавсифланади:

$$(V) = \{ (r, \varphi, z)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant z \leqslant a - r\cos\varphi \}.$$

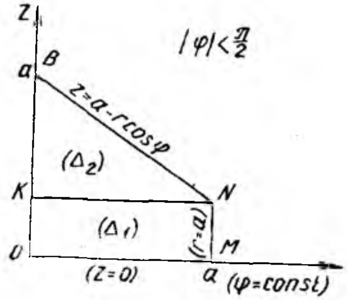
Шу сабабли берилган уч каррали интеграл ушбу



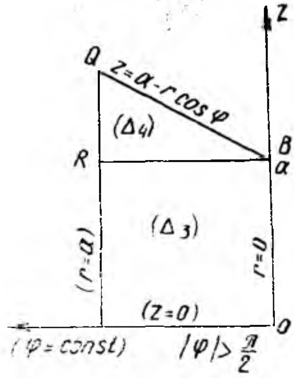
47а- чизма



47б- чизма



47в- чизма



47г- чизма

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_0^{a-r\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\cdot dz$$

такрорий интеграл кўринишда ёзилади.

Энди φ — аргумент, $z = z(\varphi)$ ва $r = r(\varphi, z)$ деб қарасак, у ҳолда кесимларни (47 *в* чизма, 47 *г*- чизма) (x, y) текисликка параллел тўғри чизиқлар билан тўлдириб чиқиш керак. Ҳар бир φ учун кесим иккита соҳачага бўлинади. Керакли нуқта ва кесмалар учун r ва z ни аниқлаймиз:

N нуқтада $r = a$; $z = a - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi)$, BN кесма учун $r = \dfrac{a - z}{\cos\varphi}$ ва шунга ўхшаш

$$Q \text{ да } z = a - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi) \geqslant a,$$

$$QB \text{ да } r = \frac{a - z}{\cos\varphi}.$$

Натижада (V) соҳани шундай тўртта (V_1), (V_2), (V_3), (V_4) соҳалар йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин бўладики, улар қуйидагича тавсифланади:

$$(V_1) = \left\{ (r,\ \varphi,\ z):\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant z \leqslant a(1 - \cos\varphi);\ 0 \leqslant r \leqslant a \right\},$$

$$(V_2) = \left\{ (r,\ \varphi,\ z):\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ a(1 - \cos\varphi) \leqslant z \leqslant a;\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a - z}{\cos\varphi} \right\},$$

$$(V_3) = \left\{ (r,\ \varphi,\ z):\ \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2};\ 0 \leqslant z \leqslant a;\ 0 \leqslant r \leqslant a \right\},$$

$$(V_4) = \left\{ (r,\ \varphi,\ z):\ \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2};\ a \leqslant z \leqslant a(1 - \cos\varphi);\ \frac{a - z}{\cos\varphi} \leqslant r \leqslant a \right\}.$$

Шундай қилиб, берилган уч каррали интеграл тўртта такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a(1-\cos\varphi)} dz \int_0^a r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot dr +$$

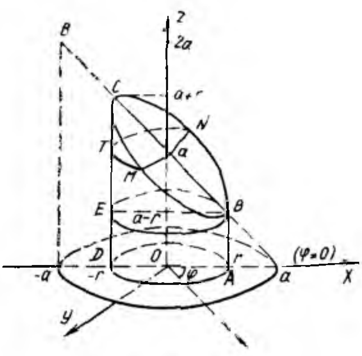
$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a(1-\cos\varphi)}^{a} dz \int_0^{\frac{a-z}{\cos\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot dr +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^a dz \int_0^a r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\, z)\cdot dr +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_a^{a(1-\cos\varphi)} dz \int_{\frac{a-z}{\cos\varphi}}^{a} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot dr.$$

2. (V) соҳани $r=\text{const}$ $(0\leqslant r\leqslant a)$ деб цилиндрик сиртлар билан тўлдириб чиқамиз (48- чизма), яъни r ни эркли аргумент деб ҳисоблаймиз. Ички интеграллар чегарасини қўйиш учун олдин $\varphi=\varphi(r)$, $z=z(r,\varphi)$ деб оламиз. Чизилган цилиндрик сирт учун φ, z ўзгарувчилар $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant a-r\cos\varphi$ тенгсизликларни қаноатлантиради (48 a- чизма). Шу сабабли (V) соҳани қуйидагича тавсифлаш мумкин:

$$(V)=\{(r,\varphi,z): 0\leqslant r\leqslant a;$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant z\leqslant a-r\cos\varphi\}.$$



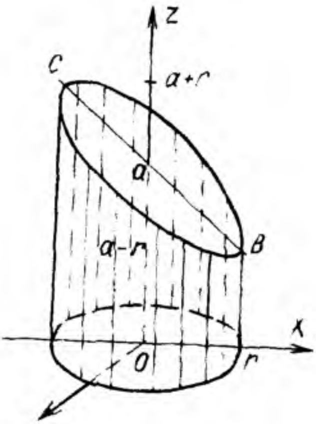
48- чизма

Бу ҳолда берилган уч каррали интеграл ушбу

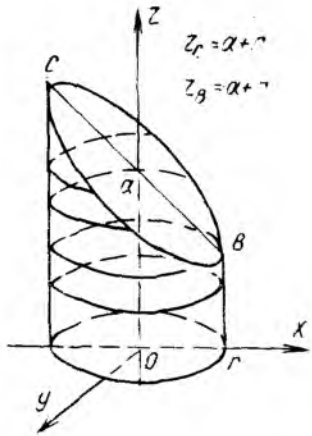
$$I_3 = \int_0^a rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-r\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot dz$$

такрорий интеграл кўринишида ёзилади.

Энди I_3 интегралдаги иккита ички интеграл ўрнини алмаштирамиз. Бунинг учун r ни эркли аргумент $(0\leqslant r\leqslant a)$ деб, $z=z(r)$ ва $\varphi=\varphi(r,z)$ десак, у ҳолда (V) соҳа ичига чизилган $r=\text{const}$ цилин-



48а- чизма



48б- чизма

дрик сирт нуқталарининг z апликатасини r радиусга боғлаб, сўнгра уларнинг φ қутб бурчагини аниқлаймиз. Шаклдан кўриниб турибдики (48- б чизма), B нуқта учун $z = a - r$ ($\varphi = 0$ да) ва C нуқта учун $z = a + r$($\varphi = \pi$ да). Шундай қилиб, $0 \leqslant z \leqslant a - r$ бўлганда $r = \text{const}$ цилиндрик сиртнинг тўлиқ ён сирти чизилади, яъни $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ бўлади ва (V) соҳанинг тегишли (V_1) қисми қуйидагича

$$(V_1) = \{(r, \varphi, z): 0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant z \leqslant a - r\}$$

тавсифланади. Энди z нинг қийматлари $a - r \leqslant z \leqslant a + r$ тенгсизликларни қаноатлантирганда айлана ёйларини, яъни MTN кўринишдаги (48- чизма) ёйларни чизиш керак бўлади. Бу MTN ёйдаги нуқталар учун φ ни топиш мақсадида M ва N нуқталар $z = a - r \cos\varphi$ текисликда ётишидан фойдаланамиз:

$\varphi = \pm \arccos\frac{a-z}{r} + 2\pi n$, $n \in Z$ (Z — бутун сонлар тўплами) M нуқта учун $\varphi = \arccos\frac{a-z}{r}$, N нуқта учун $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a-z}{r}$, демак, MTN ёйда $\varphi_M \leqslant \varphi \leqslant \varphi_N$. (V) соҳанинг иккинчи (V_2) қисми қуйидагича $(V_2) = \{(r, \varphi, z): 0 \leqslant r \leqslant a;\ a - r \leqslant z \leqslant a + r;\ \varphi_M \leqslant \leqslant \varphi \leqslant \varphi_N\}$ тавсифланади. Шундай қилиб, берилган уч каррали интеграл ушбу

$$I_4 = \int_0^a r dr \int_0^{a-r} dz \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot d\varphi +$$

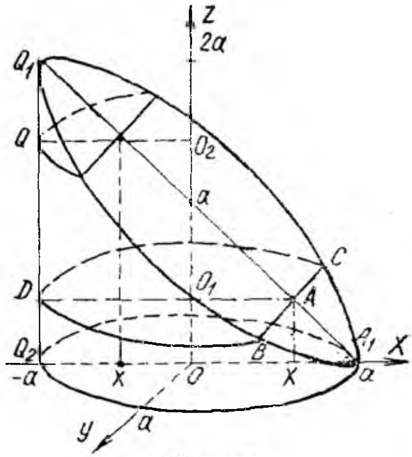
$$+ \int_0^a r\, dr \int_{a-r}^{a+r} dz \int_{\arccos\frac{a-z}{r}}^{2\pi - \arccos\frac{a-z}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot d\varphi$$

иккита такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади.

3. (V) соҳани $z = \text{const}$ текисликлар билан кесиб чиқамиз ва ҳосил бўлган доира қисми (доиравий сегмент) шаклидаги кесимлар билан бутун (V) соҳани бўлиб чиқамиз. Бу кесимларнинг кўриниши x нинг ишорасига, аслида эса z нинг қийматига боғлиқдир (49- чизма). Хусусан,

а) $0 < z < a$ интервал учун кесим ярим доирадан каттароқ,

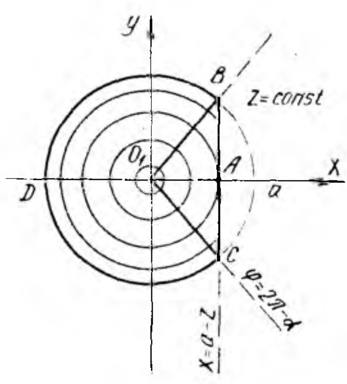
б) $a < z \leqslant 2a$ интервал учун кесим ярим доирадан кичикроқ экани равшан.



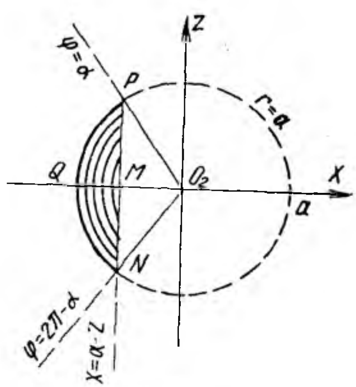
49- чизма

Энди z ни эркли аргумент, $r = r(z)$, $\varphi = \varphi(r, z)$ деб қарасак, у ҳолда кесимдаги ҳар бир доиравий сегментни концентрик айланалар ёйи билан бўлиб чиқишимиз лозим бўлади.

$ABDC$ контур билан чегараланган кесим учун $0 \leqslant z \leqslant a$ бўлиб, $|O_1 A| = |x| = |a - z| = a - z$ тенглик ўринли ва BC тенгламаси $r \cos \varphi + z = a$ дан иборат. Бу тенгламани φ га нисбатан ечамиз: $\varphi = \pm \arccos \frac{a-z}{r} + 2\pi n$, $n \in Z$ (Z — бутун сонлар тўплами). AB учун $\varphi = \arccos \frac{a-z}{r}$ ва AC учун $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a-z}{r}$ тенгламаларни аниқлаймиз. Қаралаётган кесим ичига маркази O_1 нуқтада бўлган айланалар чизиш мумкин. Агар уларнинг радиуси $|O_1 A|$ дан катта бўлмаса, тўлиқ айланалар чизилади ва $0 \leqslant r \leqslant a - z$ оралиқда φ бурчак 0 дан 2π гача ўзгаради (49 а- чизма). (V) соҳанинг шу мулоҳазалар билан аниқланган (V_1) қисмини қуйидагича тавсифлаш мумкин:



49а- чизма



49б- чизма

$$(V_1)=\{(r,\ \varphi,\ z): 0\leqslant z\leqslant a;\ 0\leqslant r\leqslant a-z;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

Агар концентрик айланалар радиуси $|O_1 A|$ дан катта бўлса, айлана қисмлари чизилади ва $a-z\leqslant r\leqslant a$ оралиқда циркуль учи AB кесма нуқталаридан AC кесма нуқталаригача бурилади. Демак, φ бурчак учун ушбу $\varphi_{AB}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{AC}$ тенгсизликлар бажарилади. Бу эса, (V) соҳанинг (V_2) қисмини тавсифлаш имконини беради:

$$(V_2)=\left\{(r,\ \varphi,\ z): 0\leqslant z\leqslant a;\ a-z\leqslant r\leqslant a;\ \arccos\frac{a-z}{r}\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\arccos\frac{a-z}{r}\right\}.$$

$MPQNM$ контур билан чегараланган кесим (49 *б*- чизма) учун $a\leqslant z\leqslant 2a$ бўлиб, $|O_2 M|=|x|=|a-z|=z-a$. MP кесма $\varphi=$ $=\arccos\frac{a-z}{r}$ (ўтмас бурчак), MN кесма $\varphi=2\pi-\arccos\frac{a-z}{r}$ тенгламалар билан тавсифланади. Маркази O_2 да бўлган концентрик айланалар ёйлари билан бу кесимни бўлиб чиқамиз. Бунда энг кичик радиус $|O_2 M|$ га, энг катта радиус эса a га тенг бўлади. Демак, $z-a\leqslant r\leqslant a$ тенгсизликлар ўринли ва циркуль MP кесма нуқтасидан то MN кесма нуқтасигача бурилади, яъни $\varphi_{MP}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{MN}$ тенгсизликлар ўринли. Шундай қилиб, (V) соҳанинг (V_3) бўлагини ҳам тавсифлаш мумкин:

$$(V_3)=\left\{(r,\ \varphi,\ z): a\leqslant z\leqslant 2a;\ z-a\leqslant r\leqslant a;\ \arccos\frac{a-z}{r}\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\arccos\frac{a-z}{r}\right\}.$$

Берилган (V) соҳа (V_1), (V_2), (V_3) соҳалар йиғиндисидан иборат. Шунинг учун уч каррали интеграл шу соҳалар бўйича олинган учта такрорий интеғраллар йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$I_5=\int_0^a dz\int_0^{a-z} r\,dr\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\cdot d\varphi+$$

$$+\int_0^a dz\int_{a-z}^{a} r\,dr\int_{\arccos\frac{a-z}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{a-z}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\cdot d\varphi+$$

$$+\int_a^{2a} dz\int_{z-a}^{a} r\,dr\int_{\arccos\frac{a-z}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{a-z}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot d\varphi.$$

Энди охирги такрорий интегрални ёзиш учун z ни эркли аргумент ва $\varphi=\varphi(z)$, $r=r(\varphi,\ z)$ деб ҳисоблаймиз. Кесимдаги соҳани O_1 (ёки O_2) нуқталардан чиққан нурлар билан бўлиб чиқамиз.

$ABDCA$ контур ичидаги соҳа учун $0 \leqslant z \leqslant a$ тенгсизликлар ўринли. BC нинг $r\cos\varphi + z = a$ тенгламасини $r = \dfrac{a-z}{\cos\varphi}$ кўринишда ёзамиз. O_1B, O_1C нурлар учун φ нинг қийматини $r = a$ айлана билан $r\cos\varphi + z = a$ (BC) тўғри чизиқнинг кесишиш шартидан топамиз. Бунинг учун

$$\begin{cases} r = a, \\ r\cos\varphi + z = a \end{cases}$$

системани φ га нисбатан ечиш лозим. Равшанки, O_1B учун $\varphi = \alpha = \arccos\dfrac{a-z}{a}$, O_1C учун $\varphi = -\alpha$ (ёки $\varphi = 2\pi - \alpha$) муносабатларга эгамиз. $ABDCA$ кесим иккита бўлакдан тузилган (49 *в*- чизма). Улар $ABO_1\,CA$ ва $O_1\,BDCO_1$ контурлар билан чегараланган.

а) $ABO_1\,CA$ контур билан чегараланган учбурчак шаклидаги соҳаси учун нурлар O_1C вазиятдан O_1B гача силжийди ва доимо BC кесма нуқталаригача чизилади. Энди (V) соҳанинг тегишли (V_1) бўлагини тавсифлаймиз:

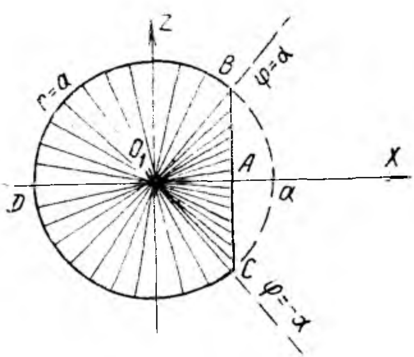
$$(V_1) = \left\{(r,\ \varphi,\ z): 0 \leqslant z \leqslant a;\ -\arccos\frac{a-z}{a} \leqslant \varphi \leqslant \arccos\frac{a-z}{a};\right.$$

$$\left. 0 \leqslant r \leqslant \frac{a-z}{\cos\varphi}\right\};$$

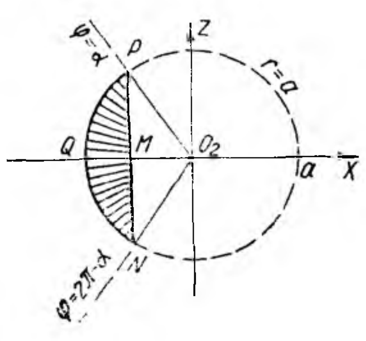
б) O_1BDCO_1 контур билан чегараланган доира қисми учун $\alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \alpha$, $0 \leqslant r \leqslant a$ тенгсизликлар бажарилади ва (V) соҳанинг (V_2) бўлагини ҳам тавсифлаш мумкин:

$$(V_2) = \{(r,\ \varphi,\ z): 0 \leqslant z \leqslant a;\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \alpha;\ 0 \leqslant r \leqslant a\}.$$

(V) соҳанинг $a \leqslant z \leqslant 2a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бўлагини қараб чиқамиз (49- *г* чизма). O_2P ва O_2N нурлар учун $\varphi = \alpha$, $\varphi = 2\pi - \alpha$, бу ерда $\alpha = \arccos\dfrac{a-z}{a}$ ва PN ватар учун $r = \dfrac{a-z}{\cos\varphi}$ $(r \geqslant 0$, чунки $\cos\varphi < 0)$. $PQNP$ доиравий сегмент учун нурлар ва-



49в- чизма



49г- чизма

зияти φ нинг $\varphi=\alpha$ дан $\varphi=2\pi-\alpha$ гача бўлган қийматларига мос келади ва улар PN ватардан $r=a$ айланагача қаралиши лозим. Шунинг учун $\frac{a-z}{\cos\varphi}\leqslant r\leqslant a$ тенгсизликлар ўринли. Шундай қилиб, (V) нинг навбатдаги учинчи (V_3) қисмини ҳам тавсифлаш мумкин:

$$(V_3)=\left\{(r,\ \varphi,\ z): a\leqslant z\leqslant 2a;\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\alpha;\ \frac{a-z}{\cos\varphi}\leqslant r\leqslant a\right\}.$$

Шундай қилиб, (V_1), (V_2), (V_3) соҳалар йиғиндисидан тузилган (V) соҳа учун уч каррали интеграл қуйидаги учта такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$I_6=\int_0^a dz\int_{-\arccos\frac{a-z}{a}}^{\arccos\frac{a-z}{a}} d\varphi\int_0^{\frac{a-z}{\cos\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dr+$$

$$+\int_0^a dz\int_{\arccos\frac{a-z}{a}}^{2\pi-\arccos\frac{a-z}{a}} d\varphi\int_0^a r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dr+$$

$$+\int_a^{2a} dz\int_{\arccos\frac{a-z}{a}}^{2\pi-\arccos\frac{a-z}{a}} d\varphi\int_{\frac{a-z}{\cos\varphi}}^{a} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dr.$$

Биз юқорида берилган уч каррали интегрални цилиндрик координаталарда 6 хил усул билан такрорий интеграл кўринишида (уларнинг йиғиндиси кўринишида) ёзиб чиқдик.

3- ҳол. Ниҳоят, кўрилаётган 6- мисолда берилган уч каррали интегрални $(r,\ \varphi,\ \theta)$ сферик координаталар системасида ҳам 6 та турли такрорий интегралга (ёки такрорий интеграллар йиғиндисиға) келтириш мумкин.

Маълумки, $(x,\ y,\ z)$ декарт координаталари билан $(r,\ \varphi,\ \theta)$ сферик координаталари орасидаги боғланишлар ушбу

$$x=r\cos\varphi\cdot\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\cdot\cos\theta,\quad z=r\sin\theta$$

формулалар билан берилади, бунда алмаштириш якобиани учун $\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \theta)}=r^2\cos\theta$ формулага эгамиз.

Ўзгарувчиларни бундай алмаштириш натижасида уч каррали интеграл қуйидагича ёзилади:

$$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dV=$$

$$=\iiint\limits_{(V^{**})} f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta,$$

бу ерда (V^{**}) соҳа берилган (V) соҳанинг сферик координаталар системасидаги аксидир.

Сферик координаталар системасида:

а) $r = \text{const}$ ($r \geqslant 0$) маркази $O(0, 0, 0)$ нуқтада ва радиуси r га тенг бўлган сферик сиртдир;

б) $\varphi = \text{const}$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) Oz ўқидан ўтган ва (x, z) текислик билан φ бурчак ташкил этган ярим текисликдир. Эслатиб ўтамизки, φ бурчак Ox ўқининг мусбат йўналишидан соат милларининг йўналишига қарши йўналишда ҳисобланади;

в) $\theta = \text{const}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ эса, учи O (0, 0, 0) нуқтада, ўқи Oz устида бўлган ва ясовчилари (x, y) текислик билан θ бурчак ташкил этган доиравий конус сиртидир.

(V) соҳа сферик, конус сиртлар билан чегараланган ҳолларда сферик координаталар системаси ишлатилса, содда такрорий интегралларга келиш мумкин. Биз бундай ҳолларга мисоллар кўрмаймиз. 6- мисолда берилган (V) соҳа бошқача сиртлар билан чегараланган. Шу ҳолда сферик координаталардан фойдаланиб берилган уч каррали интегрални такрорий интегралга келтириш билан шуғулланамиз.

6- мисолдаги (V) соҳани чегараловчи сиртларнинг (r, φ, θ) сферик координаталардаги тенгламаларини ёзамиз:

а) $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрик сиртнинг сферик координаталардаги тенгламасини ёзамиз: $r^2 \cos^2 \theta = a^2$ ёки $r \cos \theta = a$. Қайси ўзгарувчини функция дейишимизга қараб, цилиндрик сирт тенгламаси

$r = \frac{a}{\cos \theta}$ ёки $\theta = \arccos \frac{a}{r}$ кўринишда ёзилади.

б) $x + z = a$ текисликнинг сферик координаталардаги тенгламаси $r(\cos \varphi \cos \theta + \sin \theta) = a$ кўринишга эга. Демак, $r = r(\varphi, \theta)$ деб олинганда текислик тенгламаси ушбу $r = \frac{a}{\cos \varphi \cos \theta + \sin \theta}$ кўринишда ёзилади, $\varphi = \varphi(r, \theta)$ деб олинганда эса, ўша текислик тенгламасини $\cos \varphi = \frac{a - r \sin \theta}{r \cos \theta}$ тенгликка асосан

$$\varphi = \pm \arccos \frac{a - r \sin \theta}{r \cos \theta} + 2\pi n \quad (n \in Z)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Энди $\theta = \theta(r, \varphi)$ деб олсак, тегишли текислик тенгламасини ёзиш учун аввал $\cos \varphi \cos \theta + \sin \theta = \frac{a}{r}$ тригонометрик тенгламадан θ ни аниқлаймиз. Бунинг учун тенгламанинг икки томонини $\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}$ га кўпайтириб, ёрдамчи γ бурчак киритиш усулидан фойдаланамиз:

$$\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \cdot \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \cdot \sin \theta = \frac{a}{r\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}};$$

$$\sin \gamma = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}},$$

$$\sin(\theta+\gamma)=\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}.$$

Охирги муносабат содда тригонометрик тенгламадан иборат бўлиб, у ечимга эга бўлиши учун $\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\leqslant 1$ (маълумки, $a>0$, $r>0$) тенгсизлик бажарилиши етарли. Шу ҳолда θ учун топамиз:

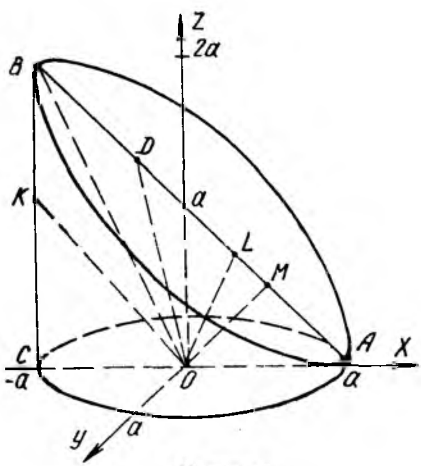
$$\theta=\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}.$$

Бу биз кўраётган ҳолда тегишли текислик тенгламасидан иборат.

в) $z=0$ учун $r\sin\theta=0$ ёки $\theta=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан (x, y) текисликда ётган нуқталар ясовчилари (x, y) текислик билан $\theta=0$ бурчак ташкил этган конус сиртининг нуқталаридан иборат экани келиб чиқади.

г) (V) соҳанинг B нуқтаси энг баланд (Oz ўқи бўйича) нуқтасидир (50- чизма). Унинг координаталари ушбу $r=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$, $\varphi=\pi$, $tg\,\theta=\frac{CB}{CO}=2$, $\theta=\mathrm{arc\,tg}\,2$ ҳисоблашларга кўра мос равишда $(a\sqrt{5}, \pi, \mathrm{arc\,tg}\,2)$ эканлигини хотирада тутишимиз лозим бўлади.

Oz ўқи мусбат йўналишининг тенгламаси $\theta=\frac{\pi}{2}$ ва $O(0, 0, 0)$ нуқтанинг тенгламаси эса $r=0$ экани равшан. Аввал кесимлар усулида берилган уч каррали интегрални 6 хил усул билан такрорий интегралга келтирамиз. Бунда I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 белгилар билан сферик координаталар системасида олинган интеграллар белгиланган бўлиб, аввалги мулоҳазалардаги мос белгиларга алоқаси йўқ.

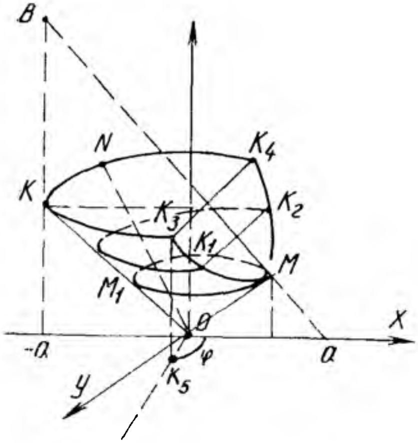


50- чизма

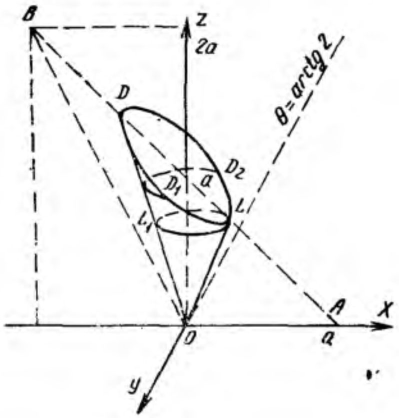
1. $\theta=\mathrm{const}$. Берилган (V) соҳани конуссимон сиртлар билан бўлиб чиқамиз. Аргумент θ нинг қийматига қараб конус сирт (V) соҳани чегараловчи сиртларни турлича кесиб ўтади:

а) $0\leqslant\theta\leqslant\mathrm{arc\,tg}\,2$ да $\theta=\mathrm{const}$ конус сиртнинг баланд нуқтаси K цилиндрик сиртда ва пастки нуқтаси M берилган текислик билан $\varphi=0$ ярим текисликда (50 a-чизма) ётади:

б) $\mathrm{arc\,tg}\;2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ да $\theta=\mathrm{const}$ конус сиртнинг баланд нуқтаси D ва пастки нуқтаси L берилган текисликда



50-а чизма



50-б чизма

бўлиб, турли $\varphi = \pi$ ва $\varphi = 0$ ярим текисликларда ётади (50-*б* чизма).

Энди θ ни эркли аргумент, $r = r(\theta)$ ва $\varphi = \varphi(r, \theta)$ деб қараб, кесимдаги конуссимон сиртни r радиусли сфера билан кесиб чиқамиз ва φ нинг ўзгариш соҳасини конус ясовчилари вазиятига (ёки ярим текисликлар вазиятига) қараб аниқлаймиз.

Керак бўладиган OM, OK (50-*а* чизма), OD, OL (50-*б* чизма) кесмалар узунлигини мос равишда r_M, r_K, r_D, r_L деб белгилаймиз ва уларни аниқлаймиз:

$$OM \text{ учун } \varphi = 0, \ r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta) = a$$

тенгликлардан топамиз: $r_M = \dfrac{a}{\cos\theta + \sin\theta}$; OL учун ҳам $r_L = \dfrac{a}{\cos\theta + \sin\theta}$ формулага эгамиз. Ниҳоят, OK учун $r_K = \dfrac{a}{\cos\theta}$ (φ га боғлиқ эмас), OD учун $\varphi = \pi$, $r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta) = a$ муносабатлардан $r_D = \dfrac{a}{\sin\theta - \cos\theta}$ формулаларни ҳосил қиламиз. Юқоридаги а) ҳолда $0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arc\,tg} 2$ тенгсизликлар ўринли. Шунинг учун радиуси OM дан катта бўлмаган сферик сиртлар $\theta = \text{const}$ конус сиртни тўлиқ айлана бўйича кесиб ўтади, яъни r нинг $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a}{\cos\theta + \sin\theta}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлари учун φ нинг $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлари тўғри келади.

(V) соҳанинг тегишли қисмини (V_1) деб белгилаймиз, у қуйидагича тавсифланади:

$$(V_1) = \left\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arc\,tg} 2;\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta};\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

Сферик сиртлар радиуси OM дан катта. Шу OM билан OK орасида конус сиртида айлананинг бирор қисми чизилади; ушбу $x+z=a$ текисликда ётадиган нуқталар учун $\varphi = \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}$ ва $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}$ муносабатлар ўринли. Шу сабабли (V) соҳанинг тегишли (V_2) қисми қуйидагича тавсифланади:

$$(V_2) = \Big\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arc\,tg} 2;\ \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta} \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta};$$
$$\arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}\Big\}.$$

Энди θ нинг $\operatorname{arctg} 2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлари учун ҳам икки (V_3) ва (V_4) соҳаларни кўрсатиш мумкин:

а) $0 \leqslant r \leqslant r_L$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ва б) $r_L \leqslant r \leqslant r_Д$, $\varphi_{D_1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{D_2}$; D_1, D_2 нуқталар учун φ ни аниқлаш формуласи K_1, K_2 нуқталарникига ўхшаш бўлиб, φ миқдор θ ва r ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Демак, (V_3) ва (V_4) соҳаларни ҳам тавсифлаш мумкин:

$$(V_3) = \Big\{(r, \varphi, \theta): \operatorname{arctg} 2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta};$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\Big\},$$
$$(V_4) = \Big\{(r, \varphi, \theta): \operatorname{arctg} 2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta} \leqslant r \leqslant \frac{a}{\sin\theta - \cos\theta};$$
$$\arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}\Big\}.$$

Юқорида тавсифланган (V_1), (V_2), (V_3), (V_4) соҳаларга синчиклаб эътибор берсак, кўрамизки, (V_3) ва (V_1) соҳаларни бирлаштирса бўлади, ҳосил бўлган соҳани (V_1^*) деб белгилаймиз. Равшанки, (V_1^*) соҳа учун θ аргумент 0 дан $\pi/2$ гача ўзгаради. Шундай қилиб, (V_1^*) соҳани қуйидагича тавсифлаш мумкин:

$$(V_1^*) = \Big\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta};\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\Big\}.$$

Ниҳоят, берилган уч каррали интегрални қуйидаги учта такрорий интеграллар йиғиндиси кўринишида ёзамиз:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta + \sin\theta}} r^2\, dr \int_0^{2\pi} F(r, \varphi, \theta)\, d\varphi +$$

$$+\int_{0}^{\operatorname{arctg} 2}\cos\theta\, d\theta \int_{\frac{a}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2\, dr \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} F(r,\varphi,\theta)\, d\varphi +$$

$$+\int_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta \int_{\frac{a}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{a}{\sin\theta+\cos\theta}} r^2\, dr \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} F(r,\varphi,\theta)\, d\varphi,$$

бу ерда $\alpha=\arccos\dfrac{a-r\sin\theta}{r\cos\theta}$ ва

$$F(r,\varphi,\theta)=f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

Энди θ ни эркли аргумент ҳамда $\varphi=\varphi(\theta)$, $r=r(\varphi,\theta)$ деб уч каррали интегралда интеграллаш чегараларини қўямиз. Берилган $\theta=\text{const}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\operatorname{arc\,tg} 2)$ конуссимон сиртнинг ихтиёрий $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ ярим текисликдаги ясовчисини $r=r(\varphi,\theta)$ радиусли сферик сиртлар билан бўлиб чиқамиз. Ҳам $\theta=\text{const}$ конус сиртда, ҳам $r\cos\theta=a$ цилиндрик сиртда ва ҳам $r(\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)=a$ текисликда ётган K_3, K_4 нуқталар учун $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=2\pi-\varphi_0$ (ёки $\varphi=-\varphi_0$) координаталарни топамиз. Бунинг учун цилиндр ва текислик тенгламалари системасини ечамиз:

$$r(\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)=r\cos\theta;\ \cos\varphi=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}=1-\operatorname{tg}\theta;$$

$$\varphi=\varphi_0=\arccos(1-\operatorname{tg}\theta).$$

Шундай қилиб, φ нинг $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари учун сферик сиртларнинг радиуси $r=0$ дан то цилиндр сиртидаги (50*а*- чизма) K_3KK_4 ёйнинг ихтиёрий N нуқтасигача бўлган ON масофагача, яъни $r=\dfrac{a}{\cos\theta}$ миқдоргача ўзгаради. Бунга асосланиб (V) соҳанинг бир қисмини тавсифлаймиз:

$$(V_1)=\left\{(r,\varphi,\theta):0\leqslant\theta\leqslant\operatorname{arc\,tg} 2;\quad \varphi_0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_0;\right.$$
$$\left.0\leqslant r\leqslant\frac{a}{\cos\theta}\right\}.$$

Шаклдан кўриниб турибдики, $K_3K_1MK_2K_4$ ёйдаги нуқталар $x+z=a$ текисликда ётади, улар учун

$$r=\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}\ \text{ва}\ |\varphi|\leqslant\varphi_0.$$

Шу ёйдаги исталган нуқтагача ўтказилган конус ясовчисини радиуси $0\leqslant r\leqslant r_{\text{текислик}}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган сферик сиртлар кесиб ўтади. Бу (V) соҳанинг яна бир қисмини тавсифлаш имконини беради:

$$(V_2)=\left\{(r,\varphi,\theta):0\leqslant\theta\leqslant\operatorname{arc\,tg} 2;\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0;\ 0\leqslant r\leqslant\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}\right\}.$$

Энди 50-*б* чизмага қараб, θ учун $\operatorname{arc\,tg} 2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ тенгсизликлар бажарилганда $\varphi = \varphi(\theta)$, $r = r(\theta, \varphi)$ деб, (V) соҳанинг қолган қисмини аниқлаш мумкин. LD_1DD_2L контур бутунлай $x + z = a$, яъни $r = \frac{a}{\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta}$ текисликда ётади. Ихтиёрий $\varphi\,(0 \leqslant \varphi \leqslant \leqslant 2\pi)$ ярим текисликдаги $\theta = \mathrm{const}$ конуссимон сиртнинг ясовчисини радиуси $0 \leqslant r \leqslant r_{\text{текислик}}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган сферик сиртлар кесиб ўтади. Демак,

$$(V_3) = \left\{(r, \varphi, \theta): \operatorname{arc\,tg} 2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\right.$$
$$\left.0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta}\right\}.$$

Шундай қилиб, (V) соҳа учта (V_1), (V_2), (V_3) қисмга ажратилди. Шу сабабли уч каррали интеграл қуйидагича учта такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$J_2 = \int\limits_0^{\operatorname{arc\,tg} 2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_{\arccos(1-\operatorname{tg}\theta)}^{2\pi - \arccos(1-\operatorname{tg}\theta)} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2 \cdot F(r, \varphi, \theta)\, dr +$$

$$+ \int\limits_0^{\operatorname{arc\,tg} 2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_{-\arccos(1-\operatorname{tg}\theta)}^{\arccos(1-\operatorname{tg}\theta)} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}} r^2 \cdot F(r, \varphi, \theta)\, dr +$$

$$+ \int\limits_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}} r^2 F(r, \varphi, \theta)\, dr.$$

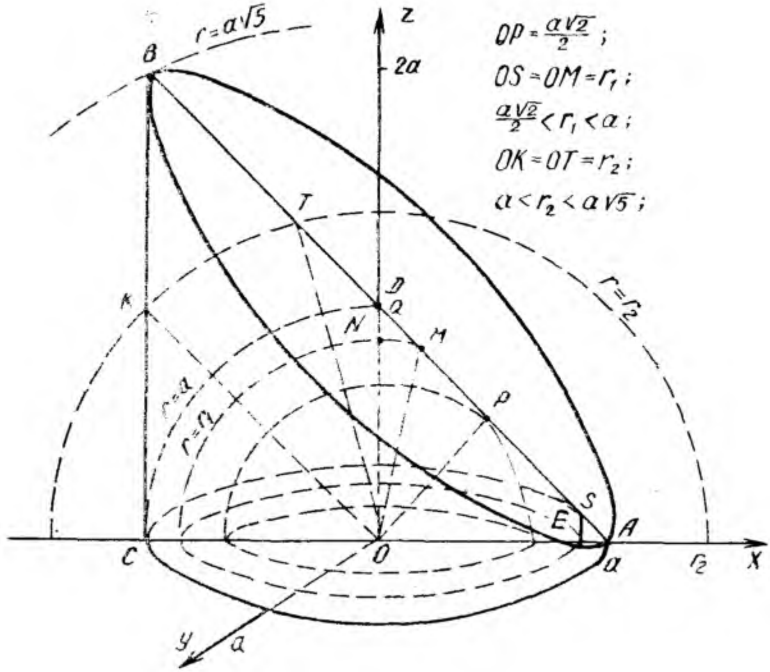
2. $r = \mathrm{const}$. Берилган (V) соҳани радиуси $r = \mathrm{const}$ бўлган сферик сиртлар билан бўлиб чиқиб, ҳар бир r нинг қиймати учун φ, θ ларнинг ўзгаришини кўриб чиқамиз.

Координаталар бошидан $x + z = a$ текисликкача бўлган масофа $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ га тенг, демак, сферик сиртларнинг радиуси $0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}$ оралиқда ўзгарганда (V) соҳага қуйидагича тавсифланган

$$(V_1) = \left\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}$$

соҳани чизиш мумкин. Бу соҳа ярим шардан иборат.

Лекин сферик сиртларнинг радиуси $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant a$ оралиқда ўзгарганда улар $\varphi = 0$ ярим текисликдаги AD кесмани (51-чизма) OP биссектрисага нисбатан симметрик жойлашган M ва S нуқта-

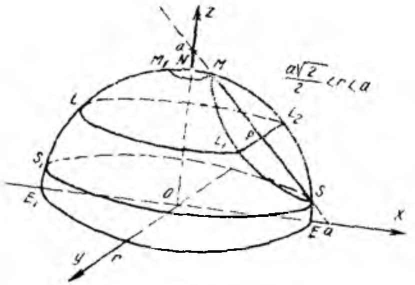


51- чизма

ларда кесиб ўтади. Бу нуқталар учун θ нинг мос қийматини топамиз. Ушбу $\varphi=0$; $r(\cos\varphi\ \cos\theta+\sin\theta)=a$ тенгламалардан $\cos\theta+$ $+\sin\theta=\frac{a}{r}$ тригонометрик тенглама ҳосил бўлади. Унинг кўрилаётган масалага тегишли ечимлари $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{r\sqrt{2}}$ тенгламадан топилади. Ечимлар $\theta=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}$ кўринишида ёзилади. Энди S нуқта учун $\theta_1=\theta_S=\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}$, M нуқта учун $\theta_2=\theta_M=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}$ қийматларга эгамиз. Навбатдаги мулоҳазаларимизда $\theta=\theta(r)$ ва $\varphi=\varphi(r,\theta)$ деб қараймиз ҳамда $\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant$ $\leqslant r\leqslant a$ ҳол учун яна (V) соҳанинг қисмларини кўриб чиқамиз (51 a-чизма):

1) ES ёй (V) да бутунлай жойлашган шар қатламининг эгри сатҳини чизиб чиқади, унинг нуқталари учун $0\leqslant\theta\leqslant\theta_1$ ва $0\leqslant\varphi\leqslant$ $\leqslant 2\pi$ тенгсизликлар ўринли.

2) MN ёй эса (V) соҳада жойлашган шар сегментининг эгри



51а- чизма

сатҳини чизиб чиқади, унинг нуқталари учун $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ тенгсизликлар ўринли.

3) $S_1 M_1$ ёй эса шар қатламининг $x+z=a$ текислик билан қисми ажраган эгри сатҳини чизиб чиқади. Бу соҳада $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. φ нинг қиймати r,- θ га боғлиқ бўлиб, текисликнинг $r(\cos\varphi\ \cos\theta + \sin\theta) = a$ тенгламасидан аниқланади:

$\varphi = \pm \arccos \frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} + 2\pi n\ (n \in Z)$, яъни φ бурчак

$$\arccos \frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \arccos \frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}$$

ораликда ўзгаради.

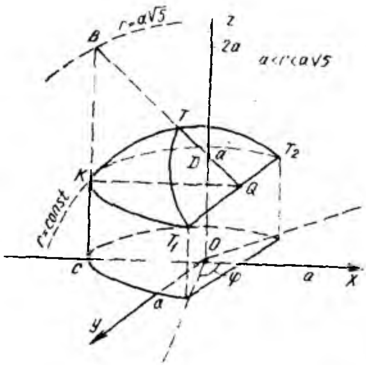
Шундай қилиб, $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant a$ ҳол учун (V) соҳанинг яна учта бўлагини тавсифлаш мумкин:

$$(V_2) = \left\{(r, \varphi, \theta) : \frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant a;\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1;\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

$$(V_3) = \left\{(r, \varphi, \theta) : \frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant a;\ \theta_2 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

$$(V_4) = \left\{(r, \varphi, \theta) : \frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant r \leqslant a;\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2;\right.$$

$$\left.\arccos \frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \arccos \frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}\right\}.$$



51 б- чизма

Энди радиуси $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{5}$ оралиқда ўзгарадиган сферик сиртлар билан (V) соҳанинг қолган қисмини бўлиб чиқамиз. Ҳар бир сфера $\varphi = \pi$ ярим текисликдаги BD кесмани T нуқтада ва цилиндр ясовчиси CB ни K нуқтада кесиб ўтади (51- *б* чизма). T нуқта учун θ ни $\varphi = \pi$, $r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta) = a$ тенгламалардан, яъни $\sin\theta - \cos\theta = \frac{a}{r}$ тенгламадан топамиз:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{r\sqrt{2}}, \quad \theta_T = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{a}{r\sqrt{2}}.$$

K нуқта учун θ ни $r\cos\theta = a$ цилиндрик сирт тенгламасидан топамиз: $\theta_K = \arccos\frac{a}{r}$. Олдиндан олинган $r = \mathrm{const}$ ва унга қараб топилган $\theta_K \leqslant \theta \leqslant \theta_T$ лар учун $\varphi = \varphi(r, \theta)$ нинг қийматини $r=\mathrm{const}$ сфера билан $r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta) = a$ текисликнинг кесишиш T_1TT_2 ёйида ётган T_1, T_2 нуқталарга мос келган φ нинг қийматларидан аниқлаймиз:

$$\varphi_1 = \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta},$$

$$\varphi_2 = 2\pi - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}.$$

Шундай қилиб, (V) соҳанинг бешинчи бўлагини ҳам тавсифлашимиз мумкин:

$$(V_5) = \left\{(r, \varphi, \theta) : a \leqslant r \leqslant a\sqrt{5};\ \arccos\frac{a}{r} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} + \right.$$

$$+ \arcsin\frac{a}{r\sqrt{2}};\ \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi -$$

$$\left. - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}\right\}.$$

Натижада берилган уч каррали интеграл бешта каррали интеграллар йиғиндиси кўринишида қуйидагича ёзилади:

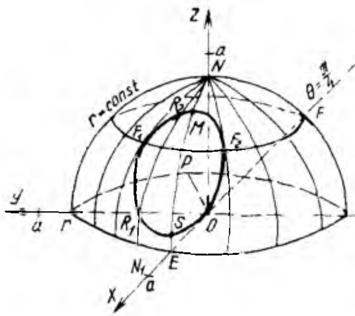
$$I_3 = \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} r^2\,dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} F(r, \varphi, \theta)\,d\varphi +$$

$$+ \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} r^2\,dr \left[\int_0^{\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} F(r, \varphi, \theta)\,d\varphi + \right.$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} F(r, \varphi, \theta)\,d\varphi +$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{a}{r\sqrt{2}}} \cos\theta\,d\theta \int_{\arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}}^{2\pi - \arccos\frac{a - r\sin\theta}{r\cos\theta}} F(r, \varphi, \theta)\,d\varphi \right] +$$

$$+\int\limits_{a}^{a\sqrt{5}} r^2dr \int\limits_{\arccos\frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{a}{r\sqrt{2}}} \cos\theta d\theta \int\limits_{\arccos\frac{a-r\sin\theta}{r\cos\theta}}^{2\pi-\arccos\frac{a-r\sin\theta}{r\cos\theta}} F(r, \varphi, \theta)\, d\varphi.$$



51-в чизма

(бу ерда учта интеграл бир хил ташқи интеграл бўйича бирлаштириб ёзилган ва $F(r, \varphi, \theta) = f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\times\times\cos\theta, r\sin\theta))$. Энди r ни эркли аргумент, $\varphi=\varphi(r)$ ва $\theta=\theta(r, \varphi)$ деб қараймиз. У ҳолда (V) соҳада жойлашган ихтиёрий $r=\text{const}$ $(0\leqslant r\leqslant a\sqrt{5})$ сферик сиртнинг қисмини Oz дан ўтган ярим текисликлар билан кесиб, ҳосил бўлган айлана ёйида θ ни r, φ га боғлиқ қилиб оламиз. Масалан, r нинг $0\leqslant r\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлари учун (51-чизма) ярим шар бутунлай (V) да бўлади. Демак, (V) соҳанинг бир бўлагини тавсифлаш мумкин:

$$(V_1)=\left\{(r, \varphi, \theta): 0\leqslant r\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Радиуси $\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant a$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган сферик сиртлар $r(\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)=a$ текисликни маркази OP нурнинг $\left(\varphi=0;\ \theta=\frac{\pi}{4}\right)$ P учида бўлган концентрик айланалар бўйича кесиб ўтади (51-в чизма). Айлананинг $\varphi=0$ ярим текисликка нисбатан энг узоқ жойлашган F_1, F_2 нуқталари учун φ ни текислик тенгламасидан $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\text{ деб}\right)$ топамиз:

$$r\left(\cos\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=a,\ \cos\varphi=\frac{a\sqrt{2}-r}{r},$$

$$\varphi=\pm\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}+2\pi n\ (n\in Z).$$

Демак, F_1 учун $\varphi=\varphi_1=\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}$,

F_2 учун $\varphi=\varphi_2=2\pi-\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}$, ёки $\varphi=-\varphi_1=$ $=-\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}$ (керак бўлганини ишлатамиз), Шундай қилиб, $r=\mathrm{const}$ сферик сиртнинг сатҳи икки қисмга ажралади:

а) F_1FF_2 ёйни кесиб ўтган ярим текисликлар учун $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$ бўлади ва ҳар бир ярим текисликда $\frac{1}{4}$ айлана ёйи чизилади, яъни $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ бўлади. Натижада (V) нинг яна бир қисмини тавсифлаш мумкин бўлади:

$$(V_2)=\left\{(r,\ \varphi,\ \theta):\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant a;\ \arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\right.$$

$$\left.-\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r};\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

б) Энди текисликда ётган доира атрофидаги сферик сирт қисмини қараб чиқамиз. Ҳар бир $\varphi=\mathrm{const}$ $(-\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$ ярим текисликда иккита N_1R_1 ва R_2N (51-*в* чизма) ёй чизилади; $\varphi=-\varphi_1$ ва $\varphi=\varphi_1$ ярим текисликларда бу ёйлар бирлашиб F_2 ва F_1 дан ўтувчи чорак айлана ёйини ҳосил қилади. Бу ёйларнинг R_1 ва R_2 нуқталари $r\,(\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)=a$ текисликда ётади, уларнинг θ_{R_1} ва θ_{R_2} координаталари учун $\theta_{R_2}=\frac{\pi}{2}-\theta_{R_1}$ тенглик бажарилади ва текислик тенгламасидан топилади:

$$\theta_{R_1}=\theta=\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}.$$

Шундай қилиб, (V) нинг яна икки бўлагини тавсифлаш мумкин:

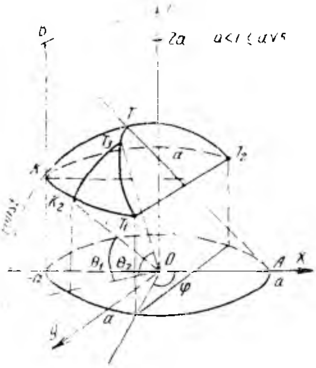
$$(V_3)=\left\{(r,\ \varphi,\ \theta):\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant a;\ -\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}\leqslant\varphi\leqslant\right.$$

$$\leqslant\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r};\ 0\leqslant\theta\leqslant\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-$$

$$\left.-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right\},$$

$$(V_4)=\left\{(r,\ \varphi,\ \theta):\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant a;\ -\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1;\right.$$

$$\left.\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}+\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$



51-г чизма

Сферик сиртлар радиуси $a \leqslant r \leqslant \leqslant a\sqrt{5}$ тенгсизликларни қаноатлантирганда (51-г чизма) $\varphi = \varphi(r)$ ни топиш учун цилиндрнинг $r\cos\theta = a$ тенгламаси ихтиёрий φ лар учун ўринли эканлигини эсда тутамиз. Ундан $\cos\theta = \frac{a}{r}$,

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}$ қийматларни аниқлаб, $r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\theta) = a$ текислик тенгламасига қўямиз. Сўнгра цилиндрик сирт билан текисликда ётган T_1, T_2 нуқталарнинг φ_{T_1}, φ_{T_2} координатасини аниқлаймиз:

$$a\cdot\cos\varphi + \sqrt{r^2-a^2} = a;\ \cos\varphi = \frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a},$$

$$\varphi = \varphi_{T_1} = \arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a};$$

$$\varphi = \varphi_{T_2} = 2\pi - \arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a}.$$

Шаклидаги $r = \text{const}$ учун ҳосил бўлган соҳани ҳар бир ярим текислик ($\varphi_{T_1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{T_2}$) сферада ётган ва цилиндр сиртидан то текисликкача бўлган айлана ёйи бўйлаб кесиб ўтади (масалан, K_2T_3 ёки KT ёйлар). Бу ёй нуқталари учун θ нинг қиймати $\theta = \theta_1$ — цилиндр сиртидаги нуқта координатасидан $\theta = \theta_2$ — текисликдаги нуқта координатасигача ўзгаради, яъни

$$\theta_1 = \arccos\frac{a}{r},\quad \theta_2 = \arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}} -$$

$$-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\quad \text{ва}\quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2.$$

Ниҳоят, (V) соҳанинг бешинчи бўлагини тавсифлаймиз:

$$(V_5) = \Big\{(r,\ \varphi,\ \theta) : a \leqslant r \leqslant a\sqrt{5};\ \arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a};\quad \arccos\frac{a}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \theta \leqslant \arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}} - \arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\Big\}.$$

Шундай қилиб, уч каррали интегрални бешта такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин:

$$I_4=\int\limits_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} r^2dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}F(r,\varphi,\theta)\cos\theta\, d\theta+$$

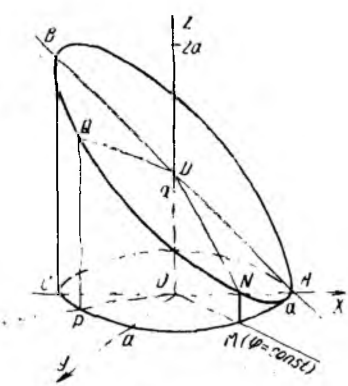
$$+\int\limits_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} r^2dr\int\limits_{\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}F(r,\varphi,\theta)\cos\theta\, d\theta+$$

$$+\int\limits_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} r^2dr\int\limits_{-\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}}^{\arccos\frac{a\sqrt{2}-r}{r}}d\varphi\left[\int\limits_0^{\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}F(r,\varphi,\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}+\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}}^{\pi/2}F(r,\varphi,\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta\right]+$$

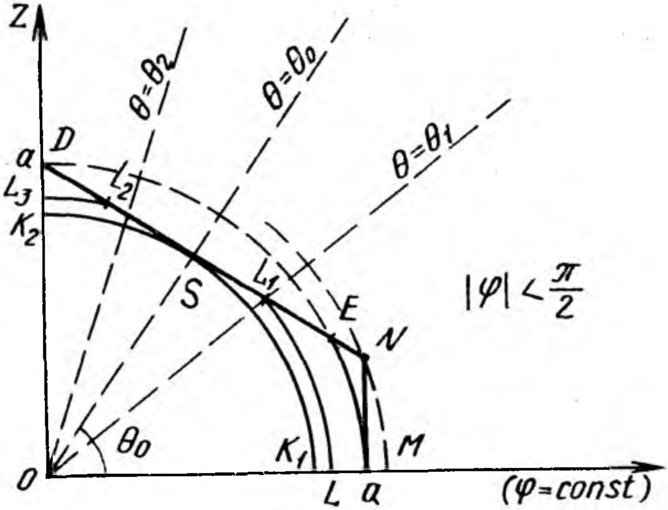
$$+\int\limits_a^{a\sqrt{5}} r^2dr\int\limits_{\arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a}}^{2\pi-\arccos\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{a}}d\varphi\int\limits_{\arccos\frac{a}{r}}^{\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}F(r,\varphi,\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta.$$

3. $\varphi=\text{const}$. Берилган (V) соҳани Oz ўқидан ўтувчи ярим текисликлар билан бўлиб (кесиб) чиқамиз (52-чизма). Кесимда трапеция ҳосил бўлади, трапециянинг кўриниши φ га (аслида эса $\cos\varphi$ нинг ишорасига) боғлиқ бўлади: 52-*а* чизмада $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ва 52-*б* чизмада $|\varphi|>\frac{\pi}{2}$ ҳоллар кўрсатилган, $|\varphi|=\frac{\pi}{2}$ учун квадрат ҳосил бўлади.



