Қ. САФАЕВА

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ

ТОШКЕНТ-2004

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Қ.САФАЕВА

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган

ТОШКЕНТ – 2004

Сафаева Қ. Математик программалаш (ўқув қўлланма). Т., “ЎАЖБНТ” Маркази, 2004, 238 б.

Ўқув қўлланмада математик программалашнинг чизиқли программалаш, чизиқсиз программалаш, динамик программалаш ва ноаниқликда ечимлар қабул қилиш назарияси ёритилган.

Китоб «Математик программалаш» фани бўйича мавжуд дастур ва давлат стандартларига мос келади. Маъруза курслари олий ўқув юртларининг бакалавр йўналишидаги 5340200, 5340900, 5340800, 5340600, 5340700, 51408900 ихтисослиги талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этилади. Ўқув қўлланмадан ихтисодиёт йўналишидаги бошқа олий ўқув юртларининг талабалари, магистр ва аспирантлари ҳамда профессор -ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

КИРИШ

Ҳар қандай ривожланган жамиятда, шу жумладан, Ўзбекистон Республикасида ҳам иқтисодиётни янада ривожлантиришнинг асосий шартларидан бири унда математик усуллар ва янги компьютер технологияларига асосланган сонли таҳлилни амалга ошириш ва шу асосда иқтисодий ечимлар қабул қилишдан иборатдир. Ана шундай вазифаларни амалга оширишда қўл келадиган усулларни ўрганадиган фан математик программалашдир.

Математик программалаш математиканинг асосан кўп вариантли ечимга эга бўлган иқтисодий масалаларнинг энг яхши, мақсадга мувофиқ (оптимал) ечимини топишга ёрдам берувчи бир тармоғидир.

Математик программалаш умумий математика сингари қадимий бўлиб, унинг ноклассик тармоқлари XX асрнинг 30-40-йилларида шаклланди. Унинг ривожланишига собиқ совет олимлари Л.В.Канторович, В.С.Немчинов, А.Л.Лурье, Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн ва Америка олимлари Д.Данциг, Г.Купманс, Р.Беллман, Л.Форд, С.Гасс, Р.Гомори ва бошқалар катта ҳисса қўшганлар.

Математик моделлар кўп даврлардан буён иқтисодиётда ишлатилмоқда. Масалан, иқтисодиётда қўлланилган 1-модел Ф.Кене (1758й.) томонидан яратилган такрор ишлаб чиқариш моделидир.

Иқтисодий масаланинг математик модели деб, бу масаланинг асосий шартлари ва мақсадини математик формулалар ёрдамидаги тасвирига айтилади.

Умумий ҳолда математик программалаш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \qquad (i = 1, ..., m)$$

шартларни қаноатлантирувчи $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг экстремуми топилсин.

Бу ерда: f, g_i – берилган функциялар, b_i – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Агар f, g_i функцияларнинг ҳаммаси чизиқли функциялардан иборат бўлса, берилган масала чизиқли программалаш масаласи бўлади.

Агар f ва g_i функциялардан бирортаси ночизиқ функция бўлса, у ҳолда берилган модел *чизиқсиз программалаш* масаласини ифодалайди.

Агар f ёки g_i функциялар тасодифий миқдорларни ўз ичига олсалар, у ҳолда модел *стохастик программалаш* масаласини ифодалайди.

Агар f ва g_i функциялар вақтга боғлиқ бўлиб, масалани ечиш кўп босқичли жараён сифатида қаралса, у ҳолда берилган модел динамик программалаш масаласидан иборат бўлади.

Мазкур ўқув қўлланма математик программалаш фани бўйича давлат стандарти ва намунавий дастурга мос равишда яратилган.

Дарслик 7 та бобдан иборат бўлиб, унинг I бобида чизиқли программалашнинг умумий назарияси; II бобида чизиқли программалашда иккиланиш назарияси; III бобида чизиқли программалашнинг траспорт масаласи; IV бобида бутун сонли программалаш; V бобида чизиқсиз программалаш; VI бобида динамик программалаш ва ниҳоят VII бобида ноаниқлик ва таваккалчилик шароитида ечимлар қабул қилиш назариялари ёритилган. Ҳар бир бобдаги назария асосларини амалий масала ва мисоллар ечимида тадбиқ қилиниши кўрсатилган. Ҳар бир боб таянч сўз ва иборалар, назорат саволлари ва мустақил ечиш учун масалалар билан якунланган.

Ушбу ўқув қўлланма талабаларга ва бошқа мустақил ўрганувчиларга математик программалаш фанини ўрганишда ёрдам беради, деб умид қиламиз.

I БОБ. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ

1-§. Чизиқли программалашнинг предмети. Иқтисодий масалаларнинг математик моделлари

Математик программалаш масалалари ичида энг яхши ўрганилгани чизиқли программалашдир. Чизиқли программалаш усуллари билан ишлаб чиқаришни режалаштириш, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни оптимал тақсимлаш, оптимал аралашмалар тайёрлаш, оптимал бичиш, саноат корхоналарини оптимал жойлаштириш ва ҳоказо бошқа кўплаб масалаларни ечиш мумкин.

Чизиқли программалаш чизиқли функциянинг унинг таркибига кирувчи номаълумларга чегаравий шартлар қўйилгандаги энг катта ва энг кичик қийматини излаш ва топиш услубини ўргатувчи фандир.

Номаълумларига чизиқли чекланмалар қўйилган чизиқли функциянинг экстремумини топиш *чизиқли* программалашнинг предметини ташкил қилади.

Шундай қилиб, чизиқли программалаш шартли экстремум масалалари туркумига киради.

Иқтисодий масалаларни чизиқли программалаш усулларини қўллаб ечишдан аввал, уларнинг математик моделини тузиш керак; бошқача айтганда берилган иқтисодий масаланинг чегараловчи шартларини ва мақсадини математик формулалар орқали ифодалаб олиш керак. Ҳар қандай масаланинг математик моделини тузиш учун:

1) масаланинг иқтисодий маъносини ўрганиб, ундаги асосий шарт ва мақсадни аниқлаш;

2) масаладаги номаълумларни белгилаш;

3) масаланинг шартларини алгебраик тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали ифодалаш;

4) масаланинг мақсадини функция орқали ифодалаш керак.

Мисол учун бир нечта энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузиш жараёни билан танишамиз.

1. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи

Фараз қилайлик, корхонада m хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин; улардан ихтиёрий бирини i $(i=1,...,m)$ билан белгилаймиз. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун n хил ишлаб чиқариш факторлари зарур бўлсин. Улардан ихтиёрий бирини j $(j=1,...,n)$ билан белгилаймиз.

и/ч факторлари и/ч маҳсулот турлари	1	2	3	...	n	Даромад
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	C_m
и/ч факторининг заҳираси	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори ва бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган нормаси юқоридаги жадвалда берилган

Жадвалдаги ҳар бир b_j – j ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори (заҳираси)ни; a_{ij} – i маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган j-факторнинг миқдори; c_i–корхонанинг i маҳсулот бирлигини реализация қилишдан оладиган даромади.

Масаланинг иқтисодий маъноси: корхонанинг ишини шундай режалаштириш керакки: а) ҳамма маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг миқдори уларнинг умумий миқдоридан ошмасин; б) маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган даромади максимал бўлсин.

Режалаштирилган давр ичида ишлаб чиқариладиган i-маҳсулотининг миқдорини x_i билан белгилаймиз. У ҳолда масаладаги а) шарт қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2 \\ ------------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ҳамма номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни:

$$x_i \geq 0 \ (i=1,2,\ldots m) \qquad (2)$$

Масаладаги б) шарт унинг мақсадини аниқлайди. Демак масаланинг мақсади маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган умумий даромадини максималлаштиришдан иборат ва уни

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m \qquad (3)$$

чизиқли функция орқали ифодалаш мумкин. Шартга кўра ***y* --> *max***. Бу шартни Y_{max} кўринишда белгилаймиз.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_m \geq 0,$$

$$Y_{max}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2 \\ ------------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{cases}$$

2. Истеъмол савати масаласи

Фараз қилайлик, киши организми учун бир суткада ***n*** хил $A_1, A_2, \ldots, A_n$ озуқа моддалари керак бўлсин, жумладан A_1 озуқа моддасидан бир суткада b_1 миқдорда, A_2 озуқа моддасидан b_2 мидорда, A_3 озуқа моддасидан b_3 миқдорда ва ҳоказо A_n дан b_n миқдорда зарур бўлсин ва уларни ***m*** та $B_1, B_2, \ldots, B_m$ маҳсулотлар таркибидан олиш мумкин бўлсин. Ҳар бир B_i маҳсулот таркибидаги A_j озуқа моддасининг миқдори a_{ij} бирликни ташкил қилсин.

Масаланинг берилган параметрларини қуйидаги жадвалга жойлаштириш мумкин.

озуқа моддалари маҳсулотлар	A_1	A_2	...	A_n	маҳсулот баҳоси
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	C_m
озуқа модда нормаси	b_1	b_2	...	b_n	

Масаланинг иқтисодий маъноси: истеъмол саватига қандай маҳсулотлардан қанча киритиш керакки, натижада: а) одам организми қабул қиладиган озуқа моддаси белгиланган миқдордан кам бўлмасин; б) истеъмол саватининг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Истеъмол саватига киритиладиган i-маҳсулотнинг миқдорини x_i билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг а) шарти қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ ------------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра, ундаги номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_m \geq 0 \qquad (5)$$

Масаланинг б) шарти унинг мақсадини ифодалайди. Демак, масаланинг мақсади истеъмол саватига киритиладиган маҳсулотларнинг умумий баҳосини минималлаштиришдан иборат бўлиб, уни қуйидаги чизиқли функция кўринишида ифодалаш мумкин:

$$Y_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \qquad (6)$$

Шундай қилиб, «истеъмол савати» масаласининг математик моделини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \ge b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \ge b_2 \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \ge b_n \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge,\ \ldots,\ x_m \ge 0,$$

$$Y_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$$

3. Оптимал бичиш масаласи

Фараз қилайлик, корхонада m хил маҳсулотлар тайёрлаш (бичиш) керак бўлсин ҳамда ҳар бир i-маҳсулотдан a_i миқдорда тайёрлаш режалаштирилган бўлсин. Бу маҳсулотларни тайёрлаш учун n хил хом ашё материаллар мавжуд бўлиб, ҳар бир j-хом ашё материалнинг миқдори b_j бирликни ташкил қилсин. Хом ашё материаллардан тайёр маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун l хил бичиш усулларини қўллаш мумкин бўлсин ҳамда ҳар бир хом ашё материални k-усул билан бичганда ҳосил бўладиган i-маҳсулот миқдори a_{ijk}, чиқинди эса C_{jk} бирликларни ташкил қилсин деб, фараз қиламиз.

Хом ашё материалларни қайси усул билан бичганда ҳосил бўлган тайёр маҳсулотлар миқдори режадагига тенг бўлади, сарф қилинган хом ашё материаллар миқдори уларнинг заҳирасидан ошмайди ҳамда ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлади.

Масаладаги номаълумлар x_{jk} – k-усул билан бичиладиган j-хом ашё материаллар миқдорини билдиради.

Ушбу белгилашларда оптимал бичиш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1l} \le b_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2l} \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nl} \le b_n \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} + \cdots + a_{1nl}x_{nk} = a_1 \\ a_{211}x_{11} + a_{212}x_{12} + \cdots + a_{2nl}x_{nl} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m11}x_{11} + a_{m12}x_{12} + \cdots + a_{mnl}x_{nl} = a_m \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_{jk} \geq 0, \ (j=1,\dots,n; \ k=1,\dots,l) \qquad (9)$$

шартлар бажарилганда қуйидаги:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} C_{jk} x_{jk} \qquad (10)$$

функциянинг минимум қиймати топилсин. Бу ерда (7) шарт сарф қилинган хом ашё материалларнинг миқдори уларнинг заҳираларидан ошмаслиги кераклигини, (8) шарт маҳсулотлар ишлаб чиқариш бўйича режани тўла бажариш зарурлигини кўрсатади.

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра номаълумларнинг номанфий эканлигини (9) шарт ифодалайди.

Масаланинг мақсади – умумий чиқиндиларни минималлаштиришдан иборат бўлиб, у (10) функция кўринишида ёзилади.

Мисоллар.

1. Қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг математик моделини тузинг:

Пойафзал фабрикаси 3 хил оёқ кийим – этик, кросовка ва ботинкалар ишлаб чиқаришга ихтисослашган. Бу махсулотларни ишлаб чиқаришда 3 хил S_1, S_2, S_3 хом ашёлар ишлатилади. Ҳар бир оёқ кийимнинг бир жуфтини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори, корхонадаги хом ашёлар заҳираси ҳамда корхонанинг ҳар бир оёқ кийимидан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё турлари	1 жуфт пойафзал учун сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори			хом ашёлар заҳираси
	этик	кросовка	ботинка	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600
ҳар бир жуфт пойафзалдан олинадиган даромад	6	3	5	

Бир кунда ишлаб чиқариладиган этик, кросовка ва ботинкалар миқдорини шундай аниқлаш керакки, натижада сарф қилинадиган хом ашёларнинг миқдори уларнинг заҳирасидан ошмасин ва корхонанинг оладиган даромади максимал бўлсин.

Ечиш. Дейлик, фабрикада 1 кунда $\mathbf{x_1}$ жуфт этик, $\mathbf{x_2}$ жуфт кросовка ва $\mathbf{x_3}$ жуфт ботинка ишлаб чиқарилсин. У ҳолда бир кунда сарф қилинадиган $\mathbf{S_1}$ хом ашёнинг миқдори

$$5x_1+3x_2+4x_3$$

бирликка тенг бўлади. Масаланинг шартига кўра у 2700 бирликдан ошмаслиги керак, яъни

$$\mathbf{5x_1+3x_2+4x_3\le 2700}$$

Худди шунингдек, бир кунда сарф қилинган $\mathbf{S_2}$ ва $\mathbf{S_3}$ хом ашёлар учун мос равишда қуйидаги тенгсизликлар

$$\mathbf{2x_1+x_2+x_3\le 900}$$
$$\mathbf{3x_1+2x_2+2x_3\le 1600}$$

ўринли бўлиши кераклигини юқоридаги жадвалдан аниқлаш мумкин.

Масаланинг иқтисодий маносига кўра киритилган $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ ўзгарувчилар номанфий бўлиши керак, яъни

$$\mathbf{x_1}\ge 0,\ \ \mathbf{x_2}\ge 0,\ \ \mathbf{x_3}\ge 0.$$

Барча пойафзалларни ишлаб чиқаришдан корхонанинг оладиган даромадини

$$\mathbf{Y=6x_1+3x_2+5x_3}$$

функция кўринишида ифодалаймиз. Масаланинг шартига кўра, бу функция максимумга эришиши керак, яъни

$$\mathbf{Y=6x_1+3x_2+5x_3 \dashrightarrow max}$$

Шундай қилиб, берилган ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг математик моделига эга бўлдик:

$$\left.\begin{array}{r} 5x_1+3x_2+4x_3\le 2700\\ 2x_1+x_2+x_3\le 900\\ 3x_1+2x_2+2x_3\le 1600\end{array}\right\} \qquad (11)$$

$$\mathbf{x_1}\ge 0.\ \mathbf{x_2}\ge 0,\ \mathbf{x_3}\ge 0 \qquad (12)$$

$$\mathbf{Y=6x_1+3x_2+5x_3 \dashrightarrow max} \qquad 4\ (13)$$

2. Қуйидаги истеъмол саватини оптималлаштириш масаласининг математик моделини тузинг.

Одам организми учун бир суткада 118 г. оқсил моддаси, 56 г. ёғ, 500 г. углевод ва 8 г. минерал тузлар керак. Бир килограмм турли маҳсулотлар таркибидаги бу озуқа моддаларининг миқдори ва маҳсулотларнинг баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган

Озиқа моддалари	Бир бирлик маҳсулот таркибидаги озиқа моддасининг миқдори (меъёри)						
	Гўшт	Балиқ	Сут	Сарёғ	Пишлоқ	Дон маҳсулотлари	Картошка
Оқсил моддаси	180	190	30	10	260	130	21
Ёғлар	20	3	40	865	310	30	2
Углевод	–	–	50	6	20	650	200
Минерал тузлар	9	10	7	12	610	20	10
Маҳсулот баҳоси	1,8	1,0	0,28	3.4	2,9	0,5	0,1

Умумий харажатларни минималлаштирувчи бир кунлик овқатланиш режаси (диета) тузилсин.

Ечиш. Дейлик, бир кунда $\mathbf{x_1}$ килограмм гўшт, $\mathbf{x_2}$ килограмм балиқ, $\mathbf{x_3}$ литр сут, $\mathbf{x_4}$ килограмм сарёғ, $\mathbf{x_5}$ килограмм пишлоқ, $\mathbf{x_6}$ килограмм дон махсулотлари ва $\mathbf{x_7}$ килограмм картошка ишлатилган. У ҳолда организмнинг бир кунда қабул қилган оқсил моддаси

$$180x_1+190x_2+30x_3+10x_4+260x_5+130x_6+21x_7$$

бирликка тенг бўлади. Масаланинг шартига кўра, у 118 г. дан кам бўлмаслиги керак, яъни

$$180x_1+190x_2+30x_3+10x_4+260x_5+130x_6+21x_7\geq 118$$

Худди шундай йўл билан ёғлар, углевод ва минерал тузлар учун қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз

$$20x_1+3x_2+40x_3+865x_4+310x_5+30x_6+2x_7\geq 56$$

$$50x_3+6x_4+20x_5+650x_6+200x_7\geq 200$$

$$9x_1+10x_2+7x_3+12x_4+610x_5+20x_6+10x_7\geq 8$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра киритилган $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$, $\mathbf{x_5}$, $\mathbf{x_6}$, $\mathbf{x_7}$ ўзгарувчилар номанфий бўлиши керак, яъни

$$\mathbf{x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0,\ x_5,\geq 0,\ x_6\geq 0,\ x_7\geq 0.}$$

Бир кунда овқатланиш учун сарф қилинадиган умумий ҳаражатни

$$Y=1,8x_1+x_2+0.28x_3+3,4x_4+2,9x_5+0,5x_6+0,1x_7$$

функция кўринишида ифодалаймиз. Масаланинг шартига кўра бу функция минимумга эришиши керак, яъни

$$\mathbf{Y=1,8x_1+x_2+0,28x_3+3,4x_4+2,9x_5+0,5x_6+0,1x_7 \text{ --> } min}$$

Шундай қилиб, берилган истеъмол саватини оптималлаштириш масаласининг математик моделига эга бўлдик:

$$\begin{cases} 180x_1+190x_2+30x_3+10x_4+260x_5+130x_6+21x_7\geq118 \\ 20x_1+3x_2+40x_3+865x_4+310x_5+30x_6+2x_7\geq56 \\ 50x_3+6x_4+20x_5+650x_6+200x_7\geq200 \\ 9x_1+10x_2+7x_3+12x_4+610x_5+20x_6+10x_7\geq8 \end{cases} \qquad (14)$$

$$x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0,\ x_5\geq0,\ x_6\geq0,\ x_7\geq0 \qquad (15)$$

$$Y=1,8x_1+x_2+0,28x_3+3,4x_4+2,9x_5+0,5x_6+0,1x_7 \rightarrow \min \qquad (16)$$

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Корхонада **А** ва **В** махсулотлар ишлаб чиқариш учун 3 хил хом ашё ишлатилади. Корхонадаги ҳар бир хом ашёнинг заҳираси, бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашёлар меёри қуйидаги жадвалда келтирилган.

махсулотлар хом ашёлар	Бир бирлик махсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашё		Хом ашёлар заҳираси
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
	3	12	252
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад олинадиган даромад	30	40	

Корхонанинг пировард даромади максимал бўлиши учун ҳар бир маҳсулотдан қанчадан ишлаб чиқариш керак?

2-§. Чизиқли программалаш масаласининг умумий қўйилиши ва турли шаклларда ифодаланиши. Чизиқли программалаш масаласида тенг кучли алмаштиришлар.

Чизиқли программалаш масаласи ечимларининг хоссалари.

Чизиқли программалаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\{\geq,=,\leq\}b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\ a_{2n}X\ x_m\{\geq,=,\leq\}b_2, \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\{\geq,=,\leq\}b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0, \tag{2}$$

$$Y_{min(max)}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{3}$$

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (3) чизиқли функцияга минимал (максимал) қиймат берсин. Масаланинг (1) ва (2) шартлари унинг *чегаравий шартлари* деб, (3) чизиқли функция эса масаланинг *мақсади* ёки *мақсад функцияси* деб аталади.

Масаладаги барча чегараловчи шартлар ва мақсад функция чизиқли эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун ҳам (1)–(3) масала ***чизиқли программалаш*** масаласи деб аталади.

Конкрет масалаларда (1) шарт тенгламалар системасидан, «≥» ёки «≤» кўринишдаги тенгсизликлар системасидан ёки аралаш системадан иборат бўлиши мумкин. Лекин кўрсатиш мумкинки, (1)–(3) кўринишдаги масалани осонлик билан қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ \ldots,\ x_n\geq0, \tag{5}$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{6}$$

(4)-(6) кўриниш чизиқли программалаш масаласининг *каноник* кўриниши деб аталади. (4)–(6) масалани векторлар ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n=P_0, \tag{7}$$

$$X\geq0, \tag{8}$$

$$Y_{min}=CX, \tag{9}$$

бу ерда:

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\quad \ldots,\quad P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\quad P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор–қатор.

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор–устун.

(4)-(6) масаланинг матрица кўринишдаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$AX=P_0, \tag{10}$$

$$X\geq 0, \tag{11}$$

$$Y_{min}=CX, \tag{12}$$

бу ерда: $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – қатор вектор, $A=(a_{ij})$ – (4) система коэффициентларидан ташкил топган матрица; $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $P_0=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – устун векторлар.

(4)-(6) масалани йиғиндилар ёрдамида ҳам ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad (i=1,\ldots,m) \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1,\ldots,n) \tag{14}$$

$$Y_{min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{15}$$

1-таъриф. Берилган (4)–(6) масаланинг мумкин бўлган ечими ёки режаси деб, унинг (4) ва (5) шартларни қаноатлантирувчи $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторга айтилади.

2-таъриф. Агар (7) ёйилмадаги мусбат x_i коэффициентли P_i $(i=1,\ldots,m)$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ режа *таянч* режа деб аталади.

3-таъриф. Агар $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таянч режадаги мусбат компоненталар сони m га тенг бўлса, у ҳолда бу режа *айнимаган* таянч режа, акс ҳолда айниган таянч режа дейилади.

4-таъриф. (6) Чизиқли функцияга энг кичик қиймат берувчи $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таянч режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

Чизиқли программалаш масаласи устида қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин.

1) Y_{max} ни Y_{min} га айлантириш. Ҳар қандай чизиқли программалаш масаласини (4)–(6) кўринишга келтириш учун (1) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига ва Y_{max} ни Y_{min} га айлантириш керак. Y_{max} ни Y_{min}

га келтириш учун Y_{max} ни тескари ишора билан олиш, яъни $-Y_{max}=Y_{min}$ ёки $Y_{max}=-Y_{min}$ кўринишда олиш етарлидир.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг минимуми тескари ишора билан олинган шу функция максимумининг қийматига тенг, яъни

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ ва } -\max[f(x_1, x_2, ..., x_n)],$$

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ ва } -\min[f(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

ифодалар номаълумларнинг бир хил қийматларидагина ўзаро тенг бўлишини кўрсатиш мумкин.

2)Тенгсизликларни тенгламага айлантириш. **n** номаълумли

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n \le b \qquad (16)$$

чизиқли тенгсизликни қараймиз. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига номанфий номаълум сонни, яъни $x_{n+1}\ge 0$ ни қўшамиз.

Натижада **n+1** номаълумли чизиқли тенгламага эга бўламиз:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+x_{n+1}=b \qquad (17)$$

(16) тенгсизликни тенгламага айлантириш учун қўшилган x_{n+1} ўзгарувчи *қўшимча* ўзгарувчи деб аталади.

(16) тенгсизлик ва (17) тенгламанинг ечимлари бир хил эканлиги қуйидаги теоремада кўрсатилган.

1-теорема. Берилган (16) тенгсизликнинг ҳар бир $X_0=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ечимига (17) тенгламанинг фақат битта

$$Y_0=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

ечими мос келади ва, аксинча, (17) тенгламанинг ҳар бир Y_0 ечимига (16) тенгсизликнинг фақат битта X_0ечими мос келади.

Теорема исботи. Фараз қилайлик, X_0 (16) тенгсизликнинг ечими бўлсин. У ҳолда $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n\le b$ муносабат ўринли бўлади. Тенгсизликнинг чап томонини ўнг томонга ўтказиб ҳосил бўлган ифодани a_{n+1} билан белгилаймиз

$$0\le b-(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n)=\alpha_{n+1}.$$

Энди $Y_0=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ векторни (17) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатамиз.

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+\alpha_{n+1}=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+(b-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-...-a_n\alpha_n)=b$$

Энди агар Y_0 (17) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда у (16) тенгсизликни ҳам қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Шартга кўра:

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+\alpha_{n+1}=b,$$

$$\alpha_{n+1}\ge 0$$

Бу тенгламадан $a_{n+1}\geq 0$ сонни ташлаб юбориш натижасида

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n\leq b \qquad (16)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан кўриналики,

$$X_0=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \qquad (17)$$

тенгсизликнинг ечими экан.

Шундай йўл билан чизиқли программалаш масаласининг чегараловчи шартларидаги тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш мумкин. Бунда шунга эътибор бериш керакки, системадаги турли тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш учун уларга бир-бирларидан фарқ қилувчи

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leq b_2 \\ -----------------\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leq b_m \end{array}\right. \qquad (18)$$

номанфий ўзгарувчиларни қўшиш керак. Масалан, агар чизиқли программалаш масаласи қуйидаги

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0, \qquad (19)$$

$$Y_{max}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad (20)$$

кўринишда бўлса, бу масаладаги тенгсизликларнинг кичик томонига $x_{n+1}\geq 0$, $x_{n+2}\geq 0$, ..., $x_{n+m}\geq 0$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиш ёрдамида тенгламаларга айлантириш мумкин. Бу ўзгарувчилар Y_{min} га 0 коэффициент билан киритилади. Натижада берилган (18)−(20) масала қуйидаги кўринишга келади.

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\quad+\quad x_{n+2}=b_2 \\ ------------------------\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\qquad+x_{n+m}=b_m \end{array}\right. \qquad (21)$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ x_n\geq 0,\ x_{n+1}\geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geq 0, \qquad (22)$$

$$Y_{max}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+O(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}) \qquad (23)$$

Худди шунингдек,

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geq b_2 \\ --------------------\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geq b_m \end{array}\right. \qquad (24)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{25}$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{26}$$

кўринишда берилган чизиқли программалаш масаласини каноник кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун қўшимча $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, ..., $x_{n+m} \geq 0$ ўзгарувчилар тенгсизликларнинг катта томонидан айрилади. Натижада қуйидаги масала ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad - \quad x_{n+2} = b_2 \\ ---------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad - \quad x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{27}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0, \tag{28}$$

$$Y_{min}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+O(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}) \tag{29}$$

Энди чизиқли программалаш масаласи ечимларининг хоссалари билан танишамиз. Бунинг учун энг аввал қаварик комбинация ва қаварик тўплам тушунчасини эслатиб ўтамиз.

5-таъриф. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ векторларнинг қаварик комбинацияси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи

$$A=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\ldots+\alpha_nA_n$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

А векторга айтилади. n-ўлчовли фазодаги ҳар бир $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ векторга координаталари $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ бўлган нуқта мос келади. Шунинг учун бундан кейин $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ векторни **n**-ўлчовли фазодаги нуқта деб қараймиз.

6-таъриф. Агар n-ўлчовли вектор фазодаги **C** тўплам ўзининг ихтиёрий A_1 ва A_2 нуқталари билан бир қаторда бу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган $A=a_1A_1+a_2A_2$ $(\alpha_1>0, \alpha_2>0,\ \alpha_1+\alpha_2=1)$ нуқтани ҳам ўз ичига олса, яъни $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ бўлса, бу тўплам қаварик тўплам деб аталади.

2-теорема. Чизиқли программалаш масаласининг ечимларидан ташкил топган тўплам қаварик тўплам бўлади.

Исботи. Чизиқли программалаш масаласининг ихтиёрий иккита ечимининг қаварик комбинацияси ҳам ечим эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, X_1 ва X_2 берилган чизиқли программалаш масаласининг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$AX_1=P_0,\ X_1\geq 0, \qquad (30)$$

$$\text{ва } AX_2=P_0,\ X_2\geq 0, \qquad (31)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Энди X_1 ва X_2 ечимларнинг қавариқ комбинациясини тузамиз.

$$X=aX_1+(1-a)X_2,\ 0\leq a\leq 1.$$

ҳамда уни ечим эканлигини кўрсатамиз:

$$AX=A[aX_1+(1-a)X_2]=aAX_1+(1-a)AX_2$$

Энди (30) ва (31) тенгламаларни инобатга олиб топамиз.

$$AX=aP_0+(1-a)P_0=P_0.$$

Бу муносабат X вектор ҳам ечим эканлигини кўрсатади.

3-теорема. Чизиқли программалаш масаласининг чизиқли функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг таянч ечимларидан ташкил топган **K** қавариқ тўпламнинг четки нуқтасида эришади.

Агар чизиқли функция **K** қавариқ тўпламнинг бирдан ортиқ четки нуқтасида оптимал қийматга эришса, у шу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам ўзининг оптимал қийматига эришади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

4-теорема. Агар **k** та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_1, P_2, ..., P_k векторлар берилган бўлиб, улар учун

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_kx_k=P_0$$

тенглик барча $x_i\geq 0$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда $X=(x_1, x_2, ..., x_k, 0,..., 0)$ вектор **K** қавариқ тўпламнинг четки нуқтаси бўлади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

5-теорема. Агар $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ четки нуқта бўлса, у ҳолда мусбат x_i ларга мос келувчи векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини ташкил қилади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1-хулоса. **K** тўпламнинг ҳар бир четки нуқтасига P_1, P_2,..., P_n векторлар системасидан **m** та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системаси мос келади.

2-хулоса. $X=(x_1, x_2,..., x_n)$ **K** тўпламнинг четки нуқтаси бўлиши учун мусбат x_i компоненталар

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_nx_n=P_0$$

ёйилмада ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_i векторларнинг коэффициентларидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

3-хулоса. Чизиқли программалаш масаласи таянч ечимларидан ташкил топган тўплам **K** қавариқ тўпламнинг четки нуқталар тўпламига мос келади ва аксинча, ҳар бир таянч ечим **K** тўпламнинг бирор четки нуқтасига мос келади.

4-хулоса. Чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечимини **K** тўпламнинг четки нуқталари орасидан қидириш керак.

Мисоллар.

Берилган чизиқли программалаш масаласини каноник кўринишга келтиринг ва уни турли шаклда ифодаланг.

$$\left.\begin{array}{lllll} \mathbf{Y}_{\max} = & 3\mathbf{x}_1 & -2\mathbf{x}_2 & +\mathbf{x}_3 & \\ & 2\mathbf{x}_1 & & -3\mathbf{x}_3 & \leq -1 \\ & 3\mathbf{x}_1 & +4\mathbf{x}_2 & +2\mathbf{x}_3 & =6 \\ & \mathbf{x}_1 & +2\mathbf{x}_2 & -\mathbf{x}_3 & \leq 2 \\ & \mathbf{x}_1 \geq 0, & \mathbf{x}_2 \geq 0, & \mathbf{x}_3 \geq 0 & \end{array}\right| \qquad (\mathrm{I})$$

Ечиш. Масаланинг шартларидаги биринчи ва учинчи тенгсизликларнинг кичик томонига $\mathbf{x}_4 \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_5 \geq \mathbf{0}$ қўшимча ўзгарувчилар киритиб уларни тенгламаларга айлантирамиз. Натижада қуйидаги кенгайтирилган масалага эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{llllll} & 2x_1 & & -3x_3 + x_4 & & = -1 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & = 6 \\ & x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_5 & = 2 \\ & \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,} & x_5 \geq 0 & \\ Y_{\max} = & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \multicolumn{2}{l}{+0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5} \end{array}\right| \qquad (\mathrm{II})$$

Ҳосил бўлган масала юқоридаги (I) масалага эквивалент бўлади. (II) масаладаги биринчи тенгламанинг икки томонини (-1) га кўпайтириб ундаги озод ҳадни мусбат сонга айлантирамиз ва яна (I) масалага эквивалент бўлган

$$\left.\begin{array}{llllll} & -2x_1 & & +3x_3 - x_4 & & = 1 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & = 6 \\ & x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_5 & = 2 \\ & \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,} & x_5 \geq 0 & \\ Y_{\max} = & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \multicolumn{2}{l}{+0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5} \end{array}\right| \qquad (\mathrm{III})$$

масалани ҳосил қиламиз. (III) масалада $\mathbf{Y}_{\max}$ ни $\mathbf{Y}_{\min}=-\mathbf{Y}_{\max}$ га айлантирамиз. Натижада берилган масаланинг каноник кўриниши ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{array}{l}
-2x_1 \qquad\qquad + 3x_3 - x_4 \qquad = 1 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad = 6 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 2 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \\
Y_{\min} = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5
\end{array}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

(IV) масалада қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C' = (-3;2;-1;0;0)$$

Ушбу белгилашларда (IV) масала қуйидаги кўринишда ифодаланади

$$\mathbf{AX=B,\ X \geq O,\ Ymin=C'X} \qquad \text{(V)}$$

(IV) масалада яна қуйидаги белгилашлар киритамиз.

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \qquad C' = (-3;2;1;0;0)$$

Ушбу белгилашларда масала қуйидаги кўринишга келади.

$$\left.\begin{array}{c}
P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 = P_0 \\
X \geq O \\
Y_{\min} = C'X
\end{array}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

2. **$A_1(3;-2;5)$** ва **$A_2(-1;6;1)$** нуқталар берилган. **A_1** ва **A_2** нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат **$A(x_1;\ x_2;\ x_3)$** нуқтани топинг.

Ечиш. **A** нуқта **A_1** ва **A_2** нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлгани учун

$$A=\lambda A_1+(1-\lambda)A_2$$
$$0\le\lambda\le1$$

шарт ўринли бўлади. Демак,

$$A=\lambda A_1+A_2-\lambda A_2$$

бундан

$$\mathbf{A=A_2-\lambda(A_1-A_2)}$$

агар $\lambda=1/3$ деб қабул қилсак
тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$(x_1;x_2;x_3)=\frac{1}{3}(3;-2;5)+\frac{2}{3}(-1;6;1)$$

ва натижада

$$x_1=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{10}{3};\quad x_3=\frac{7}{3}$$ ларни топамиз.

жавоб; $A=(\frac{1}{3};\frac{10}{3};\frac{7}{3})$

Мустақил ечиш учун топшириқ

Берилган чизиқли программалаш масаласини каноник кўринишга келтиринг ва уни турли шаклда ифодаланг.

$$2x_1+3x_2-4x_3-5x_4\le7$$
$$5x_1-6x_2+x_3-x_4\le3$$
$$4x_1+x_2-2x_3+3x_4\le2$$
$$x_j\le0,\ j=1,2,3,4$$
$$Y_{max}=x_1+5x_2+4x_3+6x_4$$

3-§. Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқини. График усул. Иқтисодий масалани график усулда ечиш.

Қуйидаги кўринишда ёзилган чизиқли программалаш масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

$$Y_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3}$$

Ушбу чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқини билан танишамиз.

Маълумки, n та тартиблишган **x_1, x_2, ..., x_n** сонлар **n**-лиги (бирлашмаси) **n** улчовли фазонинг нуқтаси булади. Шунинг учун (1)-(3) чизиқли программалаш масаласининг режасини **n** улчовли фазонинг нуқтаси деб қараш мумкин. Бизга маълумки, бундай нуқталар туплами қавариқ тупламдан иборат булади. Қавариқ туплам чегараланган (қавариқ купбурчак), чегараланмаган (қавариқ куп қиррали соҳа) булиши, битта нуқтадан иборат булиши ёки буш туплам булиши ҳам мумкин.

Координаталари **$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=a$** тенгламани қаноатлантирувчи **(x_1, x_2, ..., x_n)** нуқталар туплами *гипертекислик* деб аталади. Шу сабабли

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=Y$$

куринишда ёзилган мақсад функцияни **Y** функциянинг турли **P** қийматларига мос келувчи узаро параллел *гипертекисликлар* оиласи деб қараш мумкин.

Ҳар бир гипертекисликнинг ихтиёрий нуқтасида Y функция бир хил қийматни қабул қилади (демак, узгармас сатҳда сақланади). Шунинг учун улар «сатҳ текисликлари» дейилади. Геометрик нуқтаи назардан чизиқли программалаш масаласини қуйидагича таърифлаш мумкин:

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар купбурчагига тегишли булган шундай **$X^*=(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$** нуқтани топиш керакки, бу нуқтада **Y** мақсад функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи (3) гипертекисликлар оиласига тегишли булган гипертекислик утсин. Жумладан, **n=2** да (1)-(3) масала қуйидагича талқин қилинади:

(1)-(2) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар купбурчагига тегишли булган шундай **$X^*=(x_1^*, x_2^*)$** нуқтани топиш кераккн, бу нуқтадан **Y** мақсад функцияга энг катта (энг кичик) қиймат берувчи ва (3) сатҳ чизиқлар оиласига тегишли бўлган чизиқ ўтсин.

Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқинига ҳамда 2 § да танишган чизиқли программалаш масаласи ечимининг хоссаларига таяниб масалани баъзи ҳолларда график усулда ечиш мумкин:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_2 \\ ------------ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_m \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0}, \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 \tag{6}$$

Икки ўлчовли фазода берилган (4)−(6) чизиқли программалаш масаласини кўрамиз.

Фараз қилайлик, (4) система (5) шартни қаноатлантирувчи ечимларга эга бўлсин. Ҳамда улардан ташкил топган тўплам чекли бўлсин. (4) ва (5) тенгсизликларнинг ҳар бири

$$\mathbf{a}_{i1}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{i2}\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_i\ (i=1,\dots,\mathbf{m}),\ \mathbf{x}_1=\mathbf{0},\ \mathbf{x}_2=\mathbf{0}$$

чизиқлар билан чегараланган ярим текисликларни ифодалайди. Чизиқли функция (6) ҳам маълум бир ўзгармас $\mathbf{C}_0$**=const** қийматда

$$c_1x_1+c_2x_2=\text{const}$$

сатҳ тўғри чизиқлар оиласига тегишли бўлган тўғри чизиқни ифодалайди. Ечимлардан ташкил топган қаварик тўпламни ҳосил қилиш учун

$$\mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_1,\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_m,\ \mathbf{x}_1=\mathbf{0},\ \mathbf{x}_2=\mathbf{0}$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган кўпбурчакни ясаймиз.

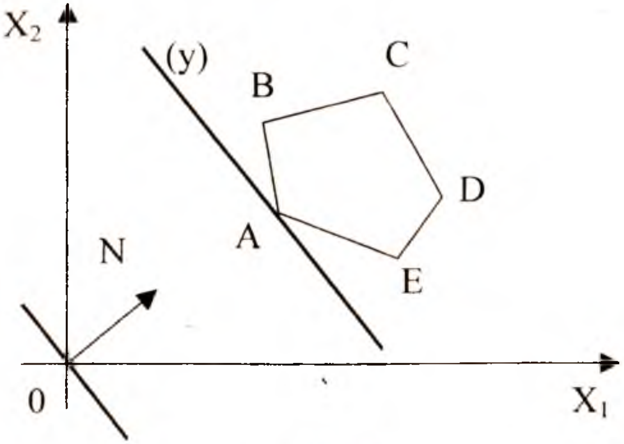
Фараз қилайлик, бу кўпбурчак **ABCDE** бешбурчакдан иборат бўлсин (1 шакл)

Чизиқли функцияни ихтиёрий ўзгармас $\mathbf{C}_0$ сонга тенг деб оламиз.

Натижада

$$c_1x_1+c_2x_2=C_0=\text{const}$$

тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқни $\mathbf{N(c_1,\ c_2)}$ вектор йўналишида ёки унга тескари йўналишида ўзига параллел суриб бориб қавариқ кўпбурчакнинг чизиқли функцияга энг кичик ёки энг катта қиймат берувчи нуқталарни аниқлаймиз.



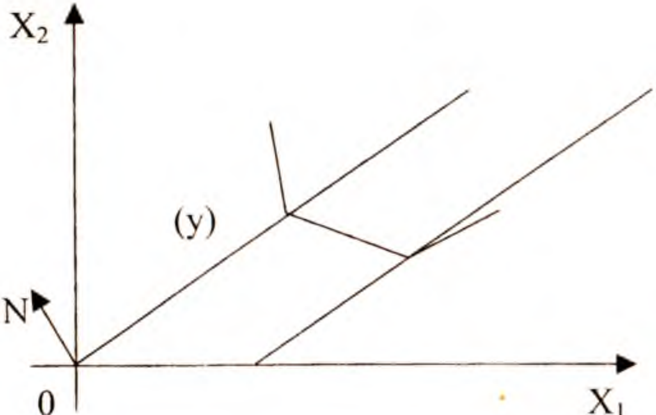
1-шакл

1-шаклдан кўриниб турибдики, чизиқли функция ўзининг минимал қийматига қавариқ кўпбурчакнинг **А** нуқтасида эришади. **С** нуқтада эса, у ўзининг максимал (энг катта) қийматига эришади. Биринчи ҳолда $\mathbf{A(x_1,\ x_2)}$ нуқтанинг координаталари масаланинг чизиқли функцияга минимал қиймат берувчи оптимал ечими бўлади. Унинг координаталари **АВ** ва **АЕ** тўғри чизиқларни ифодаловчи тенгламалар орқали аниқланади.

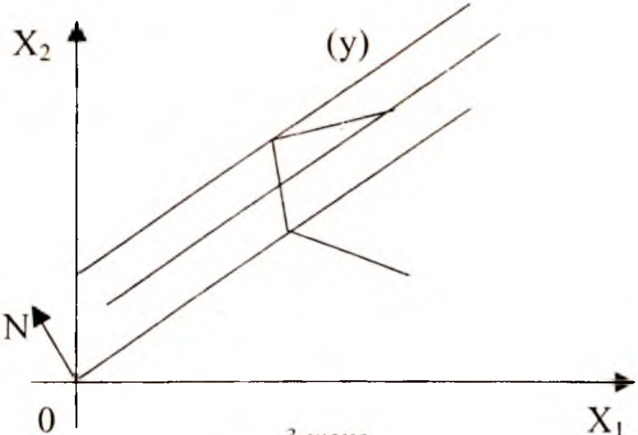
Агар ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак чегараланмаган бўлса, икки ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. $\mathbf{c_1x_1+c_2x_2=C_0}$ тўғри чизиқ **N** вектор бўйича ёки унга қарама-карши йўналишда силжиб бориб ҳар вақт қавариқ кўпбурчакни кесиб ўтади. Аммо на минимал, на максимал қийматга эришмайди. Бу ҳолда чизиқли функция қуйидан ва юқоридан чегараланмаган бўлади (2-шакл).

2-ҳол. $\mathbf{c_1x_1+c_2x_2=C_0}$ тўғри чизиқ **N** вектор бўйича силжиб бориб қавариқ кўпбурчакнинг бирорта четки нуқтасида ўзининг минимал ёки максимал қийматига эришади. Бундай ҳолда чизиқли функция юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган (3-шакл) ёки қуйидан чегараланган, юқоридан эса чегараланмаган (4-шакл) бўлиши мумкин.



2-шакл



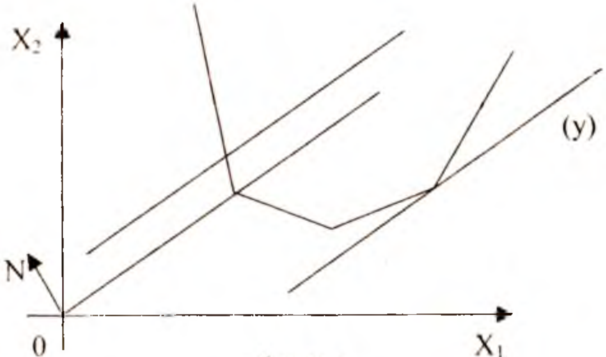
3-шакл

1-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 4\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 \le 12, \\ 3\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 \le 12, \end{cases}$$

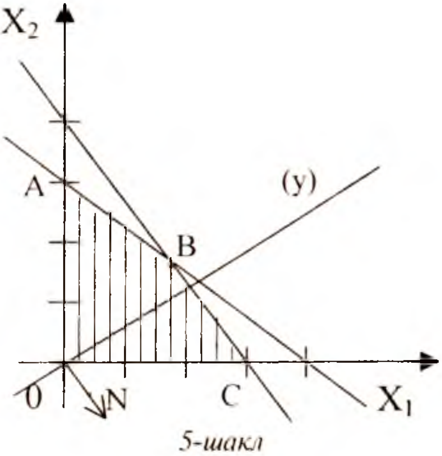
$$\mathbf{x}_1 \ge 0, \mathbf{x}_2 \ge 0,$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = 2\mathbf{x}_1 - 5\mathbf{x}_2.$$



4-шакл

Ечиш. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак ясаш учун координаталар системасида



5-шакл

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 12, & (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 12, & (L_2) \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$

чизиқлар ясаймиз (5-шакл).

Берилган тенгсизликларни қаноатлантирувчи ечим штрихланган **ОАВС** тўртбурчакни ташкил қилади. Энди координаталар бошидан **N=(2; -5)** векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ $2x_1-5x_2=const$ тенглама орқали ифодаланади. Уни **N** вектор йўналишида ўзига параллел силжитиб борамиз. Натижада чизиқли функцияга максимал қиймат берувчи **C(3;0)** нуқтани топамиз. Бу нуқтанинг координаталари $x_1=3$, $x_2=0$ масаланинг оптимал ечими бўлади ва $Y_{max}=2\cdot3\ 5\cdot0=6$ бўлади.

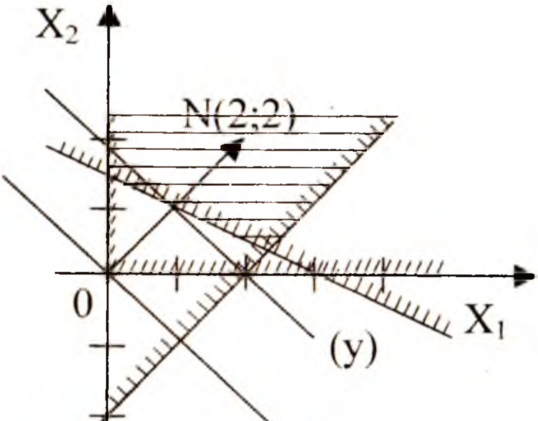
2-мисол. Берилган чизиқли программалаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$Y_{max} = 2x_1 + 2x_2$$

Ечиш. Ечимлар кўпбурчагини ҳосил қиламиз. Бунинг учун координаталар системасида $x_1+2x_2=3$, $x_1-x_2=2$, $x_1=0$, $x_2=0$ тўғри чизиқларни ясаймиз (6-шакл).



6-шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар кўпбурчаги юқоридан чегараланмаган. Координата бошидан **N(2; 2)** векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ $\mathbf{2x_1+2x_2=const}$ тенглама орқали ифодаланади.

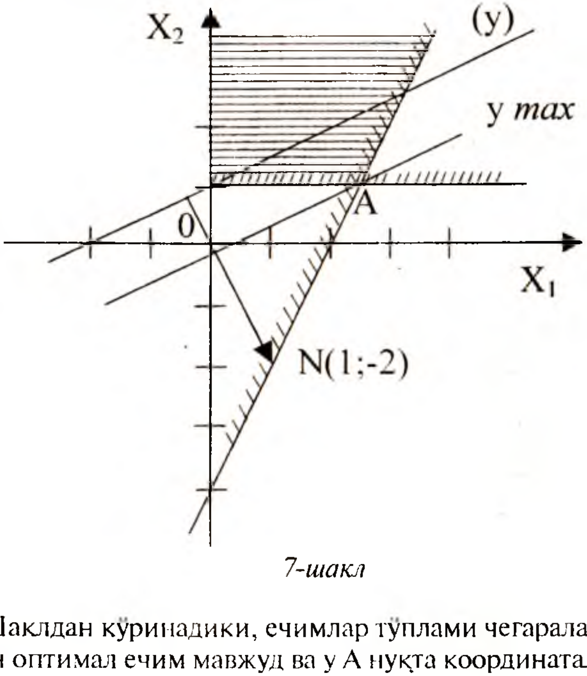
Шаклдан кўринадики, масалада мақсад функциянинг қиймати юқоридан чегараланмаган экан.

3-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \le 4 \\ \mathbf{x}_1 \ge 0 \\ \mathbf{x}_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$\mathbf{Y}_{max} = \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2$$

Масалани юқоридаги усул билан ечиб қуйидаги шаклга эга бўламиз (7 шакл).



7-шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар тўплами чегараланмаган, лекин оптимал ечим мавжуд ва у А нуқта координаталаридан иборат.

График усул ёрдами билан иқтисодий масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилиш мумкин. Буни қуйидаги иқтисодий масала мисолида кўрамиз.

Фараз қилайлик, корхонада икки хил бўёқ ишлаб чиқарилсин. Бу бўёқларни ишлаб чиқариш учун 2 хил хом ашёдан фойдаланилсин. Хом ашёларнинг заҳираси берилган ва улар 6 ва 8 бирликни ташкил қилади. Иккинчи бўёққа бўлган талаб 2 бирликни ташкил қилади ва у биринчи бўёққа бўлган талабдан 1 бирликка катта.

Ҳар бир бўёқнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун керак бўлган хом ашёлар миқдори (меъёри) ҳамда корхонанинг ҳар бир бўёқдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

хом ашёлар бўёқлар	1	2	маҳсулотлар баҳоси
I	1	2	3
II	2	1	2
хом ашё заҳираси	6	8	

Масаланинг иқтисодий маъноси:

Ҳар бир бўёқдан қанча ишлаб чиқарилганда уларга сарф қилинган хом ашёлар миқдори уларнинг захираларидан ошмайди ҳамда талаб бўйича шартлар ҳам бажарилади?

Масаладаги номаълумларни белгилаймиз: $\mathbf{x}_1$–ишлаб чиқаришга режалаштирилган **I** маҳсулотнинг миқдори, $\mathbf{x}_2$– **II** маҳсулот миқдори.

У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

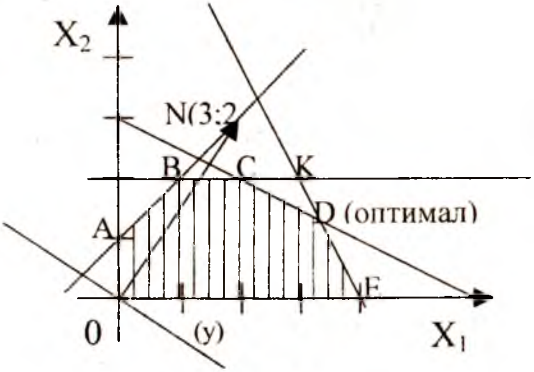
$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \le 6 & (1) \\ 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \le 8 & (2) \\ -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \le 1 & (3) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_2 \le 2 \qquad (4)$$

$$\mathbf{x}_1 \ge 0, \mathbf{x}_2 \ge 0. \qquad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = 3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \qquad (6)$$

Масалани график усулда ечамиз ҳамда оптимал нуқта $D(3^1/_3, 3^1/_3)$ эканлигини аниқлаймиз.



8-шакл

Демак, оптимал ечим $x_1=3^1/_3$, $x_2=1^1/_3$, $y_{max}=12^2/_3$ бўлади.

Бундан кўринадики, корхона биринчи буёқдан $3^1/_3$ бирлик, иккинчисидан $1^1/_3$ бирлик ишлаб чиқариши керак. Бу ҳолда унинг оладиган даромади $12^2/_3$ бирликка тенг бўлади.

Энди график ёрдамида иқтисодий масала ечимини таҳлил қилиш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун оптимал **D** нуқтага қараймиз. Бу нуқта $\mathbf{2x_1+x_2=8}$ ва $\mathbf{x_1+2x_2=6}$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси эканлигидан берилган иқтисодий масаланинг (1) ва (2) чегараловчи шартлари **D** нуқтада тенгламага айланишини кўрсатади. Бу эса, буёқ ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган иккала хом ашёнинг ҳам камёб (дефицит) эканлигини кўрсатади. Оптимал нуқта билан боғлиқ бўлган шартлар *актив* шартлар. Унга боғлиқ бўлмаган шартлар эса, *пассив* шартлар деб аталади. Биз кўраётган масалада маҳсулотларга бўлган талабга қўйилган $\mathbf{x_1+x_2\leq 1}$ ва $\mathbf{x_2\leq 2}$ шартлар оптимал нуқтага боғлиқ эмаслигини ва шу сабабли бу шартлар пассив шартлар эканлигини аниқлаймиз.

Пассив шартларга мос келувчи ресурслар камёб бўлмайди ва уларнинг маълум даражада ўзгариши оптимал ечимга таъсир қилмайди. Аксинча, актив шартларга мос келувчи ресурсларни бир бирликка оширилиши оптимал ечимнинг ўзгаришига олиб келади.

Масалан, 1-хом ашё захирасини бир бирликка оширилиши оптимал ечимга қандай таъсир кўрсатишини кўриш учун уни

7 га тенг деб оламиз. У ҳолда **CD** кесма ўзига параллел равишда юқорига кўтарилади ва **DCK** учбурчак ҳосил бўлади. Энди **K** нуқта оптимал нуқтага айланади.

Бу нуқтада $\mathbf{x_2=2}$ ва $\mathbf{2x_1+x_2=8}$ тўғри чизиқлар кесишади. Шунинг учун энди масаланинг (2) ва (4) шартлари *актив* шартларга, (1) ва (3) шартлари эса *пассив* шартларга айланади. **K** нуқтанинг координаталари $\mathbf{x_2=2}$ $\mathbf{x_1=3}$. Демак, янги оптимал ечим

$$x_1=3,\ \ x_2=2,\ \ Y_{max}=13$$

бўлади.

Оптимал ечимда 1-хом ашёга доир (1) чегаравий шарт

$$x_1+2x_2=3+2\cdot2=7$$

га тенг бўлади. Демак, 1-хом ашёнинг энг кўп мумкин бўлган заҳираси 7 га тенг бўлиши кераклигини кўрсатади.

Худди шундай йўл билан 2-хом ашёни бир бирликка ошириш оптимал ечимни қандай ўзгартиришини кўрсатиш мумкин.

Бундан ташқари камёб бўлмаган хом ашёлар миқдорини, оптимал ечимга таъсир қилмаган холда, қанчалик камайтириш мумкинлигини ҳам кўрсатиш мумкин.

Юқоридаги 8-шаклда **BC** кесма $\mathbf{x_2=2}$ чизиқни, яъни масаланинг 4 шартини ифодалайди. Бу – пассив шарт. Мақсад функция қийматини ўзгар–тирмаган ҳолда пассив шартни қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини аниқлаш учун BC кесмани ўзига параллел равишда пастга то **D** нуқта билан кесишгунча силжитамиз. Бу нуқтада $x_2=1^1/_3$ бўлади.

Демак, иккинчи буёққа бўлган талабни оптимал ечимга таъсир қилмасдан $1\frac{1}{3}$ гача камайтириш мумкин экан.

Шундай йўл билан масаланинг оптимал ечимига таъсир этмасдан унинг (3) – пассив шартнинг унг томонини қанчага камайтириш мумкин эканлигини курсатиш мумкин.

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Қуйидаги иқтисодий масаланинг математик моделини тузинг, уни геометрик усул билан ечинг ва ечимни тахлил қилинг.

Икки хил махсулотни сотишда 4 хил ресурслардан фойдаланилади. Махсулотнинг бир бирлигини сотиш учун сарф қилинадиган турли ресурслар миқдори (меёри) ҳамда ҳар бир ресурснинг заҳираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	Ҳар бир маҳсулотга сарф қилинадиган ресурслар миқдори		Ресурслар захираси
	I маҳсулот	II маҳсулот	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12
Маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад	2	3	

Савдо корхонасининг даромадини максималлаштирувчи махсулотларни оптимал сотиш режасини аниқланг.

4-§. Чизиқли программалаш масаласининг таянч ечими. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечими

Маълумки, чизиқли программалаш масаласининг таянч ечими **n** та ўзгарувчили **m** та тенгламалар системасининг номанфий ечимидан иборат бўлади. Ушбу параграфда чизиқли тенгламалар ва тенгсизликлар системасининг номанфий базис ечимини топиш масаласи билан шуғулланамиз. Энг аввал чизиқли тенгламалар системаси ҳақида айрим маълумотларни эслаб ўтамиз.

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ ------------------ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системани матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$AX=B. \qquad (2)$$

бу ерда: $\mathbf{A=(a_{ij})}$ – (1) системанинг коэффициентларидан тузилган матрица, $\mathbf{X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ – вектор устун, $\mathbf{B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)}$ – озод ҳадлардан ташкил топган вектор-устун. Бу система «**n** та номаълумли **m** та чизиқли тенгламалар системаси» деб аталади. Агар **n = m** бўлса, **A** матрица квадрат матрица бўлади ва унинг дитерменанти $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$ бўлса, **A** матрицага нисбатан тескари матрица $\mathbf{A}^{-1}$ мавжуд бўлади. (2) системанинг икки томонини $\mathbf{A}^{-1}$–матрицага кўпайтириб берилган системанинг ечими топилади

$$X=A^{-1}B$$

Жордан-Гаусс усули чизиқли тенгламалар системасини ечишда $\mathbf{A}^{-1}$–тескари матрицани топиш учун энг қулай усуллардан биридир. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат.

Системадаги биринчи тенгламадан ихтиёрий **0** дан фарқли коэффициентли номаълум танланади, ҳамда биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадлари шу номаълум олдидаги коэффициентга бўлинади. Биринчи тенглама ёрдамида танланган номаълум бошқа ҳамма тенгламалардан йўқотилади. Иккинчи тенгламадан коэффициенти **0** дан фарқли бўлган номаълум танланади ҳамда иккинчи тенгламанинг барча ҳадлари шу номаълум олдидаги коэффициентга бўлинади. Иккинчи тенгламадан танланган номаълум бошқа тенгламалардан йўқотилади ва ҳоказо. Шундай йўл билан ҳар бир тенгламадан биттадан номаълум ажратилгунча шу жараён такрорланади. Натижада қуйидаги кўринишдаги система ҳосил бўлади.

$$\begin{cases} x_1 \quad + a'_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad x_2 \quad + a'_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ ------------------- \\ \qquad x_m \quad + a'_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{3}$$

(3) системадаги $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_m$ ўзгарувчилар «ажратилган (боғлиқ) ўзгарувчилар» деб, $\mathbf{x}_{m+1}$, $\mathbf{x}_{m+2}$, ..., $\mathbf{x}_n$ ўзгарувчилар эса «ажратилмаган (эркли) ўзгарувчилар» деб аталади. (3) системадан фойдаланиб берилган (1) системанинг умумий ечимини топиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ b'_1 - a'_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - a'_{1n}x_n \\ x_2 = \ b'_2 - a'_{2m+1}x_{m+1} - \cdots - a'_{2n}x_n \\ ------------------------- \\ x_m = \ b'_m - a'_{mm+1}x_{m+1} - \cdots - a'_{2n}x_n \end{array}\right\} \tag{4}$$

Бундан эркли x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n номаълумларга турли қийматлар бериб боғлиқ-x_1, x_2, ..., x_m номаълумларнинг мос қийматларини топиш мумкин.

Эркли номаълумларга 0 қиймат бериб топилган $x_1=b'_1$, $x_2=b'_2,\ldots,$ $x_m=b'_m$, ечим берилган системанинг *базис ечими* дейилади.

Кўп иқтисодий масалаларнинг математик моделида чизиқли тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг номанфий ечимларини топиш талаб қилинади. Системанинг номанфий ечимини топишда қайси номаълумнинг ажратилиши ва уни қайси тенгламадан ажратилиши фарқсиз эмас. Мана шу шартларни эътиборга олувчи усуллардан бири—Эйдельнант усулидир. Бу усулнинг алгоритми билан танишамиз.

Бунинг учун қуйидаги системани кўрамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots, x_n\ge 0 \qquad (6)$$

(5) системанинг (6) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинади. Бунинг учун қуйидаги ишлар амалга оширилади:

$$\left.\begin{array}{l} 0=\; b_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n \\ 0=\; b_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\cdots-a_{2n}x_n \\ ---------------------- \\ 0=\; b_m-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\cdots-a_{mn}x_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

1. (5) системадаги тенгламаларнинг чап томонидан барча элементлар ўнг томонга ўтказилиб 0 – тенгламалар системаси тузилади.

2. Берилган системанинг биргаликда эмаслик ва номанфий ечимининг мавжуд эмаслик шартлари текширилади:

а) агар (7) системадаги камида битта тенглама

$$0=в+0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n$$

кўринишда бўлиб, $\mathbf{b \neq 0}$ бўлса, берилган тенгламалар системаси биргаликда бўлмайди;

б) агар (7) системада камида битта тенглама

$$\mathbf{0=b+a_1 \cdot x_1+a_2 \cdot x_2+\ldots+a_n \cdot x_n}$$

кўринишда бўлиб $\mathbf{b}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_n}$ лар бир хил ишорали бўлса, берилган система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Агар юқоридаги а) ва б) шартлардан бирортаси бажарилса, ечиш жараёни тўхтатилади, акс ҳолда системани ечиш давом эттирилади.

3. Агар (7) тенгламалар системасида

$$\mathbf{0=в+0 \cdot x_1+0 \cdot x_2+\ldots+0 \cdot x_n}$$

кўринишдаги тенглама қатнашса, бундай тенгламаларни номаълумларнинг ихтиёрий қийматлари қаноатлантиргани учун, улар ўчириб ташланади.

4. Қолган 0 – тенгламаларни ўзаро қўшиб, назорат тенглама (н.т.) деб аталувчи тенглама тузилади. Назорат тенглама икки хил вазифани бажаради:

1) ажратилиши керак бўлган номаълум назорат тенгламадан танланади;

2) ҳар бир қадамдан кейин ҳосил бўлган назорат тенглама қолган 0 – тенгламалар йиғиндисига тенг эканлигига асосланиб, ҳисоблашлар тўғри олиб борилаётганини текшириб бориш мумкин.

5. Назорат тенгламадан коэффициенти энг кичик бўлган номаълум (масалан, $\mathbf{x_k}$) ажратилиши керак бўлган номаълум сифатида танланади.

6. Танланган $\mathbf{x_k}$ номаълум

$$\min_{a_{ik}<0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{|a_{lk}|}$$

шартни қаноатлантирувчи *l*-тенгламадан ажратилиб, янги системанинг биринчи тенгламаси тузилади. Ҳар бир тенгламага мос келувчи $\mathbf{b_i / |a_{ik}|}$ $\mathbf{(a_{ik}<0)}$ нисбат *i*-тенгламада $\mathbf{x_k}$ номаълум бўйича ҳисобланган аниқловчи коэффициент (А.К.) деб аталади.

7. Топилган $\mathbf{x_k}$ номаълумнинг қийматини эски системанинг қолган тенгламаларига ва назорат тенгламага қўйиш учун бу тенгламаларга қўшимча тенглама тузилади.

8. Ҳар бир тенгламани, шу жумладан назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системанинг қолган тенгламалари ва назорат тенгламаси ҳосил қилинади. Агар ҳосил бўлган янги система учун юқоридаги а) ва б) мавжуд эмаслик мезонлари бажарилмаса, юқоридаги 4-8 бандларда қилинган ишлар яна такрорланади. Шундай йўл билан системани ечиш ҳамма **0**-тенгламалар **x** тенгламага (ажратилган номаълумли тенгламага) айлангунча, яъни назорат тенглама **0=0** кўринишга келгунча такрорланади. Сўнгра системанинг номанфий ечими (ҳақиқий ёки базис) ёзилади.

1-мисол. Системанинг номанфий базис ечимини топинг.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=1 \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4=2 \\ x_1+5x_2+x_3-x_4=5 \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0$$

Ечиш. Берилган тенгламалар системасини 0-тенгламалар системасига айлантирамиз ва назорат тенглама тузамиз.

$$\left\{\begin{array}{l|l} 0=1-x_1-\underline{2x_2}+x_3+x_4 & 1/2 \\ \begin{cases} 0=2+x_1-2x_2-3x_3-x_4 \\ -2x_2=-1+x_1-x_3-x_4 \end{cases} & 2/2=1 \\ \begin{cases} 0=5-x_1-5x_2-x_3+x_4 \\ -5x_2=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}x_1-\frac{5}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4 \end{cases} & 5/5=1 \\ \begin{cases} \textit{и.т.}0=8-x_1-9x_2-3x_3+x_4 \\ -9x_2=-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}x_1-\frac{9}{2}x_3-\frac{9}{2}x_4 \end{cases} & \end{array}\right.$$

Назорат тенгламадан энг кичик коэффициентли номаълумни, яъни $\mathbf{x_2}$ ни танлаймиз. 0-тенгламалар системасидаги ҳар бир тенглама учун $\mathbf{b_i}/|\mathbf{a_{i2}}|$ $(\mathbf{a_{i2}}<0)$ нисбатларни, яъни аниқловчи коэффициентларни ҳисоблаймиз.

Аниқловчи коэффициентлар ичида энг кичигига мос келган 1 тенгламадан $\mathbf{x_2}$ ни ажратиб **x** – тенгламага айлантирамиз

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Бу тенгламадан фойдаланиб эски системанинг ҳар бир қолган тенгламаларига ҳамда назорат тенгламага қўшимча тенглама тузамиз ва уларни мос тенгламалар тагига ёзамиз.

Ҳар бир тенгламани ва назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системани ҳосил қиламиз.

Янги системанинг назорат тенгламасидан энг кичик коэффициентли x_3 номаълумни танлаймиз ва системадаги

$$\left\{\begin{array}{l|l}
\left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4 \end{array}\right. & \text{—} \\
0 = 1 + 2x_1 - 4x_3 - 2x_4 & 1/4 \\
\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{7}{4}x_1 + \frac{7}{4}x_4 \end{array}\right. & 5/7 \\
\left\{\begin{array}{l} \textbf{н.т.} \quad 0 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{15}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4 \\ \qquad -\frac{15}{2}x_3 = -\frac{15}{8} - \frac{15}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_4 \end{array}\right. &
\end{array}\right.$$

тенгламаларда бу номаълум учун аниқловчи коэффициент ҳисоблаймиз. Аниқловчи коэффициентлар ичида энг кичиги 2-тенгламага мос келгани учун x_3 ни 2-тенгламадан ажратиб **x** тенгламага айлантирамиз.

Топилган x_3 нинг қийматини бошқа тенгламаларга ва назорат тенгламага қўйиш учун уларга қўшимча тенгламалар тузамиз. Ҳар бир тенгламани ва назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системани ҳосил қиламиз.

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_4 \\ \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 = \frac{5}{4} - 2\mathbf{x}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_4 \end{array}\right. \qquad \Big| - \\
\mathbf{x}_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_4 \qquad \Big| 5/2 \\
\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_4 \\ -\frac{1}{4}\mathbf{x}_1 = -\frac{5}{8} + \mathbf{x}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_4 \end{array}\right. \qquad \Big| 13/2 \\
\left\{\begin{array}{l} \textbf{н.т.} \qquad 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{x}_4 \\ \qquad -\frac{1}{4}\mathbf{x}_1 = -\frac{5}{8} + \mathbf{x}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_4 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Энди назорат тенгламадан $\mathbf{x}_1$ ни танлаб унинг устида юқоридаги ишларни бажарамиз ва қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 = \frac{5}{2} - 4x_2 - x_4 \\
x_3 = \frac{3}{2} - 2x_2 - x_4 \\
0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\
н.т.\, 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4
\end{array}\right.$$

Ҳосил булган янги системада б) мавжуд эмаслик шарти бажарилади. 3 тенгламада озод ҳад билан номаълумлар олдидаги коэффициентлар бир хил ишорали бўлганлиги сабабли система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Юқоридаги усул билан чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳам номанфий ечимини топиш мумкин. Лекин бунда тенгсизликларнинг кичик томонига $\mathbf{x}_{m+1}\geq\mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{m+2}\geq\mathbf{0}$, …, $\mathbf{x}_{m+n}\geq\mathbf{0}$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиб тенгламалар системасини ҳосил қилиш керак бўлади.

2-мисол. Берилган тенгсизликлар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \leq 2 \\ 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 \leq 5 \\ \mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \mathbf{x}_3 \geq 0, \mathbf{x}_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ечиш. Системадаги биринчи тенгсизликга $\mathbf{x}_5$ ни, иккинчисига $\mathbf{x}_6$ ни қўшиб қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини юқоридаги алгоритм асосида ечамиз.

$$I\ \text{қадам}\ \left\{\begin{array}{l|c|} & A.K.(x_1) \\ \cline{2-2} 0 = 2 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 & 2 \\ \begin{cases} 0 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_6 \\ -2x_1 = -4 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \end{cases} & 5/2 \\ \begin{cases} н.т.0 = 7 - 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 - x_6 \\ -3x_1 = -6 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 \end{cases} & \end{array}\right.$$

$$\text{II қадам}\left\{\begin{array}{l|c|}
\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \\ 2x_3 = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_4 + \frac{4}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6 \end{cases} & \begin{array}{c} A.K.(x_j) \\ - \end{array} \\
0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 & 1/7 \\
\begin{cases} н.т. 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 \\ \quad -7x_3 = -1 - 3x_2 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 \end{cases} &
\end{array}\right.$$

$$\text{III қадам}\left\{\begin{array}{l}
x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6 \\
x_1 = \frac{16}{7} - \frac{8}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6 \\
н.т. \quad 0 = 0
\end{array}\right.$$

Жавоб. Базис ечим: **x_1=16/7, x_2=0, x_3=1/7, x_4=0, x_5=0, x_6=0**

Мустақил ечиш учун топшириқ

Берилган чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$1)\qquad \left.\begin{array}{rrrl} 4\mathbf{x}_1 & +3\mathbf{x}_2 & -\mathbf{x}_3 & =6 \\ 2\mathbf{x}_1 & -\mathbf{x}_2 & +3\mathbf{x}_3 & =4 \\ 3\mathbf{x}_1 & & +4\mathbf{x}_3 & =7 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0$, j=1,2,3

$$2)\qquad \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0$, j=1,2,3

5-§. Таянч ечимнинг оптималлик шарти. Чекли оптимал ечимнинг мавжуд бўлмаслик шарти

Янги таянч ечимга ўтиш қоидаси

Чизиқли программалаш масалаларини ечиш учун ишлатиладиган энг универсал усуллардан бири симплекс усулдир. Бу усул ёрдамида иқтисодий масалаларнинг ечими топилади ёки ечим мавжуд эмаслиги аниқланади.

Симплекс усулнинг ғояси қуйидагидан иборат. Берилган чизиқли программалаш масалаларининг ечимлар тўпламига тегишли ихтиёрий бошланғич (таянч) ечими топилади, яъни AX=B, X≥0 шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий ечим топилади. Агар бу ечим оптималлик шартини қаноатлантирса, оптимал ечим бўлади, акс ҳолда бошланғич ечим оптимал ечимга яқин бўлган бошқа таянч ечимга алмаштирилади. Таянч ечимларни алмаштириш жараёни оптимал ечим топилгунча, ёки берилган масаланинг оптимал ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Симплекс усулни 1949 йилда Америка олими С.Данциг кашф қилган. Данциг билан параллел равишда собиқ СССР олими, академик Л.Б.Канторович симплекс усулнинг бир тури бўлган «иккиламчи баҳолар» усулини кашф қилиб чизиқли программалаш фанининг тараққиётига асос солди. Симплекс усул кейинчалик турли олимлар томонидан ривожлантириб борилди. Масалан, профессор М.И. Эйдельнант симплекс усулнинг энг содда вариантини кашф қилиб уни чизиқли тенгламалар системасининг номанфий ечимлари ичида берилган чизиқли функцияга экстремал қиймат берувчи ечим топиш алгоритми деб атади.

Эйдельнант усули қуйидагидан иборат. Фараз қилайлик, каноник формадаги чизиқли программалаш масаласи берилган бўлсин

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y_{min}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad (3)$$

Агар масала каноник формада бўлмаса, у бу кўринишга келтирилади. Бунинг учун (1) системада тенгсизликлар қатнашса, тенгсизликларнинг кичик томонига қўшимча номанфий ўзгарувчи қўшиш ёрдамида улар тенгламага айлантирилади. Агар чизиқли функция Y_{max} кўринишида бўлса, ундаги ишораларни алмаштириб Y_{min} га айлантирилади, яъни $-Y_{max} = Y_{min}$

(1)-(3) масалани ечишдан аввал, (1) система 0-тенгламалар системасига айлантирилади ҳамда унинг ечими мавжуд бўлмаслик шартларининг бажарилиши текширилади.

$$\left.\begin{array}{l} 0=b_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n, \\ 0=b_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2-\cdots-a_{2n}x_n, \\ -------------------- \\ 0=b_m-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\cdots-a_{mn}x_n, \end{array}\right| \qquad (4)$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0, \qquad (5)$$

$$Y_{min}=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \qquad (6)$$

Масаланинг оптимал ечимини топиш учун аввал 4-§ да баён қилинган а) ва б) шартлар текширилади, сўнгра қуйидаги итерацион жараён амалга оширилади:

1) 4-§ да танишган усулдан фойдаланиб масаланинг (4) ва (5) шартларини қаноатлантирувчи бошланғич (таянч) ечим топилади. Таянч ечимини топиш жараёнининг ҳар бир босқичида ажратилган номаълумнинг қиймати чизиқли функция Y_{min} га қўйиб борилади. Натижада (4) системадаги тенгламаларнинг чап томонида ажратилган (базис) ўзгарувчилар, уларнинг ўнг томонида ва чизиқли функция Y_{min} да ажратилмаган (базисмас) ўзгарувчилар жойлашган бўлади. Ажратилмаган ўзгарувчиларга қиймат бериб бошланғич таянч режа топилади ва бу таянч режа учун чизиқли функциянинг қиймати аниқланади;

2) Топилган таянч режанинг оптимал режа эканлиги текширилади:

Агар чизиқли функцияда барча ажратилмаган (базисмас) ўзгарувчилар мусбат коэффициент билан қатнашса, топилган таянч режада бу функция ўзининг минимум қийматига эришади ва, демак, бу режа оптимал режа бўлади;

3) энди чизиқли функцияда бирор базисмас ўзгарувчи (масалан, $\mathbf{x}_r$) манфий коэффициент билан қатнашсин, дейлик. Бу ҳолда топилган таянч режа оптимал режа бўлмайди ва қуйидаги икки ҳолатдан бири рўй бериши мумкин:

а) агар чизиқли функцияда $\mathbf{x}_r$ базисмас ўзгарувчи манфий коэффициентли ($c_r<0$) бўлиб, системадаги барча тенгламаларда бу номаълум номанфий коэффициент билан қатнашса, яъни $\mathbf{a}_{ir}\geq\mathbf{0}$ шарт барча $i=1, 2, \ldots, n$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда чизиқли функция чекли минимумга эга бўлмайди;

б) агар чизиқли функцияда $\mathbf{x}_r$ базисмас ўзгарувчи манфий коэффициентли ҳамда системадаги баъзи тенгламаларда $\mathbf{x}_r$ номаълум манфий коэффициентли бўлса, у ҳолда топилган таянч режани бошқа таянч режага алмаштириш керак. Бунинг учун $\mathbf{x}_r$ номаълумни базисга киритиб, базисдан

$$\min_{a_{ir}<0}\left(\frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{a}_{ir}|}\right)=\frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{a}_{kr}|}$$

шартни қаноатлантирувчи $\mathbf{x}_k$ ўзгарувчи чиқарилади;

4) топилган $\mathbf{x}_r$ базис ўзгарувчининг қийматини бошқа тенгламаларга ва $\mathbf{Y}_{\min}$ га қўйиб чиқилади. Натижада янги таянч режа ва унга мос келувчи чизиқли функциянинг қиймати топилади.

Агар ҳосил бўлган янги чизиқли функцияда ҳамма номаълумлар мусбат коэффициентли бўлса, у ҳолда топилган таянч режа оптимал режа бўлади.

Акс холда юқорида кўрсатилган усул билан топилган таянч режа бошқа таянч режа билан алмаштирилади. Бу жараён оптимал режа топилгунча ёки чизиқли функциянинг чекли минимумга эга эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Масаланинг жавобини (оптимал ечимни) ёзиш учун, ажратилмаган ўзгарувчиларни **0**га тенглаб, ажратилган (базис) ўзгарувчиларни эса, мос озод ҳадларга тенглаштирилади. Топилган номаълумларнинг қийматидан фойдаланиб $\mathbf{Y}_{\min}$ нинг, сўнгра (агар керак бўлса), $\mathbf{Y}_{\max}$ нинг қиймати топилади.

Мисол. Масаланинг таянч ечимини топинг ва уни оптимал ечимга айлантиринг

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$Y_{\min} = -x_1 + x_2$$

Ечиш. Масаланинг шартларидаги тенгламалар системасини 0-тенгламалар системасига айлантирамиз:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\ 0 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4 \\ 0 = 5 - x_1 - x_2 - x_5 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}$$

$$Y_{\min} = -x_1 + x_2$$

Ҳосил бўлган масалани қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз ва юқорида танишган итерацион жараённи бажарамиз.

Базис ўзгарувчилар	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A.K
0	2	2	-1	$\boxed{-1}$	0	0	2
0	2	-1	+2	0	-1	0	—
0	5	-1	-1	0	0	-1	—
H.T.	9	0	0	-1	-1	-1	
$Y_{\min}$	0	-1	1	0	0	0	
x_3	2	2	-1	-1	0	0	—
0	2	$\boxed{-1}$	+2	0	-1	0	2
0	5	-1	-1	0	0	-1	5
H.T.	7	-2	1	0	-1	-1	
$Y_{\min}$	0	-1	1	0	0	0	
x_3	6	0	3	1	-2	0	—
x_1	2	1	2	0	-1	0	—
0	3	0	$\boxed{-3}$	0	1	-1	1
H.T.	3	0	-3	0	1	-1	
$Y_{\min}$	-2	0	-1	0	1	0	

x_3	9	0	0	1	-1	-1	таянч ечим X=(4;1;9;0;0)
x_1	4	1	0	0	-1/3	-2/3	
x_2	1	0	1	0	1/3	-1/3	
Н.Т.	0	0	0	0	0	0	
Y_{min}	-3	0	0	0	2/3	1/3	оптимал ечим X=(4;1;9;0;0) Y_{min}=-3

Охирги босқичда топилган **X**-тенгламалар системасини ва Y_{min} ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x_3 = 9 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

$$Y_{min} = -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$$

Бу ерда: x_1, x_2, x_3 лар ажратилган (базис) ўзгарувчилар, x_4 ва x_5 эса, ажратилмаган (базис бўлмаган) ўзгарувчилардир. Базис бўлмаган ўзгарувчиларга **0** қиймат бериб берилган масаланинг таянч ечими

X=(4;1;9;0;0)

ни топамиз. Бу таянч ечим оптимал ечим бўлади, чунки чизиқли функцияда базис бўлмаган ўзгарувчилар мусбат коэффициент билан қатнашади.

Топилган оптимал ечимни қуйидаги кўринишда ёзамиз

Оптимал ечим (режа): $X_{опт}$=(4;1;9;0;0); Y_{min}=-3

Мустақил ечиш учун топшириқ

1. Масаланинг таянч ечимини топинг ва уни оптимал ечимга айлантиринг.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}$$

$$Y_{min} = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

2. Берилган масаланинг таянч ечимини топинг ва уни оптимал ечимга айлантиринг.

$$\left.\begin{array}{l} 0=15-x_1+5x_2 \\ 0=6+3x_1+2x_2 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Y_{\max} = 2x_1 + 3x_2$$

6-§. Чизиқли программалаш масаласини ечиш учун симплекс усул (Данциг усули).

Данциг яратган симплекс усул ҳар бир тенгламада биттадан ажратилган номаълум қатнашиши шартига асосланган. Бошқача айтганда,ЧП масаласида m та ўзаро чизиқли эркли векторлар мавжуд деб қаралади. Умумийликни бузмаган ҳолда бу векторлар биринчи m та $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ...,$\mathbf{P_m}$ лардан иборат дейлик. У ҳолда масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1}, \\ \mathbf{x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2}, \\ ------------------- \\ \mathbf{x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n} \quad (3)$$

(1) системани вектор шаклида ёзиб олайлик,

$$\mathbf{P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0} \quad (4)$$

Бу ерда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$ векторлар системаси m-ўлчовли фазода ўзаро чизиқли эркли бўлган бирлик векторлар системасидан иборат. Улар m ўлчовли фа—зонинг базисини ташкил қилади. Ушбу векторларга мос келувчи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчилар *«базис ўзгарувчилар»* деб аталади.

$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – базис бўлмаган ўзгарувчилар. Агар базис бўлмаган ўзгарувчиларга 0 қиймат берсак, базис ўзгарувчилар озод ҳадларга тенг бўлади. Натижада $x_0=(b_1,b_2,\ldots,b_m,0,\ldots,0)$ ечим ҳосил бўлади. Бу ечим бошланғич ечим бўлади. Ушбу ечимга $x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m=P_0$ ёйилма мос келади. Бу ёйилмадаги $P_1, P_2, \ldots, P_m$ векторлар ўзаро эркли бўлганлиги сабабли топилган бошланғич ечим таянч ечим бўлади. Симплекс жадвал деб аталувчи қуйидаги жадвални тузиб, унга масаланинг берилганларини жойлаштирамиз

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	...	C_k	...	C_n
			P_1	P_2		P_m	P_{m+1}		P_k		P_n
P_1	C_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	C_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	C_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	C_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
m+1		$Y_0=\sum_{i=1}^{m} C_ib_i$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$		$\Delta_m=0$	$\Delta_{m+1}=\sum a_{im+1}C_i-C_{m+1}$		$\Delta_k=\sum_{i=1} a_{ik}C_i-C_k$		$\Delta_n=\sum_{i=1} a_{in}C_i-C_n$

Жадвалдаги $C_{баз}$ деб белгиланган устун $x_1, x_2, \ldots, x_m$ базис ўзгарувчиларнинг чизиқли функциядаги коэффициентларидан ташкил топган вектор, яъни

$$C'_{баз}=(c_1, c_2, \ldots, c_m) \qquad (5)$$

Жадвалда ҳар бир P_j векторни тепасига x_j номаълумнинг чизиқли функциядаги коэффициенти ёзилган.

m+1 – қаторга эса $x_1, x_2, \ldots, x_m$ базис ўзгарувчилардаги чизиқли функциянинг қиймати

$$Y_0=\sum_{i=1}^{m} b_ic_i \qquad (6)$$

ҳамда базис ечимнинг оптималлик мезонини баҳоловчи сон

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i - c_j \qquad (7)$$

ёзилган. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_m$ векторлар базис векторлар деб белгиланган. Бу векторлар учун $\Delta_j = \mathbf{Z}_j - \mathbf{C}_j = \mathbf{0}$ бўлади. Агар $\Delta_j = \mathbf{Z}_j - \mathbf{C}_j \leq \mathbf{0}$ шарт барча ***i***-лар (***i*=1,2,...,n**) учун ўринли бўлса, у ҳолда

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

оптимал режа бўлади. Бу режадаги чизиқли функциянинг қиймати $\mathbf{Y}_0$ га тенг.

Энди камида битта ***j*** учун $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j > \mathbf{0}$ бўлсин, дейлик. Бу ҳолда топилган таянч режани оптимал режага яқинроқ бўлган режа билан алмаштириш керак. Бунинг учун

$$\max_{Z_j - C_j > 0} \left(Z_j - C_j\right) = Z_k - C_k = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи $\mathbf{P}_k$ векторни базисга киритиб, базисдан

$$\min_{a_{ik} > 0} \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \right) = \frac{b_l}{a_{lk}} \qquad (9)$$

шартни қаноатлантирувчи $\mathbf{P}_l$ векторни чиқариш керак бўлади. Бу ҳолда $\mathbf{a}_{lk}$ элемент хал қилувчи элемент сифатида белгиланади. $\mathbf{P}_l$ векторни ўрнига $\mathbf{P}_k$ векторни киритиш учун симплекс жадвал қуйидаги

$$\left.\begin{aligned}
b'_i &= b_i - \left(\frac{b_l}{a_{lk}} \right) \cdot a_{ik}, \\
b'_l &= \frac{b_l}{a_{lk}}, \\
a'_{ij} &= a_{ij} - \left(\frac{a_{lj}}{a_{lk}} \right) \cdot a_{ik}. \\
a'_{lj} &= \frac{a_{lj}}{a_{lk}}
\end{aligned}\right| \qquad (10)$$

формулалар асосида алмаштирилади.

Симплекс жадвал алмашгандан сўнг яна қайтадан Δ_j баҳолар аниқланади.

Агар барча j лар учун $\Delta_j \leq 0$ бўлса, у ҳолда оптимал ечим топилган бўлади. Бундай хулосани қуйидаги теорема асосида чиқариш мумкин.

1-Теорема. Агар $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ таянч режа учун $\Delta_j=Z_j-C_j \leq 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда у режа оптимал режани бўлади.

2-Теорема. Агар X_0 таянч режада тайин бир j учун $D_j=Z_j-C_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда X_0 оптимал режа бўлмайди ва шундай X режани топиш мумкин бўладики, унинг учун

$$Y(X)<Y(X_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар тайин бир j учун $\Delta_j=Z_j-C_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда 2-теоремага асосан бу таянч режа ҳам янги таянч режа билан алмаштириш керак бўлади. Бу жараён оптимал режа топилгунча ёки масаладаги чизиқли функция қуйидан чегараланмаган эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Масаланинг оптимал ечимининг мавжуд бўлмаслик шарти қуйидагича:

Агар тайин бир j учун $\Delta_j=Z_j-C_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлиб, бу устундаги барча a_{ij} элементлар учун $a_{ij} \leq 0$ $(i=1,\ldots,m)$ шарт бажарилса, масаланинг мақсад функцияси чекли экстремумга эга бўлмайди.

Фараз қилайлик, симплекс жадвалда оптималлик шарти $(\Delta_j \leq 0$ $j=1,\ldots,n)$ бажарилсин. Бу ҳолда ечим

$$X=B^{-1}P_0$$

формула орқали топилади. Бу ерда: $B=(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ матрица базис векторлардан ташкил топган матрицадир. (1)-(3) масала учун B матрица m ўлчовли бирлик матрица, ва $J_m B^{-1}$ матрица ҳам бирлик матрица бўлганлиги сабабли $X^0=P^0=(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, \ldots, 0)$ оптимал ечим бўлади.

1-мисол. Масалани симплекс усул билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=7, \\ \quad -2x_2+4x_3+x_4=12, \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10, \end{cases}$$

$$x_j > 0, \ (j=1, 2, \ldots, 6)$$

$$Y_{min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

Ечиш. Белгилашлар киритамиз ва симплекс жадвални тўлдирамиз

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C=(0;1;-3;0;2)$$

i	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	$\boxed{+4}$	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-1/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	4	1/5	0	0	-7/10	38/5	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Жадвалдан кўринадики, барча j учун $\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$. Демак оптимал ечим топилган.

Жавоб. Оптимал ечим:

$$X=(0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 4),\ Y_{min}=-11.$$

7-§. Сунъий базис усули

Агар масаланинг шартларида ўзаро эркли бўлган m та бирлик векторлар (базис векторлар) қатнашмаса, улар сунъий равишда киритилади. Масалан, масала қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0, \tag{2}$$

$$Y_{max}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{3}$$

Бу масалага $x_{n+1}\geq 0,\ x_{n+2}\geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geq 0$ қўшимча ўзгарувчилар киритилса, қуйидаги кегайтирилган масала ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geq 0, \tag{5}$$

$$Y_{min}=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n+0(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}) \tag{6}$$

Бу ҳолда P_{n+1}, $P_{n+2},\ldots,$ P_{n+m} векторлар базис векторлар ва x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} ўзгарувчилар «базис ўзгарувчилар» деб қабул қилинади.

Агар берилган масала қуйидаги кўринишда бўлса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0, \tag{8}$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{9}$$

бу масалага сунъий x_{n+1}, $x_{n+2},\ldots,$ x_{n+m} ўзгарувчилар киритиб қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ x_{n+1}\geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geq 0, \tag{11}$$

$$Y_{min}=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n+M(x_{n+1}+\ldots+x_{n+m}) \tag{12}$$

бу ерда: **M** – етарлича катта мусбат сон.

Сунъий базис ўзгарувчиларига мос келувчи P_{n+1}, $P_{n+2},\ldots,$ P_{n+m} векторлар «сунъий базис векторлар» деб аталади.

Берилган (7)-(9) масаланинг оптимал ечими қуйидаги теоремага асосланиб топилади.

Теорема: Агар кенгайтирилган (10)-(12) масаланинг оптимал ечимида сунъий базис ўзгарувчилари нолга тенг бўлса, яъни: $\mathbf{x_{n+i}=0\ (i=1,\dots,m)}$
тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу ечим берилган (7)-(9) масаланинг ҳам оптимал ечими бўлади.

Агар кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимида камида битта сунъий базис ўзгарувчи нолдан фарқли бўлса, у ҳолда масала ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. Масалани сунъий базис усули билан ечинг

$$\mathbf{x_j \geq 0,\ (j=1,\ 2,\dots,\ 4)}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 3 \end{cases}$$

$$Z_{max}=5x_1+3x_2+4x_3-x_4$$

Ечиш. Масалага сунъий $\mathbf{x_5 \geq 0}$ $\mathbf{x_6 \geq 0}$ ўзгарувчилар киритамиз ва уни нормал кўринишга келтирамиз.

$$\mathbf{x_j \geq 0,\ (j=1,\ 2,\dots,\ 6)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$Z_{min}=-5x_1-3x_2-4x_3+x_4+M(x_5+x_6)$$

ҳосил бўлган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

i	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	A.K
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_5	M	3	1	$\boxed{3}$	2	2	1	0	1
2	P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	1,5
Δ_j			6m	3m+5	5m+3	3m+4	3m-1	0	0	
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
2	P_6	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	...
Δ_j			M-3	M+4	0	M+3	M-2	M-1	0	
1	P_2	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	×	-1/4	1
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	...	-
Δ_j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M	
1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M	

Шундай қилиб, симплекс усул бўйича 4-та қадамдан иборат яқинлашишда оптимал ечим топилди. $\Delta_j \leq 0$. Оптимал ечим **X=(1;0;1;0;0;0)** Y_{min}**=-9.**

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимидаги сунъий ўзгарувчилар **0**га тенг **(**x_5**=0,** x_6**=0)**. Шунинг учун (теоремага асосан) берилган масаланинг оптимал ечими:

X=(1;0;1;0); Z_{min}**=-9;** Z_{max}**=9**; бўлади

Мустақил ечиш учун топшириқлар

1. Масалани симплекс усул билан ечинг.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad - x_4 \qquad - 2x_6 = 5 \\ \qquad x_2 \quad + 2x_4 \quad - 3x_5 + x_6 = 3 \\ \qquad\quad x_3 \ + 2x_4 \quad - 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6} \end{array}\right\}$$

$$Y_{min} = x_1 + x_2 + x_3$$

2. Масаланинг шартларини тенгламаларга айлантириб сўнгра симплекс усул билан ечинг.

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0. \ j = \overline{1,4}$$

$$Y_{max} = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$$

8-§. Хос чизиқли программалаш масаласи. Циклланиш ва ундан қутилиш усули (ε-усул)

Агар P_i базис векторларга мос келувчи бирорта x_i **0** га тенг бўлса, яъни

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m$$

ёйилмадаги x_i лардан камида биттаси нолга тенг бўлса, чизиқли программалаш масаласи *хос чизиқли программалаш* *масаласи* дейилади ва $\mathbf{P}_i$ базис векторларга мос келувчи таянч режа — *хос режа* бўлади.

Юқорида, симплекс усулни асослаш жараёнида чизиқли программалаш масалаларини хосмас деб фараз қилган эдик. Бу фаразга кўра симплекс усулнинг ҳар бир итерациясидан сўнг чизиқли функциянинг қиймати камая боришини ва чекли сондаги итерациядан сўнг у ўзининг оптимал қийматига эришиши мумкинлиги кўрсатган эдик.

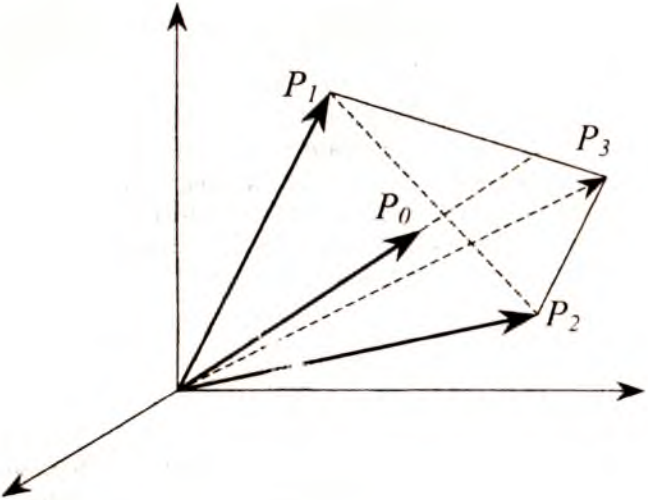
Агар масаланинг таянч режаси хос режа бўлса,

$$\theta = \frac{\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_{lk}} = 0$$

бўлиши мумкин. У ҳолда бир таянч режадан иккинчисига ўтганда, чизиқли функциянинг қиймати ўзгармайди. Баъзан бундай масалаларни ечиш жараёнида циклланиш ҳолати, яъни маълум сондаги итерациядан сўнг олдинги итерациялардан бирортасига қайтиш ҳолати рўй бериши мумкин. Циклланиш ҳолати рўй берган масалаларда оптимал режа ҳеч қачон топилмайди. Циклланиш ҳолати, одатда, таянч режадаги бирдан ортиқ $\mathbf{x}_i$=0 бўлган ҳолатларда рўй бериши мумкин. Бирдан ортиқ векторлар учун θ_0=0 бўлганда базисдан чиқариладиган векторни тўғри аниқлаш циклланиш ҳолатини олдини олишда катта аҳамиятга эгадир. Бундан кўринадики, хос масалаларни ечишга мослаштирилган усуллар масаланинг оптимал ечимини топишга ишонч билдириб базисдан чиқариладиган векторни танлашнинг ягона йўлини кўрсатиши керак.

Хос чизиқли программалаш масаласининг геометрик тасвирини 9 шаклдан кўриш мумкин. Бунда $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторлардан тузилган қавариқ конуснинг сиртида ётибди. Шунинг учун $\mathbf{P}_0$ ни $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторларнинг қавариқ комбинацияси сифатида ифодалаб бўлмайди, лекин уни $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин. $\mathbf{P}_0$ ни $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш учун $\mathbf{x}_1\mathbf{P}_1+\mathbf{x}_2\mathbf{P}_2+\mathbf{x}_3\mathbf{P}_3$ ёйилмадаги $\mathbf{P}_3$ векторнинг коэффициенти $\mathbf{x}_3$=0 бўлиши керак.

Агар $\mathbf{P}_0$ векторни силжитиб $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторлардан ташкил топган қавариқ конуснинг ичига киритсак, у ҳолда уни $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали



9-шакл.

ифодалаш мумкин бўлади. $\mathbf{P_0}$ векторни қавариқ конуснинг ичига силжитиш учун ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ сон олиб, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ векторларнинг

$$\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3$$

комбинациясини тузамиз ва уни масаланинг

$$\mathbf{x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0}$$

чегараловчи шартларининг ўнг томонига қўшиб ёзамиз:

$$\mathbf{x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3=P_0(\varepsilon)} \qquad (1)$$

ҳосил бўлган $\mathbf{P_0(\varepsilon)}$ вектор $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ векторлардан ташкил топган қавариқ конуснинг ичида ётади (9-шакл). Демак, $\mathbf{P_0}$ ни $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифадалаш мумкин.

Худди шунингдек, умумий ҳолда берилган масаланинг

$$\mathbf{x_1P_1+x_2P_2+...+x_mP_m+...+x_nP_n=P_0} \qquad (2)$$

чегараловчи шартларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{x_1P_1+x_2P_2+...+x_mP_m+...+x_nP_n=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+...+\varepsilon^m P_m+...+\varepsilon^n P_n=P_0(\varepsilon)} (3)$$

Фараз қилайлик, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$,..., $\mathbf{P_m}$ базис векторлар бўлиб, улар **B** матрицани ташкил қилсин. У ҳолда

$$\overline{X}=B^{-1}P_0\geq 0 \qquad (4)$$

берилган масаланинг ечими ва

$$\overline{X}(\varepsilon)=B^{-1}P_0(\varepsilon)\geq 0 \qquad (5)$$

ўзгартирилган (3) чегараловчи шартли масаланинг ечими бўлади.

$$\mathbf{X}_j=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлганлиги учун (5) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{X}}(\varepsilon)&=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_0+\varepsilon\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1+\varepsilon^2\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2+\ldots+\varepsilon^m\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_m+\ldots+\varepsilon^n\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_n=\\&=\overline{\mathbf{X}}+\varepsilon\mathbf{X}_1+\varepsilon^2\mathbf{X}_2+\ldots+\varepsilon^m\mathbf{X}_m+\ldots+\varepsilon^n\mathbf{X}_n\end{aligned} \tag{7}$$

Демак, $\overline{\mathbf{b}}_i(\varepsilon)$ қуйидагича аниқланади:

$$\overline{\mathbf{b}}_i(\varepsilon)=\overline{\mathbf{b}}_i+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j\mathbf{a}_{ij} \tag{8}$$

$$\overline{\mathbf{b}}_i(\varepsilon)=\overline{\mathbf{b}}_i+\varepsilon^i+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^j\mathbf{a}_{ij} \tag{9}$$

ε ни шундай кичик сон деб қабул қилиш мумкинки,

$$\mathbf{b}_i(\varepsilon)>0$$

тенгсизлик барча **i=1,2,...,m** лар учун ўринли бўлади. Базисдан чиқариладиган $\mathbf{P}_l$ векторни аниқлаш учун

$$\theta_0=\frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}}=\min_i\frac{\overline{b}_i(\varepsilon)}{a_{ik}}=\frac{b_i+\varepsilon^i+\sum\limits_{j=m+1}\varepsilon^j a_{ij}}{a_{ik}}>0 \tag{10}$$

қийматни барча $\mathbf{a}_{ik}>0$ лар учун ҳисоблаймиз. (9) га асосан $\dfrac{b_l(\varepsilon)}{a_{l,lk}}$ нисбат ***i=l*** да минимумга эришади, чунки $\overline{\mathbf{b}}_l(\varepsilon)$ ε^l ни ўз ичига олувчи бирдан-бир ўзгарувчидир. (7) ва (10) га асосан $\theta_0\overline{\mathbf{b}}_l(\varepsilon)$ даги ε^l олдидаги коэффициентдан фойдаланиб аниқланади.

Симплекс жадвал бўйича ишлаш жараёнини қуйидагича тартиблаш мумкин.

Агар

$$\theta_0=\min_i\frac{\overline{\mathbf{b}}_i}{\mathbf{a}_{ik}},\qquad(\mathbf{a}_{ik}>0)$$

қиймат, фақат битта ***i=l*** индекс учун ўринли бўлса, у ҳолда $\mathbf{P}_l$ базисдан чиқарилади. Агар θ минимум қийматга бир нечта i индекслар учун эришса, у ҳолда ҳамма ***i*** индекслар учун j=1 да

$\mathbf{a}_{ij}/\mathbf{a}_{ik}$ нисбат ҳисобланади. Бу нисбатларнинг минимумига мос келувчи векторни базисдан чиқарилади. Агар θ минимум қийматга бир нечта i индексларда эришса, у ҳолда худди шундай нисбатни j+1 устун учун ҳисобланади ва бу нисбатнинг минимум қийматига мос келувчи вектор базисдан чиқарилади.