52-*чизма*

Энди φ ни эркли аргумент ҳамда $\theta=\theta(\varphi)$ ва $r=r(\varphi,\theta)$ деб қараймиз. Бу ҳолда кесимдаги трапеция юзини O нуқтасидан чиққан конус ясовчилари билан бўлиб чиқамиз (тўлдирамиз) ва бу ясовчиларда ётган нуқталар учун $r=r(\varphi,\theta)$ нинг қийматини аниқлаймиз (52-*в* чизма). Бу чизмада $OMND$ ва $ODQP$ трапецияларни бирлашти-

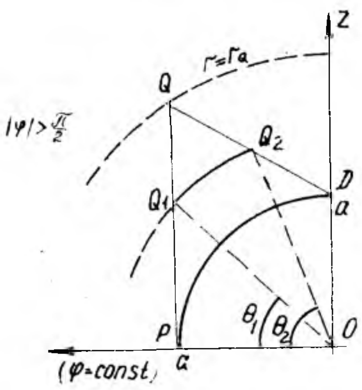


52- а чизма

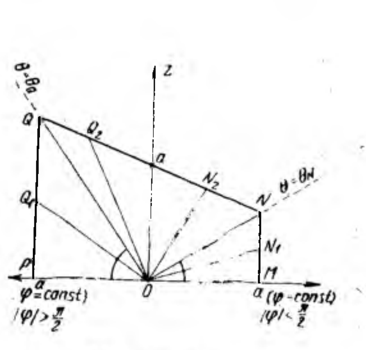
риб, ягона $OMNDQP$ (яъни қисқача $MNQP$) трапеция ҳосил қилинган. Бунинг сабаби, изланган натижа ихтиёрий φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ бурчак учун ўринлидир. Кесимдаги N ва Q нуқталар учун θ координатани $r\cos\theta = a$, $r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\theta = a$ тенгламалар системасидан аниқлаймиз:

$$a\cos\varphi + a\,\mathrm{tg}\,\theta = a; \quad \mathrm{tg}\,\theta = 1 - \cos\varphi: \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\,(1 - \cos\varphi).$$

Кўриниши бир хил бўлгани билан Q учун $\cos\varphi < 0$ ва N учун $\cos\varphi > 0$ тенгсизлик ўринли эканини эсда тутишимиз керак. θ бурчак $0 \leqslant \theta \leqslant \mathrm{arctg}\,(1 - \cos\varphi)$ тенгсизликда ўзгарганда шу соҳадаги ON_1 ясовчи ва OQ_1 ясовчи нуқталаридан ўтказилган сферик сиртлар



52- б чизма



52- в чизма

радиуси $r=0$ дан то цилиндрик сиртда ётган N_1 ва Q_1 нуқталар радиусигача ўзгаради, яъни $0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta}$. Натижада (V) соҳанинг бир бўлагини тавсифлаш имкони туғилади:

$$(V_1) = \left\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg}(1-\cos\varphi);\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta}\right\}.$$

Энди θ бурчак $\operatorname{arctg}(1-\cos\varphi) \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ тенгсизликда ўзгарса, бу соҳадаги ON_2 ва OQ_2 конус ясовчиларидан ўтган сферик сиртлар радиуси $r=0$ дан то текисликдаги N_2, Q_2 нуқталар радиусигача ўзгаради, яъни $0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}$. Демак, (V) соҳанинг иккинчи бўлагини ҳам тавсифлашимиз мумкин:

$$(V_2) = \left\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \operatorname{arc\,tg}(1-\cos\varphi) \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}\right\}.$$

Шундай қилиб, берилган уч каррали интегралнинг ифодаси учун бешинчи кўриниш топилди:

$$I_5 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\operatorname{arctg}(1-\cos\varphi)} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2 \cdot F(r, \varphi, \theta)\, dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\operatorname{arctg}(1-\cos\varphi)}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}} r^2\, F(r, \varphi, \theta)\, dr.$$

Энди φ ни эркли аргумент ҳамда $r=r(\varphi)$, $\theta=\theta(\varphi, r)$ деб қараймиз. Унда $\varphi=\mathrm{const}$ кесимдаги трапеция шаклини концентрик айланалар ёйлари, яъни сферик сирт излари билан бўлиб (тўлдириб) чиқамиз ва бу ёйлардаги нуқталар учун $\theta=\theta(r, \varphi)$ координатанинг ўзгариш соҳасини топамиз.

Аввал зарур маълумотларни аниқлаб оламиз. Бунда яна 52, 52-*а*, 52-*б* чизмалардан фойдаланамиз;

а) N ва Q нуқталар учун (яъни ON ва OQ кесмалар узунлигини) $r=\frac{a}{\cos\theta}$ тенгликдан $\operatorname{tg}\theta = 1-\cos\varphi$ ҳол учун ҳисоблаймиз:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1-\cos\varphi)^2}} \text{ ва}$$

$$r = a\sqrt{2-2\cos\varphi+\cos^2\varphi}.$$

б) $\varphi=\mathrm{const}$ ярим текислигида O нуқтадан $x+z=a$ текислигигача бўлган масофа, яъни OS перпендикуляр узунлиги, бошқача айтганда $MNDOM$ кесимдаги θ қандай бўлганда ушбу $r=$

$= \dfrac{a}{\cos\varphi\,\cos\theta+\sin\theta}$ функция (θ бўйича) минимумга эга бўлади деган савол қўямиз. Бунинг учун $\dfrac{\partial r}{\partial\theta}$ ҳосилани топиб, $\dfrac{\partial r}{\partial\theta}=0$ тенгламани қараймиз:

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}=-\frac{a(-\sin\theta\,\cos\varphi+\cos\theta)}{(\cos\varphi\,\cos\theta+\sin\theta)^2}.$$

Энди $\dfrac{\partial r}{\partial\theta}=0$ тенгламани ечиш учун $-\sin\theta\,\cos\varphi+\cos\theta=0$ тенгламани ечиш етарли. Уни $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{\cos\varphi}$ кўринишда ёзамиз. Ундан масала шартига кўра $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\cos\varphi}$ формулага эгамиз. Энди бу θ учун $r=r(\varphi)$ ни топамиз:

$$r=\frac{a}{\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta}=\frac{a}{\cos\varphi\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}}}=$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi\cdot\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}.$$

Шундай қилиб φ нинг $|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари учун $\varphi=\mathrm{const}$ ярим текисликдаги S нуқтага $r=$ $=\dfrac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$ қиймат мос келади. Маркази O нуқтада ва радиуси $0\leqslant r\leqslant\dfrac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган сфералар $MNDOM$ кесимда жойлашган чорак айланани чизади. Равшанки, K_1SK_2 ёй учун $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Бу мулоҳазалар ($V$) соҳанинг бир бўлагини тавсифлаш имконини беради:

$$(V_1)=\left\{(r,\ \varphi,\ \theta):-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant r\leqslant\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}};\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Сферик сиртлар уларнинг радиуси $\dfrac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\leqslant r\leqslant a$ тенгсизликларни қаноатлантирганда трапеция сатҳини LL_1 ва L_2L_3 ёйлар бўйича кесади. DN кесмадаги L_1, L_2 нуқталар S нуқтага нисбатан симметрик жойлашган, яъни S учун $\theta=\theta_0=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\cos\varphi}$, L_1 учун $\theta=$ $=\theta_1$, L_2 учун $\theta=\theta_2$ ва $\Delta\theta=\theta_0-\theta_1$ десак, у ҳолда $\theta_2=\theta_0+$ $+\Delta\theta=2\theta_0-\theta_1$, θ_1 бурчакни $r(\cos\varphi\,\cos\theta+\sin\theta)=a$ текислик тенгламасидан топиб оламиз, яъни

$$\theta_{\text{тек}} = \arcsin \frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}} - \arcsin \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \theta_1.$$

Шундай қилиб, (V) соҳанинг K_1MESK_1 ва SK_2DS контурлар билан чегараланган соҳаларга мос келган иккита бўлагини тавсифлаймиз:

$$(V_2) = \left\{(r,\ \varphi,\ \theta): -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ \frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\right\},$$

$$(V_3) = \left\{(r,\ \varphi,\ \theta): -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ \frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} \leqslant r \leqslant a;\ 2\theta_0 - \theta_1 \leqslant \right.$$
$$\left. \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Энди $MNEM$ контур билан аниқланадиган кесимни кўриб чиқамиз. Бу соҳача учун сферик сиртлар радиуси a дан катта бўлиб, то $r_N = a\sqrt{2 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}$ қийматгача ўзгаради, яъни $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}$. Бу соҳадаги EM ёйда θ нинг қиймати $\theta = 0$ дан $\theta = \theta_{\text{тек}} = \theta_1$ гача ўзгаради. Натижада (V) соҳанинг яна бир бўлагини тавсифлашимиз мумкин бўлади:

$$(V_4) = \left\{(r,\ \varphi,\ \theta): -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ a \leqslant r \leqslant \right.$$
$$\left. \leqslant a\sqrt{2 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\right\}.$$

(V) соҳанинг қолган бўлакларини тавсифлаш учун $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$ бўлганда $\varphi = \text{const}$ кесимни (52-*б* чизма) текшириб чиқамиз.

Сферик сиртлар уларнинг радиуси $0 \leqslant r \leqslant a$ тенгсизликларни қаноатлантирганда $ODQPO$ соҳада PD чорак айлана ёйини чизади, яъни θ учун $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. Бу эса (V) соҳанинг яна бир бўлагини тавсифлаш имконини беради.

$$(V_5) = \left\{(r,\ \varphi,\ \theta): \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2};\quad 0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Трапециянинг қолган сатҳини радиуси $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган сферик сиртлар билан кесиб чиқамиз. Кесимда Q_1Q_2 ёй ҳосил бўлади, Q_1 нуқта учун θ цилиндрик сирт тенгламасидан $\theta = \arccos \frac{a}{r}$, Q_2 нуқта учун $\theta = \theta_{\text{тек}}$ (текисликда ётганига асосланиб) каби аниқланади. Демак, (V) соҳанинг охирги олтинчи бўлагини тавсифлаш мумкин:

$$(V_6)=\left\{(r\ \ \varphi,\ \theta)):\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2};\ a\leqslant r\leqslant a\sqrt{2-2\cos\varphi+\cos^2\varphi};\right.$$
$$\left.\arccos\frac{a}{r}\leqslant\theta\leqslant\theta_{\text{тек}}\right\}.$$

Энди

$$\theta_1=\theta_{\text{тек}}=\arcsin\frac{a}{r\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}},$$
$$F(r,\ \varphi,\ \theta)=f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

белгилашларни назарда тутиб, берилган уч каррали интеграл учун охирги олтинчи кўриниш ифодасини ёзамиз (у олтита такрорий интеграл йиғиндисидан иборат):

$$I_6=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}r^2dr\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta+$$
$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}^{a}r^2dr\int\limits_{0}^{\theta_1}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta+$$
$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}^{a}r^2\,dr\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}-\theta_1}^{\pi/2}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta+$$
$$+\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{a}^{a\sqrt{2-2\cos\varphi+\cos^2\varphi}}r^2\,dr\int\limits_{0}^{\theta_1}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta+$$
$$+\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{a}r^2\,dr\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta+$$
$$+\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_{a}^{a\sqrt{2-2\cos\varphi+\cos^2\varphi}}r^2dr\int\limits_{\arccos\frac{a}{r}}^{\theta_1}\cos\theta\cdot F(r,\ \varphi,\ \theta)\,d\theta.$$

Юқорида кўрилган уч каррали интеграл учун сферик координаталар системасида чегараларни қўйиш қийинроқ бўлди. Шу интегралнинг такрорий интеграл кўринишларидан энг соддаси I_5 бўлиб, у ҳам икки интеграл йиғиндисидан иборат. Қуйида берилган машқлардан 9.28-мисол энг содда такрорий интеграл кўринишида ёзилади, унда такрорий интегралнинг барча чегаралари ўзгармас бўлади. Аммо ўша уч каррали интеграл (x, y, z) декарт координаталари системасида бешта такрорий интеграл йиғиндиси кўринишида ёзилишини таъкидлаб ўтамиз.

Машқлар.

I. $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ кўринишдаги уч каррали интеграл 6 хил усул билан такрорий интегралга келтирилсин:

9.1. (V) соҳа $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ сиртлар билан чегараланган.

9.2. (V) соҳа $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган (1 октантдаги қисми).

9.3. (V) соҳа $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = x$, $z = 0$, $y = 0$ $(z \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ сиртлар билан чегараланган.

9.4. (V) соҳа $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октантда) сиртлар билан чегараланган.

9.5. (V) соҳа $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ $(b > a > 0)$ сиртлар билан чегараланган.

II. Интеграллаш тартиби (турли усуллар билан) ўзгартирилсин:

9.6. $\int\limits_0^{\frac{1}{a}} dx \int\limits_0^{1-ax} dy \int\limits_0^{ax+y} f(x, y, z)\,dz.$

9.7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x^2+3y^2} f(x, y, z)\,dz.$

9.8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f(x, y, z)\,dz.$

III. Қуйидаги уч каррали интеграллар кўрсатилган соҳада ҳисоблансин:

9.9. $\iiint\limits_{(V)} xy\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz,$

$(V) = \{(x, y, z) : z = 0,\ z = y,\ y = x^2,\ y = 1\}.$

9.10. $\iiint\limits_{(V)} [(x + y)^2 - z]\,dx\,dy\,dz,$

$(V) = \{(x, y, z) : z = 0,\ (z - 1)^2 = x^2 + y^2\}.$

9.11. $\iiint\limits_{(V)} y^2\,dx\,dy\,dz,$

$(V) = \left\{(x, y, z) : x^2 = 2pz,\ y^2 = 2px,\ x = \frac{p}{2},\ \ z = 0\ (p > 0)\right\}.$

9.12. $\iiint\limits_{(V)} xz\,dx\,dy\,dz,$

$(V) = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z = 0\ (z \geqslant 0)\}.$

9.13. $\iiint\limits_{(V)} (x + y + z)\,dx\,dy\,dz,$

$(V) = \{(x, y, z) :\ x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}.$

9.14. $\iiint\limits_{(V)} (8y+12z)\,dV;$

$(V)=\{(x,y,z):\ x=1,\ z=3x^2+2y^2,\ y=x,\ y=0,\ z=0\}.$

9.15. $\iiint\limits_{(V)} (1+2x^3)\,dV,$

$(V)=\{(x,y,z): y=36x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0\}.$

9.16. $\iiint\limits_{(V)} (3x+4y)\,dV,$

$(V)=\{(x,y,z): y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=5(x^2+y^2),\ z=0\}.$

9.17. $\iiint\limits_{(V)} x^2\,dV,$

$(V)=\{(x,y,z):\ z=10(x+3y), x+y=1, x=0, y=0, z=0\}.$

9.18. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dV}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6},$

$(V)=\left\{(x,y,z): x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1\right\}.$

9.19. $\iiint\limits_{(V)} \left(5x+\frac{3}{2}z\right)dV,$

$(V)=\{(x,y,z): y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=x^2+15y^2,\ x=1\}.$

9.20. $\iiint\limits_{(V)} (x^2+4y^2)\,dV,$

$(V)=\{(x,y,z): x=0, y=0,\ z=0,\ x+y=1, z=20(y+3x)\}.$

9.21. $\iiint\limits_{(V)} x^2z\,dV,$

$(V)=\{(x,y,z):\ y=3x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0\}.$

IV. Қуйида берилган (V) соҳалар учун $I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ уч каррали интеграл чегаралари (x,y,z)— — декарт, (φ, r, z) — цилиндрик ва (φ, θ, r) — сферик координаталар системасида қўйилсин. Ҳар бир системада ўзгарувчилар тартибига қараб биттадан интеграл ёзилсин. Эслатиб ўтамизки,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r \text{ ва } \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=r^2\cos\theta.$$

9.22. $x+y\leqslant a,\ z\leqslant h,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\ (a>0,\ h>0).$

9.23. $x+y+z\leqslant a,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\ (a>0).$

9.24. $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ b^2(x^2+y^2)\leqslant z^2,\ z\geqslant 0\ (a>0,\ b>0).$

9.25. $x^2+y^2\leqslant z^2,\ x^2+y^2+z^2\leqslant az\ (a>0).$

9.26. $x^2+y^2\geqslant z^2,\ x^2+y^2+z^2\leqslant az\ (a>0).$

9.27. $x^2+y^2\leqslant z^2,\ x^2+z^2\leqslant a^2,\ z\geqslant 0\ (a>0)$.

9.28. $x^2+y^2+z^2\leqslant b^2,\ x^2+y^2+z^2\geqslant a^2,$
$3(x^2+y^2)\leqslant z^2,\ z\geqslant 0\ (0<a<b)$.

10- §. Уч каррали интеграллар ёрдамида ҳажмларни ҳисоблаш

Биз юқорида декарт, цилиндрик ва сферик координаталар ёрдамида уч каррали интегрални такрорий интегралларга келтириш билан шуғулландик. Қуйида биз ўша мулоҳазалар ёрдамида ҳажмларни ҳисоблашга доир мисоллар кўрамиз.

7- мисол. Ушбу $x^2+y^2+z^2=2az,\ x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ сиртлар билан чегараланган (V) соҳанинг ҳажми топилсин.

Ечиш. Изланган ҳажмни топиш учун аввал сферик координаталарни

$$x=r\cos\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\cos\theta,\ z=r\sin\theta$$

формулалар орқали киритамиз, бунда тегишли якобиан учун

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=r^2\cos\theta \tag{2.13}$$

формулага эгамиз. Бунда (V) соҳа (Δ) соҳага аксланади. Изланган ҳажмни ҳисоблаш учун ушбу

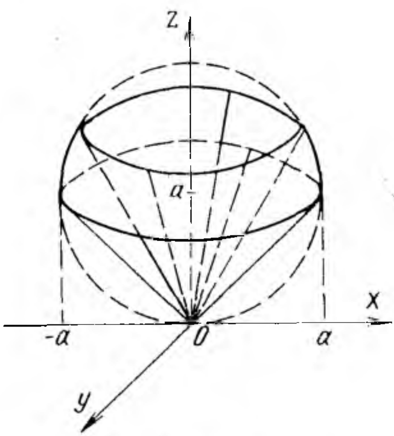
$$V=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(\Delta)}r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

формуладан фойдаланамиз. (Δ) соҳани тавсифлаш билан шуғулланайлик.

Берилган сиртларнинг тенгламасини сферик координаталарда ёзамиз:

сфера учун $r=2a\sin\theta$, конус сиртлар учун $\operatorname{tg}^2\theta=1,\quad \theta=\frac{\pi}{4}$ ва $\operatorname{tg}^2\theta=3,\ \theta=\frac{\pi}{3}$ (53- чизма). Энди (Δ) соҳани тавсифлаймиз:

$$(\Delta)=\{(r,\varphi,\theta):0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$$
$$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ 0\leqslant r\leqslant 2a\sin\theta\}.$$



53- чизма

Шундай қилиб, изланган ҳажмни осонгина ҳисоблаймиз:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos\theta\,d\theta\int_0^{2a\sin\theta}r^2\,dr=$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin^3\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\frac{5}{12}\pi a^3.\ \text{(куб бирл.)}$$

8- мисол. Ушбу $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}$ сирт билан чегараланган (V) соҳанинг ҳажми топилсин.

Ечиш. Умумлаштирилган сферик координаталардан фойдаланамиз. Улар $x=ar\cdot\cos^\alpha\varphi\cdot\cos^\beta\theta$, $y=br\cdot\sin^\alpha\varphi\cdot\cos^\beta\theta$, $z=cr\cdot\sin^\beta\theta$ формулалар ёрдамида киритилади. Тегишли якобиан енгилгина ҳисобланади:

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=\alpha\beta\,abc\,r^2\cdot\cos^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\cos^{2\beta-1}\theta\cdot\sin^{\beta-1}\theta \quad (2.14)$$

Умумлашган сферик координаталардан фойдаланиш натижасида берилган сиртнинг тенгламасини соддалаштириш мумкин. Бунинг учун доим α, β сонлар шундай танланиши керакки, берилган сиртнинг тенгламаси содда кўринишга эга бўлсин. Кўпинча тенгламада тригонометрик функциялар кўпайтмаси қатнашганда интеграллаш жараёнида Эйлер интегралларидан фойдаланиш мумкин бўлади. Шунга эришишга ҳаракат қиламиз.

Бу мисолда $\alpha=1$, $\beta=1/3$ деб олсак, якобиан учун $I=\frac{1}{3}abc\,r^2\cdot\cos^{-1/3}\theta\cdot\sin^{-2/3}\theta$ ифодага ва сирт тенгламаси учун

$$r^3=\frac{abc}{h^3}\sin\varphi\cos\varphi\cos^{2/3}\theta\cdot\sin^{1/3}\theta$$

муносабатга эга бўламиз. (V) соҳа билан аниқланган жисм $xyz\geqslant 0$ (ёки $r\geqslant 0$) шартни қаноатлантирувчи соҳада, яъни I, III, VI, УIII октантларда жойлашган. Биз берилган жисмнинг I октантда ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$) жойлашган бўлаги ҳажмини ҳисоблаб, натижани 4 га кўпайтирамиз, бу билан изланган ҳажмни топган бўламиз:

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\frac{abc}{h^3}}\sin^{1/3}\varphi\cdot\cos^{1/3}\varphi\cdot\cos^{2/9}\theta\cdot\sin^{1/9}\theta}\frac{1}{3}abc\,r^2\cos^{-1/3}\theta\cdot\sin^{-2/3}\theta\cdot dr=$$

$$=\frac{4a^2b^2c^2}{9h^3}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^{1/3}\theta\cdot\sin^{-1/3}\theta\cdot d\theta=$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{9h^3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi a^2b^2c^2}{9\sqrt{3}\,h^3}\qquad\text{(куб бирл.)}$$

9- мисол. Ушбу

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}$$

$(x>0,\ y>0,\ z>0)$ сирт билан чегараланган (V) соҳанинг ҳажми топилсин.

Ечиш. Сирт тенгламасидан кўриниб турибдики, умумлаштирилган сферик координаталардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Агар $\alpha=2$, $\beta=2$ деб олсак, у ҳолда умумлашган сферик координаталарни қуйидаги $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\theta$, $y=br\sin^2\varphi\cos^2\theta$, $z=cr\sin^2\theta$ формулалар ёрдамида киритиш лозим бўлади. Бунда

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=4abc\,r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos^3\theta\cdot\sin\theta.$$

Шундай қилиб, сирт тенгламаси учун $r=\sqrt[3]{\sin(\pi\cos^2\theta)}$ муносабатга эгамиз. (V) соҳанинг акси (Δ) соҳани қуйидагича

$$(\Delta)=\left\{(r,\varphi,\theta):0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\sin(\pi\cos^2\theta)}\right\}$$

тавсифлаш мумкин.

Энди изланган ҳажмни узил-кесил ҳисоблаймиз (унда $\pi\cos^2\theta=t$ алмаштириш бажарилган):

$$V=4abc\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\sin(\pi\cos^2\theta)}}r^2\,dr=$$

$$=\frac{2abc}{3}\int_0^{\pi/2}\sin(\pi\cos^2\theta)\cdot\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{abc}{3\pi^2}\int_0^{\pi}t\cdot\sin t\,dt=\frac{abc}{3\pi}\quad\text{(куб бирл.).}$$

10- мисол. Қуйидаги $x+y+z=a$, $x+y+z=2a$, $x+y=z$, $x+y=2z$, $y=x$, $y=3x$ текисликлар билан чегараланган (V) соҳанинг ҳажми топилсин.

Ечиш. Бунинг учун янги u, v, w ўзгарувчилар киритишнинг умумий усулидан фойдаланамиз. u, v, w ўзгарувчиларни қуйидагича киритамиз: $x+y+z=w,\ x+y=v\cdot z,\ y=u\cdot x.$

Бу ҳолда равшанки,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{v\cdot w^2}{(1+u)^2(1+v)^3}.$$

Энди (V) соҳанинг акси (Δ) соҳани тавсифлаймиз:

$$(\Delta)=\{(u,v,w):1\leqslant u\leqslant 3;\ 1\leqslant v\leqslant 2;\ a\leqslant w\leqslant 2a\}.$$

Натижада изланган ҳажмни ҳисоблаш чегаралари ўзгармас бўлган такрорий интегрални ҳисоблашга келтирилади. Ҳисоблашларни осонгина бажарамиз:

$$V = \int_1^3 \frac{du}{(1+u)^2} \cdot \int_1^2 \frac{v\,dv}{(1+v)^3} \cdot \int_a^{2a} w^2 dw = \frac{49\,a^3}{864} \text{ (куб бирл.)}.$$

Машқлар.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

10.1. $(x-1)^2 + y^2 = z, \quad 2x + z = 2.$

10.2. $z = \ln(x+2), \quad z = \ln(6-x), \quad x = 0, \ x + y = 2, \quad x - y = 2.$

10.3. $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3 xyz.$

10.4. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 (x - y).$

10.5. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^6 (x^2 + y^2)^{-1}.$

10.6. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$

10.7. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{h}.$

10.8. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x > 0, \ y > 0, \ z > 0.$

10.9. $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2, \quad 4(x^2 + y^2) = z^2$ коиус ичидаги қисми).

10.10. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad (x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0).$

10.11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2, \quad 2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$

10.12. $x^2 + y^2 = 3z, \ x + z = 6.$

10.13. $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, \ z = 16 - x^2 - y^2.$

10.14. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \ x^2 + y^2 = 60$ (цилиндр ташқарисида).

10.15. $z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2.$

10.16. $z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}, \ 2z = x^2 + y^2$

10.17. $z = 4 - 14(x^2 + y^2), \ z = 4 - 28x.$

10.18. $z = 10(x^2 + y^2) + 1,\ z = 1 - 20y.$

10.19. $z = 24(x^2 + y^2) + 1,\ z = 48x + 1.$

10.20. $z = 2 - 20(x^2 + y^2),\ z = 2 - 40y.$

10.21. $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \sqrt{\frac{z}{5}} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

10.22. $2z = 2x^2 + \frac{y^2}{3},\quad 4x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,\ z = 0.$

10.23. $y^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = x^2,\ x = b\ (0 < a < b).$

10.24. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot \frac{z}{c}.$

10.25. $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{4} = 1,\quad x = 0,\ y = 0,\ z = 1\ (z > 1).$

10.26. $\left(\frac{x}{5} + 6y + \frac{z}{2}\right)^2 = 3z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

(1 октантдаги шакл).

11-§. Уч каррали интеграллар ёрдамида механикага оид масалаларни ечиш

Бу параграфда уч каррали интеграллар ёрдамида берилган бир жинсли жисмнинг массаси, оғирлик маркази ва инерция моментларини топишга оид мисоллар кўрилади (7-§ да икки каррали интеграллар ёрдамида бир жинсли пластинка учун ўхшаш масалалар кўрилган эди).

11-мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ сиртлар билан чегараланган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази топилсин.

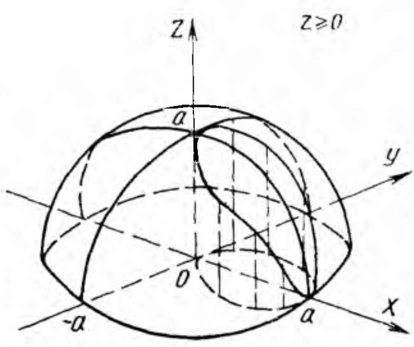
Ечиш. Берилган бир жинсли жисм (x, y) ва (x, z) текисликларга нисбатан симметрик жойлашган сфера ва цилиндрик сирт орасида жойлашгани учун $z_0 = 0$, $y_0 = 0$ ва $x_0 \neq 0$ бўлади (54-чизмада жисмнинг $z \geqslant 0$ қисми кўрсатилган).

Энди оғирлик марказини топиш учун $x_0 = \frac{M_x}{M}$ координатани топиш етарли. Маълумки,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_x = \iiint\limits_{(V)} \rho\, x\, dx\, dy\, dz. \qquad (2.15)$$

Бир жинсли жисм учун $\rho = 1$. Мисолни ечишда цилиндрик координаталардан фойдаланамиз:



54-чизма

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z;\ \frac{D(x, y. z)}{D(r, \varphi, s)} = r.$$

Бу системада сферанинг тенгламаси $z^2 = a^2 - r^2$, цилиндрнинг тенгламаси $r = a\cos\varphi$ бўлади ва интеграллаш соҳаси (Δ) қуйидагича тавсифланади (54- чизма):

$$(\Delta) = \{(r,\ \varphi,\ z): -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant r \leqslant a\cos\varphi;$$

$$-\sqrt{a^2 - r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2}\}.$$

Энди M ва M_x миқдорларни ҳисоблаш мумкин:

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\,dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3\Big|_{a\cos\varphi}^{0} \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3\ \varphi|)\ d\varphi = \frac{2\ a^3}{9}(3\pi - 4);$$

$$M_x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r^2\ dr =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\cdot\cos\ \varphi\ d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\ a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi = \frac{\pi\ a^4}{4}.$$

Шундай қилиб, $x_0 = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{9\ \pi\ a}{8\,(3\pi - 4)}$.

Демак, $\left(\dfrac{9\pi\ a}{8\,(3\pi - 4)};\ 0;\ 0\right)$ нуқта оғирлик марказидан иборат.

12- мисол. Ушбу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c},\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \pm 1,\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \pm 1,$

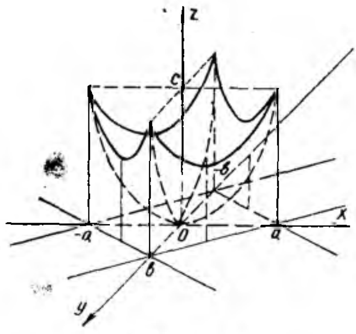
сиртлар билан чегараланган бир жинсли ($\rho = 1$) жисмнинг ((V) соҳанинг) оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. Жисмнинг (x, y) текисликка проекцияси (55- чизма) чизиқларнинг икки турли оиласига тегишли тўғри чизиқлар орасида жойлашгани учун янги ўзгарувчиларни

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=v, \ z=z$$

$\left(\text{бунда } \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\frac{ab}{4}\right)$ формулалар

орқали киритамиз. Шу ўзгарувчилар ёрдамида параболоиднинг тенгламаси $z=\frac{c}{2}(u^2+v^2)$ кўринишда



55- чизма

ёзилади. (V) соҳанинг акси (Δ) соҳа қуйидагича тавсифланади:

$$(\Delta)=\{u, v, z): -1\leqslant u\leqslant 1; \ -1\leqslant v\leqslant 1; \ 0\leqslant z\leqslant \frac{c}{2}(u^2+v^2)\}.$$

Равшанки, тегишли шакл (x, z) ва (y, z) текисликларга нисбатан симметрик жойлашган. Демак, $x_0=0$, $y_0=0$ бўлиб, z_0, M ва M_z миқдорларни ҳисоблаш учун ушбу

$$z_0=\frac{M_z}{M}, M=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz, \ M_z=\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$$

формулалардан фойдаланамиз. Содда ҳисоблашлар бажарамиз:

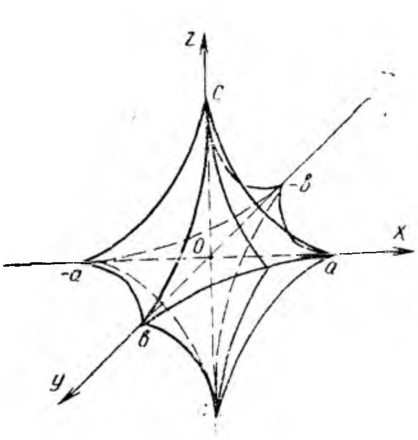
$$M=\frac{ab}{4}\int\limits_{-1}^{1} du\int\limits_{-1}^{1} dv\int\limits_{0}^{\frac{c}{2}(u^2+v^2)} dz=\frac{abc}{3};$$

$$M_z=\frac{ab}{4}\int\limits_{-1}^{1} du\int\limits_{-1}^{1} dv\int\limits_{0}^{\frac{c}{2}(u^2+v^2)} z\,dz=\frac{7abc^2}{90};$$

$$z_0=\frac{7c}{30}.$$

Шундай қилиб, $A\left(0;\ 0;\ \frac{7c}{30}\right)$ — оғирлик маркази.

13- мисол. Ушбу $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ сирт билан



56-чизма

чегараланган (56-чизма) бир жинсли жисмнинг (x, y) текисликка ва Oz ўққа нисбатан инерция моментлари топилсин $(\rho = 1)$.

Ечиш. Изланган инерция моментлари ушбу

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \rho\, z^2\, dx\, dy\, dz, \qquad (2.16)$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \rho\,(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz \qquad (2.17)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Сиртнинг берилишига қараб, $\alpha = 3$, $\beta = 3$ бўлган ҳол учун умумлаштирилган сферик координаталар киритамиз. Бу ҳолда

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = 9\, abc\, r^2 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^5\theta \cdot \sin^2\theta.$$

Сиртнинг тенгламаси $r = 1$ бўлган содда кўринишга эга, янги интеграллаш соҳасини қуйидагича тавсифлаш мумкин:

$$(\Delta) = \left\{(r, \varphi, \theta): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}.$$

Ҳисоблашларни амалга оширамиз:

$$I_{xy} = 9abc^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \cdot \sin^8\theta\, d\theta \int\limits_0^1 r^4\, dr =$$

$$= \frac{9\pi\, abc^3}{20} \cdot \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)} = \frac{4\pi\, abc^3}{715};$$

$$I_z = 72\, abc \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{11}\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^6\varphi +$$

$$+ b^2 \sin^6\varphi)\cos^2\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 r^4\, dr$$

(бунда интеграллашни I октантда бажариб натижани 8 га кўпайтирдик). Энди I_z ни Эйлернинг $\Gamma(x)$ функциясига келтириб осонгина ҳисоблаш мумкин:

$$I_z = \frac{4\pi\ abc}{715}(a^2 + b^2).$$

14- мисол. I октантда $z = 2(x^2 + y^2)$, $z = x^2 + y^2$, $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x$, $y = 2x$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлиги $\rho = xyz$. Шу жисмнинг массаси топилсин.

Ечиш. Жисм иккита параболоид, иккита гиперболик цилиндр ва иккита текислик билан чегараланган (57- чизма). Ҳар бир сирт оиласининг параметрини янги u, v, w координаталар деб оламиз:

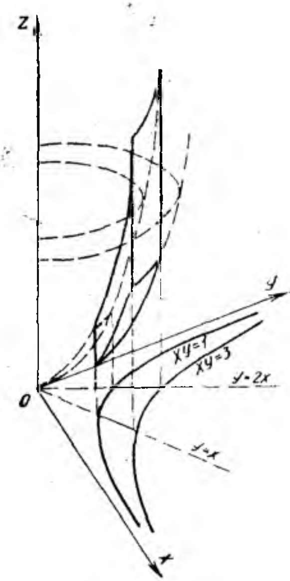
$$y = u \cdot x, \ xy = v, \ z = w(x^2 + y^2).$$

Тегишли якобиан осонгина ҳисобланади;

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right).$$

Янги (u, v, w) системада интеграллаш соҳасини тавсифлаймиз:

$$(\Delta) = \{(u, v, w): \ 1 \leqslant u \leqslant 2; \ 1 \leqslant v \leqslant 3; \ 1 \leqslant w \leqslant 2\}.$$



57- чизма

Бу соҳа параллелипипеддан иборат. Энди жисмнинг массасини

$$M = \iiint\limits_{(V)} \rho \, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V)} xyz \, dx\, dy\, dz$$

формула ёрдамида ҳисоблаймиз. Бу формула алмаштириш натижасида

$$M = \iiint\limits_{(V)} w \cdot v^2 \left(u + \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du\, dv\, dw$$

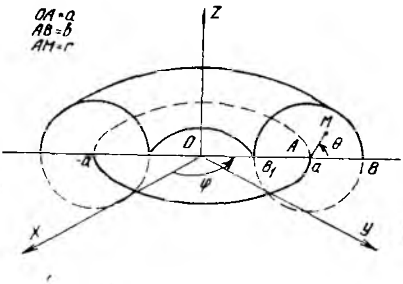
кўринишга келади. Энди (Δ) параллелепипед учун M миқдорни ҳисоблаш қийин эмас:

$$M = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\right) d\,u \int\limits_1^3 v^3\, dv \int\limits_1^2 w\, dw =$$

$$= \frac{15}{8}(16 \ln 2 + 15) \text{ (масса бирлиги).}$$

15- мисол. Параметрик тенгламаси $x = (a + b \cos\theta) \cos\varphi$, $y = (a + b \cos\theta) \sin\varphi$, $z = b \sin\theta$, $a > b$ муносабатлардан иборат бўлган сирт билан чегараланган бир жинсли жисмнинг $(\rho = 1)$ Ox ўқига нисбатан инерция моменти топилсин.

Ечиш. Берилган сирт тордан иборат, унинг ярми 58- чизмада кўрсатилган. Торнинг ичидаги ихтиёрий M нуқта учта координата билан аниқланади:



58- чизма

$$\varphi = \angle xOA, \ r = AM,$$
$$\theta = \angle BAM.$$

Шаклдан кўринадики, бутун тор ичидаги жисм учун (Δ) соҳа бундай тавсифланади:

$$(\Delta) = \{(r, \ \varphi, \ \theta) : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \ 0 \leqslant r \leqslant b; \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Энди тор ичидаги ҳар бир нуқта учун

$$x = (a + r \cos \theta) \cos \varphi,$$
$$y = (a + r \cos \theta) \sin \varphi,$$
$$z = r \sin \theta, \quad \left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi . \theta)} \right| = r(a + r \cos \theta)$$

муносабатларга эгамиз.

Ox ўқига нисбатан инерция моментини ушбу

$$I_x = \iiint\limits_{(\Delta)} (y^2 + z^2) \ dx \ dy \ dz =$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} r(a + r \cos \theta)[(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta] \ dr \ d\varphi \ d\theta$$

формула ёрдамида ҳисоблаймиз. Ҳисоблашларни амалга оширамиз:

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b [r(a + r\cos\theta)^3 \ \sin^2 \varphi + r^3(a + r \ \cos\theta)\sin^2\theta] \ dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{a^3 b^2}{2} + a^2 b^3 \cos\theta + \frac{3}{4} ab^4 \cos^2\theta + \frac{b^5}{5}\cos^3\theta \right) \cdot \sin^2 \varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a b^4}{4} + \frac{b^5}{5}\cos\theta \right) \cdot \sin^2\theta \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[\pi a^3 b^2 + \frac{3}{4}\pi a b^4 \right) \sin^2 \varphi + \frac{\pi a b^4}{4} \right] d\varphi = \frac{\pi^2 a b^2}{4} \left(4 a^2 + 5 b^2 \right) \cdot$$

Машқлар.

1. Қуйидаги сиртлар билан чегараланган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази топилсин (агар алоҳида айтилмаган бўлса, $\rho = 1$ деб олинади):

11.1. $z^2 = xy, \ x = a, \ y = b, \ z = 0 \ (a > 0, \ b > 0).$

11.2. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, \quad x > 0, \ y > 0, \ z > 0.$

11.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0,$

11.4. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=a(a-2z),\ \ 0\leqslant z\leqslant a.$

11.5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\ z>0.$

11.6. $x^2+y^2=z,\ x+y+z=0.$

11.7. $z=\frac{1}{2}y^2,\ 2x+3y-12=0,\ \ x=0,\ y=0,\ z=0.$

11.8. $z=2(x^2+y^2),\ z=x^2+y^2,\ xy=a^2,\ \ xy=b^2, y=\alpha x,$
$y=\beta x\ \ (0<a<b;\ 0<\alpha<\beta).$

11.9. $x^2+z^2=a^2,\ y=1,\ y=3,\ z=0\ \ (z\geqslant 0).$

11.10. $z=4-x^2-y^2,\ z=1,\ x=0,\ y=0\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$

11.11. $2z=x^2+4x+y^2-2y+5,\ z=2$
а) $\rho=1$, б) $\rho=(x+2)^2+(y-1)^2$, в) $\rho=z(x^2+y^2)$.

11.12. $x^2+y^2=2p(z-h), x^2+y^2=2ph,\ z=0,$
$p>0,\ h>0;\ \rho=\mathrm{const}.$

11.13. $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz,\ \rho=x^2+y^2+z^2.$

II. Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик $\rho=\rho(x,y,z)$ бўлганда жисмнинг массаси топилсин.

11.14. $x^2+y^2+z^2=R^2,\ \ x^2+y^2+z^2=2Rz,\ \ \rho=z\ \ (0\leqslant z\leqslant R).$

11.15. $x^2+y^2=2az,\ x^2+y^2+z^2=3a^2$ ($z>0$ ва $x^2+y^2\leqslant 2az$),
$\rho=x^2+y^2+z^2.$

11.16. $y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0,\ \rho=1+2y^3.$

11.17. $z=x^2+3y^2,\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ \rho=15x+30z.$

11.18. $z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \rho=3x^2+y^2.$

11.19. $z=xy,\ z=0,\ y=10x,\ y=0,\ x=1,\ \rho=x.$

11.20. $z=30(x^2+2y^2),\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ \rho=x+y.$

11.21. $z=ax+3y,\ x+y=2,\ z=0,\ y=0,\ x=0,\ \rho=x^2.$

III. (x, y, z) фазодаги (V) жисм учун (x, y), (y, z), (z, x) текисликларга нисбатан ва O (0, 0, 0) координаталар бошига нисбатан инерция моментлари

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2 \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad (2.16)$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2 \cdot \rho(x, y, z)\, dx, dy\, dz, \qquad (2.17)$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y^2 \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad (2.18)$$

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad (2.19)$$

формулалар орқали топилади. Ox, Oy, Oz координата ўқларига нисбатан (V) жисмнинг инерция моментлари учун

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad (2.20)$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2) \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad (2.21)$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad (2.22)$$

формулалар ўринли.

IV. Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмлар учун сўралган инерция моментлари топилсин:

11.22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$, $\rho = 1$. $I_z = ?$

11.23. $x + y + z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$, $\rho = 1$. $I_z = ?$

11.24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot \frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $\rho = 1$. $I_z = ?$

11.25. $x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi$, $y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi$,
$z = b\sin\theta$, $0 < b < a$, $\rho = 1$. $I_z = ?$

11.26. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1$,
$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$, $\rho = 1$. $I_{xy} = ?$ $I_{yz} = ?$ $I_{zx} = ?$

11.27. $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3$, $\rho = 1$. $I_{xy} = ?$ $I_{yz} = ?$ $I_{zx} = ?$

11.28. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$,
$\rho = 1$. $I_{xy} = ?$ $I_{yz} = ?$ $I_{zx} = ?$

11.29. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1$,

$\rho = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. $I_{xy} = ?$ $I_{yz} = ?$ $I_{zx} = ?$

11.30. $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2,\ \rho = \frac{35}{128} z^2.$

$$I_{xy} = ?\ I_{yz} = ?\ I_{zx} = ?$$

11.31. $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3,\ \rho = \rho_0$ (const). $I_x = ?\ I_y = ?\ I_z = ?$

11.32. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \rho = 1.$

$$I_x = ?\ I_y = ?\ I_z = ?$$

11.33. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2, \quad \rho = x^2 + y^2 + z^2.$

I_0 (қутб инерция моменти) $= ?$

11.34. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 1;\ \rho = 1.\ I_z = ?$

11.35. $x^2 + y^2 = 2p\ (z - h),\ x^2 + y^2 = 2ph,\ z = 0$

$(p > 0,\ h > 0);\ \rho = 1,\ I_z = ?$

III боб

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Эгри чизиқли интеграллар ҳақида назарий материални тегишли адабиётдан пухта ўрганиб олиш керак. Масалан, Г. М. Фихтенгольцнинг 3 жилдлиқ «Математик анализ курси». III жилдидан XV бобнинг 1—3- § ларни билиш лозим. Шунингдек, ўша китобдан XVI бобниig 3- § ини ўқиш керак.

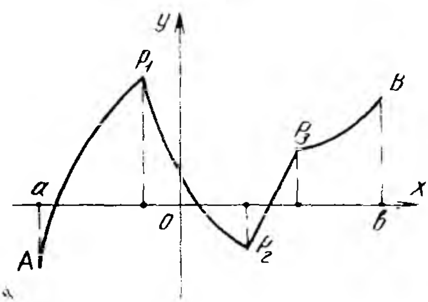
12- §. I тур эгри чизиқли интеграллар

Текисликда бирор тўғри бурчакли (x, y) координата системаси танлаб олинган бўлсин. Текисликда узлуксиз бўлакли — силлиқ $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда узлуксиз $f(M) = f(x, y)$ «нуқта функцияси» берилган бўлиб, dl эгри чизиқ ёйининг дифференциали бўлсин. У ҳолда $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ (ёки йўл) бўйича олинган биринчи тур (I тур) эгри чизиқли интеграли

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, dl \tag{3.1}$$

кўринишда ёзилади.

Ушбу таърифларни эслатиб ўтамиз: $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ тенгламалар билан параметрик шаклда берилсин. Агар $x(t)$, $y(t)$ функциялар узлуксиз бўлиб, биринчи тартибли узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга (улар бир вақтда нолга тенг эмас) бўлса, у ҳолда $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ силлиқ эгри чизиқ деб аталади. Чекли сонда силлиқ бўлаклардан тузилган узлуксиз эгри чизиқ бўлакли — силлиқ эгри чизиқ дейилади (59- чизма).



59- чизма

Ёй дифференциали dl ҳақида ҳам керакли маълумотларни келтирамиз:

а) (x, y) текисликда ёй дифференциалининг ифодаси

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{3.2}$$

кўринишда олинади ва унда $dl > 0$ деб қабул қилинади.

б) Параметрик $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ тенгламалар билан берилган γ эгри чизиқ учун

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot |dt|. \tag{3.3}$$

Агар dl ёй дифференциали t нинг ўсиш томонига қараб ҳисобланган бўлса, $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$ кўринишда ва t нинг камайиш томонига қараб ҳисобланса, $dl = -\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt$ кўринишда олинади.

Кейинги формулаларда қайси ўзгарувчи параметр (эркли) деб олинган бўлса, биз унинг ўсиш томоиига қараб dl ёй дифференциалини ҳисоблаймиз.

в) $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ нинг тенгламаси $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ кўринишда бўлса у ҳолда

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx; \tag{3.4}$$

г) $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $x = x(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$dl = \sqrt{1 + (x'_y)^2} \cdot dy; \tag{3.5}$$

д) Текисликда (r, φ) $(x = r \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi)$ қутб координаталар системаси олинган бўлса, у ҳолда dl ёй дифференциали учун формула

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \tag{3.6}$$

кўринишда ёзилади. Бунга кўра қуйидагига эгамиз:

е) Агар $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$dl = \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2} \cdot d\varphi; \tag{3.7}$$

ж) Агар $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $\varphi = \varphi(r)$ $(r_1 \leqslant r \leqslant r_2)$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$dl = \sqrt{1 + r^2 \cdot (\varphi'_r)^2} \cdot dr. \tag{3.8}$$

I тур эгри чизиқли интегрални одатдаги (Риман маъносидаги) аниқ интегралга келтириш мумкин. Юқорида кўрсатилган формулалардан фойдаланиб, интеграл остидаги ифодани битта параметрга (эркли ўзгарувчига) боғлиқ қилиб қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\, dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt; \tag{3.9}$$

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx; \tag{3.10}$$

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y))\cdot\sqrt{1+(x'_y)^2}\cdot dy; \quad (3.11)$$

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot\sqrt{(r'_\varphi)^2+r^2}\cdot d\varphi; \quad (3.12)$$

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)\,dl = \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot\sqrt{1+r^2(\varphi'_r)^2}\cdot dr. \quad (3.13)$$

Бу формулаларда ўнг томондаги аниқ интегралнинг қуйи чегараси юқори чегарасидан кичик бўлиши назарда тутилишини айтиб ўтамиз.

Энди I тур эгри чизиқли интегралнинг хоссаларини келтирамиз:

1. $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича ҳисобланган $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dl$ эгри чизиқли интеграл миқдор жиҳатидан $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг узунлигига тенг, яъни

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dl = L_{\overset{\frown}{AB}}. \quad (3.14)$$

2. I тур эгри чизиқли интеграл эгри чизиқда қабул қилинган йўналишга боғлиқ эмас, яъни

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)\,dl. \quad (3.15)$$

3. $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,dl \pm \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(x, y)\,dl. \quad (3.16)$$

4. Агар $\overset{\frown}{AB}$ ёй иккита $\overset{\frown}{AC}$ ва $\overset{\frown}{CB}$ ёйлардан тузилган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x, y)\,dl + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(x, y)\,dl. \quad (3.17)$$

Таъкидлаб ўтамизки, $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ моддий эгри чизиқ бўйлаб узлуксиз текис жойлашган массаларга оид масалалар I тур эгри чизиқли интегралларга оид келадн. Масалан, γ эгри чизиқнинг барча $M(x, y)$ нуқталаридаги массанинг чизиқли зичлиги $\rho(M) = \rho(x, y)$ маълум бўлса, ушбу

$$\int\limits_{\gamma} \rho(M)\,dl = \int\limits_{\gamma} \rho(x, y)\,dl$$

I тур эгри чизиқли интеграл қиймати γ эгри чизиқнинг m — умумий массаси қийматига тенг:

$$m = \int\limits_{\gamma} \rho(x, y)\,dl. \quad (3.18)$$

Моддий $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ ясси эгри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари

$$K_y = \int\limits_{\gamma} x \cdot \rho(x, y)\, dl, \quad K_x = \int\limits_{\gamma} y \cdot \rho(x, y)\, dl \tag{3.19}$$

формулалар орқали, унинг $M_c(x_c, y_c)$ оғирлик маркази координаталари

$$x_c = \frac{\int\limits_{\gamma} x \cdot \rho(x, y)\, dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{\gamma} y \cdot \rho(x, y)\, dl}{m} \tag{3.20}$$

формулалар бўйича ҳисобланади.

Фазовий эгри чизиқлар учун тегишли формулаларни мисоллар ечиш давомида кўрсатиб ўтамиз.

13- §. I тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблашга доир мисоллар

1- мисол. $\int\limits_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин. Бу ерда γ — текисликдаги $A(1;\ 2)$ ва $B(3;\ 6)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

Ечиш: Аввало A ва B нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини топамиз. Бу тенглама $y = 2x$ кўринишга эга эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Энди x ўзгарувчини параметр (эркли) деб, ёй дифференциалини $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx$ формула орқали ҳисоблаймиз: AB кесма учун $y = 2x$, $dl = \sqrt{5} \cdot dx$ $(1 \leqslant x \leqslant 3)$, шу сабабли қуйидагига эгамиз (бунда (3.10) формуладан фойдаландик):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt{5}\, dx}{\sqrt{5x^2 + 4}} =$$

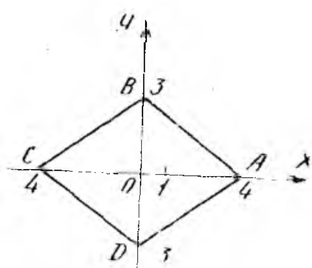
$$= \ln \left| \sqrt{5} \cdot x + \sqrt{5x^2 + 4} \right| \Big|_1^3 = \ln \frac{3\sqrt{5} + 7}{\sqrt{5} + 3}.$$

2- мисол. $\int\limits_{\gamma} xy\, dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ — текисликда $3|x| + 4|y| = 12$ тенглама билан берилган контур.

Ечиш. $3|x| + 4|y| = 12$ тенглама билан берилган тўртбурчак $ABCD$ ромбдир (60- чизма), унинг томонлари тенгламаларини ёзамиз:

$3x + 4y = 12 \quad (AB);$

$-3x + 4y = 12 \quad (BC);$



60- чизма

$$3x+4y=-12\ (CD); \qquad 3x-4y=12 \quad (DA).$$

(3.17) формулага асосан ёзамиз:

$$\int\limits_{\gamma} xy\,dl=\int\limits_{AB} xy\,dl+\int\limits_{BC} xy\,dl+\int\limits_{CD} xy\,dl+\int\limits_{DA} xy\,dl.$$

12- § даги (3.9.) — (3.13) формулаларда параметрни (эркли ўзгарувчини) ўсиш томонига қараб олганмиз, $dl>0$. Шунинг учун $dl=\sqrt{1+(y_x')^2}\cdot dx$ деб олсак,

AB да $y=3-\frac{3}{4}x, \quad dl=\frac{5}{4}dx, \quad 0\leqslant x\leqslant 4;$

BC да $y=3+\frac{3}{4}x, \quad dl=\frac{5}{4}dx, \quad -4\leqslant x\leqslant 0;$

CD да $y=-3-\frac{3}{4}x, \ dl=\frac{5}{4}dx, \ -4\leqslant x\leqslant 0;$

DA да $y=-3+\frac{3}{4}x, \ dl=\frac{5}{4}dx, \ 0\leqslant x\leqslant 4.$

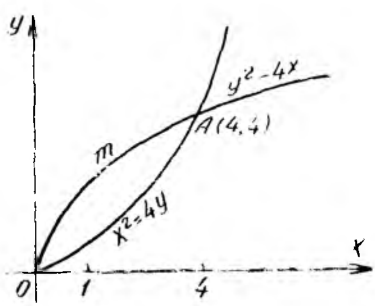
Демак,

$$\int\limits_{\gamma} xy\,dl=\int\limits_{0}^{4} x\left(3-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}dx+\int\limits_{-4}^{0} x\left(3+\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}dx+$$

$$+\int\limits_{-4}^{0} x\left(-3-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}dx+\int\limits_{0}^{4} x\left(-3+\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}dx=0.$$

(Биринчи ва тўртинчи интеграллар йиғиндиси ҳам, иккинчи ва учинчи интеграллар йиғиндиси ҳам 0 га тенг).

3- мисол. $\int\limits_{\gamma} y\,dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин бу ерда γ чизиқ $y^2=4x$ параболанинг $x^2=$ $=4y$ парабола билан ажратилган қисмидир.



61- чизма

Ечиш. Шартда кўрсатилган параболалар $O(0,0)$ ва A (4; 4) нуқталарда кесишади, яъни (x, y) тенгликда γ эгри чизиқ $\overset{\frown}{OmA}$ ёй билан тасвирланади (61- чизма). $\overset{\frown}{OmA}$ эгри чизиқ тенгламасини $x=\frac{1}{4}y^2$ деб, унинг ёй дифференциалини (3.5) формула орқали ҳисоблаймиз:

$\overset{\frown}{OmA}$ да $x' = \frac{1}{2} y$, $dl = \frac{1}{2}\sqrt{4 + y^2} \cdot dy$ $(0 \leqslant y \leqslant 4)$.

Энди (3.11) формулага асосан узил-кесил топамиз:

$$\int\limits_{\gamma} y\, dl = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 y\sqrt{4+y^2}\, dy = \frac{1}{6}\left(\sqrt{4+y^2}\right)^3 \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(8\sqrt{125} - 8\right) = \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

4- мисол. $\int\limits_{\gamma}\sqrt{2y}\cdot dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ — циклоиданинг биринчи арки, яъни

$$x = a(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t)\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Ечиш. γ эгри чизиқ параметрик тенгламалари билан берилган. Ёй дифференциалини (3,3) формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$x'_t = a(1 - \cos t),\ \ y'_t = a\cdot\sin t,$$

$$dl = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\cdot a\cdot dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}\cdot dt\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

(3.9) формулага асосан топамиз:

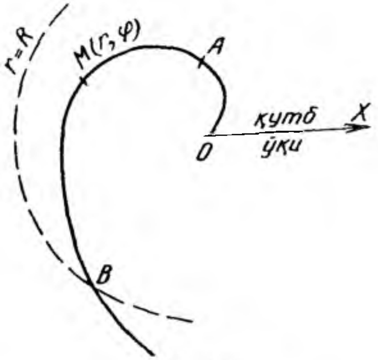
$$\int\limits_{\gamma}\sqrt{2y}\ dl = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2a(1-\cos t)}\cdot a\sqrt{2(1-\cos t)}\ dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\ dt = 4\pi a\sqrt{a}.$$

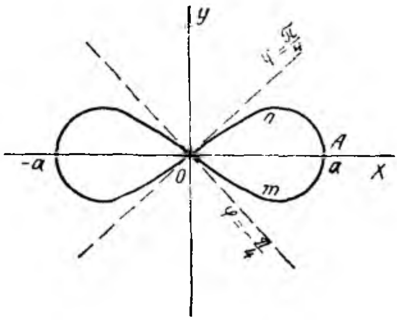
5- мисол. $\int\limits_{\gamma}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\cdot dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ — маркази координаталар бошида (қутбда) ва радиуси R га тенг бўлган доира ичида жойлашган $r = 2\varphi$ Архимед спиралининг ёйи.

Ечиш. Қутб координаталар системасида $r = 2\varphi$ Архимед спирали ва R радиусли айланани чизамиз. Улар кесишган нуқта $B(R;\ R/2)$ дир (62- чизма). Масала шартидаги γ эгри чизиқ $\overset{\frown}{OAB}$ ёйни тасвирлайди. Чизмадан кўриниб турибдики, $\overset{\frown}{OAB}$ ёйдаги $M(r, \varphi)$ нуқталар радиус — вектори узунлиги 0 дан R гача ўзгаради. Шунинг учун эркли ўзгарувчи (параметр) деб r ни қабул қиламиз ва ёй дифференциалини $dl = \sqrt{1 + r^2(\varphi'_r)^2}\cdot dr$ (3.8) формула бўйича ҳисоблаймиз. Равшанки, $\overset{\frown}{OAB}$ ва $\varphi = \frac{1}{2} r$, $\varphi'_r = \frac{1}{2}$, $dl = \frac{1}{2}\sqrt{4 + r^2}\, dr$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$.

Қутб координаталарига $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ формулалар ёрдамида ўтамиз. Интеграл остидаги функция γ эгри чизиқда $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} =$



62- чизма



63- чизма

$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi = \frac{1}{2} r$ кўринишга эга бўлади. Энди ҳисобланаётган интеграл (3.13) формулага асосан топилади: $\int\limits_{\gamma} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dl =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^R r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4+r^2}\, dr = \frac{1}{12}(4+r^2)^{3/2}\Big|_0^R =$$

$$= \frac{1}{12}\left[(4+R^2)\sqrt{4+R^2} - 8\right].$$

6- мисол. $\int\limits_{\gamma} x\cdot\sqrt{x^2-y^2}\cdot dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин бу ерда γ — лемнискатанинг ўнг япроғи, яъни

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\ (x \geqslant 0).$$

Ечиш. Қутб координаталарида лемнискатанинг тенгламаси $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ ва унинг ўнг япроғи $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ва $\varphi = +\frac{\pi}{4}$ нурлар орасида жойлашган бўлади (63- чизма). $\overset{\frown}{OmAnO}$ эгри чизиқда $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $r'_\varphi = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$. Энди φ — қутб бурчагини параметр деб, ёй дифференциалини (3.7) формула орқали ҳисоблаймиз: аввало

$$(r'_\varphi)^2 + r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi},\quad dl = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$

Интеграл остидаги функциянинг γ эгри чизиқдаги қийматини топиш учун лемниската формуласидан фойдаланамиз:

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{a^2}(x^2+y^2)^2;\ x\sqrt{x^2-y^2} = \frac{x}{a}(x^2+y^2) = \frac{1}{a} r^3\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{a}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^3 \cos\varphi = a^2\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^3\cos\varphi.$$

Демак, (3.12) формулага асосан узил-кесил топамиз:

$$\int_\gamma x\sqrt{x^2-y^2}\,dl=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^3\cos\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^3}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 3\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^3\left(\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,a^3.$$

7- мисол. $I=\int_\gamma e^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин.