Масалан, агар $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_m$ базис векторлар учун

$$\theta_0 = \frac{b_1}{a_{1k}} = \frac{b_2}{a_{2k}}$$

бўлса, $\frac{a_{11}}{a_{1k}}$ ва $\frac{a_{21}}{a_{2k}}$ нисбатлар ҳисобланиб, улар ўзаро солиштирилади. Бунда

$$\min_i = \frac{a_{i1}}{a_{ik}} = \frac{a_{21}}{a_{2k}}, \quad (i = 1,2)$$

бўлса, $\mathbf{P}_2$ вектор базисдан чиқарилади. Агар

$$\min_i \frac{a_{i1}}{a_{ik}} = \frac{a_{11}}{a_{1k}}, \quad (i = 1,2)$$

бўлса, базисдан $\mathbf{P}_1$ вектор чиқарилади. Агар

$$\frac{a_{12}}{a_{1k}} = \frac{a_{21}}{a_{2k}}$$

тенглик ўринли бўлса, $\frac{a_{11}}{a_{1k}}$ ва $\frac{a_{22}}{a_{2k}}$ нисбатлар ҳисобланиб, улар ўзаро солиштирилади.

Юқоридагидек нисбатларни солиштириш тенгсизлик ҳосил бўлгунча давом эттирилади. (9) га асосан албатта бирорта j учун тенгсизлик ҳосил бўлиши керак.

Базисга киритиладиган $\mathbf{P}_k$ вектор танлангандан сўнг, симплекс жадвал маълум йўл билан алмаштирилади. Натижада топилган янги X′(ε) таянч режа етарли даражада кичик ε учун хосмас режа бўлади.

Амалда хос чизиқли программалаш масаласи жуда кам учрайди. Қуйида биз келтирадиган масала Америка олими Бил томонидан тузилган.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 - 60\mathbf{x}_2 - \frac{1}{25}\mathbf{x}_3 + 9\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = 0, \\ \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - 90\mathbf{x}_2 - \frac{1}{50}\mathbf{x}_3 + 3\mathbf{x}_4 + \qquad \mathbf{x}_6 = 0, \\ \qquad\qquad \mathbf{x}_3 \qquad\qquad + \mathbf{x}_7 = 1, \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\mathbf{x}_j \geq 0, \quad (\mathbf{j} = \overline{1,7}).$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = -\frac{3}{4}\mathbf{x}_1 + 150\mathbf{x}_2 - \frac{1}{50}\mathbf{x}_3 + 6\mathbf{x}_4.$$

Бу масала хос масала бўлиб, уни юқорида келтирилган «тўғрилаш» усулини қўлланмай ечганда циклланиш ҳолати рўй беради. Симплекс усулнинг 7-итерациясидан сўнг 2-итерацияга қайтиш ҳолати рўй беради. Агар юқорида кўрган «тўғрилаш» усулини қўлламасак, бу циклланиш ҳолати чексиз кўп равишда такрорланиши мумкин, демак, масаланинг оптимал ечимини топиш имконияти бўлмайди.

Энди масалага «тўғрилаш» усулини қўллаб ечамиз. Энг аввал берилган масалани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \quad x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ \qquad x_3 \qquad + x_7 = 1, \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

$$Y'_{\min} = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4.$$

Бу ерда: ε кичик мусбат сон бўлиб, уни шундай танлаш мумкинки, натижада тенгламаларнинг ўнг томонига ε нинг фақат биринчи ва иккинчи даражасини қўшиш етарли бўлсин. (II) масалани симплекс жадвалга жойлаштириб ечамиз.

Шундай қилиб, юқоридаги «тўғрилаш» усулини қўллаб масалани ечганда 6-босқичда оптимал ечим топилди.

I.

Базис вект.	$C_{\text{баз}}$	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$0+(1/4)\varepsilon-60\varepsilon^2$	$\boxed{1/4}$	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$0+(1/2)\varepsilon-90\varepsilon^2$	×	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

II.

Базис вект.	$C_{\text{баз}}$	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	-3/4	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	$\boxed{30}$	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	$\boxed{30}$	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	$\boxed{1/500}$	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	$\boxed{2/25}$	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	1	0	-500	0	$\boxed{250}$	100/3	-50/3	1
		0	0	-40	0	$\boxed{2}$	5/3	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+2/125$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	1/250	0	-2	0	1	2/15	-1/15	1/250
		$-1/125-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon$	0	-39	0	0	7/5	-11/5	-1/125

VI.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+1/25$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100
		$-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon-1/20$	0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20

$$X(\varepsilon)=(160\varepsilon^2+\varepsilon+1/25;\ 0;\ 500\varepsilon^2+1;\ 0;\ 3/100)$$

$$Y_{min}(\varepsilon)=-130\varepsilon^2-(3/4)\varepsilon-1/20$$

Берилган масалани ечимини топиш учун $\varepsilon=0$ деб қабул қиламиз.

Жавоб: $X=(1/25;\ 0;\ 1;\ 0;\ 3/100)$, $Y_{min}(\varepsilon)=-1/20$

Таянч сўз ва иборалар

Модел; математик модел; программалаш; математик программалаш; чизиқли программалаш; чегараловчи шартлар, мақсад функция; мумкин бўлган ечим; таянч ечим (режа); айниган ва айнимаган таянч режа; оптимал ечим (режа); қўшимча ўзгарувчи; қавариқ комбинация; қавариқ тўплам; қавариқ тўпламнинг четки нуқтаси; гипертекислик; гипертекисликлар оиласи; сатх текислиги; оптимал нуқта; актив шарт; пассив шарт; ажратилган ўзгарувчилар; ажратилмаган ўзгарувчилар; базис ўзгарувчи; базис ечим; номанфий базис ечим; назорат тенглама; аниқловчи коэффициент; 0-тенглама; x-тенглама; 0-тенгламалар системаси; x-тенгламалар системаси; симплекс усул; симплекс жадвал; оптималлик мезони; оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик мезони; сунъий базис; сунъий базис усули; кенгайтирилган масала; хос чизиқли программалаш масаласи; хос режа (ечим); циклланиш; ε-усул.

Назорат саволлар

1. Математик программалашнинг предмети нимадан иборат?

2. Иқтисодий масаланинг математик модели нима ва у қандай тузилади?

3. Чизиқли программалаш масаласининг чегараловчи шартлари қандай кўринишда бўлиши мумкин?

4. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

5. «Истеъмол савати» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

6. «Оптимал бичиш» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

7. Умумий кўринишдаги чизиқли программалаш масаласининг қандай шаклларда ифодалаш мумкин?

8. Чизиқли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечими нима?

9. Чизиқли программалаш масаласининг таянч ечимини таърифланг.

10. Айниган ва айнимаган таянч ечимлар нима?

11. Чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечими нима?

12. Чизиқли программалаш масаласида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?

13. Чизиқли программалаш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қандай тўплам бўлади?

14. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакнинг четки нуқтаси билан таянч ечим орасида қандай боғланиш бор?

15. Мақсад функция ўзининг оптимал қийматига қандай нуқтада эришади?

16. Чизиқли прораммалаш масаласининг бошлангич (таянч) ечимининг мавжуд эмаслик шартлари қандай?

17. Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқини қандай?

18. Чизиқли программалаш масаласи ечимларининг қандай хоссаларига асосан график усулни қўллаш мумкин?

19. Чизиқли программалаш масаласи режаларидан ташкил топган тўплам қандай бўлиши мумкин?

20. Қандай ҳолда чизиқли программалаш масаласи бирдан ортиқ оптимал ечимга эга бўлиши мумкин?

21. Иқтисодий масалани график усулда ечганда хом ашёларнинг камёб ёки камёб эмаслигини қандай аниқлаш мумкин?

22. Пассив ва актив чегараловчи шартлар нима?

23. Актив шартларни (камёб хом ашёларни) бир бирликка оширганда оптимал ечим қандай ўзгаради?

24. Оптимал ечимни ўзгартирмаган ҳолда пассив шартларни қанчалик ўзгартириш мумкин?

25. Эйдельнант усулида таянч режанинг оптимал режа бўлишлик$a_{ij}a_{ij}a_{ij}$ шарти нимадан иборат?

26. Назорат тенглама нима ва у қандай ролни ўйнайди?

27. Тенгламалар системасининг базис ечими нима?

28. 0-тенгламалар системаси қандай тузилади?

29. Тенгламалар системасининг номанфий ечимининг мавжуд эмаслик шартлари қандай?

30. Аниқловчи коэффициент нима ва у қандай топилади?

31. Симплекс жадвалнинг кўриниши қандай?

32. Қандай чизиқли программалаш масаласини симплекс (Данциг) усули билан ечиш мумкин?

33. Симплекс усули бўйича ечганда чизиқли программалаш масаланинг чекли оптимал ечимга эга бўлмаслик шарти нимадан иборат?

34. Симплекс усулда бошланғич (таянч) ечимнинг оптималлик мезони нимадан иборат?

35. Сунъий базис усули қачон қўлланилади?

36. Қўшимча ва сунъий ўзгарувчилар нима ва уларнинг фарқи нимадан иборат?

37. Сунъий базис вектор усули билан ечганда чизиқли программалаш масаласи қайси ҳолларда ечимга эга бўлмайди?

38. Хос чизиқли программалаш масаласи қандай бўлади?

39. Циклланиш нима ва у қачон рўй бериши мумкин?

40. Циклланишдан қутилиш учун ε-усулнинг ғояси қандай?

Масалалар

1.Мебел фабрикасида стандарт ўлчамдаги фанерлардан мис равишда 24, 31 ва 18 дона 3 хил буюмлар учун тайёр қисмлар қирқилиши керак. ҳар бир фанер тайёр қисмларга икки хил усулда қирқилиши мумкин. Қуйидаги жадвалда ҳар бир қирқиш усулида олинадиган тайёр қисмлар сони ва бунда ҳосил бўладиган чиқиндилар миқдори берилган.

Зарур миқдордан кам бўлмаган тайёр қисмлар тайёрлаш ва энг кам чиқиндига эга бўлиши учун фанерлардан нечтасини қайси усулда қирқиш керак?

Тайёр қисм турлари	**Қирқиш усулида ҳосил буладиган тайёр қисмлар сони (дона)**	
	1-усул	2-усул
I	**2**	**6**
II	**5**	**4**
III	**2**	**3**
чиқиндилар миқдори (см2)	12	16

2.Кондитер фабрикаси уч турдаги А, В, С карамелларни ишлаб чиқариш учун уч хил асосий хом ашё: шакар, қиём ва қуруқ мевалар ишлатилади. 1 тонна тайин турдаги карамелларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашёларнинг миқдори (нормаси) қуйидаги жадвалда келтирилган Жадвалда, шунингдек, хом ашёлар заҳираси ва турли карамелларни ишлаб чиқаришдан фабрикани оладиган даромад келтирилган.

хом ашёлар тури	1 тонна махсулотга хом ашё сарфи тонна			хом ашё
	А	В	С	заҳираси
шакар	0,8	0,5	0,1	800
қиём	0,4	0.4	0,3	600
қуруқ мевалар	—	0,1	0,1	120
1 тонна карамелни сотишдан олинадиган фойда (шартли бирлик)	108	112	126	

Фабрикага максимал фойда келтирувчи карамел ишлаб чиқариш режасини топинг.

3.Фирма ўз махсулотини радио ва телевизион тармоқ орқали реклама қилиш имкониятига эга. Фирма 1 ойда реклама учун 1000 долл. миқдорида пул ажратилган. Радио орқали рекламанинг ҳар бир минутига 5 долл., телевизор орқали рекламанинг ҳар минутига эса 100 долл. сарф қилинади. Фирманинг радио рекламани телерекламага нисбатан 2 марта кўпроқ ташкил қилиш хохиши бор. Олдинги йиллардаги тажриба шуни кўрсатадики бир минутли телереклама махсулот сотилишини радио рекламага нисбатан 25 марта кўпроқ таъминлайди.

Фирманинг ҳар ойда реклама учун ажратадиган маблагини радио ва телерекламалар ўртасида оптимал тақсимланг.

4.График усулда қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимлар кўпбурчагини топинг.

$$x_1+x_2\leq4$$
$$4x_1+3x_2\leq12$$
$$-x_1+x_2\leq1$$
$$x_1+x_2\leq6$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0$$

5.Масалани график усулда ечинг ҳамда ундаги пассив ва актив шартларни аниқланг

$$x_1-x_2\leq1$$
$$3x_1-x_2\leq6$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0$$
$$Y_{max}=6x_1-2x_2$$

6.Масалани график усулда ечинг ва мақсад функциянинг оптимал қийматини ўзгартирмаган ҳолда чегараловчи шартларни қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини кўрсатинг.

$$2x_1+7x_2\leq21$$
$$7x_1+2x_2\leq49$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0$$
$$Y_{max}=4x_1+4x_2$$

7.Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$\left.\begin{aligned}-4\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+2\mathbf{x}_3\quad&=12\\6\mathbf{x}_1\quad+3\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4\quad&=30\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{x}_j\geq0,\qquad(\mathbf{j}=\overline{1,4})$$

8.Чизиқли тенгсизликлар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

а)

$$\left.\begin{aligned}x_1+3x_2&\leq4\\x_1\quad+2x_3&\leq7\\x_1+3x_2+2x_3&\leq12\end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geq0.\ j=(\overline{1,3})$$

б)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_3 &\geq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$$

9. Берилган системанинг номанфий базис ечимлари ичида мақсад функцияга экстремал қиймат берувчисини топинг.

а)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j = (\overline{1,4})$$

$$Y_{max}=2x_1+3x_2+4x_3$$

б)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + 3x_4 &\leq 30 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 20 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4})$$

$$Y_{max}=4x_1+6x_2+9x_3+6x_4$$

в)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,5})$$

$$Y_{min}=2x_1-x_2+4x_3+5x_4$$

10. Чизиқли программалаш масалаларини симплекс усул билан ечинг.

а)

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 &= 12 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j = (\overline{1,5})$$

$$Y_{max}=7x_1+x_2-4x_3+x_4-9$$

б)

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 \quad &= 4\\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 8\\ x_2 + x_3 \quad + x_5 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,5})$$

$$Y_{max}=x_1+2x_2-x_3-x_4-2x_5$$

в)

$$x_1+3x_2 \leq 4$$
$$x_1 \quad +2x_3 \leq 7$$
$$x_1+3x_2+3x_3 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$
$$Y_{max}=3x_1+8x_2+5x_3$$

11. Масалаларнинг ечимини сунъий базис усули билан топинг.

а)

$$\mathbf{2x_1+x_2+x_3-4x_4 \geq 6}$$
$$3x_1-x_2+2x_3 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$
$$Y_{max}=2x_1+4x_2+5x_3+x_4$$

б)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6\\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0,\ j = (\overline{1,4})$$

$$Y_{max}=x_1+2x_2-x_3+x_4$$

в)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 7\\ -x_1 + 3x_3 &\leq 2\\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$$

$$Y_{max}=3x_1+x_2+2x_3$$

12. Хос чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечимини топинг.

а)

$$x_1-x_2\quad-2x_5=0,$$
$$x_2\quad+x_4+4x_5=0,$$
$$x_2+x_3\quad+x_5=1,$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\leq0,\ \ x_3\geq0,\ \ x_4\geq0,\ \ x_5\geq0$$
$$Y_{max}=x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5;$$

б)

$$x_1+x_2-x_3+8x_4+10x_5-x_6-x_7-x_8=0,$$
$$x_1-x_2+x_3-7x_4+11x_5+2x_6-x_7-x_8=0,$$
$$x_1+x_2+x_3-15x_4+12x_5-x_6-x_7+3x_8=2,$$
$$\mathbf{x_j\geq0,\ j=(1,2,\ldots,8)}$$
$$Y_{max}=x_1+x_2+2x_3+3x_4-x_5+x_6+x_7+7x_8$$

в)

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2,$$
$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$x_1\text{-}x_2+2x_3=0,$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0,\ \ x_3\geq0,\ \ x_4\geq0$$
$$Y_{max}=2x_1+x_2+x_4$$

II БОБ. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШДА ИККИЛАНИШ НАЗАРИЯСИ

1-§. Иккиланиш назариясининг асосий тушунчалари. Иккиланган масалалар ва уларнинг иқтисодий талқини. Симметрик ва симметрик бўлмаган масалалар.

Ҳар бир чизиқли программалаш масаласига унга нисбатан иккиланган масала деб аталувчи бошқа масалани мос қўйиш мумкин. Берилган масаладаги мақсад функция ва номаълумларга қўйилган чегаравий шартлар орқали иккиланган масаланинг мақсад функциясини ва чегаравий шартларини тўла аниқлаш мумкин.

Берилган масала ва унга иккиланган масалалар биргаликда ўзаро иккиланган (қўшма) масалалар деб аталади. Агар берилган масала ёки унга иккиланган масалалардан бирортаси ечимга эга бўлса, уларнинг иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади.

Ўзаро иккиланган масалаларни кўз олдига келтириш ва уларни иқтисодий маъноларини таҳлил қилиш учун қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини кўрамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ---------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0, \quad (2)$$

$$Y_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad \mathbf{(3)}$$

Масаланинг (1) шарти маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган **m** хил хом ашёнинг ҳар бири чегараланган эканлигини ва уларни меъёрида сарф қилиш кераклигини кўрсатади. Бу ерда: x_j **(j=1,...,n)** ишлаб чиқариладиган *j*-маҳсулот миқдори, b_i **(i=1,...,n)** *i*-хом ашёнинг заҳираси (запаси) a_{ij} коэффициентлар *j*-маҳсулотнинг **I** бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ***i***-хом ашё миқдори (нормаси)ни кўрсатади. $\mathbf{Y}_{max}$–мақсад функция бўлиб у ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати максимум бўлиши кераклигини кўрсатади, бу ерда C_j – маҳсулот **I** бирлигининг баҳосидир. Масалани вектор формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$AX \leq B \tag{4}$$

$$X \geq 0 \tag{5}$$

$$Y_{max} = CX \tag{6}$$

Фараз қилайлик, корхона маълум бир сабабларга кўра маҳсулот ишлаб чиқаришни тўхтатган бўлсин. Шу сабабли корхона хом ашё ва бошқа ишлаб чиқариш воситаларини сотмоқчи бўлади. Корхона бу хом ашёларни сотишдан олган тушуми маҳсулот ишлаб чиқариб уни сотишдан олган тушумидан кам бўлмаслигига ҳаракат қилади. Иккинчи томондан хом ашё сотиб олувчи корхона эса уларни кам ҳаражат сарф қилиб сотиб олишга ҳаракат қилади. Иккиланган масала хом ашёларни сотувчи ва уларни сотиб олувчи корхоналар мақсадини амалга ошириши керак. Бунинг учун хом ашёлар нархи $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ..., $\mathbf{W}_m$ қандай бўлганда сотувчи корхона зарар кўрмайди ҳамда сотиб олувчи корхонанинг сарф қилган ҳаражатлари **min** бўлади.

Математик нуқтаи назардан иккиланган масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{W}_1 + \mathbf{a}_{21}\mathbf{W}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m1}\mathbf{W}_m \geq \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_{12}\mathbf{W}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{W}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{W}_m \geq \mathbf{c}_2 \\ ------------------- \\ \mathbf{a}_{1n}\mathbf{W}_1 + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{W}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{W}_m \geq \mathbf{c}_n \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbf{W}_1 \geq \mathbf{0},\ \mathbf{W}_2 \geq \mathbf{0},\ \ldots,\ \mathbf{W}_m \geq \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$F_{min} = b_1W_1 + b_2W_2 + \ldots + b_mW_m. \tag{9}$$

Иккиланган масаладаги (7) шарт ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқиш учун сарф қилинадиган барча хом ашёларнинг пул қиймати маҳсулот баҳосидан кам бўлмаслик шартини кўрсатади. (9) шарт эса мақсад функция бўлиб, у барча хом ашёларнинг баҳоси минимал бўлиши кераклигини кўрсатади.

Иккиланган масала вектор формада қуйидагича ёзилади:

$$WA \geq C \tag{10}$$

$$W \geq 0 \tag{11}$$

$$F_{min} = WB \tag{12}$$

(1)-(3) ва (7)-(9) масалалар «ўзаро симметрик бўлган иккиланган масалалар» дейилади. Бу масалаларда чегаравий шартлар тенгсизликлардан иборат бўлади, ҳамда номаълумларнинг манфий бўлмаслиги талаб қилинади. Симметрик бўлмаган иккиланган масалалар умумий ҳолда қуйидагича қўйилади:

Берилган масала	Иккиланган масала
$AX=B, X\geq 0, Y_{max(min)}=CX.$	$WA\geq C\ (WA\leq C),\ F_{min(max)}=WB.$

Бу масалалардан кўринадики, агар берилган масаладаги чегаравий шартлар тенглама кўринишда бўлиб, мақсад функция $\mathbf{Y_{max}}$ ёки $\mathbf{Y_{min}}$ кўринишда бўлса, у ҳолда иккиланган масаладаги чегаравий шартлар тенгсизлик кўринишида бўлади. Уларнинг «≤» ёки «≥» кўринишда бўлиши берилган масаладаги мақсад функциясининг мос равишда $\mathbf{Y_{min}}$ ёки $\mathbf{Y_{max}}$ кўринишда бўлишига боғлиқ бўлади. Агар берилган масалада мақсад функцияси $\mathbf{Y_{max}}$ кўринишда бўлса, иккиланган масалада у $\mathbf{F_{min}}$ бўлади ва аксинча, агар берилган масалада мақсад функция $\mathbf{Y_{min}}$ кўринишда бўлса, у ҳолда иккиланган масалада $\mathbf{F_{max}}$ кўринишда бўлади.

Юқоридагилардан хулоса қилиб, иккиланган масалаларнинг математик моделларини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

<u>Симметрик бўлмаган иккиланган масалалар</u>

	Берилган масала	Иккиланган
1.	$\mathbf{AX=B,}$ $\mathbf{X\geq 0,}$ $\mathbf{Y_{min}=CX.}$	$\mathbf{WA\leq C}$ $\mathbf{Z_{max}=W}$
2.	$\mathbf{AX=B,}$ $\mathbf{X\geq 0,}$ $\mathbf{Y_{max}=CX.}$	$\mathbf{WA\geq C}$ $\mathbf{Z_{min}=W}$

Симметрик иккиланган масалалар:

Берилган масала	Иккиланган масала
$AX \geq B,$	$WA \leq C,$
$X \geq 0,$	$W \geq 0,$
$Y_{min} = CX.$	$Z_{max} = WB.$
Берилган масала	Иккиланган масала
$AX \leq B,$	$WA \geq C,$
$X \geq 0,$	$W \geq 0,$
$Y_{max} = CX.$	$Z_{min} = WB.$

Иккиланган масалалар орасида яна қуйидаги боғланишлар мавжуд.

1. Берилган масаладаги технологик коэффициентлардан ташкил топган матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлса, иккиланган масаладаги матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда, яъни **А** матрицага транспонирланган матрица бўлади.

2. Иккиланган масаладаги номаълумлар сони берилган масаланинг чегаравий шартларидаги тенгламалар (тенгсизликлар) сонига тенг. Иккиланган масала чегаравий шартларидаги тенгламалар (тенгсизликлар) сони берилган масаладаги номаълумлар сонига тенг бўлади.

3. Иккиланган масала мақсад функциясидаги коэффициентлар берилган масаладаги озод ҳадлардан иборат бўлади. Иккиланган масаладаги озод ҳадлар эса берилган масала мақсад функцияси коэффициентларидан иборат бўлади.

4. Агар берилган масаладаги **x_j** номаълум мусбат бўлса, **($x_j \geq 0$)** у ҳолда иккиланган масаладаги j-шарт «≥» кўринишдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Агар **x_j** номаълум мусбат ҳам манфий ҳам қийматларини қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда иккиланган масаладаги j-шарт тенгламадан иборат бўлади.

Агар берилган масаладаги i-шарт тенгсизликдан иборат бўлса, иккиланган масаладаги **W_i** номаълум мусбат бўлади, яъни **$W_i \geq 0$**.

Агар (1)-(3) масаладаги i-шарт тенгламадан иборат бўлса, **W_i** мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин.

1-мисол. Берилган масалага иккиланган масала тузинг.

$$-x_1+3x_2-5x_3\leq 12$$
$$2x_1-x_2+4x_3\leq 24$$
$$3x_1+x_2+x_3\leq 18$$
$$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ x_3\geq 0,$$
$$Y_{max}=2x_1+x_2+3x_3$$

Ечиш. Масаланинг шартлари «≤» кўринишдаги тенгсизликлардан иборат, демак, берилган масалага симметрик бўлган иккиланган масала 4-кўринишда тузилади. Натижада қуйидаги симметрик иккиланган масалаларни ҳосил қиламиз:

Берилган масала:	Иккиланган масала:
$\mathbf{-x_1+3x_2-5x_3\leq 12,}$	$\mathbf{-W_1+2W_2+3W_3\geq 2,}$
$\mathbf{2x_1-x_2+4x_3\leq 24,}$	$\mathbf{3W_1-W_2+W_3\geq 1,}$
$\mathbf{3x_1+x_2+x_3\leq 18,}$	$\mathbf{-5W_1+4W_2+W_3\geq 3,}$
$\mathbf{x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ x_3\geq 0,}$	$\mathbf{W_1\geq 0,\ \ W_3\geq 0,\ \ W_2\geq 0,}$
$\mathbf{Y_{max}=2x_1+x_2+3X_3}$	$\mathbf{F_{min}=12W_1+24W_2+18W_3}$

2-мисол. Берилган масалага иккиланган масала тузинг.

$$x_1-x_2+4x_3\leq 12$$
$$x_1+3x_2-2x_3=13$$
$$x_1+5x_2-6x_3\leq 11$$
$$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ x_3\geq 0,\ \ Y_{max}=x_1-2x_2+3x_3-10x_4.$$

Ечиш. Берилган масаладаги иккинчи шарт тенгламадан 1-шарт ҳамда 3-шарт тенгсизликдан иборат. Шунинг учун, иккиланган масалани тузишда юқоридаги 5-пунктда келтирилган қоидага риоя қиламиз ва қуйидаги масалаларга эга бўламиз:

Берилган масала:

$$\begin{gathered} x_1-x_2+4x_3\leq 12, \\ x_1+3x_2-2x_3=13, \\ x_1+5x_2-6x_3\leq 11, \\ x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad x_3\geq 0, \\ Y_{max}=4x_1+x_2+4x_3 \end{gathered}$$

Иккиланган масала:

$$\begin{gathered} W_1+W_2+W_3\geq 4, \\ -W_1+3W_2+5W_3\geq 1, \\ 4W_1-2W_2-6W_3\geq 4, \\ W_1\geq 0,\quad W_3\geq 0, \\ F_{min}=12W_1+13W_2+11W_3 \end{gathered}$$

3-мисол. Берилган масалага иккиланган масалани тузинг.

$$\begin{gathered} x_1+x_2+2x_3-6x_4=1, \\ x_1+x_2+4x_3-8x_4=1, \\ 4x_1+2x_2+x_3-4x_4=3, \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0, \\ Y_{max}=x_1-2x_2+3x_3-10x_4. \end{gathered}$$

Ечиш. Берилган масаладаги чегараловчи шартлар, тенгламалардан иборат, демак, симметрик бўлмаган иккиланган масалани 2-кўринишда тузамиз ва қуйидаги иккиланган масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} W_1+W_2+4W_3\geq 1, \\ W_1+W_2+2W_3\geq -2, \\ 2W_1+4W_2+W_3\geq 3, \\ -6W_1-8W_3-4W_3\geq -10. \\ \mathbf{F_{min}=W_1+W_2+3W_3} \end{gathered}$$

Мустақил ечиш учун топшириқлар.

1.Берилган масалаларга иккиланган масала тузинг.

а)
$$\begin{gathered} x_1+2x_2\leq 14, \\ -5x_1+3x_2\leq 15, \\ 2x_1+3x_2\leq 12, \\ x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0, \\ Y_{max}=x_1+2x_2; \end{gathered}$$

б)
$$\begin{gathered} -x_1+2x_2\leq 2, \\ x_1-x_2\leq 1, \\ x_2\leq 2, \\ x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0, \\ Y_{max}=1{,}5x_1-3x_2; \end{gathered}$$

в)
$$\begin{gathered} 3x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_5=1, \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0, \\ x_5\geq 0, \\ Y_{max}=-5x_1+x_2-x_3. \end{gathered}$$

2-§. Иккиланган масалалар ечимлари орасидаги боғланиш.

Берилган масала ва унга иккиланган масаланинг оптимал ечимлари ўзаро қуйидаги теорема асосида боғланган бўлади.

1-Теорема. Агар берилган масала ёки унга иккиланган масаладан бироргаси оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам ечимга эга бўлади ҳамда бу масалалардаги чизиқли функцияларнинг экстремал қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни

$$\mathbf{Y_{min}=Z_{max}}$$

Агар бу масалалардан бирининг чизиқли функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчи масала ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

Теоремадан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин:

Хулосалар. 1. Агар берилган масала X^0 оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккиланган масала ҳам оптимал ечимга эга бўлади ва у

$$W^0=B^{-1}C^0$$

формула орқали топилади.

2.Агар иккиланган масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда берилган масала ҳам оптимал ечимга эга бўлади ва у

$$X^0=b^0B^{-1}$$

формула орқали топилади, бу ерда b^0-иккиланган масаланинг оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция коэффициентларидан ташкил топган вектор.

3.Иккиланган масалалардаги чизиқли функцияларнинг оптимал ечимга мос келувчи қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни

$$Y_{min}(x^0)=F_{max}(W^0)$$

Юқоридаги теоремага асосан ўзаро иккиланган масалалардан ихтиёрий бирини ечиб, у орқали иккинчисининг ечимини аниқлаш мумкин.

4-мисол. Берилган масала ва унга иккиланган масаланинг ечимини топинг:

$$x_j\geq 0,\ (j=1,\ 2,\dots,\ 6)$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_5=7 \\ -2x_2+4x_3+x_4=12 \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10 \end{cases}$$

$$Y_{min}=x_2-3x_3+2x_5$$

Ечиш. Масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$W_1\leq 0,$$
$$3W_1-2W_2-4W_3\leq 1,$$
$$-W_1+4W_2+3W_3\leq -3,$$
$$W_2\leq 0,$$
$$2W_1+8W_3\leq 2,$$
$$W_3\leq 0,$$
$$F_{max}=7W_1+12W_2+10W_3$$

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштирамиз ва уни симплекс усул билан ечамиз:

II.

Базис вект.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j		0	0	-1	3	0	-2	0

II.

Базис вект.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j		9	0	1/2	0	-3/4	-2	0

III.

Базис вект.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-12/5	0

Симплекс усулнинг III босқичида берилган масаланинг оптимал ечими топилди:

$$X^0=(0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11)$$

$$Y_{min}(x^0)=-11$$

Энди иккиланган масаланинг ечимини

$$W^0=B^{-1}C^0$$

формула ёрдамида топамиз. Охирги симплекс жадвалдан:

$C^0=(1;\ -3;\ 0)$ – вектор қатор ва

$$\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_4,\mathbf{P}_6)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

тескари матрицани аниқлаймиз. Демак,

$$W^0=(W_1,W_2,W_3)=(1;-3;0)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{5};-\frac{4}{5};0\right)$$

Демак, иккиланган масаланинг оптимал ечими

$$W^0=\left(-\frac{1}{5},-\frac{4}{5},0\right)$$

$$\mathbf{F_{max}=-11}$$

бўлади.

Мустақил ечиш учун топшириқлар

1. Масалага иккиланган масалани тузинг ва иккала масаланинг оптимал ечимини топинг.

$$2x_1\ +2x_3\geq20,$$
$$2x_1+4x_2\geq8,$$
$$5x_1+2x_2+x_3\geq30,$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0,\ \ x_3\geq0,$$
$$Y_{min}=5x_1+4x_2+2x_3.$$

2. Берилган ва унга иккиланган масалалар ечимини топинг.

$$x_1+2x_2+x_3\leq10,$$

$$2x_1-x_2+3x_3=8,$$
$$x_1\geq0,\ x_2\geq0.\ x_3\geq0,$$
$$Y_{max}=5x_1+12x_2+4x_3.$$

3-§. Иккиланиш назариясининг асосий теоремалари ва уларнинг иқтисодий маъноси.

Иккиланиш назариясида берилган масаланинг ихтиёрий мумкин бўлган **X** режаси ҳамда иккиланган масаланинг ихтиёрий мумкин бўлган **W** режаси учун

$$Y(X)\leq F(W)$$

тенгсизлик, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундай тенгсизлик *иккиланиш назариясининг асосий тенгсизлиги* деб аталади.

Бу тенгсизлик ихтиёрий мумкин бўлган ишлаб чиқариш режаси ҳамда хом ашёларнинг ихтиёрий мумкин бўлган баҳолари учун ишлаб чиқарилган маҳсулот баҳоси хом ашёлар баҳосидан ошмаслигини кўрсатади.

Келтирилган иккиланиш назариясининг 1-асосий теоремаси иқтисодий нуқтаи назардан шундай талқин қилинади:

Агар ташқаридан белгиланган **C_j** баҳода сотилган маҳсулотнинг пул миқдори **W_i** ички баҳо асосида ўлчанган ҳаражатлар миқдорига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда маҳсулотнинг мумкин бўлган ишлаб чиқариш режаси ҳамда ҳом ашёларнинг мумкин бўлган баҳолари оптимал бўлади.

Бундан кўринадики, иккиланган баҳолар сарф қилинган ҳаражатлар ва ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдорини ўзаро тенг бўлишини таъминловчи восита бўлиб хизмат қилади.

2-Теорема. Берилган масаланинг мумкин бўлган ечими **X^0** ва иккиланган масаланинг мумкин бўлган ечими **W^0** оптимал ечим бўлиши учун қуйидаги тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

$$X_j^0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$W_i^0 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Бу тенгламалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

Хулосалар:

1. Агар

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $W_i^0=0$ бўлади.

2. Агар

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда **$W_i^0>0$** бўлади.

3. Агар

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 > c_j, \quad j = \overline{1,n}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда **$X_i^0=0$** бўлади.

4. Агар

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 = c_j^0, \quad j = \overline{1,n}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда **$X_j^0>0$** бўлади.

Бу хулосалардан кўринадики, иккиланган баҳоларга хом ашёларнинг камёб (дефицит) эканлигини баҳоловчи ўлчов (катталик) деб қараш мумкин.

Ишлаб чиқаришда тўла ишлатиладиган хом ашё *камёб хом ашё* деб аталади. Бундай хом ашёларнинг иккиламчи баҳоси мусбат ишорали бўлади. Камёб хом ашёларнинг ишлаб чиқаришда сарф қилинган ҳажмини бир бирликка ошириш натижасида корхона даромадини ошириш мумкин.

Ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом ашёлар *камёб бўлмаган (ортиқча) хом ашё* деб аталади. Бундай хом ашёларнинг иккиламчи баҳоси 0 га тенг бўлади.

Маҳсулот ишлаб чиқаришда камёб бўлмаган хом ашёларни ошириб сарф қилиш натижасида корхона даромадини ошириб бўлмайди.

Дейлик, хом ашёларнинг $\mathbf{b}_i$ заҳираси ўзгарувчан бўлсин. $\mathbf{X}^0$ оптимал режани ўзгартирмаган холда хом ашёларнинг $\mathbf{b}_i$ заҳирасини қанчалик ўзгартириш мумкин ҳамда $\mathbf{b}_i$ нинг ўзгариши мақсад функциянинг экстремал қийматига қандай таъсир этади – деган савол туғилиши мумкин. Бу саволга иккиланиш назариясининг 3-теоремаси жавоб беради.

3-Теорема. Оптимал баҳо $\mathbf{W}_i^0$ нинг қиймати i-хом ашёнинг $\mathbf{b}_i$ заҳираси бир бирликка ўзгаргандаги мақсад функция $\mathbf{Y}_{\max}$нинг ўзгарган миқдорини кўрсатади, яъни

$$W_i^0 = \frac{\partial Y_{\max}}{\partial b_i}$$

Агар $\partial \boldsymbol{b}_i$ ни $\Delta\mathbf{b}_i$ га, $\partial\mathbf{Y}_{\max}$ ни $\Delta\mathbf{Y}_{\max}$ га алмаштирсак, у ҳолда

$$W_i^0 = \frac{\Delta Y_{\max}}{\Delta b_i}$$

ёки

$$\mathbf{DY_{max}=W_i^0Db_i}$$

Бундан, агар $\mathbf{Db}_i=1$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{DY}_{\max}=\mathbf{W}_i^0$ бўлади, яъни иккиланган масаланинг оптимал ечими хом ашёлар миқдорини бир бирликка ошириб сарф қилинганда мақсад функциянинг қанча миқдорга ўзгаришини кўрсатади.

Мисол. қуйида келтирилган масаланинг ва унга иккиланган масаланинг ечимини топинг ҳамда иккиланиш назариясининг асосий теоремаларининг ўринли эканини текширинг.

$$x_1+2x_2+x_3\le \mathbf{18},$$
$$2x_1+x_2+x_3\le \mathbf{16},$$
$$x_1+x_2\le \mathbf{8},$$
$$x_2+x_3\le \mathbf{6},$$
$$x_j\ge 0,\ (j=\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$$
$$Y_{\max}=3x_1+4x_2+2x_3$$

Ечиш. Масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$\mathbf{W_1+2W_2+W_3\ge 3},$$
$$2W_1+W_2+W_3+W_4\ge 4,$$

$$W_1+W_2+W_4\geq 2,$$
$$W_1\geq 0,\ W_2\geq 0,\ W_3\geq 0,\ W_4\geq 0,$$
$$F_{min}=18W_1+16W_2+8W_3+6W_4$$

Берилган масалани каноник кўринишга келтирамиз ва симплекс усулни қўллаб ечамиз.

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=18,$$
$$2x_1+x_2+x_3\ +x_5=16,$$
$$x_1+x_2+x_6=8,$$
$$x_2+x_3+x_7=6,$$
$$x_j\geq 0,\ (j=1,\ 2,\dots,\ 7)$$
$$Y_{max}=3x_1+4x_2+2x_3.$$

I.

	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	18	1	2	1	0	0	0	0
P_5	0	16	2	1	1	1	0	0	0
P_6	0	8	1	1	0	0	1	1	0
P_7	0	6	0	$\boxed{1}$	1	0	0	0	1
	Δ_j	0	-3	-4	-2	0	0	0	0

II.

	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2
P_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1
P_6	0	2	$\boxed{1}$	0	-2	0	0	1	0
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	24	-3	0	2	0	0	0	4

III.

	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	2
P_5	0	6	0	0	$\boxed{2}$	0	1	-2	1
P_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	0
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	30	0	0	-1	0	0	3	4

IV.

	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-2
P_3	2	3	0	0	1	0	×	-1	1/2
P_1	3	5	1	0	0	0	×	0	-1/2
P_2	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2
	Δ_j	33	0	0	0	0	×	2	3/2

Симплекс усулнинг 4-босқичида масаланинг оптимал ечими топилди

$$X^0=(5;\ 3;\ 3;\ 4)$$

$$У_{max}=(X^0)=33.$$

Иккиланган масаланинг ечими

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2;)$$

$$F_{min}=(W^0)=33.$$

Демак, оптимал ечим учун I-теорема ўринли бўлаяпти:

$$Y_{max}=(X^0)=F_{min}(W^0)$$

Берилган масаланинг ечимини унинг шартларига қўйганда 1-шарт қатъий тенгсизликка айланади, иккинчи, учинчи ва тўртинчи шартлар эса тенгламага айланади:

$$5+2Ч3+3=14<18,$$

$$2Ч5+3+3=16=16,$$

$$5+3=8=8,$$

$$3+3=6=6,$$

Шунинг учун иккиланган масалада $W^0_1=0$ ҳамда $W^0_2\neq0$

$$W^0_3\neq0 \quad W^0_4\neq0 \quad W^0_5\neq0.$$

Энди иккиланган масаланинг

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2;)$$

оптимал ечимини унинг шартларига қўйсак, ундаги барча шартлар айниятига айланади:

$$0+2\cdot1/2+2=3=3$$

$$2\cdot0+1/2+2+3/2=4=4$$

$$0+1/2+3/2=2=2$$

Шунинг учун берилган масаланинг оптимал ечимидаги барча $\mathbf{x}^0_i$ компонентлар мусбат. Бу юқоридаги 2-теореманинг ўринли эканини кўрсатади.

Охирги симплекс жадвалдан кўриш мумкинки,

$$\Delta_4=W^0_1=0,\ \Delta_5=W^0_2=1/2,\ \Delta_6=W^0_3=2,\ \Delta_7=W^0_4=3/2.$$

Демак, 3-теоремага асосан берилган масаланинг I-шартидаги озод ҳаднинг ўзгариши мақсад функцияга таъсир этмайди. Агар II шартдаги озод ҳадни бир бирликка оширсак, мақсад функция

$W^0_2=1/2$ миқдорга ошади.

Худди шунингдек, берилган масаланинг III ва IV-шартларидаги озод ҳадларни бир бирликка оширсак, мақсад функция мос равишда 2 ва 3/2 бирликка ошади.

Мустақил ечиш учун топшириқ

Чизиқли программалаш масаласи берилган:

$$2x_1+x_2+3x_3\geq 6,$$
$$2x_1+4x_2+3x_3\geq 16,$$
$$3x_1+4x_2+2x_3\geq 8,$$
$$x_j\geq 0,\ (j=1,\ 2,\ 3)$$
$$Y_{max}=5x_1-x_2-4x_3.$$

1. Берилган масалани ва унга иккиланган масалани ечинг.
2. Иккиланган масалалар оптимал ечимлари учун 1-теорема ўринли эканини текширинг.
3. Иккиланган масалаларнинг оптимал ечимлари учун 2-теорема ўринли эканлигини кўрсатинг.
4. Берилган масаладаги озод ҳадларнинг ўзгариши мақсад функцияга қандай таъсир кўрсатади?

4-§. Иқтисодий масалалар ечимларининг таҳлили

Маълумки, чизиқли программалаш усуллари ва жумладан, симплекс усул иқтисодий масалаларнинг энг яхши (оптимал) ечимини топишга ёрдам беради.

Лекин бунинг ўзи кифоя эмас. Оптимал ечим топилгандан сўнг иқтисодий объектлар (завод, фабрика, фирма) бошлиқлари олдида қуйидагига ўхшаган муаммоларни ечишга тўғри келади:

- хом ашёларнинг баъзиларини ошириб, баъзиларини қисқартириб сарф қилинса оптимал ечим қандай ўзгаради?
- оптимал ечимни ўзгартирмасдан хом ашёлар сарфини қандай даражага ўзгартириш (камайтириш) мумкин?
- маҳсулотга бўлган талаб бир бирликка камайганда (ошганда) оптимал ечим қандай ўзгаради?

Шунга ўхшаш муаммоларни ҳал қилишда иккиланиш назариясидан фойдаланилади. Бунда иккиланиш назариясининг юқоридаги теоремаларига асосланилади.

Иқтисодий масаланинг оптимал ечимини тахлил қилиш жараёнини қуйидаги мисолда кўрсатамиз:

1-масала. Фараз қилайлик, корхонада бир хил маҳсулотни 3 та технология асосида ишлаб чиқарилсин. Ҳар бир технологияга 1 бирлик вақт ичида сарф қилинадиган ресурсларнинг миқдори, уларнинг захираси, хар бир технологиянинг унумдорлиги қуйидаги жадвалда келтирилган.

ресурслар	технологиялар			ресурслар захираси
	Т1	Т2	Т3	
Иш кучи (ишчи/соат)	15	20	25	1200
Бирламчи хом ашё (т)	2	3	2,5	150
Электроэнергия (КВТ/с)	35	60	60	3000
Технологиянинг унумдорлиги	300	250	450	
Технологияларни ишлатиш режалари (вақти)	X_1	X_2	X_3	

Корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар миқдори максимал бўлишини таъминлаш учун қайси технологиядан қанча вақт фойдаланиш керак?

Ечиш. Масаланинг математик моделини тузамиз:

$$15x_1+20x_2+25x_3\leq 1200,$$

$$2x_1+3x_2+2{,}5x_3\leq 150,$$

$$35x_1+60x_2+60x_3\leq 3000,$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.$$

$$Y_{max}=300x_1+250x_2+450x_3.$$

Ҳосил бўлган масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$15W_1+2W_2+35W_3\geq 300,$$

$$20W_1+3W_2+60W_3\geq 250,$$

$$25W_1+2{,}5W_2+60W_3\geq 450.$$

$$W_1\geq 0,\ W_2\geq 0,\ W_3\geq 0.$$

$$F_{min}=1200W_1+150W_2+3000W_3.$$

Берилган масалани каноник кўринишга келтирамиз:

$$15x_1+20x_2+25x_3+x_4=1200,$$

$$2x_1+3x_2+2{,}5x_3+x_5=150,$$

$$35x_1+60x_2+60x_3+x_6=3000,$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0,\ x_5\geq 0,\ x_6\geq 0.$$

$$У_{min}=-300x_1-250x_2-450x_3.$$

Бу масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз:

	Б.узг	$C_{баз}$	В	-300	-250	-450	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
I	X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0
	X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0
	X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1

	Δ_j		0	300	250	450	0	0	0
II	X_3	-450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0
	X_5	0	30	0,5	1	0	-0,1	1	0
	X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1
	Δ_j		-21600	30	-110	0	-18	0	0
III	X_3	-450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0
	X_1	-300	60	1	2	0	-0,2	2	0
	X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1
	Δ_j		-23400	0	-170	0	-12	-60	0

Симплекс усулнинг III босқичида берилган масаланинг оптимал ечими топилди

$$X^*=(60;\ 0;\ 12;\ 0;\ 0;\ 180),$$

$$Y_{min}=-23400,\ \ Y_{max}=23400.$$

Жадвалдан Т-1 технологияни 60 соат, Т-3 ни 12 соат қўллаш керак. Т-2 технологияни эса, умуман қўлламаслик керак.

Иккиланган масаланинг ёчими:

$$W^0=(12;\ 60;\ 0),\ \ F_{min}=23400.$$

Демак, биринчи ва иккинчи ресурсларнинг (иш кучи ва бирламчи хом ашё) нинг иккиланган баҳолари учун

$$\mathbf{W^0_1=12>0,\ W^0_2=60>0}$$

муносабатлар ўринли. Бундан иш кучи ва бирламчи хом ашё ишлаб чиқаришда тўла ишлатилганлиги кўринади, демак, бу ресурслар камёб ресурслардир.

Учинчи ресурс (электроэнергия) нинг иккиламчи баҳоси $\mathbf{W^0_3=0}$ бўлгани учун бу ресурс камёб эмас, яъни ортиқча.

Бу айтганларни текшириш учун берилган масаланинг ечимини унинг шартларига қўямиз

$$15\cdot60+2\cdot0+25\cdot12=1200$$

$$2\cdot60+3\cdot0+2,5\cdot12=150$$

$$35\cdot60+60\cdot0+60\cdot12=2820<3000$$

ҳамда ундаги биринчи ва иккинчи шартларнинг айниятга, учунчи шарт эса қатъий тенгсизликка айланганини кўрамиз.

Демак, ҳақиқатан ҳам, иш кучи ва бирламчи хом ашё камёб, электроэнергия эса ортиқча экан.

Электроэнергияни иккиламчи баҳоси $\mathbf{W^0_3=0}$ бўлгани учун уни ишлаб чиқаришга ошириб сарф қилиш, корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажмини ўзгаришига таъсир қилмайди.

Иш кучининг иккиламчи баҳоси $\mathbf{W^0_1=12>0}$ бўлгани учун уни бир бирликка ошириб сарф қилинса, корхонадаги ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу режани қандай ўзгаришини аниқлаш учун охирги симплекс жадвалдаги x_4 устунга қараймиз ва хулоса қиламиз. Янги режага асосан Т-1 технология 0,2 соат камроқ, Т-3 технология эса 0,16 соат кўпроқ ишлатилади. Натижада корхона 12 бирлик қўшимча маҳсулот ишлаб чиқаради. Бу ҳолда корхонанинг ишлаб чиқарган маҳсулотининг ҳажми

$$23400+12=23412$$

бирлик бўлади.

Бирламчи хом ашёнинг иккиламчи баҳоси $W^0_2=60>0$. Демак, бу хом ашёни бир бирликка ошириб сарф қилиш оқибатида корхонада ишлаб чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми 60 бирликка ошади, яъни

$$23400+60=23460$$

бирлик бўлади. Охирги симплекс жадвалнинг x_5 устунига қараймиз ва аниқлаймиз. Бирламчи хом ашёни бир бирликка ошириб сарф қилинса, корхонанинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу режага асосан Т-1 технология 2 соат кўпроқ ва Т-3 технология 1,2 соат камроқ ишлатилади ва натижада ишлаб чиқариладиган умумий маҳсулот миқдори 60 бирликка ошади:

$$(60+2)\cdot 300+(12-1,2)\cdot 450=23460$$

Энди иккиланган масала ечимини унинг шартларига қўйиб топамиз:

$$5\cdot 12+2\cdot 60+35\cdot 0=300$$
$$20\cdot 12+3\cdot 60+60\cdot 0=420>250$$
$$25\cdot 12+2,5\cdot 60+60\cdot 0=450$$

Бундан кўринадики, иккиланган масала ечимида 1 ва 3-шартлар айниятга айланиб, 2-шарт қатъий тенгсизликка айланади.

Демак, Т-1 ва Т-3 технологиялар билан бир бирлик вақт ичида ишлаб чиқарилган маҳсулот баҳоси билан унга сарф қилинган ресурсларнинг иккиламчи баҳолари ўзаро тенг. Шунинг учун Т-1 ва Т-3 технологияларни ишлаб чиқаришда қўллаш керак.

Т-2 технология билан бир бирлик вақт ичида сарф қилинган ресурсларнинг иккиламчи баҳоси ишлаб чиқариладиган маҳсулотлар баҳосидан кўп бўлаяпти. Демак, Т-2 технология самарасиз. Шунинг учун уни ишлаб чиқаришда қўллаш керак эмас.