Бу ерда γ чизиқ $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r, φ — қутб координаталар) эгри чизиқлар билан чегараланган қавариқ контурдир.

Ечиш. Қутб координаталар системасида γ контурни чизамиз (64-чизма): $r=a$ — маркази қутбда, радиуси a га тенг айлана, $\varphi=0$ — қутб ўқи, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ — қутб ўқига $\frac{\pi}{4}$ бурчак остида оғишган OB нур.

γ контур OA кесма, AB айлана ёйи ва OB кесмадан ташкил топган бўлакли — силлиқ эгри чизиқдир. Равшанки,

$$OA \text{ да } \varphi=0,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ dl=\sqrt{1+r^2(\varphi_r')^2}\ \ dr=dr;$$

$$AB \text{ да } r=a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ r_\varphi'=0,\ dl=\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\cdot d\varphi=a\,d\varphi;$$

$$OB \text{ да } \varphi=\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a,\ dl=dr.$$

Энди (3.17) формуладан фойдаланамиз:

$$I=\int_\gamma e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl=\int_\gamma e^r\,dl=\int_{OA} e^r\,dl+\int_{\overset{\frown}{AB}} e^r\,dl+\int_{OB} e^r\,dl.$$

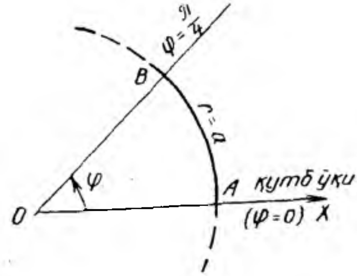
Юқоридаги маълумотларга кўра топамиз:

$$I=\int_0^a e^r\,dr+\int_0^{\pi/4} a\cdot e^a\,d\varphi+\int_0^a e^r\,dr=2\,(e^a-1)+\frac{\pi}{4}\,a\,e^a.$$

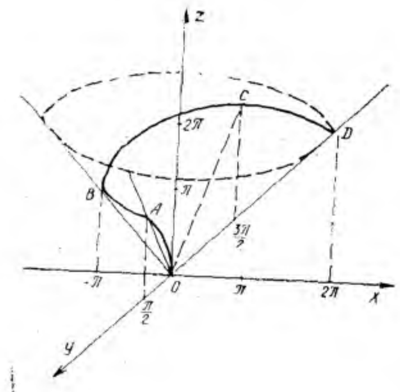
Энди бир нечта эгри чизиқли интегрални фазовий эгри чизиқлар бўйлаб ҳисоблаймиз, (x, y, z) фазодаги эгри чизиқ учун ёй дифференциали

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2 \quad (3.21)$$

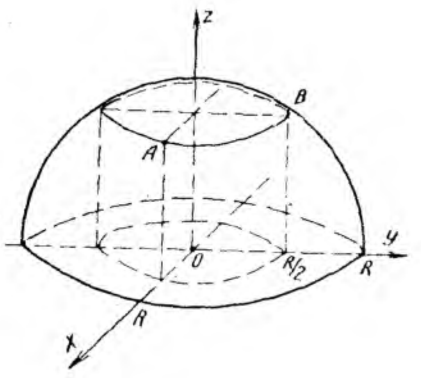
формула орқали ҳисобланади. Ҳар бир мисолда бирор ўзгарувчинн параметр деб, ёки бошқа t ўзгарувчини киритиб, эгри чизиқни $x=x(t)$,



64- чизма



65- чизма



66- чизма

$y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ параметрик тенглама билан бериш мумкин. У ҳолда

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} \cdot dt \ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \tag{3.20}$$

формулага келамиз.

8- мисол. $I = \int\limits_{\gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ — конуссимон $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ винт чизиғининг биринчи ўрами.

Ечиш. Мисолнинг шартига кўра t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради; γ эгри чизиқнинг $M(x, y, z)$ нуқтаси учун $x^2 + y^2 = z^2$ тенглик ўринли, демак, γ эгри чизиқ доиравий конус сиртида жойлашган (65- чизма). $O(0;\ 0;\ 0)$, $A\left(0; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $B(-\pi; о; \pi)$, $C\left(0; -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $D(2\pi;\ 0;\ 2\pi)$ нуқталар γ га тегишли. Ёй дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$\gamma \text{ да } x_t' = \cos t - t \sin i,\ y_t' = \sin t + t \cos t,\ z_t' = 1,$$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} \cdot dt = \sqrt{2 + i^2} \cdot dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Интеграл остидаги $j(x, y, z)$ функция эса γ эгри чизиқ нуқталарида $2z - \sqrt{x^2 + y^2} = 2t - \sqrt{t^2} = t$ га тенг. Натижада $f(x, y, z) = t$ эканини эътиборга олиб, узил-кесил топамиз:

$$I = \int\limits_{\gamma} \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl = \int\limits_0^{2\pi} t . \sqrt{2 + t^2}\ dt = \frac{1}{3} (\sqrt{2 + t^2})^3 \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[(1 + 2\pi^2) \sqrt{1 + 2\pi^2} - 1\right].$$

9- мисол. $I = \int\limits_{\gamma} xyz\ dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ чизиқ $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ айлананинг биринчи октантдаги чораги.

Ечиш. γ эгри чизиқ маркази $O(0;\ 0;\ 0)$ радиуси R га тенг бўлган $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера билан симметрия ўқи Oz ва $(x,\ y)$ даги йўналтирувчиси $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ айлана бўлган цилиндрик сиртнинг кесишиш чизиғидир (66- чизма). $(x,\ y,\ z)$ фазодаги γ нинг тенгламасини топиш учун $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ миқдорни $x^2+y^2+z^2=R^2$ га қўйиб, γ эгри чизиқ $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ тенгламалар билан аниқланишнга ишонч ҳосил қиламиз. Цилиндрик $(r,\ \varphi,\ z)$ координаталар системасига $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ формулалар орқали ўтсак, $\gamma=\overset{\frown}{AB}$ ёй $r=\frac{R}{2}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ шартлар билан берилади. Қутб бурчаги φ ни параметр деб қабул қилсак, $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг параметрик тенгламаси ушбу

$$x=\frac{R}{2}\cos\varphi,\ y=\frac{R}{2}\sin\varphi,\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}R\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$$

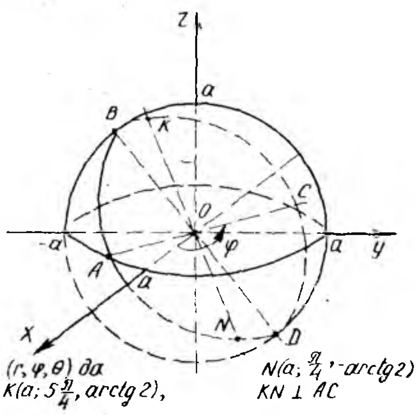
кўринишда бўлади. Бу шартлардан $z'_\varphi=0$, $x'_\varphi=-\frac{R}{2}\sin\varphi$, $y'_\varphi=\frac{R}{2}\cos\varphi$ ва $dl=\sqrt{x'^2_\varphi+y'^2_\varphi+z'^2_\varphi}\cdot d\varphi=\frac{R}{2}d\varphi$ муносабатларни топиб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_\gamma xyz\,dl=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{R}{2}\cos\varphi\,\frac{R}{2}\sin\varphi\,\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot\frac{R}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{R^4\sqrt{3}}{32}\sin^2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2}=\frac{R^4\sqrt{3}}{32}.$$

10- мисол. $I=\int\limits_\gamma x^2\,dl$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда чизиқ $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ айланадан иборат.

Ечиш: γ айлана $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера билан $O(0;0;0)$ дан ўтувчи $x+y+z=0$ текисликнинг кесишиш чизиғидир (67- чизма). Бу айлананинг радиуси a ва узунлиги $2\pi a$ га тенг. Бу мисолни икки усул билан ечамиз.



67- чизма

1- усул. Ҳисобланаётган интегрални $I_1 = \int\limits_\gamma x^2\, dl$ деб белгилаб оламиз. Агар Ox, Oy, Oz ўқларининг номларини ўзаро алмаштирсак, γ айлана тенгламаси ўзгармайди, фақат интеграл остидаги функция номи (белгиси) ўзгаради: x билан y ни алмаштирсак, янги $I_2 = \int\limits_\gamma y^2\, dl$ интегрални, x билан z ни алмаштирсак яна ҳам янги $I_3 = \int\limits_\gamma z^2\, dl$ интегрални ҳосил қиламиз. Бу интеграллар қиймати ўзгарувчининг номига боғлиқ эмас, демак, $I_1 = I_2 = I_3$. Интеграллаш йўли γ бир хил бўлгани учун (3.16) формулага асосан

$$J^* = I_1 + I_2 + I_3 = \int\limits_\gamma x^2\, dl + \int\limits_\gamma y^2\, dl + \int\limits_\gamma z^2\, dl =$$

$$= \int\limits_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, dl = \int\limits_\gamma a^2\, dl = a^2 \int\limits_\gamma dl = a^2 \cdot 2\pi a = 2\pi a^3.$$

Бу ерда биз (3.14) формуладан фойдаландик. Демак,

$$I = \int\limits_\gamma x^2\, dl = \frac{1}{3} I^* = \frac{2\pi}{3} a^3.$$

2- усул. Сферик (r, φ, θ) координаталар системасига $x = r \cos\varphi \times \times \cos\theta$, $y = r \sin\varphi \cos\theta$, $z = r \sin\theta$ формулалар орқали ўтсак, сфера тенгламаси $r = a$, текислик тенгламаси $\operatorname{tg}\theta = -(\cos\varphi + \sin\varphi)$ кўринишда бўлади. Умумий ҳолда φ миқдор 0 дан 2π гача ўзгаради, лекин $\widehat{ADCBA}$ ёй бўйлаб юрсак, φ миқдор $-\pi/4$ дан $\frac{7\pi}{4}$ гача ўзгаради. θ бурчак эса ўткир бўлиб, манфий ва мусбат қийматларни қабул қилади, шунинг учун $\cos\theta > 0$ бўлиб, $\sin\theta$ нинг ишораси $\operatorname{tg}\theta$ нинг ишораси билан бир хил бўлади:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sin 2\varphi}};$$

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = -\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2 + \sin 2\varphi}} = -\frac{\sqrt{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2}}{\sqrt{2 + \sin 2\varphi}} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}(\cos\varphi + \sin\varphi) = -\frac{\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}{\sqrt{2 + \sin 2\varphi}} \cdot \operatorname{sgn}(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

$\widehat{ADC}$ ёй нуқталарн учун $\left(-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\theta < 0$, $\operatorname{sgn}(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1$ ва $\widehat{CBA}$ ёй нуқталари учун $\left(\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\theta > 0$, $\operatorname{sgn}(\cos\varphi + \sin\varphi) = -1$. φ эркли ўзгарувчини параметр деб, $\widehat{ADC}$ ва $\widehat{CBA}$ нинг параметрик тенгламаларини ёзамиз:

$$\widehat{ADC}\ \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right) \text{ учун } x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{2 + \sin 2\varphi}},$$

$$y=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},\qquad z=-\frac{a\sqrt{1+\sin 2\varphi}}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}};$$

$$\overset{\frown}{CBA}\left(\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4}\right)\ \text{учун}\ x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},$$

$$y=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}},\qquad z=\frac{a\sqrt{1+\sin 2\varphi}}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}.$$

Иккита $\overset{\frown}{ADC}$, $\overset{\frown}{CBA}$ ёйдаги dl ёй дифференциали бир хил бўлади, интеграл остидаги x^2 функция ҳам бир хил қийматга эга. Шунинг учун

$$I=\int\limits_{\gamma}x^2dl=2\cdot\int\limits_{\overset{\frown}{ADC}}x^2dl.$$

энди $dl=\sqrt{x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2}\cdot d\varphi\ \left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}\right)$ ни ҳисоблаймиз.

$$x'_\varphi=a\left[\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}-\frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{(\sqrt{2+\sin 2\varphi})^3}\right],$$

$$y'_\varphi=a\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}-\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{(\sqrt{2+\sin 2\varphi})^3}\right],$$

$$z'_\varphi=\frac{-a\cos 2\varphi}{(\sqrt{2+\sin 2\varphi})^3\cdot\sqrt{1+\sin 2\varphi}};$$

$$x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=a^2\cdot\left[\frac{1}{2+\sin 2\varphi}+\frac{\cos^2 2\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2 2\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^3(1+\sin 2\varphi)}\right]=\frac{a^2}{(2+\sin 2\varphi)^3}\cdot[(2+\sin 2\varphi)^2+\cos^2 2\varphi+(1-$$

$$-\sin 2\varphi)]=\frac{3a^2}{(2+\sin 2\varphi)^2};\qquad dl=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sin 2\varphi}\,d\varphi.$$

Изланаётган эгри чизиқли интегрални ёзамиз:

$$I=2\cdot\int\limits_{\overset{\frown}{ADC}}x^2dl=2\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sqrt{3}\,a^3\cos^2\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}\,d\varphi=a^3\sqrt{3}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}+$$

$$\left.+\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\cos 2\varphi\,d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}\right]=a^3\sqrt{3}\cdot(I_2+I_1),\ \text{бу ерда}$$

$$I_1=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\cos 2\varphi\cdot d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}=-\frac{1}{2(2+\sin 2\varphi)}\Bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4}=0,$$

$$I_2=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d\varphi}{(2+\sin 2\varphi)^2}=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{d\varphi}{[1+2\sin^2(\varphi+\pi/4)]^2}.$$

I_2 да $\varphi+\frac{\pi}{4}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $t_1=0$; $t_2=\pi$ ва

$I_2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(1+2\sin^2 t)^2} = 2\cdot\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+2\sin^2 t)^2}$ деб оламиз, чунки $0 \leqslant \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$ оралиқлар учун интеграл қиймати бир хил. Шундай қилиб,

$$I = 2a^3\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+2\sin^2 t)^2} = 2a^3\sqrt{3}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}+2\right)^2}\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}$$

интегрални ҳисоблаш керак. $u = \operatorname{ctg} t$ деб алмаштириш бажарамиз. $du = -\frac{dt}{\sin^2 t}$; $1+u^2 = \frac{1}{\sin^2 t}$; $t_1 = 0$ да $u_1 = +\infty$; $t_2 = \pi/2$ да $u_2 = 0$ ва $I = 2a^3\sqrt{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{(u^2+3)^2}du$ хосмас интегралга келамиз. Аниқмас ва хосмас интегралларни ҳисоблаш усулларига асосан топамиз:

$$I = 2a^3\sqrt{3}\cdot\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{u}{3(u^2+3)}\right]\Bigg|_0^{+\infty} = 2a^3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}a^3.$$

Ёй узунлигини ҳисоблашга доир мисоллар.

11-мисол. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқнинг $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтасидан $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасигача бўлган ёй узунлиги топилсин.

Ечиш. Кўрсатилган тенгламалардан x, y ни z орқали ифодадалаймиз:

$$x + y = \frac{1}{a}(x-y)^2;\ (x-y)^3 = \frac{9a}{8}z^2,$$

ёки

$$x - y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\cdot\sqrt[3]{z^2},\ x + y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt[3]{z^4}.$$

Кейинги амалларда $\sqrt[3]{\frac{3}{a}} = b$ деб белгилаймиз ва $\sqrt[3]{z} = t$ ни параметр деб қабул қаламиз. Натижада $x - y = \frac{3}{2b}t^2$, $x + y = \frac{3}{4}bt^4$ шартлардан эгри чизиқнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{3}{8}\left(bt^4 + \frac{2}{b}t^2\right),\ y = \frac{3}{8}\left(bt^4 - \frac{2}{b}t^2\right),\ z = t^3.$$

Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, $\overset{\frown}{OA}$ ёйда $dx = \frac{3}{2}(bt^3 + b^{-1}t)dt$, $dy = \frac{3}{2}(bt^3 - b^{-1}t)dt$, $dz = 3t^2dt$.

Энди $dl > 0$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left[\frac{9}{2}(b^2t^6 + b^{-2}t^2) + 9t^4\right](dt)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}(bt^3 + b^{-1}\cdot t)^2 dt^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,|(bt^3 + b^{-1}t)\cdot dt|.$$

Эгри чизиқнинг $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқтаси (x, y) текисликдан юқорида ($z_0 > 0$) жойлашган бўлса, $t_0 = \sqrt[3]{z_0} > 0$ бўлади ва $0 \leqslant t \leqslant t_0$ соҳада $dt > 0$, $bt^3 + b^{-1}t > 0$, демак, $dl = \frac{3}{\sqrt{2}}(bt^3 + b^{-1}t)\,dt$.

$\overset{\frown}{OA}$ ёйнинг узунлиги учун $L = \int\limits_{\overset{\frown}{OA}} dl = \int\limits_0^{\sqrt[3]{z_0}} \frac{3}{\sqrt{2}}(bt^3 + b^{-1}t)\,dt =$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}}\cdot\left(b\cdot\sqrt[3]{z_0^4} + 2b^{-1}\sqrt[3]{z_0^2}\right)$ ифодага эгамиз.

Агар $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқта (x, y) текисликдан пастда жойлашса, $z_0 < 0$; $t_0 = \sqrt[3]{z_0} < 0$ бўлади. t параметр 0 дан t_0 гача ўзгаради десак, у ҳолда t камаяди, $dt < 0$ ва $(bt^3 + b^{-1}t)$ нинг қиймати ҳам манфий бўлади, демак, $|(bt^3 + b^{-1}\cdot t)dt| = (bt^3 + b^{-1}t)dt$, чунки $\forall t \in (t_0, 0)$ учун $bt^3 + b^{-1}t < 0$ бўлади ва $dt < 0$. Натижада олдинги ҳолдаги интегрални ҳосил қиламиз:

$$L = \int\limits_0^{t_0} dl = \frac{3}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\sqrt[3]{z_0}} (bt^3 + b^{-1}t)dt.$$

Шундай қилиб, $\overset{\frown}{OA}$ ёй узунлиги $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг вазиятидан қатъий назар, $L = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(b\cdot\sqrt[3]{z_0^4} + 2b^{-1}\cdot\sqrt[3]{z_0^2}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$ ифода билан аниқланади.

12- мисол. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{c}$, $c > 0$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқнинг $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтасидан $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасига бўлган ёй узунлиги топилсин.

Ечиш. Эгри чизиқ тенгламасидан $z_0 > 0$ эканлиги равшан, чунки $x^2 + y^2 \geqslant 0$, $c > 0$. Фазодаги цилиндрик координаталар системасига ўтсак ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$), $\overset{\frown}{OA}$ ёйнинг тенгламаси $r^2 = cz$, $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$ ёки $r^2 = cz$, $\varphi = \frac{z}{c}$ ва ниҳоят, $z = c\varphi$, $r = c\sqrt{\varphi}$ кўринишда ёзилиши мумкин. $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқта учун $\varphi_1 = 0$, $A(x_0, y_9, z_0)$ нуқта учун $\varphi_2 = \frac{z_0}{c}$ десак, ва φ — қутб бурчагини параметр деб олсак, $\overset{\frown}{OA}$ ёйнинг параметрик тенгламаси $x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi$, $y = c\sqrt{\varphi}\cdot\sin\varphi$, $z = c\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant z_0/c)$ кўринишда бўлади. Биламизки, ёй дифференциали $dl=\sqrt{x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2}\,d\varphi$ $(d\varphi>0)$ формула орқали топилади. Содда ҳисоб-китоб бажарамиз:

$$x_\varphi'=\frac{c}{2\sqrt{\varphi}}\cos\varphi-c\sqrt{\varphi}\sin\varphi,\ y_\varphi'=\frac{c}{2\sqrt{\varphi}}\sin\varphi+c\sqrt{\varphi}\cos\varphi,\quad z_\varphi'=c$$

ва
$$dl=\sqrt{\frac{1}{4\varphi}+\varphi+1}\cdot c\,d\varphi=c\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}+\sqrt{\varphi}\right)d\varphi.$$

$\overset{\frown}{OA}$ ёй узунлигини узил-кесил топамиз: $L=\int\limits_{\overset{\frown}{OA}}dl=$

$$=\int_0^{z_0/c}c\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}+\sqrt{\varphi}\right)d\varphi=c\sqrt{\varphi}\left(1+\frac{2}{3}\varphi\right)\Big|_0^{z_0/c}=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

Машқлар. I. Қуйидаги эгри чизиқли интеграллар кўрсатилган эгри чизиқ бўйлаб ҳисоблансин:

13.1 $I=\int\limits_\gamma xy\,dl$, бу ерда γ — учлари $A(-2;\,-2)$, $B(6;\,1)$, $C(2;\,5)$ нуқталарда бўлган учбурчак контури.

13.2. $I=\int\limits_\gamma x^2dl$, бу ерда γ — биринчи чоракдаги $8y^2=x^3$ эгри чизиқнинг $y^2=2x$ парабола билан ажратилган қисми.

13.3. $I=\int\limits_\gamma(x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$, бу ерда γ — астроида: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

13.4. $I=\int\limits_\gamma(x-y)\,dl$, бу ерда γ — айлана: $x^2+y^2=ax$.

13.5. $I=\int\limits_\gamma(x+y)\,dl$, бу ерда γ чизиқ $r^2=a^2\cos 2\varphi$ лемнискатанинг ўнг япроғи.

13.6. $I=\int\limits_\gamma(x^2+z)\,dl$, бу ерда γ чизиқ $x=t$, $y=\frac{\sqrt{3}t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$ эгри чизиқнинг ёйи $(0\leqslant t\leqslant 1)$.

13.7. $I=\int\limits_\gamma\sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, бу ерда γ — айлана: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ y=x\end{cases}$

13.8. $I=\int\limits_\gamma x^2yz\,dl$, бу ерда γ чизиқ $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=9$ эгри чизиқнинг (айлана) ёйи,

13.9. $I=\int\limits_\gamma z\cdot dl$, бу ерда γ чизиқ $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ эгри чизиқнинг $O(0;\,0;\,0)$ нуқтасидан $A(a;\,a;\,a\sqrt{2})$ нуқтасигача бўлган ёйи.

13.10. $I=\int\limits_\gamma(2x-3y)dl$, бу ерда γ — лемнискатанинг ўнг япроғи: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

13.11. $I=\int\limits_\gamma\frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, бу ерда γ — винт чизиғининг бир қисми:

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0<b\leqslant a.$$

13.12. $I=\int\limits_{\gamma}(x-5y)\,dl$, бу ерда γ — айлана: $x^2+y^2=6x$.

13.13. $I=\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, бу ерда AB — учлари $A(0;\ -2)$, $B(4;\ 0)$ нуқталардан иборат кесма.

13.14. $I=\int\limits_{\gamma}xy\,dl$, бу ерда γ — ушбу $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=2$ тўғри чизиқлардан ташкил топган тўртбурчак контури.

13.15. $I=\int\limits_{\gamma}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, бу ерда γ — учлари $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2)$ нуқталардан иборат кесма.

13.16. $I=\int\limits_{\gamma}(x+z)\,dl$, бу ерда γ эгри чизиқ параметрик тенгламалари билан берилган: $x=2at\sqrt{1-t^2}$, $y=a\cdot\ln(1-t^2)$, $z=2at^2$, $0\leqslant t\leqslant 1/2$.

13.17. $I=\int\limits_{\gamma}(x+y)\,dl$, бу ерда γ — $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$ айлана ёйининг $A(0;\ 0;\ R)$ ва $B(R/2;\ R/2;\ R\sqrt{2})$ нуқталар орасидаги кичик қисми,

13.18. $I=\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, бу ерда γ эгри чизиқ $(x^2+y^2)^{3/2}=a^2(x^2-y^2)$ тенглама билан берилган,

II. Қуйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар ёйининг узунлиги топилсин:

13.19. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$.

13.20. $y=\sqrt{x^2-32}+8\ln(x+\sqrt{x^2-8})$, $6\leqslant x\leqslant 9$.

13.21. $x=3t$, $y=3t^2$, $z^2=2t^2$ эгри чизиқнинг $O(0;\ 0;\ 0)$ дан $A(3;\ 3;\ 2)$ гача бўлган ёй узунлиги.

13.22. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ конуссимон винт чизиғининг $0\leqslant t\leqslant+\infty$ соҳадаги ёй узунлиги,

13.23. $y=\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ эгри чизиқнинг $O(0;\ 0;\ 0)$ дан $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ гача ёй узунлиги.

13.24. $x=ae^{3\varphi}\cos\varphi$, $y=ae^{3\varphi}\sin\varphi$, $z=be^{3\varphi}$, $b\leqslant z\leqslant 3b$.

13.25. $x=at$, $y=a\sqrt{t}\sin t$, $z=a\sqrt{t}\cos t$, $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 3$.

13.26. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=4a\cdot\cos\frac{t}{2}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

13.27. $x=a\cdot\sin^2\varphi$, $y=a\sin\varphi\cos\varphi$, $z=a\ln\cos\varphi$, $|\varphi|\leqslant\pi/4$.

13.28. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=be^t$, $0\leqslant t\leqslant\ln\frac{a}{b}$.

13.29. $x=at\cos t$, $y=at\sin t$, $z=a\cdot\frac{t^2}{2}$, $0\leqslant t\leqslant 2$.

13.30. $x^3=3a^2y$, $2xz=a^2$, $a/3\leqslant y\leqslant 9a$.

13.31. $x^2=3y$, $2xy=9$, $0\leqslant y\leqslant 27$.

13.32. $x^2=9y,\ 16xy=9z^2,\ |z|\leqslant 12.$

13.33. $x^2+y^2=az,\quad x\cdot\sin\frac{z}{a}-y\cos\frac{z}{a}=0,\ 0\leqslant z\leqslant 5,\quad a>0.$

13.34. $x^2+y^2=z^2,\ x\cos(\sqrt{2}\cdot z)+y\sin(\sqrt{2}\cdot z)=0,\ |z|\leqslant 1.$

13.35. $(y-z)^2=3a(y+z),\ 9x^2+8y^2=8z^2,\ 0\leqslant x\leqslant 4,\quad a>0.$

I тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида механикага оид масалаларни ечиш

13- мисол. Ушбу $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ параметрик тенгламалари билан берилган астроида ёйининг ҳар бир $M(x,\ y)$ нуқтасида жойлашган модданинг зичлиги $\rho(M)=|xy|$ формула билан аниқланади. Астроидада жойлашган масса топилсин.

Ечиш. Моддий эгри чизиқнинг массасини $m=\int\limits_{\gamma}\rho(x,\ y)dl$ формула билан ҳисоблаймиз. Астроида учун $x'_t=-3a\sin t\cdot\cos^2 t,\ y'_t=3a\cos t\cdot\sin^2 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),\ dl=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=3a\cdot\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\,dt=3a\cdot|\cos t\cdot\sin t|\,dt$, астроиданинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик: $\sigma(M)=|xy|=a^2|\sin^3 t\cdot\cos^3 t|$.

Демак, $m=\int\limits_{\gamma}|xy|\,dl=3a^3\int\limits_0^{2\pi}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 2t\,dt=$

$$=\frac{3a^3}{64}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)^2dt=\frac{3a^3}{64}\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{16}\sin 8t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$=\frac{9\pi a^3}{64}$ (масса бирлиги).

14- мисол. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоиданинг ҳар бир нуқтасида жойлашган модда зичлиги $\rho=k\sqrt{r}$. Кардиоиданинг массаси топилсин.

Ечиш. Эгри чизиқ қутб координаталарида берилган (68-чизма). Кардиоида учун $r=a(1+\cos\varphi)\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),\ r'_\varphi=-a\sin\varphi,\ dl=\sqrt{r'^2_\varphi+r^2}\cdot d\varphi=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\cdot d\varphi$ ва φ ни параметр деб олсак, астроидадаги масса зичлиги учун $\rho=k\sqrt{r}=k\sqrt{a(1+\cos\varphi)}=k\sqrt{2a}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$ ифода ҳосил бўлади. Энди изланган массани топамиз: $m=\int\limits_{\gamma}\rho\cdot dl=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}k\sqrt{2a}\cdot\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\cdot 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=ak\sqrt{2a}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\,d\varphi=$$

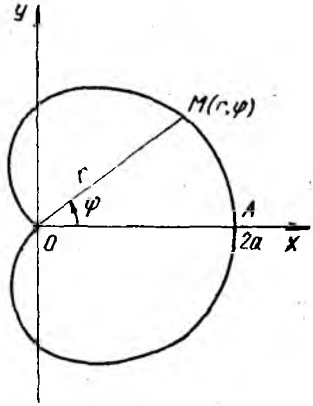
$=2\pi ak\sqrt{2a}$ (масса бирлиги).

15- мисол. $r=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида ёйи бўйлаб бир жинсли масса жойлашган. Бу моддий кардиоида ёйининг $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. Бир жинсли модда зичлиги учун $\rho = \mathrm{const}$ бўлиб, кўпинча $\rho = 1$ деб олинади. Оғирлик марказини $M_c(x_c, y_c)$ деб белгиласак, унинг координаталари

$$x_c = \frac{\int\limits_\gamma \rho \cdot x dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_\gamma \rho \cdot y dl}{m}, \quad m = \int\limits_\gamma \rho \cdot dl$$

формулалар орқали ҳисобланади. 14-мисолда $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ кардиоида учун $dl = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$ ёй дифференциали ҳисобланган. (x, y) ва (r,φ) системалар орасидаги $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ боғланишга асосан кардиоиданинг параметрик (φ га нисбатан) тенгламаси $x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$, $y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$ бўлади. Энди ушбу $I_1 = \int\limits_\gamma x dl$, $I_2 = \int\limits_\gamma y \cdot dl$, $I_3 = \int\limits_\gamma dl$ $(\rho = 1)$ эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаймиз;



68- чизма

$$I_1 = \int\limits_\gamma x \cdot dl = \int\limits_0^{2\pi} a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \cdot d\varphi =$$

$$= 2a^2\left[\int\limits_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi}(1 + \cos\varphi)\cos\varphi\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\right] =$$

$$= 4a^2\int\limits_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)\cos\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Ўрта қавс ичидаги иккинчи интеграл $\varphi = 2\pi - t$ алмаштириш билан биринчи интегралга келтирилади. Интегралда $\sin\frac{\varphi}{2} = u$, $2du = \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$, $\cos^2\frac{\varphi}{2} = 1 - u^2$, $\varphi_1 = 0$, учун $u_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ учун $u_2 = 1$ алмаштириш бажариб ҳисоблаймиз: $I_1 = \int\limits_\gamma x \cdot dl =$

$$= 8a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 16a^2\int\limits_0^1(1 - 3u^2 + 2u^4)\,du = \frac{32}{5}a^2;$$

$$I_2 = \int\limits_\gamma y dl = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)\sin\varphi\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi =$$

$$= 2a^2\left[\int\limits_0^{\pi}4\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi}4\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\right] =$$

$$= \frac{16a^2}{5}\left[-\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} + \cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{16a^2}{5}(1-1) = 0;$$

$$I_3 = \int\limits_{\gamma} dl = 2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 2a\cdot\left[\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\right] = 8\,a.$$

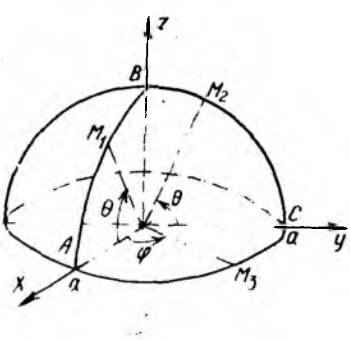
Ниҳоят, оғирлик маркази координаталарини топамиз:

$$x_c = \frac{I_1}{I_3} = \frac{4a}{5};\quad y_c = \frac{I_2}{I_3} = 0.$$

Демак, $(x,\ y)$ текисликда $M_c\left(\frac{4a}{5};\ 0\right)$ нуқта кардиоиданинг оғирлик марказидан иборат.

16- мисол. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ шартлар билан берилган бир жинсли сферик учбурчак контурининг оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. Сферик учбурчак томонлари $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера билан учта координата текисликлари кесишиш чизиқларининг I октантдаги қисмларидан ташкил топган (69-чизма). γ контур $=\overset{\frown}{ABCA}$ дан иборат. У учта $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ қисмдан ташкил топган бўлиб, ҳар бир қисм тегишли айлананинг чорагидан иборат. $\overset{\frown}{ABCA}$ эса, улардан тузилган бўлакли-силлиқ эгри чизиқдир. Равшанки, сферик координаталар $(x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ z = r\sin\theta)$ системасида: $\overset{\frown}{AB}$ ёйда $r=a$, $\varphi=0$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $dl = a\,d\theta$ ва $\overset{\frown}{AB}$ нинг параметрик тенгламаси $x=a\cos\theta$, $y=0$, $z=a\cdot\sin\theta$ (θ — параметр). $\overset{\frown}{BC}$ ёйда $r=a$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $dl = a\,d\theta$ ва $\overset{\frown}{BC}$ нинг параметрик тенгламаси $x=0$, $y=a\cos\theta$, $z=a\sin\theta$ (θ — параметр). $\overset{\frown}{CA}$ ёйда $r=a$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\theta=0$, $dl = a\,d\varphi$ ва $\overset{\frown}{CA}$ нинг параметрик тенгламаси $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi, z=0$ (φ — параметр). Оғирлик маркази $M_c(x_c,\ y_c,\ z_c)$ координаталарини



69- чизма

$$x_c = \frac{\int\limits_{\gamma} x\,dl}{m},\quad y_c = \frac{\int\limits_{\gamma} y\,dl}{m},$$

$$z_c = \frac{\int\limits_{\gamma} z\,dl}{m}\quad m = \int\limits_{\gamma} dl\ (\rho = 1)$$

формулалар орқали ҳисоблаймиз. Аввал контурнинг массасини топамиз:

$$m=\int_{\gamma} dl=\int_{\overset{\frown}{AB}} dl+\int_{\overset{\frown}{BC}} dl+\int_{\overset{\frown}{CA}} dl=\int_0^{\pi/2} a\,d\theta+\int_0^{\pi/2} a\,d\theta+$$

$$+\int_0^{\pi/2} a\,d\varphi=\frac{3}{2}\pi a.$$

Ox, Oy, Oz ўқларнинг бирини иккинчиси билан алмаштирилганда γ контурнинг шакли ўзгармайди, демак, $x_c=y_c=z_c$. Улардан биттасини, масалан, y_c ни ҳисоблаш етарли:

$$y_c=\frac{1}{m}\int_{\gamma} y\,dl=\frac{2}{3\pi a}\left[\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,dl+\int_{\overset{\frown}{BC}} y\,dl+\int_{\overset{\frown}{CA}} y\,dl\right]=$$

$$=\frac{2}{3\pi a}\left(\int_0^{\pi/2} a^2\cos\theta\,d\theta+\int_0^{\pi/2} a^2\sin\varphi\,d\varphi\right)=\frac{4a}{3\pi}.$$

Демак, $M_c\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4a}{3\pi}\ \frac{4a}{3\pi}\right)$ — контурнинг оғирлик маркази.

17-мисол. Конуссимон (коник) винт чизиғи параметрик тенгламаси $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ билан берилган. Бу чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлиги $\rho=kz^2$ формула билан ифодаланса, унинг биринчи ўрамининг $(x,\ y)$ текисликка нисбатан статик моменти ҳисоблансин.

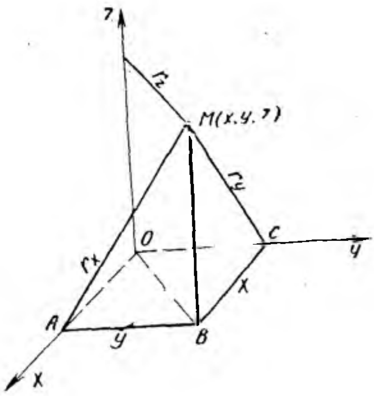
Ечиш. $(x,\ y)$ текисликка нисбатан моддий эгри чизиқнинг статик моменти $S_{xy}=\int\rho(x,\ y,\ z).\ z\,dl$ формула орқали ҳисобланади. Биринчи ўрамида t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради ва $dl=\sqrt{2+t^2}\,dt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (8-мисолга қаралсин) бўлади. Демак, S_{xy} учун ушбу $S_{xy}=\int_{\gamma} kz^3\,dl=k\int_0^{2\pi} t^3\sqrt{2+t^2}\,dt$ интеграл ҳосил бўлади. Уни ҳисоблаш учун $u=2+t^2$ алмаштириш бажарамиз, янги чегаралар $u_1=2$, $u_2=2+4\pi^2$ бўлади ва узил-кесил топамиз:

$$S_{xy}=\frac{k}{2}\int_2^{2+4\pi^2}(u-2)\sqrt{u}\,du=\frac{k}{15}u\sqrt{u}\,(3u-10)\Big|_2^{2+4\pi^2}=$$

$$=\frac{8k\sqrt{2}}{15}\left[(1+2\pi^2)^{3/2}\cdot(3\pi^2-1)+1\right].$$

18-мисол. Винт чизиғи параметрик тенгламаси $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ билан берилган. Унинг биринчи ўрамининг Oy ўққа нисбатан инерция моменти топилсин ($\rho=1$).

Ечиш. γ эгри чизиқда жойлашган $M(x,\ y,\ z)$ нуқтадан Ox, Oy, Oz ўқларгача бўлган масофаларни мос равишда r_x, r_y, r_z десак, у



70- чизма

ҳолда мос ўқларга нисбатан инерция моментлари $I_x = \int\limits_\gamma \rho r_x^2 dl$, $I_y = \int\limits_\gamma \rho r_y^2 dl$; $I_z = \int\limits_\gamma \rho r_z^2 dl$ формулалар бўйича ҳисобланади. 70-чизмадан $r_x = MA = \sqrt{y^2 + z^2}$, $r_y = \sqrt{x^2 + z^2} = MC$, $r_z = MD = OB = \sqrt{x^2 + y^2}$ эканлиги равшан.

Винт чизиғининг биринчи ўрамида $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} \cdot dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ ва $M(x, y, z)$ нуқтаси учун $r_y^2 = x^2 + z^2 = a^2\cos^2 t + bt^2$ бўладм. Oy ўқига нисбатан инерция моменти

$$I_y = \int\limits_\gamma (x^2 + z^2) dl = \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{1}{3} b^2 t^3 \right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right).$$

Машқлар. 1. Қуйидаги эгри чизиқлар кўрсатилган қисмларининг массаси топилсин.

13.36. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ лемниската нуқталаридаги модда зичлигини $\rho(x, y) = kr$ деб, бутун лемнискатанинг массаси топилсин.

13.37. $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ эгри чизиқ нуқталаридаги модда зичлигини $\rho = ke_t$ деб, бу чизиқнинг $O(0;\ 0;\ 0)$ дан $A(a;\ 0;\ a)$ гача $(-\infty < t \leqslant 0)$ бўлган ёйи массаси топилсин.

13.38. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс контурининг массаси топилсин. Унинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлиги $\rho(x, y) = |y|$ деб олинсин.

13.39. $y = \ln x$ эгри чизиқ $(5 \leqslant x \leqslant 10)$ ёйининг массаси топилсин. Унинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтасидаги модда зичлиги $\rho(M) = x^2$.

13.40. Ушбу $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ айлана ёйининг $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho = xy$ деб унинг массаси топилсин.

13.41. Ушбу $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ деб, унинг массаси топилсин.

13.42. Ушбу $y = \ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant e)$ эгри чизиқ ёйининг ҳар бир нуқтасидаги зичликни $\rho = kx^2$ $(k = \mathrm{const})$ деб, унинг массаси топилсин.

13.43. Ушбу $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ циклоиданинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho = y^2$ деб, унинг массаси топилсин.

13.44. Ушбу $x^2 + y^2 = ax$ айлананинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ деб, унинг массаси тоцилсин.

13.45. Ушбу $x = t,\ y = \frac{1}{2} t^2,\ y = \frac{1}{3} t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho = \sqrt{2y}$ деб, унинг массаси топилсин.

II. Қуйидаги эгри чизиқларнинг оғирлик маркази топилсин; $\rho(x, y)$ ҳақида ҳеч нарса айтилмаган бўлса, уни 1 га тенг деб олинг:

13.46. $x = a(t - \sin t),\ y = a\ (1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

13.47. Ушбу $y = a \cdot \mathrm{ch} \frac{x}{a}$ эгри чизиқнинг $A(0; a)$ ва $B(b; h)$ нуқталари орасидаги ёй учун.

13.48. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

13.49. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

13.50. $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y,\ 1 \leqslant y \leqslant 2.$

13.51. $r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

13.52. $r = a e^{\varphi}\ ,\ \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

Қуйидаги мисолларда ишлатиладиган формулаларни (x, y) текислик учун келтирамиз. Эгри чизиқнинг статистик моментлари

1. $K_x = \int\limits_{\gamma} y \cdot \rho(x, y)\, dl$ — Ox ўқига нисбатан.

2. $K_y = \int\limits_{\gamma} x \cdot \rho(x, y)\, dl$ — Oy ўқига нисбатан.

Инерция моментлари.

3. $\mathrm{I}_x = \int\limits_{\gamma} y^2 \rho(x, y)\, dl$ — Ox ўқига нисбатан.

4. $\mathrm{I}_y = \int\limits_{\gamma} x^2 \cdot \rho(x, y)\, dl$ — Oy ўқига нисбатан.

5. $\mathrm{I}_0 = \int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dl$ — $O(0;0)$ координата бошига нисбатан.

13.53. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$ K_x ва K_y топилсин.

13.54. Қутб координаталар системасида учлари $P(a; 0)$, $Q\left(a; \frac{2\pi}{3}\right)$ $R\left(a; \frac{4\pi}{3}\right)$ нуқталардан иборат учбурчак берилган. Учбурчак контурининг қутб моменти топилсин.

13.55. $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha < 2\pi.$ I_x топилсин.

13.56. $x^2 + (y - a)^2 = R^2,\ a > R.$ I_x топилсин.

13.57. $x = a(t - \sin t),\ y = a\ (1 - \cos t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$ I_x ва I_y топилсин.

1358. Винт чизиғи $x = a\cos t.\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi} t\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

биринчи ўрамининг Ox, Oz ўқларига нисбатан инерция моменти топилсин. Кўрсатма: 18-мисолда ишлатилган формулаларга асосан $I_x = \int\limits_{\gamma} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dl$, $I_z = \int (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dl$.

14-§. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

(x, y) текисликдаги $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ бўлакли-силлиқ эгри чизиқнинг $M(x,y)$ нуқтасида $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ узлуксиз функциялар берилган бўлсин. У ҳолда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx$, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)\, dy$ ифодалар $P(x, y)\, dx$ дан ва $Q(x, y)\, dy$ дан $\overset{\frown}{AB}$ йўл бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар дейилади. Бу интеграллар йиғиндиси.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{3.23}$$

«умумий кўриниш» даги II тур эгри чизиқли интеграл деб аталади.

Фазовий $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг «умумий кўриниши».

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \tag{3.24}$$

бўлади.

$\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйлаб юрганда йўналишнинг ўзгариши интеграл ишорасини тескарисига ўзгартиради:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P\, dx + Q\, dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy. \tag{3.25}$$

II тур эгри чизиқли интегрални одатдаги (Риман маъносидаги) аниқ интегралга келтириш мумкин. Шунинг учун аниқ интегралнинг энг содда хоссалари иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар учун ҳам тўғри. Агар $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ параметрик тенгламаси билан берилган бўлса, у ҳолда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x,y)\, dy$ интегралдаги интеграл ости P, Q функцияларда x ва y ни уларнинг параметрик ифодалари билан, dx кўпайтувчини $x = x(t)$ функциянинг $dx = x'dt$ дифференциали ва мос равишда dy кўпайтувчини $y = y(t)$ нинг дифференциали $dy = y'\, dt$ билан алмаштириш керак. Натижада интеграл остидаги ифода битта t параметрга боғлиқ бўлади ва эгри чизиқли интеграл аниқ интеграл орқали ифодаланади. $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқдаги йўналишга қараб интеграл қуйи чегараси деб t_A (A нуқтага мос келган t параметр қиймати), юқори чегараси деб t_B (B нуқтага мос келган t параметр қиймати) олинади ва интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]\, dt \qquad (3.26)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ узлуксиз $y(x)$ функция ёрдамида ёзилган $y = y(x)$ ошкор тенгламаси билан берилган бўлиб, x ўзгарувчи a дан b гача ўзгарганида эгри чизиқ худди A дан B га қараб йўналишда чизиладиган бўлса, у ҳолда x ни параметр деб

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)]\, dx \qquad (3.27)$$

формулага келамиз. Яна бир марта эслатиб ўтамизки, аниқ интегралда қуйи ва юқори чегараларни жойлаштириш тартиби эгри чизиқда танланган йўналишга мос бўлади.

Агар $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy$ нинг интеграллаш йўли $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ ўзининг $x = x(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$ ошкор тенгламаси билан берилса (бу ерда $c = y_A$ — A нуқта ординатаси, $d = y_B$ — B нуқта ординатаси), у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{c}^{d} [P(x(y), y) \cdot x'_y + Q(x(y), y)]\, dy \qquad (3.28)$$

формула ўринли.

Агар $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ интеграллаш йўли Oy ўқига параллел ($x = \text{const}$) тўғри чизиқ кесмаси бўлса, $dx = 0$ бўлиб,

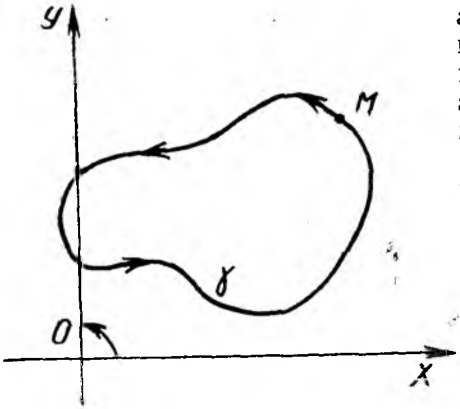
$$\int P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(c;\ y)\, dy \qquad (3.29)$$

ва шунга ўхшаш, $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ йўл Ox ўқига параллел ($y = \text{const}$) тўғри чизиқ кесмаси бўлса, $dy = 0$ бўлиб,

$$\int\limits_{\gamma} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x; c)\, dx \qquad (3.30)$$

формула ҳосил бўлади.

Агар γ — ёпиқ контур, яъни интеграллаш йўлининг боши A ва охири B устма-уст тушган бўлса, у ҳолда текислик ориентациясини ҳисобга олиш керак. (x, y) текисликда соат миллари ҳаракатига тескари йўналиш (Ox дан Oy га қараб) мусбат ҳисобланса, у ҳолда



71- чизма

текислик ориентацияси ўнг, акс ҳолда чап дейилади. Текислик ориентацияси ўнг бўлганда, содда ёпиқ контурни айланиб чиқишнинг мусбат йўналиши деб шундай йўналишни олинадики, бунда кузатувчи шу йўналиш бўйича ҳаракатланганда контур билан чегараланган соҳанинг кузатувчига яқин қисми унинг чап томонида қолади (71- чизма).

Агар интеграллаш йўли γ содда ёпиқ эгри чизиқ бўлса ва контурни айланиб чиқишнинг йўналишига доир кўрсатмалар бўлмаса, у ҳолда $\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy$ символ мусбат йўналиш бўйича олинган интегрални тасвирлайди.

Агар $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ ифода бирор $U=U(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, яъни $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқни ўз ичига олган бир боғламли (D) соҳада $P\,dx+Q\,dy=dU(x,y)$ тенглик бажарилса (бунинг учун $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ шарт бажарилиши зарур ва етарли), у ҳолда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эмас. Интегралнинг қиймати $U(x,y)$ функциянинг B нуқтадаги ва A нуқтадаги қийматлари айирмасига тенг.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=U(B)-U(A). \tag{3.31}$$

Интеграллаш йўли $\gamma=\overset{\frown}{AB}$ ёпиқ контур бўлганда $P\,dx+Q\,dy$ тўлиқ дифференциалдан олинган эгри чизиқли интеграл нолга тенг:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=0. \tag{3.32}$$

(x,y,z) фазодаги бир боғламли (V) соҳада

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

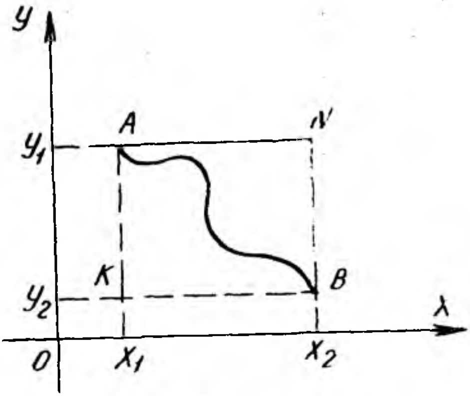
ифода тўлиқ дифференциал бўлиши учун

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

тенгликлар бажарилиши зарур ва етарли. Бу ҳолда

$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ эгри чизиқли интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эмас ($\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бутунлай (V) соҳада бўлиши керак).

Тўлиқ дифференциалдан эгри чизиқли интегрални олиш учун энг содда усул ишлатилади $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ (72- чизма) ўрнига интеграллаш йўли деб томонлари координата (Ox, Oy, Oz) ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқлар кесмасидан тузилган синиқ чизиқни олиб (3.29) ва (3.30) формулалардан фойдаланиш мумкин. Масалан, (D) соҳадаги $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ A (x_1, y_1) ва B (x_2, y_2) нуқталардан ўтсин, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ интеграл учун $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ шарт бажарилсин. Интеграллаш йўли қилиб ANB синиқ чизиқни оламиз:



72- чизма

AN да $y = y_1$ (const), $dy = 0$, x эса x_1 дан x_2 гача ўзгаради;

BN да $x = x_2$ (const), $dx = 0$, y эса y_1 дан y_2 гача ўзгаради. Натижада ANB синиқ чизиқ бўйича интеграллаб

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AN}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\overset{\frown}{NB}} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x;\,y_1)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_2;\,y)\,dy \qquad (3.33)$$

аниқ интегралга, агар AKB синиқ чизиқ бўйича интегралласак,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_1;\,y)\,dy + \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x;\,y_2)\,dx \qquad (3.34)$$

аниқ интегралга келамиз.

Керакли формулаларни мисоллар ечиш жараёнида кўрсатиб ўтамиз.

15- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблашга доир мисоллар

1- мисол. $I = \int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} xy\,dx + (y - x)\,dy$ эгри чизиқли интеграл.

1) $y = x^2$ ва 2) $y^2 = x$ йўл бўйича ҳисоблансин.

Ечиш. Интегралнинг ёзилишидан $O\,(0;0)$ нуқта йўлнинг боши ва $A\,(1;1)$ нуқта эса йўлнинг охири эканлиги кўриниб турибди (73-чизма). 1-ҳолда интеграллаш йўли $\overset{\frown}{OmA}$ ёй бўйича олинади. $\overset{\frown}{OmA}$ да $y=x^2$, $dy=2x\,dx$, $0\leqslant x\leqslant 1$ ва (3.27) формулага асосан x ни параметр деб J ни ҳисоблаймиз:

$$I=\int\limits_{\overset{\frown}{OmA}} xy\,dx+(y-x)\,dy=\int\limits_0^1 [x^3+(x^2-x)\cdot 2x]\,dx=$$

$$=\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

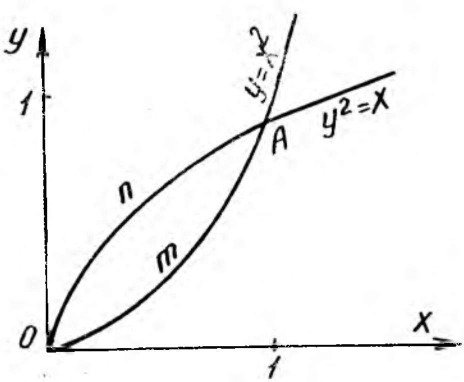
2-ҳолда интеграллаш йўли $\overset{\frown}{OnA}$ ёйдир; $\overset{\frown}{OnA}$ да $x=y^2$, $dx=2y\,dy$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Демак, y ни параметр деб олиб (3.28) формулага асосан топамиз:

$$I=\int\limits_{\overset{\frown}{OnA}} xy\,dx+(y-x)\,dy=\int\limits_0^1[y^3\cdot 2y+(y-y^2)]\,dy=$$

$$=\left(\frac{2}{5}y^5-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{17}{30}.$$

Икки ҳолда икки хил натижа чиқди, бу эса иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эканлигини кўрсатади.

2- мисол. $I=\int\limits_\gamma \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ чизиқ $x=R\cos^3t$, $y=R\sin^3t$ астроиданинг $A\,(R;\ 0)$ нуқтадан $B\,(0;\ R)$ нуқтагача бўлган чорагидир.



73- чизма

Ечиш. Интеграллаш йўли параметрик тенглама билан берилган. Шунинг учун t ни параметр деб x, y, dx, dy ни t, dt орқали ифодалаймиз:

$$x=R\cos^3 t,\ dx=$$
$$=-3R\cos^2 t\ \sin t\ dt,$$
$$y=R\sin^3 t,$$
$$dy=3R\sin^2 t\cos t\ dt.$$

Интеграл остидаги ифодани ҳисоблаб оламиз:

$$\frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} = \frac{3R^3(\cos^7t\cdot\sin^2t + \sin^7t\cdot\cos^2t)}{\sqrt[3]{R^5}\,(\cos^5t + \sin^5t)}\,dt = \frac{3}{4}\sqrt[3]{R^4}\cdot\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{R^4}\cdot(1 - \cos 4t)\,dt.$$

Энди интеграллаш чегарасини топайлик: $A\,(R;\ 0)$ учун $x = R$, $y = 0$ шартдан $t_1 = 0$ ва $B\,(0;\ R)$ учун $x = 0$, $y = R$ шартдан $t_2 = \pi/2$ бўлади. Демак, (3.26) формулага асосан узил-кесил топамиз:

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{3}{8}\sqrt[3]{R^4}\,(1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}.$$

3-мисол. $I = \int\limits_\gamma xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ чизиқ $A\,(1;\ 1;\ 1)$ ва $B\,(2;\ 3;\ 4)$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмасидир.

Ечиш. AB кесма $(x,\ y,\ z)$ фазода берилган. Фазодаги икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

кўринишда ёзилади. Ундан фойдаланиб ёзамиз:

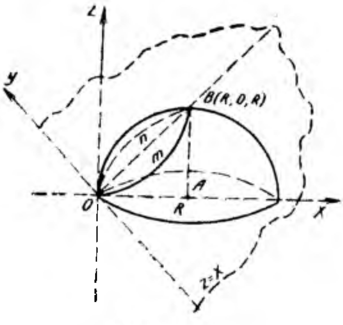
$$AB\colon\ \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}.$$

Исталган (x, ёки y, ёки z) ўзгарувчини параметр деб олиш мумкин. Биз x ни параметр деб олсак, тўғри чизиқ тенгламаси $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ z = 3x - 2 \end{cases}$ кўринишда бўлади. AB кесмада $dy = 2\cdot dx$, $dz = 3dx$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ ва, ниҳоят

$$I = \int_1^2 x\,dx + (2x - 1)\cdot 2dx + (x + 2x - 1 - 1)\cdot 3\,dx =$$

$$= \int_1^2 (14x - 8)\,dx = 13.$$

4-мисол. $I = \int\limits_\gamma xy\,dx + yz\,dy + zxdz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ чизиқ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \\ z = x \end{cases}$ айлананинг $y \geqslant 0$ соҳадаги қисмидир.