Энди қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи ечимини таҳлил қиламиз:

2-мисол. 3 та **A, B, C** маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 ҳил хом ашёлар (ресурслар) ишлатилсин, I тур хом ашёнинг захираси 180 кг, II тур хом ашёнинг захираси 210 кг ва III тур хом ашёнинг захираси 244 кг бўлсин. ҳар бир маҳсулотнинг 1 бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашёнинг миқдори (нормаси) ва маҳсулот бирлигининг баҳоси (нархи) қуйидаги жадвалда жойлаштирилган.

хом ашё маҳсулот	I	II	III	маҳсулот бирлиги баҳоси
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
хом ашё захираси	180	210	244	

Бу масала бор ресурслардан оптимал фойдаланиш масаласи бўлиб, унинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$4x_1+2x_2+x_3\leq180,$$
$$3x_1+x_2+3x_3\leq210,$$
$$x_1+2x_2+5x_3\leq244,$$
$$x_1\geq0,\ \ x_2\geq0,\ \ x_3\geq0.$$
$$Y_{max}=10x_1+14x_2+12x_3.$$

Бу ерда: $\mathbf{X=(x_1,\ x_2,\ x_3)}$ ишлаб чиқариш режасини кўрсатади. Бу масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$4W_1+3W_2+W_3\geq10,$$
$$2W_1+W_2+2W_3\geq14,$$
$$W_1+3W_2+5W_3\geq12,$$
$$W_1\geq0,\ \ W_2\geq0,\ \ W_3\geq0,$$
$$F_{min}=180W_1+210W_2+244W_3.$$

Бу ерда: $\mathbf{W=(w_1,\ w_2,\ w_3)}$ – хом ашёларнинг иккиламчи баҳосидан иборат вектор-қатор. Иккиланган масаланинг иқтисодий маъноси: хом ашёлар баҳосини шундай танлаш керакки, натижада 1 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёнинг умумий баҳоси маҳсулот баҳосидан кам бўлмасин ҳамда сарф қилинган барча хом ашёларнинг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Маълумки, агар берилган масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккиланган масала ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$W^*=C^0B^{-1}$$

формула орқали топилади. Бу ерда **C^0** охирги симплекс жадвалда оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция коэффициентларидан ташкил топган вектор-қатор. **В**-дастлабки симплекс жадвалидаги базис векторлардан ташкил топган матрица. **B^{-1}**-охирги симплекс жадвалда **В** матрица ўрнида ҳосил бўлган тескари матрица.

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб уни симплекс усул билан ечамиз:

Натижада иккала масала учун оптимал ечимни топамиз.

Б.ўзг	$C_{баз}$	10	14	12	0	0	0	X_0
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	4	2	1	1	0	0	180
X_5	0	1	1	3	0	1	0	210
X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
		-10	-14	-12	0	0	0	
X_2	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	64
		18	0	-5	7	0	0	1260
X_2	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
X_5	0	28/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
		5/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Оптимал ечим: берилган масала учун

$$X^*=(0;\ 82;\ 16),\ Y_{max}=1340$$

иккиланган масала учун

$$W^*=(23/4;\ 0;\ 5/4),\ F_{min}=1340$$

Энди берилган масала ечимини таҳлил қиламиз. Иккиланган масала ечимида **$W_1=23/4$** ва **$W_3=5/4$** улар нолга тенг эмас, демак I ва II тур хом ашёларнинг тўла ишлатилганлигини, яъни уларни камёб эканлигини кўрсатади. **$W_2=0$**, демак II хом ашё тўла ишлатилмаганлигини, демак, унинг ортиқча эканлигини (камёб эмаслигини) кўрсатади.

Иккиланган масаланинг ечими «шартли иккиланган баҳо» дейилади. Улар хом ашёлар 1 бирлик миқдорда ортиқча сарф қилинганда маққсад функциянинг қиймати, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг пул миқдори қанчага ўзгаришини кўрсатади. Масалан, 1-тур ресурсларни 1 кг ортиқча сарф қилиш натижасида мақсад функциянинг қиймати 23/4=5,75 бирликка ошади. Агар I тур ресурсдан ишлаб чиқаришда 1 кг. ортиқча сарф қилинса, унинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу янги режага мувофиқ ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдори 5,75 кўпроқ бўлади. Жадвалдаги **x_4** устунга қараб қуйидагиларни аниқлаймиз. Янги режада **B** маҳсулотни ишлаб чиқариш 5/8 бирликка ошади ва **C** маҳсулотни ишлаб чиқариш 1/4 бирликка камаяди. Бунинг натижасида 2-тур хом ашёни сарф қилиш 1/8 бирликка камаяди.

$$(5/8\cdot 1-3\cdot 1/4=5/8-6/8=-1/8)$$

Худди шунингдек, x_6 устунга караймиз. 3 тур хом ашё харажатини 1 кг га ошириб сарф қилиш натижасида янги режа топилади ва бу режага кўра ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати 5/4 =1,25 сўмга ошади ва 1340+1,25=1341,25 сўмни ташкил қилади. Бу натижа B маҳсулот ишлаб чиқаришни 1/8 бирликка камайтириш, C маҳсулот ишлаб чиқаришни 1/4 бирликка ошириш ҳисобига бўлади. Бу ҳолда 2-тур ресурс 5/8 кг. кўпроқ сарф қилинади.

Иккиланган оптимал баҳоларни иккиланган масала шартларига қўйиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$23+5/4>10$$
$$23/2+5/2=14$$
$$23/4+25/4=12$$

Бундан кўринадики, иккиланган масаланинг биринчи шарти қатъий тенгсизликдан иборат бўлаяпти. Бу ҳол **A** маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёларнинг баҳоси бу маҳсулот баҳосидан кўп бўлаяпти. Шунинг учун **A** маҳсулотни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали эмас. Иккиланган масаладаги 2 ва 3-шартлар оптимал ечимда тенгликка айланади. Бу ҳол **B** ва **C** маҳсулотларни I бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёларнинг баҳоси маҳсулот баҳосига тенг эканлигини кўрсатади. Демак, **B** ва **C** маҳсулотларни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали бўлади.

Шундай қилиб, шартли оптимал баҳолар берилган масаланинг оптимал режаси билан чамбарчас боғланган. Берилган масаладаги параметрларнинг хар қандай ўзгариши унинг оптимал ечимига таъсир қилади, демак улар шартли оптимал баҳоларнинг ўзгаришига ҳам сабаб бўлади.

Мустақил ечиш учун топшириқлар

Қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини ечинг ва ечимини таҳлил қилиб қуйидаги саволларга жавоб беринг:

1. Қайси хом ашё камёб ва қайси бири ортиқча?
2. Қайси хом ашёни бир бирликка ошириб сарф қилиш корхона даромадини оширади ва қанчага?

Масала.

$$x_1+2x_2+x_3\le 430,\ \ 3x_1+3x_3\le 460,$$
$$x_1+4x_2\le 244,\ \ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0,\ \ x_3\ge 0,$$
$$Y_{\max}=3x_1+2x_2+5x_3.$$

5-§. Иккиланган симплекс усул.

Бу параграфда биз чизиқли программалаш масаласининг иккиланиш назариясига асосланган ва иккиланган симплекс усул деб аталувчи усул билан танишамиз.

Иккиланган симплекс усул оддий симплекс усулга нисбатан баъзи қулайликларга эга:

- берилган масала шартларидаги b_i озод ҳадлардан айримлари ёки барчаси манфий ишорали бўлиши мумкин;
- иккиланган симплекс усул билан бир вақтнинг ўзида ҳам берилган масаланинг ҳамда иккиланган масаланинг ечими топилади ёки иккала масаланинг ечими мавжуд эмаслиги аниқланади;
- берилган масаланинг чегараловчи шартлари «≥» белги билан боғланган ёки унинг баъзи озод ҳадлари манфий бўлган ҳолда уни иккиланган симплекс усул билан ечганда бажариладиган ҳисоблаш ишларининг сони камаяди;
- иккиланган симплекс усул билан ишлаб чиқаришнинг баъзи зарур тавсифларини аниқлаш мумкин. Масалан, бир вақтнинг ўзида ҳам ишлаб чиқариш режасини, ҳам ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган ҳамма воситаларнинг баҳосини ҳисоблаш мумкин. Фараз қилайлик, каноник формадаги чизиқли программалаш масаласи берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\mathbf{x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \ldots,\ x_n\ge 0} \qquad (2)$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \qquad (3)$$

Бу масаладаги $\mathbf{b}_i$ озод ҳадларнинг баъзилари ёки ҳаммаси манфий ишорали бўлсин.

Бундай масалаларни иккиланган симплекс усул билан ечиш учун, энг аввал, масалага иккиланган

$$\mathbf{WA \leq C}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{F_{max}=WB}, \qquad (5)$$

масала тузилади. Сўнгра берилган (1)-(3) масала симплекс жадвалга жойлаштирилади. Симплекс жадвални иккиланган симплекс усул билан алмаштириш учун

$$\min_{b_i<0} b_i = b_l \qquad (6)$$

шартни қаноатлантирувчи вектор танланади. Бу векторни базисдан чиқариб унинг ўрнига

$$\min_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)=\frac{\Delta_k}{a_{lk}} \qquad (7)$$

шартни қаноатлантирувчи вектор киритилади. Бу ҳолда $\mathbf{a}_{lk}$ элемент бошловчи (хал қилувчи) элемент бўлиб, у жойлашган l-қатордаги $\mathbf{P}_l$ вектор ўрнига k-устундаги вектор киритилади. Симплекс жадвал оддий симплекс усулдагидек алмаштирилади. Бу жароён оптимал ечим топилгунча ёки унинг мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Иккиланган симплекс усулда берилган масала оптимал ечимининг мавжуд эмаслик шарти қуйидаги таъриф ва теорема орқали аниқланади.

1-таъриф. Агар (1)-(3) масаланинг бошланғич ечимида (2) шарт бажарилмаса ёки унинг таянч ечим бўлишлик шарти бажарилмаса, яъни

$$\mathbf{P_1x_1+P_2x_2+...+P_nx_n=P_0}$$

ёйилмадаги $\mathbf{x}_i>0$ ўзгарувчиларга мос келувчи $\mathbf{P}_i$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бу бошланғич ечим *чала таянч ечим* ёки чала таянч режа деб аталади.

1-теорема. Агар (1)-(3) масаланинг чала таянч ечимидаги компоненталардан камида биттаси, масалан $\mathbf{b}_k<0$ бўлиб,барча j лар учун $\mathbf{a}_{kj}\geq 0$ бўлса, у ҳолда берилган масала ечимга эга бўлмайди.

2-теорема. Агар (1)-(3) масаланинг чала таянч ечими, унинг таянч ечимидан иборат бўлса, яъни $b_i \geq 0$ ($i=1,...,m$) ва $\Delta_j=Z_j-C_j \leq 0$ шартлар бажарилса, у ҳолда бу таянч ечим оптимал ечим бўлади.

Бир таянч ечимни иккинчисига алмаштириш қуйидаги теорема асосида амалга оширилади:

3-теорема. Агар топилган чала таянч ечим $\overline{X}$ учун $\Delta_j=Z_j-C_j \leq 0$ ўринли бўлганда, $b_k<0$ бўлиб, камида битта $a_{kl}<0$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\overline{X}$ ни янги чала таянч ечим $\overline{X}'$ га алмаштириш натижасида чизиқли Y_{min} функциянинг қиймати камаяди. $\overline{X}$ векторни $\overline{X}'$ га алмаштириш учун базисдан P_l вектор чиқарилиб, базисга P_k вектор киритилади.

Озод ҳадлари манфий бўлган масалалар қуйидаги йўл билан ҳосил қилиниши мумкин.

Фараз қилайлик, чизиқли программалаш масаласи қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \quad (9)$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \quad (10)$$

Масаланинг (8) шартларига x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} қўшимча ўзгарувчилар киритиб уларни тенгламаларга айлантирамиз. Натижада қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил бўлади.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ ---------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \end{array}\right| \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0 \quad (12)$$

$$Y_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \quad (13)$$

(11) системадаги x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} ўзгарувчилар манфий коэффициентли бўлгани учун, улар базис ўзгарувчилар бўла олмайди. Масалани симплекс жадвалга жойлаштириш учун эса **m** та базис ўзгарувчилар мавжуд бўлиши зарурдир. Буни назарда тутиб (11) системадаги барча тенгламаларни (-1) га кўпайтириб

улардаги қўшимча ўзгарувчиларни мусбат коэффициентлига айлантирамиз, яъни қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + x_{n+1} &= -b_1 \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + x_{n+2} &= -b_2 \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + x_{n+m} &= -b_m \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0 \qquad (15)$$

$$Y_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (16)$$

Бу масала билан тўлдирилган симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади:

Б.ўзг	$C_{баз}$	P_0	C_1	C_2	...	C_n	0	...	0	...	0
			P_1	P_2	...	P_n	P_{n+1}	...	P_{n+l}	...	P_{n+m}
P_{n+1}	0	$-b_1$	$-a_{11}$	$-a_{12}$	...	$-a_{1n}$	1	...	0	...	0
P_{n+2}	0	$-b_2$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	$-a_{2n}$	0	...	0	...	0
....	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_{n+l}	0	$-b_l$	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	$-a_{ln}$	0	...	1	...	0
...	...	...	....	....	...	....	...	...	...	...	...
P_{n+m}	0	$-b_m$	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{mn}$	0	...	0	...	1
		Y_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_n	0	...	0	...	0

Мисол. Қуйида берилган масалани иккиланган симплекс усул билан ечинг:

$$\begin{gathered} 2x_1+x_2-x_3+5x_4 \geq 5, \\ 3x_1-2x_2+x_3+4x_4 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \qquad (I) \\ Y_{min}=3x_1+4x_2+5x_3+6x_4. \end{gathered}$$

Берилган масалага x_5, x_6 қўшимча ўзгарувчилар киритамиз ҳамда айрим тенг кучли алмаштиришлар бажариб уни қуйидаги каноник кўринишга келтирамиз:

$$\begin{gathered} -2x_1-x_2+x_3-5x_4+x_5=-5, \\ -3x_1+2x_2-x_3-4x_4+x_6=-4, \\ x_i \geq 0,\ (i=1,2,\ldots,6) \qquad (II) \\ Y_{min}=3x_1+4x_2+5x_3+6x_4. \end{gathered}$$

Бу масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$\begin{gathered} -2W_1-3W_2 \leq 3, \\ -W_1+2W_2 \leq 4, \\ +W_1-W_2 \leq 5, \qquad (III) \\ -5W_1-4W_2 \leq 6, \end{gathered}$$

$$W_1 \leq 0,\ \ W_2 \leq 0,$$
$$F\max=-5W_1-4W_2$$

(II) масалани симплекс жадвалга жойлаштириб уни иккиланган симплекс усул билан ечамиз:

Б.уз	$C_{баз}$	P_0	3	4	5	6	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	0	-5	-2	-1	1	$\boxed{-5}$	1	0
P_6	0	-4	-3	2	-1	-4	0	1
		$Y_0=0$	$\Delta_1=-3$	$\Delta_2=-4$	$\Delta_3=-5$	$\Delta_4=-6$	$\Delta_5=0$	$\Delta_6=0$
P_4	6	1	2/5	1/5	-1/5	1	-1/5	0
P_6	0	8	-7/5	14/5	-9/5	0	4/5	1
		$Y_1=6$	$\Delta_1=-3/5$	$\Delta_2=-14/5$	$\Delta_3=-31/5$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=-6/5$	$\Delta_6=0$

Симплекс жадвалдан кўринадики, I босқичда j=1, 2, 3, 4, 5, 6 учун

$$\Delta_j=Z_j-C_j\leq 0$$

бўлади. Демак,

$$X^0=B^{-1}b=(0;0;0;0;-5;-4)$$

вектор (III) масаланинг чала таянч ечими бўлади (бу ерда $B=(P_5, P_6)$-базис матрица). Иккиланган масаланинг бу базисдаги ечими

$$W^*=C^0B^{-1}=(0;\ 0)$$

Чала таянч ечим X^0нинг энг кичик манфий элементига мос келувчи $\mathbf{P_5}$ векторни базисдан чиқарамиз ва

$$\theta=\min_{a_{ij}<0}\frac{\Delta_j}{a_{ij}}=\min_{a_{ij}<0}\frac{Z_j-C_j}{a_{ij}}=\frac{\Delta_4}{a_{14}}=1{,}2>0$$

шартни қаноатлантирувчи $\mathbf{P_4}$ векторни базисга киритамиз. $\mathbf{a_{14}}$-бошловчи (хал қилувчи элемент) бўлади. Оддий симплекс усул билан симплекс жадвални алмаштирамиз. Янги симплекс жадвалда барча j лар учун

$$\Delta_j=Z_j-C_j\leq 0$$

бўлади. Демак,

$$X^1=B^{-1}b=(0;0;0;1;0;8)$$

янги базисга мос келувчи чала таянч ечим бўлади. Бу ечимда ҳамма элементлар мусбат бўлгани учун у берилган масаланинг таянч ечими ва демак, (1-теоремага асосан) унинг оптимал ечими бўлади.

Янги базисдаги иккаланган масаланинг ечими $W^0=(16/5,0)$ вектордан иборат бўлади ва $У_{min}=У(X')=F_{max}=F(W^{0'})=6$

Мустақил ечиш учун топшириқ

Берилган масалани иккиланган симплекс усул билан ечинг.

$$x_1-x_2+2x_3+x_4\ge8,$$

$$3x_1+x_3\ge5,\ \ x_1\ge0,\ \ x_2\ge0,\ \ x_3\ge0,\ \ x_4\ge0,$$

$$Y_{min}=2x_1+4x_2+5x_3+x_4.$$

Таянч сўз ва иборалар.

Иккиланган масала; симметрик иккиланган масалалар; симметрик бўлмаган иккиланган масалалар; иккиланган баҳолар; оптимал ечим баҳоси; танқис (камёб) хом ашё; нотанқис хом ашё; шартли оптимал ечим; иккиланган симплекс усул; ечим мавжуд эмаслик шарти; ечимнинг оптималлик шарти; чала таянч ечим.

Назорат саволлари

1.Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг умумий қўйилиши ва турли шаклда ёзилишини кўрсатинг.

2.Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг иқтисодий маъносини изоҳланг.

3.Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг мақсад функциялари орасидаги боғланиш қандай?

4.Берилган ва унга иккиланган масалалардаги чегараловчи шартлар орасида қандай боғланиши бор?

5.Симметрик ва носимметрик иккиланган масалалар орасидаги фарқ қандай?

6.Иккиланиш назариясининг 1-асосий теоремаси қандай?

7.Иккиланиш назариясининг 2-асосий теоремасини таърифланг ва унинг иқтисодий маъносини изоҳланг.

8.Иккиланиш назариясининг 3-асосий теоремасини таърифланг ва унинг иқтисодий маъносини изоҳланг.

9.Иккиланган симплекс усул билан қандай масалаларни ечиш мумкин?

10.Иккиланган симплекс усулнинг оддий симплекс усулдан фарқи қандай?

11.Иккиланган симплекс усулда масала ечимининг мавжуд эмаслик шартини таърифланг.

12.Иккиланган симплекс усулда ечимнинг оптималлик шарти нимадан иборат?

Масалалар.

Берилган масалаларга иккиланган масалани тузинг.

1) $2x_1-3x_2\le 9,$
$-2x_1+5x_2\le 25,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$
$Y_{max}=16x_1+9x_2.$

2) $2x_1+x_2-x_3+5x_4\ge 9,$
$3x_1-2x_2+x_3-4x_4\ge 4,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$
$Y_{min}=3x_1+x_2+5x_3+7x_4.$

3) $x_1+x_2+x_3\le 6,$
$2x_1-x_2+3x_3\ge 9,$
$3x_1+x_2+2x_3\ge 11,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$Y_{min}=5x_1+4x_2+6x_3.$

4) $x_1+x_2+x_3+x_4=5,$
$2x_1+3x_2-x_3+x_4=13,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$
$Y_{min}=2x_1+3x_2+x_3+x_4.$

5) $2x_1+x_2+x_3=10,$
$-x_1+4x_2\ +x_4=8,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$
$Y_{min}=2x_1+3x_2+4x_3.$

6) $2x_1+x_2-2x_3+x_4=2,$
$x_1-2x_2+x_3-x_4\ge 3,$
$x_1-x_3\le 4$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$
$Y_{min}=x_1+2x_2-x_3+x_4.$

Берилган масалаларга иккиланган масалаларни тузинг ва уларнинг иккаласининг ҳам ечимини топинг:

1) $2x_1+x_2+x_3-x_4\ge 6,$
$3x_1-x_2+2x_3\ge 4,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$
$Y_{min}=2x_1+4x_2+5x_3+x_4.$

2) $x_1+3x_2\le 4,$
$x_1+2x_3\le 3,$
$x_1+3x_2+2x_3\le 12,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$Y_{max}=3x_1+8x_2+5x_3.$

3) $x_1+x_2+2x_3+x_4=2,$

$$2x_1+x_2+3x_3+x_4=6,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,\ x_4\ge0,$$
$$Y_{min}=2x_1+x_2-x_3-x_4.$$

4) $$5x_1+12x_2+2x_3=9,$$
$$3x_1+4x_2+4x_3=11,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,$$
$$Y_{min}=x_1+4x_2+x_3.$$

Қуйидаги масалаларнинг математик моделини тузиб уни ечинг ҳамда ечимни тахлил қилинг.

1)

маҳсулотлар хом ашёлар захираси	маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун хом ашё сарфи		
	А	Б	В
48	2	4	3
60	4	2	3
Даромад	6	4	3

2)

ишлаб чиқариш усуллари ишлаб чиқариш ресурслари захираси	I	II	III	IV
34	2	4	1	5
16	4	1	4	1
22	2	3	1	2
Ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори	7	3	4	2

Берилган масала ва унга иккиланган масалалар ечимини иккиланган симплекс усул билан топинг.

1) $$x_1+2x_3=4,$$
$$x_1-x_2=3,$$
$$x_1+6x_2-x_3=5,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,$$
$$Y_{max}=8x_1+4x_2-2x_3.$$

2) $$2x_1+3x_2+x_4-x_5=18,$$
$$x_1-2x_2+3x_3\ge-8,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,\ x_4\ge0,$$
$$Y_{min}=2x_1-x_2+4x_3+5x_4.$$

3) $$3x_1+x_2-x_3+3x_4\ge8,$$
$$x_1-2x_2+x_3+2x_4\ge6,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,\ x_4\ge0,$$
$$Y_{min}=2x_1-x_2+4x_3+5x_4.$$

4) $$x_1+2x_2+x_3\le7,$$
$$2x_1-x_2+3x_3\ge10,$$
$$4x_1+2x_2+x_3\ge15,$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0,$$
$$Y_{max}=2x_1+3x_2+4x_3.$$

III БОБ. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ

Транспорт масаласи чизиқли программалаш масалалари ичида назарий ва амалий нуқтаи назардан энг яхши ўзлаштирилган масалалардан бири бўлиб, ундан иқтисодий амалиётда кенг фойдаланилади.

Транспорт масаласи махсус чизиқли программалаш масалалари синфига тегишли бўлиб, унинг чегараловчи шартларидаги коэффициентлардан тузилган ($\mathbf{a}_{ij}$) матрицанинг элементлари 0 ва 1 рақамлардан иборат бўлади ва ҳар бир устунда фақат иккита элемент 0 дан фарқли, қолганлари эса 0 га тенг бўлади. Транспорт масаласини ечиш учун унинг махсус хусусиятларини назарга олувчи усуллар яратилган бўлиб, қуйида биз улар билан танишамиз.

1-§. Транспорт масаласининг қўйилиши ва унинг математик модели.

Фараз қилайлик, m та $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктларда бир хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин. Маълум бир давр оралиғида ҳар бир A_i, $(i=1,\ldots,m)$ пунктда ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг миқдори a_i бирликка тенг бўлсин. Ишлаб чиқарилган маҳсулотлар $B_1, B_2, \ldots, B_n$ пунктларда истеъмол қилинсин ҳамда ҳар бир B_j, $(j=1,\ldots,n)$ истеъмолчининг кўрилаётган давр оралиғида маҳсулотга бўлган талаби b_j, $(j=1,\ldots,n)$ бирликка тенг бўлсин. Бундан ташқари $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктларда ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий миқдори $B_1, B_2, \ldots, B_n$ пунктларнинг маҳсулотга бўлган талабларининг умумий миқдорига тенг, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j$$

тенглик ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. Дейлик, ҳар бир ишлаб чиқариш пункти $\mathbf{A}_i$ дан ҳамма истеъмол қилувчи пунктга маҳсулот ташиш имконияти мавжуд бўлсин, ҳамда

A_i пунктдан **B_j** пунктга маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинадиган ҳаражат **C_{ij}** пул бирлигига тенг бўлсин.

x_{ij} билан режалаштирилган давр ичида **A_i** пунктдан **B_j** пунктга олиб бориладиган маҳсулотнинг умумий миқдорини белгилаймиз.

Транспорт масаласининг берилган параметрларини ва белгиланган номаълумларни жадвалга жойлаштирамиз.

1-жадвал

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_n	и/ч маҳсулотлар миқдори
A_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	…	C_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	…	C_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	…	C_{mn} x_{mn}	a_m
талаб миқдори	b_1	b_2	…	b_n	

Масаланинг иқтисодий маъноси: юк ташишнинг шундай режасини тузиш керакки: 1) ҳар бир ишлаб чиқариш пунктдаги маҳсулотлар тўла тақсимлансин; 2) ҳар бир истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби тўла қаноатлантирилсин ва шу билан бир қаторда йўл ҳаражатларининг умумий қиймати энг кичик бўлсин.

Масаланинг 1) шартини қуйидаги тенгламалар системаси орқали ифода қилиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ - - - - - - - - - - - - - \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Масаланинг 2) шарти эса, қуйидаги тенгламалар системаси кўринишида ифодаланади:

$$\left.\begin{array}{c} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$$\mathbf{x_{ij} \geq 0, \ (i=1,\dots,m; \ j=1,\dots,n)} \qquad (3)$$

i-ишлаб чиқариш пунктдан j-истеъмол қилувчи пунктга режадаги $\mathbf{x_{ij}}$ бирлик маҳсулотни етказиб бериш учун сарф қилинадиган йўл ҳаражати $\mathbf{C_{ij}x_{ij}}$ пул бирлигига тенг бўлади.

Режадаги барча маҳсулотларни ташиш учун сарф қилинадиган умумий йўл ҳаражатлари эса

$$Y = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + \ldots +$$

$$+ C_{2n}x_{2n} + \ldots + C_{m1}x_{m1} + C_{m2}x_{m2} + \ldots + C_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

функция орқали ифодаланади. Масаланинг шартига кўра бу функция минимумга интилиши керак, яъни

$$Y_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \qquad (4)$$

(1)-(4) муносабатлар биргаликда транспорт масаласининг математик модели деб аталади.

Транспорт масаласининг математик моделини йиғинди кўринишида ҳам ифодалаш мумкин:

Масаладаги ҳар бир $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_j}$ ва $\mathbf{C_{ij}}$ манфий бўлмаган сонлар, яъни:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad) \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}) \qquad (7)$$

$$Y_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}, \qquad (8)$$

$$\mathbf{a_i} \geq 0, \ \mathbf{b_j} \geq 0 \text{ ва } \mathbf{C_{ij}} \geq 0$$

Агар (5)-(8) масалада

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \tag{9}$$

тенглик ўринли бўлса, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотлар йиғиндиси, унга бўлган талаблар йиғиндисига тенг бўлса, у ҳолда бу масала *ёпиқ моделли транспорт масаласи* деб аталади.

Транспорт масаласининг хоссаларига доир қуйидаги теоремаларни исботсиз қабул қиламиз:

1-теорема. ҳар қандай ёпиқ моделли транспорт масаласи ечимга эга.

2-теорема. Транспорт масаласининг шартларидан тузилган матрицанинг ранги **m+n-1** га тенг.

Натижа. Транспорт масаласи ечимидаги 0 дан фарқли қийматли ўзгарувчилар сони **m+n-1** та бўлади.

3-теорема. Агар (4)-(8) масаладаги барча $\mathbf{a}_i$ ва $\mathbf{b}_j$ лар бутун сонлардан иборат бўлса, у ҳолда транспорт масаласининг ечими бутун сонли бўлади.

4-теорема. Ихтиёрий транспорт масаласи оптимал ечимга эга бўлади.

Мисол. қуйидаги транспорт масаласининг математик моделини тузинг.

Масала. Учта **A, B, C** омборхонада мос равишда 420, 380 ва 400 тонна маҳсулот жойлаштирилган. Бу маҳсулотлар учта истеъмолчига юборилиши керак. Истеъмолчиларнинг маҳсулотга бўлган талаби мос равишда 260, 520 ва 420 тонна.

1 тонна маҳсулотни ҳар бир омборхонадан ҳар бир истеъмолчига юбориш учун сарф қилинадиган йўл ҳаражатлари қуйидаги матрица кўринишида берилган

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Сарф қилинадиган умумий йўл ҳаражатларини минималлаштирувчи маҳсулотларни ташиш режасини тузинг.

Ечилиши. **A** омборхонадан I, II ва III истеъмолчиларга юбориладиган маҳсулотлар миқдорини мос равишда $\mathbf{x}_{11}$, $\mathbf{x}_{12}$ ва $\mathbf{x}_{13}$ билан белгилаймиз.

Худди шунингдек, **В** омборхонадан I, II ва III пунктларга юбориладиган маҳсулотлар миқдорини мос равишда $\mathbf{x}_{21}$, $\mathbf{x}_{22}$ ва $\mathbf{x}_{23}$ билан, **С** омборхонадан шу истеъмолчиларга юбориладиган маҳсулотлар миқдорини мос равишда $\mathbf{x}_{31}$, $\mathbf{x}_{32}$ ва $\mathbf{x}_{33}$ билан белгилаймиз.

Масаланинг барча берилган параметрларини ҳамда номаълумларни жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал.

истеъмолчилар омборхоналар	I	II	III	и/ч маҳсулотлар миқдори
A	2 x_{11}	4 x_{12}	3 x_{13}	420
B	7 x_{21}	5 x_{22}	8 x_{23}	380
C	6 x_{31}	9 x_{32}	7 x_{33}	400
Истеъмолчиларнинг маҳсулотга бўлган талаби	260	520	420	

Жадвалдан кўринадики, **А** омборхонадан барча истеъмолчиларга юбориладиган маҳсулотларнинг миқдори

$$x_{11}+x_{12}+(5)x_{13}$$

тоннага тенг бўлади. Шартга кўра, у шу омборхонадаги маҳсулот миқдорига тенг бўлиши керак, яъни

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=420$$

Худди шунингдек, **В** ва **С** омборхоналардан барча истеъмолчиларга юбориладиган маҳсулотлар миқдори улардаги маҳсулот ҳажмига тенг бўлиши керак, яъни

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=380$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=400$$

Бундан ташқари, ҳар бир истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби тўла қаноатлантирилиши керак. Бу шартни I-истеъмолчи учун ёзамиз. I-истеъмолчига **А** омборхонадан $\mathbf{x}_{11}$ миқдорда, **В** омборхонадан $\mathbf{x}_{21}$ миқдорда ва **С** омборхонадан $\mathbf{x}_{31}$ миқдорда маҳсулот келтирилади. Демак, бу истеъмолчига жаъми

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}$$

миқдорда маҳсулот келтирилади. Шартга кўра, бу миқдор I-истеъмолчининг талабига яъни, 260 тоннага тенг бўлиши керак. Демак,

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=260$$

тенгликка эга бўламиз.

Худди шунингдек, барча омборхоналардан II ва III истеъмолчиларга келтириладиган маҳсулотлар миқдори уларнинг талабига тенг бўлиши керак, яъни

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=520$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=420$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра барча номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$$x_{ij}\geq 0,\ (i=1,..,m;\ j=1,\ldots,n)$$

Маҳсулотларни ташиш учун сарф қилинадиган умумий йўл ҳаражати

$$Y=2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+6x_{31}+9x_{32}+7x_{33}$$

функция орқали ифодаланади. Шартга кўра, у минимумга интилиши керак.

Шундай қилиб, берилган масаланинг математик моделига эга бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}=420 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=380 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=400 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}=260 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=520 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=400 \end{array}\right\}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ (i=1,..,3;\ j=1,\ldots,3)$$

$$Y_{min}=2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+6x_{31}+9x_{32}+7x_{33}$$

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Масала. 4та **A_1**, **A_2**, **A_3**, **A_4** омборхоналарда мос равишда 40; 50; 60; 30 тонна ёқилғи мавжуд. Бу ёқилғиларни талаблари мос равишда 60; 80; 40 тонна бўлган 3 та истеъмолчига юбориш керак. Сарф қилинадиган йўл ҳаражатларини минимал бўлишини таъминловчи ёқилғини ташиш режасини аниқланг.

1 тонна ёқилғини ҳар бир омборхонадан ҳар бир истеъмолчига ташиш учун сарф қилинадиган йўл ҳаражатлари қуйидаги матрица кўринишида берилган:

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\,3\,5 \\ 6\,2\,1 \\ 7\,4\,2 \\ 5\,6\,3 \end{pmatrix}$$

2-§. Транспорт масаласининг бошланғич таянч ечимини топиш усуллари

Умумий кўринишда берилган транспорт масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j, \quad (j = \overline{1,m}) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \tag{3}$$

$$Y_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}, \tag{4}$$

Масаланинг (1) ва (2) шартлари биргаликда m·n та номаълумли m+n та тенгламалар системасидан иборат бўлади. Юқорида (1-§ да) танишган 2-теоремага асосан бу система коэффициентларидан тузилган матрицанинг ранги m+n-1 га тенг бўлади. Демак, транспорт масаласининг (1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи тенгламалар системаси m+n-1 таси ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган тенгламалар системасини ташкил қилади.

Шундай қилиб, транспорт масаласининг бошлангич таянч ечимидан иборат бўлган (x_{ij}) матрицанинг m+n-1 компонентлари мусбат бўлиб, қолганлари 0 га тенг бўлади.

Дейлик, транспорт масаласининг маълум параметрлари ва унинг таянч ечими қуйидаги жадвал кўринишида берилган бўлсин.

Бу жадвалдаги 0 дан фарқли x_{ij} лар жойлашган катаклар «банд катакчалар», қолганлари эса «бўш катакчалар» деб аталади.

3-жадвал

b_j / a_i	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

I. Шимолий-ғарб бурчак усули.

Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат. Энг аввал имолий-ғарбда жойлашган A_1, B_1 катакчадаги x_{11} омаълумнинг қийматини топамиз,

$$x_{11}=\min(a_1,\ b_1)$$

гар $a_1<b_1$ бўлса,

$$x_{11}=a_1,\ x_{1j}=0\ (j=2,...,n),\ b'_1=b_1-a_1.$$

гар $a_1>b_1$ бўлса,

$$x_{11}=b_1,\ x_{i1}=0\ (i=2,...,m),\ a'_1=a_1-b_1.$$

Фараз қилайлик, биринчи ҳол бажарилсин. Бу ҳолда ккинчи қатордаги биринчи элементнинг қийматини топамиз:

$$x_{21}=\min(a_2,\ b'_1)$$

гар $a_1>b'_1$ бўлса,

$$x_{21}=b'_1,\ x_{i1}=0\ (i=3,...,m),\ a'_2=a_2-b'_1.$$

гар $a_2<b'_1$ бўлса,

$$x_{21}=a_2,\ x_{2j}=0\ (j=3,...,n),\ b''_1=b'_1-a_2.$$

Худди шундай йўл билан давом этиб, ҳар бир қадамда итта x_{ij} нинг қиймати топиб борилади. Бу жараён барча a_i а b_j лар 0 га айлангунча такрорланади.

1-мисол. қуйидаги транспорт масаласининг бошланғич аянч ечимини топинг.

Ечиш.

1-қадам.

$$x_{11}=\min(4,\ \mathbf{3})=\mathbf{3}$$

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

Шунинг учун, $b'_1=0$, $a'_1=4-3=1$ га ўзгаради, ҳамда $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$.

2-қадам.

$$x_{12}=\min(1,\ 6)=1$$

Бунда $a'_1=0$, ва $b'_2=6-1=5$ га ўзгаради, ҳамда $x_{13}=x_{14}=0$.

3-қадам.

$$x_{22}=\min(2,\ 5)=2$$

Бунда $a'_2=0$, ва $b'_2=5-2=3$ га ўзгаради, ҳамда $x_{23}=x_{24}=0$.

4-қадам.

$$x_{32}=\min(3,\ 3)=3$$

Бунда $a_3=b_2=0$ бўлади, $x_{33}=x_{34}=x_{42}=0$.

5-қадам.

$$x_{43}=\min(3,\ 2)=2$$

Бунда $a'_4=3-2=1$, $b_3=0$.

6-қадам.

$$x_{44}=\min(1,\ 1)=1$$

Бунда $a_{44}=b_4=0$ бўлади. Масаланинг ечиш жараёни тугайди. Топилган бошланғич ечим қуйидаги жадвал кўринишда бўлади.

Топилган бошланғич ечимдаги 0 дан фарқли бўлган номаълумлар сони 6 та бўлиб, у $m+n-1=7$ дан кичик. Агар масаланинг таянч ечимидаги 0 дан фарқли бўлган x_{ij} номаълумлар сони $m+n-1$ дан кичик бўлса, бундай ечим *хос ечим* (хос режа) деб аталади. Хос ечимни тўғрилаш усуллари билан кейинроқ танишамиз.

b_j a_i	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

II. Минимал ҳаражатлар усули.

Транспорт масаласининг ечимини топиш учун керак бўладиган итерациялар сони бошланғич таянч ечимни танлашга боғлиқ. Оптимал ечимга яқин бўлган таянч ечимни топиш масаланинг оптимал ечимини топишни тезлаштиради. Юқоридаги «шимолий-ғарб бўрчак» усули йўл ҳаражатларини назарга олмаган ҳолда таянч ечимни аниқлайди. Бундай усул билан топилган таянч ечим оптимал ечимдан йироқ бўлиб, унинг ёрдамида оптимал ечимни топиш учун жуда кўп босқичдаги ишларни бажаришга тўғри келади.

Адабиётда транспорт масаласининг бошланғич ечимини топиш учун йўл ҳаражатларини назарга олувчи кўп усуллар маълум («устундаги минимал элемент» усули, «қатордаги минимал элемент» усули, минимал ҳаражатлар усули, икки томонлама танлаш усули ва бошқалар).

Минимал ҳаражатлар усулининг ғояси қуйидагилардан иборат:

Энг аввал транспорт масаласи ҳаражатларидан ташкил топган матрица белгилаб олинади, яъни

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг элементлари ичида энг кичик, яъни $minC_{ij}=C_{lk}$ топилади ва унга мос бўлган катакчага a_l ва b_k сонлардан энг кичиги ёзилади, яъни

$$x_{lk}=min(a_l,\ b_k)$$

топилади. Агар $x_{lk}=a_l$ бўлса, у ҳолда l-қатор «ўчирилади» (l-таъминотчининг маҳсулоти тўла тақсимланганлиги учун бу қатордаги бошқа катакчаларга қаралмайди) ва b_k нинг қиймати

$$b'_k=b_k-a_l$$

га ўзгаради. Агар $x_{lk}=b_k$ бўлса, у ҳолда k-устун «ўчирилади» (k-истеъмолчининг талаби тўла қаноатлантирилганлиги учун бу устундаги бошқа катакчаларга қаралмайди) ва a_l нинг қиймати

$$a'_l=a_l-b_k$$

га ўзгаради.

Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисмидаги элементлар ичида яна энг кичиги топилади ва у жойлашган катакчадаги $\mathbf{x}_{ij}$ тақсимотнинг қиймати аниқланади. Бу жараён таъминотчилардаги маҳсулотлар тўла тақсимлангунча, истеъмолчиларнинг талаблари тўла қаноатлантирилгунча такрорланади.

2-мисол. Берилган транспорт масаланинг бошланғич ечимини «минимал ҳаражатлар» усули билан топинг.

4-жадвал

		истеъмолчиларнинг маҳсулотга бўлган талаби				
		200	200	100	100	250
таъминотчилардаги маҳсулот ҳажми	100	10	7	4	1	4
	250	2	7	10	6	11
	200	8	5	3	2	2
	300	11	8	12	16	13

Ечиш. 1-қадам. Ҳаражатлар матрицаси элементлари ичида энг кичигини, яъни

$$minC_{ij}=C_{14}=1$$

ни топамиз ҳамда

$$x_{14}=min(a_1,\ b_4)=min(100,\ 100)=100$$

тақсимотни аниқлаймиз. Бу ерда $a_1=b_4$ бўлгани учун $a_1=b_4=100$ деб қабул қиламиз. Бу ҳолда 1-қаторни ўчирамиз, b_4 нинг қийматини

$$b_4=b_4-x_{14}=100-100=0$$

га ўзгартирамиз.

2-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун энг кичик

$$\min C_{ij}=C_{21}=2$$

ҳаражатни топамиз ва у жойлашган катакчадаги

$$x_{21}=\min(a_2,\ b_1)=\min(250,\ 200)=200$$

тақсимотни аниқлаймиз. Бу ерда: $x_{21}=b_4$ бўлгани учун 1-устун ўчирилади ва a_2 нинг қийматини

$$a_2=a_2-x_{21}=250-200=50$$

га ўзгартирамиз.

3-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун минимал

$$\min C_{ij}=C_{34}=2$$

ҳаражат топилади ва бу ҳаражатга мос

$$x_{34}=\min(a_3,\ b_4)=\min(200,\ 0)=0$$

тақсимот топилади. Бу ерда: $x_{34}=b_4=0$ бўлгани учун 4-устун ўчирилади.

4-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун минимал ҳаражат

$$\min C_{ij}=C_{35}=2$$

топилади ва унга мос бўлган

$$x_{35}=\min(a_3,\ b_5)=\min(200,\ 250)=200$$

тақсимотни аниқлаймиз. Бу ерда: $x_{35}=a_3=200$ бўлгани учун 3-қатор ўчирилади ва b_5 нинг қиймати

$$b_5=b_5-x_{35}=250-200=50$$

га ўзгартирилади.

5-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун минимал ҳаражат

$$\min C_{ij}=C_{22}=7$$

ва унга мос

$$x_{22}=\min(a_2,\ b_2)=\min(50,\ 200)=50$$

тақсимот топилади. Бу ерда: $x_{22}=aa_2=50$ бўлгани учун 2-қатор ўчирилади ва b_2 нинг қиймати

$$b_2=b_2-x_{22}=200-50=150$$

га ўзгаради.

6-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун яна минимал ҳаражат

$$\min C_{ij}=\mathbf{C_{42}=8}$$

ҳаражат топилади ва унга мос бўлган

$$x_{42}=\min(a_4,\ b'_2)=\min(300,\ 150)=150$$

тақсимот топилади. Бу ерда: $x_{42}=b_2=150$ бўлгани учун 2-устун ўчирилади ва a_4 нинг қиймати

$$a'_4=a_4-x_{42}=300-150=150$$

га ўзгаради.

7-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми учун яна минимал ҳаражат

$$\min C_{ij}=C_{43}=12$$

ҳаражат топилади ва унга мос бўлган

$$x_{43}=\min(a'_4,\ b_3)=\min(150,\ 100)=100$$

тақсимот топилади. Бу ерда: $x_{43}=b_3=100$ бўлгани учун 3-устун ўчирилади ва a''_4 нинг қиймати

$$a''_4-x_{43}=150-100=100$$

га ўзгаради.

8-қадам. Ҳаражатлар матрицасининг қолган қисми битта $C_{45}=15$ элементдан иборат ва унга мос бўлган тақсимот

$$x_{45}=\min(a''_4,b'_5)=\min(50,\ 50)=50$$

бўлади. Бу ҳолда 4-қатор ва 5-устун ўчирилади.

Топилган бошланғич ечимни қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз.

5-жадвал

b_j a_i	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2 0	2 200
300	11	8 150	12 100	16	13 50

Жадвалдан кўринадики, тўлдирилган катакчалар сони $n+m-1=5+4-1=8$ га тенг. Демак,. бу бошлангич ечим таянч ечим бўлади

Мустақил ечиш учун топшириқлар.

1. Қуйидаги транспорт масаласининг бошланғич ечимини «шимолий-ғарб бурчак» усули билан топинг.

6-жадвал

b_j a_i	80	120	70	130
100	10	7	16	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5

1. Берилган транспорт масаласининг бошланғич ечимини «минимал ҳаражатлар» усули билан топинг.

7-жадвал

b_j a_i	80	120	100	100
100	6	5	4	8
250	7	10	11	7
200	6	5	3	9

3-§. Транспорт масаласининг оптимал ечимини топиш учун потенциаллар усули.

Потенциаллар усули ёрдами билан бошлангич таянч ечимдан бошлаб оптимал ечимга яқинроқ бўлган янги таянч ечимларга ўтиб борилади. Чекли сондаги итерациядан сўнг масаланинг оптимал ечими топилади. Ҳар бир итерацияда топилган таянч ечим оптимал ечим эканини текшириш учун ҳар бир таъминотчи (**A_i**) ва истеъмолчи (**B_j**) га унинг потенциали деб аталувчи **U_i** ва **V_j** миқдорлар мос қўйилади. Бу потенциаллар шундай танланадики, бунда ўзаро боғланган **A_i** таъминотчи ва **B_j** истеъмолчига мос келувчи потенциаллар йиғиндиси $\mathbf{A}_i$ дан $\mathbf{B}_j$ га бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражати $\mathbf{C}_{ij}$ га тенг бўлиши керак.

Теорема. Агар транспорт масаласининг $X^*=(x^*_{ij})$ ечими оптимал ечим бўлса, у ҳолда унга мос келувчи потенциаллар учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

$$\left.\begin{array}{ll} U^*_i+V^*_j=C_{ij}, & \text{агар } x^*_{ij}>0 \text{ бўлса} \\ U^*_i+V^*_j\le C_{ij}, & \text{агар } x^*_{ij}=0 \text{ бўлса} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Бу теоремага кўра бошланғич таянч ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши керак:

а) ҳар бир банд катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл ҳаражати қийматига тенг бўлиши керак:

$$\mathbf{U^*_i+V^*_j=C_{ij}} \qquad (2)$$

б) ҳар бир бўш катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл ҳаражати қийматидан катта бўлмаслиги керак:

$$\mathbf{U^*_i+V^*_j\le C_{ij}} \qquad (3)$$

Агар камида битта бўш катак учун (3) шарт бажарилмаса, кўрилаётган ечим оптимал бўлмайди ва бу ечимни базисга (3) шарт бузилган катакдаги номаълумни киритиш билан яхшилаш мумкин.

Шундай қилиб, навбатдаги таянч ечимни оптималликка текшириш учун аввал (2) шарт ёрдамида потенциаллар системаси қурилади ва сўнгра (3) шартнинг бажарилиши текширилади.

Потенциаллар усулининг алгоритми қуйидагидан иборат

1) бошлангич таянч ечимни қуриш;

2) (2) шарт асосида потенциаллар системасини қуриш; бунда m+n та номаълумли m+n-1та чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Номаълумлар сони тенгламалар сонидан биттага ортиқ бўлгани учун битта номаълум эркли бўлиб унга ихтиёрий қиймат, масалан нол киймат берилиб қолганлари мос тенгламалардан топилади;

3) бўш катаклар учун (3) шарт текширилади;

а) бу шарт барча бўш катаклар учун бажарилса, ечим оптимал бўлади ва ечиш жараёни тугайди;

б) акс ҳолда ечим оптимал бўлмайди ва кейинги ечимга ўтишга киришилади;

4) кейинги ечимга ўтиш учун бўш катакларнинг ўнг паст бурчагига

$$\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij} \tag{4}$$

қийматлар ёзиб чиқилади ва бу қийматларнинг энг каттаси мос келган катакча, яъни қуйидаги

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{lk} \tag{5}$$

шартни қаноатлантирган (A_l,B_k) катакча тўлдирилади (x_{lk} номаълум базисга киритилади) $x_{lk}=\theta$ деб фараз қилиб (A_l,B_k) катакчага θ киритилади. Сўнгра соат стрелкаси бўйича ҳаракат қилиб тўлдирилган катакчаларга тартиб билан (-) ва (+) ишоралар қўйиб борилади. Натижада ёпиқ K контур ҳосил бўлади:

$$K=K^{-}\cup K^{+}$$

бу ерда: K^-, K^+ - мос равишда (-) ва (+) ишоралари катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контурлар.

Қуйидаги формула орқали θ нинг сон қиймати топилади;

$$\theta = \min_{x_{ij}\in K} x_{ij} = x_{pq} \tag{6}$$

5) янги таянч ечим ҳисобланади;

$$\left.\begin{array}{l} x'_{lk} = \theta \\ x'_{pq} = 0 \\ x'_{ij} = x_{ij}, \quad \text{агар } x_{ij} \notin K \\ x'_{ij} = x_{ij} + \theta, \quad \text{агар } x_{ij} \in K^{+} \\ x'_{ij} = x_{ij} - \theta, \quad \text{агар } x_{ij} \in K^{-} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Бу жараён чекли сонда қайтарилгандан сўнг, албатта, оптимал ечим ҳосил бўлади.

Бу алгоритмни юқоридаги мисолда батафсил кўриб чиқамиз.

Дейлик, масаланинг бошланғич таянч ечими қуйидагича кўринишда бўлсин:

1-жадвал

$a_i \backslash b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{-1}$	1 100 —	4 0	$U_1=0$
250	2 200	7 50 —	10 $\boxed{1}$	6 θ $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	$U_2=8$
200	8 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-8}$	3 $\boxed{-2}$	2 0 $\boxed{-3}$	2 200	$U_3=-2$
300	11 $\boxed{-8}$	8 150 +	12 100	16 $\boxed{-6}$	13 50 —	$U_3=9$
V_j	$V_1=-6$	$V_2=-1$	$V_3=3$	$V_4=1$	$V_5=4$	$\theta=50$

Бу жадвалдан кўринадики, тўлдирилган катакчалар сони n+m-1 тадан кам, яъни n+m-2 та. Шунинг учун (A_1, B_5) катакчага 0 киритиб уни тўлдирилган катакчага айлантирамиз. Сўнгра тўлдирилган катакчалар учун потенциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$
\begin{array}{ll}
u_1+v_4=1 & u_4+v_2=8 \\
u_1+v_5=4 & u_4+v_3=12 \\
u_3+v_5=2 & u_2+v_2=7 \\
u_4+v_5=13 & u_2+v_1=6
\end{array}
$$

Бу системада $u_1=0$ деб қабул қилиб қолган потенциалларни бирин кетин топамиз U=(0; 8: -2; 9) V=(-6; -1; 3; 1; 4). ҳар бир бўш катакча учун

$$\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}$$

катталикни ҳисоблаб уни бўш катакчанинг пастки ўнг бурчагига ёзамиз

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$$

бўлганлиги сабабли (A_2, B_4) катакчага θ сон киритамиз ва (A_1,B_4), (A_1,B_5) (A_4,B_5), (A_4,B_2), (A_2,B_2) катакчаларни ўз ичига олувчи ёпиқ К контур тузамиз

$$K=K^{-}\cup K^{+}$$

Бу ерда:

$$(A_1,B_4),\ (A_4,B_5),\ (A_2,B_2)\in K^{-}$$
$$(A_1,B_5),\ (A_4,B_2),\ (A_2,B_4)\in K^{+}$$

Янги таянч режани аниқлаймиз ва уни қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-5}$	4 θ $\boxed{2}$	1 50 —	4 50	$U_1=0$
250	2 200	7 0 —	10 $\boxed{1}$	6 50 $\boxed{+}$	11 $\boxed{-2}$	$U_2=5$
200	8 $\boxed{-13}$	5 $\boxed{-5}$	3 $\boxed{1}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	$U_3=-2$
300	11 $\boxed{-14}$	8 200 +	12 100 —	16 $\boxed{-9}$	13 $\boxed{-3}$	$U_3=6$
V_j	$V_1=-3$	$V_2=2$	$V_3=6$	$V_4=1$	$V_5=4$	θ=0

Юқоридаги усул билан потенциаллар системасини тузамиз ва уни ечиб топамиз **U**=(0; 5: -2; 6) **V**=(-3; 2; 6; 1; 4).

Барча бўш катакчалар учун

$$\mathbf{\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}}$$

ни ҳисоблаймиз. 6-жадвал кўринадики,

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij}=\Delta_{13}=2$$

Шунинг учун $(A_1,\ B_3)$ катакчага θ ни киритамиз ва жадвалда кўрсатилган ёпиқ K контур тузамиз. Сўнгра

$$\theta=\min_{x_{ij}\in K^{-}}x_{ij}=0$$

эканлигини аниқлаймиз. Топилган янги таянч ечимни қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз.

3-жадвал

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-7}$	4 θ	1 50	4 50	$U_1=0$
250	2 200	7 -2	10 $\boxed{-1}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	$U_2=5$
200	8 $\boxed{-13}$	5 $\boxed{-7}$	3 $\boxed{-9}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	$U_3=-2$
300	11 $\boxed{-6}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-7}$	13 $\boxed{-1}$	$U_3=6$
V_j	$V_1=-3$	$V_2=0$	$V_3=4$	$V_4=1$	$V_5=4$	$\theta=0$

3-жадвалда келтирилган ечим оптимал ечим бўлади, чунки барча бўш катакчаларда $\Delta_{ij}\leq 0$.

Шундай қилиб, учинчи циклда қуйидаги оптимал ечимга эга бўлдик.

$$x_{14}=50; \quad x_{15}=50;$$
$$x_{21}=200; \quad x_{24}=50;$$
$$x_{35}=200; \quad x_{42}=200; \quad x_{43}=100.$$
$$Y_{min}=50+4\cdot 50+2\cdot 200++6\cdot 50+2\cdot 200+8\cdot 200+12\cdot 100=4150.$$

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Берилган транспорт масаласининг оптимал ечимини потенциаллар усули билан топинг.

a_i \ b_j	50	50	50	50
34	2	7	6	4
46	1	7	5	8
60	10	2	8	11
60	7	7	5	5

4-§. Хос транспорт масаласи. Транспорт масаласида циклланиш ва ундан қутилиш усули

Транспорт масаласининг таянч ечимидаги мусбат компонентлар сони $k<n+m-1$ бўлса, бу ечим хос ечим бўлади. Бундай ечимни тўгрилаш учун $n+m-1-k$ та 0 элемент киритиш керак бўлади. Киритилган 0 элементларга мос бўлган векторлар ўзаро чизиқли боглиқ бўлмаган векторлар бўлиши керак. Бунга эришиш учун қуйидаги ε-усулни қўллаш мумкин.

ε-усул. Агар транспорт масаласи шартларидаги a_i, b_j параметрлар учун

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j \quad (k < n. \, k < m) \tag{1}$$

хусусий йиғиндилар ўзаро тенг бўлса, транспорт масаласи *хос транспорт масаласи* даб аталади. Бундай масаланинг бошлангич таянч ечимидаги 0 дан фарқли компоненталар сони $n+m-1$ дан кам бўлади ва бундай масалаларни ечиш жараёнида циклланиш ҳолати рўй бериши мумкин.

Циклланиш. Бу шундай холатки, унда бир босқичдан иккинчисига ўтганда мақсад функциянинг қиймати камаймайди ҳамда маълум бир сондаги босқичдан сўнг олдинги босқичларнинг бирига қайтиш ҳолати рўй беради.

Хослик ҳолатининг олдини олиш учун a_i ва b_j лардан тузилган хусусий йиғиндиларнинг ўзаро тенг бўлмаслигига эришиш, бунинг учун эса a_i ва b_j ларнинг қийматини бирор кичик сонга ўзгартириш керак. Масалан, етарлича кичик $\varepsilon>0$ сонни олиб, a_i ва b_j ларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\bar{a}_i = a_i + \varepsilon, \quad (i=1,...,n) \tag{2}$$

$$\bar{b}_j = b_j, \quad (j=1,...,n-1) \tag{3}$$

$$\bar{b}_n = b_n + m\varepsilon, \quad (e>0) \tag{4}$$

бу ерда: ε етарлича кичик сон бўлганлигига сабабли ҳосил бўлган масаланинг $X(\varepsilon)$ оптимал ечими $\varepsilon=0$ да берилган масаланинг ечими бўлади.

1-мисол.

ε-усулни қуйидаги масалага қўлланг.

Ечиш. «Шимолий-ғарб бурчак» усулини қўллаб масаланинг бошланғич ечимини топамиз (1-жадвал). Жадвалдан кўринадики, бошланғич ечимда 0 дан фарқли қийматли

1-жадвал

b_j a_i	1	3	3	2	5
3	1 1	2 2	3	5	4
4	4	5 1	2 3	1	3
7	6	1	3	5 2	2 5

номаълумлар сони 6 та (масаланинг таянч ечими хосмас бўлиши учун ундаги 0 дан фарқли қийматли номаълумлар сони n+m-1=7 та бўлиши керак).

2-жадвал

b_j a_i	1	3	3	2	5+3ε	U_i
3+ε	1 1	2 2+ε	3 $\boxed{-4}$	5 $\boxed{-7}$	4 $\boxed{-9}$	$U_1=0$
4+ε	4 $\boxed{0}$	5 1-ε -θ	2 3	1 2ε +θ	3 $\boxed{-5}$	$U_2=3$
7+ε	6 $\boxed{2}$	1 θ $\boxed{8}$	3 $\boxed{3}$	5 2-2ε -θ	2 5+3ε	$U_3=7$
V_j	$V_1=1$	$V_2=2$	$V_3=-1$	$V_4=-2$	$V_5=-5$	θ=1-ε

Энди ε-усулни қўллаб ушбу жадвални ҳосил қиламиз (2-жадвал) ва бошланғич ечимни топамиз.

Жадвалдан кўринадики, таянч ечимдаги мусбат элементлар сони 7 та (n+m-1=5+3-1=7). Бу таянч ечимни оптимал ечимга айлантириш учун потенциаллар усулини қўллаймиз

I босқич.

$$U=(0;\ 3;\ 7),\qquad V=(1;\ 2;\ -1;\ -2;\ -5)$$

$$x_{11}=1;\ \ x_{12}=2+\varepsilon;$$

$$x_{22}=1-\varepsilon;\ \ x_{23}=3;\ \ x_{24}=x\varepsilon;$$

$$x_{34}=1-\varepsilon;\ \ x_{35}=5+3\varepsilon$$

3-жадвал

b_j a_i	1	3	3	2	$5+3\varepsilon$	U_i
$3+\varepsilon$	1 1	2 $2+\varepsilon$ $-\theta$	3 θ 3	5 $\boxed{1}$	4 $\boxed{-1}$	$U_1=0$
$4+\varepsilon$	4 $\boxed{-8}$	5 $\boxed{-8}$	2 3 $-\theta$	1 $1+\varepsilon$ $+\theta$	3 $\boxed{-5}$	$U_2=-5$
$7+\varepsilon$	6 $\boxed{-6}$	1 $1-\varepsilon$ $+0$	3 $\boxed{3}$	5 $1-\varepsilon$ $-\theta$	2 $5+3\varepsilon$	$U_3=-1$
V	1	2	6	6	3	

II босқич.

$$U=(0;\ -5;\ -1),\quad V=(1;\ 2;\ 7;\ 6;\ 3)$$

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij} = \max(4;1;3) = \Delta_{31} = 4$$

$$\theta=1-\varepsilon$$

янги таянч ечим:

$$x_{11}=1;\ \ x_{12}=1+2\varepsilon;\ \ x_{13}=1-\varepsilon;$$
$$x_{23}=2+\varepsilon;\ \ x_{24}=2;$$
$$x_{32}=2-2\varepsilon;\ \ x_{35}=5+3\varepsilon;\ \text{(4-жадвал)}$$

4-жадвал

b_j a_i	1	3	3	2	$5+3\varepsilon$	U_i
$3+\varepsilon$	1 1	2 $1+2\varepsilon$	3 $1-\varepsilon$	5 $\boxed{-3}$	4 $\boxed{-1}$	$U_1=0$
$4+\varepsilon$	4 $\boxed{-4}$	5 $\boxed{-4}$	2 $2+\varepsilon$	1 2	3 $\boxed{-1}$	$U_2=-1$
$7+\varepsilon$	6 $\boxed{-6}$	1 $2-2\varepsilon$	3 $\boxed{-1}$	5 $\boxed{-4}$	2 $5+3\varepsilon$	$U_3=-1$
V_j	$V_1=1$	$V_2=2$	$V_3=3$	$V_4=2$	$V_5=3$	

III босқич.

$$U=(0;\ -1;\ -1),\quad V=(1;\ 2;\ 3;\ 2;\ 3)$$

Жадвалдан кўринадики,

$$\Delta_{ij}\leq 0\ (i=1,...,3;\ j=1,...,5)$$

Демак, II босқичда топилган таянч ечим оптимал ечим бўлади.

Оптимал ечим:

$$X^*(\varepsilon)=(1;\ 1+2\varepsilon;\ 1-\varepsilon;\ 2+\varepsilon;\ 2;\ 2-2\varepsilon;\ 5+3\varepsilon)$$

$$Y\min(X^*(\varepsilon))=24+7\varepsilon.$$

$\varepsilon=0$ да берилган масаланинг оптимал ечимини топамиз.

$$X^*=(1;\ 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 5)$$

$$Y_{\min}(X^*)=24.$$

Бу ечимни жадвалга жойлаштирамиз

b_j / a_i	1	3	3	2	5
3	1 1	2 1	3 1	5	4
4	4	5	2 2	1 2	3
7	6	1 2	3	5	2 5

Мустақил ечиш учун топшириқлар

Қуйидаги масалани ε-усул билан ечим

b_j / a_i	10	40	40	10
20	5	7	8	10
30	11	9	7	6
50	5	3	5	4

5-§. Очиқ моделли транспорт масаласи.

Баъзи транспорт масалаларида ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг йиғиндиси $(\sum a_i)$ уларга бўлган талаблар йиғиндиси $(\sum b_j)$ дан кичик (катта) бўлиши мумкин. Бундай масалалар очиқ моделли транспорт масаласи дейилади.

Агар

$$\sum_i a_i < \sum_j b_j \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда маҳсулотга бўлган ҳамма талабни қаноатлантириб бўлмайди. Лекин бу ҳолда ҳам маҳсулотларни кам ҳаражат сарф қилиб тақсимлаш режасини топиш мумкин. Бунинг учун масалага маҳсулот заҳираси

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i > 0 \qquad (2)$$

бирликни ташкил қилувчи соҳта m+1 – таъминотчи киритилади. Бу пунктда барча истеъмолчиларга маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари 0 га тенг деб қабул қилинади, яъни

$$\mathbf{C_{m+1,j}=0,\ \ j=1,\dots,n} \qquad (3)$$

Агар

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j \qquad (4)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда соҳта n+1 – истеъмолчи қўшилади. Бу пунктга ҳамма таъминотчилардан маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари 0 га тенг деб олинади, яъни

$$\mathbf{C_{i,n+1}=0,\ i=1,\dots,m} \qquad (5)$$

Бу соҳта истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби

$$b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j > 0 \qquad (6)$$

бирликка тенг деб қабул қилинади.

1-мисол. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ечинг.

Шунинг учун талаби

$$b_n=16-13=3$$

бўлган соҳта истеъмолчи пункт киритиб, масалани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

b_j a_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада

$$\sum_i a_i = 16 > \sum_j b_j = 13$$

b_j a_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Бу масаланинг бошланғич таянч ечимини «минимал ҳаражатлар» усулидан фойдаланиб топамиз ва потенциаллар усули билан оптимал ечимни топамиз:

I

b_j a_i	3	3	3	2	2	3	U_i
4	3 $\boxed{-5}$	2 $\boxed{-2}$	1 1+θ	2 $\boxed{-3}$	3 $\boxed{-4}$	0 3-θ	$U_1=0$
5	5 $\boxed{-5}$	4 $\boxed{-2}$	3 1-θ	1 2	1 2	0 θ $\boxed{2}$	$U_2=2$
7	0 3	2 3	3 1	4 $\boxed{-3}$	5 $\boxed{-4}$	0 $\boxed{2}$	$U_3=2$
V_j	$V_1=-2$	$V_2=0$	$V_3=1$	$V_4=-1$	$V_5=-1$	$V_6=0$	0=1

II

a_i \ b_j	3	3	3	2	2	3	U_i
4	3 $\boxed{-3}$	2 $\boxed{0}$	1 $2+\theta$	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{-2}$	0 $2-\theta$	$U_1=0$
5	5 $\boxed{-7}$	4 $\boxed{-2}$	3 $\boxed{-2}$	1 2	1 2	0 1	$U_2=0$
7	0 3	2 3	3 $1-\theta$	4 $\boxed{-1}$	5 $\boxed{-2}$	0 θ $\boxed{2}$	$U_3=2$
V_j	$V_1=2$	$V_2=0$	$V_3=1$	$V_4=1$	$V_5=1$	$V_6=0$	$\theta=1$

II
I

a_i \ b_j	3	3	3	2	2	3	U_i
4	3 $\boxed{-3}$	2 $\boxed{0}$	1 3	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{-2}$	0 1	$U_1=0$
5	5 $\boxed{-5}$	4 $\boxed{-2}$	3 $\boxed{-2}$	1 2	1 2	0 1	$U_2=0$
7	0 3	2 3	3 $\boxed{-2}$	4 $\boxed{-3}$	5 $\boxed{-4}$	0 1	$U_3=0$
V_j	$V_1=0$	$V_2=2$	$V_3=1$	$V_4=1$	$V_5=1$	$V_6=0$	

Потенциаллар усулининг III босқичида оптимал ечим топилди:

a_i \ b_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1 3	2	3	0 1
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 3	3	4	5	0 1

Яъни:

$x_{13}=3;$ $x_{16}=1;$
$x_{24}=2;$ $x_{25}=2;$ $x_{26}=1;$
$x_{31}=3;$ $x_{32}=3;$ $x_{36}=1.$

$$Y_{min}=1\cdot3+0\cdot1+1\cdot2+1\cdot2+0\cdot1+0\cdot3+2\cdot3+0\cdot1=3+2+2+6=13.$$

Демак, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни энг кам ҳаражат сарф қилиб тақсимлаш учун ҳар бир таъминотчида 1 бирликдан маҳсулот тақсимланмасдан қолиши керак экан.

2-мисол. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
150	5	8	12	7

Бу масалада

$$\sum_{i} a_{i} = 380 < \sum_{j} b_{j} = 400$$

Шунинг учун маҳсулот заҳираси

$$a_4 = \sum_{j} b_{j} - \sum_{i} a_{i} = 400 - 380 = 20$$

бўлган соҳта таъминотчи пункт киритилади ва масала қуйидаги кўринишга келтирилади:

a_i \ b_j	80	120	70	130
100	$\boxed{10}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$
150	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{13}$	$\boxed{11}$
150	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{12}$	$\boxed{5}$

Бу масаланинг бошлангич таянч ечимини «минимал ҳаражат» усули билан топиб потенциаллар усули ёрдамида оптимал ечимини топамиз:

I

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 0 +θ	5 100 -θ	7 $\boxed{2}$	11 $\boxed{-7}$	$U_1=0$
130	1 130	4 $\boxed{-1}$	6 $\boxed{1}$	2 $\boxed{0}$	$U_2=-2$
150	5 $\boxed{1}$	8 20 +θ	12 80 -θ	7 50	$U_3=3$
20	0 20 -θ	0 $\boxed{2}$	0 θ $\boxed{6}$	0 $\boxed{1}$	$U_4=-3$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=9$	$V_4=4$	

II

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 20	5 80 -θ	7 θ $\boxed{2}$	11 $\boxed{-7}$	$U_1=0$
130	1 130	4 $\boxed{-1}$	6 $\boxed{1}$	2 $\boxed{0}$	$U_2=-2$
150	5 $\boxed{1}$	8 40 +θ	12 60 -θ	7 50	$U_3=3$
20	0 $\boxed{-6}$	0 $\boxed{-4}$	0 20	0 $\boxed{-5}$	$U_4=-9$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=9$	$V_4=4$	θ=60

III

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 20 -θ	5 20 +θ	7 60	11 $\boxed{-7}$	$U_1=0$
130	1 130	4 $\boxed{-1}$	6 $\boxed{1}$	2 $\boxed{0}$	$U_2=-2$
150	5 θ $\boxed{1}$	8 100 -θ	12 $\boxed{-2}$	7 50	$U_3=3$
20	0 $\boxed{-4}$	0 $\boxed{-2}$	0 20	0 $\boxed{-3}$	$U_4=-7$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	θ=20

IV

$a_i \backslash b_j$	150	120	80	50	U_i
100	3 $\boxed{-1}$	5 40	7 60	11 $\boxed{-7}$	$U_1=0$
130	1 130 $-\theta$	4 $\boxed{0}$	6 $\boxed{1}$	2 θ $\boxed{1}$	$U_2=-1$
150	5 20 $+\theta$	-8 80	12 $\boxed{-1}$	7 50 $-\theta$	$U_3=3$
20	0 $\boxed{-6}$	0 $\boxed{-3}$	0 20	0 $\boxed{-4}$	$U_4=-8$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=8$	$V_4=4$	$\theta=50$

V

$a_i \backslash b_j$	150	120	80	50	U_i
100	3 $\boxed{-1}$	5 40 $+\theta$	7 60 $-\theta$	11 $\boxed{-8}$	$U_1=0$
130	1 80 $-\theta$	4 $\boxed{0}$	6 θ $\boxed{1}$	2 50	$U_2=-1$
150	5 70 $+\theta$	8 80 $-\theta$	12 $\boxed{-1}$	7 $\boxed{-1}$	$U_3=3$
20	0 $\boxed{-6}$	0 $\boxed{-3}$	0 20	0 $\boxed{-5}$	$U_4=-8$
V_j	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=8$	$V_4=3$	$\theta=60$

VI

$a_i \backslash b_j$	150	120	80	50	U_i
100	3 $\boxed{-1}$	5 100	8 $\boxed{-1}$	11 $\boxed{-8}$	$U_1=0$
130	1 20	4 $\boxed{0}$	6 60	2 50	$U_2=-1$
150	5 130	8 20	12 $\boxed{-1}$	7 $\boxed{-1}$	$U_3=3$
20	0 $\boxed{-5}$	0 $\boxed{-2}$	0 20	0 $\boxed{-4}$	$U_4=-7$
V_j	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=3$	

Потенциаллар усулининг VI босқичида оптимал ечим топилди:

$x_{12}=100;$

$x_{21}=20;\quad x_{23}=60;\quad x_{24}=50;$

$x_{31}=130;\quad x_{32}=20;$

$Y_{min}=5\cdot 100+1\cdot 20+6\cdot 60+2\cdot 50+5\cdot 130+8\cdot 20+0\cdot 20=1790.$

Демак, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни энг кичик ҳаражат сарф қилиб тақсимлаш учун учинчи истеъмолчининг талаби 20 бирликка қондирилмаслиги керак.

Мустақил ечиш учун топшириқлар

Қуйидаги очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг.

а)

a_i \ b_j	250	250	250	200
400	7	5	8	11
300	10	6	5	3
300	2	7	3	4

б)

a_i \ b_j	180	170	150	150
100	5	7	6	3
130	3	5	4	7
150	7	6	3	2

Таянч сўз ва иборалар

транспорт масаласи, ёпиқ моделли транспорт масаласи, банд катакчалар, бўш катакчалар, «шимолий-ғарб бурчак» усули, «минимал ҳаражатлар» усули, ҳаражатлар матрицаси, потенциаллар, потенциал тенглама, **К** контур, хос транспорт масаласи, хос таянч ечим, цикллaниш, ε-усул, очиқ моделли транспорт масаласи.

Назорат саволлари

1. Транспорт масаласининг математик модели қандай ва у қандай формаларда ёзилади?

2. Ёпиқ ва очиқ моделли транспорт масалаларига изоҳ беринг.

3. Транспорт масаласи ечими мавжуд бўлишининг зарур ва етарлилик шарти нимадан иборат?

4. Транспорт масаласи шартларидан тузилган матрицанинг ранги нимага тенг?

5. Транспорт масаласи ечимидаги 0 дан фарқли ўзгарувчилар сони нечта?

6. Қайси холда транспорт масаласининг ечими бутун сонли бўлади?

7. «Шимолий-ғарб бурчак» усулининг ғояси қандай?

8. «Минимал ҳаражатлар» усулининг ғояси қандай?

9. Потенциаллар нима ва у қандай маънога эга?

10. Потенциал тенглама нима ва у қандай ёзилади?

11. Транспорт масаласи таянч ечимининг оптималлик шарти нимадан иборат?

12. Хос транспорт масаласи қандай?

13. Хос таянч ечим деб қандай ечимга айтилади?

14. Циклланиш нима ва у қандай холларда рўй бериши мумкин?

15. ε-усулнинг маъноси нимадан иборат?

16. Очиқ моделли транспорт масаласини қандай йўл билан ёпиқ моделли масалага айлантириш мумкин?

17. Сохта таъминотчининг маҳсулот заҳираси нимага тенг бўлади?

18. Сохта истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби қанча бўлади?

Масалалар

1. Берилган масалаларнинг математик моделлини тузинг.

а) 3 та A,B,C темир йўл стацияларида мос равишда 80, 70 ва 50 вагонлар заҳираси мавжуд. Бу вагонларни ғалла ортишга шайланган 4 та пунктга юбориш керак. Жумладан: I пунктга 60 та, II пунктга 45 та, III пунктга 65 ва IV пунктга 30 та вагон керак. Вагонларни тақсимлаш учун сарф қилинадиган ҳаражатлар матрицаси қуйидаги кўринишда берилган

$$C=\begin{pmatrix}14 & 13 & 16 & 11\\ 12 & 17 & 14 & 18\\ 15 & 12 & 11 & 13\end{pmatrix}$$

Вагонларни истеъмолчиларга оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

б) Тўрт хил иш майдонига уч хил турдаги ускуналарни оптимал тақсимлаш талаб қилинади. Ускуналар миқдори мос равишда 45, 30, 50 бирликда бўлиб, иш майдонларининг уларга бўлган талаблари 20, 40, 45, 20 бирликдан иборат. Ҳар бир ускунанинг тайин иш майдонидаги меҳнат унумдорлиги қуйидаги матрица билан характерланади:

$$C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 5\\ 3 & 6 & 2 & 2\\ 1 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

2. Берилган транспорт масалаларининг бошланғич таянч ечимини топинг:

а)

b_j / a_i	150	150	100
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

б)

b_j / a_i	120	80	50
130	1	7	8
70	6	1	1
50	7	6	1

в)

b_j a_i	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	5	3	4

г)

b_j a_i	150	100	100	150
120	8	6	1	4
180	1	8	6	7
200	6	8	4	2

3. Берилган масалаларнинг ҳамда 2-пунктда берилган масалаларнинг оптимал ечимини топинг:

а)

b_j a_i	30	50	70
45	7	4	5
45	5	7	4
60	4	5	8

б)

b_j a_i	100	100	100	100
119	5	3	7	6
121	6	7	5	3
160	3	4	5	6

4. Берилган масалаларни ε-усулини қўллаб ечинг:

а)

a_i \ b_j	60	60	40	90
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
40	6	7	8	9
90	9	6	5	4

в)

a_i \ b_j	120	90	45	45
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

5. Берилган очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг:

а)

a_i \ b_j	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

в)

a_i \ b_j	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

в)

a_i \ b_j	100	110	12
115	9	8	
125	11	10	
160	3	7	

г)

a_i \ b_j	90	90	90
100	2	7	
120	3	3	
180	4	2	

IV БОБ. БУТУН СОНЛИ ПРОГРАММАЛАШ

Ўзгарувчиларига бутун сонли бўлишлик шарти қўйилган чизиқли программалаш масалалари катта амалий аҳамиятга эгадир. Бундай масалалар бутун сонли программалаш масалалари деб аталади. Бутун сонли программалаш масалаларига сайёҳ ҳақидаги масала, оптимал жадвал тузиш, рационал бичиш, транспорт воситаларини маршрутларга оптимал тақсимлаш, бўлинмайдиган маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхонанинг ишини оптимал режалаштириш масалалари ва ҳоказолар мисол бўла олади. Бу масалаларнинг баъзилари билан танишамиз.

1-§. Иқтисодий масалалар

1. Сайёҳ ҳақидаги масала.

Фараз қилайлик, P_0 шаҳарда яшовчи сайёҳ n та P_1, P_2,..., P_n шаҳарларда бир мартадан бўлиб, минимал вақт ичида P_0 шаҳарга қайтиб келиши керак бўлсин. Бу масаланинг математик моделини тузиш учун сайёҳнинг P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориш учун сарф қилган вақтини t_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) билан ҳамда унинг ҳар бир P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориш вариантининг баҳосини x_{ij} билан белгилаймиз. Агар сайёҳ P_i шаҳардан P_j шаҳарга борса $x_{ij}=1$, бормаса, $x_{ij}=0$ бўлади. (Соддалик учун P_i ва P_j шаҳарлар фақат бир маршрут ёрдами билан боғланган деб фараз қиламиз). Бу ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишига эга бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{ёки} \quad x_{ij} = 1, \tag{3}$$

$$Y_{min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

2. Оптимал жойлаштириш масаласи

Дейлик, m та A_1, A_2,..., A_m пунктларда бир хил бўлинмайдиган маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналарни жойлаштириш керак бўлсин. Ҳар бир корхонанинг иш қувватини билдирувчи x_i (i=1,...,m) бутун сонли қийматларни қабул қилади. Ҳар бир A_i пунктда маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган ҳаражат ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдорига боғлиқ бўлиб $f_i(x_i)$ функция орқали ифодаланади. Соддалик учун бу функцияни чизиқли деб қабул қиламиз, яъни

$$f_i(x_i)=C_ix_i \tag{5}$$

Бундан ташқари n та пунктда бу маҳсулот истеъмол қилинади. ҳар бир истеъмол қилувчи пунктнинг маҳсулотга бўлган талаби маълум ва улар мос равишда b_1, b_2,..., b_n бирликларни ташкил қилади деб фараз қиламиз. Ҳар бир A_i ишлаб чиқарувчи пункт ҳар бир B_j истеъмол қилувчи пункт билан боғланган бўлиб йўл ҳаражатлари матрицаси $C=(C_{ij})$ дан иборат бўлсин.

A_i пунктдан B_j пунктга юбориладиган маҳсулот миқдорини x_{ij} билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_{ij} = 1, \qquad (\mathbf{i} = \overline{1,\mathbf{n}}), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{ij} = 1, \qquad (\mathbf{j} = \overline{1,\mathbf{n}}), \tag{1}$$

$$\mathbf{x}_{ij} = 0 \quad \textbf{ёки} \quad \mathbf{x}_{ij} = 1, \tag{1}$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{t}_{ij}\mathbf{x}_{ij} \tag{1}$$

3. Тақсимот масаласи.

Берилган n та ишни бажариш учун m та ускунлардан фойдаланиш мумкин. i-ускунанинг (i=1,...,m) j-ишни (j=1,...,n) бажаришдаги меҳнат унумдорлигини C_{ij} билан белгилаймиз. ҳар бир ускунада фақат битта ишни бажариш мумкинлигини ҳамда ҳар бир иш фақат битта ускунада бажарилишини назарга олган холда максимал меҳнат унумдорлигини таъминловчи ускуналарни ишларга тақсимлаш режасини аниқланг.

Масаладаги номаълумларни x_{ij} (i=1,...,m; j=1,...,n) билан белгилаймиз. Бу ерда: x_{ij} – j-ишни i-ускунада бажаришни баҳоловчи сон бўлиб, агар j-иш i-ускунада бажарилса $x_{ij}=1$, агар j-иш i-ускунада бажарилмаса $x_{ij}=0$ бўлади.

Ҳар бир ускунанинг фақат битта ишни бажаришда қўлланиши

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{10}$$

тенглик орқали ифодаланади.

Ҳар бир ишни фақат битта ускунада бажарилиши

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{11}$$

тенглик орқали ифодаланади. Бу ерда:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар } j - \text{иш } i - \text{ускунада бажарилса,} \\ 0, & \text{агар j} - \text{иш i} - \text{ускунада бажарилмаса.} \end{cases} \tag{12}$$

Шундай қилиб, масала (10)-(12) шартларни қаноатлантирувчи ҳамда

$$Y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \tag{13}$$

функцияга максимал қиймат берувчи x_{ij} номаълумларнинг қийматини топишга келтирилди. Бу масала ҳам бутун сонли программалаш масаласи бўлади.

Мисол. Цехда қўшимча ускуна ўрнатишга қарор қабул қилиниб, унинг учун 19/3 м^2 майдон ажратилди. Бу ускунани сотиб олиш учун цех 10 минг сўм пул сарф қилиши мумкин. Цех ўз имкониятидан келиб чиқиб 2 турдаги ускуна сотиб олиши мумкин. I турдаги ускунанинг баҳоси 1000 сўм, II турдагисининг баҳоси эса, 3000 сўм туради.

I ва II тур ускунанинг ўрнатилиши оқибатида ҳар сменада цех мос равишда 2 ва 4 бирлик махсулот кўпроқ ишлаб чиқаради I тур ускунани ўрнатиш учун 2 м^2, II тур ускуна учун эса, 1 м^2 майдон керак.

Қайси ускунадан қанчадан сотиб олинганда цехда ишлаб чиқарилган қўшимча маҳсулотларнинг миқдори максимал бўлади?

Ечиш. Цех I тур ускунадан x_1 дона, II тур ускунадан x_2 дона сотиб олсин, дейлик. У ҳолда масалани шартлари қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$2x_1+x_2\le 19/3,$$
$$x_1+3x_2\le 10,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\quad x_1,\ x_2\text{-бутун.}$$

Масаланинг мақсади ишлаб чиқарилган қўшимча маҳсулотлар миқдорини максимал қилишдан иборат бўлиб у қуйидаги функция кўринишида ёзилади.

$$Y_{max}=2x_1+4x_2$$

Шундай қилиб, берилган масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга эга бўлди:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2 &\le 19/3 \\ x_1+3x_2 &\le 10 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_1,\ x_2\text{-бутун.} \tag{15}$$

$$Y_{max}=2x_1+4x_2 \tag{16}$$

Мустақил ечиш учун топшириқ

Масала. Аэропортда n та хаво йўллари бўйича йўловчиларни ташиш учун m хил самолёт ишлатилади. i-тур самолёт ҳар бир рейсда a_i та йўловчини ташиши мумкин, j-хаво йўлида режалаштирилаётган вақт оралиғида b_j та йўловчини ташиш керак бўлсин. i-тур самолётни j-хаво йўлида ишлатиш учун сарф қилинадиган ҳаражат C_{ij} сўмни ташкил қилади.

Қайси хаво йўлида қайси самолётдан қанчасини ишлатганда йўловчиларни ташиш бўйича талаб қаноатлантирилади ҳамда сарф қилинган умумий ҳаражатлар минимал бўлади?

2-§. Бутун сонли программалаш масаласининг қўйилиши, турлари ва геометрик талқини.

Бутун сонли программалаш масаласини умумий ҳолда қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{бутун}, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

$$Y_{min} = \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

ёки вектор формада

$$AX=b,$$
$$X\geq 0 \text{ ва бутун};$$
$$Y_{min}=CX$$

Бутун сонли программалаш масалаларидаги номаълумларнинг ҳаммаси учун бутун бўлишлик шарти қўйилса, бундай масалалар *тўла бутун сонли программалаш* масалалари деб аталади.

Номаълумларнинг маълум бир қисми учун бутун бўлишлик шарти қўйилган масалалар *қисман бутун сонли* программалаш масалалари деб аталади.

Агар бутун сонли программалаш масаласидаги номаълумлар фақат 0 ёки 1 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда бу масала *Буль программалаш масаласи* деб аталади. Бутун сонли программалаш масаласининг геометрик талқинини 1-§ да келтирилган

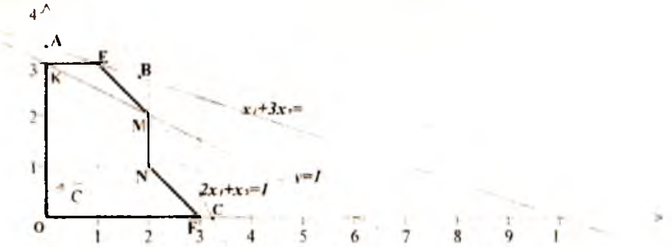
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \end{array}\right\} \tag{4}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1, x_2-бутун. (5)

$Y_{max} = 2x_1 + 4x_2$ (6)

масалани график усулда ечиш жараёнида тасвирлаймиз.

Энг аввал масаланинг (4) и (5) шартларини қаноатлантирувчи ечимлар тўпламидан иборат бўлган қаварик OABC кўпбурчакни ясаймиз.



I-шакл.

OABC кўпбурчакнинг нуқталари ичида берилган бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлаоладиган нуқтани топиш учун бу кўпбурчакни OKEMNF кўпбурчак билан алмаштирамиз. OKEMNF кўпбурчак координаталари бутун сонлардан иборат бўлган нуқталарни ўз ичига олади ва унинг четки нуқталарининг координаталари бутун сонлардан иборат бўлади.

Энди (6) фукнцияга максимум қиймат берувчи нуқтани OKEMNF кўпбурчакнинг четки нуқталари ичида қидирамиз. Бу кўпбурчакнинг нуқталари ичида (6) функцияга максимум қиймат берувчи нуқта берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлайди. Бундай нуқтани топиш учун Ymax га ихтиёрий, масалан, 12 қиймат берамиз ва

$$2x_1+4x_2=12$$

тўгри чизиқни ясаймиз. Бу чизиқни $\overline{C}(2;4)$ вектор йўналишида OKEMNF кўпбурчакнинг шу йўналишидаги четки нуқтаси билан кесишгунча силжитиб борамиз. Ана шу четки нуқтанинг координаталари берилган масаланинг ечимини аниқлайди, мақсад функциянинг шу нуқтадаги қиймати эса максимал бўлади. Шаклдан кўринадики, бундай нуқта E(1;3) дан иборат. Демак, берилган масаланинг ечими:

$$x_1=1,\ x_2=3,$$

$$Y_{max}=14$$

бўлади.

Мисол. Берилган бутун сонли программалаш масаласини график усулда ечинг.

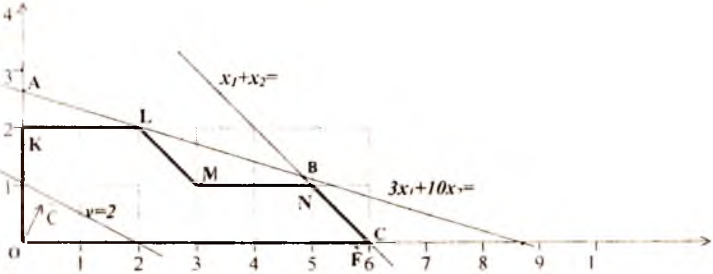
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 3x_1 + 10x_2 &\le 26 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, \qquad (8)$$

$$x_1,\ x_2\text{-бутун}. \qquad (9)$$

$$Y_{max}=x_1+2x_2 \qquad (10)$$

Ечиш. Масаладаги (7) тенгсизликлар системасининг (8) шартни қаноатлантирувчи номанфий ечимларини ўз ичига олувчи OABC кўпбурчак ясаймиз (2-шакл).



2-шакл

OABC кўпбурчакни OKLMNF кўпбурчак билан алмаштирамиз. Бу кўпбурчак координаталари бутун сонлардан иборат бўлган 16 та нуқтани ўз ичига олади. Шу нуқталар ичида (10) функцияга максимум қиймат берувчи нуқтани топиш керак. Бунинг учун Ymax га ихтиёрий, масалан, 2 қиймат берамиз ва

$$x_1+2x_2=2$$

тўғри чизиқни ясаймиз. Бу чизиқни $\overline{C}(1;2)$ вектор йўналишида суриб бориб N(5;1) нуқта шу йўналишдаги энг четки нуқта эканлигини аниқлаймиз. Демак, бу нуқтанинг координаталари берилган масаланинг ечимини аниқлайди:

$$x_1=5,\ x_2=1,$$

$$Y_{max}=7$$

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Мисол. Берилган бутун сонли программалаш масаласини график усулда ечинг.

$$\left.\begin{array}{l} -4x_1+2x_2\leq 29\\ 3x_1-x_2\leq 15\\ 5x_1+2x_2\geq 38 \end{array}\right|$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$
$$x_1,\ x_2\text{-бутун},$$
$$Y_{max} = 3x_1 + x_2$$

3-§. Бутун сонли программалаш масаласини ечиш учун Гомори усули.

Бутун сонли программалаш масалаларини ечиш учун уларнинг ўзига хос хусусиятларини назарга олувчи усуллар яратилган бўлиб, улар орасида Америка олими Р.Гомори яратган усул оптимал бутун сонли ечимни топишга ёрдам берувчи энг аниқ усул ҳисобланади. Гомори усули билан тўла ҳамда қисман бутун сонли программалаш масалаларини ечиш мумкин.

Қуйида биз Р.Гомори усули билан тўла бутун сонли программалаш масаласини ечиш жараёни билан танишамиз.

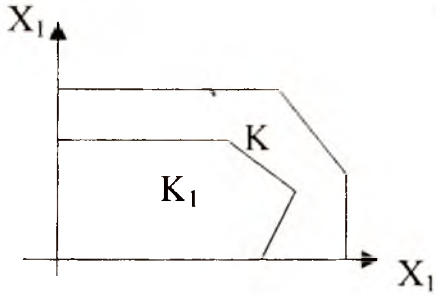
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{1}$$

$$x_j \geq 0. \quad \text{ва бутун}, \ j = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$Y_{min} = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j, \tag{3}$$

Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат бўлиб, берилган бутун сонли программалаш масаласини номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан, уни оддий чизиқли программалаш масаласи сифатида симплекс усул билан ечамиз. Агар топилган ечим бутун сонли бўлса, у ҳолда у бутун сонли программалаш масаласининг ҳам ечими бўлади. Акс ҳолда номаълумларнинг бутун сонли бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама тузилади. Бу тенглама асосий тенгламалар системасига киритиб ёзилади ва базис ечим алмаштирилади. Бунинг учун номаълум кесувчи тенгламадан ажратилади ва унинг қиймати бошқа тенгламаларга қуйиб чиқилади. Бундай ишлар масаланинг бутун сонли ечими топилгунча ёки унинг мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Ҳар бир босқичда тузилган қўшимча тенглама кесувчи тенглама деб аталишига сабаб, бу тенглама ёрдамида берилган бутун сонли программалаш масаласи ечимидаги каср сонли ечимни ўз ичига олувчи қисми кесиб борилади. Бу айтилганларни қуйидаги шакл орқали тасвирлаш мумкин.



Кесиш жараёни K тўпламнинг фақат бутун сонли ечимларни ўз ичига олувчи қисми K_1 топилгунча такрорланади. K_1 тўпламнинг четки нуқталарининг координаталари бутун сондан иборат бўлади.

Кесувчи тенгламани тузиш

Фараз қилайлик, юқорида берилган (1)-(3) бутун сонли программалаш масаласидаги номаълумларнинг бутун сон бўлишлик шартига эътибор берилмасдан унинг оптимал ечими топилган бўлсин ва бу оптимал ечим $X=(x_1, x_2,..., x_i,.., x_n)$ бўлсин. Охирги симплекс жадвалдаги базис векторлар P_1, $P_2,..., P_i,..., P_m$ лардан иборат бўлсин. У ҳолда бу симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{1m+1} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{2m+1} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & x_{im+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & x_{mm+1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Агар барча x_i лар бутун сонлар бўлса, у ҳолда топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлади.

2. Фараз қилайлик, баъзи x_iлар каср сонлардан иборат бўлсин, ҳамда баъзи x_{ij}лар ҳам каср сонлардан иборат бўлсин. x_i ва x_{ij}ларнинг бутун қисмини мос равишда $[x_i]$ ва $[x_{ij}]$ билан белгилаймиз. У ҳолда бу сонларнинг каср қисмларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= x_i - [x_i] \\ q_{ij} &= x_{ij} - [x_{ij}] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Фараз қилайлик, баъзи $q_i \neq 0$ бўлсин. У ҳолда X матрицанинг $\max q_i = q_k$ $(q_i \neq 0)$ тенгликни қаноатлантирувчи k-қатори учун кесувчи тенглама тузилади. Бунинг учун энг аввало

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k \qquad (5)$$

тенгсизлик тузилади, сўнгра уни (-1) га кўпайтириб қўшимча ўзгарувчи киритилади. Натижада қуйидаги тенглама ҳосил бўлади.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \qquad (6)$$

(6) тенглама кесувчи тенглама деб аталади.

3. Кесувчи тенгламани симплекс жадвалнинг m+2 қаторига жойлаштирамиз. Бу тенгламадаги x_{n+1} ўзгарувчига мос келувчи P_{n+1} векторни «базис вектор» деб қабул қиламиз. Бу базис векторга мос келувчи $\mathbf{X}_{n+1}$ озод ҳад манфий ишорали. Шунинг учун иккиланган симплекс усулни қўллаб $\mathbf{P}_{n+1}$ вектор базисдан чиқарилади ва унинг ўрнига

$$\min_{q_{kj}<0} \left(\frac{\Delta j}{q_{kj}} \right) = \frac{\Delta l}{q_{kl}}$$

шартни қаноатлантирувчи $\boldsymbol{P}_l$ вектор киритилади ва симплекс жадвал алмаштирилади. Агар ҳосил бўлган янги симплекс жадвалдаги барча $\bar{\mathbf{X}}_l$ озод ҳадлар бутун сонли бўлса, у ҳолда топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлади. Акс ҳолда юқоридаги 2-3 пунктларда қилинган ишларни яна қайтадан такрорлаш керак. Умуман, бу ишларни масаланинг бутун сонли ечими топилгунча, ёки унинг бутун сонли ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Агар каср сонли $\bar{X}_i$ га мос келувчи қаторда барча $\bar{X}_{ij}$ лар бутун сонли бўлса, у ҳолда масала бутун сонли ечимга эга бўлмайди.

Мисол: қуйидаги чизиқли программалаш масаласининг бутун сонли ечимини топинг:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 \le 6 \\ 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 \le 3 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \qquad (8)$$

$$x_1,\ x_2\text{-бутун} \qquad (9)$$

$$Y_{min} = 8 - 3x_1 - x_2 \qquad (10)$$

Ечиш. Масаланинг (9) шартига эътибор бермай уни нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, \\ Y_{min} = 8 - 3x_1 - x_2 \end{gathered}$$

Ушбу масалани симплекс жадвалга жойлаштирамиз ҳамда ундаги номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермай уни оддий симплекс усул билан ечамиз. Ечиш жараёнининг III босқичида қуйидаги оптимал ечим топилади.

Базис векторлар	C	P_0	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4
Δj		-29/4	0	0	-11/12	-7/12

Жадвалдан кўринадики, топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлмайди. Бу ечимни бутун сонли ечимга айлантириш учун жадвалнинг I қаторига нисбатан кесувчи тенглама тузамиз. Унинг учун энг аввал қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{6}\mathbf{x}_3 - \frac{1}{6}\mathbf{x}_4 \ge \frac{1}{2}$$

Тенгсизликнинг икки томонини (-1)га кўпайтирамиз ва қўшимча номаълумни киритиб қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

Базис вектор-лар	C	P_0	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	÷	0
Δj		3/4	0	0	-11/12	-7/12	0
P_5	0	-1/2	0	0	-1/6	1/6	1

Базисдан P_5ни чиқариб ўрнига P_3ни киритамиз. Натижада симплекс жадвал алмашади ва қуйидаги кўринишга келади:

Базис вектор-лар	C	P_0	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	-3	3/2	1	0	0	1/2	0
P_3	0	3	0	0	1	-1	0
Δj		9/2	0	0	0	-1/2	
P_6	0	-1/2	0	0	0	-1/2	1

Янги симплекс жадвалнинг 2-қаторига нисбатан -3/2 кесувчи тенглама тузамиз. Унинг учун аввал

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_4 \geq \frac{1}{2}$$

тенгсизликни тузамиз ва ундан қуйидаги кесувчи тенгламани ҳосил қиламиз.

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Бу тенглама симплекс жадвалнинг 6-қаторига жойлаштирамиз.

Сўнгра базисдан P_6 векторни чиқариб P_4ни базисга киритамиз. Натижада симплекс жадвал алмашади ва қуйидаги кўринишга келади:

Базис вектор.-лар	C	P_0	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-1	0	0	1	0	0
P_1	-3	1	1	0	0	0
P_3	0	4	0	0	1	0
P_4	0	1	0	0	0	1
Δj		8-3=5	0	0	0	0

Ҳосил бўлган симплекс жадвалдаги P_0 векторнинг барча элементлари бутун сонлардан иборат. Демак бутун сонли программалаш масаласининг ечими топилган ва у қуйидагига тенг:

$$X=(1;0;4;1)$$

$$Y_{min}=5$$

Мустақил ечиш учун топшириқлар.

1-мисол. Масаланинг бутун сонли оптимал ечимини топинг.

$$2x_1-x_2+x_3\le 1,$$

$$-4x_1+2x_2-x_3\le 2,$$

$$3x_1\ +x_3\le 2,$$

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0,\ \ x_3\ge 0,$$

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\text{-бутун},$$

$$Y_{min}=x_1-x_2-3x_3$$

2-мисол. Масаланинг бутун сонли ечимини топинг.

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0,$$

$$3\mathbf{x}_1+2\mathbf{x}_2\ge 5\frac{1}{2}$$

$$-2\mathbf{x}_1+3\mathbf{x}_2\ge \frac{1}{2}$$

x_1, x_2,-бутун,

$Y_{min}=x_1+x_2$

Таянч сўз ва иборалар

Бутун сонли программалаш, тўла бутун сонли программалаш, қисман бутун сонли программалаш, Бул ўзгарувчили программалаш, кесувчи тенглама, Гомори усули.

Назорат саволлари.

1. Бутун сонли программалаш масаласи қандай қўйилади?
2. Бутун сонли программалаш масалаларининг қандай турлари мавжуд?
3. Бутун сонли программалаш масаласининг геометрик талқини қандай?
4. Қандай иқтисодий масалаларнинг математик моделлари бутун сонли программалаш масаласига мисол бўлаолади?
5. Сайёҳ ҳақидаги масаланинг математик моделини ёзинг.
6. Саноат корхоналарини оптимал жойлаштириш масаласининг математик модели қандай?
7. Тақсимот масаласининг математик моделини ёзинг.
8. Р.Гомори усулининг ғояси қандай?
9. Кесувчи тенглама нима ва у қандай тузилади?
10. Масаланинг бутун сонли ечимга эга бўлмаслик шарти қандай?
11. Бутун сонли ечимнинг оптималлик шарти қандай?

Масалалар.

I. Берилган иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузинг.

1-масала. Тикув фабрикасида 4 хил кийим тайёрлаш учун 3 хил газмол ишлатилади. Ҳар бир кийимнинг биттасини тайёрлаш учун зарур бўлган газмолнинг баҳоси ҳамда фабрикадаги газмоллар заҳираси ҳақидаги маълумотлар қуйидаги жадвалда келтирилган

Қайси кийимдан қанчадан тайёрланганда сарф қилинган газмолларнинг миқдори уларнинг заҳирасидан ошмайди ҳам корхонанинг ишлаб чиқарган кийимларининг умумий пул қиймати максимал бўлади?

Газмол артикули	1 та кийим учун сарф қилинадиган газмол миқдори				фабрикадаги газмоллар заҳираси
	1	2	3	4	
I	1	—	2	1	180
II	—	1	3	2	210
II	4	2	—	4	800
Кийимлар баҳоси минг сўм	9	6	4	7	

2-масала. Узунлиги 110 см. бўлган пўлат хипчинлардан узунликлари 45 см, 35 см ва 50 см бўлган хомаки маҳсулотлар тайёрлаш керак бўлсин. Талаб қилинган хомаки маҳсулотлар мос равишда 40, 30 ва 20 бирликни ташкил қилсин. Пўлат хипчинларни мумкин бўлган кесиш йўллари ва уларга мос келувчи миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хомаки маҳсулот узунликлари	Кесиш вариантлари					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	—	—	—
35	—	1	—	3	1	—
50	4	2	1	—	1	2
Чиқиндилар миқдори	20	30	15	2	25	10

Қанча пўлат хипчинларни қайси усул билан кесганда тайёрланган хомаки маҳсулотлар талабдагидан кам бўлмайди ва чиқиндиларнинг миқдори минимал бўлади?