74-чизма

Ечиш. Маркази $A\,(R;\ 0,\ 0)$ да ва радиуси R бўлган $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$

сфера билан Oy ўқидан ўтувчи $z = x$ текислик $\overset{\frown}{OmBnO}$ айлана бўйлаб (74-чизма) кесишади: $\gamma = \overset{\frown}{OnB}$ ёйдаги нуқталар учун $y \geqslant 0$ шарт бажарилади. Мисолни ечиш учун x ни параметр деб оламиз. γ нинг параметрик тенгламаси $y = \sqrt{2Rx - 2x^2}$, $z = x$, $0 \leqslant x \leqslant R$ бўлади. $\overset{\frown}{OnB}$ да $dy = \frac{(R-2x)\,dx}{\sqrt{2Rx - 2x^2}}$, $dz = dx$ ва интеграл остидаги ифода $xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz = (x\sqrt{2Rx - 2x^2} + Rx - x^2)\,dx$ кўринишда ёзилади. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = \int_0^R (x\sqrt{2Rx - 2x^2} + Rx - x^2)\,dx = \left(\frac{1}{2}Rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R +$$

$$+ \int_0^R x\cdot\sqrt{2Rx - 2x^2}\,dx = \frac{1}{6}R^3 + \sqrt{2}\cdot I_1,$$

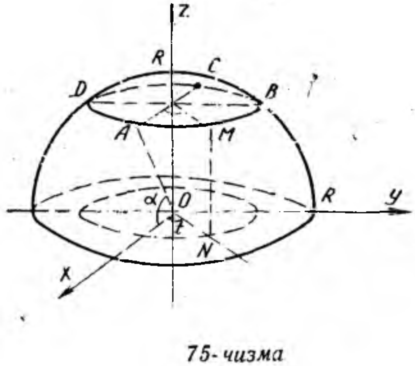
бу ерда $I_1 = \int_0^R x\cdot\sqrt{Rx - x^2}\,dx$. Энди I_1 интегрални ҳисоблаш учун унда $t = x - \frac{R}{2}$, $dx = dt$, $Rx - x^2 = \frac{1}{4}R^2 - t^2, -\frac{R}{2} \leqslant t \leqslant \frac{R}{2}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$I_1 = \int_{-R/2}^{R/2} \left(t + \frac{R}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}R^2 - t^2}\cdot dt = \left[-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{4}R^2 - t^2}\right)^3 +\right.$$

$$\left.+ \frac{R}{2}\left(\frac{t}{2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{4} - t^2} + \frac{R^2}{8}\arcsin\frac{2t}{R}\right)\right]\Bigg|_{-R/2}^{R/2} = \frac{\pi R^3}{16}.$$

Демак, берилган интеграл учун узил-кесил топамиз:

$$I = \frac{R^3}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}R^3.$$



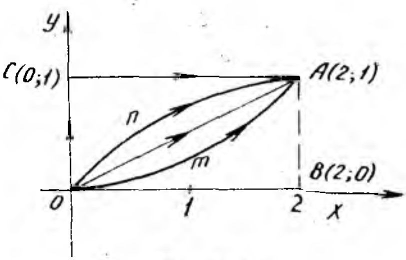
75-чизма

5-мисол. $I = \int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда γ — айлана: $x = R\cos t\,\cos\alpha$, $y = R\sin t\cos\alpha$, $z = R\sin\alpha$ ($\alpha = \text{const}$), $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Ечиш. Сферик (r, φ, θ) координаталар билан солиштирсак, берилган тенгламалар Oz ўқига перпендикуляр ($z = R\cdot\sin\alpha$) текисликда ётган $\gamma = \overset{\frown}{ABCDA}$ айланани тасвирлайди (75-чизма).

t параметр (x, y) текисликдаги қутб бурчаги вазифасини бажаради. Чизма $0<\alpha<\pi/2$ ҳол учун чизилган.

γ айланада $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $dx = -R\cos\alpha \sin t\,dt$, $dy = R\cos\alpha \times \cos t\,dt$, $dz=0$, интеграл остидаги ифода $y\,dx+z\,dy+x\,dz=R^2\times[-\cos^2\alpha\sin^2 t+\sin\alpha\cos\alpha\cos t]dt = R^2\cdot\left[\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot(\cos 2t-1)+\sin\alpha\cos\alpha\cos t\right]dt$.



76- чизма

Шундай қилиб,

$$I=\int_0^{2\pi} R^2\cdot\left[\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot(\cos 2t-1)+\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos t\right]dt=-\pi R^2\cos^2\alpha.$$

Машқлар. I. Қуйидаги иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар ҳисоблансин.

15.1. $I=\int\limits_\gamma \frac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, бу ерда γ — ярим айлана: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

15.2. $I=\int\limits_\gamma (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$, бу ерда γ — циклоиданинг биринчи арки: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

15.3. $I=\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} 2xy\,dx-x^2\,dy$, бу ерда $\overset{\frown}{OA}$ турли чизиқлар бўлиб, $O(0:0)$ дан $A(2;1)$ нуқтагача келади: а) OA тўғри чизиқ кесмаси; б) OBA синиқ чизиқ; в) OCA синиқ чизиқ, г) $4y=x^2$ параболанинг $\overset{\frown}{OmA}$ ёйи, д) $x=2y^2$ параболанинг $\overset{\frown}{OnA}$ ёйи (76- чизма).

• **15.4.** $I=\int\limits_\gamma yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$, бу ерда γ- винт чизиғининг биринчи ўрами: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $z=\frac{at}{2\pi}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

• **15.5.** $I=\int\limits_{(1;1;1;)}^{(4;4;4;)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ тўғри чизиқ кесмаси бўйича ҳисоблансин.

• **15.6.** $I=\int\limits_\gamma (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, бу ерда γ — айлана: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\cdot tg\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$.

Ox ўқининг мусбат қисмидан қараганда айлана соат миллари ҳаракатига тескари йўналишда ўтилсин;

15.7. $I=\int\limits_\gamma y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, бу ерда γ — Вавиани чизиғи:

$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ нинг (x, y) текисликдан юқоридаги қисмидир. Ox ўқининг мусбат $(x>a)$ қисмидан қараганда интеграллаш йўли соат миллари ҳаракатига тескари ўтилади.

15.8. $I=\int\limits_{\gamma} y^2\,dx+x^2\,dy$, бу ерда γ чизиқ $A(-a; 0)$ дан $B(a; 0)$ гача бўлган ярим эллипс ёйидир: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

15.9. $I=\int\limits_{\gamma}(y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2\,dz$, бу ерда γ — эгри чизиқ: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$.

Ҳаракат йўналиши t параметрнинг ўсишига қараб олинган.

15.10. $I=\int\limits_{\gamma}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{2/3}+y^{2/3}}$ бу ерда γ — астроиданинг $A(R; 0)$ нуқтасидан $B(0; R)$ нуқтасигача бўлган ёйи: $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$.

15.11. $I=\int\limits_{\gamma}(2a-y)\,dx+x\,dy$, бу ерда γ — циклоида: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Параметр t нинг ўсишига қараб юрилсин.

15.12. $I=\int\limits_{AB}\cos y\,dx-\sin x\,dy$, бу ерда AB — кесма: A; $(2; -2)$, $B(-2; 2)$.

15.13. $I=\int\limits_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, бу ерда AB — кесма: $A(1; 2)$, $B(3; 4)$.

15.14. $I=\int\limits_{AB}(4x+y)\,dx+(x+4y)\,dy$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ ёй $y=x^4$ эгри чизиқнинг ёйи; $A(1; 1)$ ва $B(-1; 1)$.

15.15. $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx-x\,dy$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ ёй $x^2+y^2=1$ айлананинг $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ нуқтасидан $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ нуқтасигача соат миллари ҳаракати йўналишида ўтилади.

15.16. $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z\,dx-x\,dy+y\,dz$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ винт чизиғининг $A(a; 0; 0)$ дан $B(a; 0; 2\pi c)$ гача бўлган бир ўрамидир: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=ct$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

15.17. $I=\int\limits_{ABCA}(x-y)\,dx+(2x+y)\,dy$, бу ерда $ABCA$ — учлари $A(1; 1)$; $B(3; 3)$, $C(3; -1)$ да бўлган учбурчак контури.

15.18. $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx-x\,dy$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ нинг $A(a; 0)$ дан $B(0; a)$ гача бўлган ёйи.

15.19. $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dx+y\,dy+z\,dz$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ — $A(a; 0; 0)$ дан $B(a; 0; 2\pi b)$ гача бўлган $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ винт чизиғининг ўрами.

15.20. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{1}{y} dx + \frac{1}{z} dy + \frac{1}{x} dz$, бу ерда $\overset{\frown}{AB}$ — A (1; 1; 1) ва B (2; 4; 8) дан ўтган тўғри чизиқ кесмаси.

15.21. $I = \int\limits_{OA} e^{y-z} \cdot dx + e^{z-x} \cdot dy + e^{x-y} dz$, бу ерда OA — O (0; 0;0) билан A (1; 3; 5) ни бирлаштирувчи кесма.

15.22. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{MN}} (y+z)\,dx + (2+x)\,dy + (x+y)\,dz$, бу ерда $\overset{\frown}{MN}$ ёй $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ сферадаги M (3; 4;0) ва N (0; 0; 5) нуқталарни бирлаштирувчи катта айлананинг энг қисқа ёйидир.

15.23. $I = \oint\limits_{\gamma} (-y\,dx + x\,dy + c \cdot dz)$, бу ерда γ — айлана ёйи:

а) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; б) $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, Ҳаракат соат миллари йўналишига тескари олинган.

Қуйидаги мисолларни ечишда интеграл остидаги ифода тўлиқ дифференциал эканлигидан фойдаланилсин.

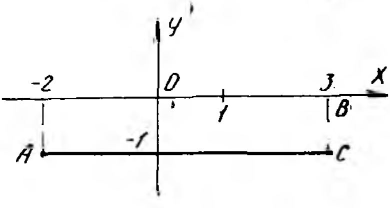
6- мисол. Ушбу $I = \int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$, $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ деб белгиласак, $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$ ва $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ эканлигини кўрамиз. Демак, интеграл остидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциалидир. Интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмагани учун биз A (— 2; 1) нуқтадан B (3; 0) нуқтагача ACB синиқ чизиқ бўйлаб келамаз (77- чизма). AC да $y = -1$, $dy = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 3$ ва CB да $x = 3$, $dx = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Юқорида (14- § да) кўрсатилган (3.33) формулага асосан

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{CB} P\,dx + Q\,dy =$$

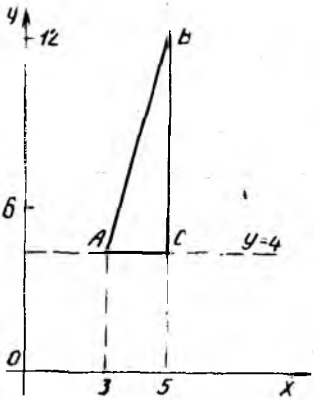
$$= \int\limits_{-2}^{3} [x^4 + 4x(-1)^3]\,dx + \int\limits_{-1}^{0} (6 \cdot 9y^2 - 5y^4)\,dy = \left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{3} +$$

$$+ (18y^3 - y^5)\Big|_{-1}^{0} = 62.$$



77- чизма

7- мисол. $I = \int\limits_{(3;\,4)}^{(5;\,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ интеграл ҳисоблансин. Координата боши O(0; 0) контурда жойлашган эмас.



78-чизма

Ечиш. Берилган интегралда $P = \frac{x}{x_9 + y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2 + d^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ бўлганлиги учун интеграл остидаги ифода $U(x,y) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + C$ функциянинг тўлиқ дифференциалидир. Шунинг учун интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмасдан, фақат йўлнинг бошидаги A (3; 4) ва охиридаги B (5; 12) нуқталарга боғлиқдир (78-чизма). (3.31) формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$I = \int\limits_A^B \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = U(x,y)\Big|_A^B = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{A\,(3;\,4)}^{B\,(5;\,12)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{13}{5}\right)^2 = \ln\frac{13}{5}.$$

8-мисол. $I = \int\limits_{(7;\,2;\,3)}^{(5;\,4;\,1)} \frac{zxdy + xydz - yzdx}{(x - yz)^2}$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин (интеграллаш контури $z = \frac{x}{y}$ сиртни кесиб ўтмайди).

Ечиш. (x, y, z) фазода берилган интегрални $I = \int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ деб белгиласак, $P = \frac{-yz}{(x-yz)^2}$, $Q = \frac{zx}{(x-yz)^2}$, $R = \frac{xy}{(x-yz)^2}$ бўлади. Энди биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-z}{(x-yz)^2} - \frac{2yz^2}{(x-yz)^3} = \frac{-(x+yz)}{(x-yz)^3},$$

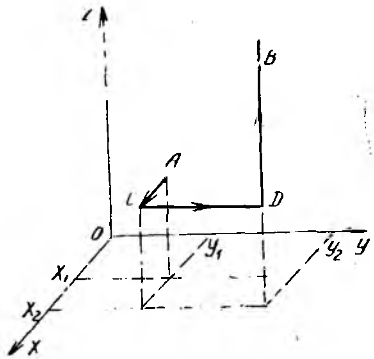
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z}{(x-yz)^2} - \frac{2zx}{(x-yz)^3} = -\frac{z(x+yz)}{(x-yz)^3},$$

яъни $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Шунга ўхшаш $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y(x+yz)}{(x-yz)^3}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x(x+yz)}{(x-yz)^3}$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу шартлар $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ ифода тўлиқ дифференциал бўлиши учун зарур ва етарлидир.

Энди фазода синиқ чизиқ $ACDB$ ни шундай танлаб оламизки, унинг AC, CD, DB кесмалари Ox, Oy, Oz ўқларига параллел бўлсин, яъни синиқ чизиқ A (x_1, y_1, z_1), C (x_2, y_1, z_1), D (x_2, y_2, z_1) ва

$B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталардан ўтсин (79-чизма). У ҳолда AC да $y = y_1$. $dy = 0$, $z = z_1$, $dz = 0$ ва x x_1 дан x_2 гача ўзгаради, CD да $x = x_2$, $dx = 0$, $z = z_1$, $dz = 0$ ва y ўзгарувчи y_1 дан y_2 гача ўзгаради; DB да $x = x_2$, $dx = 0$, $y = y_2$, $dy = 0$ ва z ў. гарувчи z_1 дан z_2 гача ўзгаради ва бу қийматлар учун



79-чизма

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{AC} \ldots + \int_{CD} \ldots + \int_{DB} \ldots =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P\,(x,\ y_1,\ z_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} Q\,(x_2,\ y,\ z_1)\,dy + \int_{z_1}^{h_2} R\,(x_2,\ y_2, z\,)\,dz \qquad (3.35)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулани интегрални ҳисоблаш учун татбиқ этамиз. $A\,(7;\,2;\,3)$, $B\,(5;\,4;\,1)$ нуқталар йўлнинг боши ва охири эканини назарда тутиб топамиз:

$$I = \int_7^5 P\,(x;\ 2;\ 3)\ dx + \int_2^4 Q\,(5;\ y;\ 3)\ dy + \int_3^1 R\,(5;\ 4;\ z)\ dz =$$

$$= -\int_7^5 \frac{6dx}{(x-6)^2} + \int_2^4 \frac{15\,dy}{(5-3y)^2} + \int_3^1 \frac{20\,dz}{(5-4z)^2} = \frac{6}{x-6}\Bigg|_7^5 + \frac{5}{5-3\,y}\Bigg|_2^4 +$$

$$+ \frac{5}{5-4z}\Bigg|_3^1 = -2.$$

9- мисол. $I = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$ интеграл ҳисоблансин; бу ерда L оддий ёпиқ контур бўлиб, $O\,(0;\,0)$ дан ўтмасдан координаталар боши $O\,(0;\,0)$ ни бир марта ўраб олган ва қуйидаги шартлар билан берилган:

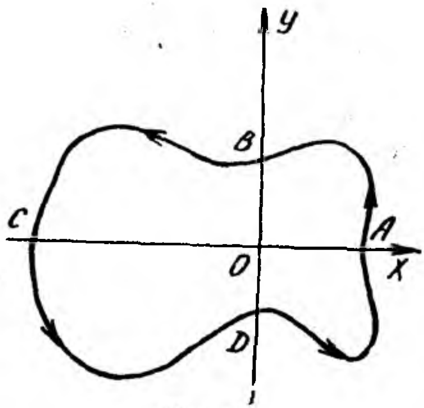
а) $r = r\,(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\,\pi$;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс контури;

в) учлари $A\,(-1;\,-1)$, $B\,(1;\,-1)$, $C\,(1;\,3)$ нуқталарда бўлган ABC учбурчак контури.

Ечиш. Интеграл остидаги ифода тўлиқ дифференциалдир, чунки

$$P = -\frac{y}{x^2 + 4y^2},\ Q = \frac{x}{x^2 + 4y^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}.$$



80- чизма

Лекин бу функциялар L контур билан чегараланган (D) соҳанинг O (0; 0) нуқтасида мавжуд эмас, яъни (D) соҳа бир боғламли эмас. Маълумки (D) соҳа бир боғламли бўлгандагина тўлиқ дифференциалдан олинган $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy$ эгри чизиқли интеграл нолга тенг. Берилган интегрални бевосита эгри чизиқ, яъни L контур бўйлаб ҳисоблаб чиқамиз:

а ҳол. L контур $r = r(\varphi)$ тенглама билан берилган. Қутб координаталар системасида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$, $dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$ ва интеграл остидаги ифода $\frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{r^2(\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi)} \cdot [r\cos\varphi\ (\sin\varphi\ dr + r\cos\varphi\ d\varphi) - r\sin\varphi\ (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)] = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}$ кўринишга эга.

1-усул. O (0; 0) ни контур бир марта ўраб олгани учун қутб бурчак φ 0 дан 2π гача ўзгаради (80-чизма) ва $\overset{\frown}{AB}$ да $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\overset{\frown}{BC}$ да $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$: $\overset{\frown}{CD}$ да $\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$; $\overset{\frown}{DA}$ да $\frac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ шартлар ўринли ва

$$I = \oint\limits_L \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \ldots + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} \ldots + \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} \ldots + \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} \ldots = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\Big].$$

Эслатиб ўтамизки, $\operatorname{arctg}A$ нинг бош қиймати $-\frac{\pi}{2}$ дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради; $A \to +\infty$ да $\operatorname{arctg}A \to \pi/2$; $A \to 0$ да $\operatorname{arctg}A \to 0$ ва $A \to -\infty$ да $\operatorname{arctg}A \to -\pi/2$. Шунинг учун $A = 2\operatorname{tg}\varphi$ деб, φ нинг қийматига боғлиқ ҳолда A нинг ишорасини ҳисобга олиб топамиз

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \pi:$$

2-усул. $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, бу ерда $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}$

$$I_2=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi},\quad I_3=\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos\ \varphi+4\sin^2\varphi},$$

$I_4=\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}$ деб оламиз ва I_2 да $t=\pi-\varphi$, I_3 да $t=$ $=\pi+\varphi$ ва I_4 да $t=2\pi-\varphi$ алмаштиришлар бажариб, I_1 кўриниш-даги интегралга келамиз. Натижада

$$I=4\cdot I_1=4\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}=2\cdot\operatorname{arc\,tg}\,(2\operatorname{tg}\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=\pi$$

бўлади.

б-ҳол. L контур $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдир. Ўзгарувчи x ни параметр деб L контурни иккита L_1 ва L_2 бўлакка ажратамиз:

L_1 да $y\geqslant 0$, яъни $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $dy=-\frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ва $a\geqslant x\geqslant -a$;

L_2 да $y\leqslant 0$, яъни $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $dy=\frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ва $-a\leqslant x\leqslant a$.

L_1 ва L_2 ёйлар учун интеграл остидаги ифодани ҳисобласак, улар фақат ишоралари билан фарқланади ва L_1 даги x нинг ўзгариш чегаралари ўрнини алмаштирсак, натижада иккита бир хил интегралга, келамиз:

$$I=2\int\limits_{-a}^{a}\frac{a^3\,b\,dx}{[x^2(a^2-4b^2)+4a^2b^2]\cdot\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Интеграл остидаги функция x ўзгарувчига нисбатан жуфт функция бўлгани учун $I=4\int\limits_0^a\frac{a^3b\cdot dx}{[x^2(a^2-4b^2)+4a^2b^2]\sqrt{a^2-x^2}}$ деб $x=a\sin t$ $\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2}}=dt$, $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$ алмаштириш бажарамиз:

$$I=4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a^3b\ dt}{a^2(a^2-4b^2)\sin^2t+4a^2b^2}=-2a\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\ (2b\operatorname{ctg}t)}{a^2+4b^2\operatorname{ctg}^2t}=$$

$$=-2\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2b\cdot\operatorname{ctg}t}{a}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi.$$

Кўрсатма: L контур учун эллипснинг $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ тенгламасини ёзиб, 1-ҳолдаги 2-усулдан фойдаланса ҳам бўлади.

в ҳол. L — ABC учбурчак контури. A $(-1; -1)$, B $(1; -1)$, C $(1; 3)$ нуқталардан тўғри чизиқлар ўтказиб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$L_1, \text{ яъни } AB \text{ да } \quad y=-1,\ dy=0, \quad -1\leqslant x\leqslant 1;$$
$$L_2, \text{ яъни } BC \text{ да } \quad x=1,\ dx=0, \quad -1\leqslant y\leqslant 3;$$
$$L_3, \text{ яъни } CA \text{ да } \quad y=2x+1,\ dy=2dx, \quad 1\geqslant x\geqslant -1.$$

Ҳисобланаётган интеграл учта интеграл йиғиндисига тенг, яъни $I=I_1+I_2+I_3$, бу ерда

$$I_1=I_{AB}=\int_{-1}^{1}\frac{x\cdot 0-(-1)\ dx}{x^2+4\cdot 1}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\Bigg|_{-1}^{1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2};$$

$$I_2=I_{BC}=\int_{-1}^{3}\frac{1\cdot dy-y\cdot 0}{1+4y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\ (2y)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{1}{2}\ (\operatorname{arctg}6+\operatorname{arc\,tg}2);$$

$$I_3=I_{CA}=\int_{+1}^{-1}\frac{x\cdot 2dx-(2x+1)\ dx}{x^2+4\ (2x+1)^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{17x^2+16x+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{17}{2}x+4\right)\Bigg|_{-1}^{+1}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{25}{2}+\operatorname{arctg}\frac{9}{2}\right).$$

I_3 интегралдаги $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{25}{2}$, $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{9}{2}$ бурчаклар $\frac{\pi}{4}$ дан каттадир, уларнинг йиғиндиси $\frac{\pi}{2}$ дан катта бўлиб, $y=\operatorname{arctg}x$ функциянинг бош қиймати чегарасидан чиқиб кетади. Шунинг учун $\operatorname{arctg}A+$ $+\operatorname{arctg}\frac{1}{A}=\frac{\pi}{2}$ $(A>0)$ тенгликка асосан $\frac{\pi}{4}$ дан кичик бўлган янги $\alpha_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{25}$, $\beta_1=\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$ бурчакларга ўтиб, $I_3=\frac{1}{2}\cdot\left[\pi-\right.$ $\left.-\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{25}+\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right)\right]$ [қийматни $\operatorname{arc\,tg}A+\operatorname{arc\,tg}B=\operatorname{arc\,tg}\frac{A+B}{1-AB}$ формулага асосан топамиз:

$$I_3=\frac{1}{2}\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{13}\right).$$

Демак, ҳисобланаётган интеграл учун топамиз:

$$I=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ (\operatorname{arc\,tg}6+\operatorname{arctg}2)+\frac{1}{2}\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\ \frac{4}{13}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}\right)+$$
$$+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{13}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{13}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\pi.$$

Шундай қилиб, уч ҳолда ҳам бир хил натижага келдик: $I=\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$ интегралнинг қиймати L контурга боғлиқ бўлмасдан, фақат интеграл остидаги ифодага боғлиқдир. Ҳосил бўлган π миқдор $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$ эгри чизиқли интегралнинг O (0; 0) нуқтадаги циклик ўзгармас миқдори дейилади.

Машқлар. Интеграл остидаги ифода тўлиқ дифференциал эканлигини текшириб, берилган эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин.

15.24. $\int\limits_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} xdx-y^2dy+zdz.$

15.25. $\int\limits_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx+zxdy+xy\,dz.$

15.26. $\int\limits_{(1;1)}^{(3;1)}\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ (интеграллаш йўли $y=-x$ тўғри чизиқни кесиб ўтмайди).

15.27. $\int\limits_{(1;1)}^{(4;4)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy.$

15-28. $\int\limits_{(1;1;e)}^{(e;e;e^2)}\frac{yzdx+xzdy+xydz}{xyz}.$

II. Қуйидаги учта мисолда берилган эгри чизиқли интеграллар тўрт хил ёпиқ контур бўйича ҳисоблансин:

а) L — эллипс: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; б) L — айлана: $x^2+y^2=25$:

в) L — $ABCD$ тўртбурчак контури: $A\,(-1;-1)$, $B\,(1;-1)$, $C\,(1;3)$, $D\,(-1;3)$; г) L — ABC учбурчак контури; $A\,(2;1)$, $B\,(-1;1)$, $C\,(-1;-2)$; (контур бир марта соат стрелкаси йўналишига қарши ўтилади):

15.29. $I=\oint\limits_L\frac{x\,dy-y\,dx}{9x^2+y^2}.$

15.30. $I=\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}.$

15.31. $I=\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$

15.32. $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)} (x+3y)\,dx + (y+3x)\,dy.$

15.33. $\int\limits_{AB} (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^2-5y^3)\,dy$, бу ерда $A\,(-2;-1)$, $B\,(3;\,0)$.

15.34. $\int\limits_{AB} [y\cos xy - 2x\cdot\sin\,(x^2-y^2)]\,dx + [x\cos xy + 2y \times$

$\times \sin\,(x^2-y^2)]\,dy$, бу ерда $A\left(\sqrt{\pi/3};\,\sqrt{\pi/3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

15.35. $\int\limits_{A(1;3)}^{B(-3;\,1)} \left[\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right]dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2}-y^2\right]dy.$

15.36, $\int\limits_{AB} (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$, бу ерда $A\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$.

15.37. $\int\limits_{AB} \frac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx + (x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$, бу ерда $A\,(1;\,1)$ ва $B\,(3;\,-2)$.

15.38. $\int\limits_{A(2;\,-3)}^{B\,(1;-2)} \frac{ydx - xdy}{3x^2-2xy+3y^2}.$

Энди интеграл остидаги ифода тўлиқ дифференциал эканлигига ишонч ҳосил қилиб, иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ёрдамида бошланғич функцияни излашга мисол кўрамиз. Юқорида кўрсатилган (3.33), (3.34) ва (3.35) мисоллардаги формулалардан фойдаланамиз.

Икки аргументли $U\,(x,y)=U$ функция тўлиқ дифференциали, яъни шу функция учун

$$P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\cdot dy = dU\,(x,y)$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу ҳолда $A\,(x_0,y_0)$ нуқта деб $P\,(x,y)$, $Q\,(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$. $\frac{\partial Q}{\partial x}$ функциялар узлуксиз бўлган бирор тайин нуқтани оламиз ва $B\,(x,y)$ деб шу функциялар узлуксиз бўлган ҳаракатланувчи нуқтани оламиз.

(3.33) дан фойдаланиб,

$$U = \int dU = \int\limits_A^B Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x} P\,(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\,dy + C \quad (3.36)$$

формулаларни , (3.34) дан фойдаланиб,

$$U\,(x,y) = \int\limits_A^B Pdx + Qdy = \int\limits_{y_0}^{y} Q\,(x_0,y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} P\,(x,y)\,dx + C \quad (3.37)$$

формулаларни келтириб чиқарамиз ($C=\mathrm{const}$).

Шунга ўхшаш, (x, y, z) фазода $A(x_0, y_0, z_0)$ ва $B(x, y, z)$ нуқталарни олиб, (3.35) формуладан $W(x, y, z)$ бошланғич функцияни топиш учун:

$$W(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\, dz + C \quad (3.38)$$

ёки
$$W(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\, dz + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx + C \quad (3.39)$$

(олдин Oz, кейин Oy ва охирида Ox ўқига параллел ҳаракатланганда) формулалардан фойдаланиш мумкин ($C = \mathrm{const}$).

Машқлар. Қуйидаги 10—15-мисолларда тўлиқ дифференциал бўйича бошланғич функция топилсин.

10-мисол. $dU = (3x^2 - 2xy + y^2)\, dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\, dy$.

Ечиш. $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ функциялар (x, y) текисликнинг барча нуқталарида узлуксиз. Шунинг учун (x_0, y_0) нуқта деб $O(0; 0)$ нуқтани олсак, бошланғич функцияни топиш осонроқ бўлади:

$$U(x, y) = \int_0^x P(x; 0)\, dx + \int_0^y Q(x, y)\, dy + C =$$

$$= \int_0^x 3x^2 dx - \int_0^y (x^2 - 2xy + 3y^2)\, dy + C = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 + C.$$

11-мисол. $dU = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\, dx - \frac{x^2 + \sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\, dy.$

Ечиш. $P = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad Q = -\frac{x^2 + \sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} =$ $= -\frac{x\cdot(x^2 + 2y^2)}{y^2\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$. Функциялар (x, y) текисликнинг $O(0; 0)$ нуқта ва $y = 0$ (Ox ўқи) тўғри чизиқ нуқталаридан ташқари барча нуқталарида узлуксиз функциялардир. Шунинг учун (x_0, y_0) нуқта деб Oy ўқидаги бирор $(0; y_0)$ $y_0 \neq 0$ нуқтани олиб, (3.37) формулага асосан ҳисоблаш мумкин:

$$U(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(0; y)\, dy + \int_0^x P(x, y)\, dx + C =$$

$$=\int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\, dy+\int_0^x \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\, dx+C=$$

$$=\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^x+C=$$

$$=\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-\operatorname{sgn} y+C=$$

$$=\frac{1}{y}\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)+C_1,$$

бу ерда C_1 деб натижадаги барча C, $\frac{1}{y_0}$, $\operatorname{sgn} y$ ўзгармас миқдорларнинг алгебраик йиғиндиси олинган.

12-мисол. $dW=\frac{yzdx+xzdy+xydz}{1+x^2y^2z^2}$.

Ечиш. $P(x, y, z)=\frac{yz}{1+x^2y^2z^2}$, $Q(x, y, z)=\frac{xz}{1+x^2y^2z^2}$, $R(x, y, z)=$ $=\frac{xy}{1+x^2y^2z^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{z-x^2y^2z^3}{(1+x^2y^2z^2)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{y-x^2y^3z^2}{(1+x^2y^2z^2)^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{x-x^3y^2z^2}{(1+x^2y^2z^2)^2}$$

функциялар (x, y, z) фазонинг барча нуқталарида узлуксиз, шунинг учун (x_0, y_0, z_0) нуқта деб $O(0; 0; 0)$ координаталар бошини оламиз. dW нинг суратидаги ифода ушбу

$$yzdx+xzdy+xydz=d(x\,y\,z)$$

тўлиқ дифференциалдан иборат бўлгани учун dW ни қуйидагича ёзиш мумкин: $dW=\frac{d(xyz)}{1+(xyz)^2}=d(\operatorname{arctg}(xyz))$. Бундан $W(x, y, z)=$ $=\int_{(0;0;0)}^{(x;y;z)} d(\operatorname{arctg}(x, y, z))=\operatorname{arctg}(xyz)+C$.

Масалани (3.38) формулага асосланиб ечиш ҳам мумкин:

$$W(x, y, z)=\int_0^x P(x; 0; 0)\, dx+\int_0^y Q(x, y, 0)\, dy+\int_0^z R(x, y, z)\, dz+C=$$

$$=\int_0^z \frac{xy\, dz}{1+x^2y^2z^2}+C=\operatorname{arctg}(xyz)+C$$

(биринчи ва иккинчи интеграллар нолга тенг).

13-мисол. $dW=\frac{2(zxdy+xydz-zydx)}{(x-yz)^2}$.

Ечиш. 8-мисолда бу ифода тўлиқ дифференциал эканлиги кўрсатилган. Интеграллаш контури $O(0; 0; 0)$ нуқтани, Oz ўқини ва

$z = \frac{x}{y}$ сиртни кесиб ўтмаслиги керак. Шунинг учун (x_0, y_0, z_0) нуқта деб (0; 1; 1) нуқтани оламиз ва (3.38) формулага асосан топамиз:

$$W(x, y, z) = \int_0^x P(x;\ 1;\ 1)\,dx + \int_1^y Q(x;\ y;\ 1)\ dy +$$

$$+ \int_1^z R(x, y, z)\ dz + C = -\int_0^x \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int_1^y \frac{2x}{(x-y)^2}\ dy +$$

$$+ \int_1^z \frac{2xydz}{(x-yz)^2} + C = \frac{2}{x-1}\Bigg|_0^x + \frac{2x}{x-y}\Bigg|_1^y + \frac{2x}{x-yz}\Bigg|_1^z + C =$$

$$= \frac{2x}{x-yz} + C.$$

14- мисол. $dW = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz.$

Ечиш. $P(x, y, z) = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}$, $Q(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}$, $R(x,y,z) = -\frac{xy}{z^2}$ ва улардан олинган $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y}{z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}$ хусусий ҳосилалар (x, z) $(y = 0)$ ва (x, y) $(z = 0)$ текисликлардаги нуқталарни, O (0; 0; 0) фазодаги координата бошини ўз ичига олмаган ҳар қандай (V) соҳада узлуксиз функциялардир. (V) соҳадаги (x_0, y_0, z_0) ва (x, y, z) нуқталар учун (3.38) формулани ишлатамиз:

$$W(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z)\ dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)\ dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)\,dz +$$

$$+ C = \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_0}{y^2}\right)dy - \int_{z_0}^z \frac{x_0 y_0}{z^2}\ dz + C =$$

$$= \left(x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}\right)\Bigg|_{x_0}^x + \left(\frac{x_0 y}{z} - \frac{x_0}{y}\right)\Bigg|_{y_0}^y + \frac{x_0 y_0}{z}\Bigg|_{z_0}^z + C =$$

$$= \left(x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} - x_0 + \frac{x_0}{y} - \frac{x_0 y}{z}\right) + \left(\frac{x_0 y}{z} - \frac{x_0}{y} -\right.$$

$$\left. - \frac{x_0 y_0}{z} + \frac{x_0}{y_0}\right) + \left(\frac{x_0 y_0}{z} - \frac{x_0 y_0}{z_0}\right) + C =$$

$$= x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} - x_0 + \frac{x_0}{y_0} - \frac{x_0 y_0}{z_0} + C =$$

$$= x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1.$$

15-мисол. $dW = (2xyz + \ln y)\,dx + \left(x^2z + \frac{x}{y}\right)dy + (x^2y - 2z)\,dz.$

Ечиш. $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар ва уларнинг хусусий ҳосилалари $y > 0$ соҳада аниқланган ва узлуксиз. Шунинг учун (x, z) текислигида ётмаган, Oy ўқининг мусбат йўналишидаги $A(0; 1; 0)$ нуқтани оламиз ва (3.38) формулага асосан бошланғич функцияни топамиз: $W(x, y, z) = \int_0^x P(x, 1, 0)\,dx + \int_1^y Q(x, y, 0)\,dy +$

$$+ \int_0^z R(x, y, z)\,dz + C = \int_0^x 0\cdot dx + \int_1^y \frac{x}{y}\,dy + \int_0^z (x^2y - 2z)\,dz + C =$$
$$= x\cdot\ln y + x^2yz - z^2 + C.$$

Машқлар. Берилган тўлиқ дифференциалга асосан бошланғич функциялар топилсин.

15.39. $dU = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}.$

15.40. $dU = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy.$

15.41. $dU = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$

15.42. $dW = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz.$

15.43. $dW = e^{y/z}dx + \left[\frac{e^{y/z}(x+1)}{z} + ze^{y/z}\right]dy +$
$+ \left[ye^{y/z} + e^{-z} - \frac{1}{z^2}\,y\,(x+1)\,e^{y/z}\right]dz.$

15.44. $dW = \frac{(x^2+y^2)\,dz - 2z\,(xdx + ydy)}{(x^2+y^2)^2}.$

15.45. $dW = \frac{z^2}{x^2y^2 + z^4}\left(ydx + xdy - \frac{2xy}{z}\,dz\right).$

15.46. $dU = (1 - \sin 2x)\,dy - (3 + 2y\cos 2x)\,dx.$

15.47. $dU = (e^{xy} + 5)\,(xdy + ydx).$

15.48. $dU = 4\,(x^2 - y^2)\,(xdx - ydy).$

15.49. $dU = (2x - 3y^2 + 1)\,dx + (2 - 6xy)\,dy.$

15.50. $dU = \frac{(3y - x)\,dx + (y - 3x)\,dy}{x+y}.$

15.51. $dU = \frac{y}{x^2}\cdot 3^{-y/x}\cdot dx - \frac{1}{x}\cdot 3^{-y/x}\cdot dy.$

15.52. $dW = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz.$

15.53. $dW = (yze^x + ze^y + ye^z)\,dx + (xze^y + ze^x + xe^z)\,dy +$
$+ (xye^z + ye^x + xe^y)\,dz.$

15.54. $dW = (2xyz + y^2z + yz^2)\,dx + (2xyz + x^2z + xz^2)\,dy +$
$+ (2xyz + x^2y + xy^2)\,dz.$

15.55. $dW = (15x^2y - 3z^2)\,dx + (5x^3 - 2yz)\,dy + (6xz - y^2)\,dz$

15.56. $dW = \frac{1}{y}\,z^{x/y}\ln z\,dx - \frac{x}{y^2}\,z^{x/y}\ln z\,dy + \frac{x}{y}\,z^{\frac{x}{y}-1}\,dz$

16- §. Грин формуласи. Юзларни ҳисоблаш

Ёпиқ L контур бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ва шу контур билан чегараланган (D) соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални боғловчи формула *Грин формуласи* деб аталади. Бу формула қуйидагича ёзилади:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (3.40)$$

Унда $P(x, y)$, $Q(x,y)$ функциялар ва уларнинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари (D) соҳада ва L контурда узлуксиз деб қаралади. Эгри чизиқли интегралда L контур бўйича интеграллаш мусбат йўналишда олинади (80- чизма). Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл орқали оддий бўлакли — силлиқ L контур билан чегараланган S юзани ҳисоблаш мумкин:

$$S = \oint_L xdy = -\oint_L ydx = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \qquad (3.41)$$

Қуйида келтирилган мисолларда интеграллашнинг ёпиқ L контури оддий бўлиб, мусбат йўналишда ўтилади (яъни контур бўйича кузатувчи шундай йўналишда ҳаракатланадики, L контур билан чегараланган (S) соҳанинг кузатувчига яқин қисми унинг чап томонида қолади) деб фараз қилинади.

16- мисол. Грин формуласи бўйича

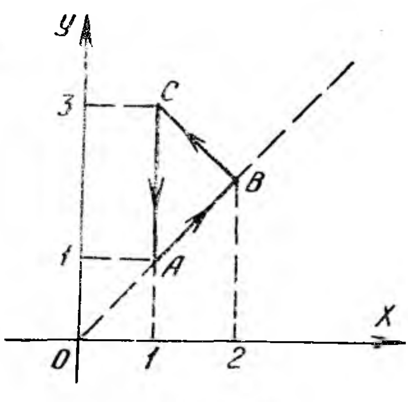
$$I = \oint_L 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$$

интеграл ҳисоблансин, бу ерда L — ABC учбурчак контури бўлиб, $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$. Чиққан натижани эгри чизиқли интегрални бевосита ҳисоблаб текширинг.

Ечиш. AB, BC, CA тўғри чизиқлар тенгламасини $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ тенглама ёрдамида топамиз:

$$AB: y = x, \quad BC: y = -x + 4,$$
$$AC: x = 1$$

(81- чизма). ABC учбурчак контури билан чегараланган (D) соҳа $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=4-x$ тўғри чизиқлар орасидадир. Бу маълумотлар икки каррали интегрални ҳисоблаш учун керак. Энди



81- чизма

$P=2(x^2+y^2)$, $Q=(x+y)^2$ учун $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ни топиб (3.40) Грин формуласига қўямиз ва топамиз:

$$I=\iint\limits_{(D)}[2(x+y)-4y]\,dxdy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{4-x}(x-y)\,dy=$$

$$=-\int\limits_1^2(x-y)^2\Big|_x^{4-x}dx=-\int\limits_1^2(2x-4)^2\,dx=-\frac{4}{3}.$$

Натижани текшириш учун эгри чизиқли интегрални бевосита ҳисоблаймиз: $\oint\limits_L Pdx+Qdy=\int\limits_{AB}\ldots+\int\limits_{BA}\ldots+\int\limits_{CA}\ldots$.

AB да $y=x$, $dy=dx$ ва x ўзгарувчи 1 дан 2 гача ўзгаради;

BC да $y=4-x$, $dy=-dx$ ва x ўзгарувчи 2 дан 1 гача ўзгаради;

CA да $x=1$, $dx=0$ ва y ўзгарувчи 3 дан 1 гача ўзгаради.

Шунинг учун $I=\int\limits_1^2[2(x^2+x^2)+(2x)^2]\,dx+$

$$+\int\limits_2^1[2(x^2+(4-x)^2)-16]\,dx+\int\limits_3^1(1+y)^2\,dy=$$

$$=\frac{8}{3}x^3\Big|_1^2+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}(4-x)^3-16x\right]\Big|_2^1+\frac{1}{3}(1+y)^3\Big|_3^1=-\frac{4}{3}.$$

Натижалар бир хил, бу эса Грин формуласи тўғри эканлигининг яна бир далилидир.

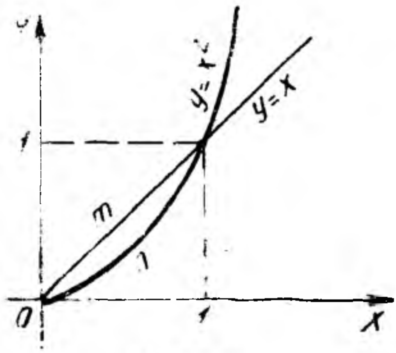
17-мисол. $\oint\limits_L(e^{xy}+2x\cos y)\,dx+(e^{xy}-x^2\sin y)\,dy$ интегрални L контур билан чегараланган (D) соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга келтиринг.

Ечиш. Мисолни ечиш учун Грин формуласидан фойдаланамиз. Қўрилаётган ҳолда $P(x,y)=e^{xy}+2x\cos y$, $Q(x,y)=e^{xy}-x^2\sin y$, ундан ҳосилалар оламиз: $\frac{\partial Q}{\partial x}=ye^{xy}-2x\sin y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=xe^{xy}-2x\sin y$. Энди (3.40) формулага асосан топамиз: $\oint\limits_L Pdx+Qdy=$

$$=\iint\limits_{(D)}[ye^{xy}-2x\sin y)-(xe^{xy}-2x\sin y)]^L\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}(y-x)\,e^{xy}\,dxdy.$$

18-мисол. Ушбу $I_1=\int\limits_{\overset{\frown}{OmB}}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$ ва $I_2=$

$=\int\limits_{\overset{\frown}{OnB}}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$ интеграллар орасидаги фарқ топилсин, биринчи интегралда $\overset{\frown}{OmB}$ $O(0;0)$ ва $B(1;1)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси, иккинчи интегралда $\overset{\frown}{OnB}$ $y=x^2$ парабола ёйидир.



82- чизма

Ечиш. Берилган интегралларга эътибор берсак, уларда интеграллаш йўли турлича бўлиб, интеграл остидаги ифодалар бир хил эканлигини кўрамиз. Уларнинг ҳар бирида $P(x, y)=(x+y)^2$, $Q(x, y)=-(x-y)^2$.

Энди I_2-I_1 айирмани ҳисоблаймиз (I_1 да интеграллаш йўналишини ўзгартирсак, интеграл ўз ишорасини ўзгартиради):

$$I_2-I_1=\int\limits_{\overset{\frown}{OnB}} Pdx+Qdy-\int\limits_{\overset{\frown}{OmB}} Pdx+Qdy=$$

$$=\int\limits_{\overset{\frown}{OnB}} Pdx+Qdy+\int\limits_{\overset{\frown}{BmO}} Pdx+Qdy=\oint\limits_{\overset{\frown}{OnBmO}} Pdx+Qdy.$$

Натижада $\overset{\frown}{OnBmO}=L$ дан иборат бўлган ёпиқ контур бўйича олинган битта $\oint\limits_L Pdx+Qdy$ эгри чизиқли интегралга келамиз (82- чизма).

Бу интегрални ҳисоблаш учун Грин формуласидан фойдаланамиз. Аввал содда ҳисоблашлар бажарамиз: $\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=$ $=-2(x-y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-4x$.

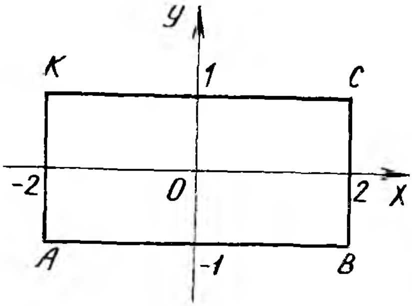
Натижада ушбу $I_2-I_1=\iint\limits_{(D)}(-4x)\,dx\,dy$ интеграл ҳосил бўлади.

Ёпиқ $\overset{\frown}{OnBmO}$ контур билан чегараланган (D) соҳа учун $0\leqslant x\leqslant 1$, $x^2\leqslant y\leqslant x$ муносабатлар ўринли. Энди I_2-I_1 айирмани ҳисобласа бўлади:

$$I_2-I_1=-4\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_{x^2}^{x} dy=-4\int\limits_0^1 x(x-x^2)\,dx=-\frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб, $I_2-I_1={}^1/_3$.

19- мисол. Ушбу $I=\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда L $O\,(0;0)$ нуқтадан ўтмайдиган оддий ёпиқ контур. 2 ҳол кўрилсин: 1) $O\,(0;0)$ нуқта контур ташқарисида жойлашган; 2) L контур $O\,(0;0)$ нуқтани ўраб олган.



83- чизма

Ечиш. 1) ҳол учун Грин формуласини ишлатиш мумкин. Содда ҳисоблашлар бажарамиз:

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + 4y^2},\ Q(x, y) = \frac{x}{x^2+4y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}.$$

Бу функциялар (D) соҳада ва L контурда узлуксиз. Шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$I = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_{(D)} 0 \cdot dx\,dy = 0.$$

2) ҳол учун Грин формуласини ишлатиб бўлмайди, чунки P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ функциялар (D) соҳанинг O (0; 0) нуқтасида узилишга эга. Лекин $\frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$ ифода тўлиқ дифференциал бўлганлиги учун интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига (контурга) боғлиқ эмас. Интеграллаш контури деб қулайлик учун $ABCK$ тўғри бурчакли тўртбурчак (83- чизма) контурини оламиз. Равшанки, AB да $y = -1$, $dy = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$; BC да $x = 2$, $dx = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; CK да $y = 1$, $dy = 0$, $2 \geqslant x \geqslant -2$; KA да $x = -2$, $dx = 0$, $1 \geqslant y \geqslant -1$. Энди (3.33) формулага кўра узил- кесил топамиз:

$$\oint\limits_{L} \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = \int\limits_{AB} \ldots + \int\limits_{BC} \ldots + \int\limits_{CK} \ldots + \int\limits_{KA} \ldots =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2dy}{4+4y^2} + \int\limits_{2}^{-2} \frac{-dx}{x^2 + 4} + \int\limits_{1}^{-1} \frac{-2dy}{4 + 4y^2} =$$

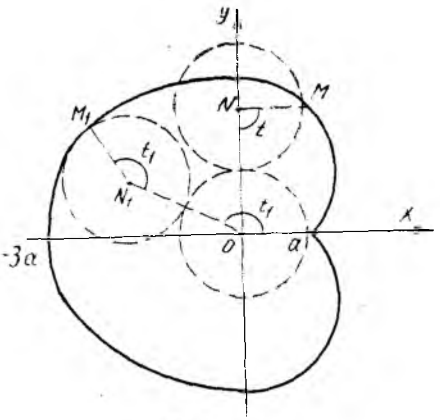
$$= 2\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Bigg|_{-2}^{2} + \operatorname{arctg} y\Bigg|_{-1}^{1} = \pi.$$

Натижада 1) ҳол учун $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ ва 2) ҳол учун $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \pi$ қийматларни ҳосил қилдик.

Энди эгри чизиқли интеграл ёрдамида юзни ҳисоблашга доир мисоллар кўрамиз.

20-мисол. Ушбу $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ кардиоида билан чегараланган юз топилсин.

Ечиш. Кардиоида эпициклоиданинг хусусий ҳолидир (84-чизма), параметр t эса ҳаракатланувчи айлана марказининг қутб бурчагидир. Шаклдан равшанки, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ бўлганда кардиоида ёйи тўла чизилади. Юзни ҳисоблаш учун $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$ формуладан фойдаланамиз ((3.41) формулага қ.).



84-чизма

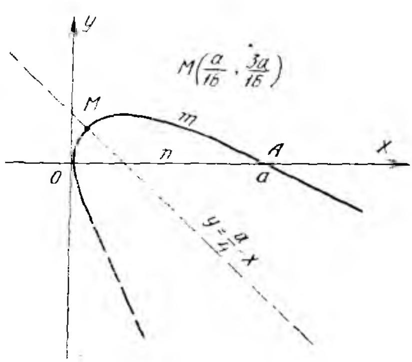
Кардиоида учун $dx = 2a(-\sin t + \sin 2t)\, dt$, $dy = 2a\ (\cos t - \cos 2t)\ dt$, $x\ dy - y\ dx = 2a^2[(2\ \cos\ t - \cos\ 2t)(\cos t - \cos 2t) - (2\sin t - \sin 2t)\ (\sin 2t - \sin t)]\, dt = 6a^2[1 - (\cos t\ \cos 2t + \sin\ 2t\ \sin\ t)]\, dt = 6a^2(1 - \cos\ t)\, dt.$

$$\text{Демак, } S = 3a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos\ t)\, dt = 6\,\pi a^2 \text{ (юз бирл.).}$$

21-мисол. Ушбу $(x+y)^2 = ax$ $(a > 0)$ парабола билан Ox ўқи орасидаги юз топилсин.

Ечиш. Параболанинг Ox ўқи $(y=0)$ билан кесишиш нуқталарини ушбу $(x+y)^2 = ax$, $y = 0$ тенгламалар системасидан топамиз. Бу нуқталарнинг координаталари $(0;\ 0)$ ва $(a;\ 0)$ экани равшан. Уларни $O(0;\ 0)$, $A(a;\ 0)$ деб белгилаймиз (85-чизма).

Изланган юзни ҳисоблаш учун $L = On\overset{\frown}{AmO}$ ёпиқ контур бўйича мусбат йўналишда ҳаракатланиш керак. Бу контур икки бўлакдан тузилган: $\overset{\frown}{OnA}$ да $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$ ва $x\ dy - y\, dx = 0$; $\overset{\frown}{Am\ O}$ да $y = \sqrt{ax} - x$, $dy = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} - 1\right) dx$, x ўзгарувчи a дан 0 гача ўзгаради ва $x\ dy - y\ dx = -\frac{1}{2}\sqrt{ax}\cdot dx$. Демак, юзни узил-кесил топамиз:



85-чизма

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\Big[\int_{\overset{\frown}{OnA}} \cdots + \int_{\overset{\frown}{AmO}} \cdots\Big] =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_a^0 \sqrt{ax}\,dx = -\frac{1}{6}\sqrt{a\,x^3}\,\Big|_a^0 = \frac{a^2}{6} \text{ (юз бирл.)}.$$

22- мисол. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ эгри чизиқ ва Ox, Oy координата ўқлари билан чегараланган соҳанинг юзи топилсин.

Ечиш. Ошкормас тенглама билан берилган эгри чизиқнинг графигини чизиш ва изланган юзни ҳисоблаш учун $y = tx$ алмаштириш ёрдамида эгри чизиқнинг параметрик тенгламасини топамиз. Равшанки, $x^3 + t^3\ x^3 = x^2(1 + t^2)$, $y = tx$. Шунинг учун берилган эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари

$$x = \frac{1 + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{t(1 + t^2)}{1 + t^3}$$

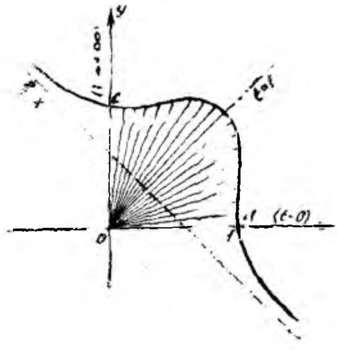
кўринишда ёзилади.

Таъкидлаймизки, $O\ (0; 0)$ — эгри чизиқнинг ажратилган нуқтаси. Эгри чизиқ Ox ўқ билан $t = 0$ бўлганда кесишади, бунга $A\,(1;\ 0)$ нуқта мос келади ва $t \to +\infty$ да $(x(t);\ y(t)) \to (0;\ 1)$ муносабат ўринли. Лимит нуқтани $C\,(0;\ 1)$ деб белгилаймиз. Эгри чизиқнинг оғма асимптотаси мавжуд ва у $y = -x + \frac{2}{3}$ тўғри чизиқдир (86- чизма). Изланаётган юз ёпиқ $L = \overset{\frown}{OABCO}$ контур билан чегараланган. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ эгри чизиқнинг $\overset{\frown}{ABC}$ ёйида t параметр 0 дан $+\infty$ гача ўзгаради; OA да эса $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ва $x\,dy - y\,dx = 0$; CO да $x = 0$, $dx = 0$, $1 \geqslant y \geqslant 0$ ва $x\ dy - y\ dx = 0$. Демак, OA ва CO бўйича олинган интеграллар нолга тенг ва $\oint_L x\,dy - y\ dx = \int_{\overset{\frown}{ABC}} x\ dy - y\ dx$, яъни юзни ҳисоблаш формуласини фақат $\overset{\frown}{ABC}$ ёй учун ишлатамиз. Эгри чизиқнинг $x = \frac{1 + t^2}{1 + t^3}$, $y = \frac{t(1 + t^2)}{1 + t^3}$ параметрик тенгламасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз: $dx = \frac{2t - 3t^2 - t^4}{(1 + t^3)^2}\,dt$, $dy = \frac{1 + 3t^2 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}\,dt$ ва $x\ dy - y\ dx = \frac{(1 + t^2)^2}{(1 + t^3)^2}\,dt$. Энди изланган юзни ҳисоблаймиз:

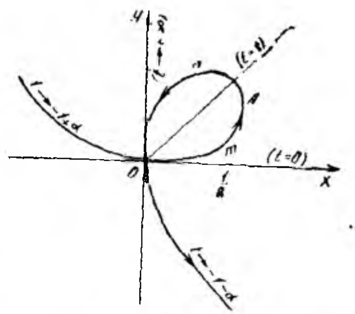
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1 + t^2)^2}{(1 + t^3)^2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^3)^2} + 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1 + t^3)^2}\,dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1 + t^3)^2}\,dt\Big] = \frac{1}{2}\big[I_1 + 2\ I_2 + I_3\big].$$

I_1, I_2, I_3 интегралларни ҳисоблаш учун Эйлер интегралларидан фойдаланамиз: $\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{(1 + t^n)^p}\,dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m + 1}{n};\ p - \frac{m + 1}{n}\right)$; $\left(0 < \frac{m + 1}{n} < p\right)$.



86- *чизма*



87- *чизма*

Эйлернинг $B\ (a,\ b)$ ва $\Gamma\ (x)$ функциялари $B\ (a,\ b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$;

$\Gamma\ (x)\cdot\Gamma\ (1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi\ x}$ хоссаларга эга. Шундан фойдаланамиз:

$$I_1 = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{3\cdot\Gamma\ (2)} = \frac{2}{9}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}};$$

$$I_2 = \frac{1}{3} B(1;\ 1) = \frac{\Gamma\ (1)\cdot\Gamma\ (1)}{3\cdot\Gamma\ (2)} = \frac{1}{3};$$

$$I_3 = \frac{1}{3} B\left(\frac{5}{3};\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Демак, $S = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$ (юз. бирл.)

23- мисол. $(x+y)^3 = xy$ эгри чизиқ билан чегараланган биринчи чоракдаги юз топилсин.

Ечиш. Олдинги мисолга ўхшаш, эгри чизиқнинг параметрик тенгламасини $y = tx$ алмаштириш орқали топамиз:

$$x = \frac{t}{(1+t)^3},\quad y = \frac{t^2}{(1+t)^3}.$$

Энди t нинг $t \neq -1$ қийматлари учун $(x,\ y)$ нуқталарни топиб, берилган эгри чизиқ графигини чизамиз (87- чизма). Эгри чизиқ координаталар бошидан икки марта ўтади, t параметр 0 дан $+\infty$ гача ўзгариб борганда эгри чизиқнинг $\overset{\frown}{OmAnO}$ ҳалқаси чизилади. Изланаётган биринчи чоракдаги S юз шу ҳалқа билан чегараланган шаклнинг юзидир. Энди формуладаги $xdy - ydx$ ифодани ҳисоблаб оламиз: $dx = \frac{1-2t}{(1+t)^4}dt$, $dy = \frac{2t-t^2}{(1+t)^4}dt$, $x\,dy - y\,dx = \frac{t^2}{(1+t)^6}\,dt$.

Ниҳоят, изланаётган юзни топамиз:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t)^6} = \frac{1}{2}B\ (3;\ 3) = \frac{\Gamma\ (3)\cdot\Gamma\ (3)}{2\cdot\Gamma\ (6)} = \frac{(2!)^2}{2\cdot 5!} = \frac{1}{60}\ \text{(юз бирл.)}.$$

Машқлар. 1. Грин формуласига ва юзларни ҳисоблашга доир мисоллар.

16.1. $\oint\limits_L (1-x^2)\,dx + x\,(1+y^2)\,dy$ интеграл L контур $x^2+y^2=R^2$ айлана бўлганда: а) Грин формуласи ёрдамида ва б) бевосита ҳисоблансин.

16.2. $\oint\limits_L (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$ интеграл: а) Грин формуласи ёрдамида ва б) бевосита ҳисоблансин. Унда ушбу икки ҳол кўрилсин:

1- ҳол L контур эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2- ҳол. L контур айлана: $x^2+y^2=ax$.

16.3. Қуйидаги $\int\limits_{\overset{\frown}{AmB}} 2\,xy\,dx - x^2\,dy$ ва $\int\limits_{\overset{\frown}{AmB}} 2\,xy\,dx - x^2\,dy$ эгри чизиқли интеграллар айирмаси топилсин. Биринчи интегралда $\overset{\frown}{AmB}$ — A $(-1;\ -3)$ ва B $(2;\ 0)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси; иккинчи интегралда $\overset{\frown}{AnB}$ — A ва B нуқталар орасидаги $y=2x-x^2$ парабола ёйидир.

16.4. Ушбу $\int\limits_{\overset{\frown}{AmO}} (e^x\sin y - 5y)\,dx + (e^x\cos y - 5)\,dy$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда $\overset{\frown}{AmO}$ — $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ айлананинг биринчи чоракда жойлашган ҳамда A $(a;\ 0)$ ва O $(0;\ 0)$ нуқталар орасидаги ёйидир.

16.5. Ушбу 1) $\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{9\,x^2+y^2}$; 2) $\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{4\,x^2+9\,y^2}$ ва

3) $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{px^2+qy^2}$ $(p>0,\ q>0)$ интеграллар ҳисоблансин, бу ерда L—координата боши O $(0;\ 0)$ дан ўтмайдиган оддий ёпиқ контур. Икки ҳол кўрилсин: а) O $(0;\ 0)$ нуқта контур ташқарисига жойлашган; б) L контур O $(0;\ 0)$ нуқтани ўраб олган.

16.6. $\oint\limits_L (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда L ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган контури.

16.7. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,\left[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда L — соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган тўртбурчак контури: $1 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$.

16.8. $\oint\limits_L \frac{xy\,(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда L—соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ лемнискатанинг ўнг япроғи.

16.9. Ҳисоблансин: $\oint\limits_{\overset{\frown}{AmBnA}} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, бу ерда $\overset{\frown}{AmB}$ — ўқи Ox бўлган парабола ёйи, $\overset{\frown}{BnA}$ эса A (1; 0) ва B (2; 3) нуқталар орасидаги ватар.

16.10. Ҳисоблансин: $\oint\limits_L (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, бу ерда L — соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган ABC учбурчак контури: A (1; 1), B (3; 2), C (2; 5).

16.11. Ҳисоблансин: $\oint\limits_L (1-x^2)\,y\,dx + x\,(1+y^2)\,dy$, бу ерда L — соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган $x^2+y^2 = R^2$ айлана ёйи.

16.12. Ҳисоблансин: $\oint\limits_L 2\,(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$, бу ерда L — учлари A (1; 1), B (2; 2), C (1; 3) нуқталарда бўлган учбурчак контури (соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган).

16.13. Ҳисоблансин: $\oint\limits_L (xy + 3x + 2y)\,dx + (xy + 3x - 2y)\,dy$, бу ерда L — соат миллари ҳаракатига тескари ўтилган $x^2+y^2 = -6x$ айлана ёйидир.

II. Қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган юза эгри чизиқли интеграл ёрдамида ҳисоблансин.

16.14. $(x^2+y^2)^2 = 2\,axy$ (лемниската).

16.15. $x = a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ (строфоида ҳалқаси).

16.16. $x^4+y^4 = x^2+y^2$, Ox ва Oy ўқлар орасидаги юза.

16.17. $x^3+y^3 = 3\,axy$, Декарт япроғининг ҳалқаси.

16.18. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

16.19. Ox ўқи билан $x = a\,(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a\,(2\sin t - \sin 2t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ эпициклоида орасидаги юза.

16.20. Ушбу $r = b + a\cos\varphi$, $a \geqslant b > 0$, эгри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин ($a = b$ да кардиоида чизиғи).

16.21. $9\,y^2 = 4\,x^3 - 4\,x^4$.

16.22. $x = a\sin t\cos^2 t$, $y = a\cos t\sin^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

16.23. $x = a\,(\cos t + t\sin t)$, $y = a\,(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ айлана эвольвентаси ҳамда Ox ўқдаги $A\,(a;\,0)$ ва $B\,(a;\,-2\pi a)$ нуқталар орасидаги кесма билан чегараланган юза

IV боб

СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Сирт интеграллари (I тур, II тур) ҳақидаги назарий материални тегишли адабиётдан пухта ўрганиб олиш керак. Хусусан, Г. М. Фихтенгольц уч жилдлик «Математик анализ асослари» китобининг 17-бобини ўзлаштириб олиш лозим. Шу бобда икки томонли сиртлар, сирт томони, сиртнинг томонини танлаш, сирт юзи I тур сирт интеграли, II тур сирт интеграли таърифлари берилган, уларни ҳисоблаш қоидалари кўрсатилган.

Қуйида ҳар бир мавзуга оид мисоллар кўрилганда биз назариядан қисқача маълумот бериб борамиз.

17-§. Биринчи тур сирт интеграллари

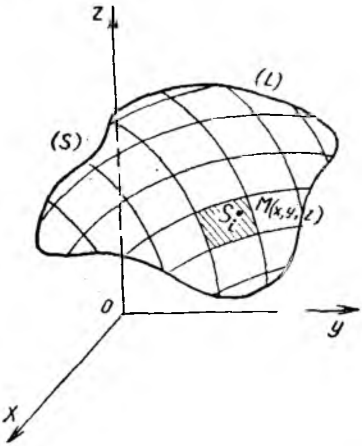
Бўлакли-силлиқ (L) контур билан чегараланган икки томонли бўлакли-силлиқ (S) сирт нуқталарида узлуксиз $f(M)=f(x, y, z)$ функция аниқланган бўлсин. (S) сиртни ихтиёрий тарзда ўтказилган бўлакли-силлиқ эгри чизиқлар тўри ёрдамида (S_1), (S_2), (S_3), . . . , (S_n) қисмларга ажратамиз. Ҳар бир (S_i) $(i=\overline{1, n})$ қисмда ихтиёрий M_i (x_i, y_i, z_i) нуқта олиб (88-чизма), функциянинг шу нуқтадаги $f(M_i)=f(x_i, y_i, z_i)$ қийматини ҳисоблаймиз ва уни сиртнинг тегишли қисми юзи ΔS_i га кўпайтириб,

$$\sigma(f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta S_i$$

интеграл йиғиндини тузамиз. Бу йиғиндининг барча (S_i) қисмларнинг диаметрлари нолга интилгандаги ($n\to\infty$ даги) чекли лимити (агар у мавжуд бўлса) $f(M)=f(x, y, z)$ функциядан (S) сирт бўйича олинган биринчи тур сирт интеграли дейилади ва

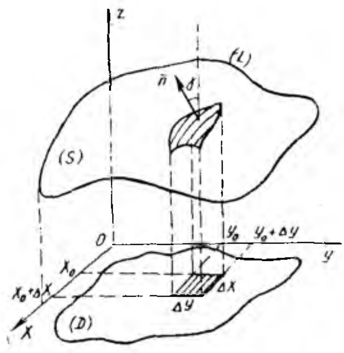
$$I=\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dS \qquad (4.1)$$

символ билан белгиланди (бу ерда dS — сирт дифференциали). Бу интегралнинг қиймати (S) сиртнинг қайси томони олинишига боғлиқ



88-чизма

эмас. Агар (S) сирт моддий деб фараз этилса ва $f(x, y, z)$ сиртнинг ҳар бир $M(x, y, z)$ нуқтасидаги модда зичлиги бўлса, у ҳолда (4.1) формула ёрдамида (S) сиртнинг массасини ҳисоблаш мумкин. I тур сирт интегралини ҳисоблаш учун уни одатдаги икки каррали интегралга келтириш керак. (S) сиртнинг берилиш усулига қараб сирт дифференциали dS ҳисобланади. Энди биз шу ҳисоблаш билан шуғулланамиз.



89- чизма

1. Силлиқ (S) сирт $z = z(x, y)$, $((x, y) \in D)$ тенглама билан (бу ерда $z(x, y)$ — бир қийматли узлуксиз дифференциалланувчи функция) берилган бўлиб, (D) соҳа эса (S) сиртнинг (x, y) текисликдаги проекцияси бўлсин. (S) сиртдаги тўрларни ихтиёрий равишда олиш мумкин бўлганлиги учун (S) сиртни (x, z) ва (y, z) координата текисликларига параллел бўлган $y = y_0$, $y = y_0 + \Delta y$, $x = x_0$, $x = x_0 + \Delta x$ текисликлар билан кесиб чиқамиз. (ΔS) сиртга ўтказилган $\bar{n}$ нормални шундай йўналишда оламизки, у Oz ўқи билан ўткир γ $(\cos\gamma > 0)$ бурчак ташкил этсин (89- чизма). Бу ҳолда $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$ ва сирт дифференциали учун $dS \cdot \cos\gamma = dx\, dy$ тенглик ўринли, яъни $dS = \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy$. Натижада (4.1) формуладаги интеграл қуйидаги кўринишларга келади:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \cdot dx\, dy \quad (4.2)$$

ва

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} \quad (4.3)$$

2. Шунга ўхшаш, силлиқ (S) сирт $x = x(y, z)$, $(y, z) \in (D_1)$ тенглама билан берилса (бу ерда (D_1) — (S) сиртнинг (y, z) текисликка туширилган проекцияси), сирт дифференциали $dS = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dy\, dz$ кўринишда ёзилади. Шу сабабли сирт интеграли учун қуйидаги кўринишларни ёзиш мумкин:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D_1)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dy\, dz \quad (4.4)$$

ва

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D_1)} f(x(y, z), y, z) \cdot \frac{dy\, dz}{|\cos\alpha|} \quad (4.5)$$

(бу ерда $\alpha = (\widehat{Ox, \bar{n}})$, яъни α — Ox ўқи билан $\bar{n}$ вектор орасидаги бурчак).

3. Энди силлиқ (S) сирт $y = y(x, z)$, $(x, z) \in (D_2)$ тенглама билан берилса, у ҳолда $dS = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\, dx\, dz$

ва $$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint_{(D_2)} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\, dx\, dz \quad (4.6)$$

ва $$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint_{(D_2)} f(x, y(x, z), z) \cdot \frac{dx\, dz}{|\cos\beta|} \quad (4.7)$$

формулалар ўринли. Бу ерда (D_2) — (S) сиртнинг (x, z) текисликдаги проекцияси, β эса $\bar{n}$ нормалнинг Oy ўқи билан ташкил этган бурчаги.

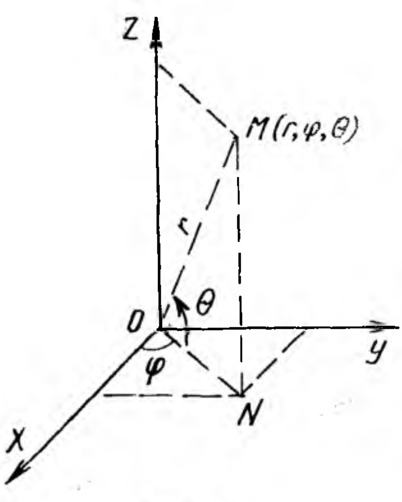
4. (S) сиртнинг тенгламаси эгри чизиқли (u, v) координаталар орқали $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ кўринишда берилган бўлса, у ҳолда dS сирт дифференциали Гаусс кооэффициентлари деб аталувчи

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

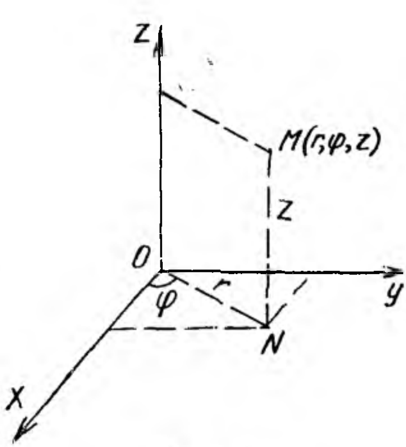
ифодалар орқали қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \quad (4.9)$$

5. Масалан, (x, y, z) фазода (r, φ, θ) сферик координаталар системаси (90-чизма), яъни ушбу $x = r \cos\varphi \cos\theta$, $y = r \sin\varphi \cos\theta$,



90-чизма



91-чизма

$z=r\sin\theta$ $(r\geqslant 0)$ муносабатлар олиниб, (S) сиртнинг тенгламаси $r=r(\varphi,\theta)$ кўринишда бўлсин. У ҳолда $E=r_{\varphi}'^{2}+r^2\cos^2\theta$, $G=r_{\theta}'^{2}+r^2$, $F=r_{\varphi}'\cdot r_{\theta}'$ тенгликларга эгамиз. Шунинг учун сирт дифференциали қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=r\sqrt{r_{\varphi}'^{2}+r_{\theta}'^{2}\cdot\cos^2\theta+r^2\cos^2\theta}\,d\varphi\,d\theta. \quad (4.10)$$

6. Энди (x, y, z) фазода (r, φ, z) цилиндрик координаталар системаси: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $r\geqslant 0$ (91-чизма) олиниб, (S) сиртнинг тенгламаси $z=z(r,\varphi)$ кўринишда бўлсин. У ҳолда $E=1+z_r'^2$, $G=r^2+z_{\varphi}'^{2}$, $F=z_{\varphi}'\cdot z_r'$

ва

$$dS=\sqrt{r^2+r^2\,z_r'^2+z_{\varphi}'^{2}}\,dr\,d\varphi. \quad (4.11)$$

7. Юқорида кўрсатилган (4.1) формулада $f(x, y, z)\equiv 1$ деб қабул қилинса, у ҳолда биринчи тур сирт интегралининг қиймати (S) сиртнинг юзига тенг бўлади:

$$S=\iint\limits_{(S)} dS. \quad (4.12)$$

Энди мисоллар кўришга ўтамиз.

1- мисол. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферанинг тўлиқ сирти топилсин.

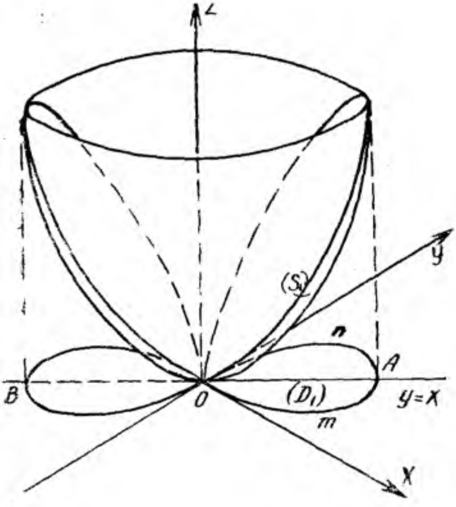
Ечиш. Сферик координаталар системасида сферанинг тенгламаси $r=R$ кўринишда ёзилади, бу ҳолда θ ва φ қуйидаги оралиқлардан қийматлар қабул қилади: $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. (4.10) формулага кўра $r_{\varphi}'=0$, $r_{\theta}'=0$, $r=R$ бўлганда $dS=R^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta$ формулани ҳосил қиламиз. Узил-кесил топамиз:

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\cos\theta\,d\theta=2\pi R^2\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\pi R^2(\text{юз бирл.}).$$

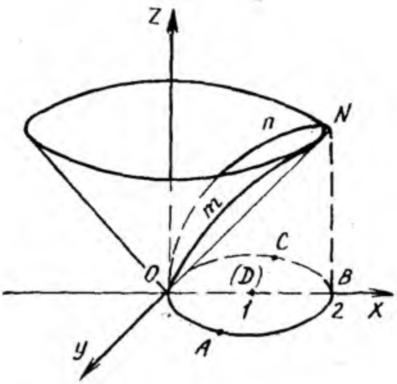
2- мисол. $x^2+y^2=2az$ параболоиднинг $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ цилиндрик сирт ичидаги қисми юзи топилсин.

Ечиш. Цилиндрик координаталар системасида параболоиднинг тенгламаси $z=\frac{1}{2a}r^2$ кўринишда бўлади. (S) сиртнинг (x, y) текисликдаги проекцияси $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ эгри чизиқ билан чегараланган биринчи ва учинчи квадрантдаги лемниската япроғидир: $r^4=2a^2r^2\sin\varphi\cos\varphi$, $r^2=a^2\sin 2\varphi$, $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

(D) соҳа $y=x$ биссектрисага нисбатан симметрик, (S) сирт ҳам ай-



92- *чизма*



93- *чизма*

ланма сиртдир (92- чизма). Шунинг учун (D_1), яъни $OmAO$ соҳа устидаги (S_1) сиртнинг юзини ҳисоблаб, натижани 4 га кўпайтирамиз: $S=4\cdot S_1$. Равшанки, (D_1) соҳада $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ ва $0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

dS ни топиш учун $z'_r=\frac{1}{a}r$, $z'_\varphi=0$ қийматларни (4.11) формулага қўямиз:

$$dS=\sqrt{r^2+r^2\cdot\frac{r^2}{a^2}}\,d\varphi\,dr=\frac{r}{a}\sqrt{a^2+r^2}\,d\varphi\,dr.$$

Шунга кўра топамиз:

$$S=4\cdot\iint\limits_{(S_1)}dS=\frac{4}{a}\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\sqrt{r^2+a^2}\,dr=$$

$$=\frac{4}{3a}\int_0^{\pi/4}(a^2+r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\cdot d\varphi=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/4}\left[\sqrt{(1+\sin 2\varphi)^3}-1\right]d\varphi=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\left[\int_0^{\pi/4}2\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{a^2}{9}(20-3\pi)\,(\text{юз бирл.}).$$

3- мисол. Ушбу $x^2+y^2=2x$ цилиндр ичида жойлашган $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конус сирти қисмининг юзи топилсин (93- чизма).

Ечиш. Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида конус тенгламаси $z = r$ $(r \geqslant 0)$ ва цилиндр тенгламаси $r^2 = 2r\cos\varphi$ ёки $r = 2\cos\varphi$ кўринишда бўлади. (D) соҳада $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi$ тенгсизликлар бажарилади. dS ни (4.11) формулага асосан ҳисоблаймиз (бунда, равшанки, $z'_\varphi = 0$, $z'_r = 1$):

$$dS = \sqrt{r^2 + r^2\cdot z_r'^2 + z_\varphi'^2}\, dr\, d\varphi = r\sqrt{2}\, dr\, d\varphi.$$

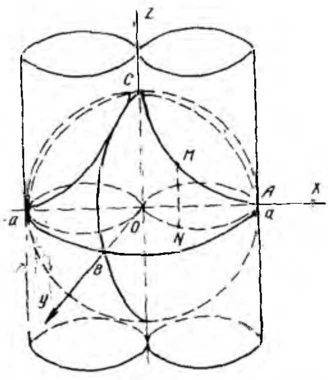
Энди изланган юзни ҳисоблаш мумкин:

$$S = \iint\limits_{(S)} dS = \iint\limits_{(D)} r\sqrt{2}\, dr\, d\varphi = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\, dr =$$

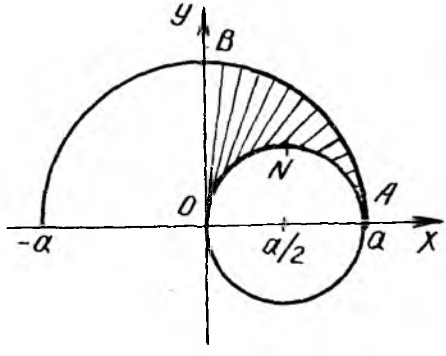
$$= 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sqrt{2}\,\pi \quad \text{(юз бирл.)}.$$

4-мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферанинг $x^2 + y^2 = \pm ax$ цилиндрлардан ташқаридаги қисмининг юзи топилсин (Вивиани масаласи).

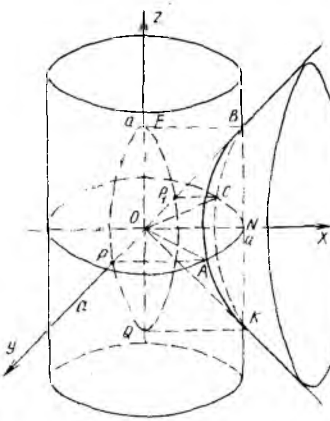
Ечиш. Цилиндрлар доиравий бўлиб, ясовчилари Oz ўқига параллел. Уларнинг йўналтирувчилари (x, y) текисликдаги марказлари $\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$ ва $\left(-\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$ нуқталарда ҳамда радиуслари $a/2$ га тенг бўлган айланалардир. Изланаётган юз 8 та тенг бўлакдан иборат, улардан биттаси, масалан, биринчи октантдаги $ABCMA$ контур билан чегараланган (S_1) нинг юзидир (94-чизма). Унинг (x, y) текисликдаги проекцияси $ONABO$ контур билан чегараланган (D_1) соҳадир (94-чизмада фақат $z \geqslant 0$ учун шакл чизилган). Демак, $S = 8S_1$, $S_1 = \iint\limits_{(S_1)} dS$. Цилиндрик координаталар системасида $z = \pm\sqrt{a^2 - r^2}$



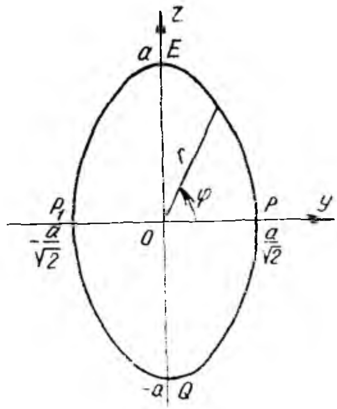
94-чизма



95-чизма



96- чизма



97- чизма

(сфера тенгламаси), $z'_\varphi = 0$, $z'_r = -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$ ($z \geqslant 0$ учун) муносабатларни ёзиш мумкин. Шунга кўра сирт дифференциалини ҳисоблаймиз: $dS = \sqrt{r^2 + r^2\cdot z_r'^2 + z_\varphi'^2}\, dr\, d\varphi = \frac{ar\, dr\, d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}$.

(D_1) соҳа ушбу $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $a\cos\varphi \leqslant r \leqslant a$ тенгсизликлар билан берилади (95- чизма), чунки цилиндрлардан ташқаридаги сиртнинг юзини ҳисоблаяпмиз. Энди бевосита ҳисоблашга ўтамиз:

$$S = 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = -8a\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-r^2}\Big|_{a\cos\varphi}^{a} \cdot dr =$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = 8a^2 \text{ (юз бирл.).}$$

5- мисол. Ушбу $y^2 + z^2 = x^2$ конуснинг $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичида жойлашган сирти юзи топилсин.

Ечиш. I усул. $y^2 + z^2 = x^2$ конус сирти учун Ox ўқи симметрия ўқидир. Фазонинг $x < 0$ қисмида ҳам конуснинг 96- чизмада кўрсатилган сиртга ўхшаш иккинчи бўлаги бор, чунки $x = \pm\sqrt{y^2+z^2}$ (S) сиртга ўтказилган перпендикуляр бирлик $\bar{n}$ вектор Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ўтмас α бурчак ташкил этади, демак $\cos\alpha < 0$ ва $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}}$. Ушбу $x = \sqrt{y^2+z^2}$ тенглама билан берилган (S) сирт учун

$$x'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad x'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$dS = \frac{dz\,dy}{|\cos\alpha|} = \sqrt{2}\;dy\,dz.$$

Энди (4.4) формулага асосан ($f(x, y, z) \equiv 1$ деб)

$$S = \iint\limits_{(D_1)} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\;dy\,dz = \iint\limits_{(D_1)} \sqrt{2}\;dy\,dz$$

юзни ҳисоблаймиз. (D_1) — (S) сиртнинг (y, z) даги проекцияси. Уни топиш учун цилиндр ва конус тенгламаларидан x ни йўқотамиз:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ x^2 + y^2 = a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 - y^2, \\ y^2 + z^2 = a^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow \frac{y^2}{a^2/2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

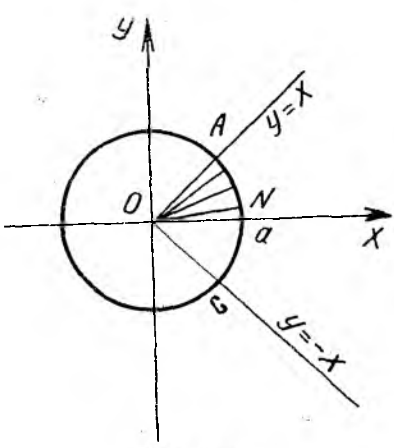
тенглама (y, z) текисликда (D_1) соҳанинг контуридан иборат бўлган эллипсни тасвирлайди (97- чизма). Икки каррали интегрални ҳисоблаш учун умумлаштирилган қутб координаталарига ўтамиз: $y = \frac{ar}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $z = ar\sin\varphi$. Тегишли якобиан $\frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}r$ дан иборат бўлиб, янги ўзгарувчилар учун қуйидаги (σ) соҳани топамиз:

$$(\sigma) = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\; 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Демак, $S = \iint\limits_{(D_1)} \sqrt{2}\,dy\,dz = \sqrt{2}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr = \pi a^2$ (юз бирл.)

Мисолда сўралган (S^*) сиртнинг юзини топиш учун ($x < 0$ лар учун ҳам олишимиз керак эди) натижани 2 га кўпайтирамиз: $S^* = 2S = 2\pi a^2$ (юз бирл.).

II усул. Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасига ўтсак, конус тенгламаси $z = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$, $z = \pm r\sqrt{\cos 2\varphi}$ бўлади. $OABO$ контур билан чегараланган (S_1) сирт юзи изланаётан (S^*) сиртнинг 8 дан бир бўлагини ((S) нинг эса 4 дан бир бўлагини) ташкил этади. (S_1) нинг (x, y) текисликдаги (D_1) проекцияси $OANO$ контур билан (98- чизма) чегараланган доира секторидир: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Конус тенгламасида $z = 0$ десак, $y = \pm x$ ни ҳосил қиламиз, демак, конус сирти (x, y) те-



98- чизма

кислик билан биринчи ва тўртинчи чорак биссектрисалари бўйлаб кесишади. Энди $z \geqslant 0$ учун ҳисоблашларни бажарамиз:

$$z = r\sqrt{\cos 2\varphi},\quad z'_\varphi = \frac{-r\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},\quad z'_r = \sqrt{\cos 2\varphi};$$

$$dS = \sqrt{r^2 + r^2 z_r'^2 + z_\varphi'^2}\,dr\,d\varphi = \left(r^2 + r^2\cos 2\varphi + \frac{r^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{1/2} dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{r\sqrt{1+\cos 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,dr\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}\cdot r\,|\cos\varphi|}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,dr\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}\cdot r\cos\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,dr\,d\varphi;$$

$$S_1 = \iint_{(S_1)} dS = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^a \frac{\sqrt{2}\cdot r\cos\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,dr =$$

$$= \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^a \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{d(\sqrt{2}\cdot\sin\varphi)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin\varphi)^2}} =$$

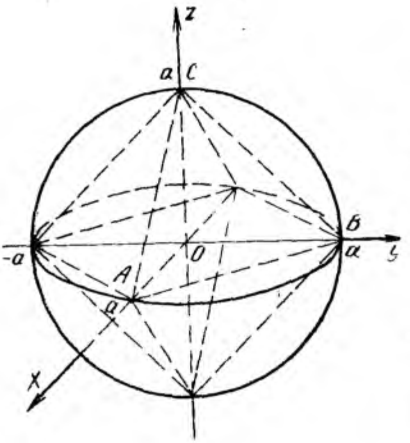
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi a^2}{4}\ \text{(юз бирл.)}.$$

Шундай қилиб, $S^* = 8\cdot S_1 = 2\pi a^2$ (юз бирл.).

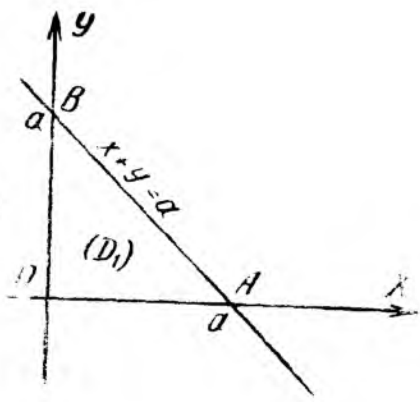
III усул. (S^*) сиртнинг тенгламасини $z = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$ кўринишда ёзиб, (4. 2) формуладан фойдаланамиз. I усулда белгиланган (S) сиртнинг ярми (x, y) текисликдан юқорида жойлашган, чораги эса, биринчи октантдаги (S_1) сиртни ташкил этади, унинг учун $z =$ $= \sqrt{x^2 - y^2}$, $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{2x^2}{x^2-y^2}$

$$\text{ва } dS = \frac{\sqrt{2}\cdot|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

(S_1) нинг проекцияси (x, y) текисликда биринчи чоракдаги $OANO$ шаклдаги доира сектори бўлади. Конус сирти (x, y) текисликни $y = x$, $y = -x$ тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. (D_1) соҳа $x^2 +$ $+ y^2 = a^2$, $y = x$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$) чизиқлар билан чегараланган. S_1 юз учун ушбу $S_1 = \iint_{(S_1)} dS = \iint_{(D_1)} \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy$ икки каррали интегралга эгамиз. Уни ҳисоблаш учун қутб координаталарига $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$ формулалар орқали ўтиб, (D_1)соҳани $(\sigma) = \{(r, \varphi): 0 \leqslant r \leqslant a,$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\}$ соҳага акслантирамиз. Натижада юқоридаги икки каррали интеграл ушбу $S_1 = \sqrt{2}\iint_{(\sigma)} \frac{r\cos\varphi\,dr\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} \times$ $\times \int_0^a r\,dr$ такрорий интегралга келади. Юқорида бу интеграл ҳисоб-



99- чизма



99а- чизма

ланган: $S_1 = \frac{1}{4}\pi a^2$. Бутун (S^*) сирт учун $S^* = 8\cdot S_1 = 2\pi a^2$ ифодага эга бўламиз.

6- мисол. Ушбу $I_1 = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\,dS$ ва $I_2 = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2+z^2)\,dS$ сирт интеграллар ҳисоблансин, бу интегралларда (S) — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ сирти, (P) — шу сферага ички чизилган $|x|+|y|+|z|=a$ октаэдрнинг сирти. Бу интеграллар айирмаси ҳам топилсин.

Ечиш. I_1 интегрални ҳисоблаш учун сферик координаталарга ўтамиз: $x = r\cos\varphi\,\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\,\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ ва $dS = \sqrt{r_\varphi'^2 + r_\theta'^2\cdot\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta}\cdot r\,d\varphi\,d\theta$ (4.10) формуладан фойдаланамиз (1-мисолдаги натижага қаранг). Берилган сфера учун $r=a$, $dS = a^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ва берилган функция $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2 = a^2$ кўринишда бўлади. Демак, $I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^4\cos\theta\,d\theta = 2\pi a^4\sin\theta\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi a^4$.

Энди иккинчи интегрални ҳисоблаймиз. x, y, z ларнинг ишорасини тескари (қарама-қарши) га ўзгартирганда $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ функциянинг қиймати ўзгармайди. Октаэдр эса (x, y), (y, z), (z, x) координаталар текислигига нисбатан симметрикдир (99- чизма). Шунинг учун I октантдаги учбурчакнинг $ABCA$ контури билан чегараланган $x+y+z=a$ текислик қисми (S_1) учун интегрални ҳисоблаймиз ва натижани 8 га кўпайтирамиз:

$$I_2 = 8\cdot\iint\limits_{(S_1)} (x^2+y^2+z^2)\,dS.$$

(S_1) нинг (x, y) даги проекцияси $\Delta\,AOB$ нинг юзи (D_1) дир (99 a- чизма), яъни $(D_1)=\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a-x\}$. Энди (S_1) учун $z=a-x-y$, $z'_x=-1$, $z'_y=-1$ ва $dS=\sqrt{1+1+1}\ dx\ dy=\sqrt{3}dx\ dy$. Ниҳоят, I_2 ни ҳисоблаймиз:

$$I_2=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}\sqrt{3}\,[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\,dy=$$

$$=8\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}\left(a-x-y\right)^3\right]\Bigg|_0^{a-x}\cdot dx=$$

$$=8\sqrt{3}\int_0^a\left[ax^2-x^3+\frac{2}{3}\left(a-x\right)^3\right]dx=2\sqrt{3}\,a^4.$$

Олинган натижаларга асосан I_1-I_2 айирмани топамиз:

$$I_1-I_2=4\pi a^4-2\sqrt{3}\,a^4=2a^4(2\pi-\sqrt{3}).$$

7-мисол. Ушбу $I=\iint\limits_{(S)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — тетраэдрнинг чегараси:

$$x+y+z\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

Ечиш. Интеграллаш сирти (100-чизма) тўртта сирт: $ABCA$ контур билан чегараланган (S_1), $OABO$ контур билан чегараланган (S_2), $OACO$ контур билан чегараланган (S_3), $OBCO$ контур билан чегараланган (S_4) сиртлардан тузилган.

Демак, $I=I_1+I_2+I_3+I_4=\iint\limits_{(S_1)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}+\iint\limits_{(S_2)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}+$
$+\iint\limits_{(S_3)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}+\iint\limits_{(S_4)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}.$

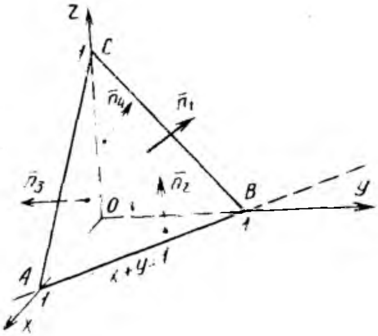
(S_1) сиртда $z=1-x-y$, $z'_x=-1$, $z'_y=-1$, $dS=\sqrt{3}\,dx\,dy$ ва (S_1) нинг (x, y) текисликдаги проекцияси $\triangle AOB: 0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1-x$. I_1 ни ҳисоблаймиз:

$$I_1=\iint\limits_{(S_1)}\frac{dS}{(x+y+1)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=$$

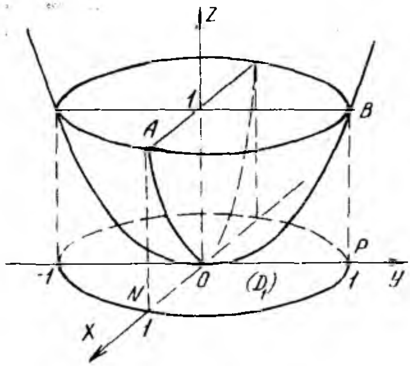
$$=-\sqrt{3}\int_0^1\frac{dy}{(1+x+y)}\Bigg|_0^{1-x}=-\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx=-\frac{\sqrt{3}}{2}+$$
$+\sqrt{3}\cdot\ln 2.$

(S_2) сирт учун қуйидаги шартлар бажарилган: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1-x$, $z=0$, $dS=\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}$, $|\cos\gamma|=1$, чунки $\bar{n}_2$ вектор (x, y) текисликка перпендикуляр. Шунга кўра

$$I_2=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=-\frac{1}{2}+\ln 2.$$



100-чизма



101-чизма

(S_3) сирт учун эса $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1-x$, $y=0$ ва $|\cos\beta| = 1$ $(\bar n_3 \perp xOz)$, $dS = \dfrac{dx\,dz}{|\cos\beta|} = dx\,dz$. Демак, $I_3 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \dfrac{dz}{(1+x)^2} =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}\, z \Bigg|_0^{1-x} = z\int\limits_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^2}\,dx = \left(-\frac{2}{1+x} - \ln|1+x|\right)\Bigg|_0^1 = 1-\ln 2.$$

Шунга ўхшаш, (S_4) сирт учун $x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1-y$, $|\cos\alpha| = 1$ $(\bar n_4 \perp yOz)$, $dS = dy\,dz$ ва $I_4 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} \dfrac{dz}{(1+y)^2} = 1-\ln 2$.

Энди берилган сирт интеграл учун узил-кесил топамиз: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\ln 2\right) + \left(-\dfrac{1}{2} + \ln 2\right) + (1-\ln 2) \times 2 = (\sqrt{3}-1)\ln 2 + \dfrac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})$.

8-мисол. Ушбу $I = \iint\limits_{(S)} |xyz|\, dS$ сирт интеграл ҳисоблансин, бу ерда (S) — $z = x^2+y^2$ сиртнинг $z=1$ текислик билан ажратилган қисми.

Ечиш. $z = x^2+y^2$ параболоид айланма сиртдир, унда $z \geqslant 0$, демак, интеграл остидаги функция $f(x, y, z) = z\cdot|xy|$ кўринишда ёзилиши мумкин. Тўртта октантда олинган $M_1(x, y, z)$, $M_2(-x, y, z)$, $M_3(-x, -y, z)$, $M_4(x, -y, z)$ нуқталарда бу функциянинг қиймати ўзаро тенг, шунинг учун интеграллашни I октантда (унда $f(x, y, z = xyz)$ олиб борамиз ва натижани 4 га кўпайтирамиз: $I = 4\cdot I_1$, бу ерда $I_1 = \iint\limits_{(S_1)} xyz\, dS$, (S_1) эса I октантдаги параболоид сиртининг $AOBA$ контур билан чегараланган қисмидир (101-чизма). Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасига ўтсак (S_1) нинг параметрик тенгламаси ушбу $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ кўринишда бўлади. (S_1) нинг (x, y) даги проекцияси $x^2 + y^2 \leqslant 1$ доиранинг чорагидир, уни биз (D_1) деб белгилаб оламиз. (S_1) сирт учун $z'_\varphi = 0$, $z'_r = 2r$, $dS = \sqrt{r^2 + r^2 \cdot z_r'^2 + z_\varphi'^2}\, dr\, d\varphi = r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr\, d\varphi$ ва $I_1 = \iint\limits_{(D_1)} r^5\sqrt{1 + 4r^2}\ \sin\varphi\ \cos\varphi\ dr\ d\varphi$.

Энди бу икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi \int_0^1 r^5\sqrt{1 + 4r^2}\ dr =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^1 r^5\sqrt{1 + 4r^2}\ dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^5\sqrt{1 + 4r^2}\ dr.$$

Охирги аниқ интегрални ҳисоблаш учун $\sqrt{1 + 4r^2} = t$ алмаштириш бажарамиз, $r^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 1)$, $rdr = \frac{1}{4}tdt$, $t_1 = 1$, $t_2 = \sqrt{5}$.

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{32}(t^2 - 1)^2 \cdot t \cdot \frac{1}{4}tdt = \frac{1}{2^7}\int_1^{\sqrt{5}} t^2(t^2 - 1)^2\, dt = \frac{125\sqrt{5} - 1}{2^4 \cdot 105}.$$

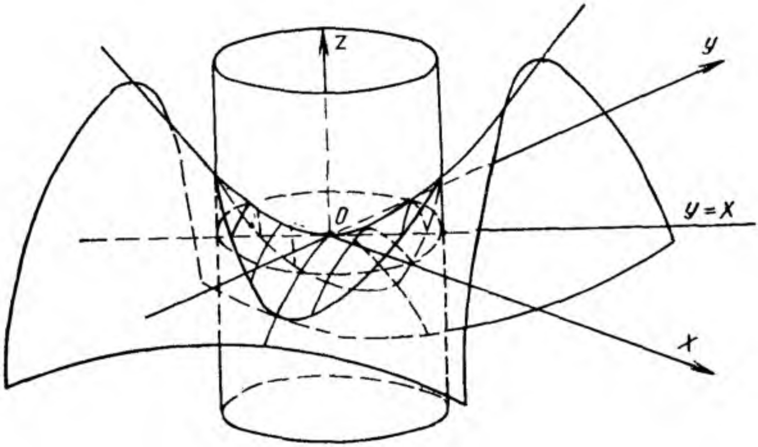
Шундай қилиб, $I = 4I_1 = \frac{1}{420}(125\sqrt{5} - 1)$.

Юқоридаги мисолни ечишда ушбу $\iint\limits_{(S)} f\ (x,\ y,\ z)\ dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy$ формуладан фойдаланса ҳам бўлади ((4.2) формулага қаранг). (S_1) учун $z = x^2 + y^2$, $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ dx\ dy$ ва юқоридаги фикрларга асосан ушбу $I_1 = \iint\limits_{(D_1)} xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\ dx\ dy$ икки каррали интегрални ҳосил қиламиз, бу ерда $(D_1) = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Лекин уни ҳисоблаш учун (x, y) текисликда ушбу $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$ қутб координаталарига ўтиб, аввал ҳисобланган (I_1 деб белгиланган) интегралга келамиз.

9-мисол. Ушбу $I = \iint\limits_{(S)} \frac{dS}{r}$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $z = xy$ гиперболик параболоид сиртининг $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндр билан ажратилган қисми, r эса сиртдаги нуқтадан Oz ўқигача бўлган масофа.

Ечиш. (x, y, z) декарт координаталар системасида фазодаги $M(x, y, z)$ нуқтадан Oz ўқигача бўлган масофа $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(S) сирт $z = xy$ тенглама билан берилган, унинг симметрия текис-



102- чизма

ликлари $y = x$ ва $y = -x$ текисликлардир (102- чизма). Ушбу $z'_x = y$, $z'_y = x$, $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ифодалардан фойдаланиб, берилган сирт интегралини $I = \iint\limits_{(D)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$ икки каррали интегралга келтирамиз, бу ерда (D) соҳа (S) сиртнинг (x, y) текисликдаги проекцияси. (D) соҳа (x, y) текисликдаги $x^2 + y^2 \leqslant \leqslant R^2$ доира билан устма- уст тушади. Энди $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$ алмаштиришлар бажариб, янги $(\sigma) = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$ соҳада интеграллашни бажарамиз: $I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\, r\, dr\, d\varphi =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi \left[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2}\ln\left| r + \sqrt{1+r^2} \right| \right] \Big|_0^R =$$

$$= \pi \left[R\sqrt{1+R^2} + \ln\left(R + \sqrt{1+R^2}\right) \right].$$

10- мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ шар сирти I октантдаги қисмининг Oz ўқига нисбатан инерция моменти ҳисоблансин.

Ечиш. Oz ўқига нисбатан инерция моменти

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\, dS \qquad (4.13)$$

формула бўйича ҳисобланади. Маълумки, (S) сирт ошкормас $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \tag{4.14}$$

ва $dS = \dfrac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}$ формулалар татбиқ этилади. Демак, биз кўраётган мисолда:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z,$$

$$dS = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dx\,dy = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \ (z>0) \text{ ва}$$

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{(D)} \frac{a(x^2+y^2)}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy,$$

бу ерда (D) — (x, y) текисликдаги доиранинг биринчи чораги, яъни $(D) = \{(x, y): x^2+y^2 \leqslant a^2,\ x>0,\ y>0\}$. Интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталар системасига ўтамиз. (D) соҳада: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$,

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r \text{ ва } I = a\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,rdr =$$

$$= \frac{a\pi}{2}\int\limits_0^a \frac{a^2-(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}\,rdr = \frac{a\pi}{2}\left[-a^2\sqrt{a^2-r^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{a^2-r^2})^3}{3/2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{\pi a^4}{3}.$$

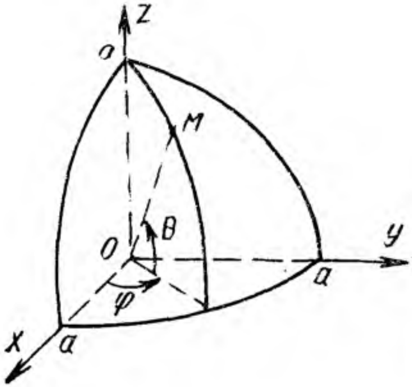
Лекин бу мисолни ечишда (r, φ, θ) сферик координаталарга ҳам ўтиш мумкин. У ҳолда (S) сирт қуйидагича тавсифланади (103-чизма): $(S) = \left\{(r, \varphi, \theta): r = a,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ ва $dS = r^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta = a^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta$ (1-мисолга қаранг). Сферик сиртнинг параметрик тенгламалари: $x = a\cos\varphi\cos\theta$, $y = a\sin\varphi\cos\theta$, $z = a\sin\theta$. Шу билан бирга $x^2+y^2 = a^2\cos^2\theta$. Демак, $I_z =$

$$= \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dS = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\cdot a^2\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}a^4\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{3}.$$

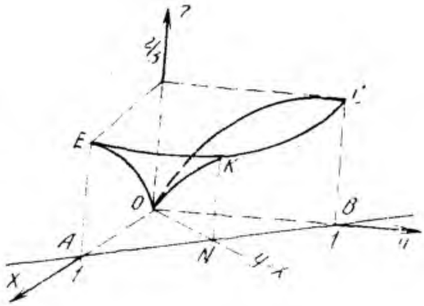
11-мисол. Ушбу $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ текисликлар билан чегараланган $3z = 2(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$ сирт қисмининг оғирлик маркази топилсин.

Ечиш. $M(x_c, y_c, z_c)$ — сиртнинг оғирлик маркази десак, у ҳолда

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(S)} \rho\cdot x\,dS}{\iint\limits_{(S)} \rho\,dS} = \frac{I_2}{I}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(S)} \rho y\,dS}{\iint\limits_{(S)} \rho\,dS} = \frac{I_3}{I}, \quad z_c = \frac{\iint\limits_{(S)} \rho z\,dS}{\iint\limits_{(S)} \rho\,dS} = \frac{I_1}{I} \tag{4.15}$$



103- чизма



104- чизма

формулалар ўринли, бу ерда $\rho=\rho(x, y, z)$—(S) сиртнинг ҳар бир (x, y, z) нуқтасидаги модда зичлиги. Мисолда зичлик ρ ҳақида ҳеч нарса айтилмаган, демак $\rho=1$, яъни сиртни бир жинсли деб қараш мумкин. Берилган $z=\frac{2}{3}(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})$ сиртнинг барча нуқталари I октантда бўлади, чунки $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ да z мавжуд (104- чизма). Берилган сирт (y, z) $(x=0)$ текислик билан $z=\frac{2}{3}y^{3/2}$ ярим кубик парабола ва (x, z) $(y=0)$ текислик билан $z=\frac{2}{3}x^{3/2}$ ярим кубик парабола чизиқлари бўйича кесишади.

$x+y=1$ текислик сиртни EKC эгри чизиқ бўйича кесиб ўтади. $E\left(1;\ 0; \frac{2}{3}\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $C\left(0;\ 1;\ \frac{2}{3}\right)$. Мисолда $EKCOE$ контур билан чегараланган (S) сиртнинг оғирлик маркази $M(x_c, y_c, z_c)$ сўралган. Албатта, (S) сирт $y=x$ текисликка симметрик бўлгани учун $x_c=y_c>0$, $z_c>0$ бўлади. (S) нинг (x, y) текисликдаги проекцияси $ANBOA$ контур билан чегараланган учбурчак сатҳидир: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1-x$. (S) соҳа учун $z=\frac{2}{3}(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})$, $z'_x=\sqrt{x}$, $z'_y=\sqrt{y}$. $dS=\sqrt{1+x+y}\,dx\,dy$ муносабатлар ўринли. Энди масалани ечиш учун ушбу

$$x_c=\frac{1}{m}\iint_{(S)} x\,dS,\quad y_c=\frac{1}{m}\iint_{(S)} y\,dS,\quad z_c=\frac{1}{m}\iint_{(S)} z\,dS,\quad m=\iint_{(S)} dS$$

сирт интегралларини ҳисоблаш лозим.

$$1)\ m=\iint_{(S)} dS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{1+x+y}\,dy=\frac{2}{3}\int_0^1\left(\sqrt{1+x+y}\right)^3\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1[2\sqrt{2}-(1+x)^{3/2}]\,dx=\frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\,x-\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right]\Big|_0^1=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1).$$

2) $x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}x\,dS=\frac{1}{m}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{1+x+y}\,dy=\frac{2}{3m}\int_0^1 x\,[2\sqrt{2}-$

$$-(1+x)^{3/2}]\,dx=\frac{1}{m}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 x\cdot(1+x)^{3/2}\,dx\right]=$$

$=\frac{1}{m}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}\cdot I_1\right)$, бу ерда $I_1=\int_0^1 x\cdot(1+x)^{3/2}\,dx$. Уни $\sqrt{1+x}=$ $=t,\quad x=t^2-1,\quad dx=2t\,dt,\quad t_1=1,\quad t_2=\sqrt{2}$ алмаштириш бажариб топамиз: $I_1=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\,t^3\cdot 2t\,dt=2\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=$ $=\frac{4}{35}(6\sqrt{2}+1)$.

Демак,

$x_c=\frac{1}{m}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{105}\left(6\sqrt{2}+1\right)\right]=\frac{26-15\sqrt{2}}{14}$ ва $y_c=x_c=\frac{1}{14}(26-$ $-15\sqrt{2})$. Энди z_c ни ҳисоблаймиз: $z_c=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}z\,dS=\frac{2}{3m}\iint\limits_{(D)}(x^{3/2}+$

$$+y^{3/2})\sqrt{1+x+y}\,dx\,dy=\frac{2}{3m}\left[\int_0^1 x^{3/2}\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{1+x+y}\,dy+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}y^{3/2}\sqrt{1+x+y}\,dy\right].$$

Иккинчи интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирсак, $\int_0^1 dy\int_0^{1-y}y^{3/2}\sqrt{1+x+y}\,dx$ интегралга келамиз, унинг қиймати биринчи интегралга тенг.

Демак, $z_c=\frac{4}{3m}\int_0^1 x^{3/2}\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{1+x+y}\,dy=$

$$=\frac{4}{3m}\int_0^1 x^{3/2}\times\frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}-(1+x)^{3/2}\right]dx=\frac{8}{9m}\left[2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1-\right.$$

$\left.-\int_0^1 x^{3/2}(1+x)^{3/2}\,dx\right]=\frac{8}{9m}\left[\frac{4\sqrt{2}}{5}-I^*\right]$, бу ерда $I^*=$ $=\int_0^1 x^{3/2}(1+x)^{3/2}\,dx$.

Бу ерда I^* интегрални ҳисоблашда дифференциал бином формуласидан фойдалансак, хосмас $\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t,\ t_1=+\infty,\ t_2=\sqrt{2}\right)$ интегрални ҳисоблашимиз керак бўлади. Биз тригонометрик алмаштириш бажарамиз. $x=tg^2 t,\ 1+x=\frac{1}{\cos^2 t},\ t_1=0,\ t_2=\frac{\pi}{4},\ dx=2tgt\times$ $\times\frac{dt}{\cos^2 t}$. У ҳолда $I^*=2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^4 t}{\cos^9 t}\,dt$ интегралга келамиз. Энди $u=$ $=\sin^3 t,\ dv=\frac{\sin t}{\cos^9 t}\,dt$ деб белгилаб, бўлаклаб интеграллаймиз (кейин яна $u=\sin t,\ dv=\frac{\sin t}{\cos^7 t}\,dt$ дейиш лозим): $I^*=2\left[\frac{\sin^3 t}{8\cos^8 t}\Big|_0^{\pi/4}-\right.$

$$\left.-\frac{3}{8}\left(\frac{\sin t}{6\cos^6 t}\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^5 t}\right)\right]=2\left(\frac{4\sqrt{2}}{8}-\frac{4\sqrt{2}}{16}\right)+\frac{1}{8}I_5^*=$$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}I_5^*$, бу ерда $I_5^*=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^5 t}$. Математик анализ курсидан қуйидаги рекуррент формула маълум:

$$I_n=\int\frac{dt}{\cos^n t}=\frac{\sin t}{(n-1)\cos^{n-1}t}+\frac{n-2}{n-1}\cdot I_{n-2},\quad n\geqslant 2.$$

Ундан фойдаланиб топамиз:

$$I_5=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}+\frac{3\sin t}{8\cos^2 t}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right|+C$$

ва $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+1$ эканлигини ҳисобга олиб, $I_5^*=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^5 t}=$ $=\frac{7\sqrt{2}}{8}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)$ қийматни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб,

$$I^*=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{64}+\frac{3}{64}\ln(\sqrt{2}+1)=\frac{39\sqrt{2}}{64}+\frac{3}{64}\ln(\sqrt{2}+1).$$

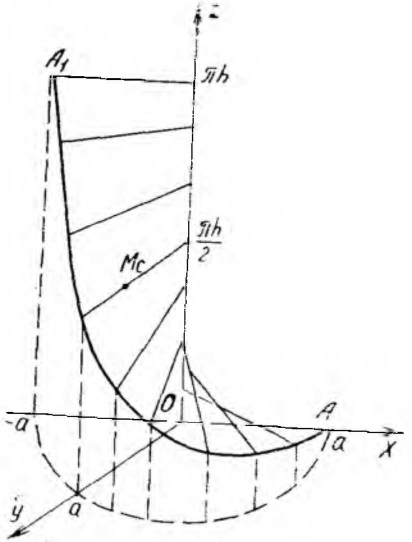
$$z_c=\frac{8}{9m}\left[\frac{4\sqrt{2}}{5}-I^*\right]=\frac{8\cdot 15}{9\cdot 4(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{61\sqrt{2}-15\ln(\sqrt{2}+1)}{5\cdot 64}=$$

$$=\frac{61\sqrt{2}-15\ln(\sqrt{2}+1)}{96(\sqrt{2}+1)}$$

(бу ерда m ўрнига $m=\frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$ қийматни қўйдик).

Демак, берилган (S) сирт оғирлик марказининг координаталари қуйидагилардан иборат:

$$x_c=y_c=\frac{26-15\sqrt{2}}{14},\quad z_c=\frac{61\sqrt{2}-15\ln(\sqrt{2}+1)}{96(\sqrt{2}+1)}.$$



105- чизма

12- мисол. $x = u \cos v$, $y = u \cdot \sin v$, $z = hv$, $0<u<a$, $0<v<\pi$ параметрик тенгламалар билан берилган геликоид сиртининг (105- чизма) оғирлик маркази топилсин ($\rho = 1$).

Ечиш. Геликоид тенгламасидаги u, v параметрларга нисбатан x, y, z лардан биринчи хусусий ҳосилаларни топиб, E, G, F—Гаусс коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$x'_u = \cos v, \quad y'_u = \sin v, \quad z'_u = 0;$$
$$x'_v = -u \cdot \sin v, \ y'_v = u \cos v, \ z'_v = h;$$
$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = 1;$$
$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = u^2 + h^2;$$
$$F = (x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v = -u \times \times \cos v \sin v + u \cos v \sin v + 1 \cdot 0 = 0.$$

$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sqrt{h^2 + u^2}\; du\, dv$ — бу ифода геликоид учун сирт дифференциали (4.9 формулага қаранг).

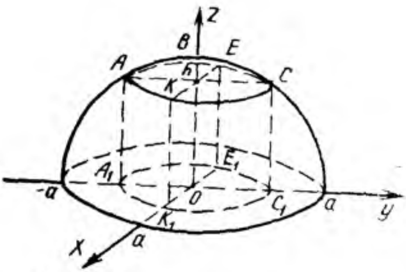
Оғирлик марказини $M(x_c, y_c, z_c)$ деб белгилаймиз. Уни топиш учун 4 та интегрални: $m = \iint\limits_{(S)} dS$, $I_1 = \iint\limits_{(S)} x\, dS$, $I_2 = \iint\limits_{(S)} y\, dS$, $I_3 = \iint\limits_{(S)} z\, dS$ ҳисоблаб, M нинг координаталарини ушбу $x_c = \frac{1}{m} \cdot I_1$, $y_c = \frac{1}{m} \cdot I_2$, $z_c = \frac{1}{m} \cdot I_3$ формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз: $m =$

$$= \iint\limits_{(S)} dS = \int_0^a du \int_0^\pi \sqrt{h^2 + u^2}\, dv = \pi \left(\frac{u}{2} \sqrt{h^2 + u^2} + \frac{h^2}{2} \ln | u + \sqrt{u^2 + h^2} | \right) \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} [a \sqrt{h^2 + a^2} + h^2 \ln (a + \sqrt{h^2 + a^2}) - h^2 \ln h].$$

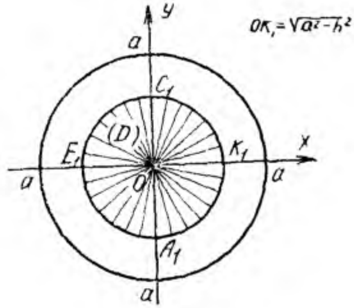
$$I_1 = \iint\limits_{(S)} x\, dS = \int_0^a u \sqrt{h^2 + u^2}\, du \int_0^\pi \cos v\, dv = \int_0^a u \sqrt{u^2 + h^2}\, du \times \sin v \Big|_0^\pi = 0.$$

$$I_2 = \iint\limits_{(S)} y\, dS = \int_0^a u \sqrt{u^2 + h^2}\, du \int_0^\pi \sin v\, dv =$$

$$= -\frac{1}{3} (u^2 + h^2)^{3/2} \Big|_0^a \cdot \cos v \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} [\sqrt{(h^2 + a^2)^3} - h^3].$$



106- чизма



106а- чизма

$$I_3 = \iint\limits_{(S)} z\,dS = h\int_0^a \sqrt{h^2+u^2}\,du \int_0^\pi v\,dv = h\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot[a\sqrt{h^2+a^2}+$$

$$+h^2\ln(a+\sqrt{h^2+a^2}) - h^2\cdot\ln h].$$

Энди x_c, y_c, z_c ларни топамиз: $x_c = \frac{I_1}{m} = 0$, $y_c = \frac{I_2}{m} = \frac{4}{3\pi}\times$

$$\times\frac{(\sqrt{h^2+a^2})^3 - h^3}{a\sqrt{h^2+a^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{h^2+a^2}}{h}},\quad z_c = \frac{I_3}{m} = \frac{\pi h}{2}.$$

13- мисол. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $h<z<a$ шар сегментининг Oz ўқига нисбатан инерция моменти топилсин ($\rho=1$).