II. Берилган бутун сонли программалаш масалаларини график усулда ечинг.

1. $x_1+2x_2\geq 2,$
$x_1+x_2\leq 6,$
$2x_1+x_2\leq 10,$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$
$x_1,\ x_2$-бутун,

2. $3x_1+2x_2\leq 8,$
$x_1+4x_2\leq 10,$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$
$x_1,\ x_2$-бутун,
$Y_{max}=8x_1+6x_2$

$Y_{max}=x_1-x_2$

3. $3x_1+5x_2\le 11,$
$4x_1+x_2\le 8,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$
$x_1,\ x_2$-бутун,
$Y_{max}=8x_1+6x_2$

4. $11x_1+4x_2\le 44,$
$3x_1+5x_2\le 30,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$
$x_1,\ x_2$-бутун,
$Y_{max}=3x_1+3x_2$

III. Берилган бутун сонли масалаларни Р.Гомори усули билан ечинг.

1. $4x_1+3x_2+4x_3\le 14,$
$2x_1+6x_2+x_3\le 11,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$x_1,\ x_2,\ x_3$-бутун,
$Y_{max}=2x_1+4x_2+3x_3$

2. $2x_1+2x_2+7x_3\ge 14,$
$8x_1+11x_2+9x_3\ge 12,$
$9x_1+6x_2+3x_3\ge 10,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$x_1,\ x_2,\ x_3$-бутун,
$Y_{max}=-10x_1-14x_2-21x_3$

3. $-3x_1+2x_2\le 10,$
$x_1+4x_2\le 11,$
$3x_1+3x_2+x_3\le 13,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$x_1,\ x_2,\ x_3$-бутун,
$Y_{max}=3x_1-x_2$

4. $x_1-2x_2+x_3\ge 3,$
$5x_1-4x_2+2x_3\ge 16,$
$2x_1-x_2+x_3\ge 0,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$x_1,\ x_2,\ x_3$-бутун,
$Y_{max}=2x_1-2x_2+3x_3-3x_4$

V БОБ. ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШ

1-§. Чизиқсиз программалаш масаласининг қўйилиши ва турлари.

Ушбу

$$q_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\{\leq, = , \geq\}b_i, \ i=\overline{1,m} \qquad (1)$$

муносабатларни қаноатлантирувчи ва $Z= f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни максимум (минимум)га айлантирувчи $x_1, x_2, ..., x_n$ номаълумларнинг қийматларини топиш математик программалаш масаласини ташкил этади. Бу масала шартларини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин.

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\leq,=,\geq\}b_i, \ i=1,...,m \qquad (1)$$

$$Z=f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \ (\min) \qquad (2)$$

бу ерда: $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ берилган функциялар, b_i, $i=1,...,m$ лар эса ўзгармас сонлар. (1) шартлар масаланинг чегаравий шартлари, $Z=f(x_1,x_2,...x_n)$ функция эса «мақсад функцияси» деб аталади. (1) даги ҳар бир муносабат учун $\leq$, $=$, $\geq$ белгилардан фақат биттаси ўринли бўлади ва шу билан бир қаторда турли муносабатларга турли белгилар мос бўлиши мумкин.

Айрим чизиқсиз программалаш масалаларида $x_1, x_2,..., x_n$ ўзгарувчиларнинг баъзиларига ёки ҳаммасига манфий бўлмаслик шарти қўйилган бўлади. Баъзи масалаларда эса номаълумларнинг бир қисми ёки ҳаммаси бутун бўлишлиги талаб қилинади. (1)-(2) масаладаги ҳамма $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ ва $f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциялар чизиқли бўлса, ҳамда барча ўзгарувчиларнинг номанфий бўлишлиги талаб қилинса, бу масала чизиқли программалаш масаласи бўлади.

Аксинча, агар бу функциялардан камида биттаси чизиқсиз функция бўлса, масала «чизиқсиз программалаш масаласи» дейилади. (1)-(2) масалада $m=0$ бўлса, яъни чегаравий шартлар қатнашмаса, у «шартсиз оптималлаштириш масаласи» дейилади. Бу ҳолда масала қуйидагича ёзилади:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to\max \ (\min)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n \qquad (3)$$

Бу ерда: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n ўлчовли вектор (нуқта), E_n n ўлчовли Евклид фазоси, яъни векторларни қўшиш, λ сонга кўпайтириш ва икки векторнинг скаляр кўпайтмаси амаллари киритилган n ўлчовли $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторлар (нуқталар) тўплами.

Фараз қилайлик, (1) система фақат тенгламалар системасидан иборат бўлиб, номаълумларга номанфий бўлишлик шарти қўйилмасин, ҳамда $m<n$ бўлиб, $q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ва $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялар узлуксиз ва камида иккинчи тартибли хусусий ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳолда чизиқсиз программалаш масаласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)=b_i, \ (i=1,\dots,m) \qquad (4)$$

$$Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)\rightarrow \max(\min)$$

Бундай масала «чегаравий шартлари тенгламалардан иборат бўлган шартли максимум (минимум) масаласи» дейилади. (3), (4) ва (2) кўринишдаги масалаларни дифференциал ҳисобга асосланган классик усуллар билан ечиш мумкин бўлгани учун уларни «оптималлаштиришнинг классик масалалари» дейилади.

Агар (1) системадаги ҳамма муносабатлар тенгсизликлардан иборат бўлса, ҳамда уларнинг баъзиларига, «≤», баъзиларига эса «≥» белгилар мос келса, бу тенгсизликларни осонлик билан бир хил кўринишга келтириш мумкин. Бундан ташқари

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)\rightarrow \max \text{ шартни}$$

$$-f(x_1, x_2, \dots, x_n)\rightarrow \min$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шунинг учун, умумийликни бузмасдан, шартлари тенгсизликдан иборат бўлган чизиқсиз программалаш масаласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\le b_i, \ (i=1,\dots,m) \qquad (5)$$

$$x_j\ge 0 \ (j=1,\dots,n) \qquad (6)$$

$$Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \qquad (7)$$

Номаълумларнинг номанфийлик шарти (6) қатнашмаган масалаларга бундай шартни осонлик билан киритиш мумкин.

Баъзи ҳолларда масаланинг (1) шартидаги айрим муносабатлар тенгламалардан, айримлари эса тенгсизликлардан иборат бўлиши мумкин, бундай масалаларни шартлари аралаш белгили бўлган минимум масаласи кўринишига келтириб ёзиш мумкин:

$$q_i(x_1, x_2,\dots, x_n)\le b_i, \ (i=1,\dots,m_1) \qquad (8)$$

$$q_i(x_1, x_2,..., x_n)=b_i, (i= m_1+1,...,m) \qquad (9)$$

$$Z=f(x_1, x_2,..., x_n) \rightarrow \min \qquad (10)$$

Бунда (8), (9) муносабатлар чегаравий шартлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг номанфий бўлишлик шартини ўз ичига олади.

Энди қуйидаги кўринишда берилган масалани кўрамиз:

$$q_i(X)=q_i(x_1, x_2, ..., x_n)\leq b_i, (i=1,...,m_1) \qquad (11)$$

$$X=(x_1, x_2, ..., x_n)\in G\subset E_n \qquad (12)$$

$$Z(X)=f(x_1, x_2, ..., x_n)\rightarrow \min (\max) \qquad (13)$$

Бу масала чекли ўлчовли чизиқсиз программалаш масаласининг умумий кўринишидан иборат бўлиб, $f(x_1,x_2,...,x_n)$-мақсад функцияси, $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$-чегаравий функционал, G-масаланинг аниқланиш соҳаси, G тўпламнинг нуқталари масаланинг режалари деб, (11) шартларни қаноатлантирувчи $X\in G$ нуқталар эса, масаланинг мумкин бўлган режаси деб аталади,

Чизиқсиз программалашда локал ва глобал оптимал режа тушунчаси мавжуд бўлиб, улар қуйидагича таърифланади.

Фараз қилайлик, X* нуқта (11)-(13) масаланинг мумкин бўлган режаси ва унинг кичик ε атрофидаги (ε ихтиёрий кичик мусбат сон) нуқталар тўплами $\varepsilon(X^*)\in G$ дан иборат бўлсин.

$$\text{Агар } f(X^*)\leq f(X) \ [f(X^*)\geq f(X)] \qquad (14)$$

тенгсизлик ихтиёрий $X\in\varepsilon(X^*)$ учун ўринли бўлса, X* режа (14) мақсад функцияга локал минимум (максимум) қиймат берувчи оптимал режа деб аталади.

Агар $f(X^*)\leq f(X)$ $[f(X^*)\geq f(X)]$ тенгсизлик ихтиёрий $X\in G$ учун ўринли бўлса, X* режа (14) мақсад функцияга глобал (абсолют) минимум (максимум) - қиймат берувчи глобал оптимал режа ёки глобал оптимал ечим деб аталади.

Юқоридаги (5)-(7) ва (8)-(10) масалаларни ечиш учун чизиқли программалашдаги симплекс усулга ўхшаган универсал усул кашф қилинмаган.

Бу масалалар $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ лар ихтиёрий чизиқсиз функциялар бўлган ҳолларда жуда кам ўрганилган. Хозирги давр—гача энг яхши ўрганилган чизиқсиз программалаш масалалари $q_i(x_1, x_2, ...,x_n)$ ва $f(x_1,x_2, ..., x_n)$ функциялар қаварик (ботиқ) бўлган масалалардир.

Бундай масалалар «қавариқ программалаш масаласи» деб аталади. Қавариқ программалаш масалаларининг асосий хусусиятлари шундан иборатки, уларнинг ҳар қандай локал оптимал ечими глобал ечимдан иборат бўлади.

Иқтисодий амалиётда учрайдиган кўп масалаларда $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциялар чизиқли бўлиб, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мақсад функцияси квадратик формада, яъни

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_i$$

формада бўлади. Бундай масалалар квадратик программалаш масалалари деб аталади. Чегаравий шартлари ёки мақсад функцияси, ёки уларнинг ҳар иккиси n та функцияларнинг йиғиндисидан иборат, яъни:

$$q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=q_1(x_1)+q_2(x_2)+\ldots+q_n(x_n) \quad (15) \text{ ва}$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n) \quad (16)$$

бўлган масалалар «сепарабел программалаш масалалари» деб аталади. Квадратик ва сепарабел программалаш масалаларини ечиш учун симплекс усулга асосланган тақрибий усуллар яратилган.

Чизиқсиз программалашга доир бўлган ишлаб чиқаришни режалаш-тириш ва ресурсларни бошқаришда учрайдиган муҳим масалалардан бири стохастик программалаш масалаларидир. Бу масалаларда айрим параметрлар ноаниқ ёки тасодифий миқдорлардан иборат бўлади.

Чегаравий шартлари ҳақида тўлиқ маълумот бўлмаган оптималлаштириш масалалари «*стохастик программалаш масалалари*» деб аталади.

Параметрлари ўзгарувчан миқдор бўлиб, улар вақтнинг функцияси деб қаралган масалалар «*динамик программалаш масаласи*» дейилади.

2-§. Чизиқсиз программалаш масаласининг геометрик талқини.

Чизиқли программалаш масалаларининг хусусиятларидан бизга маълумки, биринчидан, унинг мумкин бўлган режалар тўплами, яъни масаланинг чегаравий шартларини ва номаълумларнинг номанфийлик шартларини қаноатлантирувчи $X= (x_1,x_2, \ldots,x_n)$ нуқталар тўплами қаварик бўлади. Иккинчидан, $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ мақсад функцияни берилган қийматга эриштирадиган X=($x_1,x_2, ...,x_n$) нуқталар тўплами n ўлчовли фазонинг гипертекислигини ташкил этади. Бундан ташқари, мақсад функциянинг турли қийматларига мос келувчи гипертекисликлар ўзаро параллел бўлади. Учинчидан, мақсад функциянинг мумкин бўлган режалар тўпламидаги локал минимуми (максимуми) глобал (абсолют) минимумдан (максимумдан) иборат бўлади. Тўртинчидан, агар мақсад функция чекли оптимал қийматга эга бўлса, мумкин бўлган режалар тўпламини ифодаловчи кўпбурчакнинг камида бир учи оптимал ечимни беради. Мумкин бўлган режалар кўпбурчагининг учлари (четки нуқталари) таянч ечим деб аталади. Таянч ечимдаги ҳамма номаълумлар (таянч ўзгарувчилар) қатъий мусбат бўлган ҳолдаги ечим хосмас таянч ечим ва агар улардан камида биттаси нолга тенг бўлса, хос таянч ечим дейилади.

Ихтиёрий таянч ечимдан бошлаб бошқа таянч ечимга биринкетин ўтиб бориб, чекли сондаги қадамдан кейин функцияга экстремум қиймат берувчи таянч ечим топилади.

Базис ечим оптимал ечим бўлиши учун мақсад функциянинг бу ечимдаги қиймати бошқа базис ечимлардаги қийматларидан кам (кўп) бўлмаслиги керак.

Чизиқсиз программалаш масалаларида эса, юқоридаги чизиқли программалашга доир хусусиятларнинг айримлари (ёки ҳаммаси) бажарилмайди. Масалан, чизиқсиз программалаш масаласининг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмаслиги ҳам мумкин. Буни чегаравий шартлари:

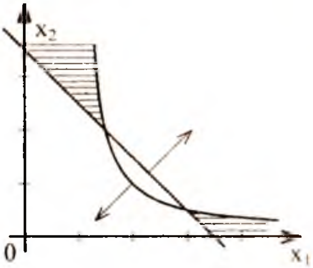
$$\begin{cases} (x_1-1)x_2 \le 1 \\ x_1+x_2 \ge 3,5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

кўринишда бўлган масалаларда кўриш мумкин.

Масаланинг режалар тўплами иккита алоҳида қисмларга ажралган бўлиб, уларнинг бирортаси ҳам қавариқ эмас (I-шакл) Агар мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ бўлмаса, мақсад функция чизиқли бўлган ҳолда ҳам масаланинг глобал оптимал ечимидан фарқ қилувчи локал ечимлари мавжуд бўлади.

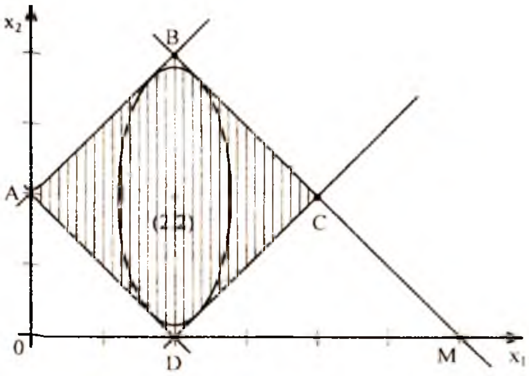
Масалан, чегаравий шартлари чизиқли ва мақсад функцияси чизиқсиз бўлган қуйидаги масалани кўрамиз:

$$x_1+x_2\geq 2$$
$$x_1-x_2\leq -2$$
$$x_1+x_2\geq 6$$
$$x_1-x_2\leq 2$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$
$$Z = f(x_1,\ x_2) =$$
$$=25(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \to \max$$



1-шакл

Бу масаланинг чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар туплами қаварик ABCD тўртбурчакдан иборат бўлади (2-шакл).



2-шакл

Масаладаги мақсад функция маркази (2,2) нуқтадан иборат бўлган эллипслар оиласидан ташкил топган.

Бу масаланинг оптимал ечими мумкин бўлган режалар тўпламининг C учидан иборат бўлади. Лекин, умумий ҳолда, чизиқсиз программалаш масаласининг мақсад функциясига оптимал қиймат берувчи нуқта (таянч ечим) мумкин бўлган режалар тўпламининг четки нуқтасида эмас, балки ички нуқтасидан ҳам, чегаравий нуқтасидан ҳам иборат бўлиши мумкин.

Умумий ҳолда (8)-(10) кўринишда берилган чизиқсиз программалаш масаласини кўрамиз ва бу масаланинг геометрик талқини билан танишамиз. Масаладаги (8), (9) шартлар Евклид фазосида мумкин бўлган режалар тўпламини беради. Бу тўпламнинг нуқталари орасидан мақсад функцияга минимум қиймат берувчи нуқтани (оптимал нуқтани) топиш керак. Бунинг учун мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳли $f(x_1,x_2, ...,x_n)=Q$ гиперсирти билан кесилган нуқтасини топиш керак. Бу нуқта берилган (8)-(10) масаланинг оптимал ечимини беради.

(8)-(10) масаланинг оптимал ечимини геометрик талқиндан фойдаланиб топиш учун қуйидаги ишларни амалга ошириш керак.

1. Масаланинг (8), (9) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини, яъни мумкин бўлган режалар тўпламини ясаш керак.

2. $f(x_1,x_2, ...,x_n)=Q$ гиперсиртни ясаш керак.

3. Q нинг қийматини ўзгартириб бориб, энг паст сатҳли гиперсирт топилади ёки функциянинг қуйидан чегараланмаган эканлиги аниқланади.

4. Мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳли гиперсирт билан кесилган нуқтаси аниқланади ва f(x) функциянинг бу нуқтадаги қиймати топилади.

Қуйидаги масалани геометрик интерпретациядан фойдаланиб ечамиз.

Мисол:

$$x_1+x_2\leq 4$$

$$x_1+x_2\geq 5$$

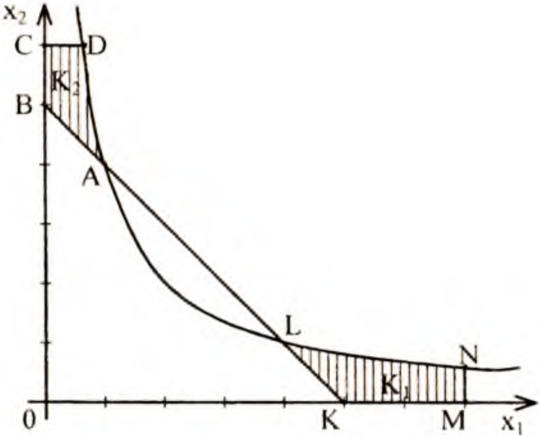
$$x_1\leq 7$$

$$x_2\geq 6$$

$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0$$

$$Z=x_1^2+x_2^2 \quad \max(\min)$$

Ечими: Бу масаланинг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмайди, аксинча, иккита айрим K_1 ва K_2 қисмлардан иборат бўлади (3-шакл). Мақсад функция ўзининг минимал қиймати Z=17га A(1,4) ва L(4,1) нуқталарда эришади. D(2/3.6) ва N(7,4/7) нуқталарда эса функция локал максимум қийматларга эришади. Z(D)=328/9; Z(N)=2417/49.



3-шакл

Локал максимум қийматларни таққослаш Z_k функция N нуқтада глобал максимумга эришишини кўрсатади. D ва N нуқтанинг координаталари ва улардаги Z фукциянинг қиймати қуйидагича топилади: $D(x^*_1, x^*_2)$ нуқта $x_2=6$ тўғри чизиқда ва $x_2=4/x_1$ эгри чизиқда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \dfrac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases} \qquad Z^* = x_1^{*2} + x_1^{*2}$$

$$Z^* = 328/9 = Z(D)$$

Худди шунингдек, N нуқта $x_1=7$ тўғри чизиқ ва $x_2=4/x_1$ эгри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлгани учун унинг x^0_1 x^0_2 координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{x_1^0} \\ Z^0 = x_1^{02} + x_2^{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{7} \\ Z^0 = \dfrac{2417}{49} \end{matrix}$$

Мустақил ечиш учун топшириқ.

График усулдан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз программалаш масаласини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \quad \min(\max)$$

3-§. Шартсиз оптималлаштириш ҳақида айрим тушунчалар.

Шартсиз оптималлаштириш масаласи.

Шартсиз экстремум масаласининг ечимини топиш талаб қилинган бўлсин, яъни: $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

функциянинг максимумини (минимумини)

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$$

нуқталарда қидириш мумкин бўлсин. Агар f(X) функция биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлса, унинг экстремуми қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1, n} \tag{1}$$

Демак, берилган f(X) функция X_0 нуқтада экстремумга эга бўлиши учун бу нуқта (1) системанинг ечими бўлиши керак:

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1, n} \tag{2}$$

(2) тенгликлар X_0 нуқтада f(X) функция локал максимум ёки минимумга эга бўлганда, шу нуқтада ундан n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар бўйича олинган хусусий хосилалар 0 га тенг бўлиш кераклигини кўрсатади. Лекин бундан (2) шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай нуқта ҳам функцияга локал максимум ёки минимум қиймат беради деган хулоса келиб чиқмайди.

(1) системасининг ечимларини *стационар* нуқталар деб атаймиз. Берилган f(X) функция экстремумга эришадиган

нуқта стационар нуқта бўлади, лекин ҳар қандай стационар нуқтада ҳам функция экстремумга эришавермайди.

Демак, (1) шарт функция экстремумининг мавжудлиги учун зарурий шарт, лекин у етарли эмас. Қуйидаги теорема стационар нуқтанинг биринчи ва иккинчи тартибли хусусий хосилалари узлуксиз бўлган n ўзгарувчили узлуксиз $f(X)=f(x_1, x_2,..., x_n)$ функциянинг экстремал нуқтаси бўлиши учун етарли шартни кўрсатади. Теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема: X_0 стационар нуқта экстремал нуқта бўлиши учун шу нуқтада қуйидаги Гессе матрицаси деб аталувчи

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}_0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_n} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{x}_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \end{pmatrix}$$

матрица мусбат аниқланган (бу холда X_0-минимум нуқта), ёки манфий аниқланган (бу холда X_0-максимум нуқта) бўлиши етарлидир.

Демак, X_0 стационар нуқта минимум нуқта бўлиши учун шу нуқтадаги Гессе матрицаси мусбат аниқланган бўлиши етарли экан. Худди шундай, йўл билан X_0 стационар нуқтанинг максимум нуқта бўлиши учун $H[X_0]$ нинг манфий аниқланган бўлиши етарли эканлиги кўрсатиш мумкин.

1-мисол. Берилган функцияга экстремал қиймат берувчи нуқталар топилсин.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Ечими: функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шарти:

$$\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2},\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3}\right)'=0$$

Бундан

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_1}=0, \qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_2}=0$$

Бу тенгламадан тузилган системанинг ечими $X_0=(1/2,2/3,4/3)$ стационар нуқта бўлади.

Етарлилик шартининг бажарилишини текшириш учун Гессе матрицасини X_0 нуқтада тузамиз:

$$H[X_0]=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг бош минорлари мос равишда -2, 4, -6. Маълумки, агар матрицанинг бош минорларидан тузилган сонлар кетма-кетлигида ишора алмашинувчи бўлса, берилган матрица манфий аниқланган бўлади. Демак, X_0 нуқтада $f(x_1, x_2, x_3)$ функция максимумга эришади. Масалан, юқорида кўрилган мисолдаги $f(x_1, x_2, x_3)$ни $-f(x_1, x_2, x_3)$га алмаштириб, $X_0=(1/2, 2/3, 4/3)$ нуқтани минимум нуқта эканлигини кўрсатиш мумкин.

Агар $H[X_0]$ ноаниқ матрица бўлса, X_0 нуқта эгар нуқта бўлади, яъни бу нуқтада функция экстремумга эришмайди.

2-мисол.

$$f(x_1,x_2)=8x_1x_2+x_2^2$$

функциянинг экстремуми топилсин.

Экстремум мавжудлигининг зарурий шартига кўра:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_1}=0, \qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_2}=0$$

Бундан $8x_2=0$, $8x_1+2x_2=0$.

Бу тенгламалардан тузилган системани ечиб, $X_0=(0,0)$ стационар нуқтани ҳосил қиламиз.

Энди стационар нуқтанинг экстремал нуқта бўлишлик шартини текшириш учун Гессе матрицасини тузамиз:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг бош минорлари: $M_{11}=8>0$, $M_{22}=0$. Матрица детерменанти эса $-64<0$. Демак, Гессе матрицасининг ишораси аниқланмаган. Бу холда $X_0=(0,0)$ нуқта эгар нуқта бўлади.

Юқорида қурилган теоремадаги экстремум мавжудлигининг етарлик шартлари бир аргументли $f(X)$ функция учун қуйидагича бўлади.

Фараз қилайлик, X_0 стационар нуқта бўлсин, у ҳолда $f''(X_0)<0$ бўлса, X_0 нуқтада функция максимумга, $f''(X_0)>0$ бўлганда эса минимумга эришади. Агар бир аргументли $f(x)$ функция учун X_0 стационар нуқтада $f''(X_0)=0$ бўлса, юқори тартибли хосилаларнинг X_0 нуқтадаги қийматларини текшириш керак. Бу ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема: X_0 стационар нуқтада $f'(X_0)=0$, $f''(X_0)=0, \ldots, f^{(n-1)}(X_0)=0$ ва $f^{(n)}(X_0)\neq 0$ бўлса, бу нуқта

а) n тоқ сон бўлганда эгилиш нуқта;

б) n жуфт сон бўлганда экстремал нуқта бўлади ҳамда $f^{(n)}(X_0)>0$ да функция минимумга, $f^{(n)}(X_0)<0$ да максимумга эришади.

3-мисол. 1) $f(x)=x^4$ функциянинг экстремуми топилсин.

$f''(x)=4x^3=0$, $x=0$ стационар нуқта бўлади.

$$f''(0)=f''(0)=f'''(0)=0;\ f^{(IV)}(0)\neq 0.$$

$n=4$ жуфт сон. Демак, $x=0$ нуқта функция учун экстремал нуқта бўлади.

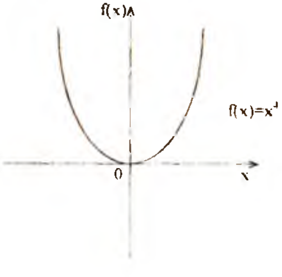
$f^{(4)}(0)=24>0$ бўлгани учун $x=0$ нуқтада берилган функция минимумга эришади. (4-шакл)

2) $g(x)=x^3$

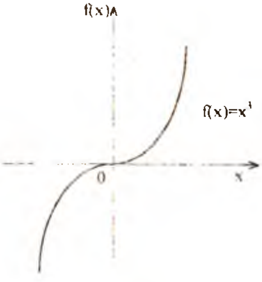
$g'(x)=3x^2=0$, $x=0$ стационар нуқта,

$g'(0)=g''(0)=0$, $g'''(0)=6$№0

$n=3$ тоқ сон. Демак, $x=0$ нуқта функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади. (5-шакл).



4-шакл



5-шакл

4-§. Шартлари тенгликлардан иборат бўлган шартли экстремум масаласи. Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули

Фараз қилайлик,

$Z=f(x_1, x_2,...x_n)$ max(min) $g_i(x_1, x_2,...x_n)= b_i$, $(i=1,...,m)$ масалани ечиш талаб қилинсин, яъни $g_i(x_1, x_2,...x_n)=b_i$, $(i=1,...,m)$ тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ва $Z=f(x_1, x_2,...x_n)$ функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи $X=(x_1, x_2,...x_n)$ нуқтани топиш керак бўлсин.

$g_i(x_1, x_2,...x_n)$ ва $f(x_1, x_2,...x_n)$ функциялар ва уларнинг ҳамма $x_1, x_2,..., x_n$ номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалари узлуксиз деб фараз қилайлик. Номаълумларга номанфийлик шарти қўйилмаганда масалани Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули билан ечиш мумкин. Буни қуйидаги хусусий (n=2) масала мисолда кўрамиз:

$$g(x_1,x_2)=b$$
$$Z=f(x_1, x_2) \ \max(\min)$$

Бу масала учун

$$F(x,\lambda)=f(x)+\lambda(b-g(x))$$

функцияни тузамиз. Бу функциядан x_1, x_2 ва λ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_j} = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_j} - \lambda \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_j} = 0, \mathbf{j} = 1,2 \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{X}) = 0 \end{cases}$$

Бу ерда: «F-Лагранж функцияси, λ - Лагранж кўпайтувчилари» деб аталади.

Энди умумий ҳолни, яъни номаълумлар сони n та ва тенгламалар сони m(m<n) та бўлган масалани кўрамиз. Бу масала учун Лагранж функцияси:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},\Lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \sum_{i-1}^{m} \lambda_i (\mathbf{b} - \mathbf{g}_i(\mathbf{X}))$$

кўринишида бўлади. Бу ерда: $X=(x_1, x_2,...x_n)$, $L=(l_1, l_2,...l_m)$. Локал экстримум мавжудлигининг зарурий шарти

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан иборат. Агар f(X) функция X_0 нуқтада экстремумга эга бўлса, шундай $\Lambda_0=(\lambda_1^0,...\lambda_m^0)$ вектор мавжуд бўладики, унинг учун $(x_1^0,...x_n^0, \lambda_1^0,...\lambda_m^0)$ нуқта юқорида келтирилган системанинг ечими бўлади.

Мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз программалаш масаласини ечинг:

$$x_1+x_2=1$$
$$Z=x_1x_2\ (\max)$$

Ечиш: Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1+x_2-1)$$

Бу функциядан x_1,x_2 ва λ лар бўйича хусусий хосилаларни олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Системани ечиш натижасида берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлаймиз: $\lambda^*=-1/2$, $x^*_1=x^*_2=1/2$; $Z=1/4$

Мустақил ечиш учун топшириқ

Масалани Лагранж усули билан ечинг:

$$x^2_1+x^2_2=1$$
$$Z=x_1+x_2\ (\max)$$

5-§. Қаварик программалаш

Қаварик программалаш оптималлаштириш масаласининг бир бўлими бўлиб, у қаварик функцияни қаварик тўпламда минималлаштириш (максималлаштириш) назариясини ўргатади.

Бошқача қилиб айтганда, «қавариқ программалаш масаласи» деганда

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad i = \overline{1, m} \tag{1}$$

$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1, n}) \tag{2}$$

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min \tag{3}$$

кўринишдаги масала назарда тутилади, бунда $g_i(x)$, $f(x)$ функциялар $G \subset E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ функциядир. Агар $f(x)$, $g_i(x)$ функциялар G да аниқланган юқорига қавариқ функциялар бўлса, у ҳолда қавариқ программалаш масаласи қуйидаги кўринишда берилади:

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \quad i = \overline{1, m} \tag{4}$$

$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1, n}) \tag{5}$$

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{6}$$

(1)-(3) ва (4)-(6) масалаларни ечиш усуллари билан танишишдан олдин қавариқ ва ботиқ функциялар ҳақидаги айрим тушунчалар билан танишамиз.

Қавариқ ва ботиқ функциялар ва уларнинг экстремуми

1-таъриф. Агар $f(x)$ функция $G \subset E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ нуқталар ва $0 \le \alpha \le 1$ сон учун

$$f(ax_2 + (1-a)x_1) \le af(x_2) + (1-a)f(x_1) \tag{7}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция «ботиқ (пастга қавариқ) функция» дейилади. Бошқага айтганда, $Z=f(x)$ гипертекислик пастга қавариқ бўлиши учун унинг ихтиёрий иккита (x_1, Z_1) ва (x_2, Z_2) нуқталарини туташтирувчи кесма гипертекисликнинг сиртида ёки ундан юқорида ётиши керак.

2-таъриф. Агар $f(x)$ функция $G \subset E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ нуқталар ва $0 \le \alpha \le 1$ сон учун

$$f(ax_2 + (1-a)x_1) \ge af(x_2) + (1-a)f(x_1) \tag{8}$$

тенглик ўринли бўлса, $f(x)$ функция «*юқорига қавариқ функция*» деб аталади.

Агар $Z=f(x)$ гипертекислик юқорига қавариқ бўлса, унинг ихтиёрий икки (x_1, Z_1) ва (x_2, Z_2) нуқталарини туташтирувчи кесма шу гипертекисликнинг сиртида ётади, ёки унинг пастидан ўтади.

3-таъриф. Агар ихтиёрий иккита $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ нуқталар ва $0 \le \alpha \le 1$ сон учун

$$f(ax_2+(1-a)x_1) < af(x_2)+(1-a)f(x_1) \tag{9}$$

ёки

$$f(ax_2+(1-a)x_1) > af(x_2)+(1-a)f(x_1) \tag{10}$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, $G \subset E_n$ қаварик тўпламда аниқланган f(x) функция қатъий пастга қаварик ёки қатъий юқорига қаварик функция дейилади.

Агар f(x) функция $G \subset E_n$ да қатъий юқорига қаварик бўлса, у ҳолда - f(x) функция қатъий пастга қаварик бўлади ва аксинча.

Агар f(x) функция G қаварик тўпламда аниқланган пастга қаварик функция бўлса, ихтиёрий сондаги x_1, x_2,..., $x_n \in G$, нуқталар учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади

$$\left.\begin{array}{l} f(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \le \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \\ \lambda_j \ge 0 \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Худди шунингдек, агар f(x) функция G қаварик тўпламда аниқланган юқорига қаварик функция бўлса, ихтиёрий сондаги x_1, x_2,..., $x_n \in G$ нуқталар учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади

$$\left.\begin{array}{l} f(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \ge \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \\ \lambda_j \ge 0 \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Қаварик функция қуйидаги хоссаларга эга

1. G қаварик тўпламда берилган f(x) функция пастга қаварик бўлса, ихтиёрий ҳақиқий b сон учун $f(x) \le b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами ҳам пастга қаварик бўлади.

2. G қаварик тўпламда берилган f(x) функция юқорига қаварик бўлса, b ихтиёрий сон бўлганда $f(x) \ge b$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами ҳам юқорига қаварик бўлади.

3. Иккита G_1 ва G_2 қавариқ тўпламнинг кесишмаси ҳам қавариқ тўплам бўлганлиги сабабли юқоридаги 1-2 хоссалардан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин. G қавариқ тўпламда аниқланган $g_i(x)$ $(i=1,..., m)$ функциялар пастга (юқорига) қавариқ бўлиб, b_i $(i=1,...,m)$ ихтиёрий сонлар бўлса,

$$g_i(x) \le b_i \quad (g_i(x) \ge b_i) \quad (i=1,..., m)$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами пастга (юқорига) қавариқ тўплам бўлади.

4. G қавариқ тўпламда аниқланган $g_i(x)$ $(i=1,..., m)$ функциялар пастга (юқорига) қавариқ бўлса, уларнинг номанфий чизиқли комбинациясидан иборат бўлган

$$g(x)=\Sigma\lambda_i g_i(x),\ \lambda_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$$

функция ҳам пастга (юқорига) қавариқ бўлади.

5. G қавариқ тўпламда аниқланган f(x) функциялар пастга (юқорига) қавариқ бўлиши учун у ўз ичига олган номаълумларнинг ихтиёрий бири бўйича, қолганларининг фиксирланган қийматларида, пастга (юқорига) қавариқ бўлишлиги зарур ва етарлидир.

6. Агар $f_1(x), f_2(x),...,f_n(x)$ функциялар қавариқ G тўпламда аниқланган қавариқ функциялар бўлса,

$$f(x) = \max_{1\le i\le m} f_i(x)$$

функция ҳам қавариқ бўлади.

4-таъриф. f(x) қавариқ функциянинг $G\subset E_n$ тўпламдаги глобал максимуми (минимуми) деб ҳар қандай $x \in G$ нуқтада

$$f(x^0)\ge f(x) \quad (f(x^0)\le f(x)) \qquad (14)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $x^0 \in G$ нуқтага айтилади.

Агар (14) тенгсизлик $x^0\in\varepsilon(x^0)$ нуқта учун ўринли бўлса, x^0 нуқта f(x) функцияга локал максимум (минимум) қиймат берувчи нуқта бўлади, бу ерда:

$$\varepsilon(x^0)=\{x,\ |x-x^0|<\varepsilon\}$$

қавариқ функциянинг экстремумига доир қуйидаги теоремалар ўринлидир.

1-теорема. Агар f(x) функция G қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ функция бўлса, унинг ихтиёрий локал минимуми глобал минимум бўлади.

2-теорема. Агар f(x) функция G қавариқ тўпламда пастга (юқорига) қавариқ бўлиб, бу тўпламга тегишли иккита x_1, $x_2 \in G$ нуқталарда глобал экстремумга эришса, шу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам глобал экстремумга эришади.

3-теорема. Агар f(x) функция G қавариқ тўпламда аниқланган қатъий пастга (юқорига) қавариқ функция бўлса, у ўзининг глобал минимумига (максимумига) шу тўпламнинг фақат битта нуқтасида эришади.

4-теорема. Агар f(x) функция G қавариқ тўпламда аниқланган пастга (юқорига) қавариқ ва дифференциалланувчи функция бўлиб, ихтиёрий $x^0 \in G$ нуқтада $\nabla f(x^0)=0$ бўлса, f(x) функция x^0 нуқтада глобал минимумга (максимумга) эришади.

6-§. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси. Кун-Таккер шартлари.

(1)-(3) ҳамда (4)-(6) масалалар учун Лагранж функциясини тузамиз

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (15)$$

5-таъриф. Агар $X^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада $f(X^0,\Lambda)$ функция минимумга эришиб, $\Lambda^0=(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0)$ нуқтада $F(X,\Lambda^0)$ функция максимумга эришса (X^0,Λ^0) нуқта $F(X, \Lambda)$ «*Лагранж функциясининг эгар нуқтаси*» деб аталади.

Агар (X^0, Λ^0) нуқта (1)-(3) масала учун тузилган Лагранж функцияси $F(X, \Lambda)$нинг эгар нуқтаси бўлса, X^0 нинг кичик ε атрофидаги

$$(\varepsilon(x^0)=\{x, \ |x-x^0|<\varepsilon\})$$

ихтиёрий $x_i \geq 0$ учун Λ^0 нинг ε атрофидаги

$$(\varepsilon(\Lambda^0)=\{\Lambda, \ |\Lambda-\Lambda^0|<\varepsilon\})$$

ихтиёрий $\Lambda \geq 0$ учун

$$F(X^0, \Lambda) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X, \Lambda^0) \quad (16)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар $F(X, \Lambda)$ Лагранж функцияси (4)-(6) масала учун тузилган бўлса, (16) муносабат қуйидаги кўринишда бўлади.

$$F(X, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda) \quad (17)$$

(16), (17) муносабатлар F(X,Λ) Лагранж функцияси эгар нуқтасининг мавжудлиги ҳақида, f(x) ва $g_i(x)$ (i=1,..., m) функциялар дифференциалланувчи бўлмаган хол учун зарурий ва етарлилик шартларидан иборат.

f(x) ва $g_i(x)$ (i=1,..., m) функциялар дифференциалланувчи бўлган ҳолда Лагранж функцияси F(X, Λ) нинг эгар нуқтаси мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартлари (1)-(3) масала учун қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} \geq 0 \tag{18}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \geq 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \leq 0 \tag{20}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \lambda_i^0 \geq 0. \tag{21}$$

Мақсад функциянинг максимуми қидириладиган (4)-(6) масала учун эса бу шартлар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} \leq 0 \tag{22}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \geq 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \geq 0 \tag{24}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0 \tag{25}$$

Осонлик билан кўриш мумкинки, агар (18)-(21) ва (22)-(25) муносабатлар бажарилса (16) ва (17) муносабатлар ўз-ўзидан бажарилади. Шунинг учун (18)-(21) ва (22)-(25) муносабатларни Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжудлиги ҳақида Кун-Таккер шартлари деб тушунамиз. Бунда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

5-теорема. F(X,Λ) функция эгар нуқтага эга бўлишлиги учун мақсад функциянинг минимуми қидириладиган (1)-(3) масала учун (18)-(21) шартларнинг, мақсад функциянинг максимуми қидириладиган (4)-(6) масала учун (22)-(25) шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Кун-Таккер теоремаси.

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1,n}),$$

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$$

масалани кўрамиз. Агар камида битта x∈G нуқтада ($g_i(x)>b_i$) (i=1,..., m) тенгсизлик бажарилса (бунга Слейтер шарти дейилади), Кун-Таккернинг қуйидаги теоремаси ўринлидир.

Теорема. $X^0 \ge 0$ нуқта (4)-(6) масаланинг оптимал ечими бўлиши учун бу нуқтада (22)-(25) муносабатларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

1-Мисол. График усул билан қуйидаги

$$2x_1 + x_2 \ge 2,$$

$$2x_1 + x_2 \le 8,$$

$$2x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$$

масалани ечинг ва Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширинг.

Ечиш. Масалани график усулда ечиб, унинг оптимал ечими $X^0=(0{,}8;0{,}4)$ ва $f(X^0)=0{,}8$ эканлигини кўриш мумкин.

Энди шундай $\Lambda^0 \ge 0$ мавжуд бўлиб, (X^0, Λ^0) нуқтада Кун-Таккер шартларининг бажарилишини кўрсатамиз.

Бунинг учун энг аввал берилган (1)-(3) масала учун Лагранж функциясини тузамиз.

X^0 нуқтада масаланинг 2-чегаравий шарти қатъий тенгсизликка айланади. Демак, масала учун Слейтер шарти бажарилади. Бу ҳолда масала нормал бўлиб, $\Lambda^0 \neq 0$ бўлади.

Лагранж функциясидан x_j (j=1, 2) ва λ_i (i=1, 2, 3) лар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2, \qquad \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_2} = 8 \cdot 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - 2x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 > 0$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0$$

шартга кўра λ_2 ва λ_3 лар 0 га тенг бўлади

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0$$

бўлганлиги сабабли λ_i^0 0 га тенг бўлмаслиги ҳам мумкин:

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0$$

тенгликда $x_j^0 > 0$, демак,

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1{,}2)$$

бўлади, яъни

$$\left.\begin{aligned} -2 \cdot 0{,}8 + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -2 \cdot 0{,}4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ бўлганлиги учун $\lambda_1=0{,}8$ ва $\Lambda^0=(0{,}8;\ 0;\ 0)$ бўлади. Демак, $(X^0,\ \Lambda^0)=\ (0{,}8;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 0{,}0)$. нуқтада Кун-Таккер шартлари бажарилаяпти. Демак у эгар нуқта бўлади.

2-мисол. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб $X^0 = (1;0)$ нуқта қуйидаги чизиқсиз программалаш масаласининг ечими эканлигини кўрсатинг:

$$4x_1 + 5x_2 \le 8$$

$$2x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$Z = f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2$$

Ечиш. $X^0=(1;\ 0)$ нуқтада масаланинг чегаравий шартлари қатъий тенгсизликка айланади; демак, Слейтер шарти бажарилади. Бу ҳолда $\lambda_0=1$ деб қабул қилиш мумкин. Шунинг учун Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_1^2 + \lambda_1(4x_1 + 5x_2 - 8) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - 4)$$

Энди Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширамиз.

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial x_1} = (2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)_{x^0} \ge 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial x_2} = (6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)_{x^0} \ge 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_1} = (4x_1 + 5x_2 - 8)_{x^0} = -4 < 0$$

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_2} = (2x_1 + x_2 - 4)_{x^0} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_1}\cdot x_1^0=0$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_2}\cdot x_2^0=0 \quad x_1,x_2\geq 0$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_1}\cdot \lambda_1^0=0 \quad \Rightarrow(-4)\cdot 0\Rightarrow \lambda_1^0=0$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_2}\cdot \lambda_2^0=0 \quad \Rightarrow(-2)\cdot \lambda_2^0\Rightarrow \lambda_2^0=0$$

Шундай қилиб, $(X^0, \Lambda^0)=(1; 0; 0; 0)$ нуқта Кун-Таккернинг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Демак, у Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлади ҳамда $X^0=(1,0)$ нуқта берилган масаланинг ечими бўлади.

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Қуйидаги масалани график усулда ечинг ва ечим Кун-Таккер шартларини қаноатлантиришини текширинг.

$$2x_1+5x_2\geq 20,$$
$$x_1-2x_2=5,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$$
$$Z=f(x_1,x_2)=3x_1\cdot x_2-x^2_2.$$

7-§. Қаварик программалаш масаласини ечиш учун градиент усуллар. Тезлик билан кўтарилиш усули

Фараз қилайлик, чизиқсиз программалаш масаласи қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq b_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{1}$$

$$x_j\geq 0\,(j=\overline{1,n}), \tag{2}$$

$$Z_{\max}=f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{3}$$

бу ерда: (1)-(3) шартларни қаноатлантирувчи G тўплам қаварик тўплам ва $Z=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ ботиқ функция бўлган ҳолни кўрамиз. Бундан ташқари $f(X)$ ва $g_i=g_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

функциялар узлуксиз, дифференциалланувчи бўлиб, G тўпламнинг ички нуқталари мавжуд деб фараз қиламиз.

Масалани ечиш ихтиёрий $X^0 \in G$ нуқтадан бошланади. Итератив жараён натижасида X^k нуқтадан X^{k+1} нуқтага ўтиш учун X^k дан бошланувчи шундай s_k мумкин бўлган йўналишни аниқлаймизки, ихтиёрий кичик $\lambda_k > 0$ сон учун $X^k + \lambda_k s_k$ нур G тўпламга тегишли бўлсин. Бунда λ_k сон X^k нуқтадан s_k йўналиш бўйича силжиш масофасидан иборат. Уни аниқлаш учун турли усуллар мавжуд. Масалан λ_k ни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\lambda_k = \min(\lambda', \lambda'')$$

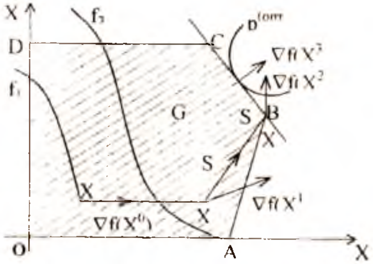
бу ерда: λ' – $X^k + \lambda_k s_k$ нур билан G тўпламнинг кесишган нуқтасига мос келувчи λ_k нинг қиймати. λ'' функциянинг $X_к + \lambda_к S_к$ нурдаги максимумга мос келувчи λ_k нинг қиймати. Агар $\lambda_k \to \infty$ бўлса, берилган масаланинг мақсад функцияси юқоридан чегараланмаган бўлади. Акс ҳолда, навбатдаги, яъни $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ нуқтага ўтилади.

Мавжуд градиент усуллар бир-биридан s_k йўналишни ва λ_k параметрни танлаш усуллари билан фарқ қилади. Масалан, оптимал ечим томон тезлик билан кўтарилиш усулида $X^k \in G$ нуқтадан $X^{k+1} \in G$ га s_k йўналиш бўйича силжиш натижасида ўтилганда $Z = f(X)$ функция қиймати $\Delta Z = \lambda_k s_k$ миқдорга ўзгаради (ортади), s_k йўналишни шундай танлаш керакки, бу йўналишдаги ΔZ нинг қиймати максимум бўлсин. Маълумки, агар $X^k \in G$ тўпламнинг ички нуқтаси бўлса, бу нуқтадан бошланувчи ва берилган f(X) функциянинг максимал ўсишини таъминловчи s_k йўналиш $\nabla f(X^k)$ градиент йўналишдан иборат бўлади, яъни $s_k = \nabla f(X^k)$, $X^k \in G$ (ички нуқта). Демак, бу ҳолда X^k нуқтадан $\nabla f(X^k)$ градиент бўйлаб λ_k масофага силжиш натижасида f(X) функцияга ушбу йўналишдаги энг катта қиймат берувчи $X^{k+1} \in G$ нуқтага ўтилади:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$$

X^k нуқта G тўпламнинг чегаравий нуқтаси бўлиб, $\nabla f(X^k)$ градиент шу тўпламдан ташқарига йўналган ҳолда навбатдаги $X^{k+1} \in G$ нуқтага $\nabla f(X^k)$ градиент бўйлаб йўналиш натижасида эришиш мумкин эмас, чунки бу йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда f(X) функциянинг максимал ўсишини ҳамда $X^k + \lambda_k s_k$ нурнинг G тўпламга тегишли бўлишини таъминловчи s_k йўналишни аниқлаш керак бўлади.

Агар топилган $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ нуқтада f(X) функция максимумга эришса, оптимал қидириш жараёни тўхтатилади, акс ҳолда X^{k+1} нуқтага бошланғич нуқта деб қараб, юқорида қайд қилинган жараён яна қайтадан такрорланади. Умуман, бу жараён масаланинг оптимал ечими X^* топилгунча ёки мақсад функциянинг чекли максимумга эга эмаслиги аниқлангунча такрорланади.



6-шакл.

Қавариқ программалаш масаласини градиент усул билан ечиш жараёнини қуйидаги 6-шакл ёрдамида кўрсатамиз. Бунда чегаравий шартлари чизиқли бўлиб, мақсад функция ботиқ бўлган масала тасвирланган. Шаклда G тўплам қавариқ тўпламдан (OABCD кўпбурчакдан) иборат ва $X^o \in G$ ички нуқта. Бу нуқтадан $\nabla f(X^o)$ градиент бўйлаб йўналиб X^1 нуқтага ўтамиз. Навбатдаги нуқтага $\nabla f(X^1)$ градиент йўналиш бўйича ўтиш мумкин эмас, чунки G тўпламдан ташқарига чиқиб кетиш мумкин. Шунинг учун шундай йўналишни аниқлаш керакки, у $X^1 + l_1 s_1$ нурни G тўпламдан ташқарига чиқиб кетмаслигини ва f(X) функциянинг максимал ўсишини таъминласин. Бу йўналиш $\nabla f(X^1)$ градиент билан энг кичик бурчак ташкил қилувчи s_1 векторни аниқлайди.

Аналитик нуқтаи назарда бундай вектор $\nabla f(X^1)$ ва s_1 векторларнинг скаляр кўпайтмаси максимум бўлишлик шартидан топилади:

$$\max[\nabla f(X^1), s_1]>0$$

Шаклда s_1 вектор G тўпламнинг (AB) кесма билан устма-уст тушади. Кейинги қадамларда чегаравий тўғри чизиқ AB бўйлаб f(X) функция энг катта қийматга эришгунча силжиб борилади.