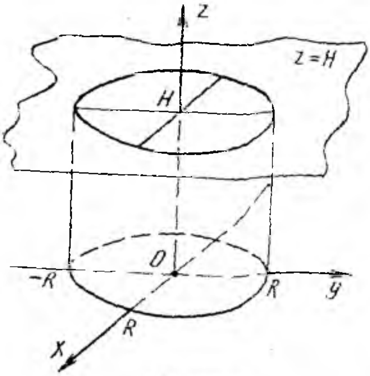
Ечиш. (S) сиртнинг Oz ўқига нисбатан инерция моменти $I_z = \iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\,dS$ формула билан ҳисобланади. Шар сиртидан $z=h$ текислик шундай (S) сегмент сиртини ажратадики (106- чизма), унинг (x, y) текисликдаги проекцияси $A_1K_1C_1E_1A_1$ айлана билан чегараланган $(D)=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$ доира бўлади. Цилиндрик (r, φ, z) координаталарга ўтсак, (S) сирт учун $z=\sqrt{a^2-r^2}$, $z'_\varphi = 0$, $z'_r = \frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}$, $dS = \frac{ar\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}$ (4- мисолга қаранг) муносабатлар ўринли бўлади. (D) соҳада эса қуйидаги тенгсизликлар бажарилади: $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant\sqrt{a^2-h^2}$, яъни $(D)=\{(r, \varphi): 0\leqslant r\leqslant\sqrt{a^2-h^2}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ (106- *а* чизма). Интеграл остидаги $f(x, y, z) = x^2+y^2$ функция ўрнига $x^2+y^2=r^2$ ифодани қўйиб, сирт интегралидан (D) соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга келамиз ва уни ҳисоблаймиз:

$$I_z = \iint\limits_{(D)} r^2\cdot\frac{ar\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}} = a\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r^3dr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$=2\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-r^2)-a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot d(a^2-r^2) = \pi a\left[\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2} - 2a^2(a^2-\right.$$

$$-r^2)^{1/2}\Big]\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}} =$$

$$= \frac{2\pi a}{3}(a-h)^2(2a+h).$$



107- чизма

14- мисол. $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ шартлар билан берилган цилиндр тўлиқ сиртининг $O(0;\ 0;\ 0)$ координаталар бошига нисбатан моменти, яъни қутб инерция моменти топилсин ($\rho = 1$).

Ечиш. (S) сиртнинг қутб инерция моменти

$$I_0 = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\,dS \qquad (4.16)$$

формула орқали ҳисобланади. (S) сирт уч бўлакдан иборат: (S_1) — $(x,\ y)$ текисликдаги $z=0$, $x^2+y^2 \leqslant R^2$ доира; (S_2) — $z=H$, $x^2+y^2 \leqslant R^2$ цилиндрнинг юқори асосидаги доира ва (S_3) — цилиндрнинг ён сирти $x^2+y^2=R^2$, $0<z<H$ (107- чизма), яъни $(S) = (S_1)+(S_2)+(S_3)$. Шунинг учун $I_0 = \iint\limits_{(S_1)} (x^2+y^2+z^2)\,dS + \iint\limits_{(S_2)}(x^2+y^2+z^2)dS + \iint\limits_{(S_3)}(x^2+y^2+z^2)\,dS$. $I_0 = I_0(S_1)+I_0(S_2)+I_0(S_3)$ деб белгилаб оламиз. Цилиндрик $(r,\ \varphi,\ z)$ координаталар системасида қурилаётган сиртлар жуда содда тавсифланади:

$$(S_1) = \{(r,\ \varphi,\ z): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ z=0\};$$

$$(S_2) = \{(r,\ \varphi,\ z): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ z=H\};$$

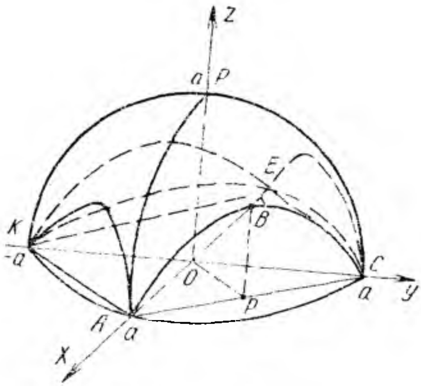
$$(S_3) = \{(r,\ \varphi,\ z): r=R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}.$$

(S_1), (S_2) лар учун сирт дифференциали ($z=\text{const}$, $z'_\varphi = 0$, $z'_r = 0$ бўлгани сабабли) $dS = r\,dr\,d\varphi$ кўринишда бўлади. Шунинг учун $J_0(S_1)$ ва $I_0(S_2)$ миқдорларни топиш мумкин:

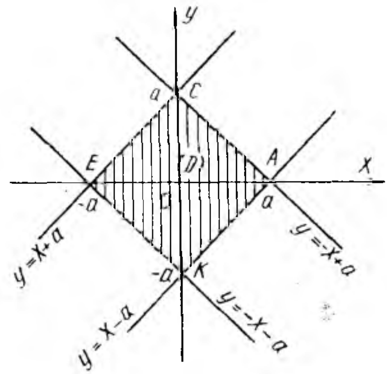
$$I_0(S_1) = \iint\limits_{(S_1)} (x^2+y^2+z^2)\,dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (r^2+0)\cdot r\,dr = \frac{\pi R^4}{2};$$

$$I_0(S_2) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (r^2+H^2)\,r\,dr = \frac{\pi}{2}(R^4+2H^2R^2).$$

(S_3) сиртда нуқталарнинг аппликатаси z ўзгарувчи, яъни у иккинчи параметр сифатида қатнашади: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z=z$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant H$). Энди ушбу $E = (x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2+(z'_\varphi)^2 = R^2$, $G = (x'_z)^2+(y'_z)^2+(z'_z)^2 = 1$, $F = x'_\varphi\cdot x'_z + y'_\varphi\cdot y'_z + z'_\varphi\cdot z'_z = 0$ Гаусс коэффициентларини топиб, $dS = \sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,dz = R\,d\varphi\,dz$ сирт дифференциалини чиқарамиз ва $I_0(S_3)$ ни ҳисоблаймиз:



108- чизма



108а- чизма

$$I_0(S_3) = \iint\limits_{(S_3)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H (R^2 + z^2) R\, dz =$$

$$= 2\pi R\left(R^2 z + \frac{1}{3} z^3\right)\Big|_0^H = 2\pi R\left(R^2 H + \frac{1}{3} H^3\right).$$

Натижада берилган (4.16) сирт интеграли учун узил-кесил топамиз:

$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} + \frac{\pi}{2}(R^4 + 2R^2 H^2) + 2\pi R\left(R^2 H + \frac{1}{3} H^3\right) =$$

$$= \pi R\left[R(R+H)^2 + \frac{2H^3}{3}\right].$$

15- мисол. $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$ текисликлар билан чегараланган $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сирт қисмининг оғирлик маркази координаталари топилсин $(z > 0)$, $\rho(x, y, z) = 1$.

Ечиш. Сиртнинг оғирлик маркази $M(x_c, y_c, z_c)$ координаталари (4.15) формулалар ёрдами билан топилади. (S) сирт Oz ўқига нисбатан симметрик, демак, унинг оғирлик маркази Oz ўқида жойлашган бўлади, яъни $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \text{const}$ ва $M(0;\ 0;\ z_c)$ — оғирлик маркази. I_1 ва I интегралларни ҳисоблашда 1 октант билан чегаралансак бўлади, яъни $ABCPA$ (108- чизма) контур билан чегараланган (S_1) бўйича интеграллаш мумкин, кейин натижани 4 га кўпайтириш етарли. Олдин $I = \iint\limits_{(S)} dS$ ни ҳисоблаймиз (унинг қиймати (S_1) сирт массасига тенг). (S_1) нинг (x, y) текисликдаги (D_1) проекцияси $ACOA$ контур билан чегараланган учбурчакдир: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a - x$ (108- a чизма). Ушбу $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ярим сферадан иборат бўлган сирт учун $dS = \dfrac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ва

$$I=\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int_0^a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{a-x}\cdot dx=$$

$$=a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\cdot dx.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун $\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=t$ алмаштириш бажарамиз. Янги чегаралар $t_1=\pi/2$, $t_2=0$ бўлади, равшанки $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\sin t$, $\frac{a-x}{a+x}=\sin^2 t$, $x=\frac{a\cos^2 t}{1+\sin^2 t}$,

$$dx=-\frac{4a\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}\,dt;\qquad I=-4a^2\int_{\pi/2}^{0} t\cdot\frac{\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}\,dt.$$

Бу интегрални бўлаклаб интеграллаймиз: $u=t$, $du=dt$, $dv=$ $=\frac{2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}dt$, $v=-\frac{1}{1+\sin^2 t}$;

$$I=2a^2\left[\frac{t}{1+\sin^2 t}\Bigg|_{\pi/2}^{0}-\int_{\pi/2}^{0}\frac{dt}{1+\sin^2 t}\right]=-\frac{\pi a^2}{2}+$$

$$+2a^2\int_{\pi/2}^{0}\frac{d(\operatorname{ctg} t)}{\operatorname{ctg}^2 t+2}=-\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2a^2}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\pi/2}^{0}=$$

$$=-\frac{\pi a^2}{2}+a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Энди $I_1=\iint\limits_{(S_1)} z\,dS$ интегрални ҳисоблаймиз:

$$I_1=\int_0^a dx\int_0^{a-x}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int_0^a dx\cdot y\Big|_0^{a-x}=$$

$$=a\int_0^a (a-x)\,dx=-\frac{a}{2}(a-x)^2\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}.$$

Шундай қилиб, $z_c=\dfrac{\iint\limits_{(S)} z\,dS}{\iint\limits_{(S)} dS}=\dfrac{4\cdot a^3/2}{4\cdot\frac{\pi}{2}a^2(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{a}{\pi(\sqrt{2}-1)}$.

x_c, y_c координаталарни ҳисоблаш учун (4.13) формуладаги $I_2=\iint\limits_{(S)} x\,dS$ ва $I_3=\iint\limits_{(S)} y\,dS$ интегралларни бутун (S) соҳа, яъни $(x,\ y)$ текисликдаги $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган (D)

соҳага проекцияланувчи (S) соҳа бўйича интеграллаш керак. Масалан,

$$I_3=\iint\limits_{(S)} y\,dS=\iint\limits_{(D)}\frac{ay\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int\limits_{-a}^{0}dx\int\limits_{-x-a}^{x+a}\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+$$

$$+a\int\limits_{0}^{a}dx\int\limits_{x-a}^{-x+a}\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int\limits_{-a}^{0}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{-(x+a)}^{x+a}dx+$$

$$+a\int\limits_{0}^{a}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x-a}^{-(x-a)}dx=$$

$$=-a\int\limits_{-a}^{0}\left[\sqrt{a^2-x^2-(x+a)^2}-\sqrt{a^2-x^2-(-(x+a))^2}\,\right]dx-$$

$$-a\int\limits_{0}^{a}\left[\sqrt{a^2-x^2-(-(x-a))^2}-\sqrt{a^2-x^2-(x-a)^2}\,\right]dx=0.$$

Шунга ўхшаш, $I_2=\iint\limits_{(S)}x\,dS=\iint\limits_{(D)}\frac{a\,x\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$

$$=a\int\limits_{-a}^{0}dy\int\limits_{-y-a}^{y+a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+a\int\limits_{0}^{a}dy\int\limits_{y-a}^{-y+a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Ички интеграллар 0 га тенг (I_3 дагига ўхшаш), $I_2=0$. Демак, $x_c=\frac{I_2}{I}=0$, $y_c=\frac{I_3}{I}=0$. Шундай қилиб, оғирлик маркази координаталари $x_c=0$, $y_c=0$, $z_c=\frac{a}{\pi(\sqrt{2}-1)}$ бўлади.

Машқ.

17.1. $x^2+y^2=2z$ параболоиддан $z=c$ текислик билан ажратилган сиртнинг Oz ўқига нисбатан инерция моменти топилсин (сирт бир жинсли деб фараз этилган, яъни $\rho(x, y, z)=1$).

17.2. $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=\frac{z^2}{H^2}$ конусдан $z=H$ текислик билан ажратилган сиртнинг оғирлик маркази координаталари топилсин ($\rho=1$).

17.3. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сиртдан $z=H$ $(0<H<R)$ текислик билан ажратилган сферик сегмент сиртининг оғирлик маркази топилсин ($\rho=1$).

o **17.4.** $I=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\,dS$ биринчи тур сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда $(S)-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0, 0\leqslant z\leqslant b$ конуснинг ён сирти.

•**17.5.** Ушбу $I=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда $(S)-\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ жисмни чегараловчи сиртдир.

17.6. $\iint\limits_{(S)} z^2\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — конус сиртининг қисми: $x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\cdot\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$ $(0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ ва $\alpha = \mathrm{const}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$.

17.7. $I = \iint\limits_{(S)} (xy + xz + yz)\,dS$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда (S) — $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конус сиртининг $x^2 + y^2 = ax$ сирт билан ажратилган қисми.

17.8. Моддий $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ параболик сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик $\rho(x, y, z) = z$. Бу сиртнинг массаси топилсин.

17.9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ сиртнинг $x^2 + y^2 = ax$ сирт билан ажратилган қисмининг оғирлик маркази топилсин.

17.10. Биринчи октантдаги $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ сферик сирт оғирлик марказининг координаталари топилсин $(\rho = 1)$.

17.11. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферик сиртнинг $x^2 + y^2 = ax$ сирт билан чегараланган қисмининг оғирлик маркази координаталари топилсин $(\rho = 1)$.

17.12. Ушбу $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\,z\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S)—радиуси a ва маркази $O(0;\ 0;\ 0)$ да бўлган сферанинг юқори қисми $(z > 0)$.

17.13. $\iint\limits_{(S)} z\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — биринчи октантдаги $x + y + z = 1$ текислик билан ажратилган тетраэдрнинг тўлиқ сирти.

17.14. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сиртнинг $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ цилиндр ичидаги қисми юзи топилсин.

17.15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ сиртнинг $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ цилиндр ичидаги қисми юзи топилсин.

17.16. $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг сирти топилсин.

17.17. $x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi$, $z = a\sin\theta$ $(0<a<b)$ торнинг иккита $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ меридиани ва иккита $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ параллеллар орасидаги сирт юзи топилсин.

17.18. $z = 0$ ва $z = h\cdot\frac{y}{R}$, $y \geqslant 0$ текисликлар орасидаги $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндрик сирт қисмининг оғирлик маркази топилсин.

17.19. $z = 0$ ва $z = \frac{5y}{a}$, $y \geqslant 0$ текисликлар орасидаги $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ цилиндрик сирт қисмининг оғирлик маркази топилсин.

17.20. $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ цилиндрик сиртнинг Oz ўқига нисбатан инерция моменти топилсин.

17.21. $(x - 2)^2 = z^2 + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ конус ён сиртининг Ox ўқига нисбатан инерция моменти топилсин.

17.22. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферанинг I октантдаги қисми массаси топилсин. Ҳар бир нуқтадаги модда зичлиги $\rho=x$.

17.23. Ушбу $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — сфера: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

17.24. Ушбу $\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — кубнинг тўлиқ сирти: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$.

17.25. $\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $x+2y+3z=6$ текисликнинг I октантдаги қисми.

17.26. $z^2=x^2+y^2$ конус сиртининг $z=0$ ва $z=4$ текисликлар орасидаги қисмининг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлиги $\rho=x^2+y^2$ бўлганда унинг ўша қисми массаси топилсин.

17.27. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конуснинг $x^2+y^2=8x$ сирт ичидаги қисмининг массаси топилсин. Модда зичлиги а) $\rho=2$ ва б) $\rho=z$ деб олинсин.

17.28. $\iint\limits_{(S)}z\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ сиртнинг $x\geqslant0, y\geqslant0, x+y\leqslant4$ соҳадаги қисми.

17.29. $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2+z^2)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — цилиндрнинг тўлиқ сирти: $x^2+y^2+4x=0$, $2\leqslant z\leqslant 4$.

17.30. $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ куб сиртининг ҳар бир нуқтасидаги модда зичлигини $\rho=xyz$ деб, куб сирти массаси топилсин.

17.31. $\iint\limits_{(S)}z\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — гиперболик параболоид $z=xy$ сиртининг $x^2+y^2=4$ цилиндр ичидаги қисми.

17.32. $\iint\limits_{(S)}y\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $x=2y^2+1$ $(y>0)$ цилиндрик сиртнинг $x=y^2+z^2$, $x=2, x=3$ сиртлар орасидаги қисми.

17.33. $\iint\limits_{(S)}\sqrt{y^2-x^2}\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $x^2+y^2=z^2$ конус сиртининг $x^2+y^2=a^2$ цилиндр билан ажратилган қисми.

17.34. $x^2+z^2=y^2$, $y>0$ конус сиртининг $x^2+y^2=a^2$ цилиндр ичидаги қисми учун Oz ўққа нисбатан инерция моменти топилсин ($\rho=1$ деб олинсин).

17.35. $x^2+y^2+z^2=a^2$ сиртнинг $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b<a)$ цилиндр орасидаги қисмининг юзи топилсин.

17.36. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера ичида жойлашган $x^2+y^2=Rx$ цилиндр сиртининг юзи («Вивиани жисми» нинг ён сирти) топилсин.

17.37. Гиперболик параболоид $az=xy$ $(a>0)$ сиртининг $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ цилиндр ичидаги қисми юзи топилсин.

.38. $z^2 = 2xy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ конус сиртининг $x = a$, $y = b$ текисликлар билан ажратилган қисми юзи топилсин.

17.39. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$ эллипсоид сирти.

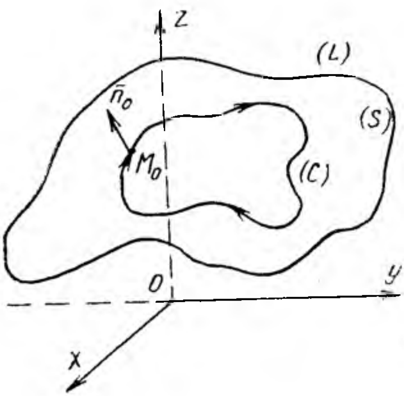
18- §. Иккинчи тур сирт интеграллари

Уч ўлчамли фазода (x, y, z) декарт координаталар системаси олиниб, (L) контур билан чегараланган (S) силлиқ сирт берилган бўлсин. Унинг $M(x, y, z)$ нуқтасидан шу сиртга нормал ўтказамиз ва бу нормалнинг йўналиши учун мумкин бўлган иккита йўналишдан (бир-бирига қарама-қарши йўналтирилган ва йўналтирувчи косинуслари ишоралари билан фарқ қиладиган) бирини оламиз. Агар сиртнинг ихтиёрий M_0 нуқтасидан ўтувчи ва (L) чегара билан кесишмайдиган ҳар қандай ёпиқ (C) контур олинганда ҳам, M_0 дан чиқиб, уни айланиб M_0 га қайтилганда (109- чизма) нормалнинг йўналиши дастлабки йўналишда қолса, у ҳолда (S) сирт **икки томонли сирт** дейилади. Демак, икки томонли сиртнинг битта нуқтасида нормал йўналишини танлаш билан биз (S) нинг барча нуқталаридаги нормал йўналишини танлаган бўламиз. (S) силлиқ сирт тенгламаси $z = f(x, y)$ ошкор функция билан берилган, яъни z функция (x, y) текисликнинг (D) соҳасида узлуксиз ва $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу ҳолда нормалнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

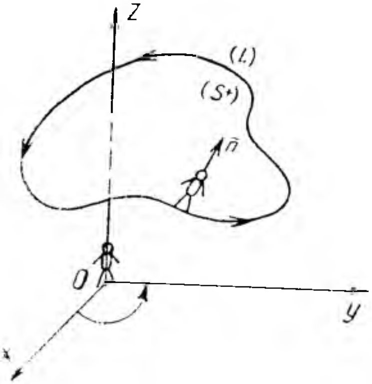
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \tag{4.17}$$

формулалар ёрдамида топилади.

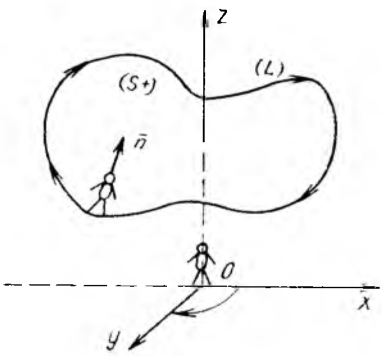


109- чизма

Илдиз олдида маълум бир ишора танлаб олиш билан биз сиртнинг аниқ бир томонини танлаб олган бўламиз. Агар илдиз учун мусбат ишорани олсак: $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} > 0$, яъни $\bar{n}$ нормал Oz ўқи билан γ ўткир бурчак ташкил этса, (S) сиртнинг «юқори» томонини танлаб олган бўламиз. Аксинча, илдиз учун манфий ишорани танлаб олсак: $\cos\gamma < 0$, γ — ўтмас бурчак бўлади ва (S) сиртнинг «қуйи» томонини текшираётган (танлаб олган) бўламиз.



110-чизма



111-чизма

Энди силлиқ (S) сирт $F(x, y, z)=0$ ошкормас тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $F(x, y, z)$ функция (V) соҳада узлуксиз ва $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу ҳолда (S) га ўтказилган нормалнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos\beta = \frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \qquad (4.18)$$

формулалар орқали ҳисобланади.

Фазода (x, y, z) ўнг декарт координаталар системаси олинган бўлсин, яъни Ox ўқидан Oy ўқигача айланиш Oz ўқининг мусбат қисмидан қараганда соат милларига тескари йўналишда бўлсин. Энди (S) сиртнинг (S^+) мусбат ва (S^-) манфий томонлари деган тушунчани киритамиз. (S) да танланган $\bar{n}$ нормал сиртда «юрган» кузатувчининг оёғидан боши томонга йўналган бўлсин ва (L) контур бўйича ҳаракати давомида кузатувчи ўзига энг яқин сирт бўлагини ўзининг чап томонида кўрса, у ҳолда (S) сиртнинг бу томонига (S^+) мусбат томони дейилади (110-чизма). Агар кузатувчи ўзига (ёндошган) энг яқин сирт бўлагини ўнг томонида кўриб борса, у ҳолда (S) нинг бу томони (S^-) манфий томони бўлади. Умумий ҳолда эса кузатувчи учун (L) контур бўйича ҳаракатланиши боши Oz ўқи томонига қараган кузатувчи учун Ox ўқидан Oy ўқига айланиш ҳаракатига ўхшаш бўлса (бир хил томонга қараб), у ҳолда (S) сиртнинг томони (S^+) мусбат томони деб ҳисобланади (111-чизма).

Иккинчи тур сирт интеграли қуйидагича аниқланади: Икки томонли силлиқ ёки бўлакли — силлиқ (S) сирт берилиб, унинг икки томонидан бири танланган, яъни бу сиртда $\overline{n}$ нормалнинг маълум йўналиши (масалан (S^+) мусбат томони учун $\overline{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$) танланган бўлсин. Бу сиртнинг ҳар бир нуқтасида учта

$$P = P(x, y, z),\ Q = Q(x, y, z),\ R = R(x, y, z)$$

функция аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(S^+)} (P\cdot\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS \tag{4.19}$$

ифода иккинчи тур сирт интеграли дейилади. Дифференциал геометриядан қуйидаги формулалар маълум:

$$dS\cos\alpha = dy\,dz,\ dS\cdot\cos\beta = dx\,dz,\ dS\cdot\cos\gamma = dx\,dy. \tag{4.20}$$

Иккинчи тур сирт интегралини бошқа кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

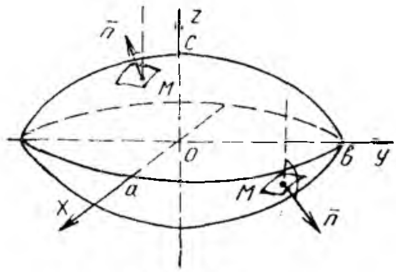
$$\iint\limits_{(S^+)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{4.21}$$

Агар (S^+) сирт томони ўрнига сиртнинг (S^-) томонини олсак, у ҳолда интеграл ўз ишорасини тескарисига ўзгартиради. (4.19) формула билан берилган иккинчи тур сирт интегралини ҳисоблаш учун уни биринчи тур сирт интегралига келтириш керак. (4.21) *формула билан берилган сирт интегралини ҳисоблаш учун* (S) сиртнинг $F(x, y, z) = 0$ тенгламасидан фойдаланиб, x, y, z ўзгарувчилардан исталган иккитасини эркли ўзгарувчи деб, интеграл остидаги ифодани ҳисоблаб ва мос (ёки (x, y), ёки (y, z), ёки (x, z)) координата текислигига (S) сиртни проекциялаб, икки каррали интегралга келтириш керак. (S) сирт тенгламаси u, v параметрлар орқали $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ кўринишда берилса, яна интеграл остидаги ифодани ҳисоблаб, (σ) соҳа — u, v ларнинг ўзгаришига боғлиқ соҳа бўйича икки каррали интегрални ҳисоблаш керак бўлади.

Энди мисоллар кўрамиз.

1- мисол. Ушбу $\iint\limits_{(S)} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$ II тур сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) деб $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ тенглама билан берилган эллипсоиднинг ташқи сирти олинган.

Ечиш. Эллипсоид тенгламасини $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ кўринишда ёзиб, топамиз $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F'_z = \frac{2z}{c^2}$ ва $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z = 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$. Эллипсоиднинг $z > 0$ қисмидаги ташқи нормал Oz ўқи билан γ ўткир бурчак $(\cos\gamma > 0)$ ташкил этади, $z < 0$ қисмида эса γ ўтмас бурчак $(\cos\gamma < 0)$ ташкил этади (112-чизма). Демак, $\cos\gamma$ нинг ишораси (S) сиртдаги $M(x, y, z)$ нуқтанинг z аппликата ишораси билан устма-уст тушади. Шунинг учун (4.18) формулаларда радикал олдида мусбат ишорани оламиз:



112-чизма

$$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Сўнгра $\bar{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинусларидан фойдаланиб, (4.20.) формулага асосан топамиз:

$$dy\,dz = dS\cdot\cos\alpha,\ dz\,dx = dS\cdot\cos\beta,\ dx\,dy = dS\cdot\cos\gamma.$$

Кейин II тур сирт интегралини I тур сирт интегралига келтириб:

$$\mathrm{I} = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}\cdot dS,$$

ниҳоят, икки каррали интегралга ўтамиз. Интеграл остидаги ифода z нинг ишорасига боғлиқ эмаслиги учун ва эллипсоиднинг $z > 0$ ва $z < 0$ қисмларининг (x, y) текисликдаги проекциялари битта (D) соҳадан, яъни $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс билан чегараланган соҳадан иборат бўлганлиги учун I ни фақат (S) нинг $z \geqslant 0$ қисми учун ҳисоблаб, натижани 2 га кўпайтирамиз. Бу соҳа учун $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$,

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{z/c^2}\,dx\,dy \text{ ва } (D) = \left\{(x, y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

Демак, $I = 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\iint\limits_{(D)} \frac{c\,dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$.

Агар (x, y) текисликда умумлашган $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$,

$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = abr$ қутб координаталарини киритсак, (D) соҳа $(\sigma) = \{(r, \varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ соҳага аксланади ва

$$I = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr \cdot \frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\, dr =$$

$$= \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).$$

1- мисолдаги II тур сирт интегралини бошқа усул билан ҳам ҳисобласа бўлади. Биз қуйида иккинчи усулни намойиш қиламиз. Эллипсоид тенгламасини параметрик кўринишда олиш мумкин:

$$x = a\cos\varphi\cos\theta,\ y = b\sin\varphi\cos\theta,\ z = c\sin\theta$$

$$\left(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi/2\right),$$

бу ерда параметрлар деб φ ва θ олинган.

Ушбу $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ параметрик тенглама билан берилган (S) сирт учун нормалнинг йўналтирувчи косинуслари ва сирт дифференциали

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{ва} \quad dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot du\, dv \qquad (4.22)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Иккинчи тур сирт интегралини (умумий ҳолда) оддий икки каррали интегралга ушбу

$$\iint_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \pm\iint_{(\Delta)} (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,du\,dv \qquad (4.23)$$

формула билан келтирилади. Бу ерда (Δ) — u, v параметрларнинг ўзгариш соҳаси; интеграл олдидаги ишора (S) сирт томонининг берилишига қараб танлаб олинади.

Берилган мисолда $u = \varphi$, $v = \theta$. Шунинг учун қуйидагиларга эгамиз:

$$A = \begin{vmatrix} b\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -b\sin\varphi\sin\theta & c\cos\theta \end{vmatrix} = bc\cos\varphi\cos^2\theta,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -a\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\theta & -a\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} = ac\sin\varphi\cos^2\theta,$$

$$C = \begin{vmatrix} -a\sin\varphi\cos\theta & b\cos\varphi\cos\theta \\ -a\cos\varphi\sin\theta & -b\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} = ab\sin\theta\cos\theta.$$

Эллипсоиднинг юқори ярмида ($z > 0$) $\cos\gamma > 0$ ва пастки ярмида ($z < 0$) $\cos\gamma < 0$, демак, $\cos\gamma$ нинг ишораси $C = ab\sin\theta\cos\theta$ ифодадаги $\sin\theta$ нинг ишораси билан бир хил. Шунинг учун (4.22) ва (4.23) формулалар учун мусбат ишорани оламиз. Интеграл остидаги ифодани (4.23) формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \frac{1}{x}dy\,dz + \frac{1}{y}dz\,dx + \frac{1}{z}dx\,dy =$$

$$= (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,d\varphi\,d\theta = \left(\frac{bc\cos\varphi\cos^2\theta}{a\cos\varphi\cos\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{ac\sin\varphi\cos^2\theta}{b\sin\varphi\cos\theta} + \frac{ab\sin\theta\cos\theta}{c\sin\theta}\right)d\varphi\,d\theta =$$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)\cdot\cos\theta\,d\varphi\cdot d\theta$$

ва (Δ) деб $(\Delta) = \left\{(\varphi, \theta): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ соҳани олиб,

берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{abc}\cdot(b^2c^2 +$$

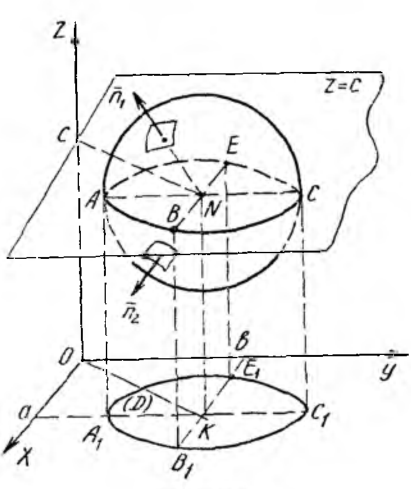
$$+ a^2c^2 + a^2b^2)\cdot\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2).$$

2- мисол. Ушбу $I = \iint\limits_{(S)} x^2dy\,dz + y^2dz\,dx + z^2dx\,dy$ II тур сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ сферанинг ташқи сирти.

Ечиш. Берилган интегралда интеграл остидаги ифоданинг кўриниши x, y, z ларнинг ўрнини алмаштирганда ўзгармайди. Шунинг учун I ни учта $I_1 = \iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$, $I_2 = \iint\limits_{(S)} y^2\,dz\,dx$, $I_3 = \iint\limits_{(S)} x^2dy\,dz$ интеграллар йиғиндиси деб оламиз:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Энди I_1 ни ҳисоблаймиз. $z = c$ текислик (S) сферанинг сиртини



113- чизма

икки қисмга ажратади (113- чизма), бирида — (S_1) да $z_1 = c + \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ ва $\bar{n}_1$ нормал Oz ўқи билан γ ўткир бурчак ташкил этади, иккинчисида — (S_2) да $z_2 = c - \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ ва $\bar{n}_2$ нормал учун $\gamma = (\widehat{\bar{n}_2, Oz})$ — ўтмас бурчак. (S_1) ва (S_2) сиртлар (x, y) текислигининг битта (D) соҳасига, яъни $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$ доира устига проекцияланади, демак,

$$I_1 = \iint_{(S_1)} z_1^2\,dx\,dy + \iint_{(S_2)} z_2^2\,dx\,dy = \iint_{(S_1)} z_1^2 \cdot \cos\gamma_1\,dS + \iint_{(S_2)} z_2^2 \cdot \cos\gamma_2 \cdot dS.$$

I тур сирт интеграли учун $dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}$ формуладан фойдалансак ва (D) соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга ўтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_1 = \iint_{(D)} z_1^2 \cos\gamma_1 \cdot \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma_1|} + \iint_{(D)} z_2^2 \cos\gamma_2 \cdot \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma_2|} =$$

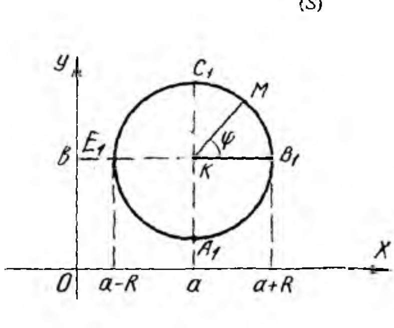
$$= \iint_{(D)} z_1^2\,dx\,dy - \iint_{(D)} z_2^2\,dx\,dy = \iint_{(D)} (z_1^2 - z_2^2)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{(D)} 4c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy.$$

Бу интегралда $x-a = r\cos\varphi$, $y-b = r\sin\varphi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$ алмаштириш бажарсак, (D) соҳа янги $(\sigma) = \{(r, \varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$ соҳачага (114- чизма) аксланади ва

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R 4cr\sqrt{R^2-r^2} \cdot dr = -\frac{8\pi c}{3}\left(\sqrt{R^2-r^2}\right)^3 \Big|_0^R = \frac{8\pi c}{3} R^3.$$

Юқоридаги мулоҳазаларга ўхшаш йўл билан $I_2 = \iint_{(S)} y^2\,dz\,dx$ интегрални ҳисоблашда (S) сфера сиртини $y = b$ текислик билан икки қисмга ажратамиз; $I_3 = \iint_{(S)} x^2\,dy\,dz$ интегрални ҳисоблашда эса $x = a$ текисликка нисбатан (S_1) ва (S_2) сферанинг қисмларини кўриб ўтамиз. Натижада $I_2 = \frac{8\pi b}{3} R^3$ ва $I_3 = \frac{8\pi a}{3} R_3$ қийматларни топиб, узил-кесил натижани оламиз: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b+c)$.

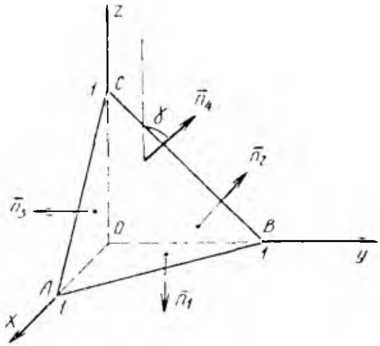


114- чизма

3- мисол.

$$I = \iint_{(S)} xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx$$

II тур сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — $x=0$, $y=0$, $z=0$ координата текисликлари ва $x+y+z=1$ текислик билан чегараланган пирамиданинг ташқи томони.



115-чизма

Ечиш. (S) сирт тўртта соҳадан, аниқроғи (S_1) — $z=0$ текисликдаги AOB, (S_2) — $x=0$ текисликдаги BOC, (S_3) — $y=0$ текисликдаги AOC ва (S_4)—$x+y+z=1$ текисликдаги ABC учбурчаклардан иборат (115-чизма), яъни $(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)+(S_4)$. Демак, ҳисобланаётган I интеграл шу соҳалар бўйича олинган I_1, I_2, I_3, I_4 интеграллар йиғиндисига тенг: $I=I_1+I_2+I_3+I_4$. (S_1) да $z=0$, $\bar{n}_1$ — ташқи нормал бўлиб, Ox, Oy, Oz ўқлари билан $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\beta_1=\frac{\pi}{2}$, $\gamma_1=\pi$ бурчаклар ташкил этади. Шунинг учун $\cos\alpha_1=0$, $\cos\beta_1=0$, $\cos\gamma_1=-1$ ва $I_1=\iint\limits_{(S_1)}(xz\cos\gamma_1+xy\cos\alpha_1+yz\cos\beta_1)dS=\iint\limits_{(S_1)}[0\cdot(-1)+xy\cdot 0+yz\cdot 0]dS=0.$

Шунга ўхшаш, мос равишда (S_2) ва (S_3) соҳалар бўйича ҳисобланган I_2, I_3 интеграллар ҳам 0 га тенг.

Бу мисолда I интегралнинг берилиши шундайки, интеграл остидаги $xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$ ифода исталган координата текислигида доимо нолга тенг, чунки $z=0$ учун, $dz=0$ бўлади ($x=0$ учун $dx=0$ ва $y=0$ учун $dy=0$ дир). Агар x, y, z ларни бир-бири билан алмаштирсак, интеграл остидаги ифода ўзгармайди. $x+y+z=1$ текислик ҳам барча координата ўқларидан бир хил кесма ажратади. Шу сабабли I_4 ни ҳисоблаш учун битта $I_4^*=\iint\limits_{(S_4)}xz\,dy\,dx$ интегрални ҳисоблаб 3 га кўпайтириш етарли.

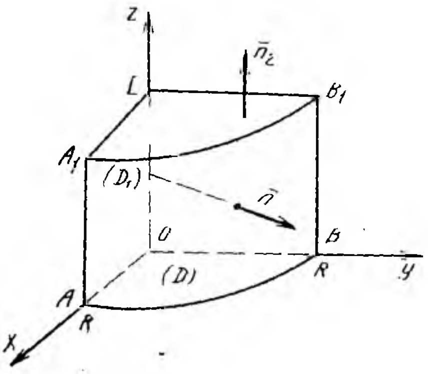
Ушбу $x+y+z=1$ тенглама билан берилган (S_4) сиртга ўтказилган $\bar{n}_4$ нормал Oz ўқи билан γ_4 — ўткир бурчак ташкил этади, $\cos\gamma_4>0$ ва интеграл остидаги $dx\,dy$ ифода $dS\cdot\cos\gamma_4=\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}\cdot\cos\gamma_4=dx\,dy$ га тенг бўлади. (S_4) нинг (x, y) текисликдаги проекцияси $(D)=\{(x, y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ соҳадан иборат, демак,

$$I_4^*=\iint\limits_{(D)}x(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=$$

$$=\int_0^1 x\cdot\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^{1-x}\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=\frac{1}{24}.$$

Энди узил-кесил топамиз: $I_4=3\cdot I_4^*=\frac{1}{8}$; $I=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{1}{8}$.

4-мисол. $I=\iint\limits_{(S)}yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dz\,dx$ II тур сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — I октантда жойлашган ва $x=0$,



116-чизма

$y=0,\ z=0,\ z=H$ текисликлар билан $x^2+y^2=R^2$ цилиндрдан тузилган сиртнинг ташқи қисми.

Ечиш. (S) сирт (116-чизма) 5 та сиртдан тузилган: (S_1) — $(x,\ y)$ текисликдаги доиранинг $AOBA$ контур билан чегараланган чораги; (S_2) — $z=H$ текисликдаги $A_1B_1CA_1$ контур билан чегараланган соҳа; (S_3) — (x,z) текисликдаги AA_1COA контур билан чегараланган тўртбурчак юзи; (S_4) — $(y,\ z)$ текисликдаги OBB_1CO контур билан чегараланган тўрт бурчак юзи; (S_5) — $z=0$ ва $z=H$ текисликлар орасидаги AA_1B_1BA контур билан чегараланган цилиндрнинг ён сирти. Шундай қилиб,

$$(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)+(S_4)+(S_5).$$

I ни ҳисоблаш учун биз ҳар бир (Si) $(i=\overline{1,5})$ соҳа бўйича интегрални ҳисоблаб, уларнинг йиғиндисини оламиз:

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

(S_1) учун $z=0,\ dz=0$ қийматларни интеграл остидаги ифодага қўйсак, $I_1=0$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш, (S_3) да $y=0,\ dy=0$ деб ва (S_4) да $x=0,\ dx=0$ деб, $I_3=0,\ I_4=0$ қийматларни топамиз. Энди (S_2) сиртда $z=H,\ dz=0,\ x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ эканлигини ҳисобга олсак, $I_2=\iint\limits_{(S_2)} Hy\,dx\,dy$ бўлади. Ташқи $\bar{n}_2$ нормал учун $\gamma=0,\ \cos\gamma=1$ $(\bar{n}_2 \parallel Oz)$, демак, икки каррали интегралга ўтганимизда I_2 нинг ишорасини сақлаб қоламиз:

$$I_2=\iint\limits_{(D)} Hydxdy=H\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^R r\sin\varphi\cdot rdr=\frac{1}{3}HR^3,$$

бу ерда (D) соҳа доиранинг $OABO$ контур билан чегараланган чораги. (S_5) сиртда z — ўзгарувчи миқдор. (S_5) нинг $(x,\ z)$ текисликдаги проекцияси AA_1COA контур орасидаги тўртбурчак юзидан иборат. Цилиндр ён сиртига ўтказилган $\bar{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинусларини (4.18) формулалардан топамиз. (S_5) нинг ошкормас тенгламаси $x^2+y^2-R^2=0$. Бундан $F'_x=2x,\ F'_y=2y,\ F'_z=0,\quad \cos\alpha=$ $=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\pm R},\ \cos\beta=\dfrac{y}{\pm R},\ \cos\gamma=0.$ (S_5) даги $\bar{n}$ ташқи нормал Oy ўқи билан β ўткир бурчак ташкил этади, демак, I октантда $\cos\beta$ нинг ишораси y нинг ишораси билан бир хил бўлади. Шу сабабли радикал учун мусбат ишорани оламиз: $\cos\alpha=\dfrac{x}{R},\ \cos\beta=\dfrac{y}{R}$,

$\cos\gamma = 0$ ва $I_5 = \iint\limits_{(S_5)} yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dz\,dx =$

$$= \iint\limits_{(S_5)} (yz\cos\gamma + xz\cos\alpha + xy\cos\beta)\,dS = \iint\limits_{(S_5)} \left(yz\cdot 0 + \frac{x^2z}{R} + \frac{xy^2}{R}\right)dS.$$

Бу биринчи тур сирт интегралидан иборат. (S_5) нинг (x, z) текисликдаги проекцияси $(D_1) = \{(x, z): 0 \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$. Икки каррали интегралга ўтишда $y = +\sqrt{R^2-x^2}$ ва $dS = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \frac{dxdz}{y/R} =$ $= \frac{R\,dx\,dz}{\sqrt{R^2-x^2}}$ деб топамиз: $I_5 = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^H \left[\frac{x^2z}{R} + \frac{x(R^2-x^2)}{R}\right]\cdot\frac{R\,dz}{\sqrt{R^2-x^2}} =$

$$= \int\limits_0^R \left(\frac{H^2x^2}{2\sqrt{R^2-x^2}} + Hx\sqrt{R^2-x^2}\right)dx = \frac{H^2}{2}\left[R^2\arcsin\frac{x}{R} - \left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right)\right]\Bigg|_0^R - \frac{H}{3}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3\Bigg|_0^R = \frac{\pi H^2R^2}{8} + \frac{HR^3}{3}.$$

Натижани ёзамиз: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = \frac{1}{3}HR^3 + \frac{\pi}{8}H^2R^2 + \frac{1}{3}HR^3 =$ $= HR^2\left(\frac{2}{3}R + \frac{1}{8}\pi H\right)$. Лекин I_5 интегрални ҳисоблашда $u = \varphi$, $v = z$ параметрлар киритилиб, (S_5) нинг тенгламасини параметрик кўринишда олиш мумкин. (S_5) сиртда $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = z$ ва φ, z ларнинг ўзгариш соҳаси $(\sigma) = \left\{(\varphi, z): 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant z \leqslant H\right\}$ бўлади. Энди (4.22) (4.23) формулаларга асосан топамиз:

$$A = \begin{vmatrix} y'_\varphi & z'_\varphi \\ y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = R\cos\varphi, \quad B = \begin{vmatrix} z'_\varphi & x'_\varphi \\ z'_z & x'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\sin\varphi \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R\sin\varphi, \quad C = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi \\ x'_z & y'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin\varphi & R\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

шунингдек, берилган интеграл учун $R = R(x, y, z) = yz = Rz\sin\varphi$, $P = P(x, y, z) = xz = Rz\cos\varphi$, $Q = Q(x, y, z) = xy = R^2\cos\varphi\sin\varphi$ ифодаларни топамиз.

(S_5) сиртга ўтказилган $\overline{n}$ нормаль Oz ўқига перпендикуляр ва Ox, Oy ўқлари билан $\alpha = \varphi$, $\beta = \pi/2 - \varphi$ ўткир бурчаклар ташкил этади, шунинг учун (4.23) формулада мусбат (+) ишорани оламиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$I_5 = \iint\limits_{(\sigma)} [R^2\cos^2\varphi\cdot z + R^3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi]\,d\varphi\,dz =$$

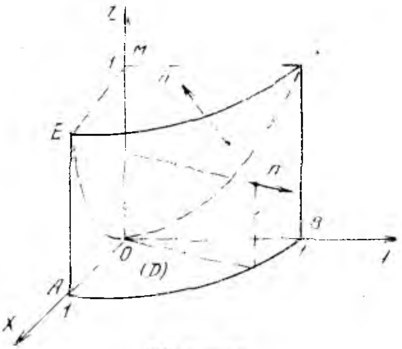
$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^H (R^2\cos^2\varphi\cdot z + R^3\sin^2\varphi\cos\varphi)\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{R^2}{2}(1+\cos 2\varphi)\cdot\frac{z^2}{2} + R^3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot z \right]\Bigg|_0^H \cdot d\varphi =$$

$$= \left[\frac{R^2H^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \frac{R^3H}{3}\sin^3\varphi \right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2H^2}{8} + \frac{R^3H}{3}.$$

Бу қиймат юқорида ҳисобланган қиймат билан устма-уст тушади.

5- мисол. $I = \iint\limits_{(S)} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — *I октантда жойлашган ва* $z = x^2 + y^2$ айланма параболоид, $x^2 + y^2 = 1$ цилиндр ва координата текисликлари билан чегараланган сиртнинг ташқи томони.



117- чизма

Ечиш. (S) сирт (117- чизма) қуйидаги контурлар билан чегараланган 5 та сиртдан ташкил топган; (S_1) — (x, y) текисликдаги $AOBA$ контур орасидаги: (S_2) — (x, z) текисликдаги $AOEA$ контур орасидаги; (S_3) — (y, z) текисликдаги $BOCB$ контур орасидаги; (S_4) — $EOCE$ контур орасидаги параболоид сирти; (S_5) — $ABCEA$ контур орасидаги цилиндрик сирт қисми. Шундай қилиб, $(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3) + (S_4) + (S_5)$.

Шунинг учун I интеграл бешта интеграл йиғиндисига тенг бўлади: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$. I_1 интеграл (S_1) сирт бўйича ҳисобланган. (S_1) да $z = 0$, $dz = 0$ ва интеграл остидаги ифода 0 га тенг, демак, $I_1 = 0$. Шунга ўхшаш, (S_2) да $y = 0$, $dy = 0$ ва (S_3) да $x = 0$, $dx = 0$, шунга кўра $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. Энди (S_4) учун I_4 ни ҳисоблаймиз. (S_4) нинг $z = x^2 + y^2$ тенгламасидан $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $\cos\alpha = \frac{-2x}{\pm\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$,

$$\cos\beta = \frac{-2y}{\pm\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+4z}}.$$

(S_4) га ўтказилган $\overline{n}$ — ташқи нормаль Oz ўқи билан ўткир γ бурчак ташкил этади, шу сабабли радикал учун мусбат ишорани олиб, $\overline{n}$ учун $\cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4z}}$, $\cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4z}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}$ ифодаларни топамиз. Энди II тур сирт интегралидан I тур сирт интегралига ўтамиз: $I_4 = \iint\limits_{(S_4)} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz =$

$$= \iint\limits_{(S_4)} (y^2z\cos\gamma + xz\cos\alpha + x^2y\cos\beta)dS =$$

$$= \iint\limits_{(S_4)} (y^2z - 2x^2z - 2x^2y^2)\cdot\frac{dS}{\sqrt{1+4z}}.$$

I тур сирт интегралидан икки каррали интегралга ўтиш учун (S_4)

ни $(x,\ y)$ текисликка проекциялаймиз ва $dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+4z}\cdot dxdy$, $z = x^2 + y^2$ ифодаларга кўра ҳисоблаймиз:

$$I_4 = \iint_{(D)} [y^2(x^2 + y^2) - 2x^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2]dx\,dy = \iint_{(D)} (y^4 - 2x^4 - 3x^2y^2)dxdy,$$

бу ерда $(D) = \{(x,\ y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Энди қутб координаталари $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$ га ўтиб, (D) соҳани $(\sigma) = \left\{(r,\ \varphi):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$ соҳага акслантирамиз ва топамиз:

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^4(\sin^4\varphi - 2\cos^4\varphi - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\cdot r\,dr =$$

$$= \frac{r^6}{6}\Big|_0^1 \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)^2 - \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\int_0^{\pi/2} [-2 - 6\cos 2\varphi - (1 - \cos 4\varphi)]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{24}\left(-3\varphi - 3\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{16}.$$

Энди I_5 интегрални ҳисоблаймиз. (S_5) сирт тенгламаси $x^2 + y^2 = 1$ бўлгани учун (S_5) нинг $(y,\ z)$ текисликдаги (ёки (x, z) текисликдаги) проекциясини топиб, I_5 ни икки каррали интегралга келтириш керак. Ошкормас $x^2 + y^2 - 1 = 0$ тенгламадан $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 0$ ва (4.18) формулаларга асосан

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\pm\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \pm x,\quad \cos\beta = \pm y,\quad \cos\gamma = 0.$$

(S_5) сиртга ўтказилган $\overline{n_1}$ ташқи нормаль Ox ўқи билан ўткир α бурчак ташкил этади, демак, I октантдаги нуқталар учун $\cos\alpha$ нинг ишораси x нинг ишораси билан бир хил, шу сабабли радикал учун мусбат ишорани оламиз. Демак, $\overline{n_1}$ учун $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = 0$ бўлади ва $I_5 = \iint_{(S_5)} (y^2z\cos\gamma + xz\cos\alpha + x^2y\cos\beta)\,dS =$

$= \iint_{(S_5)} (0 + x^2z + y^2x^2)dS = \iint_{(S_5)} x^2(y^2 + z)dS$. (S_5) нинг (y, z) текисликдаги проекцияси $OBCMO$ контур билан чегараланган квадрат юзидан иборат (D_1) соҳа қуйидагича тавсифланади: $(D_1) = \{(y,\ z);\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Энди $dS = \frac{dy\,dz}{|\cos\alpha|} = \frac{dy\,dz}{x} = \frac{dy\,dz}{\sqrt{1-y^2}}$ ва $x = \sqrt{1-y^2}$ ифодалардан фойдаланиб, I_5 ни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$I_5 = \iint\limits_{(D_1)} (\sqrt{1-y^2})^2 \cdot (y^2+z) \cdot \frac{dy\,dz}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \int_0^2 (y^2+z)dz =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \cdot \left(y^2 + \frac{1}{2}\right) dy.$$

Ушбу $y = \sin t$, $dy = \cos t\,dt$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ алмаштиришни бажариб, узил-кесил топамиз:

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \cos t \left(\sin^2 t + \frac{1}{2}\right) \cdot \cos t\,dt = \frac{3\pi}{16}.$$

Ниҳоят, I интегрални топамиз:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = -\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Юқорида ҳисобланган I_4 ва I_5 интегралларни бошқача ҳисобласа ҳам бўлади. Бунинг учун цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасини олиб, I_4 ва I_5 интегралларни ҳисоблашда яна (4.22), (4.23) формулалардан фойдаланса бўлади. Бу системада $z = x^2 + y^2$ параболоид тенгламаси $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r^2$ кўринишда, $x^2+y^2 = 1$ цилиндрнинг тенгламаси $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = z$ кўринишда бўлади. (S_4) сиртда (параболоидда) параметрлар деб $u=\varphi$, $v = r$ ларни оламиз, уларнинг ўзгариш соҳаси қуйидагича:

$(\Delta) = \left\{ (\varphi, r)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leqslant r \leqslant 1 \right\}$. Равшанки,

$$A = \begin{vmatrix} y'_\varphi & z'_\varphi \\ y'_r & z'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 2r \end{vmatrix} = 2r^2\cos\varphi,$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_\varphi & x'_\varphi \\ z'_r & x'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 2r & \cos\varphi \end{vmatrix} = 2r^2\sin\varphi,$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi \\ x'_r & y'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r.$$

(S_4) га ўтказилган $\bar{n}$ ташқи нормаль Oz ўқи билан γ ўткир бурчак ташкил этади, $\cos\gamma > 0$ бўлгани учун

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-r}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ифодадан фойдаланиб, (4.23) формула учун манфий (—) ишорани оламиз. Энди

$$P = xz = r^3\cos\varphi,\ \ Q = x^2y = r^3\cos^2\varphi\sin\varphi,\ \ R = y^2z = r^4\sin^2\varphi$$

ифодалардан фойдаланиб, интеграл остидаги ифодани ҳисоблаймиз:

$$P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C = 2r^5\cos^2\varphi + 2r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r^5\sin^2\varphi =$$

$$= r^5\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right).$$

Энди I_4 ни ҳисобласак бўлади:

$$I_4 = -\iint\limits_{(\Delta)} r^5 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right) dr\, d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^1 r^5\, dr \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{16}.$$

(S_5) сиртда параметрлар деб $u=\varphi$, $v=z$ ларни қабул қиламиз, бу параметрлар $(\sigma) = \{(\varphi, z)\colon\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ соҳада ўзгаради.

4-мисолда ҳисобланган A, B, C ларнинг ифодаларида $R=1$ деб олсак, $x^2+y^2=1$ тенглама билан берилган цилиндрик сирт (I октандаги қисми) учун $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=z$, $A=\cos\varphi$, $B=\sin\varphi$, $C=0$, $P=xz=z\cos\varphi$, $Q=x^2y=\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. $R=y^2z=z\sin^2\varphi$ ифодаларга ва интеграл остидаги ифода учун $PA+Q\cdot B+R\cdot C=z\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi=\frac{z}{2}(1+\cos 2\varphi)+\frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi)$ ифодага эга бўламиз. (S_5) га ўтказилган $\overline{n_1}$ ташқи нормаль Ox ўқи билан $\alpha=\varphi$ ўткир бурчак ташкил этади, шу сабабли (4.23) формуладаги интегралда мусбат (+) ишорани оламиз. Энди I_5 интегрални ҳисобласак бўлади:

$$I_5 = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{z}{2}(1+\cos 2\varphi) + \frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi)\right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{z}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \frac{1}{8}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \cdot dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{\pi}{4} z + \frac{\pi}{16}\right) dz = \left(\frac{\pi}{8} z^2 + \frac{\pi}{16} z\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{16}.$$

6-мисол. $I = \iint\limits_{(S)} x^3 dy\, dz + y^3 dz\, dx + z^3 dx\, dy$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) деб $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферанинг ташқи томони олинган.

Ечиш. Мисолни ечиш учун (r, φ, θ) сферик координаталар системасидан фойдаланамиз, чунки бу системада сферанинг тенгламаси $r=a$ оддий кўринишда бўлади, φ, θ лар эса параметр сифатида бўлиб, улар $(\sigma) = \left\{(\varphi, \theta)\colon\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ соҳада ўзгаради ва $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y=a\cos\theta\cdot\sin\varphi$, $z=a\sin\theta$. Равшанки,

$$A = \begin{vmatrix} y'_\theta & z'_\theta \\ y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \\ a\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -a^2\cos^2\theta\cos\varphi,$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_\theta & x'_\theta \\ z'_\varphi & x'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -a\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = -a^2\cos^2\theta\sin\varphi,$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_\theta & y'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -a^2\cos\theta\cdot\sin\theta,$$

$$P = x^3 = a^3\cos^3\theta\cdot\cos^3\varphi,\ Q = y^3 = a^3\cos^3\theta\cdot\sin^3\varphi,\ R = z^3 = a^3\sin^3\theta.$$

Интеграл остидаги ифодани (4.23) формулага асосан ҳисоблаймиз:

$$P\cdot A + Q\cdot B + RC = -a^5[\cos^5\theta\cdot(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) + \sin^4\theta\cos\theta] =$$
$$= -a^5\left[\cos^5\theta\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right) + \sin^4\theta\cos\theta\right].$$

(S) сферага ўтказилган $\overline{n}$ — ташқи нормаль Oz ўқи билан $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ бурчак ташкил этади: $\cos\gamma = \sin\theta$ тенгликка кўра $\cos\gamma$ нинг ишораси $\sin\theta$ нинг ишораси билан бир хил. Шунинг учун $\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+H^2+C^2}} = \frac{-a^2\cos\theta\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ формулада радикал учун манфий (—) ишорани оламиз. Демак, (4.23) формулада ҳам манфий ишорани олиб интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = -\iint\limits_{(\sigma)} -a^5\left[\cos^5\theta\cdot\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right) + \sin^4\theta\cos\theta\right] d\varphi\, d\theta =$$

$$= a^5\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos^5\theta\cdot\left(\frac{3}{4}\varphi + \frac{1}{16}\sin 4\varphi\right) + \varphi\cdot\sin^4\theta\cos\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}\cdot d\theta =$$

$$= a^5\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3\pi}{2}\cos^5\theta + 2\pi\sin^4\theta\cos\theta\right)d\theta =$$

$$= a^5\left[\frac{3\pi}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta)\cos\theta\, d\theta + \frac{2\pi}{5}\sin^5\theta\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Мисолда берилган интегрални x, y, z координаталар системасида ҳам ҳисоблаш мумкин. Интеграл остидаги ифода x, y, z ларни бир-бири билан алмаштирганда ўзгармайди ва $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферанинг тенгламаси ҳам ўз кўринишини сақлайди. Шунинг учун, масалан, $I_1 = \iint\limits_{(S)} z^3 dx\, dy$ сирт интегралини ҳисоблаб, натижани 3 га кўпайтирсак, $I = 3\cdot I_1$ берилган интеграл қийматини ҳосил қиламиз (юқоридаги усулда ҳам шундан фойдаланиб, $I = 3\cdot\iint\limits_{(S)} z^3\, dx\, dy =$
$= -3\iint\limits_{(\sigma)} R\cdot C\, d\varphi\, d\theta = -3\iint\limits_{(\sigma)} -a^5\sin^4\theta\cos\theta\, d\varphi\, d\theta =$
$= 3a^5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{6\pi a^5}{5}\sin^5\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{12\pi a^5}{5}$ натижани ҳосил қилиш мумкин). Сферанинг $F(x, y, z) = 0$, яъни $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

тенгламасига кўра $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$, $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z = 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4a^2$, $\cos\alpha = \frac{x}{\pm a}$, $\cos\beta = \frac{y}{\pm a}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\pm a}$

ифодаларни топиш мумкин. (S) сиртга ўтказилган $\overline{n}$ — ташқи нормал $z > 0$ даги ярим сферада γ ўткир бурчак, $z < 0$ даги ярим сферада γ ўтмас бурчак ташкил этади, демак, $\cos\gamma$ нинг ишораси z аппликата ишораси билан бир хил, шу сабабли косинуслар формуласида мусбат $(+)$ ишорани оламиз:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{a}.$$

Ҳар бир ярим сферанинг (x, y) текисликдаги проекцияси $x^2+y^2 \leqslant a^2$ доира устига тушади. II тур сирт интегралидан I тур сирт интегралига $dx\,dy = dS \cdot \cos\gamma$ формула орқали ўтамиз. Сирт дифференциали учун ушбу $dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \frac{a\,dxdy}{|z|}$ ифодага эгамиз. Шунинг учун $dx\,dy$ ўрнига $dS \cdot \cos\gamma = \frac{a\,dx\,dy}{|z|} \cdot \frac{z}{a} = dx\,dy \cdot \operatorname{sgn} z$ ифодани қўямиз. Натижада I_1 интегрални $I_1 = \iint\limits_{(S_1)} z^3\,dx\,dy + \iint\limits_{(S_2)} z^3\,dx\,dy$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда (S_1) — юқори ярим сфера $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, (S_2)— — пастки ярим сфера $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Шундай қилиб, $I_1 = I_2 + I_3$. I_2 да $\operatorname{sgn} z = +1$, I_3 да эса $\operatorname{sgn} z = -1$ эканлигини ҳисобга олиб, ушбу

$$I_1 = \iint\limits_{(D)} \left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3 dx\; dy + \iint\limits_{(D)} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3 \cdot (-1)dx\,dy = 2 \cdot \iint\limits_{(D)} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^3 \cdot dxdy$$

икки каррали интегралга келамиз. Қутб системасига $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$ ўтсак, (D) соҳа янги $(\Delta) = \{(r, \varphi)\colon\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a\}$ соҳага аксланади ва $I_1 = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3 \cdot r\,dr = 2\pi\left[-\frac{2}{5}(a^2 - r^2)^{5/2}\right]\Big|_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}$.

Узил-кесил берилган интеграл учун $I = 3\,I_1 = \frac{12\pi a^5}{5}$.

Машқ. Қуйидаги иккинчи тур сирт интеграллари кўрсатилган сиртнинг томонлари бўйича ҳисоблансин:

18.1 $I = \iint\limits_{(S)} x^2dy\,dz + y^2dz\,dx + z^2dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2+z^2 = a^2$ сферанинг ташқи томони олинган.

18.2 $I = \iint\limits_{(S)} z^2dx\,dy$, бу ерда (S) деб $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ташқи қисми олинган.

18.3 $I = \iint\limits_{(S)} x^2 dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dx\,dy$, бу ерда $(S) - 0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ куб сиртининг ташқи томони.

18.4. $I = \iint\limits_{(S)} x dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, бу ерда (S) — пирамиданинг ушбу $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, текисликлар билан чегараланган ташқи сирти.

18.5. $I = \iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, бу ерда (S) — ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферанинг ташқи томони.

18.6. $I = \iint\limits_{(S)} (y - z)\,dy\,dz + (z - x)\,dz\,dx + (x - y) dx\,dy$, бу ерда (S) — ушбу $x^2 + y^2 = z^2\,(0 \leqslant z \leqslant h)$ конус сиртининг ташқи томони.

18.7. $I = \iint\limits_{(S)} x^2yz\,dydz + xy^2z\,dz\,dx + xyz^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг тўлиқ ташқи томони олинган.

18.8. $I = \iint\limits_{(S)} x^3 dy\,dz + y^3 dz\,dx + 2dy\,dz$, бу ерда (S) — ушбу $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ сиртлар билан чегараланган жисмни ўраб олган сиртнинг тўлиқ ташқи томони.

18.9. $I = \iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dxdz + zdx\,dy$, бу ерда (S) — ушбу $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ цилиндрнинг тўлиқ сиртининг ташқи томони.

18.10. $I = \iint\limits_{(S)} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS$, бу ерда (S) — эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ сиртининг ташқи томони.

18.11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоид сиртининг (x, y) текисликдан юқорида жойлашган $z > 0$ қисмнинг ташқи томони бўйича $I_1 = \iint\limits_{(S)} yz\,dx\,dz$ ва $I_2 = \iint\limits_{(S)} x^3 dy\,dz$ интеграллар ҳисоблансин.

18.12. Иккита кесма: 1) $z = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, $y = 0$; 2) $z = 2\pi c$, $a \leqslant x \leqslant b$, $y = 0$ ва иккита винтсимон чизиқ: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = cv$ $(a \leqslant u \leqslant b,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$ билан чегараланган (S) сиртнинг юқори томони бўйича ушбу интеграл ҳисоблансин: $I = \iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy + y\,dy\,dz + z\,dz\,dx$.

18.13. Ушбу $\iint\limits_{(S)} [(z^n - y^n) \cos\alpha + (x^n - z^n) \cos\beta + (y^n - x^n) \cos\gamma]\,dS$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда (S) — маркази $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган ярим шарни $(z \geqslant 0)$ тўлиқ қоплаган сиртнинг ташқи томони, α, β, γ — ташқи нормалнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари.

18.14. $I = \iint\limits_{(S)} x^2z\,dy\,dz$, бу ерда (S) — эллипсоиднинг I октантдаги ташқи сирти: $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

18.15. $I = \iint\limits_{(S)} y\,dx\,dz$, бу ерда $(S) - 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$ эллипсоиднинг ташқи сирти.

18.16. $I=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$, бу ерда $(S)-x^2+y^2+z^2=R^2$ сферанинг ташқи томони.

18.17. $I=\iint (x-z)\,dy\,dz+(z^2-y^2)dz\,dx+(x+z)\,dx\,dy$, бу ерда (S) — цилиндрнинг ён сирти (ташқи томони): $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=b$.

18.18. $I=\iint x\,dy\,dz+(y+z)dz\,dx+(z-y)\,dx\,dy$, бу ерда (S) — ушбу $x^2+y^2+z^2=9$ сферанинг I октантдаги қисми (ташқи томони).

18.19. $I=\iint\limits_{(S)}(x-2z)\ \ dy\ \ dz+(x+3y+z)\,dz\,dx+(5x+y)\,dx\,dy$, бу ерда $(S)-x+y+z=a$ $(a>0)$ текисликнинг I октантдаги қисми ($O(0;\ 0;\ 0)$ га қараган томони).

18.20. $I=\iint\limits_{(S)} xy\,dy\,dz+yz\,dz\,dx+zx\,dx\,dy$, бу ерда (S) — конус сиртининг ташқи томони: $(z-1)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$, $1\leqslant z\leqslant 5$.

18.21. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, бу ерда (S) — куб сиртининг ташқи томони: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

18.22. $I=\iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx$, бу ерда $(S)-Oz$ ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ва $z=0$, $z=2$ текисликлар орасида жойлашган $z=x^2+y^2$ параболоид сиртининг юқори қисми.

18.23. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, бу ерда а) $(S)-0\leqslant z\leqslant h$ соҳадаги $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конус сиртининг ташқи томони. б) (S) — шу конус асосининг юқорига қараган томони: $z=h$, $x^2+y^2\leqslant h^2$.

18.24. $I=\iint\limits_{(S)} yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$, бу ерда (S) $0\leqslant z\leqslant h$ соҳадаги $x^2+y^2=a^2$ цилиндрик сиртнинг ташқари томони.

18.25. $I=\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz+y^3dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, бу ерда а) (S) — ушбу $z=2x$ текислик билан $z=x^2+y^2$ параболоид сиртидан ажратилган қисмининг ташқи томони. б) (S) ушбу $z=x^2+y^2$ параболоид билан $z=2x$ текисликдан ажратилган соҳанинг юқори (Oz нинг мусбат томонига қараган) қисми.

18.26. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, бу ерда $(S)-0\leqslant z\leqslant 1$ соҳадаги $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ сиртнинг ташқи томони.

18.27. $I=\iint x^3dy\,dz+y^3\,dx\,dz+z^3\,dx\,dy$, бу ерда $(S)-x^2+y^2+z^2=x$ сферанинг ташқи томони.

V боб

СТОКС ВА ОСТРОГРАДСКИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

Стокс ва Остроградский формулалари ҳамда уларнинг қўлланилиши ҳақида назарий материални тегишли адабиётдан яхши ўрганиб олиш керак. Масалан, Г. М. Фихтенгольцнинг уч жилдлик китобининг учинчи жилдидаги XVII (4-§) ва XVIII (2- §) бобларини ўрганиб чиқиш лозим.

Қўлланмада келтирилган Стокс ва Остроградский формулаларига оид мисолларни яхши тушуниш учун талаба I ва II тур сирт интегралларини, эгри чизиқли интегралларни, икки ва уч каррали интегралларни ҳисоблаш усулларини ўзлаштирган бўлиши мақсадга мувофиқ.

19- §. Стокс ва Остроградский формулаларини қўлланишга доир мисоллар

Фазода x, y, z декарт координаталар системаси олинган бўлсин· Бу фазода (L) оддий бўлакли-силлиқ контур билан чегараланган чекли бўлакли-силлиқ икки томонли (S) сирт (118-чизма) берилган; (S) сиртнинг ва (L) контурнинг барча нуқталарида $P = P(x, y, z)$. $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

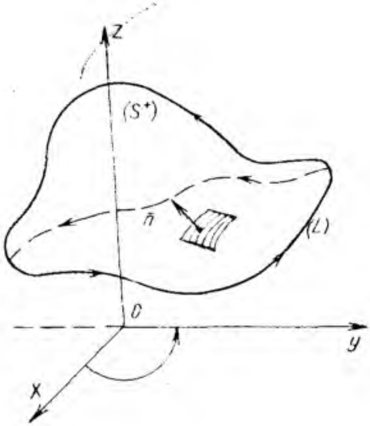
$$= \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS \quad (5.1)$$

формула *Стокс формуласи* деб аталади. Бу формулани II тур сирт интеграли орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

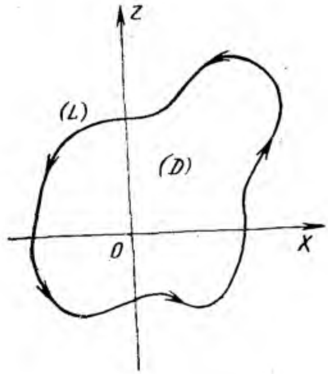
$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad (5.2)$$

Мазкур формула фазовий ёпиқ (L) эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегрални шу контур билан чегараланган (S) сирт бўйича ҳисобланган сирт интеграли орқали ифодалайди (ва аксинча). Формуладаги $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — (S) сиртга ўтказилган ва (S) сиртнинг



118- чизма



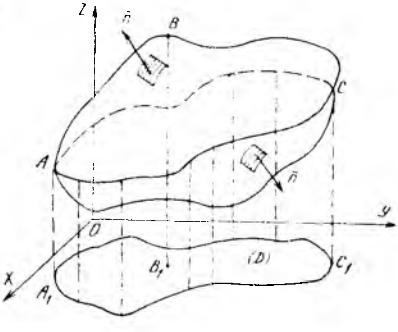
119- чизма

талаб қилинган томони учун аниқ йўналишда олинган $\vec{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинусларидир.

Агар (L) контур (x, y) текисликдаги ёпиқ эгри чизиқ бўлиб, бирор (D) соҳани чегараловчи (119- чизма) бўлса, у ҳолда Стокс формуласидан бизга маълум бўлган Грин формуласи келиб чиқади: $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$, чунки $z = 0$ да $dz = 0$, $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 0$, ҳамда $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$. Охирги формула текис (D) соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални шу соҳанинг (L) контури бўйича олинган эгри чизиқли интеграл билан боғлайди.

Уч каррали интеграллар назариясида унга ўхшаш формула Остроградский формуласидир. У (V) фазовий соҳа бўйича олинган уч каррали интегрални (V) соҳанинг чегараси (S) сирт бўйича олинган сирт интеграли билан боғлайди (120-чизма).

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \quad (5.3)$$



120- чизма

формуладаги $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ функциялар (V) соҳа ва унинг чегарасидан иборат (S) сиртнинг барча нуқталарида узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб олинади. Интеграллаш (S) ёпиқ сиртнинг ташқи томони бўйича олиб борилади. Демак, Остроградский формуласи, бошқача қилиб айтганда, (S) ёпиқ сиртнинг ташқи томони бўйича олинган умумий кўринишдаги $\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ иккинчи тур сирт интегралини шу сирт билан чегараланган (V) жисм бўйича олинган $\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$ уч каррали интеграл орқали ифодалайди. Бу формуланинг биринчи тур сирт интеграли билан боғланган кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \quad (5.4)$$

1-мисол. $I = \iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда α, β, γ — (S) ёпиқ сирт ташқи нормалининг Ox, Oy, Oz ўқлари билан ташкил этган бурчаклари. Интеграл бирор (V) жисмни ўраб олган бутун сирт бўйича олинган.

Ечиш. Берилган шартларга кўра биз Остроградский формуласидан фойдалансак бўлади. Унда $P = x$, $Q = y$, $R = z$. Шу сабабли берилган интеграл учун $I = \iiint\limits_{(V)} (1 + 1 + 1)\,dx\,dy\,dz = 3V$ қийматни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, интеграл қиймати (V) жисмнинг ҳажмидан уч марта катта экан.

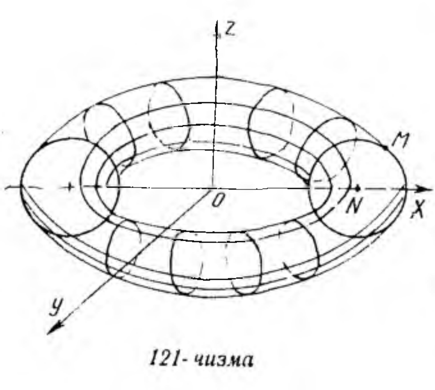
Келажакда бирор жисмнинг ҳажмини топиш учун

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS \quad (5.5)$$

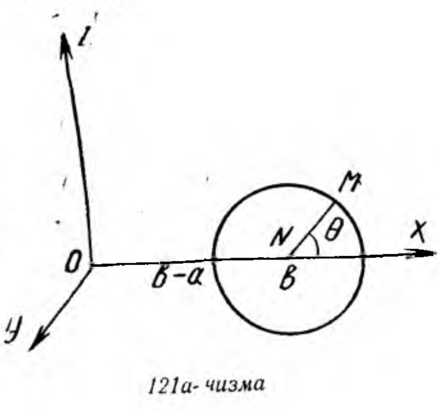
формуладан фойдаланиш мумкин, бу ерда (S)- (V) жисмни ўраб олган сиртнинг ташқи томони (120-чизма).

2-мисол. Тор билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин. Тор сиртининг тенгламаси: $x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi$, $z = a\cdot\sin\theta$ $(0 < a \leqslant b)$.

Ечиш. Тор сиртини (121-чизма) ҳосил қилиш учун радиуси a



121- чизма



121a- чизма

ва маркази $(x,\ y)$ текисликдаги $x^2+y^2=b^2$ айланада бўлган айланани Oz ўқ атрофида тўлиқ айлантириб чиқиш керак, бунда φ бурчак 0 дан 2π гача ўзгаради.

Кичик айланадаги OM радиуснинг (x, y) текислик билан ташкил этган бурчаги θ бўлиб, у ҳам 0 дан 2π гача ўзгаради (121-*а* чизма). Демак, берилган тенгламалар тор сиртини φ, θ параметрлар орқали ифодалайди.

Остроградский формуласидан (ёки олдинги мисолдаги натижадан) фойдалансак, $V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$ бўлади.

Энди (S) сиртнинг ташқи томонига ўтказилган $\overline{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинусларини қуйидаги формулалар бўйича топамиз:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z_v \end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}. \qquad (5.6)$$

Тор сирти учун $u=\varphi$; $v=\theta$ деб оламиз. Унда

$$\begin{cases} x'_\varphi=-(b+a\cos\theta)\sin\varphi, \\ y'_\varphi=(b+a\cos\theta)\cdot\cos\varphi, \\ z'_\varphi=0; \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x'_\theta=-a\sin\theta\cos\varphi, \\ y'_\theta=-a\sin\theta\sin\varphi, \\ z'_\theta=a\cos\theta; \end{cases}$$

$$\text{ва}\quad \begin{cases} A=a(b+a\cos\theta)\cos\varphi\cos\theta; \\ B=a(b+a\cos\theta)\sin\varphi\cos\theta; \\ C=a(b+a\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

ифодаларга эга бўламиз. Энди ҳажмни ҳисоблаш формуласини II тур сирт интеграли орқали ёзамиз:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy.$$

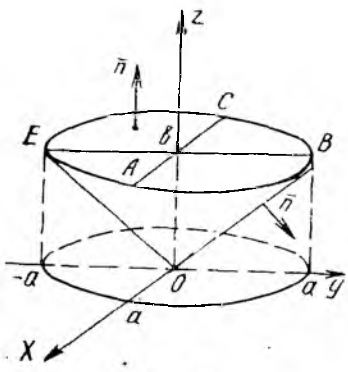
Маълумки, иккинчи тур сирт интеграли оддий икки каррали интегралга ушбу

$$\iint\limits_{(S)}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\pm\iint\limits_{(\Delta)}(P\cdot A+Q\cdot B+R\cdot C)\,du\,dv \qquad (5.7)$$

формула ёрдамида келтирилади. Бу ерда (Δ) — u, v параметрларнинг ўзгариш соҳаси, интеграл олдидаги ишора (S) сирт томонининг берилишига қараб олинади. Бу формулага асосан ҳажм учун

$$V=\frac{1}{3}\cdot\Big[\pm\iint\limits_{(\Delta)}(xA+yB+zC)\,d\varphi\,d\theta\Big]$$

икки каррали интеграл ҳосил бўлади.



122- чизма

Ташқи нормалнинг йўналиши кичик айлана радиуси NM нинг йўналиши билан устма-уст тушади, демак, $\cos\gamma$ нинг ишораси $\sin\theta$ нинг ишораси билан устма-уст тушади. Шунинг учун $C = a(b + a\cos\theta)\sin\theta$ эканлигини ҳисобга олиб, радикал олдида ва юқоридаги интеграл олдида мусбат ишорани оламиз. Интеграл остидаги ифодани тор сиртининг формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$x\cdot A + yB + zC = (b + a\cos\theta)a(b + a\cos\theta)\cos^2\varphi\cos\theta + (b + a\cos\theta)\sin\varphi\cdot a(b + a\cos\theta)\cos\theta\sin\varphi + a\sin\theta\cdot a b + a\cos\theta)\sin\theta =$$

$$= a(b + a\cos\theta)\cdot[(b + a\cos\theta)\cos\theta + a\sin^2\theta] = a(b + a\cos\theta)(b\cos\theta + a) = a\left[(a^2 + b^2)\cos\theta + \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}ab\cos 2\theta\right].$$

Энди φ, θ параметрларнинг ўзгариш соҳасини ёзамиз:

$$(\Delta) = \{(\varphi, \theta):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Шундай қилиб, ҳажмни узил-кесил ҳисоблаш мумкин:

$$V = \frac{1}{3}a\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}\left[(a^2 + b^2)\cos\theta + \frac{3}{2}ab + \frac{ab}{2}\cos 2\theta\right]d\theta =$$

$$= \frac{2\pi a}{3}\left[(a^2 + b^2)\sin\theta + \frac{3}{2}ab\,\theta + \frac{ab}{2\cdot 2}\sin 2\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi a}{3}\cdot\frac{3}{2}ab\cdot 2\pi = 2\pi^2 a^2 b \text{ (куб бирл.).}$$

3- мисол. Ушбу $I = \iint\limits_{(S)}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$ сирт интеграли ҳисоблансин, бу ерда (S) — қуйидаги шартлар билан берилган конуснинг тўлиқ ташқи сирти:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant b.$$

Ечиш. (S) сирт берилган конуснинг ён сирти (S_1) ва $z = b$ текисликдаги $ABCEA$ контур билан чегараланган доира сирти (S_2) ларнинг йиғиндисидан иборат (122- чизма). Демак, (V) жисм ёпиқ $(S) = (S_1) + (S_2)$ сирт билан қопланган бўлади ва Остроградский формуласидан фойдаланиш мумкин ((5.4) формула): $I = \iiint\limits_{(V)} 2(x + y + z)\,dx\,dy\,dz$, чунки $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$. Бу интегрални ҳисоблаш учун цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасига $x = ar\cos\varphi$, $y = ar\sin\varphi$, $z = z$, $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = a^2 r$ формулалар билан ўтамиз. Конуснинг ён сирти (S_1) учун $r^2 - \frac{1}{b^2} z^2 = 0$, яъни $z = br$ тенгламага эгамиз, демак, (V) соҳа янги

$$(\Delta) = \{(r, \varphi, z):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ br \leqslant z \leqslant b\}$$

соҳага аксланади. Энди интегрални ҳисоблаймиз:

$$\mathrm{I} = 2\iiint\limits_{(\Delta)} (ar\cos\varphi + ar\sin\varphi + z)\, a^2 r\, dr\, d\varphi\, dr =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_{br}^{r} dz \int\limits_0^{2\pi} (ar\cos\varphi + ar\sin\varphi + z)\, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_{br}^{b} -(ar\sin\varphi - ar\cos\varphi + z\varphi)\Big|_0^{2\varphi} dz = 2a^2 \int\limits_0^1 r dz \int\limits_{br}^{b} -2\pi z\, dz =$$

$$= 2\pi a^2 \int\limits_0^1 rz^2\Big|_{br}^{b} dr = 2\pi a^2 b^2 \int\limits_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi a^2 b^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} a^2 b^2.$$

4-мисол. Олдинги мисолдаги I интеграл конуснинг фақат ён сирти бўйича ҳисоблансин.

Ечиш. Остроградский формуласига асосан 3-мисолда

$$\iint\limits_{(S)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS = 2 \cdot \iiint\limits_{(V)} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$

тенглик ўринли эди. Лекин чапдаги сирт интеграли иккита (S_1) ва (S_2) соҳалар бўйича ҳисобланган

$$I_1 = \iint\limits_{(S_1)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS$$

ва

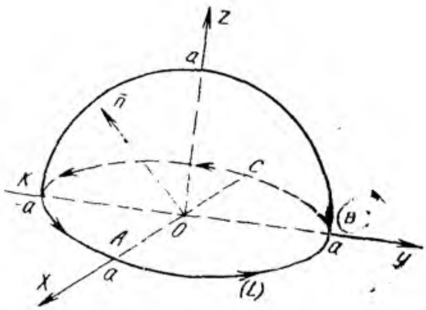
$$I_2 = \iint\limits_{(S_2)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS$$

интеграллар йиғиндисига тенг. Бу мисолда топилаётган интеграл эса I_1 га тенг. Демак, юқоридаги Остроградский — Лиувилль формуласининг ўнг томонидаги уч каррали интеграл натижаси $\frac{1}{2}\pi a^2 b^2$ дан I_2 ни ҳисоблаб айирсак, I_1 нинг қийматини топамиз

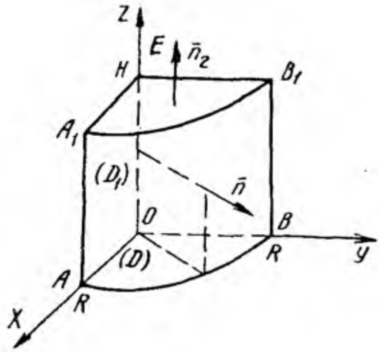
$$I_1 = \frac{1}{2}\pi a^2 b^2 - I_2.$$

I_2 учун (S_2) соҳа $z = b$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ шартлар билан берилган (конус асосидаги доира). (S_2) даги ташқи $\bar{n}$ нормаль учун $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ ва

$I_2 = \iint\limits_{(S_2)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_{(S_2)} b^2 \cdot 1 \cdot dS = \pi a^2 b^2$, чунки $\iint\limits_{(S_2)} dS = \pi a^2$ асоснинг юзига тенг бўлган қиймат. Демак,



123- чизма



124- чизма

$$I = I_1 = \frac{1}{2}\pi a^2 b^2 - \pi a^2 b^2 = -\frac{1}{2}\pi a^2 b^2.$$

5- мисол. Ушбу

$$I = \iint_{(S)} [(z^n - y^n)\cos\alpha + (x^n - z^n)\cos\beta + (y^n - x^n)\cos\gamma]\, dS$$

интеграл ҳисоблансин, бу ерда (S) маркази $O\ (0; 0; 0)$ да ва радиуси a га тенг бўлган ярим шарнинг $(z \geqslant 0)$ тўлиқ сирти. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — ташқи нормалнинг йўналтирувчи косинуслари.

Ечиш. Мисолда айтилган ярим шарни тўлиқ қоплаган (S) сирт иккита $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ярим сфера сирти билан (x, y) текисликдаги $ABCKA$ контур билан чегараланган доира сиртидан тузилган (123- чизма). Остроградский формуласини ишлатиш мумкин:

$$P = z^n - y^n,\ Q = x^n - z^n,\ R = y^n - x^n,\ P'_x = 0,\ Q'_y = 0,\ R'_z = 0,$$

$$I = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz = \iiint_{(V)} 0 \cdot dx\, dy\, dz = 0,$$

бу ерда (V) — ярим шар ичида жойлашган соҳа.

6- мисол. Ушбу $I = \iint_{(S)} yz\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + xy\, dx\, dz$ интеграл Остроградский формуласига асосан ҳисоблансин. Бу ерда (S) — I октантда жойлашган ва $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$ сиртлар билан қопланган жисмни ўраб олган сиртнинг ташқи томони (124- чизма).

Ечиш. Юқорида берилган (5.3) формулага асосан берилган интегралда $P = xz$, $Q = xy$, $R = yz$, $P'_x = z$, $Q'_y = x$, $R'_z = y$ ва $I = \iiint_{(V)} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ бўлади. Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = r$ бўлади ва (V) соҳа (124- чизма) янги $(\Delta) = \left\{(r, \varphi, z):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant H\right\}$ соҳага аксланади. Натижада топамиз:

$$I = \int_0^H dz \int_0^R rdr \int_0^{\pi/2} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)\,d\varphi = \int_0^H dz \int_0^R rdr\,(r\sin\varphi -$$

$$- r\cos\varphi + z\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \int_0^H dz \int_0^R r\left(2r + \frac{\pi}{2} z\right) dr = \int_0^H \left(\frac{2}{3} r^3 + \frac{\pi}{4} zr^2\right)\Big|_0^R dr =$$

$$= \int_0^H \left(\frac{2}{3} R^3 + \frac{\pi}{4} R^2 z\right) dz = HR^2 \left(\frac{2}{3} R + \frac{1}{8} \pi H\right).$$

7-мисол. Ушбу $I = \iint\limits_{(S)} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dx\,dz$ сирт интеграли Остроградский формуласи ёрдамида ҳисоблансин, бу ерда (S) — I октантда жойлашган ва $z = x^2 + y^2$ айланма параболоид, $x^2 + y^2 = 1$ цилиндр ва координата текисликларидан тузилган бўлакли-силлиқ сиртнинг ташқи қисми.

Ечиш. (5.3) формуладан фойдаланамиз:

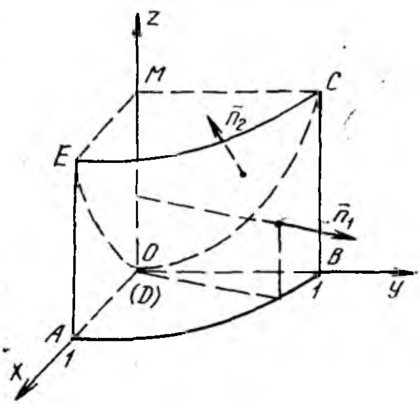
$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Мисолдаги интегралда $P = xz$, $Q = x^2 y$, $R = y^2 z$ ва $P'_x = z$, $Q'_y = x^2$, $R'_z = y^2$ бўлганлиги учун $I = \iiint\limits_{(V)} (z + x^2 + y^2)\,dV$, бу ерда (V) — биринчи октантдаги берилган сиртлар билан чегараланган фазовий жисм (125-чизма). Уч каррали интегрални ҳисоблаш учун цилиндрик координаталарга ўтсак, $z = x^2 + y^2$ параболоид тенгламаси $z = r^2$, $x^2 + y^2 = 1$ цилиндр тенгламаси $r = 1$ ва (V) соҳа учун у биринчи октантда бўлгани сабабли $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлади. (V) соҳа $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = r$ алмаштириш натижасида $(\Delta) = \left\{(r, \varphi, z)\colon\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant r^2\right\}$ соҳага аксланади. Топамиз:

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{r^2} (z + r^2), dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \left(\frac{z^2}{2} + r^2 z\right)\Big|_0^{r^2} dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{3}{2} r^5\,dr = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$



125-чизма

Машқ. Остроградский формуласидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

19.1. $I=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$ бу ерда (S) деб $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферанинг ташқи томони олинган.

19.2. $I=\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ташқи қисми олинган.

19.3. $I=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ куб сиртининг ташқи томони олинган.

19.4. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган пирамиданинг ташқи сирти олинган.

19.5. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферанинг ташқи томони олинган.

19.6. $I=\iint\limits_{(S)} (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2=z^2\,(0\leqslant z\leqslant h)$ конус сиртининг ташқи томони олинган.

19.7. $I=\iint\limits_{(S)} x^2yz\,dy\,dz+xy^2z\,dz\,dx+xyz^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг тўлиқ ташқи сирти олинган.

19.8. $I=\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2=2z$, $z=2$ сиртлар билан чегараланган жисмни ўраб олган сиртнинг тўлиқ ташқи томони олинган.

19.9. $I=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x^2+y^2=a^2$, $0\leqslant z\leqslant H$ цилиндр тўлиқ сиртининг ташқи томони олинган.

19.10. $I=\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$, бу ерда (S) деб $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид сиртининг ташқи томони олинган.

19.11. $I=\iint\limits_{(S)} xy\,dy\,dz+yz\,dz\,dx+xz\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ пирамиданинг ташқи томони олинган.

19.12. $I=\iint\limits_{(S)} yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$, бу ерда (S) деб III октантда жойлашган ва $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=4$, $x^2+y^2=9$ сиртлардан тузилган сиртнинг ташқи томони олинган.

19.13. $I=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) деб $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$ сферанинг ташқи қисми олинган.

19.14. $I=\iint\limits_{(S)} 4x^3\,dy\,dz+4y^3\,dx\,dz-6z^4\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=h$ цилиндрнинг тўлиқ сирти (ташқи қисми).

19.15. $I = \iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $z=0$, $z=c$ конус тўлиқ сиртининг ташқи қисми.

19.16. $I = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)\,(dy\,dz + dx\,dy + dz\,dx)$, бу ерда (S) ушбу $x^2 + y^2 = a^2$, $z = -5$, $z = 5$ сиртлардан тузилган цилиндр тўлиқ сиртининг ташқи қисми.

19.17. $I = \iint\limits_{(S)} 3x^2\,dy\,dz - 2y^2\,dz\,dx + 5z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ пирамиданинг ташқи томони.

19.18. $I = \iint\limits_{(S)} xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + xz\,dy\,dx$, бу ерда (S) I октантдаги $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ташқи сирти.

19.19. $I = \iint\limits_{(S)} (x - y)\,dy\,dz + (z - y)\,dz\,dx + (z - x)\,dx\,dy$, бу ерда (S):
а) $x + z + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
текисликлар билан чегараланган пирамида сиртининг ташқи томони; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферанинг ташқи томони.

19.20. $I = \iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $x^2 + y^2 = z^2$ ва $z = R\ (z \geqslant 0)$ конус тўлиқ сиртининг ташқи томони.

19.21. $I = \iint\limits_{(S)} x\cos y\,dy\,dz - \sin y\,dz\,dx + (z - 1)^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, $z = 4$ сиртлар билан чегараланган цилиндр ён сиртининг ички томони (нормал Oz ўққа қараб йўналган).

19.22. $I = \iint\limits_{(S)} (z + 1)\,dx\,dy$ бу ерда (S) ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$ ярим сферанинг* ташқи томони.

19.23. $I = \iint\limits_{(S)} (x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, бу ерда (S) ушбу $z = x^2 + y^2$ ва $z = 2x$ сиртлар билан чегараланган жисм сиртининг ташқи томони.

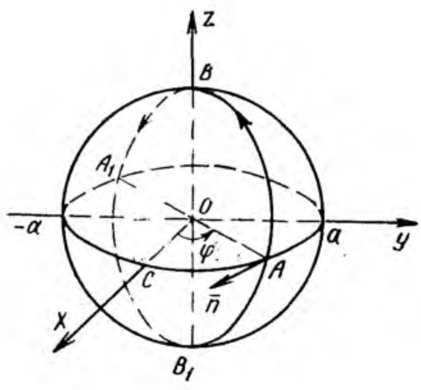
Энди Стокс формуласини қўлланишга доир бир неча мисол кўрамиз.

8- мисол. Ушбу $I = \oint\limits_{(L)} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) — Ox мусбат ярим ўқида туриб қаралганда соат милларининг ҳаракатига тескари йўналишда юриладиган $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ $(0 < \varphi < \pi)$ айлана.

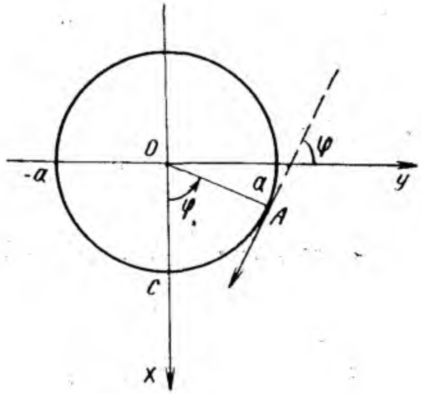
Ечиш. Бу мисолни ечиш учун Стокс формуласидан фойдаланамиз:

---

* Кўрсатма: $y = 0$ текислик билан берилган сиртни ёпиқ сиртга тўлдириш керак.



126- чизма



126а- чизма

$$\oint\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \quad (5.8)$$

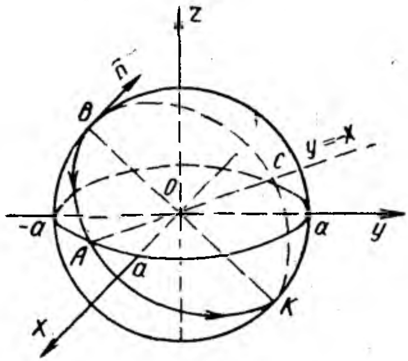
Ҳисобланаётган интеграл учун $P = y - z$, $Q = z - x$, $R = x - y$, $P'_y = 1$, $P'_z = -1$, $Q'_x = -1$, $Q'_z = 1$, $R'_x = 1$, $R'_y = -1$. (S) сирт деб ABA_1B_1A контур билан чегараланган доира сиртини оламиз (126-чизма). Бу доира жойлашган (S) сирт (текислик) тенгламаси $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$. (S) сиртнинг мусбат томонига ўтказилган $\bar{n}$ нормаль OA радиусга (доиранинг исталган радиусига ҳам) перпендикуляр бўлади ва Ox ўқ билан $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ бурчак, Oy ўқ билан $\beta = \pi - \varphi$ бурчак ташкил этади, Oz ўққа эса перпендикуляр (126-a чизма). Шунинг учун $\cos\alpha = \sin\varphi$, $\cos\beta = -\cos\varphi$, $\cos\gamma = 0$ бўлади. Топилган ҳамма керакли ифодаларни интегралга қўйиб топамиз:

$$I = \iint\limits_{(S)} (-2\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2\cdot 0)\,dS =$$

$$= -2\iint\limits_{(S)} (\sin\varphi - \cos\varphi)\,dS = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\cdot\iint\limits_{(S)} dS.$$

Лекин $\iint\limits_{(S)} dS$ интегралнинг қиймати $ABA_1\,B_1A$ контур билан чегараланган, радиуси эса a га тенг бўлган доиранинг юзига, яъни πa^2 га тенг. Демак, $I = 2\sqrt{2}\,\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$.

9-мисол. Ушбу
$$I = \oint\limits_{(L)} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$$
эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) ёпиқ контур—айлана: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

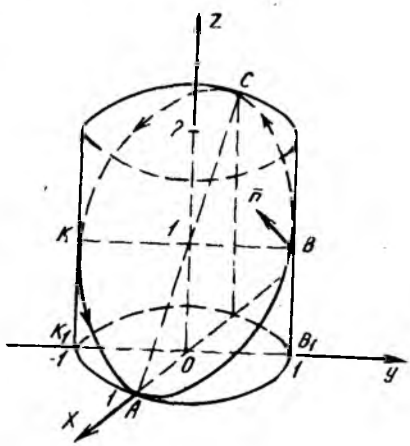


127-чизма

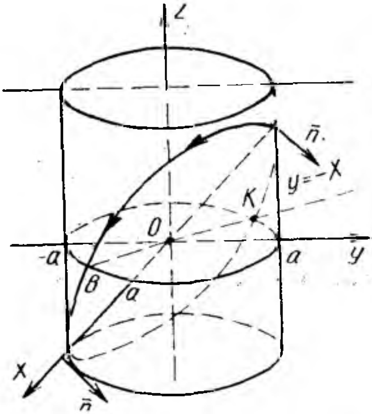
Ечиш. Фараз қилайлик, $x+y+z=0$ текислик учун $\bar{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ вектор мусбат йўналишда олинган бўлсин. Стокс формуласидан фойдалансак ва $P=y+z$, $Q=z+x$, $R=x+y$, $P'_y=P'_z=1$, $Q'_x=Q'_z=1$, $R'_x=R'_y=1$ қийматларни ҳисобга олсак,
$$I = \iint\limits_{(S)} [(R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma]\,dS = \iint\limits_{(S)} 0\cdot dS = 0$$
эканлигини кўрамиз. Бу ерда (S) (L) ёпиқ контур билан чегараланган $x+y+z=0$ текисликдаги доира юзи (127-чизма).

10-мисол. Ушбу $I = \oint\limits_{(L)} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) — эллипс:
$$x^2+y^2=1, \; x+z=1.$$

Ечиш. Бу мисолда ҳам Стокс формуласидан фойдалансак бўлади. Берилган интегралда $P=y-z$, $Q=z-x$, $R=x-y$ ва улар учун $P'_y=1$, $P'_z=-1$, $Q'_x=-1$, $Q'_z=1$, $R'_x=1$, $R'_y=-1$. Шунинг учун (3.1) формулага асосан $I = -2\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$ бўлади, бу ерда (S) сирт деб $x+z=1$ текисликнинг $ABCKA$ эллипс ичидаги қисми олинган (128-чизма). $\bar{n}$ нормаль учун йўналтирувчи косинусларни топамиз: $z=1-x$ функция учун $z'_x=-1$, $z'_y=0$,
$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$
$$\cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}.$$



128-чизма



129- чизма

$x + z = 1$ текисликнинг мусбат томонига ўтказилган $\bar{n}$ нормаль Oz ва Ox ўқлар билан ўткир $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{4}$ бурчак ва Oy ўқ билан $\beta = \frac{\pi}{2}$ бурчак ташкил этади. Шунинг учун формуладаги радикал олдида мусбат ишорани оламиз:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Энди қуйидагига эгамиз:

$$I = -2\iint\limits_{(S)} 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dS = -2\sqrt{2}\iint\limits_{(S)} dS.$$

(S) соҳанинг (x, y) текисликдаги (D) проекцияси $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$ доирадир. Сирт интегралдан икки каррали интегралга ўтиб ҳисоблаймиз:

$$I = -2\sqrt{2}\iint\limits_{(S)} dS = -2\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = -2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\iint\limits_{(D)} dx\,dy =$$

$$= -4\cdot S_{\text{доира}} = -4\pi\cdot 1^2 = -4\pi.$$

11-мисол. Ушбу $I = \oint\limits_{(L)} x dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$ интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) ёпиқ контур: $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Ечиш. Эгри чизиқнинг берилишидан кўриниб турибдики, x, y ва z лар орасида $x^2 + y^2 = a^2$, $z = x + y$ муносабатлар ўринли, яъни (L) контур $ABCKA$ эллипс чизиғидир (129-чизма). Унинг (x, y) текисликдаги проекцияси $x^2 + y^2 = a^2$ айланадир. Эгри чизиқдаги йўналиш t параметрнинг 0 дан 2π гача ўзгариб боришига боғлиқ бўлгани учун биз $A\ (0;\ a;\ a)$ дан $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ га ва $C\ (0; -a; -a)$ дан $K\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ га қараб ҳаракатланамиз ва $\bar{n}$ нормалнинг йўналишини шунга асосланиб аниқлаймиз. $x + y = z$ текисликнинг мусбат томонига ўтказилган $\bar{n}$ нормаль Oz ўқ билан ўтмас γ бурчак ташкил этади, яъни $\cos\gamma < 0$. Энди йўналтирувчи косинусларни топамиз:

$$\cos\gamma = \frac{1}{-\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\beta = \frac{-z_y'}{-\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\alpha = \frac{-z_x'}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I интеграл остидаги функциялар $P=x$, $Q=x+y$, $R=x+y+z$ бўлиб, уларнинг хусусий ҳосилалари $P'_y=0$, $P'_z=0$, $Q'_x=1$, $Q'_z=0$, $R'_x=1$, $R'_y=1$ ва (5.1) Стокс формуласига асосан

$$I=\iint\limits_{(S)}\left[(1-0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(0-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(1-0)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]dS=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}dS=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(D)}\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(D)}\frac{dx\,dy}{1/\sqrt{3}}=-\pi a^2.$$

Интегрални ҳисоблашда 1 тур сирт интегралнинг қиймати (S) сирт томонига боғлиқ эмаслигидан ва (D) соҳанинг юзи радиуси a бўлган доира юзига тенглигидан фойдаландик.

12- мисол. Ушбу $I=\oint\limits_{(L)}x^2y^3dx+dy+zdz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) ушбу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ярим сферани чегараловчи контур.

Ечиш. (L) контур (x, y) текисликдаги $x^2+y^2+R^2$, $z=0$ айланадан иборат. Ярим сферага ўтказилган $\bar{n}$ нормаль учун γ ўткир бурчак бўлади ва $\cos\gamma>0$. Сирт учун $z'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

$$z'_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};\ \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Шунга кўра $\cos\gamma=\frac{1}{+\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}=\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}$ деб, $\cos\alpha=$

$=\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}=\frac{x}{R}$ ва $\cos\beta=\frac{y}{R}$ эканлигини аниқлаймиз.

Энди (5.1) Стокс формуласидан фойдаланиш учун ушбу $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$ ва $P'_y=3x^2y^2$, $P'_z=0$, $Q'_x=Q'_z=0$, $R'_x=0$, $R'_y=0$

ҳисоб-китобларни бажарамиз. Ниҳоят, узил-кесил топамиз:

$$I=\iint\limits_{(S)}[0\cdot\cos\alpha+0\cdot\cos\beta+(-3x^2y^2)\cos\gamma]\,dS=$$

$$=-3\iint\limits_{(S)}\frac{x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}dS=-3\iint\limits_{(S)}\frac{x^2y^2z}{R}dS,$$

бу биринчи тур сирт интегралидан иборат.

Сферик (r, φ, θ) координаталар системасига ўтсак, ярим сферанинг нуқталари учун $r=R$ бўлиб, унда ётган нуқталар учун $x=R\cos\varphi\cos\theta$, $y=R\sin\varphi\cos\theta$, $z=R\sin\theta$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi;\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ бўлади. Сферик сирт учун φ, θ ларни эгри чизиқли координаталар деб, dS сирт дифференциалини унинг Гаусс коэффициентлари

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2\cos^2\theta,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = R^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \qquad (5.9)$$

орқали $dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta$ формула ёрдамида ҳисоблаймиз: $dS = R^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta$. Интеграл остидаги ифода қуйидаги кўринишга келади,

$$x^2 y^2 \cdot \frac{z}{R}\, dS = R^6 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \cos^5\theta \sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{8} R^6 (1 - \cos 4\varphi) \cdot \cos^5\theta \sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Энди I интегрални φ, θ параметрларнинг ўзгариш соҳаси $(\sigma) = \left\{(\varphi, \theta) \colon 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ бўйича оддий икки каррали интеграл каби ҳисоблаймиз:

$$I = -\frac{3}{8} \int_0^{2\pi} R^6 (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{3}{8} R^6 \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{8} R^6.$$

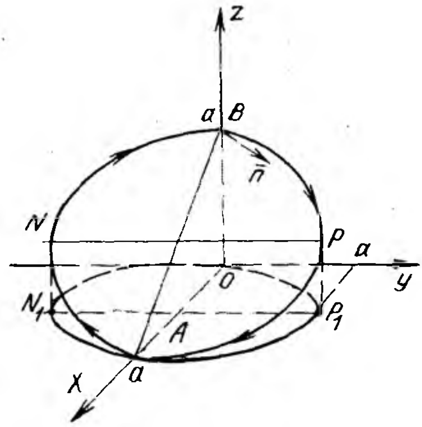
13-мисол. Ушбу $I = \oint\limits_{(L)} (y + 2z)\, dx + (2x + z)\, dy + (x + 2y)\, dz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда (L) эллипс:

$$x = a \sin^2 t,\ y = 2a \sin t \cos t,\ z = a \cos^2 t\ (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

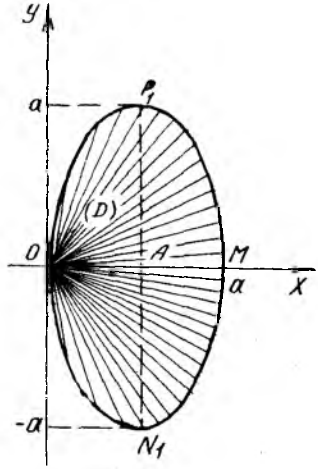
Ечиш. Эллипснинг параметрик тенгламасидан қуйидаги шартларни чиқариш мумкин:

а) $x + z = a$ (Oy ўққа параллел текислик тенгламаси),

б) $x^2 + \frac{1}{4} y^2 = a^2 \sin^4 t + a^2 \sin^2 t \cos^2 t = a^2 \sin^2 t = ax$, яъни $x^2 + \frac{1}{4} y^2 = ax$, $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} y^2 = \frac{a^2}{4}$, ёки $\frac{(x - a/2)^2}{(a/2)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Бу тенглама цилиндрик сирт тенгламаси. Цилиндрнинг ясовчиси Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси эса (x, y) текисликдаги маркази $A\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right)$ да ва ярим ўқлари $\frac{a}{2}$, a га тенг бўлган эллипсдир (130-чизма). Параметр t 0 дан π гача ўзгарганда $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ ва y эса $0 < t < \frac{\pi}{2}$ учун мусбат бўлиб, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ да эса манфий бўлади. Шунинг учун эллипс чизиғини $BPMNB$ контур бўйича айланиб чиқиш керак. Стокс формуласига ўтиш учун $x + z = a$ текисликнинг (S^+) томонига нормаль ўтказиш керак; бу нормаль Oz ўқ билан ўтмас γ бурчакни ташкил этади. Шундай қи-



130- чизма



131- чизма

либ, $\cos\gamma = \frac{1}{-\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \frac{-z_x'}{-\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos\beta = \frac{-z_y'}{-\sqrt{2}} = 0$ (чунки $z_x' = -1$, $z_y' = 0$). Берилган интегралда $P = y + 2z$, $Q = 2x + z$, $R = x + 2y$ ва $P_y' = 1$, $P_z' = 2$, $Q_x' = 2$, $Q_z' = 1$, $R_x' = 1$, $R_y' = 2$, демак, Стокс формуласига асосан

$$I = \iint\limits_{(S+)} [(2-1)\cos\alpha + (2-1)\cos\beta + (2-1)\cos\gamma]\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(S+)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dS = -\sqrt{2}\iint\limits_{(S+)} dS.$$

(D) — (x, y) текисликдаги эллипс билан чегараланган (S^+) соҳанинг шу (x, y) текисликдаги проекциясидир (131-чизма). 1 тур сирт интеграли формуласи бўйича топамиз:

$$I = -\sqrt{2}\iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = -2\iint\limits_{(D)} dx\,dy = -\pi a^2.$$

Кейинги интегралда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс билан чегараланган соҳанинг юзи учун $S = \pi ab$ формуладан фойдаландик (аналитик геометриядан маълум бўлган формула). Бу формуладан фойдаланмасак, $x = r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = 2r$ алмаштириш (D) соҳани

$$(\sigma) = \left\{(r, \varphi);\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant a\cos\varphi\right\}$$

соҳага акслантиради, чунки (x, y) текисликдаги эллипснинг $x^2 + \frac{1}{4} y^2 = ax$ тенгламаси $r^2 = ar\cos\varphi$, яъни $r = a\cos\varphi$ бўлади (131-чизма). Демак,

$$I = -2\iint_{(\sigma)} 2r\,dr\,d\varphi = -4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\,dr = -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= -a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = -a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\pi a^2.$$

Шундай қилиб, икки хил усул билан ҳисоблаганда ҳам $I = -\pi a^2$ натижага келамиз.

14- мисол. Ушбу $I = \oint_{(C)} (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$ эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бу ерда (C) эгри чизиқ;

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rx,\ x^2+y^2 = 2rx\ (0<r<R;\ z>0).$$

Кузатувчи (C) чизиқ бўйлаб юрганда, $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ сферанинг ташқи қисмидан ажратилган кичикроқ соҳа унинг чап томонида қолади.

Ечиш. Ўнг x, y, z декарт координаталар системасида кўрсатилган ҳаракат соат миллари ҳаракатига қарама-қарши бўлади. $OABPO$ контур билан чегараланган (S) сфера сирти қисмига ўтказилган нормаль Oz ўқ билан γ ўткир бурчак ташкил этади, $\cos\gamma > 0$ (132-чизма). Сфера тенгламасини $F(x, y, z) = 0$ ошкормас кўринишда ёзиб оламиз: $x^2+y^2+z^2-2Rx = 0$ ва $F'_x = 2x-2R$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$ ифодалардан фойдаланиб топамиз:

$$\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z} = 2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2} = 2R.$$

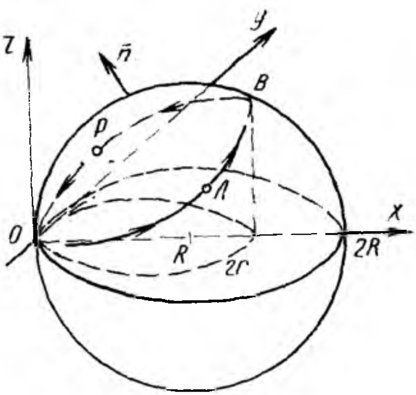
$F'_z = 2z$ бўлгани учун ($\cos\gamma$ нинг ишораси z апликата ишорасига ўхшаш) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ миқдорлар формуласида радикал олдида мусбат ишорани оламиз:

$$\cos\alpha = \frac{x-R}{R},\ \cos\beta = \frac{y}{R},\ \cos\gamma = \frac{z}{R}.$$

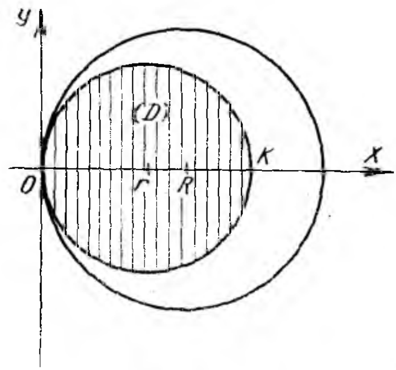
Стокс формуласига ўтиш учун берилган интегралда $P = y^2+z^2$, $Q = z^2+x^2$, $R = x^2+y^2$ эканини эътиборга олиб, $P'_y = 2y$, $P'_z = 2z$, $Q'_x = 2x$, $Q'_z = 2z$, $R'_x = 2x$, $R'_y = 2y$ ифодаларни топамиз. Энди берилган интегрални ҳисоблашга ўтамиз:

$$I = \iint_{(S)} [(2y-2z)\cos\alpha + (2z-2x)\cos\beta + (2x-2y)\cos\gamma]\,dS =$$

$$= \frac{2}{R}\iint_{(S)} \Big[(y-z)(x-R) + (z-x)\,y + (x-y)\,z\Big]\,dS = 2\iint_{(S)} (z-y)\,dS,$$



132-*чизма*



133-*чизма*

бу ерда (S) — юқорида айтиб ўтилган сферанинг қисми, (S) сирт $x^2+y^2=2rx$ цилиндрик сирт билан сферадан ажратилганлиги учун (S) нинг (x, y) текисликдаги проекцияси — (D) соҳа шу цилиндрнинг асосидаги $x^2+y^2\leqslant 2rx$ доира бўлади (133-чизма). 1 тур сирт интегралини ҳисоблаш учун $dS=\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\dfrac{R}{z}\,dxdy$ $(z>0)$ эканидан фойдаланиб, уни $I=2R\iint\limits_{(D)}(z-y)\dfrac{1}{z}\,dx\,dy$ икки каррали интегралга келтирамиз, бу ерда $z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$ ва

$$(D)=\{(x, y)\colon 0\leqslant x\leqslant 2r,\ -\sqrt{2rx-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2rx-x^2}\}.$$

Натижада қуйидагига эгамиз: $I=2R\iint\limits_{(D)}\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right)dxdy=$

$$=2R\left[\iint\limits_{(D)}dx\,dy-\iint\limits_{(D)}\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right]=2R\cdot[I_1-I_2].$$

Қавс ичидаги биринчи интеграл (D) соҳанинг юзига, яъни радиуси r га тенг бўлган доира юзи πr^2 га тенг. Иккинчи интеграл 0 га тенг, чунки

$$I_2=\int\limits_0^{2r}dx\int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\frac{y\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=-$$

$$=-\int\limits_0^{2r}\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,\Bigg|_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}dx=$$

$$=-\int\limits_0^{2r}\left[\sqrt{2Rx-x^2-(2rx-x^2)}-\sqrt{2Rx-x^2-(2rx-x^2)}\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^{2r}0\cdot dx=0.$$ Демак, $I=2R\cdot I_1=2\pi r^2\cdot R$.