Шаклдан кўринадики, B нуқтада (уни X^2 билан белгилаймиз) f(X) функция s_1 йўналишдаги ҳар қандай нуқталарга нисбатан энг катта қийматга эришади. Бу нуқтадан навбатдаги нуқтага ўтиш учун $\nabla f(X^2)$ градиент бўйлаб йўналиш мумкин эмас, чунки бу ҳолда G тўпламдан четга чиқиб кетиш мумкин. Шунинг учун

$$\max[\nabla f(X^2), s_2]>0$$

шартни қаноатлантирувчи s_2 йўналиш топилади. Бу йўналиш G тўпламнинг чегараси BC билан устма-уст тушади. Шаклдан кўринадики, X^3 нуқтада f(X) функция s_2 йўналишдаги энг катта қийматга эришади. Бундан ташқари X^3 нуқта f(X) функцияга G тўпламда энг катта (оптимал) қиймат берувчи нуқтадир, чунки бу нуқтадаги $\nabla f(X^3)$ градиент шу нуқтадан чиқувчи ва G тўпламда ётувчи ихтиёрий вектор билан ўтмас бурчак, чегаравий чизиқ BC билан устма-уст тушган s_2 вектор билан эса 90° ли бурчак ташкил қилади. Шунинг учун

$$(\nabla f(X^3),\ s_2)=0 \qquad (4)$$

тенглик бажарилади. Бу тенглик X^3 нуқтада f(X) функциянинг максимумга эришганлигини кўрсатади. Шундай қилиб, X^3 нуқтада f(X) функция оптимал қийматга эришади, X^3 нуқтанинг координаталари эса берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлайди.

Энди қавариқ программалаш масаласи (1)-(3) ни градиент усул билан ечиш жараёнини аналитик равишда тасвирлаймиз. Фараз қилайлик, оптимал ечимни қидириш жараёни G тўпламнинг X^0 нуқтасидан бошлансин. У ҳолда $X^*\in G$ оптимал ечимга, юқорида кўрсатилгандек, градиент бўйлаб йўналиб бориб эришиш мумкин. Лекин бунда

$$X^{k+1}=X^k+\lambda_k\nabla f(X^k)$$

нурни аниқловчи λ_k ни танлаш шу билан қийинлашадики, ундаги $X^{k+1}\in G$ бўлиб $f(X^{k+1})$ миқдор $\nabla f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^k)$ йўналишдаги энг катта қийматидан иборат бўлиши керак. Демак, X^{k+1} нуқтанинг координаталари (1)-(2) шартларни қаноатлантириши керак, яъни

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i\left(\mathbf{X}^k+\lambda_k\nabla\mathbf{f}(\mathbf{X}^k)\right)\le \mathbf{b}_i, & \mathbf{i}=\overline{1,\mathbf{m}} \\ \mathbf{X}^k+\lambda_k\nabla\mathbf{f}(\mathbf{X}^k)\ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Бу системани ечиш натижасида λ_k нинг шундай мумкин бўлган қийматлар оралиги $[\lambda'_k,\ \lambda''_k]$ аниқланадики, ундаги ҳар бир $\lambda_k\in[\lambda'_k,\ \lambda''_k]$ учун $X^{k+1}\in G$ бўлади. Топилган оралиқдаги λ_k лар орасида қўйилган шартларни қаноатлантирувчи λ^*_k ни топиш учун қуйидаги тенгламани ечамиз:

$$(\nabla f(X^k+\lambda_k\nabla f(X^k)),\ \nabla f(X^k))=0 \qquad (6)$$

Бу тенгламанинг $\lambda^*_k \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ ечимида $X^{k+1} \in G$ ҳамда $f(X^{k+1})$ миқдор $f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^k)$ йўналишдаги энг катта қийматидан иборат бўлади.

Агар $\lambda^*_k \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ бўлса, $\lambda^*_k = \lambda''_k$ деб қабул қиламиз. Бундай λ^*_k га мос келувчи X^{k+1} нуқта G тўпламнинг чегарасида ётади.

Агар оптимал ечимни қидиришни G тўпламнинг чегаравий X^k нуқтасидан бошласак ёки, агар қидириш траекториясининг навбатдаги нуқтаси G тўпламнинг чегарасида ётса, оптимал қидиришни давом эттириш учун s_k йўналишни аниқлаш керакки, у биринчидан, ушбу нуқтадаги $\nabla f(X^k)$ градиент йўналишидан фарқли бўлиши керак, иккинчидан, бу йўналиш бўйича λ_k масофага силжиш натижасида эришилган X^{k+1} нуқта G тўпламга тегишли бўлиши керак. Ана шу шартларни каноатлаштирувчи s_k йўналиш қуйидаги математик программалаш масаласини ечиш оркали топилади:

$$g_i(s_k) \leq 0, \; i \in J \qquad (7)$$

$$T_k = (\nabla f(X^k), s_k) \rightarrow \max, \qquad (8)$$

бу ерда, I қуйидаги шартлар ўринли бўлган i индекслар тўплами:

$$g_i(X^k) = b_i, \; i = 1, \dots, m \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} &|s_k| = 1, \quad s_k = (s_{k_1}, \dots, s_{k_n}), \\ &|s_k| = \sqrt{s_{k_1}^2 + s_{k_2}^2 + \dots + s_{k_n}^2} \end{aligned} \qquad (10)$$

(7)-(10) масалани ечиш натижасида $\nabla f(X^k)$ вектор билан энг кичик ўткир бурчак ташкил қилувчи s_k вектор аниқланади. Бунда (9) шарт X^k нуқтанинг чегаравий нуқта эканлигини кўрсатади. (7) шарт эса, X^k нуқтадан бошланадиган s_k йўналиш G тўпламнинг ичкарисида ёки унинг чегараси бўйлаб бажарилиши кераклигини кўрсатади. (10) шарт нормаллаштириш шарти бўлиб, у s_k векторнинг узунлигига қўйилган чегарадан иборат. Бу шарт қўйилмаганда (8) функцияни чексиз равишда орттириш мумкин бўларди. Адабиётда турли нормаллаштириш шартлари мавжуд. Уларнинг турларига қараб (7)-(10) масала чизиқли ёки чизиқсиз программалаш масаласи бўлиши мумкин. s_k вектор топилганч, X^{k+1} нуқтани аниқловчи $\lambda^*_k \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ ни топамиз. Бунинг учун

$$(\nabla f(X^{k+1}), s_k)=0 \qquad (11)$$

шартдан фойдаланамиз.

Оптимал қидириш жараёнини

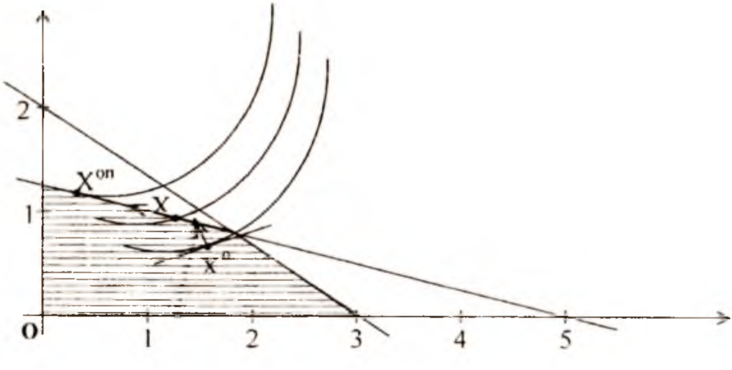
$$\max T_k=(\nabla f(X^k), s_k)=0, \qquad (12)$$

шартни қаноатлантирувчи X* нуқта топилгунча давом эттирамиз.

Мисол. Берилган масалани градиент усули билан ечинг.

$$2x_1+3x_2\leq 6,$$
$$x_1+4x_2\leq 5,$$
$$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,$$
$$Z\max=f(X)=x_1+2x_2-0{,}5x^2_1+0{,}5x^2_2-5.$$

Ечиш. Масаланинг режаларидан ташкил топган G тўплам OABC тўртбурчакдан иборат (7-шакл).



7-шакл

$X^0=(1{,}5;\ 0{,}5)\in G$ нуқтани оламиз. Бу нуқта OABC тўртбурчакнинг ички нуқтаси. Оптимал қидиришни X^0 нуқтадан бошлаймиз. X^0 дан X^1 нуқтага $\nabla f(X^0)$ градиент йўналиши бўйлаб ўтиш мумкин.

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}^0)=\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}^0)}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}^0)}{\partial \mathbf{x}_2}\right)=(-0{,}5;1{,}5).$$

X^1 нуқтанинг координаталарини x_{11}, x_{12} билан белгилаймиз:

$$X^1=(x_{11},\ x_{12})$$

$$X^1=(x_{11},\ x_{12})$$
$$X^1=X^0+\lambda_0\nabla f(X^0),$$
$$X^1=(1,5;\ 0,5)+\lambda_0(-0,5;\ 1,5),$$
$$x_{11}=1,5-0,5\lambda_0,\ x_{12}=0,5+1,5\lambda_0$$

Энди λ_0 нинг мумкин бўлган қийматлар оралиғини аниқлаймиз. Бунинг учун қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} 2(1,5-0,5\lambda_o)+3(0,5+1,5\lambda_o)\le 6, \\ 1,5-0,5\lambda_o+4(0,5+1,5\lambda_o)\le 5, \\ 1,5-0,5\lambda_o\ge 0, \\ 0,5+1,5\lambda_o\ge 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Бу системани ечиб,

$$[\lambda'_0,\ \lambda''_0]=[-0,3333;\ 0,2727]$$

эканини аниқлаймиз.

Энди

$$X^1=X^0+\lambda^*_0\nabla f(X^0),\ \ X^1\in G$$

шартларни қаноатлантирувчи $\lambda_0\in[\lambda'_0,\ \lambda''_0]$ ни топамиз. Бунинг учун

$$(\nabla f(X^1),\ \nabla f(X^0))=0$$

тенгламани ечамиз:

$$\nabla f(X^1)=(-0,5+0,5\lambda_0,\ 1,5-1,5\lambda_0),$$
$$\nabla f(X^0)=(-0,5;\ 1,5).$$

Демак,

$$(\nabla f(X^1),\ \nabla f(X^0))=((-0,5+0,5\lambda_0;\ 1,5-1,5\lambda_0),(-0,5;\ 1,5))=0.$$

Бундан

$$0,25-0,25\lambda^*_0+2,25-2,25\lambda^*_0=0$$

ёки

$$2,5\lambda^*_0=2,5,$$
$$\lambda^*_0=1.$$

Лекин $\lambda_0\notin[-0,3333;\ 0,2727]$.

Шунинг учун $\lambda^*_0=0,2727$.

λ^*_0 нинг топилган қийматида навбатдаги X^1 нуқта қуйидагича аниқланади:

$$X^1=X^0+\lambda^*_0\nabla f(X^0)=(1,5;\ 0,5)+0,2727(-0,5;\ 1,5)=(1,3636;\ 0,9091).$$

X^1 нутада f(X) фукнция

$$f(X^1)=-3,1621>f(X^0)=-3,75$$

қийматга эришади.

f(X) фукнциянинг X^1 нуқтадаги гардиентини топамиз:

$$\nabla f(X^1)=(-0,3636;\ 1,0909)'.$$

X^1 нуқтадан навбатдаги X^2 нуқтага ўтиш учун бу градиент бўйлаб силжиш мумкин эмас, чунки ABCD тўпламдан ташқарига чиқиб кетиш мумкин. Энг қулай s_1 йўналишни аниқлаш учун юқоридаги (7)-(10) масалани тузамиз. Бу масалани тузишда X^1 нуқта ABCD тўртбурчакнинг чегаравий нуқтаси эканлигини ва у $x_1+4x_2=5$ тўғри чизиқда ётишини ва демак, X^1 нуқтада берилган масаланинг иккинчи шарти (i=2) тенгликка айланишини назарга оламиз. Биз кўраётган ҳолда бу масала қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$T_1=(\nabla f(X^1),s_1)=$$

$$((-0,3636;1,0909)(s_{11};s_{12}))=0,3636s_{11}+1,0909s_{12}\to\max, \quad (14)$$

$$g_i(s_1)=(1;4)(s_{11};s_{12})=s_{11}+4s_{12}=0, \quad (15)$$

$$|s_1|=\sqrt{s_{11}^2+s_{12}^2}=1, \quad (16)$$

яъни

$$\begin{gathered} T_1=-0,3636s_{11}+1,0909s_{12}\to\max, \\ s_{11}+4s_{12}=0, \\ s^2_{11}+s^2_{12}=1, \end{gathered} \quad (17)$$

(17) масалани ечиб топамиз:

$$s_1=(s_{11};s_{12})=(-0,9700;\ 0,2425);\ T_{\max}=1,1464$$

Демак, $s_1=(-0,97;\ 0,2425)$ йўналиш бўйича кўтарилиб бориб

$$X^2=(x_{21};x_{22})$$

нуқтага эришиш мумкин.

$$x^2=x^1+\lambda_1 S_1=(1.3636;\ 0.9091)+\lambda_1(-0.9700;\ 0.2425)$$

$$\text{Бундан: } \begin{aligned} x_{21}&=1.3636-0.9700\lambda_1 \\ x_{22}&=0.9091-0.2425\lambda_1 \end{aligned} \quad (18)$$

λ_1 нинг аниқлаш оролиғини топамиз. Бунинг учун (19) системадан фойдаланамиз.

$$\left.\begin{aligned} &2(1,3636-0,97\lambda_1)+3(0,9091+0,2425\lambda_1)\le 6 \\ &1,3636-0,97\lambda_1+4(0,9091+0,2425\lambda_1)\le 5 \\ &1,3636-0,97\lambda_1\ge 0 \\ &0,9091+0,2425\lambda_1\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Системани ечиб, $\lambda_1 \in [0,927;\ 5,621]$ эканини аниқлаймиз. λ^*_1 ни топиш учун $(\nabla f(X^2),\ s_1)=0$ тенгламани ечамиз. Бунда

$$\nabla f(X^2)=(-0,3636+0,970\lambda_1;\ 1,0909-0,2425\lambda_1),$$

$$s_1=(-0,97;\ 0,2425)$$

Бундан, $(-0.3636+0.97\lambda_1;\ 1.0909-0.2425\lambda)$ x

$$x(0.97;\ 0.2425)=0.\ \lambda_1=0,6172.$$

$$\left.\begin{aligned} x_{21} &= 0,7647 \\ x_{22} &= 1,0588 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^2 = (0,7647;1,0589).$$

Лекин юқорида аниқлаганимизга кўра $\lambda_1 \in [-0,927;\ 5,621]$ булиши керак. Шунинг учун

$$\lambda^*_1=\lambda_1=0,6172$$

(17) дан

Бу X^2 нуқтадаги $f(x)$ функциянинг қиймати

$$f(X^2)=-2,9708 > f(X^1)=-3,1621.$$

X^2 нуқтадаги градиент:

$$\nabla f(X^2)=(0,2351;\ 0,9412)$$

(7) шаклдан кўринадики, X^2 нуқтада $f(x)$ функция энг катта қийматга эришади. Аналитик нуқтаи назардан буни кўрсатиш учун X^2 нуқтадан чиқувчи ва $\nabla f(X^2)$ градиент билан энг кичик ўткир бурчак ташкил қилувчи s_2 йўналишни топамиз.

Бунинг учун қуйидаги масалани ечамиз:

$$T_2=(\nabla f(X^2),s_2)=((0,2351;0,9412)(s_{21};s_{22}))=0,2351s_{21}+0,9412s_{22}\to \max,$$

$$s_{21}+4s_{22}=0,$$

Натижада:

$$\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2}=1,$$

$$\left.\begin{aligned} s_{21} &= -0.97 \\ s_{22} &= 0,2425 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_2 = (-0,97;0,2425).$$

Бу s_2 йўналиш учун

$$T_2=(\nabla f(X^2),s_2)=0$$

шарт бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$T_2=(0,2353;\ 0,9412)(-0,97;\ 0,2425))=-$$

$$-0,228241+0,228241=0$$

Демак, (7) га асосан **X^2** нуқта оптимал нуқта бўлади. Шундай қилиб, масаланинг оптимал ечими:

$$X^2=(0,7647;\ 1,0588)$$

$$Z_{max}=f(X^2)=-2,9708$$

Мустақил ечиш учун топшириқ

Қуйидаги қавариқ программалаш масаласининг бошланғич ечими берилган ҳолда градиент усул билан оптимал ечими топилсин.

$$x_1+2x_2+3x_3\leq 15\ 3x_1+x_2+x_3\leq 12$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$$

$$X^o=(1;\ 2;\ 3)$$

$$Z_{min}=x_1+2x^2_1+2x_2+4x_3$$

Таянч сўз ва иборалар

Чизиқсиз программалаш, локал ечим, глобал ечим, қавариқ программалаш, квадратик программалаш, шартсиз оптималлаштириш, стационар нуқта, Гессе матрицаси, Лагранж функцияси, Лагранж кўпайтувчилари, эгар нуқта, қавариқ функция, ботиқ функция, қатъий қавариқ функция, қавариқ функциянинг локал ва глобал максимуми, Кун-Таккер шартлари, Кун-Таккер теоремаси; Лагранж функциясининг эгар нуқтаси, градиент, градиент усул, тезлик билан кўтарилиш усули, мумкин бўлган йўналиш, оптимал қидириш жараёни.

Назорат саволлари

1. Чизиқсиз программалаш масаласи умумий ҳолда қандай қўйилади?
2. Чизиқсиз программалаш масаласининг қандай турларини биласиз?
3. Шартсиз оптималлаштириш масаласи қандай?
4. Локал ва глобал оптимал режа нима?
5. Чизиқсиз программалаш масаласининг геометрик талқини нима?
6. Стационар нуқта нима?
7. Гессе матрицаси нима ва унинг экстремал нуқтани аниқлашдаги роли қандай?

8. Эгар нуқта нима?

9. Қавариқ функцияни (пастга ва юқорига қавариқ функцияларни) таърифланг.

10. Қатъий пастга (юқорига) қавариқ функцияни таърифланг.

11. Қавариқ фукнция қандай хоссаларга эга?

12.«Қавариқ функциянинг локал ва глобал максимуми (минимуми)» деганда нимани тушунасиз?

13. Қавариқ функция қачон ягона глобал минимумга (максимумга) эришади?

14. Қавариқ программалаш масаласи учун Лагранж функцияси қандай кўринишга эга бўлади?

15. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси нима ва у қандай аниқланади?

16. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартлари қандай?

17. Кун-Таккер теоремаси қандай?

18. Слейтер шарти нима?

19. Градиент (тезлик билан кўтарилиш) усулининг ғояси қандай?

20. Мумкин бўлган йўналиш нима?

Масалалар

I. График усулдан фойдаланиб қуйидаги чизиқсиз программалаш масалаларини ечинг:

1) $x_1+2x_2\geq 2$
$x_1+x_2\leq 6$
$2x_1+x_2\leq 10$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$
$Z=x_1\cdot x_2\to \max.$

2) $x_1+x_2\leq 7$
$2x_1-x_2\leq 8$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$
$Z=4(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\to \min(\max),$

II. Қуйидаги функцияларга максимум ва минимум қиймат берувчи нуқталар топилсин:

1) $f(x)=x^3+x^4;$

2) $f(x_1,\ x_2)=4x^2_1+x^2_2-4x_1-2x_2;$

3) $f(x_1,\ x_2)=x^2_1+x^2_2-6x_1-4x_2+13;$

III. Қуйидаги масалаларни Лагранж усули билан ечинг:

1) $x_1+x_2=2$
$x_2+x_3=2$
$Z=x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3\to \max.$

2) $x^2_1+x^2_2+x^2_3=1$

$Z=x_1-2x_1+2x_3 \to \max$.

IV. Берилган масалаларни график усулда ечинг ва Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширинг:

1) $x_1+2x_2 \le 5$,

$0{,}3x_1+x_2 \le 5$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$,

$Z=f(x_1,\ x_2)=5x^2_1-3x_1-4x^2_2 \to \min$;

2) $3x_1+2x_2 \le 9$

$0{,}5x_1+x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$,

$Z=f(x_1,\ x_2)=x_1-x_2 \to \max$.

V. Қуйидаги қавариқ программалаш масалаларининг бошланғич ечими берилган ҳолда градиент усул билан оптимал ечимини топинг:

1) $x_1+2x_2 \le 16$,

$4x_1-4x_2 \le 0$,

$Z=f(x_1,\ x_2)=x^2_1+4x^2_2 \to \min$;

2) $x_1+2x_2 \le 16$,

$5x_1+2x_2 \le 40$,

$Z=f(x_1,\ x_2)=10x_1+16x_2-x^2_1-x^2_2 \to \max$.

VI БОБ. ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШ

1-§. Динамик программалаш ҳақида тушунча. Оптималлик принципи

Чизиқли ва чизиқсиз проғраммалаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ эмас деб қаралади, шунинг учун масаланинг оптимал ечими режалаштиришнинг фақат бир даври учун топилади. Бундай масалалар *бир босқичли масалалар* номи билан аталади.

Динамик программалаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ деб қаралади ҳамда бутун жараённниг оптимал ривожини таъминловчи бир қатор (кетма-кет, ҳар бир даври учун) оптимал ечимлар топилади. Динамик программалаш масалалари *кўп босқичли* ёки *кўп қадамли* деб аталади.

Динамик программалаш — вақтга боғлиқ ва кўп босқичли бошқарилувчи иқтисодий жараёнларни оптимал режалаштириш усулларини ўрганувчи математик программалашнинг бир бўлимидир.

Агар иқтисодий жараённинг кечишига таъсир кўрсатиш мумкин бўлса, бундай жараён *бошқарилувчи* деб аталади. Жараённинг кечишига таъсир этиш учун қабул қилинувчи қарорлар (ечимлар) тўпламига *бошқариш* деб аталади. Иқтисодий жараёнларда бошқариш режалаштиришнинг ҳар бир даврида воситаларни тақсимлаш, маблағ ажратиш, директив хужжатлар қабул қилиш ва шу кабилар билан ифодаланиши мумкин. Масалан, ихтиёрий корхонада ишлаб чиқариш — бошқарилувчи жараёндир, чунки у ишлаб чиқариш воситаларининг таркиби, хом ашё таъминоти, молиявий маблағлар миқдори ва ҳоказо билан аниқланади. Режалаштириш давридаги ҳар бир йил бошида хом ашё билан таъминлаш, ишлаб чиқариш жихозларини алмаштириш, қўшимча маблағлар миқдори ҳақида қарорлар қабул қилинади. Бундай қарорлар тўплами бошқаришдан иборатдир. Бир қарашда, энг кўп миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш учун корхонага мумкин бўлган воситаларнинг ҳаммасини бериш ва ишлаб чиқариш жиҳозларидан (станокларидан, техникадан ва ҳоказолардан) тўла фойдаланиш зарурдек туюлади. Лекин, бу жиҳозларни тезда эскиришига (ишдан чиқишга) ва келгусида маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажмининг камайишига олиб келиши мумкин. Демак, корхонанинг фаолиятида номаъқул оқибатлардан холи бўлган холда эскирган жиҳозларни алмаштириш ёки ўрнини тўлдириш чоралари белгиланиши лозим бўлади. Бу эса дастлабки даврда маҳсулот ишлаб чиқариш камайса ҳам, кейинги даврларда корхонанинг бутун ишлаб чиқариш фаолиятини кучайишига олиб келиши мумкин. Шундай қилиб, юқоридаги иқтисодий жараён, ҳар бир даврда унинг ривожланишига таъсир этувчи, бир қанча босқичлардан иборат деб қаралиши мумкин.

Кўп босқичли иқтисодий жараёнларни режалаштириш учун, ҳар бир оралиқ босқичда алоҳида қарор қабул қилишда, бутун жараённинг туб мақсади кўзланади. Бутун жараённинг ечими ўзаро боғланган ечимлар кетма-кетлигидан иборат бўлади. Ўзаро боғланган бундай ечимлар кетма-кетлиги *стратегия* деб аталади. Олдиндан танланган мезонга нисбатан энг яхши натижани таъминловчи стратегия *оптимал стретагия* деб аталади. Бошқача айтганда оптимал стратегия кўп босқичли иқтисодий жараённинг оптимал ривожланишини таъминловчи стратегиядир.

Динамик программалаш кўп босқичли тузилишга эга бўлган ёки бундай тузулишга келтириладиган масалаларнинг оптимал ечимини топиш учун ишлатиладиган математик воситадир.

Кўп иқтисодий жараёнлар ўз ўзидан босқичларга бўлинадиган бўлади. Масалан 5 йиллик, 1 йиллик режаларни тузишда ҳар бир босқич сифатида 1 йил, квартал, декадаларни кўрсатиш мумкин. Лекин баъзи масалалар вақтга боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, энг қисқа йўл билан кўзланган маррага (жойга) бориш масаласи вақтга боғлиқ эмас. Лекин бу масалани кўп босқичли масалага айлантириб, уни динамик программалаш усули билан ечиш мумкин.

Кўп босқичли иқтисодий масалаларни ечиш учун уларни ягона математик моделини ёки бўлмаса, ҳар бир босқичга мос келувчи статик моделлар системасини тузиб сўнгра уни динамик программалаш усуллари билан ечиш керак.

Шундай қилиб, кўп босқичли жараён сифатида ифодаланувчи математик программалаш масалаларини ечиш динамик программалашнинг предметини ташкил этади.

Кўп босқичли жараён деганда вақтга боғлиқ равишда ривожланувчи ва ўз тарақиётида бир неча босқичларга бўлинувчи жараённи тушуниш керак.

Динамик программалаш қуйидаги хусусиятларга эга:

1) Динамик программалаш кўп босқичли жараённинг бирдан-бир ягона ечимини эмас, балки ҳар бир босқичга мос келувчи ва туб манфаатни кўзловчи ечимлар кетма-кетлигини топишга ёрдам беради;

2) динамик программалаш ёрдами билан ечилаётган кўп босқичли масаланинг маълум бир босқичи учун топилган ечими ундан олдинги босқичларда топилган ечимга боғлиқ бўлмайди. Унда фақат шу босқични ифодаловчи фактлар назарга олинади;

3) динамик программалаш ёрдами билан кўп босқичли масалани ечиш жараёнининг ҳар бир босқичида туб мақсадни кўзловчи ечимни аниқлаш керак, яъни ечимлар орасида провард мақсадга эришишга максимал ҳисса қўшувчи ечимни топиш керак.

Демак, маълум бир босқичда топилган оптимал режа фақат шу қадам нуқтаи назаридан эмас, балки бутун жараённинг туб (провард) мақсади нуқтаи назаридан оптимал режа бўлиши керак. *Бундай принцип «динамик программалашнинг оптималлик принципи»* деб аталади.

Оптималлик принципига амал қилиш ҳар қадамда қабул қилинган ечимни келгусида қандай оқибатларга олиб келишини назарга олиб бориш демакдир. Бундан ташқари оптималлик принципини яна қуйидагича талқин қилиш мумкин.

Ҳар бир босқичдан аввал системанинг ҳолати қандай бўлишидан қатъи назар шу босқичдаги оптимал ютуқ билан ундан кейинги босқичлардаги оптимал ютуқларнинг йиғиндисини максималлаштирувчи бошқаришни танлаш керак.

Демак, бошқаришнинг оптимал стратегиясини топиш учун энг аввал n-қадамдаги оптимал стратегияни топиш керак, кейин n ва n-1-қадамлардаги оптимал стратегияни ва ҳоказо, барча қадамлардаги оптимал стратегияни топиш керак.

Бу принципга асосан динамик программалаш масаласини охирги n-қадамдаги оптимал стратегияни топишдан бошлаш керак. Бунинг учун ундан олдинги қадамдаги ечим ҳақида айрим тахминлар қилинади ва бу асосда W мезонни максималлаштирувчи U^{0}_{n} бошқариш танланади. Бундай бошқариш *шартли бошқариш* деб аталади.

Демак, оптималлик принципи ҳар қадамда ундан олдинги қадамнинг мумкин бўлган ихтиёрий бир натижаси учун шартли оптимал бошқаришни топишни талаб қилади.

2-§. Динамик программалаш усуллари билан ечиладиган иқтисодий масалалар.

1.Саноат бирлашмасини оптимал режалаштириш масаласи.

Фараз қилайлик, n та корхонани ўз ичига олувчи саноат бирлашмасининг T йиллик ишлаб чиқариш режасини тузиш талаб қилинсин. Режалаштирилаётган T даврнинг бошида бирлашма учун K_0 миқдорда маблағ ажратилган бўлсин. Бу маблағ корхоналараро тақсимланади. Корхоналар ажратилган маблағни тўла ёки қисман ишлатади ва маълум миқдорда даромад олади. Кейинги босқичларда маблағлар корхоналараро қайта тақсимланиши мумкин. Шундай қилиб, қуйидаги масала ҳосил бўлади: корхоналараро капитал маблағни шундай тақсимлаш ва қайта тақсимлаш керакки, натижада бирлашманинг T йил давомида олган даромадларининг йиғиндиси максимал бўлсин.

Ҳар йилнинг бошида бирлашмадаги ҳар бир корхонага ажратиладиган хом ашё, капитал маблағ ва янгиланиши керак бўлган ускуналарнинг сони ҳақида ечим қабул қилинади. Бу ечимлар тўплами *бошқариш* деб аталади. Демак, t-қадамдаги бошқариш

$$U^{t}=(U^{t}_{1},\ U^{t}_{2},...,U^{t}_{n})$$

вектор орқали ифодаланади, бу ерда U^{t}_{j} (j=1,...,n) j корхона учун t қадамнинг бошида ажратилган хом ашё, капитал маблағ ва ҳоказоларнинг миқдорини кўрсатувчи вектор.

Бутун бирлашманинг T давр ичида бошқаришни

$$U=(U^{1}, U^{2},...,U^{T})$$

вектор орқали ифодалаш мумкин. Бундан ташқари бирлашмадаги ҳар бир j-корхонанинг ҳолатини кўрсатувчи X_j векторни киритамиз.

$$X_j=(X^{1}_{j},\ X^{2}_{j},...,\ X^{T}_{j}) \qquad (j=1,...,n)$$

Бу ерда: X^{t}_{j} t (j=1,...,T) қадамнинг бошидаги j-корхонанинг моддий-ашёвий ва молиявий ахвол даражасини кўрсатувчи вектор бўлиб, унинг компоненталари корхонадаги меҳнат ресурслари, асосий фондлар, молиявий ахвол даражасини кўрсатади, яъни

$$X^t_j=(X^t_{j1},\ X^t_{j2},\dots,\ X^t_{jl})$$

Демак, юқоридагилардан хулоса қилиб айтиш мумкинки, бошқариш вектори бирлашмадаги корхоналар системасининг t қадам бошидаги холатини кўрсатувчи вектордир, яъни

$$U^t=U^t(X^{t-1}).$$

Системанинг бошлангич ҳолати X_0 берилган деб фараз қиламиз. Мақсад фукнция сифатида бирлашманинг Т давр ичида оладиган даромадлари йиғиндисини ифодаловчи

$$\mathbf{Z}=\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}^t\rightarrow \max$$

функцияни киритамиз. Ҳар бир t қадамнинг бошида системанинг X^t ҳолат даражасига ва U^t бошқариш векторига маълум бир чегараловчи шартлар қўйилади. Бу шартлар бирлашмасини G билан белгилаймиз ва уни *мумкин бўлган бошқаришлар тўплами* деб атаймиз.

Шундай қилиб, қуйидаги динамик программалаш масаласига эга бўламиз:

$$U^t\in G \tag{1}$$

$$Z_{\max}=\sum_{t=1}^{T}Z^t \tag{2}$$

Ҳосил бўлган (1)-(2) модел ишлаб чиқаришнинг динамик модели деб аталади. Бу моделга асосан ҳар бир t қадамдаги U^t бошқаришни шундай аниқлаш керакки, натижада системанинг режалаштирилаётган давр ичида эришган даромадлари йиғиндиси максимал бўлсин.

2. Маҳсулот ишлаб чиқиш ва уни сақлашни режалаштиришнинг динамик модели.

Вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчан талабни қондиришга қаратилган ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини қурамиз. Режалаштирилаётган даврнинг узунлиги Т бўлсин. Бу даврнинг ҳар бир t-қадамида (t=1,...,T) маҳсулотга бўлган талаб V(t) маълум деб фараз қиламиз. Худди шунингдек, t қадамдаги ишлаб чиқариш режасини X(t) билан белгилаймиз. Т давр давомида корхонадаги маҳсулотлар заҳираси камайиб ёки ортиб бориши мумкин. Фараз қилайлик, бошланғич (t=0) қадамда корхонадаги маҳсулот заҳираси Z(0) бўлсин. У ҳолда X(t)>V(t) бўлганда t-қадамдаги маҳсулот заҳираси қуйидагича аниқланади:

$$Z(t)=X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0$$

Агар t қадамда ишлаб чиқарилган махсулот талабдан кам бўлса, яъни

$$X(t)<V(t)$$

бўлса, у ҳолда t-қадамнинг бошида корхонада мавжуд бўлган маҳсулот заҳираси V(t)−X(t) га камаяди, яъни

$$Z(t)=Z(t-1)-V(t)+X(t)$$

бўлади.

Ихтиёрий қадамдаги маҳсулот заҳираси нолдан кичик эмас деб фараз қиламиз ҳамда t=0 бошланғич қадам билан t-қадам орасидаги маҳсулотга бўлган умумий талабни $\overline{V}(t)$ билан, умумий ишлаб чиқариш ҳажмини $\overline{X}(t)$ билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\overline{V}(t)=\int_0^t V(t)dt$$

$$\overline{X}(t)=\int_0^t X(t)dt$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, маҳсулотни бир бирлигини сақлаш учун сарф қилинган ҳаражат С бирлик ва ишлаб чиқариш ҳаражатлари функцияси K(t) бўлсин. Ишлаб чиқариш ҳаражатлари функцияси K(t) ишлаб чиқарилган маҳсулотлар миқдори X(t) га боғлиқ бўлади, яъни K(t)=f(X(t)). Ишлаб чиқаришни шундай режалаштириш керакки, натижада маҳсулот ишлаб чиқариш ва сақлаш усун сарф қилинган ҳаражатлар минимал бўлсин, яъни

$$Y=\int_0^T f(X(t))dt+c\int_0^T (X(t)-V(t)+Z(0))dt\rightarrow \min \qquad (3)$$

Мақсад функция икки қисмдан иборат бўлиб, унинг биринчи қисми маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган ҳаражатларни, иккинчи қисми эса маҳсулотларни сақлаш учун сарф қилинган ҳаражатларни кўрсатади.

Бундан ташқари масаладаги номаълумлар қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак;

$$Z(0)\geq 0 \tag{4}$$

$$X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0 \tag{5}$$

$$X(T)-V(T)=Z(T) \tag{6}$$

Бунда (4) шарт режалаштирилаётган даврнинг бошидаги маҳсулот заҳираси манфий эмаслигини кўрсатади. (5) шарт ихтиёрий t босқичдаги маҳсулот заҳирасининг манфий эмаслигини кўрсатади. (6) шарт режалаштирилаётган даврнинг охирида корхонада ортиб қолган маҳсулот миқдори Z(T) га тенг эканлигини кўрсатади.

Ҳосил бўлган (3)-(6) модел маҳсулот ишлаб чиқариш ва сақлашни режалаштиришнинг динамик модели дейилади.

Бу моделга асосан ҳар бир қадамдаги маҳсулот ишлаб чиқаришни шундай режалаштириш керакки, натижада уни ишлаб чиқариш ва сақлаш учун сарф қилинган ҳаражатлар йиғиндиси минимал бўлсин.

Мисол. Харидоргир маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтириш учун бу маҳсулот ишлаб чиқарувчи n та корхоналарга S минг сўм капитал маблағ ажратилган.

Агар i-корхонага x_i минг сўм капитал маблағ ажратилса, у ҳолда бу корхонадаги маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми $f_i(x_i)$ миқдорга ошади.

Барча корхоналарда ишлаб чиқариладиган маҳсулот ҳажмини максимал ошириш учун капитал маблағни корхоналарга қандай тақсимлаш керак?

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \tag{1}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{2}$$

$$F=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max \tag{3}$$

Ечиш. Масаланинг математик модели юқоридаги (1)-(3) кўринишда бўлади.
бу ерда: $f_i(x_i)$—x_i капитал маблағнинг чизиқсиз функцияси.

Агар $f_i(x_i)$—қавариқ функция бўлса, у ҳолда масалани V-бобда танишган усуллардан бирини қўллаб ечиш мумкин. Агар $f_i(x_i)$—ихтиёрий чизиқсиз функция бўлса, у ҳолда (1)-(3) масалани динамик программалаш усулини қўллаб ечиш мумкин. Бунинг учун масалани кўп босқичли масала сифатида ифодалаш керак. Капитал маблағни n та корхонага тақсимлаш вариантларини ўрганиш ва ҳар бир вариантга мос келувчи самарадорлик даражасини аниқлаш ўрнига S миқдордаги капитал маблағни аввал битта корхонага, кейин иккита, ва ҳоказо, n та корхонага тақсимлаш самарадорлигини аниқлаймиз. Шундай йўл билан масала кўп босқичли динамик программалаш масаласига айланади.

Ҳар бир k-корхонага ажратиладиган капитал маблағ ҳақидаги қарор бошқариш бўлади. Шундай бошқаришлар ичида (3) функцияга максимал қиймат берувчисини топиш керак.

Мустақил ечиш учун топшириқ.

Мисол. Берилган масалани динамик программалаш масаласи сифатида ифодаланг.

Бирлашма иккита корхонани ўз ичига олади. Бу корхоналарни техник жиҳатдан таъмирлаш учун инвестор S миқдорда капитал маблағни N йил давомида сарф қилмоқчи. Ҳар бир i-корхонага k-йилнинг бошида $a^{(k)}_i$ миқдорда маблағ ажратилади.

N йил ичидаги капитал маблағни корхоналар орасида шундай тақсимлаш керакки, натижада инвесторнинг оладиган умумий даромади максимал бўлсин.

3-§. Динамик программалаш масаласининг умумий қўйилиши. Беллманнинг функционал тенгламалари.

Вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчан ва бошқариш мумкин бўлган системани кўрамиз. Бу системани T та босқичларга ажратиш мумкин деб фараз қиламиз t=1,...,T. Ҳар бир босқичнинг бошидаги системанинг ҳолатини X_t билан белгилаймиз.

$$X_t=(X_{1t},\ X_{2t},\dots,\ X_{mt})$$

Тараққиёт жараёнида системанинг ҳолати ўзгаради. Унинг X_{t-1} ҳолатдан X_t ҳолатга ўтишига U_t бошқариш таъсир қилади. Демак, X_t X_{t-1} ва U_t ўзгарувчиларнинг функциясидан иборат бўлади, яъни

$$\mathbf{X}_t=\varphi(\mathbf{X}_{t-1},\ \mathbf{U}_t).$$

Бу ерда: U_t мумкин бўлган бошқаришлар тўплами G_t га тегишли, яъни

$$\mathbf{U}_t\in\mathbf{G}_t$$

Бундай аниқлашларда системанинг бутун [0,T] давр ичидаги тараққиёти X_0, X_1,..., X_{T-1}, X_T векторлар кетма-кетлиги оркали аниқланади. ($\mathbf{X}_t\in\mathbf{X}_t$)$X_t$ –системанинг t босқичда мумкин бўлган ҳолатлар тўплами. Системани бошланғич X_0 ҳолатдан X_T ҳолатга ўтказиш учун U_0, U_1,..., U_{T-1}, U_T бошқаришлар кетма-кетлиги, яъни стратегиялар хизмат қилади. Системани энг яхши x_T ҳолатга ўтишини таъминлаш учун $f_T(x)$ мақсад функцияни киритамиз.

$$f_T(x)=\sum_{t=1}^{T} Z_t(X_{t-1},X_t)$$

бу ерда: $Z_t=(X_{t-1},\ X_t)$ системанинг X_{t-1} ҳолатдан X_t ҳолатига ўтишида ҳисобланадиган ва бу ҳолатларни солиштириб баҳоловчи фукнциядир.

Агар системанинг t босқичдаги ҳолатлар тўплами $\overline{X}_t$, мумкин бўлган бошқаришлар туплами G ҳамда системани бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтказиш қоидаси, ҳамда бу ҳолатларни солиштирувчи функция $Z_t=(X_{t-1},\ X_t)$ берилган бўлса, Т босқичли система тўла аниқланган бўлади. Бундай системани ифодаловчи динамик программалаш масаласи қуйидагича ёзилади.

Системани бошланғич ҳолати X_0 маълум бўлганда шундай

$$U_t=(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_T)$$

стратегияни танлаш керакки, у

$$X_t=\varphi(X_{t-1},\ U_t),\ X_t\in\overline{X}_t,\ U_t\in G_t,\ t=1,\ldots,T \qquad (1)$$

шартларни қаноатлантириб

$$f_T(x)=\sum_{t=1}^{T} Z_t(X_{t-1},X_t) \qquad (2)$$

функцияга экстремал қиймат берсин.

Ушбу муносабатлардан кўринадики, динамик программалаш масаласи кўп босқичли танлаш масаласи бўлиб, унинг U^k оптимал ечими бир нечта босқичларда топилган мумкин бўлган U_t бошқаришлар асосида танланади.

Геометрик нуқтаи назардан, динамик программалаш масаласини қуйидагича талқин қилиш мумкин:

Умумий ҳолда системанинг бошлангич X_o ҳолати ва охирги X_k ҳолати аниқ берилмайди, ҳамда бошланғич холатнинг бутун бир X_0^* соҳаси ва охирги холатларнинг X_k^* соҳаси кўрсатилади.

Умумий ҳолда динамик программалаш масаласи қуйидагича таърифланади:

Бирор бошқарилувчи X система бошланғич $X_o \in X_o^*$ ҳолатда бўлсин. Вақт ўтиши билан системанинг ҳолати ўзгаради ва у $X_k \in X_k^*$ охирги ҳолатга ўтади, деб ҳисоблайлик. Система ҳолатларининг ўзгариши бирор миқдорий W-мезон (критерий) билан боғлиқ дейлик. Системанинг ўзгариш жараёнини шундай ташкил этиш керакки, бунда W-мезон ўзининг оптимал қийматига эришсин.

U-мумкин бўлган бошқарувлар тўплами бўлсин. У ҳолда, масала X системани $X_o \in X_o^*$ ҳолатдан $X_k \in X_k^*$ ҳолатга ўтказишга имкон берувчи шундай $U^* \in U$ бошқарувни топишдан иборатки, бунда W(U) мезон ўзининг $W^*=W(U^*)$ оптимал қийматига эришсин.

Одатда системанинг X_o ҳолатини сонли параметрлар билан, масалан ажратилган фондлар миқдори, жалб қилинган инвестициялар миқдори, сарфланган ёнилғи миқдори ва х.к. билан ифодалаш мумкин. Бу параметрларни системанинг координаталари деб атаймиз. У ҳолда системанинг ҳолатини X нуқта билан ва унинг X_0 ҳолатдан $X_к$ ҳолатга ўтишини X нуқтанинг траекторияси билан тасвирлаш мумкин.

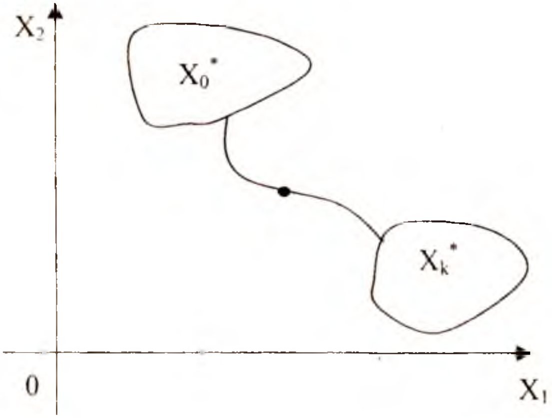
(1)-(2) масалани ечишдан аввал

$$G_T,\ G_{T-1,T},\ \dots,\ G_{1,2\dots T}=G$$

белгилашлар киритамиз. Бу ерда, G_T – масаланинг охирги T босқичдаги аниқланиш соҳаси, $G_{T-1,T}$ – T ва T-1 босқичлардаги аниқланиш соҳа, $G_{1,2\dots T}=G$ – берилган масаланинг аниқланиш соҳаси.

Мақсад функциянинг охирги босқичдаги оптимал қийматини $f_1(X_{T-1})$ билан белгилаймиз:

Худди шунингдек, T-1 қадамдаги шартли оптимал қийматни $f_2(X_{T-2})$ билан белгилаймиз. У ҳолда



$$f_1(x_{T-1}) = \max_{U_{T-1}\in G_T}(\min)[Z_T(x_{T-1}, U_T)] \qquad (3)$$

Худди шунингдек,

$$f_2(x_{T-2}) = \max_{U_{T-2}\in G_{T-1,1}}(\min)[Z_{T-1}(x_{T-2}, U_{T-1}) + f_1(x_{T-1})] \qquad (4)$$

$$f_3(x_{T-3}) = \max_{U_{T-3}\in G_{T-2,T-1,T}}(\min)[Z_{T-2}(x_{T-3}, U_{T-2}) + f_2(x_{T-2})] \qquad (5)$$

$$f_k(x_{T-k}) = \max_{U_{T-k}\in G_{T-k+1,T}}(\min)[Z_{T-k+1}(x_{T-k}, U_{T-k+1}) + f_{k-1}(x_{T-k+1})]. \quad (k = \overline{1,T-1}) \quad (6)$$

$$f_T(x_o) = \max_{U_1\in G}(\min)[Z_1(x_o, U_1) + f_{T-1}(x_1)] \qquad (7)$$

Бу ерда, (3)-(7) ифодалар оптималлик принципининг математик формадаги ёзилишидан иборат бўлиб, улар «Беллманнинг функционал тенгламалари» ёки «динамик программалашнинг асосий функционал тенгламалари» деб аталади.

Бу тенгламалар ёрдамида динамик программалашнинг Т-1 босқичдаги ечимини сўнги Т босқичдаги ечим орқал топилади. Шунинг учун юқоридаги муносабатла Беллманнинг реккурент муносабатлари деб аталади.

4-§. Динамик программалаш усули

Динамик программалашнинг оптималлик принципи асосан ҳар бир қадамда топилган ечим фақат шу қадам нуқта назаридан эмас, балки сўнги, туб мақсад нуқтаи назарида оптимал бўлиши керак эканлигини кўрган эдик. Динами программалаш масалаларини ечиш усуллари учун ана ш принцип асос қилиб олинган.

Фараз қилайлик, биринчи қадамдаги бошқариш U_1 бўлси Бунинг таъсирида система x_0 ҳолатдан x_1 ҳолатга ўтади в натижада $Z_1(X_0, U_1)$ ютуқ келтиради. Иккинчи қадамда U бошқариш системани x_1 ҳолатдан x_2 ҳолатга ўткизади в натижада $Z_2(X_1, U_2)$ фойда келтиради ва ҳоказо. К қадам U_k бошқариш системани X_{k-1} ҳолатдан X_k ҳолатга кўчиради $Z_k(X_{k-1}, U_k)$ ютуғ келтиради.

Демак, системани X_0 ҳолатдан X_Γ ҳолатга кўчириш учу шундай $\overline{U}=(U_1, U_2,\ldots, U_T)$ бошқариш (стратегияни танлаш керакки, ундаги $Z_T(X_0,\overline{U})$ ютуқ (зарар) максима (минимал) бўлсин, яъни

$$f_T(x_0)=Z(X_0,\overline{U})\rightarrow\max(\min).$$

Агар $Z_T(X_0,\overline{U})$ ни

$$Z_T(X_0,\overline{U})=Z_1(X_0, u_1)+Z_2(X_1, u_2)+\ldots+Z_T(X_{T-1}, u_T)$$

йиғинди кўринишида ифодаласак, динамик программала масаласи

$$f_\Gamma(X_0)=Z(X_0,\overline{U})=\overline{Z}_1(X_0, u_1)+Z_2(X_1, u_2)+\ldots+Z_T(X_{T-1}, u_T)$$

функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи

$$U=(U_1, U_2,\ldots, U_T)$$

бошқаришни топишга келтирилади.

Бундай бошқаришни топиш жараёни эса, қуйидагич амалга оширилади:

Энг аввал жараённи тескари йўналишда (X_{T-1} дан X_0 томон) таҳлил қиламиз. Бунинг учун охирги Т босқич учу функционал тенглама

$$f_1(X_{T-1}) = \max_{U_{T-1}\in G_T}(\min)[Z_T(X_{T-1},U_T)]$$

ёзамиз.

Охирги Т босқичнинг бошида жараён $x_{T-1,1}$, $x_{T-1,2}$, ..., $x_{T-1,k}$ ҳолатларда бўлиши мумкин бўлсин деб фараз қиламиз. Соддалик учун фақат бутун сонли $x_{T-1,k} \in X_{T-1}$ ҳолатларни кўрамиз.

Бу ҳолатларнинг ҳар бири учун Т босқичдаги шартли оптимал $U_{T,1}$, $U_{T,2}$,..., $U_{T,k}$ ечимлар ва уларга мос келувчи $Z_{T,1}$, $Z_{T,2}$,..., $Z_{T,k}$ даромад (чиқим)лар топилади. $U_{T,1}$, $U_{T,2}$,..., $U_{T,k}$ ечимлар орасида $f_1(X_{T-1})$ функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи ва оптимал U^* стратегиянинг таркибига кирувчи U^*_T ечим топилади. Лекин бу ечим масалани ечиш жараёнининг иккинчи босқичида, яъни жараён тўғри йўналишда (X_0 дан X_{T-1} га томон) текширилганда топилади.

Шундай қилиб, охирги қадам оптималлаштирилади, яъни бу қадамнинг бошида система қандай бўлишидан қатъий назар қабул қилинадиган ечим аниқланади.

Сўнгра Т-1 босқичга ўтилади. Бу қадам учун функционал тенглама

$$f_2(X_{T-2}) = \max_{U_{T-2}\in G_{T-1,T}}(\min)[Z_{T-1}(X_{T-2},U_T) + f_1(X_{T-1})]$$

тузилади.