Машқ.

Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

19.24. $I = \oint\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$, бу ерда (L) айлана: $x = a\cos^2 t$, $y = a\sqrt{2}\sin t\cos t$, $z = a\sin^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

19.25. $I = \oint\limits_{(L)} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, бу ерда (L) эллипс: $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$, бунда Ox мусбат ярим ўқда туриб қаралганда ҳаракат соат миллари ҳаракатига қарама-қарши йўналишда бўлади.

19.26. $I = \oint\limits_{(L)} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, бу ерда (L) ушбу $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ кубнинг $x + y + z = \frac{3}{2}a$ текислик билан кесишиш чизиғи, Ox мусбат ярим ўқда туриб қаралганда (L) чизиқни соат миллари ҳаракатига тескари бўлган йўналишда ўтиш керак.

19.27. $I = \oint\limits_{(L)} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, бу ерда (L) айлана: $x = R\cos\alpha\cos t$, $y = R\cos\alpha\sin t$, $z = R\sin\alpha$ $(\alpha = \mathrm{const})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, бунда ҳаракат параметр t нинг ўсишига қараб олинган.

19.28. $I = \oint\limits_{(L)} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, бу ерда (L) контур $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферанинг I октантдаги $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ қисмини чегаралайди ва контур бўйича ҳаракатланганда сферанинг ташқи томони чап томонда қолади.

19.29. $I = \oint\limits_{(L)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, бу ерда (L) ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$ айлана, бунда $O\ (0;\ 0;\ 0)$ координаталар бошидан қаралганда контур бўйича ҳаракат соат миллари ҳаракати билан бир хил бўлади.

19.30. $I = \oint\limits_{(L)} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, бу ерда (L) Вавиани чизиғининг қисми:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = Rx\ \ (z \geqslant 0;\ R > 0),$$

бунда Ox мусбат ярим ўқда туриб қаралганда (L) чизиқ соат миллари ҳаракатига тескари бўлган йўналишда ўтилади.

19.31. $I = \oint\limits_{(ABCA)} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, бу ерда $ABCA$ учбурчак контури: $A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ a)$.

19.32. $I = \oint\limits_{(L)} x^2y^3\,dx + dy + dz$, бу ерда (L) айлана: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, бунда контур бўйича юриш соат миллари ҳаракатига тескари.

19.33. $I = \oint\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$, бу ерда (L) ёпиқ контур: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (I октантдаги).

19.34. $I = \oint\limits_{(L)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, бу ерда (L) эллипс: $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

19.35. $I = \oint\limits_{(L)} y\,dx - x\,dy + z\,dz$, бу ерда (L) айлана: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, бунда Oz ўқнинг мусбат йўналишидан қаралганда юриш соат миллари ҳаракатига тескари.

19.36. $I = \oint\limits_{\overset{\frown}{AnBA}} -y\,dx + x\,dy + z\,dz$, бу ерда $\overset{\frown}{AnB}$ ушбу $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ винт чизиғининг ёйи, $\overset{\frown}{BA}$ эса $B\ (a;\ 0;\ 2\pi b)$ ва $A\ (a;\ 0;\ 0)$ нуқталар орасидаги кесма.

19.37. $I = \oint\limits_{(L)} (z - x^2)\,dx + (x - y^2)\,dy + (y - z^2)\,dz$, бу ерда (L) учлари $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 1)$ да бўлган учбурчак контури бўлиб, ҳаракат $ABCA$ йўналишда бажарилади. ($O\,(0;\ 0;\ 0)$ дан қаралганда контур бўйича ҳаракат соат миллари ҳаракати билан устма-уст тушади).

19.38. $I = \oint\limits_{(L)} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, бу ерда (L) ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сфера билан: а) $x + y + z = 0$; б) $x + y + z = 1$; в) $x - y + z = -1$ текисликлар кесишганда ҳосил бўлган айлана бунда $A\,(0;\ 2;\ 0)$ нуқтадан қаралганда (L) контур бўйича юриш соат миллари ҳаракатига тескари.

19.39. $I = \oint\limits_{(L)} (y - x)\,dx + (z - y)\,dy + (x - z)\,dz$, бу ерда (L) айлана: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = a$, бунда $B\ (0;\ 0;\ 2a)$ нуқтадан қаралганда контур бўйича юриш соат миллари ҳаракатига тескари $(0 < a < \sqrt{3})$.

19.40. $I = \oint\limits_{(L)} y\,dx + z^2dy + x^2dz$, бу ерда (L) айлана: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = \sqrt{3}$, бунда $A\ (0;\ 0;\ 2)$ нуқтадан қаралганда контур бўйича юриш соат миллари ҳаракатига тескари.

ЖАВОБЛАР

1- боб.

1- §. **1.1.** $58\frac{2}{3}\pi$; **1.2.** $24\pi+41\frac{1}{3}$; **1.3.** $79\frac{11}{16}$; **1.4.** $\frac{3}{2}$; **1.5.** 60; **1.6.** 0; **1.7.** 224; **1.8.** 240; **1.9.** 72; **1.10.** $s(f)=3\pi\left[1+\frac{7}{8}\left(4-\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}\right)\times\frac{\sin\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\sin\frac{\pi}{6n}}\right]$ $\cdot$ $S(f)=3\pi\left[1+\frac{7}{8}\left(4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sin\frac{\pi}{6n}}\right]$, $\frac{3}{2}(2\pi+21)$; **1.11.** $s(f)=-81\left(1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)$, $S(f)=-81\left(1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)$, -81; **1.12.** $s(f)=18\left(37-\frac{27}{n}\right)$, $S(f)=18\left(37+\frac{27}{n}\right)$, 666; **1.13.** $s(f)=$ $=\frac{5\pi}{4}\left(\frac{61}{3}-\frac{35}{2n}+\frac{25}{6n^2}\right)$, $S(f)=\frac{5\pi}{4}\left(\frac{61}{3}+\frac{35}{2n}+\frac{25}{6n^2}\right)$, $25\frac{5}{12}\pi$.

2- §.

2.1. $\int_0^3 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_3^6 dx\int_0^3 f(x,y)\,dy+\int_6^9 dx\int_{x-6}^{3} f(x,y)\,dy$, $\int_0^3 dy\int_y^{y+6} f(x,y)\,dx$.

2.2. $\int_0^2 dx\int_0^{x/2} f(x,y)\,dy+\int_2^6 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy+\int_6^8 dx\int_0^{4-x/2} f(x,y)\,dy$, $\int_0^1 dy\int_{2y}^{8-2y} f(x,y)\,dx$.

2.3. $\int_0^3 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy+\int_3^6 dx\int_{2x-3}^{x+3} f(x,y)\,dy$, $\int_0^3 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx+\int_3^6 dy\int_{y/2}^{\frac{1}{2}(y+3)} f(x,y)\,dx+$ $+\int_6^9 dy\int_{y-3}^{\frac{1}{2}(y+3)} f(x,y)\,dx$. **2.4.** $\int_{-1}^{2} dx\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$, $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+$ $+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. **2.5.** $\int_a^{a\sqrt{2}} dx\int_{\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_a^{a\sqrt{2}} dx\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{-\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dy+$

$$+\int_{a\sqrt{2}}^{2a} dx\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy \quad \int_{-a}^{a} dy\int_{\sqrt{2a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

2.6. $\int_0^3 dx\int_{-x}^{2x-x^2} f(x,y)\,dy$, $\int_{-3}^{0} dy\int_{-y}^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$.

2.7. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_{x^2-4x}^{x} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{2-\sqrt{4+y}}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^5 dy \int\limits_{y}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\,dx$. **2.8.** $\int\limits_{2/3}^{2} dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{6} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2}^{2\sqrt{3}} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{6} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_2^6 dy \int\limits_{\frac{4}{y}}^{\sqrt{2y}} f(x, y)\,dx$. **2.9.** $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{2x^2}^{9-x^2} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y)\,dx + \int\limits_6^9 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y}}^{\sqrt{9-y}} f(x, y)\,dx$. **2.10.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{4x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^8 dx \int\limits_x^8 f(x, y)\,dy$, $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{4}{y}}^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_4^8 dy \int\limits_{\frac{1}{4}y}^{y} f(x, y)\,dx$. **2.11.** $\int\limits_1^{3/2} dx \int\limits_{4/x}^{4x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{3/2}^{2} dx \int\limits_{y}^{6} f(x,y)dy + \int\limits_2^6 dx \int\limits_x^6 f(x, y)\,dy$, $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{4/y}^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{7/4}^{y} f(x, y)\,dx$.

2.12. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x, y)\,dx$. **2.13.** $\int\limits_1^5 dx \int\limits_{x^2-4x}^{2x-5} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_{-4}^{-3} dy \int\limits_{2-\sqrt{4+y}}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-3}^{5} dy \int\limits_{\frac{1}{2}(y+5)}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\,dx$. **2.14.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^1 f(x, y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_0^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\,dx$.

2.15. $\int\limits_3^7 dx \int\limits_{9/x}^{3} f(x, y)\,dy + \int\limits_7^9 dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x, y)\,dx$.

2.16. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{24(x+2)}}^{\sqrt{24(x+2)}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{8(2-x)}}^{\sqrt{8(2-x)}} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} dy \int\limits_{\frac{1}{24}y^2-2}^{2-\frac{y^2}{8}} f(x, y)\,dx$. **2.17.** $\int\limits_{-4}^{1} dx \int\limits_{x^2+4x}^{x+4} f(x, y)\,dy$,

$$\int_{-4}^{0} dy \int_{-2-\sqrt{4+y}}^{-2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{5} dy \int_{y-4}^{-2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\, dx.$$

2.18. $\int_{1}^{5} dx \int_{x^2-4x}^{x} f(x, y)\, dy$, $\int_{-4}^{-3} dy \int_{2-\sqrt{4+y}}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\, dx + \int_{-3}^{1} dy \int_{1}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\, dx +$

$+ \int_{1}^{5} dy \int_{y}^{2+\sqrt{4+y}} f(x, y)\, dx$. **2.19.** $\int_{-\frac{4}{3}}^{1} dx \int_{-\sqrt{4+3x}}^{\sqrt{4+3x}} f(x, y)\, dy +$

$+ \int_{1}^{\frac{11}{4}} dx \int_{-\sqrt{11-4x}}^{\sqrt{11-4x}} f(x, y)\, dy$, $\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} dy \int_{\frac{1}{3}(y^2-4)}^{\frac{1}{4}(11-y^2)} f(x, y)\, dx.$

2.20. $\int_{-2}^{-\frac{4}{3}} dx \int_{-\sqrt{3(2+x)}}^{\sqrt{3(2+x)}} f(x, y)\, dy + \int_{-4/3}^{3/2} dx \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x, y)\, dy +$

$+ \int_{3/2}^{2} dx \int_{-2\sqrt{2-x}}^{2\sqrt{2-x}} f(x, y)\, dy$, $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{1}{3}y^2-2}^{2-\frac{1}{4}y^2} f(x, y)\, dx$. **2.21.** $\int_{-1}^{0} dy \int_{10^{-y}}^{10} f(x, y)\, dx +$

$+ \int_{0}^{1} dy \int_{10^{y}}^{10} f(x, y)\, dx$. **2.22.** $\int_{0}^{3} dy \int_{\frac{1}{3}y}^{y} f(x, y)\, dx + \int_{3}^{9} dy \int_{\frac{1}{3}y}^{3} f(x, y)\, dx.$

2.23. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\, dx$. **2.24.** $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{2} dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1} f(x, y)\, dx.$

2.25. $\int_{0}^{4} dx \int_{x-4}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\, dy$. **2.26.** $\int_{0}^{3} dx \int_{\frac{1}{6}x^2}^{3-\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy +$

$+ \int_{0}^{3} dx \int_{3+\sqrt{9-x^2}}^{6} f(x, y)\, dy + \int_{3}^{6} dx \int_{\frac{1}{6}x^2}^{6} f(x, y)\, dy$. **2.27.** $\int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{2\ln x} f(x, y)\, dy.$

2.28. $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt[3]{e^x}}^{e^x} f(x, y)\, dy + \int_{1}^{3} dx \int_{\sqrt[3]{e^x}}^{e} f(x, y)\, dy$. **2.29.** $\int_{-2}^{2} dx \int_{x-2}^{4-x^2} f(x, y)\, dy.$

2.30. $\int_{-4}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{x+4}} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{2\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2} f(x, y)\, dy + \int_{2\sqrt{3}}^{4} dx \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2.31. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{-1}^{1} f(x, y)\, dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx.$

2.32. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx.$ 2.33. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{-a\sqrt{1-2y}} f(x, y)\, dx +$

$+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{a\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2.34. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}x}^{x} f(x, y)\, dy + \int\limits_2^{2\sqrt{3}} dx \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}x}^{2} f(x, y)\, dy.$

2.35. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x, y)\, dx.$ 2.36. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy.$

2.37. $\int\limits_e^{e^2} dx \int\limits_{\ln x}^{\ln x^2} f(x\ y)\, dy.$ 2.38. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-1}^{y^2} f(x, y)\, dx.$

2.39. $+\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2}-y} f(x, y)\, dx +$

$+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2}-y} f(x, y)\, dx.$ 2.40. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{4}+y-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2.41. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{8}y^2}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x, y)\, dx +$

$+\int\limits_2^{4\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{1}{8}y^2}^{4} f(x, y)\, dx.$ 2.42. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy +$

$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^1 f(x, y)\, dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\, dy.$

3-§.

3.1. $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi = \int\limits_{0}^{2} rdr \int\limits_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$

3.2. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a}^{b} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi = \int\limits_{a}^{b} rdr \int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$

3.3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi = \int\limits_{0}^{a} rdr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$

3.4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} rdr \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi +$ $+ \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr \left[\int\limits_{0}^{\alpha-\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}-\alpha}^{\pi/2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi \right],$ бу ерда $\alpha = \arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}$. 3.5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot rdr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr +$ $+ \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot rdr = \int\limits_{0}^{a} rdr \int\limits_{\alpha,(r)}^{\pi-\alpha,(r)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi +$ $+ \int\limits_{a}^{\sqrt{2}a} rdr \left[\int\limits_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi + \int\limits_{\pi-\alpha_2(r)}^{\pi-\alpha_1(r)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi \right].$ бу ерда $\alpha_1(r) = \arcsin\frac{\sqrt{a^2+4r^2}-a}{2r}$, $\alpha_2(r) = \arcsin\frac{a}{r}$.

3.6. $\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} rdr \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi,$ бу ерда $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 3.7. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\sin\varphi}} r\cdot f(r^2)dr = \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} r\cdot f(r^2)dr \int\limits_{\pi/6}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi +$ $+ \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} r\cdot f(r^2)dr \int\limits_{\pi/6}^{\arcsin\frac{2}{r}} d\varphi.$ 3.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr =$

$$=\int_0^2 rdr\int_0^{\pi/3} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi+\int_2^4 rdr\int_{\arccos\frac{2}{r}}^{\pi/3} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$

3.9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=\int_0^2 rdr\int_{\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_2^4 rdr\int_0^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$ **3.10.** $$\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{2} rdr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{r}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$ **3.11.** $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{2\sqrt{2}}^{4\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_{2\sqrt{2}}^{4} rdr\int_{-\arccos\frac{r}{4}}^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$ **3.12.** $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi\int_{3\sqrt{2}}^{6\sin\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_{3\sqrt{2}}^{6} rdr\int_{\arcsin\frac{r}{6}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{6}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$ **3.13.** $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi\int_{-4\cos\varphi}^{-8\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_0^4 rdr\int_{\pi-\arccos\frac{r}{8}}^{\pi-\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi+\int_0^4 rdr\int_{\pi+\arccos\frac{r}{4}}^{\pi+\arccos\frac{r}{8}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_4^8 rdr\int_{\pi-\arccos\frac{r}{8}}^{\pi+\arccos\frac{r}{8}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$ **3.14.** $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{6}{\cos\varphi+\sin\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_0^{3\sqrt{2}} rdr\int_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi+\int_{3\sqrt{2}}^{6} rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{3\sqrt{2}}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi;\ \left(\frac{\pi}{4}-\right.$$

$$\left.-\arccos\frac{3\sqrt{2}}{r}=\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{r}-\frac{\pi}{4}\right).$$ **3.15.** $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_0^{2\sqrt{2}} r\,dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{4} r\,dr \int_{-\arccos\frac{r}{4}}^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$$

3.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr = \int_0^{2} r\,dr \int_{\arcsin\frac{r}{5}}^{\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi +$

$+\int_2^5 r\,dr \int_{\arcsin\frac{r}{5}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$. **3.17.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{4} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr +$

$+\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^4 r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{4} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr =$

$=\int_0^4 r\,dr \int_{\arccos\frac{r}{4}}^{2\pi-\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$. **3.18.** $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} d\varphi \int_1^{2\cos3\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr =$

$=\int_1^2 r\,dr \int_{-\frac{1}{3}\arccos\frac{r}{2}}^{\frac{1}{3}\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$. **3.19.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr =$

$=\int_0^1 r\,dr \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos r} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi + \int_0^1 r\,dr \int_{\arccos r}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi +$

$+\int_1^2 r\,dr \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$. **3.20.** $\int_0^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr +$

$+\int_{\operatorname{arctg}2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr = \int_0^{4\sqrt{5}} r\,dr \int_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi.$

3.21. $\int_{\operatorname{arctg}2}^{\operatorname{arctg}3} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr = \int_0^{\sqrt{5}} r\,dr \int_{\operatorname{arctg}2}^{\operatorname{arctg}3} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi +$

$+\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}} r\,dr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\operatorname{arctg}3} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$. **3.22.** $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}} r\cdot f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)dr =$

$$=\int_0^a r\,dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$ 3.23. $$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{2+\sin\varphi}^{2+\cos\varphi} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_1^{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} r\,dr\int_{\pi+\arcsin(2-r)}^{2\pi-\arcsin(2-r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\int_{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} r\,dr\int_{2\pi-\arccos(r-2)}^{2\pi-\arcsin(2-r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} r\,dr\int_{-\arccos(r-2)}^{\arcsin(r-2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi+\int_{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{3} r\,dr\int_{-\arccos(r-2)}^{\arccos(r-2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

4-§.

4.1. 4,5. **4.2.** 64,8. **4.3.** 18π, **4.4.** 4/3. **4.5.** $\pi(3\ln 3-2)$. **4.6.** $\pi\cdot\frac{a^3}{6}$. **4.7.** $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$. **4.8.** $\frac{11}{12}$. **4.9.** $-6\pi^2$. **4.10.** $543\frac{11}{12}$. **4.11.** 61. **4.12.** $\frac{6}{35}$. **4.13.** $72\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **4.14.** $\frac{\pi}{3}a^3$. **4.15.** 10π. **4.16.** 18; **4.17.** $-6\frac{1}{3}$. **4.18.** $8(6-\pi)$; **4.19.** e^2-1. **4.20.** $\frac{5}{8}\pi a^2$. **4.21.** $0,5\pi$. **4.22.** $\frac{4}{3}(4\pi-\sqrt{3})$. **4.23.** $\frac{32}{5}$. **4.24.** $4\frac{1}{2}$. **4.25.** $\frac{4}{3}$. **4.26.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$, **4.27.** $20\frac{5}{6}$. **4.28.** $\ln 3$.

5-§.

5.1. $\frac{1}{2}\int_2^3 du\int_{u-6}^{u} f(u, v)dv$. **5.2.** a) $\frac{1}{8}\left[9+\sqrt{33}-4\sqrt{3}+8\ln\frac{8^4}{(\sqrt{33}-1)^4(\sqrt{3}+1)}\right]$; б) $\frac{1}{4}(252-8\sqrt{3}-11\sqrt{33})$. **5.3.** 2. **5.4.** a) 0, б) $\frac{21}{2^9}\pi a^4$; **5.5.** $\frac{3}{4}$. **5.6.** $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$. **5.7.** $a^2b^2/2c^2$. **5.8.** 1/35. **5.9.** $\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$. **5.10.** 3π. **5.11.** $\frac{2}{3}a^2b^2$. **5.12.** $\frac{3}{4}\cdot a^2(\pi-\sqrt{3})$. **5.13.** $\frac{1}{6}a^2$. **5.14.** $\frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **5.15.** $\frac{1}{10}\cdot\frac{a^5b}{h^4}$ **5.16.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **5.17.** $\frac{55}{64}ab$. **5.18.** $\frac{1}{2}(b^2-a^2)\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **5.19.** $\frac{1}{3}(b^2-a^2)\cdot\ln\frac{n}{m}$.

6-§.

6.1. 45. **6.2.** $4e-e^2-1$. **6.3.** $\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{6}$ **6.4.** $\frac{15}{16}(\pi+2)$. **6.5.** $\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{40}{9}-\right.$

$-\frac{32}{9}\sqrt{2}\Big)a^3$. 6.6. $\frac{1}{3}abc$. 6.7. $\frac{1}{2}\pi^2 abc$. 6.8. $\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right)abc$. 6.9. $\frac{1}{9}abc$. 6.10. $\frac{1}{192}am(a+m)(3a^2-5am+3m^2)$. 6.11. $\frac{25}{4}$. 6.12. $\frac{3\pi}{8}abc$. 6.13. $\frac{75}{256}\pi abc$. 6.14. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 6.15. 96π. 6.16 $186\frac{2}{3}$. 6.17. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ 6.18. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. 6.19. $\frac{4\pi}{3}$. 6.20 $\frac{2187}{32}\pi$. 6.21. 1. 6.22. $20\frac{1}{4}$. 6.28. $\frac{1}{30}[72(\sqrt{3}-\sqrt{2})-5]$. 6.24. $\frac{96}{5}\sqrt{6}$. 6.25. $8\sqrt{2}ab$. 6.26. $\frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 6.27. $\frac{\pi}{6}[3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})]$. 6.28. $8a^2$. 6.29. $2a^2$. 6.30. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[3-\sqrt{\frac{3}{2}}+\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)\right]$. 6.31. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. 6.32. $\frac{a+b}{6}\sqrt{2ab}$. 6.33. $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$. 6.34. $\pi\sqrt{2}$. 6.35. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. 6.36. $2\pi a^2(2\sqrt{2}-1)/3$. 6.37. $\frac{abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\cdot\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{3/2}-\frac{1}{c^3}\right]$. 6.38. $\pi/\sqrt{2}$. 6.39. $\frac{1}{9}(20-3\pi)$. 6.40. $\frac{\pi a^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$. 6.41. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ 6.42. $a^2(2\pi+8-8\sqrt{2})$. 6.43. $(20-3\pi)$. 6.44. $\frac{ab}{9}(20-3\pi)$. 6.45. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$.

7-§.

7.1. $x_c=0,\ y_c=\frac{4b}{3\pi}$. 7.2. $x_c=\frac{2}{3}R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ y_c=0$. 7.3. $x_c=y_c=\frac{256a}{315\pi}$. 7.4. $x_c=\frac{\pi a\sqrt{2}}{8},\ y_c=0$. 7.5. $J_x=\frac{26}{105}a^4,\ J_y=\frac{a^4}{30}$. 7.6. $J_x=J_y=\frac{\pi}{16}a^4$. 7.7. $x_c=\frac{13}{20},\ y_c=0$. 7.8. $J_x=\frac{\pi ab^3}{4},\ J_y=\frac{\pi a^3b}{4}$. 7.9. $J_x=3\frac{1}{3},\ J_y=110\frac{5}{6}$. 7.10. $J_0=\frac{1}{8}\pi a^4$. 7.11. $x_c=\frac{4}{2\pi-3\sqrt{3}},\ y_c=0$. 7.12. $J_x=J_y=\frac{9}{8}$. 7.13. $\frac{21\pi}{8}$. 7.14. $\frac{3}{2}\pi$. 7.15. $x_c=\frac{7}{2},\ y_c=\frac{31}{2}$. 7.16. $x_c=\frac{2(59+324\cdot\sqrt{3})}{9(44+24\sqrt{3}-9\ln 3)},\ y_c=\frac{2(162\sqrt{3}-75\ln 3+542)}{5(44+24\sqrt{3}-9\ln 3)}$. 7.17. $x_c=\frac{29}{36},\ y_c=\frac{181\cdot\sqrt{7}}{882}$. 7.18. $x_c=\frac{6(4-\pi^2)a}{\pi^3}$, $y_c=\frac{2(\pi^2-6)a}{\pi^2}$. 7.19. $x_c=\frac{28}{75},\ y_c=\frac{92}{105}$. 7.20. $x_c=\pi a,\ y_c=\frac{5a}{6}$. 7.21. $x_c=\frac{4a}{3\pi},\ y_c=\frac{4(a+b)}{3\pi}$. 7.22. $x_c=\frac{5a}{6},\ y_c=0$. 7.23. $x_c=y_c=\frac{128a}{105\pi}$. 7.24. $x_c=0,\ y_c=\frac{\pi}{2}$. 7.25. $J_x=\frac{2ah^3}{7},\ J_y=\frac{4a^3h}{15}$. 7.26. $x_c=\frac{9}{2},\ y_c=-1$. 7.27. $x_c=-1,\ y_c=\frac{16}{6}$.

8- §.

8.1. $2\frac{1}{2}$. 8.2. $\frac{44}{3}\pi$. 8.3. $\frac{\pi}{12}$ 8.4. $\frac{255}{8}(\sqrt{2}-1)\pi$. 8.5. $12+15(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$.

8.6. $\frac{1}{16}(b^4-a^4)(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)(p^2-m^2)$. 8.7. $\frac{1}{6}(\cos\alpha-\cos\beta)(b^3-a^3)(p^2-m^2)$.

8.8. $\frac{1}{8}(\beta-\alpha)(b^4-a^4)(p^2-m^2)$. 8.9. $\frac{1}{9}(\beta-\alpha)(b^3-a^3)(p^3-m^6)$. 8.10. $\frac{1}{12}(\beta-\alpha)(b^3-a^3)(p^4-m^4)$. 8.11. $\frac{1}{16}(\beta-\alpha)(b^4-a^4)(p^4-m^4)$. 8.12. $\frac{1}{2}(d-c)(p-m)(b-a)[3(b+a)+p+m+d+c]$. 8.13. $(b-a)(p-m)(d-c)\left[\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)+\frac{1}{2}(d+c)\right]$. 8.14. $\frac{1}{6}(b^3-a^3)(p-m)(d^2-c^2)$. 8.15. $\frac{1}{36}(b^3-a^3)(p^4-m^4)(d^3-c^3)$. 8.16. $(b-a)(d-c)(p-m)\left[\frac{4}{3}(a^2+ab+b^2)-(p^2+mp+m^2)\right]$. 8.17. $\frac{1}{4}(b-a)(p^4-m^4)\left[(b+a)+\frac{1}{4}(d+c)\right]$. 8.18. $\frac{1}{6}(b^2-a^2)(d-c)(p-m)[(p^2+mp+m^2)+(d^2+cd+c^2)]$.

9- §.

9.1. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz=\int_0^1 dy\int_0^1 dx\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$;

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1+x^2} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy=$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy;\qquad \int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dx+$$

$$+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{1+y^2} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)\,dx+$$

$$+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx.$$

9.2. $$\int_0^{a\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy\int_{\frac{1}{2a}(x^2+y^2)}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_0^{a\sqrt{2}} dy\int_0^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx\int_{\frac{1}{2a}(x^2+y^2)}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz;$$

$$\int_0^{a\sqrt{2}} dx \int_{\frac{1}{2a}x^2}^{a} dz \int_0^{\sqrt{2az-x^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+ \int_0^{a\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{3a^2-x^2}} dz \int_0^{\sqrt{3a^2-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy =$$

$$= \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{2az}} dx \int_0^{\sqrt{2az-x^2}} f(x, y, z)\, dy + \int_a^{a\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{3a^2-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy;$$

$$\int_0^{a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{1}{2a}y^2}^{a} dz \int_0^{\sqrt{2az-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+ \int_0^{a\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{3a^2-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{3a^2-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx =$$

$$= \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{2az}} dy \int_0^{\sqrt{2az-y^2}} f(x, y, z)\, dx + \int_a^{a\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{3a^2-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

9.3. $$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z)\, dz; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z)\, dz;$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y, z)\, dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dz \int_{\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y, z)\, dy;$$

$$\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y, z)\, dy + \int_0^1 dz \int_{z^2}^{z} dx \int_{\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y, z)\, dy;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}} dz \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}} dz \int_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y, z)\, dx;$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int\limits_{z\sqrt{1-z^2}}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{z\sqrt{1-z^2}} dy \int\limits_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

9.4. $$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz +$$

$$+\int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz; \quad \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz +$$

$$+\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz + \int\limits_1^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz;$$

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int\limits_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx;$$

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_0^1 dz \int\limits_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{16-z^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x,y, z)\, dx + \int\limits_1^4 dz \int\limits_0^{\sqrt{16-z^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx;$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dz \int\limits_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy;$$

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\sqrt{1-z^2}} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_0^1 dz \int\limits_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{16-z^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int\limits_1^4 dz \int\limits_0^{\sqrt{16-z^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy.$$

$$9.5.\ \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{0}^{\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}} f(x, y, z)\, dz;$$

$$\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx \int\limits_{0}^{\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}} f(x, y, z)\, dz;$$

$$\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{0}^{\frac{y^2}{2b}} dz \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2b}}^{\frac{a}{2}+\frac{y^2(b-a)}{2b^2}} dz \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{-\sqrt{a\left(2z-\frac{y^2}{b}\right)}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2b}}^{\frac{a}{2}+\frac{y^2(b-a)}{2b^2}} dz \int\limits_{\sqrt{a\left(2z-\frac{y^2}{b}\right)}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx;$$

$$\int\limits_{0}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{-b}^{-\sqrt{2bz}} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{\sqrt{2bz}}^{b} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx + \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dz \int\limits_{-\sqrt{2bz}}^{\sqrt{2bz}} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{-\sqrt{a(2z-y^2/b)}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dz \int\limits_{-\sqrt{2bz}}^{\sqrt{2bz}} dy \int\limits_{\sqrt{a\left(2z-\frac{y^2}{b}\right)}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{-\sqrt{2bz}}^{-b\sqrt{\frac{2z-a}{b-a}}} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{-\sqrt{a\,(2z-y^2/b)}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{-\sqrt{2bz}}^{-b\sqrt{\frac{2z-a}{b-a}}} dy \int\limits_{\sqrt{a\left(2z-\frac{y^2}{b^2}\right)}}^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{b\sqrt{\frac{2z-a}{b-a}}}^{\sqrt{2bz}} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{-\sqrt{a\,(2z-y^2/b)}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int\limits_{b\sqrt{\frac{2z-a}{b-a}}}^{\sqrt{2bz}} dy \int\limits_{\sqrt{a\,(2z-y^2/b)}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dx;$$

$$\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{\frac{x^2}{2a}} dz \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2a}}^{\frac{b}{2}+\frac{x^2(a-b)}{2a^2}} dz \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{-\sqrt{b\left(2z-\frac{x^2}{a}\right)}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2a}}^{\frac{b}{2}+\frac{x^2(a-b)}{2a^2}} dz \int\limits_{\sqrt{b\left(2z-\frac{x^2}{a}\right)}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} f(x, y, z)\, dy;$$

$$\int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dz \int\limits_{-a}^{-\sqrt{2az}} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dz \int\limits_{\sqrt{2az}}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_0^{\frac{a}{2}} dz \int_{-\sqrt{2az}}^{\sqrt{2az}} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{-\sqrt{b(2z-x^2/a)}} f(x, y, z)\, dy + \int_0^{\frac{a}{2}} dz \int_{-\sqrt{2az}}^{\sqrt{2az}} dx \int_{\sqrt{b\left(2z-\frac{x^2}{a}\right)}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-a\sqrt{\frac{b-2z}{b-a}}}^{a\sqrt{\frac{b-2z}{b-a}}} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{-\sqrt{b\left(2z-\frac{x^2}{a}\right)}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-a\sqrt{\frac{b-2z}{b-a}}}^{a\sqrt{\frac{b-2z}{b-a}}} dx \int_{\sqrt{b\left(2z-\frac{x^2}{a}\right)}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x, y, z)\, dy.$$

9.6 $$\int_0^1 dy \int_0^{\frac{1-y}{a}} dx \int_0^{ax+y} f(x, y, z)\, dz = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{\frac{z-y}{a}}^{\frac{1-y}{a}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{\frac{1-y}{a}} f(x, y, z)\, dx = \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_{\frac{z-y}{a}}^{\frac{1-y}{a}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_0^1 dy \int_0^y dz \int_0^{\frac{1-y}{a}} f(x, y, z)\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{ax} dz \int_0^{1-ax} f(x, y, z)\, dy + \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_{ax}^1 dz \int_{z-ax}^{1-ax} f(x, y, z)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{a}}^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{1-ax} f(x, y, z)\, dy + \int_0^1 dz \int_0^{\frac{z}{a}} dx \int_{z-ax}^{1-ax} f(x, y, z)\, dy.$$

9.7. $$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2x^2+3y^2} f(x, y, z)\, dz = \int_0^1 dy \int_0^{3y^2} dz \int_0^1 f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_0^1 dx \int_{3y^2}^{2+3y^2} dz \int_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x, y, z)\, dx = \int_0^3 dz \int_{\sqrt{\frac{z}{3}}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_0^2 dz\int_0^{\sqrt{\frac{z}{3}}} dy\int_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)\,dx+\int_2^3 dz\int_{\sqrt{\frac{z-2}{3}}}^{\sqrt{\frac{z}{3}}} dy\int_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)\,dx+$$

$$+\int_3^5 dz\int_{\sqrt{\frac{z-2}{3}}}^1 dy\int_{\sqrt{\frac{z-3y^2}{2}}}^1 f(x,y,z)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{2x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int_0^1 dx\int_{2x^2}^{3+2x^2} dz\int_{\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}}}^1 f(x,y,z)\,dy=$$

$$=\int_0^2 dz\int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_0^2 dz\int_0^{\sqrt{\frac{z}{2}}} dx\int_{\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}}}^1 f(x,y,z)\,dy+$$

$$+\int_2^3 dz\int_0^1 dx\int_{\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}}}^1 f(x,y,z)\,dy+\int_3^5 dz\int_{\sqrt{\frac{z-3}{2}}}^1 dx\int_{\sqrt{\frac{z-2x^2}{3}}}^1 f(x,y,z)\,dy.$$

9.8. $$\int_0^1 dy\int_y^1 dx\int_0^{xy} f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_y^1 f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} dz\int_{\frac{z}{y}}^1 f(x,y,z)\,dx=$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_y^1 f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 dz\int_z^{\sqrt{z}} dy\int_{\frac{z}{y}}^1 f(x,y,z)\,dx=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x,y,z)\,dy=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x,y,z)\,dy.$$ **9.9.** 0 ($\sqrt{x^2}=|x|$ деб олиш керак). **9.10.** $\frac{\pi}{60}$. **9.11.** $\frac{p^6}{108}$. **9.12.** 0. **9.13.** $\frac{1}{8}$. **9.14.** $5\frac{1}{2}$. **9.15.** $129\frac{3}{5}$. **9.16.** 7. **9.17.** 1. **9.18.** 1. **9.19.** 13. **9.20.** $11\frac{1}{3}$. **9.21.** $\frac{9}{16}$.

9.22. $$\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^h f(x,y,z)\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}} r\,dr\int_0^h f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{h(\cos\varphi+\sin\varphi)}{a}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)}} r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

$$9.23.\ \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}} r\,dr \int\limits_0^{a-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\theta+\cos\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)}} r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

$$9.24.\ \int\limits_{-\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}}^{\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{a^2}{1+b^2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{1+b^2}-x^2}} dy \int\limits_{b\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}} r\,dr \int\limits_{br}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg} b}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^a r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

$$9.25.\ \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{2}} r\,dr \int\limits_r^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{a\sin\theta} r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

9.26. $$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a/2} r\,dr \int\limits_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}}^{r} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^{a\sin\theta} r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

9.27. $$\int\limits_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-2x^2}}^{\sqrt{a^2-2x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}} r\,dr \int\limits_r^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta+\sin^2\theta}}} r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)\,dr.$$

9.28. $$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}}^{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz +$$

$$+\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz +$$

$$+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} r dr \int_{\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} r dr \int_{\sqrt{3}\cdot r}^{\sqrt{b^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_a^b r^2\cdot f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\, dr.$$

10-§.

10.1. $\frac{\pi}{2}$. **10.2.** $4(4-3\ln 2)$. **10.3.** $\frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **10.4.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **10.5.** $\frac{2}{3}\pi^2 a^3$. **10.6.** $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)a^3$. **10.7.** $\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{abc^2}{h}$. **10.8.** $\frac{1}{12}\,abc$. **10.9.** $\frac{92}{75}\pi R^3$. **10.10.** $\frac{21}{4}(2-\sqrt{2})\pi$. **10.11.** 8π. **1012.** $\frac{2187}{32}\pi$. **10.13.** 48π. **10.14.** 276π. **10.15.** 3π. **10.16.** $\frac{76}{81}\pi$. **10.17.** 7π. **10.18.** 5π. **10.19.** 12π. **10.20.** 10π. **10.21.** 1. **10.22.** $\frac{21}{32}\pi$. **10.23.** $\frac{\pi}{3}(b-a)(b^2+ab-2a^2)$. **10.24.** $\frac{\pi}{60}\,abc$. **10.25.** $\frac{81}{40}$. **10.26.** 6.

11-§.

11.1. $\left(\frac{3}{5}a;\ \frac{3}{5}b;\ \frac{9}{32}\sqrt{ab}\right)$. **11.2.** $\left(\frac{3}{28}a;\ \frac{3}{28}b;\ \frac{3}{28}c\right)$. **11.3.** $\left(\frac{21}{128}a;\ \frac{21}{128}b;\ \frac{21}{128}c\right)$. **11.4.** $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$. **11.5.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3(2+\sqrt{2})}{16}c\right)$. **11.6.** $\left(0;\ 0;\ \frac{9a}{20}\right)$. **11.7.** $\left(\frac{6}{5};\ \frac{12}{5};\ \frac{8}{5}\right)$. **11.8.** (x_0, y_0, z_0), бу ерда $x_0=\frac{8}{15}\cdot\frac{b^5-a^5}{b^4-a^4}\cdot\left[\frac{3\beta^2-1}{\beta\sqrt{\beta}}-\frac{3\alpha^2-1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right]\cdot\left[\frac{\beta^2-1}{\beta}-\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right]^{-1}$, $y_0=\frac{8(b^5-a^5)}{15\cdot(b^4-a^4)}\cdot\left[\frac{\beta^2-3}{\sqrt{\beta}}-\frac{\alpha^2-3}{\sqrt{\alpha}}\right]\times$

$\times\left[\frac{\beta^2-1}{\beta}-\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right]^{-1}$, $z_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^6-a^6}{b^4-a^4}\cdot\left(\beta^2-\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}-4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)\times$ $\times\left[\frac{\beta^2-1}{\beta}-\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right]^{-1}$. **11.9.** $\left(0;\ 2;\ \frac{2a^2}{5}\right)$. **11.10.** $\left(\frac{16\sqrt{3}}{15\pi};\ \frac{16\sqrt{3}}{15\pi};\ 2\right)$. **11.11.** а) $\left(-2;\ 1;\ \frac{4}{3}\right)$; б) $\left(-2;\ 1;\ \frac{2}{3}\right)$; в) $\left(\frac{32}{13};\ \frac{16}{13};\ \frac{33}{65}\right)$. **11.12.** $\left(0;\ 0;\ \frac{7h}{9}\right)$. **11.13.** $\left(0;\ 0;\ \frac{5}{4}R\right)$. **11.14.** $\frac{5\pi}{24}R^4$. **11.15.** $\frac{\pi a^5}{480}\cdot[192(27\sqrt{3}-22\sqrt{2})-85]$. **11.16.** 1464. **11.17.** 18. **11.18.** 1. **11.19.** 10. **11.20.** 16. **11.21.** $\frac{8}{5}(1+a)$. **11.22.** $\frac{2abc}{1575}\cdot[105\pi(a^2+b^2)-(92a^2+272b^2)]$. **11.23.** $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. **11.24.** $\frac{4}{3}\pi abc(a^2+b^2)$. **11.25.** $\frac{\pi^2 ar^2}{2}(4a^2+3r^2)$. **11.26.** $J_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$, $J_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$, $J_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. **11.27.** $J_{xy}=\frac{\pi}{5}$, $J_{xz}=J_{yz}=\frac{\pi}{20}$. **11.28.** $J_{xy}=\frac{81\pi}{16}$, $J_{xz}=J_{yz}=\frac{9\pi}{16}$. **11.29.** $J_{xy}=\frac{4}{9}\pi abc^3$, $J_{xz}=\frac{4}{9}\pi ab^3c$, $J_{yz}=\frac{4}{9}\pi a^3bc$. **11.30.** $J_{xy}=75\pi$, $J_{xz}=62\pi$, $J_{yz}=50\pi$. **11.31.** $J_x=J_y=0{,}15\pi$, $J_z=0{,}1\pi$. **11.32.** $J_x=J_y=\frac{\pi}{60}\rho_0\cdot a^5\cdot(16-7\sqrt{2})$, $J_z=\frac{\pi}{30}\rho_0\cdot a^5(8-5\sqrt{2})$. **11.33.** $J_0=\frac{5\pi^2}{64}$. **11.34.** $\frac{56}{15}\pi$. **11.35.** $\frac{10}{3}\pi p^2h^3$.

3-боб.

13-§.

13.1. $\frac{31}{16}\sqrt{73}+\frac{128}{3}\sqrt{2}+\frac{7}{3}\sqrt{65}$. **13.2.** $\frac{1}{729\cdot\sqrt{2}}\left[\frac{362032}{15}\sqrt{17}-\frac{333824}{15}\sqrt{2}-28800\right]$. **13.3.** $4a^{7/3}$. **13.4.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **13.5.** $a^2\sqrt{2}$. **13.6.** $\frac{101}{60}$. **13.7.** $2\pi a^2$. **13.8.** 0. **13.9.** $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\cdot\left[100\sqrt{38}-72-17\cdot\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$. **13.10.** $2\sqrt{2}\,a^2$. **13.11.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\pi b}{2a}$. **13.12.** 18π. **13.13.** $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **13.14.** 24. **13.15.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **13.16.** $a\left(\ln 3+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **13.17.** $R^2(\sqrt{2}-1)$. **13.18.** $2a^4+\frac{a^4}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2)$. **13.19.** $4(a+b)-\frac{4ab}{a+b}$. **13.20.** $\sqrt{2}(5+4\ln 2)$. **13.21.** $\frac{1}{2}\sqrt{47}+\frac{11}{12}\ln\frac{6+\sqrt{17}}{\sqrt{11}}$. **13.22.** $\sqrt{3}$. **13.23.** x_0+z_0. **13.24.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{10a^2+3b^2}$. **13.25.** $\frac{a}{3}(9\sqrt{3}-2\sqrt{2})$. **13.26.** $8\sqrt{2}a$ **13.27.** $2a\cdot\ln\left(tg\frac{3\pi}{8}\right)$. **13.28.** $a\sqrt{2}-\sqrt{a^2+b^2}+$ $\mp a\cdot\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b(\sqrt{2}+1)}$. **13.29.** $\frac{a}{2}\left[6+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})\right]$. **13.30.** $9a$. **13.31.** 126.

13.32. 36. 13.33. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{a}}\cdot(10+3a)$. 13.34. $2+\sqrt{2}\ \ln(\sqrt{2}+1)$. 13.35. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left[4\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{a}}+2a\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4}{a}\right)^2}\right]$. 13.36. πka^2. 13.37. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ak. 13.38. $2b\ (b+a\cdot\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon})$, бу ерда $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 13.39. $\frac{1}{3}\left(101^{3/2}-26^{3/2}\right)$. 13.40. $\frac{1}{2}a^3$. 13.41. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}\cdot\left[2\pi b\cdot\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}+a^2\cdot\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right]$.
13.42. $\frac{1}{3}\kappa\,[(1+e^2)^{3/2}-2\sqrt{2}]$. 13.43. $256\ a^3/15$. 13.44. $2\ a^2$. 13.45. $\frac{1}{8}\left[3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. 13.46. $\left(\pi a;\ \frac{4}{3}\ a\right)$. 13.47. $(x_0,\ y_0)$, бу ерда $x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$, $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. 13.48. $(0;\ \frac{2a}{\pi};\ \frac{b\pi}{2})$. 13.49. $\left(\frac{2a}{5};\ \frac{2a}{5}\right)$.
13.50. $(x_0,\ y_0)$, бу ерда $x_0=\frac{27-16\ln 2-4\ln^2 2}{8(3+\ln 4)}$, $y_0=\frac{20}{3(3+\ln 4)}$. 13,51. $\left(\frac{4a}{5};\ \frac{4a}{5}\right)$. 13.52. $(x_0,\ y_0)$ бу ерда $x_0=-\frac{a}{5}\cdot\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$, $y_0=\frac{a}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$.
13.53. $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$. 13.54. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. 13.55. $\frac{1}{4}(2\alpha-\sin\ 2\ \alpha)\cdot R^3$. 13.56. $\pi R\,(2a^2+R^2)$. 13.57. $J_x=\frac{256}{15}a^3$, $J_y=16\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)a^3$. 13.58. $J_x=J_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$, $J_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

15-§.

15.1. $-\frac{4}{3}a$. 15.2. πa^2. 15.3. а) $\frac{4}{3}$; б) 4; в) 0. 15.4. 0. 15.5. $3\sqrt{3}$.
15.6 . $2\pi\sqrt{2}\cdot a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 15.7. $-\frac{\pi a^3}{4}$. 15.8. $\frac{4}{3}\ ab^2$. 15.9. $\frac{1}{35}$. 15.10. $\frac{32}{105}\ R^{7/3}$. 15.11. $-2\pi a^2$. 15.12. $-2\sin 2$. 15.13. $2\frac{2}{3}$. 15.14. -2. 15.15. π.
15.16. $\pi a\,(2c-b)$. 15.17. 4. 15.18. $-\frac{3}{16}\pi a^2$. 15.19. $2\pi^2b^2$. 15.20. $8\frac{20}{21}\cdot\ln 2$.
15.21. $\frac{3}{4}(3+e^4-12\ e^{-2})$. 15.22. -12. 15.23. а) 2π; б) 2π. 15.24. $10/3$.
15.25. 0. 15.26. $\ln 2+\frac{1}{4}$. 15.27. $3(5+\sqrt{2})$. 15.28. 3. 15.29. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{2\pi}{3}$. 15.30. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{3}$. 15.31. а) 2π; б) 2π; в) 2π; г) 2π. 15.32. $20\ \frac{1}{2}$. 15.33. 62. 15.34. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. 15.35. $\ln 2+13\ \frac{11}{12}$.
15.36. $\frac{\pi^2}{144}(8\sqrt{3}+2-9\sqrt{2})$. 15.37. $-\ln 2-7\frac{1}{2}$. 15.38. $\frac{1}{\sqrt{8}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{4}{31\cdot\sqrt{2}}$.

15.39. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$. 15.40. $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

15.41. $u=\dfrac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$. 15.42. $w=\dfrac{x-3y}{z}+\dfrac{z^2}{2}+C$. 15.43. $w=e^{y/z}\times$ $\times(x+1)+e^{yz}-e^{-z}+C$. 15.44. $w=\dfrac{z}{x^2+y^2}+C$. 15.45. $w=-\operatorname{arctg}\dfrac{z^2}{xy}+C$. 15.46. $u=-3x+y(1-\sin 2x)+C$. 15.47. $u=e^{xy}+5xy+C$. 15.48. $u=$ $=(x^2-y^2)^2+C$. 15.49. $u=x^2+x+2y-3xy^2+C$. 15.50. $u=\dfrac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

15.51. $u=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{y/x}+C$. 15.52. $w=\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$. 15.53. $w=$ $=e^x yz+e^y xz+e^z xy+C$. 15.54. $w=xy^2z+x^2yz+xyz^2+C$. 15.55. $u=5x^3y+$ $+3xz^2-y^2z+C$. 15.56. $w=x-\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{z}+C$.

16- §.

16.1. $\dfrac{\pi R^2}{4}(4+R^2)$. 16.2. 1. a) 0; б) 0. 2. a) $-\dfrac{\pi a^3}{8}$; б) $-\dfrac{\pi a^3}{8}$.

16.3. -9. 16.4. $\dfrac{5\pi a^2}{8}$. 16.5. 1. a) 0; б) $\dfrac{\pi}{2}$. 2. a) 0; б) $\dfrac{2\pi}{15}$. 3. a) 0; б) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{pq}}$.

16.6. 0. 16.7. 8. 16.8. 0. 16.9. -1. 16.10. $-46\dfrac{2}{3}$. 16.11. $\dfrac{\pi R^4}{2}$. 16.12. $-\dfrac{4}{3}$.

16.13. $\dfrac{45}{8}\pi$. 16.14. a^2. 16.15. $\dfrac{a^2}{2}(4-\pi)$. 16.16. $\pi\sqrt{2}$. 16.17. $\dfrac{3}{2}a^2$. 16.18. $\dfrac{3}{8}\pi ab$.

16.19. $6\pi r^2$. 16.20. $\dfrac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$. 16.21. $\dfrac{\pi}{12}$. 16.22. $\dfrac{\pi a^2}{32}$. 16.23. $\dfrac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

4- боб.

17- §.

17.1. $\dfrac{4\pi c^4}{15}(6\sqrt{3}+1)$. 17.2. $\left(0;\ 0;\ \dfrac{2H}{3}\right)$. 17.3. $\left(0;\ 0;\ \dfrac{1}{2}\left(R+\right.\right.$ $\left.\left.+H\right)\right)$. 17.4. $\dfrac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. 17.5. $\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$. 17.6. $\dfrac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$. 17.7. $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$. 17.8. $\dfrac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$. 17.9. $\left(\dfrac{a}{2};\ 0;\ \dfrac{16a}{9\pi}\right)$. 17.10. $\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2}\right)$.

17.11. $\left(\dfrac{2a}{3(\pi-2)};\ 0;\ \dfrac{\pi a}{4(\pi-2)}\right)$. 17.12. πa^5. 17.13. $\dfrac{1}{6}(2+\sqrt{3})$. 17.14. $a^2(2\pi+8-8\sqrt{2})$. 17.15. $\dfrac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\,ab\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. 17.16. $4\pi(3+$ $+2\sqrt{3})a^2$. 17.17. $S=a(\varphi_2-\varphi_1)[b\cdot(\theta_2-\theta_1)+a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)]$. 17.18. $\left(0;\ \dfrac{\pi R}{4};\ \dfrac{\pi h}{8}\right)$. 17.19. $\left(0;\ \dfrac{5a}{8};\ \dfrac{25}{16}\right)$. 17.20. $2\pi hR^3$. 17.21. $8\sqrt{2}\pi$. 17.22. $\dfrac{\pi R^3}{4}$.

17.23. $\dfrac{4}{3}\pi a^4$. 17.24. $9a^3$. 17.25. $54\sqrt{14}$. 17.26. $128\sqrt{2}\pi$. 17.27. a) $32\sqrt{2}\pi$; б) $\dfrac{2048}{9}\sqrt{2}$. 17.28. 32. 17.29. $266\dfrac{2}{3}\pi$. 17.30. $6a^2+\dfrac{3}{4}a^5$. 17.31. 0.

17.32. $\frac{98\sqrt{17}-99\sqrt{3}}{64\sqrt{2}}+\left(\frac{15}{16}\right)^2\cdot\ln\frac{33+12\sqrt{6}}{49+8\sqrt{34}}$. 17.33. $\frac{8a^3}{3}$. 17.34. $\frac{\pi}{2}\rho_0\cdot a^4$. 17.35. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 17.36. $4R^2$. 17.37. $\frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$. 17.38. $\frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab}$. 17,39. $\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

18- §.

18.1. 0. 18.2. 0. 18.3. $3a^4$. 18.4. $\frac{a^3}{2}$. 18.5. $4\pi a^3$. 18.6. 0. 18.7. $\frac{1}{8}$. 18.8. 16π. 18.9. $3\pi a^2H$. 18.10. $4\pi abc$. 18.11. $J_1=\frac{1}{4}\pi abc^2$, $J_2=\frac{2}{5}\pi a^3bc$. 18.12. $\frac{1}{2}\pi c(b^2-a^2)$. 18.13. 0. 18.14. $\frac{4}{15}$. 18.15. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$. 18.16. $\frac{4\pi}{3}R^3$. 18.17. πbR^2. 18.18. $\frac{27}{2}\pi$. 18.19. $-\frac{5}{3}a^3$. 18.20. 512π. 18.21. 3. 18.22. -2π. 1823. a) 0; б) πh^3. 18.24. 0. 18.25. a) $\frac{13}{6}\pi$, б) $\frac{3}{2}\pi$. 18.26. π. 18.27. $\frac{\pi}{5}$.

19- §.

19.1. 0. 19.2. 0. 19.3. $3a^4$. 19.4. $\frac{1}{2}a^3$. 19.5. $4\pi a^3$. 19.6. 0. 19.7. $\frac{1}{8}$. 19.8. 16π. 19.9. $3\pi a^2H$. 19.10. $4\pi abc$. 19.11. $\frac{1}{8}a^4$. 19.12. $18(\pi-4)$. 19.13. 3000π. 19.14. $2\pi ah(3a^2-4h^2)$. 19.15. $\frac{\pi}{2}abc^2$. 19.16. 0. 19.17. 8. 19.18. $\frac{a^4}{16}(3\pi-4)$. 19.19. a) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{4\pi}{3}$. 19.20. $\frac{\pi}{2}R^4$. 19.21. 0. 19.22. $\frac{2\pi}{3}$. 19.23. $\frac{11\pi}{3}$. 19.24. $-\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}a^2$. 19.25. $-2\pi a(a+b)$. 19.26. $-\frac{9}{2}a^3$. 19.27. $-\pi R^2\cos^2\alpha$. 19.28. -4. 19.29. $\frac{1}{8}\pi R^3\sqrt{2}$. 19.30. $-\frac{\pi R^3}{4}$. 19.31. $-a^3$. 19.32. $-\frac{\pi}{8}a^6$. 19.33. $-\frac{R^2}{12}(8R+3\pi)$. 19.34. $-\pi$. 19.35. -4π. 19.36. $2\pi a^2$. 19.37. 3/2. 19.38. a) $-\pi\sqrt{3}$; б) $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 19.39. $-\pi\sqrt{3}\left(1-\frac{a^2}{3}\right)$. 19.40. $-\pi$.

АДАБИЁТ

1. Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 3, Издательство «Наука»; Москва, 1966.
2. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 2-қисм, Тошкент, «Ўқитувчи», 1989.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г.«Аналитическая геометрия», Издательство «Наука», Москва, 1968.
4. Александров П. С. «Лекции по аналитической геометрии», Издательство «Наука», Москва, 1968.
5. Кудрявцев Л. Д. «Курс математического анализа», том 2, Издательство «Высшая школа», Москва. 1981.
6. Будак Б. М., Фомин С. В. «Кратнные интегралы и ряды». Издательство «Наука», Москва, 1965.
7. Ильин В. А. Позняк Э. Г. «Основы математического анализа», II қисм. М.: Наука, 1980.
8. Демидович Б. П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», М.: «Наука», 8-издание, 1972.
9. Гюнтер Н. М. Кузьмин Р. О. «Сборник задач по высшей математике», II том, 14-издание, ОГИЗ, Москва, 1969.
10. Берман Г. Н. «Сборник задач по курсу математического анализа», М,: Наука, 1975.
11. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. «Графики функций», Справочник. Киев, «Наукова думка», 1981.
12. Никольский. С. М. Курс математического анализа, II том, М: Наука, 1975.
13. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. «Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, ряды». М.: Наука, 1986.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

Шакирова Хафиза Расулевна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие для **вузов**

Издательство «Ўзбекистон», 1992 — 700129. Ташкент. Навои, 30.

Муҳаррир *С.Бекбоева* *Ў.Ҳусанов*
Расмлар муҳаррири *Н.Сучкова*
Техник муҳаррир *А.Горшкова*
Мусаҳҳиҳ *Ў.Абдуқодирова*

Теришга берилди 4.02. 92. Босишга рухсат этилди 23.07.92. Формати $60 \times 90^{1}/_{16}$ «Литераная» гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли бос. л. 16,5. Шартли кр. отт. 16,71. Нашр л. 17,18. Тиражи 2000. Заказ № 390. Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 9 — 92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат Матбуот қўмитаси Тошкент матбаа комбинатининг ижарадаги корхонасида босилди. 700129, Тошкент Навоий кўчаси, 30.

"ЎЗБЕКИСТОН"