Бу босқичда ҳам, худди юқоридагидек ҳар бир мумкин бўлган $x_{T-2,k} \in X_{T-2}$ ҳолат учун мумкин бўлган $u_{T-1,k} \in G_{T-1}$ ечим ва унга мос келувчи $Z_{T-1,k}$ даромад (чиқим) топилади. Сўнгра $Z_{T-1,k}+f_1$ йиғиндиларни ўзаро солиштириб, ҳар бир $x_{T-2,k}$ ҳолатга мос келувчи йиғинди ва унга мос келувчи шартли оптимал ечим $u_{T-1,k}$ топилади. Бу ечимлар орасида $f_2(X_{T-2})$ фукнцияга экстремал қиймат берувчи ва оптимал U^* стратегиянинг таркибига кирувчи U^*_{T-1} топилади.

Шундай йўл билан давом этиб, жараённинг биринчи босқичига ўтилади. Бу қадамда жараён фақат битта аниқ ҳолатда бўлиши мумкин. Шунинг учун бу босқичда олдинги босқичларда топилган барча шартли оптимал ечимларни назарга олувчи ва X_0 ҳолатга мос келувчи оптимал ечим топилади.

Шундай қилиб, ҳамма мумкин бўлган ҳолатлар учун бирин-кетин f_1, f_2,..., f_{T-1}, f_T функцияларнинг қийматлари ва турли босқич ва ҳолатларга тегишли ечимлар, шу жумладан U^* оптимал стратегиянинг таркибига кирувчи оптимал U^*_1,

$U_{T-1}, \dots, U_1$ ечимлар топилади. Бу ечимлар асосида тузилган U^* стратегия $f_T(X_o)$ функцияга экстремал қиймат беради. Оптимал

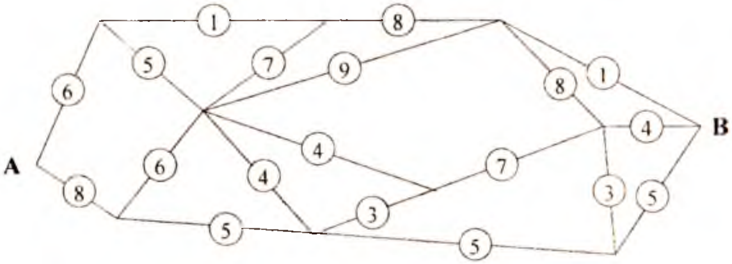
$$U^*=(U^*_1, U^*_2, \dots, U^*_{T-1}, U^*_T)$$

стратегияни аниқлаш учун жараённи тўғри йўналишда (X_o дан X_{T-1} га томон) яни бир бор текшириб чиқиш керак. Бунда, энг аввал аниқ бошланғич X_o ҳолатдан ва топилган $f_T(X_o)$ функциянинг қийматидан фойдаланиб, U^*_1 топилади. Сўнгра U^*_1ва $f_{T-1}(X_1)$ функциянинг қиймати орқали U^*_2 топилади ва ҳоказо. Энг охирида U^*_{T-1} ва $f_{T-1}(X_1)$ орқали U^*_1 топилади.

Динамик программалаш масаласини ечиш жараёнини қуйидаги мисолда яққол кўрсатиш мумкин.

Мисол. Энг қисқа йўлни танлаш масаласи.

Фараз қилайлик, А ва В пунктларни ўзаро боғловчи темир йўллар тўри берилган бўлсин (1-шакл). Бу пунктлар орасида темир йўл билан боғланган жуда кўп пунктлар мавжуд бўлиши мумкин. Бунда ҳар қандай икки пункт орасидаги масофа маълум деб фараз қиламиз. Масалан, бу масофанинг узунлиги 1-шаклдаги ҳар икки нуқтани туташтирувчи кесма устига ёзилган сонлардан иборат бўлсин. А ва В пунктларни энг қисқа йўл билан туташтирувчи маршрутни аниқлаш масаласи қўйилади.



1-шакл

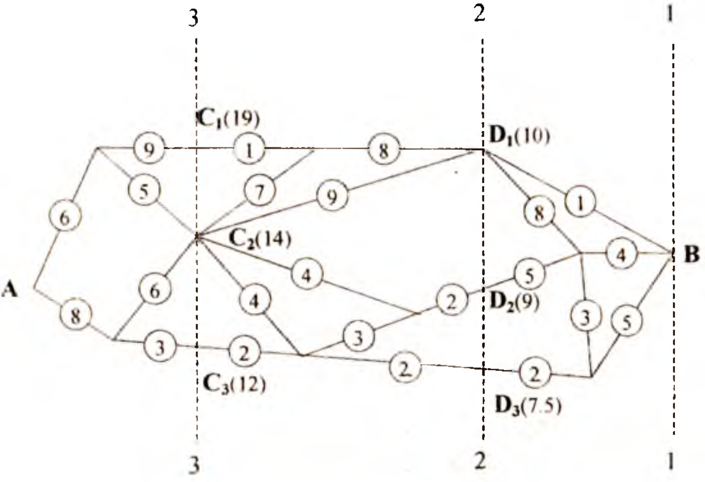
Масалани ечиш учун (1-1), (2-2), (3-3) чизиқлар ёрдамида берилган темир йўллар тўрини айрим қисмларга (босқичларга) ажратамиз (2-шакл).

(2-2) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган нуқталарини D_1, D_2, D_3 лар билан, (3.3) чизиқнинг кесишган нуқталарини эса C_1, C_2, C_3 лар билан белгилаймиз. Биринчи қадамда **B** нуқтадан D_1, D_2, ва D_3 нуқталаргача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз.

$B-D_1$: min (10, 8+4, 5+3+8)=10,

$B-D_2$: min (10+8+5, 4+5, 5+3+5)=9,

$B-D_3$: min (5+2,5, 4+3+2,5)=7,5,



2-шакл

2-шаклда D_1, D_2, D_3 нуқталардан сўнгги **B** пунктгача бўлган энг қисқа масофа қавс ичида ёзилган. Сўнгра (3-3) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган C_1, C_2, C_3 нуқталарни кўрамиз. Бу нуқталардан B нуқтагача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз. Бу масофа

C_1 нуқта учун min (1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9, 1+7+2+2,5+7,5)=min(19,23,24,20)=19

C_2 нукта учун min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5)=min(25, 19, 15, 16, 14)=14

C_3 нуқта учун min(2+2,5+7,5, 2+3+2+9)=12

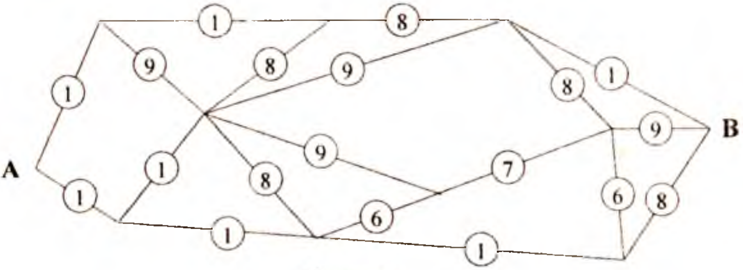
Бу масофалар шаклда қавс ичида ёзилган. 3 босқичда A нуқтадан B гача бўлган энг қисқа масофа топилади. Бу масофа қуйидагича аниқланади:

min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12)=23

Сўнгра A нуқтадан энг қисқа масофа бўйлаб B нуқтага борадиган йўлни белгилаймиз.

Мустақил ечиш учун топшириқ.

А ва В пунктлар ўзаро бир неча йўллар билан боғланган бўлсин. Йўлнинг ҳар бир бўлагида бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари маълум ва улар қуйидаги шаклда кўрсатилган.



3-шакл

Маҳсулотни А пунктдан В пунктга оптимал ташиш маршрутини аниқланг.

5-§. Инвестицияни оптимал тақсимлаш масаласини динамик программалаш усули билан ечиш.

Инвестор X_0 миқдордаги капитал маблағни n (i=1,2,...,n) та корхонани ўз ичига олувчи бирлашмага сарф қилаётган бўлсин. Бу маблағ бирлашмадаги n та корхонага тақсимланади. Агар i-корхонага x_i миқдорда капитал маблағ ажратилса, у $Z_i(x_i)$ миқдорда даромадга эга бўлади.

Бирлашманинг умумий даромади корхоналар даромадлари йиғиндисидан иборат бўлади.

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+....+Z_n(x_n) \qquad (1)$$

Капитал маблагни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1+x_2+....+x_n=X_0 \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \ (i=1,...,n) \qquad (3)$$

$$Z_{max}=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+....+Z_n(x_n) \qquad (4)$$

Бу ердаги (2)-шарт бирлашмага ажратилган X_0 капитал маблағ тўла тақсимланиши кераклигини; (3)–шарт масаланинг шартига кўра номаълумлар номанфий бўлишлигини ва (4)–мақсад функция бирлашманинг умумий даромади максимал бўлишлигини кўрсатади.

Берилган (2)-(4) масалада ажратилган капитал маблағ X_0 га ва корхоналар сони n га тенг. Бу масалани ечишни кўп босқичли жараён деб қараймиз. Ҳар бир босқичда ажратилган капитал маблағ нолдан X_0 гача, корхоналар сони эса, нолдан n гача ўзгарувчан миқдорлар деб қаралади. Масалан, биринчи босқичда $0\le x\le X_0$ маблағ фақат битта корхонага, иккинчи босқичда 2 та корхонага ва ҳоказо, n-босқичда n та корхонага тақсимланади деб қаралади. Шундай қилиб, капитал маблағни тақсимлашнинг статик масаласи динамик программалаш масаласига айланади.

Бундай динамик программалаш масаласини ечиш учун $F_1(x)$, $F_2(x)$,..., $F_n(x)$ функциялар кетма-кетлигини киритамиз. Бу ерда:

$F_1(x)$ – $0\le x\le X_0$ миқдордаги маблағни фақат 1та корхонага тақсим–лаганда олинадиган максимал даромад, $F_2(x)$ – $0\le x\le X_0$ миқдордаги маблағни 2 та корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромад ва ҳоказо, $F_n(x)$ – $0\le x\le X_0$ миқдордаги маблағни n та корхонага тақсимлашдан олинадиган даромад.

Маълумки, $F_n(X_0)=Z_{max}$ бўлади. Қуйидаги икки ҳолда $F_i(x)$ функциялар осонгина топилади:

1) $F_i(0)=0$, $i=1,...,n$

2) $F_1(x)=Z_1(x)$, $0\le x\le X_0$

Демак, агар капитал маблағ тақсимланмаса, у ҳолда даромад ҳам нолга тенг бўлади. Агар капитал маблағ битта корхонага тақсимланса, бирлашманинг даромади ана шу битта корхона даромадидан иборат бўлади (капитал маблағ ажратилмаган корхоналар даромад келтирмайди деб фараз қилинади).

Энди $0\le x\le X_0$ миқдордаги капитал маблағ 2 та корхона орасида тақсим–ланган ҳолни кўрамиз. Агар x_2–иккинчи корхонага ажратилган маблағ бўлса, у ҳолда қолган x-x_2 миқдордаги маблағ биринчи корхонага ажратилади. Бу икки корхонадан олинадиган умумий даромад қуйидаги функционал тенглама ёрдамида топилади:

$$F_2(x)=\max_{\substack{0\le x_2\le x\\ 0\le x\le X_0}}[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)]$$

Фараз қилайлик, $0\le x\le X_0$ миқдордаги маблағ k та корхона орасида тақсимланган бўлсин. Агар k-корхонага x_k миқдорда маблағ ажратилган бўлса, ундан олинган даромад $Z_k(x_k)$ га тенг бўлади. Қолган $x-x_k$ маблаг k-1 та корхоналар орасида тақсимланади ва ундан олинадиган даромад $F_{k-1}(x-x_k)$ га тенг бўлади. Бу ҳолда олинадиган умумий даромад

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \max_{\substack{0\le \mathbf{x}_k \le \mathbf{x} \\ 0\le \mathbf{x} \le \mathbf{X}_0}} [\mathbf{Z}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)]$$

функционал тенглама ёрдамида топилади. Дастлаб берилган масаланинг ечимини $x=X_0$ ва $k=n$ бўлган ҳолдаги қуйидаги функционал тенгламадан фойдаланиб топамиз.

$$F_n(x) = \max_{0\le x_n \le x}[Z_n(x_n) + F_{n-1}(x_0 - x_n)]$$

Капитал маблағни тақсимлаш масаласини динамик программалаш усули билан ечиш жараёни билан танишамиз.

Энг аввал $0\le x\le X_0$ оралиқ n та тенг интервалларга (қадамлар) бўлинади. Ҳар бир қадамнинг узунлиги Δ га тенг деб қабул қилинади. Бундан ташқари $Z_i(x)$ ва $F_i(x)$ функциялар фақат шу нуқталарда, яъни, $x=0$, Δ, 2Δ, ..., $n\Delta=X_0$ да аниқланган деб қабул қилинади.

$i=1$ да $F_i(x)$ қуйидаги тенглик ёрдамида аниқланади $F_1(x)=Z_1(x)$, $F_1(k\Delta)=Z_1(k\Delta)$, $k=0,...,n$ тенгликнинг қийматлари жадвалга жойлаштирилади. $F_1(k\Delta)$ нинг қийматидан фойдаланиб $F_2(k\Delta)$ ҳисобланади:

$$F_2(x_0) = \max_{k=0,n}[Z_2(k\Delta) + F_1(x_0 - k\Delta)]$$

Ҳисоблаш жараёнида $F_2(x)$, $(x=k\Delta,\ k=0,...,n)$ нинг қийматидан ташқари

$Z_2(k\Delta)+F_1(x_0-k\Delta)$ фойдани максималлаштирувчи x_2 нинг қиймати ҳам топилади. Сўнгра $F_3(x)$ топилади ва ҳоказо, ҳамма босқичлардаги $F_i(x)$ ларни ҳисоблашни бажариб

$$F_n(x_0) = \max_{0\le x_n \le x}[Z_n(x_n) + F_{n-1}(x_0 - x_n)]$$

тенглик ёрдамида $F_n(X_0)=\max Z$ топилади.

Шундай қилиб, охирги босқичда мақсад функциянинг максимал қиймати $F_n(X_0)$ ҳамда n-корхона учун ажратиладиган капитал маблағнинг миқдори, яъни X_n^* топилади.

Сўнгра ҳисоблаш жараёни тескари тартибда бажарилади. Бунда охирги қадамдан биринчи қадамгача бир марта қараб чиқилади:

n-корхонага ажратиладиган X_n^* капитал маблағни билган ҳолда қолган n-1 корхоналар орасида тақсимланадиган $X_0 - X_n^*$ топилади. Сўнгра олдин топилган

$$F_{n-1}(x) = \max_{\substack{0 \le x_{n-1} \le x \\ 0 \le x \le X_0}} [Z_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(x - x_{n-1})]$$

дан $F_{n-1}(X_0 - X_n^*)$ ни, ва демак, X^*_{n-1}ни топамиз, ва ҳоказо. Шундай йўл билан давом этиб охирида X_1^* ни топамиз.

Шу билан чегараланган капитал маблағ бирлашманинг n та корхоналари орасида оптимал тақсимланган бўлади.

1-мисол. Инвестор 200 бирлик капитал маблағни бирлашмадаги 4та корхонага сарф қилмоқчи бўлсин. Ҳар бир корхона ўзига ажратилган маблағнинг миқдорига боғлиқ равишда турли миқдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар қуйидаги 1-жадвалга жойлаштирилган.

1-жадвал

Корхоналарга ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Инвестицияни корхоналараро оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

Ечиш. *Масалани 4та босқичга бўлиб ечамиз. Дастлаб n=1, яъни капитал маблағ фақат битта корхонага берилган ҳолни кўрамиз. Бунда*

$$F_1(x)=Z_1(x)$$

бўлади. $0 \le x \le 200 = X_0$ оралиқдаги ҳар бир $x_{1k}=k\Delta$ лар учун $F_1(x_{1k})$ қийматларни 2-жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадва

x_{1k}	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Энди n=2 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 бирлик капита маблағни 2та корхонага тақсимланган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда олинадиган даромад

$$\mathbf{F_2(x) = \max_{\substack{0\le x_2\le x\\ 0\le x\le X_0}}[Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]}$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функциянин қийматлари қуйидагича топилади.

$0\le x\le 200=X_0$ оралиқдаги ҳар бир x учун $0\le x_2\le x_0$ топилад ва унга тегишли бўлган

$$Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)$$

ҳисобланади. Сўнгра

$$F_2(x) = \max_x[Z_2(x_2) + F_2(x - x_2)]$$

топилади.

Масалан, x=0 да x_2=0 бўлади;

x=40 да x_2=0; 40 бўлади;

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0, \quad Z_2(0) + F_1(40) = 15 \\ x_2 &= 40, \quad Z_2(40) + F_1(0) = 14 + 0 \end{aligned}\right\} F_2(x = 40) = 15$$

$$x = 80\,\text{да}\, x_2 = 0;40;80$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0, \quad Z_2(0) + F_1(80) = 0 + 28 \\ x_2 &= 40, \quad Z_2(40) + F_1(40) = 14 + 15 \\ x_2 &= 80, Z_2(80) + F_1(0) = 30 + 0 \end{aligned}\right\} F_2(x = 80) = 30$$

Ва ҳоказо, шундай йўл билан x=120, 160 ва 200 бўлга ҳоллар учун F_2(x=120), F_2(x=160), F_2(x=200) ларни топами F_2(x) функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 3-жадвалл кўрсатамиз.

3-жадвал

x \ x_2	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	x_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3 босқичда n=3 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 капитал маблағ 3та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир $0\le x_3\le x$, $0\le x\le X_0$ =200 учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаш керак

$$\mathbf{F}_3(\mathbf{x}_3) = \max_{\substack{0\le x_3\le x \\ 0\le x\le 200}} [\mathbf{Z}_3(\mathbf{x}_3) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)]$$

Бу функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 4-жадвалда кўрсатамиз.

4-жадвал

x \ x_3	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	x_3^*
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4 босқичда n=4 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 капитал маблағ 4та корхонага бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромад

$$F_4(x) = \max_{\substack{0\le x_4\le x \\ 0\le x\le 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функцияни ҳисоблаш жараёни 5 жадвалда кўрсатилган.

5-жадвал

x_4 x	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	x_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 жадваллардаги $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_4(x)$ ларни ва уларга мос равишда x_1^*, x_2^* ,x_3^* ва x_4^* векторларни қуйидаги 6-жадвалга жойлаштирамиз.

6-жадвал

x_i^* x	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Бу жадвалдан капитал маблағни оптимал тақсимлаш режасини топамиз. 200 бирлик маблағни 4та корхонага тақсимлаш натижасида бирлашма

$$\max_{i=1,4} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}=200)=\max(90,90,93,95)=95$$

бирлик даромад олади. Бунда тўртинчи корхонага 80 бирлик маблағ берилади ва ортиб қолган 120 бирлик маблағ қолган 3 та корхонага тақсимланади. Бундан бирлашма

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220)=\max(60,60,60)=60$$

бирлик даромад олади. Бунда учинчи корхонага маблағ берилмайди ($x_3^*=0$). Демак, 120 бирлик маблағ биринчи ва иккинчи корхоналарга тақсимланади. Лекин иккинчи корхонага ҳам маблағ берилмайди ($x_2^*=0$). Шундай қилиб, қолган 120 бирлик маблағ биринчи корхонага берилади. Бундан бирлашма 60 бирлик даромад олади

$$x_1=120,\ F_1(x)=60$$

Шундай қилиб, капитал маблағлар тақсимлашнинг оптимал режасини топдик:

$$X^*=(x_1^*,\ x_2^*\ ,x_3^*,\ x_4^*)=(120;\ 0;\ 0;\ 80)$$

Таянч сўз ва иборалар

Динамик программалаш, кўп босқичли жараён, бошқариш, бошқарилувчи жараён, стратегия, оптимал стратегия, оптималлик принципи, шартли бошқариш, Беллманнинг функционал тенгламалари.

Назорат саволлари

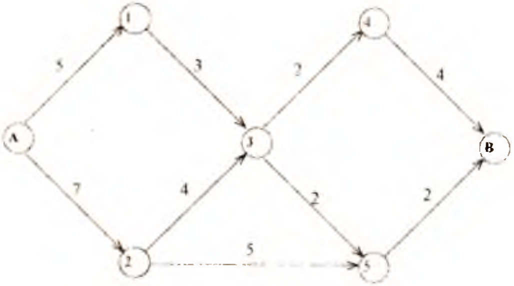
1. Динамик программалашнинг предмети нимадан иборат?
2. Динамик программалашнинг чизиқли программалашдан қандай фарқи бор?
3. Динамик программалашнинг қандай хусусиятларини биласиз?
4. Динамик программалашнинг оптималлик принципи нимадан иборат?
5. Саноат бирлашмасини оптимал режалаштириш масаласининг динамик модели қандай?
6. Маҳсулот ишлаб чиқариш ва уни сақлашни оптималлаштириш масаласининг динамик модели қандай?
7. Динамик программалаш масаласи умумий ҳолда қандай қўйилади?
8. Динамик программалаш масаласининг геометрик талқини қандай?
9. Беллманнинг функционал тенгламалари қандай?
10. Динамик программалаш усулининг ғояси қандай?
11. Инвестицияларни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қандай?
12. Инвестицияларни оптимал тақсимлаш масаласини қандай йўл билан кўп босқичли динамик программалаш масаласига айлантириш мумкин?

Масалалар

1. Берилган масалани динамик программалаш масаласи сифатида ифодаланг.

Бирлашма m та корхонани ўз ичига олади. Бу корхоналарни техник жиҳатдан таъмирлаш мақсадида марказлаштирилган жамғарма ташкил этилган. Бу жамғармага биринчи йили A минг сўм маблағ ажратилган. Кейинги йилларда эса, бу жамғарма корхоналар даромадида ажратилган маблағлар ҳисобига тўлдириб борилади. Ушбу жамғармадан i-корхонага ажратилган x_i маблағ унга $f_i(x_i)$ миқдорда қўшимча даромад келтиради. n йил ичида корхоналарнинг топган қўшимча даромадлари максимал бўлиши учун жамғармадаги маблағ қандай тақсимланиши керак?

2. A ва B пунктлар ўзаро бир неча йўллар ёрдамида боғланган. Йўлнинг ҳар бир бўлагида бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари маълум ва улар қуйидаги шаклда кўрсатилган. Маҳсулотни A пунктдан B пунктга оптимал ташиш маршрутини аниқланг.



3. 120 минг сўмлик инвестицияни 4 та корхона ўртасида тақсимлаш керак. Корхоналардаги ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг ҳажми ажратилган маблағга боғлиқ равишда ўзгариши қуйидаги жадвалда келтирилган:

Инвестиция миқдори	Корхоналарда ишлаб чиқариш ҳажмининг ўсиши			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	41	73
120	68	80	81	92

VII БОБ. НОАНИҚЛИК ШАРОИТИДА ЕЧИМЛАР ҚАБУЛ ҚИЛИШ. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ. “ТАБИАТ” БИЛАН ЎЙИН

Чизиқли, чизиқсиз ва динамик программалаш масалаларида ечимлар қабул қилиш маълумотларнинг тўлалигини назарда тутган ҳолда амалга оширилади. Бошқача айтганда, масаладаги номаълум параметрларни топиш учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар аниқ бўлади. Бу масалаларда ечимлар қабул қилиш аниқлик шароитида амалга оширилади.

Агар берилган масалалардаги маълумотлар аниқ бўлмаса, қуйидаги икки ҳолатда ечим қабул қилиш мумкин:

а) таваккалчилик шароитида ечимлар қабул қилиш;

б) ноаниқлик шароитида ечимлар қабул қилиш.

Бу икки ҳолатларнинг ўзларига хос бўлган хусусиятлари ва фарқларини кўриш учун маҳсулот ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг моделига мурожаат қиламиз. Бу модел детерминирланган модел бўлиб, унда ишлаб чиқариш факторлари чегараланган бўлганда корхонанинг даромадини максималлаштирувчи режаси топилади. Масаладаги белгилашлар: C_j – ишлаб чиқариладиган j – маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад; x_j – ишлаб чиқариладиган j – маҳсулот миқдори. Таваккалчилик шароитида C_j даромад фиксирланган миқдор бўлмайди, балки сон қиймати номаълум бўлган лекин тақсимот функцияси $f(C_j)$ функция орқали ифодаланувчи тасодифий миқдор бўлади. Шунинг учун j – маҳсулотга мос келувчи C_jx_j фойда ҳам тасодифий миқдор бўлади ва унинг аниқ қиймати x_j номаълумнинг қиймати аниқ бўлганда ҳам аниқ бўлмайди. Шундай қилиб, таваккалчилик шароитида ечимлар қабул қилиш масалаларида номаълумларнинг тўла эмаслик даражаси эҳтимолий тақсимот функцияси орқали ифодаланади.

Ноаниқлик шароитида $f(C_j)$ тақсимот функция номаълум бўлиши ёки у аниқланмаган бўлиши мумкин. C_j параметрнинг қийматлари мутлақо номаълум бўлган ҳоллар ҳам учраши мумкин бўлишига қарамай, ноаниқлик масаладаги маълумотларнинг умуман йўқлигини билдирмайди.

Масалан, ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) C_j нинг учта $C^{(1)}_j$,$C^{(2)}_j$,$C^{(3)}_j$ қийматларидан бирортасини қабул қилишини билади, лекин бу қийматларнинг эҳтимоллари ҳақида маълумотга эга бўлмаслиги мумкин. Ечимлар қабул қилиш (ЕҚҚ)нинг кўп масалаларида турли вариантлар тўпламидан энг яхши (оптимал) вариантни танлаш талаб қилинади. Бундай вариантни топиш учун олдинги бобларда биз танишган аниқликда ечимлар қабул қилиш усулларидан фойдаланилади. Лекин аниқликда ечим қабул қилишда «система» нинг ечим қабул қилувчи шахсга халақит бериши ва шу билан бир қаторда маълум даражадаги ноаниқлик келтириб чиқариш назарда тутилмайди. Бундай «халақит» бериш икки шаклда бўлиши мумкин:

1. Ечим қабул қилувчи шахс об-ҳавога қараб, масалан, ёмғир, қор ёғиши, қатқалоқ бўлиши ёки бўлмаслигига қараб ечим қабул қилади. Бу ҳолда табиат ЕҚҚШ учун рақобатчи ролини бажаради. Лекин табиатга онгли ва ноҳайриҳоҳ рақиб сифатида қарамаслик керак.

2. Ечимлар қабул қилиш рақобат мавжуд бўлган вазиятда амалга оширилади. Бу ҳолда икки ёки ундан кўпроқ қатнашувчилар ўзаро рақобатда бўлиб, уларнинг ҳар бири рақибидан иложи борича кўпроқ ютуқ олишга ҳаракат қилади. Бундай вазиятга мисол сифатида ўзаро рақобатда бўлган товар маҳсулотларини реклама қилиш, бозор иқтисодиёти даврида ишлаб чиқариш жараёнини режалаштириш масалаларини кўрсатиш мумкин.

Рақобатли вазиятда ечимлар қабул қилиш назарияси «ўйинлар назарияси» деб аталади. Рақобат мавжуд бўлмагандаги ечимлар қабул қилиш назарияси эса «табиатга қарши ўйин» деб аталади. Ушбу бобда ана шундай назариялар билан танишамиз.

1-§. Ўйинлар назариясининг предмети ва асосий тушунчалари

Математиканинг рақобатли ҳолатларини, яъни қанташувчиларнинг (ўйновчиларнинг) манфаатлари қарама-қарши ёки бир-бирига мос келмайдиган ҳолатларни рганувчи бўлими — «ўйинлар назарияси» деб аталади. Ўйинлар азарияси — рақобатли ҳолатда қатнашаётган ҳар бир ўйновчи»га энг катта ютуққа (ёки энг кичик ютқазишга) ришиш учун қилинадиган ҳаракатларнинг энг оптималини ниқлаш учун, имкон берувчи математик назариядир.

Кўпгина иқтисодий жараёнларга ҳам ўйинлар назарияси нуқтаи-назаридан қараш мумкин. Масалан, ўйин иштирокчилари — бир хил турдаги маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналар, таъминотчилар ва истеъмолчилар бўлиб, ўйиннинг ютуғи — ишлаб чиқариш фондларининг самарадорлиги, даромад маблағлари, маҳсулотнинг баҳоси ёки таннархи бўлиши мумкин.

Ўйинлар назарияси нисбатан ёш фанлар қаторига киради. Унинг пайдо бўлиши Нейман ва Моргенштернларнинг 1944 йил нашр этилган «Иқтисодий жараёнлар ва ўйинлар назарияси» монографияси билан боғлиқ. Кейинчалик ўйинлар назарияси амалий татбиқларга эга бўлган мустақил йўналиш сифатида ривожланди.

Шуни таъкидлаш лозимки, ўйинлар назариясининг усуллари ва хулосалари кўп марта такрорланадиган рақобатли ҳолатларга нисбатан ишлатилади.

Амалда, рақобатли ҳолатларни математик усуллар ёрдамида тадқиқ этишда, муҳим бўлмаган фактларни ташлаб юбориб, ҳолатларнинг содда модели тузилади.

Ўйин — рақобатли ҳолатларни ифодаловчи моделдан иборат бўлиб, унинг ҳақиқий рақобатдан фарқи шундан иборатки, у маълум бир *қоида* асосида амалга оширилади.

Ҳар бир ўйновчининг маълум мақсадга эришиш ниятида бажариши мумкин бўлган ҳаракатлари *ўйиннинг қоидалари* деб аталади.

Ўйиннинг натижаларини миқдорий баҳолаш *тўлов* деб аталади. Ўйиннинг моҳияти шундан иборатки, унда ҳар бир ўйновчи ўзига энг яхши натижа берувчи ечимни танлашга ҳаракат қилади.

Ўйинда иккита ёки ундан кўп ўйновчилар қатнашиши мумкин. Шунга мувофиқ, ўйин жуфт (икки) ўйновчили ва кўп ўйновчили бўлиши мумкин.

Агар ўйинда фақат иккита ўйновчи қатнашса, бундай ўйин «*жуфтли ўйин*» деб аталади.

Агар жуфтли ўйинда бир ўйновчининг ютуғи иккинчи ўйновчининг ютқазувига тенг бўлса, бундай ўйин «*0-суммали* *ўйин*» деб аталади. 0-суммали ўйинда ўйновчиларнинг умумий капитали ўзгармайди, фақат ўйин давомида қайта тақсимланади ва шу сабабли ютуғлар йиғиндиси нолга тенг бўлади, яъни

$$V_1+V_2+...+V_n=0$$

Бу ерда:

V_j –j – ўйновчининг ютуғи

Нол суммали бўлмаган ўйинда ўйновчилар ютуғларининг йиғиндиси нолдан фарқли бўлади. Масалан, лоторея ўйинида ўйновчилар қўйган бадалнинг бир қисми лоторея ташкилотларига берилади. Бу ўйинда

$$V_1+V_2+...+V_n<0$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Биз бу ерда амалий аҳамияти катта бўлган ўйинлардан – жуфт ўйинларни қараш билан чекланамиз. Ўйин иштирокчиларини А ва В орқали белгилаймиз.

Ўйин жараёнида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай ҳолатга мувофиқ равишда ўйновчининг қўллаши мумкин бўлган қоидалар бирлашмаси «*стратегия*» деб аталади. Стратегиянинг сонига қараб, ўйинлар *чекли* ёки *чексиз* ўйинларга бўлинади. *Оптимал стратегия* деб, берилган ўйновчига, ўйин бир неча марта такрорланганда энг катта мумкин бўлган ўртача ютуқни таъминловчи стратегияга айтилади.

Ҳар қандай 0-суммали жуфтли ўйинни ютуғлар матрицаси деб аталувчи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица орқали аниқлаш мумкин. Бу матрицанинг хар бир a_{ij} элементи А ўйновчи матрицанинг i-қаторига мос келувчи A_i юришни В ўйновчи j-устунга мос келувчи B_j юришни танлагандаги А ўйновчининг ютуғини билдиради.

Компоненталари

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $X=(x_1, x_2,..., x_m)$ вектор-қатор А ўйновчининг «*аралаш стратегияси*» дейилади.

Худди шунингдек, компонентлари

$$x_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$ вектор-устун В ўйновчининг «*аралаш стратегияси*» деб аталади. Бунда x_i ва y_j лар мос равишда А ўйновчи ўзининг A_i юришини ва В ўйновчи B_j юришини танлаш эҳтимолларини билдиради.

Агар $X=(x_1, x_2,..., x_m)$ аралаш стратегияда i-компонента 1 га тенг бўлиб, қолганлари 0 га тенг бўлса, у ҳолда бундай аралаш стратегия А ўйновчининг «*i-соф стратегияси*» деб аталади.

Масалан, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) стратегиялар соф стратегиялардир.

Худди шунингдек, j-компонента 1 га тенг бўлиб, қолган компоненталари 0 га тенг бўлган Y аралаш стратегия В ўйновчининг «*j-соф стратегияси*» деб аталади.

Демак, А ўйновчининг ютуғлар матрицасининг i-қаторига мос келувчи A_i юриши унинг i-соф стратегиясидан иборат бўлади. Худди шунингдек, В ўйновчининг ютуғлар матрицасининг j-устунига мос келувчи B_j юриши унинг j-соф стратегиясидан иборат бўлади.

2-§. Матрицали ўйиннинг ечими.

Ютуғлар матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлган матрицали ўйинни кўрайлик. Агар А ўйновчи i-соф стратегияни танласа, у камида

$$\min_j a_{ij}$$

ютуққа эга булади. А уйновчи узининг ютуғини максимал қилишга ҳаракат қилади. Демак, у шундай і-соф стратегияни танлаши керакки, натижада унинг ютуғи максимал булсин, яъни А уйновчи

$$\max_i \min_j (a_{ij})$$

натижани берувчи соф стратегияни танлайди. Ушбу катталикни α билан белгилаймиз.

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij})$$

Бу ерда, α - А уйновчининг ишончли ютуғидан иборат булиб у «*уйиннинг қуйи баҳоси*» деб аталади. α ютуққа эришишга имкон берувчи A_{i0}-соф стратегия «*максмин*» деб аталади. В уйновчи, уз навбатда, узининг энг катта мумкин булган ютқазувини минималлаштиришга ҳаракат қилади. Шунинг учун

$$\beta = \max_j \min_i (a_{ij})$$

ютқазувни берувчи j-соф стратегияни танлайди. Бу ерда, β - В уйновчининг ишончли минимал ютқазувидан иборат булиб, у «*уйиннинг юқори баҳоси*» деб аталади. β ютқазувга эришишга имкон берувчи B_{j0} юриш (j_0-соф стратегия) «*минимакс*» деб аталади.

1-теорема. Ҳар қандай матрицали уйинда уйиннинг α қуйи баҳоси унинг β юқори баҳосидан ошмайди, яъни

$$\alpha \leq \beta$$

Исботи. Таърифга асосан

$$\alpha_i = \min_i a_{ij} \leq a_{ij}$$

ҳамда

$$\beta_j = \max_j a_{ij} \geq a_{ij}$$

Бу муносабатларни бирлаштирсак

$$\alpha_i = \min_i a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_j a_{ij} = \beta_j$$

муносабатга эга буламиз. Бундан

$$a_i \leq b_j$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик і ва j индексларнинг ихтиёрий комбинациялари учун, шу жумладан

$$\min_j \beta_j = \beta$$

ва

$$\max_i \alpha_i = \alpha$$

шартларни қаноатлантирувчи i ва j лар учун ҳам ўринлидир. Демак,

$$\alpha \leq \beta$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шу билан теорема исбот қилинди.

Агар матрицали ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари ўзаро тенг бўлса, яъни

$$\alpha = \beta$$

шарт бажарилса, у ҳолда ушбу ўйин *эгар нуқтага* ҳамда қуйидаги шартни қаноатлантирувчи *баҳога* эга дейилади.

$$V = \alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

Бу ҳолда А матрицанинг

$$V = \alpha = \beta$$

шартни қаноатлантирувчи ($A_{i0}B_{j0}$) жуфтликка мос келувчи элементи a_{i0j0} *эгар нуқта* деб аталади. Бу элемент j_0 устунда максимал бўлади ва i_0 қаторда минимал булади, яъни:

$$a_{ij0} \leq a_{i0j0} \leq a_{i0j}$$

Агар В ўйновчи ўзининг минимакс стратегиясидан воз кечса, унинг ютқазуви ошади. Худди шунингдек, агар А ўйновчи ўзининг максимин стратегиясидан воз кечса, унинг ютуғи камаяди. Демак, эгар нуқталарга ўйиннинг A_{i0}, B_{j0} оптимал стратегиялари мос келади. Ҳамда $\{A_{i0}, B_{j0}, V\}$ тўплам ўйиннинг ечими дейилади.

Мисол. Қуйидаги тўлов матрицалари билан берилган ўйинлар учун ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоларини ва ечимини топинг.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4\,3\,4\,2 \\ 3\,4\,6\,5 \\ 2\,5\,1\,3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1\,0\,3\,5 \\ 3\,2\,4\,3 \\ 0\,1-1\,4 \end{pmatrix}$$

Ечилиши. A_1 матрица қаторлари учун a_{ij} элементларнинг энг кичиклари мос равишда 2;3;1 га тенг. Уларнинг ичидаги максимали эса, 3 га тенг. Демак, A_1 матрицанинг қуйи баҳоси $\alpha_1 = 3$.

Ўйиннинг юқори баҳосини топиш учун A_1 матрица устунлари бўйича максимал элементларни топамиз. Булар мос равишда: 4;5;6;5. Энди булар ичидан минималини топамиз $\beta_1 =4$. Демак, A_1 матрица учун $\alpha_1=3$; $\beta_1=4$.

A_2 матрица учун эса, $\alpha_2=\max\{0;\ 2;\ -1\}=2$; $\beta_2=\min\{3;\ 2;\ 4;\ 5\}=2$

Шундай қилиб, бу ҳолда $V=\alpha_2=\beta_2=2$ ўйиннинг баҳосидир.

Демак, бу ўйинда А ўйновчининг ютуғи 2 дан кам эмас ва В ўйновчининг ютқазуви 2 дан ошмайди.

Агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу ўйиннинг ечимини топиш учун эгар нуқтага мос келувчи A_{i0} ва B_{j0} оптимал стратегияларни ҳамда

$$V=\alpha=\beta$$

шартни қаноатлантирувчи баҳони топиш керак.

Демак, агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, у ҳолда А ва В ўйновчиларнинг максимин ва минимакс стратегиялари оптимал стратегия бўлади ҳамда ютуғлар матрицасининг эгар нуқтаси ўйиннинг баҳосини беради.

Агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда унинг ечими аралаш стратегияларда топилади.

А ўйновчи $X=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)$ аралаш стратегияни қўллаб, В ўйновчи $Y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)$ аралаш стратегияни қўлласин, дейлик. Демак, А ўйновчи ўзининг A_i соф стратегиясини x_i эҳтимол билан, В ўйновчи эса, ўзининг B_j соф стратегиясини y_j эҳтимол билан танлайди. Бу ҳолда $(A_i,\ B_j)$ жуфтликни танлаш эҳтимоли $x_i y_j$ га тенг бўлади. Аралаш стратегиялар қўлланганда ўйин тасодифий характерга эга бўлади. Шунинг учун ўйиннинг ютуғи ҳам тасодифий миқдор бўлади. Демак, бу ҳолда ютуғларнинг ўртага миқдори, яъни унинг математик кутилиши ҳақида гапириш мумкин.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ матрицали ўйиннинг ютуғлар функцияси ёки А ўйновчи ютуғининг математик кутилиши деб

$$f(X,Y)=M(X,Y)=XAY=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j$$

формула орқали аниқланувчи функцияга айтилади, бу ерда: $X=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)$ А ўйновчининг ва $Y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)$ В ўйновчининг ихтиёрий аралаш стратегиялари.

Мисол:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

матрицали ўйинда $X=(x_1, x_2,..., x_m)$ ва $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$ мос равишда А ва В ўйновчиларнинг аралаш стратегиялари. Бу ўйин учун ютуғлар функциясини топамиз.

$$f(X,Y)=M(X,Y)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=$$

$$=(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3$$

Агар $X=(0,1;\ 0,4;\ 0,5)$ ва $Y=(0,3;\ 0,3;\ 0,4)$ бўлса

$$M(X, Y)=-0,03$$

бўлади.

Дейлик, $X^o=(x^o_1, x^o_2,..., x^o_m)$ А ўйновчининг аралаш стратегияси, $Y^o=(y^o_1, y^o_2,..., y^o_n)$ В ўйновчининг аралаш стратегияси бўлсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

2-теорема.

$X^o=(x^o_1, x^o_2,..., x^o_m)$ ва $Y^o=(y^o_1, y^o_2,..., y^o_n)$ аралаш стратегиялар жуфти ва V ҳақиқий сон матрицали ўйиннинг ечими бўлиши учун $j=1,2,...,n$ соф стратегияларда

$M(X^o, j)\geq V$ (1)

бўлиб, $i=1,2,...m$ соф стратегияларда

$M(i, Y^o)\leq V$ (2)

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Теорема шартларини қаноатлантирувчи X^o, Y^o аралаш стратегиялар оптимал стратегия, V ҳақиқий сон эса, ўйиннинг баҳоси деб аталади.

Демак, $\{A_{ю}, B_{ю}, V\}$ тўпламни матрицали ўйиннинг ечими эканлигини текшириш учун (1) ва (2) тенгсизликларнинг бажарилишини текшириш лозим.

Мисол:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

матрицали ўйиннинг ечимини аралаш стратегияларда топинг.

Ечилиши. А ўйновчининг аралаш стратегияси X=(x_1, x_2) вектор қатордан ва В ўйновчининг аралаш стратегияси Y=(y_1, y_2) вектор устундан иборат бўлсин.

(1) тенгсизликнинг бажарилишини текширамиз:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(j) \geq V$$

Бундан

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 \geq V \\ -x_1 + x_2 \geq V \end{matrix}\right\}$$

Системани ҳосил қиламиз. Бундан

X=(1/2, 1/2), V=0

эканлигини аниқлаймиз.

Энди (2) тенгсизликнинг бажарилишини текширамиз:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(i) \leq V$$

Бундан

$$\left.\begin{matrix} y_1 - y_2 \leq V \\ -y_1 + y_2 \leq V \end{matrix}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан топамиз:

Y=(1/2, 1/2), V=0.

Демак, бу ўйинда X=(1/2, 1/2) ва Y=(1/2, 1/2) векторлар оптимал стратегиялар бўлиб, ўйиннинг баҳоси V=0 га тенг бўлади.

Мустақил ечиш учун топшириқ.

1. Берилган матрицали ўйин учун:

а) ютуғлар функциясини ёзинг;

б) ўйиннинг ечимини аралаш стратегияларда топинг.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Ўйиннинг ечимини минимакс стратегияларда топинг.

$$A=\begin{pmatrix} 2\ 1\ 4 \\ -1\ 0\ 6 \end{pmatrix}$$

3-§. Матрицали ўйинни чизиқли программалаш масаласига келтириш.

m×n – ўлчовли матрица билан берилган қуйидаги ўйинни қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица эгар нуқтага эга эмас, деб ҳисоблайлик ва шунинг учун ўйиннинг ечимини $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ – аралаш стратегиялар шаклида излаймиз. А–ўйновчининг оптимал стратегиясида юқоридаги (1) муносабат ва В–ўйновчининг оптимал стратегиясида (2) муносабат бажарилади. Шунинг учун, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи (А-ўйновчининг) оптимал стратегиясини топиш масаласини қўйиш мумкин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m \geq V, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m \geq V, \\ ------------------- \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m \geq V. \end{cases} \qquad (3)$$

Ўйиннинг баҳоси бўлган V-катталик номаълум, лекин доим V>0 деб ҳисоблаш мумкин. Бунга, агар А матрица элементларига бир хил мусбат сон қўшилса, ҳар доим эришиш мумкин. (3) системанинг ҳамма тенгсизликларини V га бўлиб, (4) системани ҳосил қиламиз

бу ерда: $t_1=x_1/V$, $t_2=x_2/V,\ldots$, $t_m=x_m/V$

$x_1+x_2+\ldots+x_m=1$ шартдан $t_1+t_2+\ldots+t_m=1/V$

тенглик келиб чиқади.

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ ------------------ \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \ge 1, \end{cases} \qquad (4)$$

Ўйиннинг ечими V нинг қийматини максималлаштириш керак демак, $Z=t_1+t_2+\ldots+t_m$ функция минимал қиймат олиши керак. Шундай қилиб, қуйидаги чизиқли программалаш масаласи ҳосил бўлади:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \qquad (5)$$

(4) ва $t_i \ge 0$ шартларида
функцияни минималлаштириш талаб қилинади.

Бу масалани ечиб, t_i қийматлар ва $1/V$ катталик ҳамда ундан фойдаланиб $x_i=Vt_i$ қийматлар топилади. В ўйновчининг оптимал стратегиясини топиш учун қуйидаги шартларни ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \le V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \le V, \\ ------------------ \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \le V, \end{cases} \qquad (6)$$

ёки тенгсизликларни V га бўлиб,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \le 1, \\ ------------------ \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nm}u_n \le 1 \end{cases} \qquad (7)$$

системани ҳосил қиламиз. Бунда $u_i=y_i/V$.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ – номаълумни шундай номанфий қийматларини танлаш керакки, (7) шарт бажарилиб

$$W=u_1+u_2,+\ldots,+u_n=1/V$$

функция максимум қийматга эришсин. Шундай қилиб, матрицали ўйиннинг ечимини топиш ўзаро симметрик бўлган қўшма чизиқли программалаш масаласига келтирилади. Бу қушма масалалардан бирини ечиб, иккинчисининг ечимини ундан фойдаланиб ҳосил қилиш мумкин.

Энди юқоридагиларнинг қулланишига доир қуйидаги мисолни келтирамиз.

Мисол. Матрица билан берилган қуйидаги уйиннинг ечимини топинг:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4\,3\,4\,2 \\ 3\,4\,6\,5 \\ 2\,5\,1\,3 \end{pmatrix}$$

Ечилиши. уйиннинг оптимал стратегиясини топиш учун қуйидаги ЧПМни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4\mathbf{t}_1 + 3\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3 \geq 1, \\ 3\mathbf{t}_1 + 4\mathbf{t}_2 + 5\mathbf{t}_3 \geq 1. \\ 4\mathbf{t}_1 + 6\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \geq 1. \\ 2\mathbf{t}_1 + 5\mathbf{t}_2 + 3\mathbf{t}_3 \geq 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathbf{t}_i \geq 0, \qquad \mathbf{i} = \overline{1,3}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \quad (\min)\ .$$

В уйинчининг оптимал стратегиясини топишнинг иккиланган масаласи қуйидагича булади:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \leq 1, \end{cases}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad (\max).$$

Бу иккиланган масаланинг ечими U=(3/14; 0; 0; 1/14), W_{max}=1/V=2/7 булади. Демак, V=7/2, ҳамда $y_j = Vu_j$ тенгликдан В уйинчининг оптимал стратегияси Y=(3/4; 0; 0; 1/4) эканлигини топамиз. Дастлабки (8) масала ечими T=(1/7; 1/7; 0) ва X=(1/2; 1/2; 0) – оптимал стратегия булади.

4-§. Ноаниқлик шароитида ечимлар қабул қилиш. Табиатга қарши уйин

Бу уйинда табиат ва ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) қатнашади. Табиатнинг T_1, T_2, ..., T_n ҳолатлари мавжуд бўлиб, уларга қарши ЕҚҚШ да m та A_1, A_2, ..., A_m тадбирлар мавжуд. Табиатга қарши ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин,

$A_i \backslash T_i$	T_1	T_2	...	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m1}	...	a_{mn}

Бу ерда, a_{ij} табиатнинг T_j ҳолатида ЕққШ A_i тадбирни амалга оширганда унинг кўрадиган фойдаси ёки зарарини кўрсатади. Агар a_{ij} – фойда (ютуқ) бўлса, бу матрица «ютуқлар матрицаси» дейилади, a_{ij} – ютқазув (зарар) бўлгандаги матрица «тўловлар матрицаси» дейилади.

Бу матрица асосида ЕққШ ўзининг фойдасини (зарарини) максималлаштирувчи (минималлаштирувчи) йўлни (соф стратегияни) танлайди.

Бундай стратегияни танлаш учун минимакс, Вальд, Лаплас, Сэвидж ва Гурвиц мезонларидан фойдаланиш мумкин. Ана шу мезонлар билан танишамиз.

Лаплас мезони.

Бу мезонда табиатнинг барча T_1, T_2, ..., T_n ҳолатлари тенг эҳтимол билан рўй беради деган фикр асос қилиб олинган. Табиатнинг T_1, T_2, ..., T_n ҳолатлари $q_1=q_2=\ldots=q_n=1/n$ эҳтимол билан рўй берсин. У ҳолда агар ЕҚҚШ A_1 йўлни танласа, унинг ютуғи,

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\mathbf{n}}\mathbf{a}_{11} + \frac{1}{\mathbf{n}}\mathbf{a}_{12} + \ldots + \frac{1}{\mathbf{n}}\mathbf{a}_{1n}$$ бўлади ёки,

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\mathbf{n}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{1j}$$ бўлади

Агар ЕҚҚШ A_2 йўлни танласа, унинг ютуғи,

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

бўлади ва ҳоказо.

Агар ЕҚҚШ A_m йўлни танласа, унинг ютуғи бўлади.

$$Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

ЕҚҚШ максимум ютуқ берувчи йўлни, яъни

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_{j} a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_{j} a_{2j}, \ldots, \frac{1}{n}\sum_{j} a_{nj}\right] = \max_{i} \frac{1}{n}\sum_{j} a_{ij},$$

йўлини танлайди.

1-мисол. Қуйидаги ютуғлар матрица кўринишида берилган табатга қарши уйинни ечинг.

B_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n$
A_1	7	11	14	24	1/4 (7+11+14+24)=14
A_2	20	16	14	22	1/4(20+16+14+22)=18
A_3	9	8	10	23	1/4(9+8+10+23)=12.5
A_4	18	26	18	14	1 1(18+26+18+14)=19
q_j	÷	1/4	1/4	1/4	max $(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n)$ $(a_{41}+a_{42}+\ldots+a_{4n})=19$

Ечиш. ЕҚҚШ нинг ҳар бир стратегиясига мос келувчи $a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n$ сумманинг қиймати жадвалнинг охирги устунда келтирилган. Лаплас мезонига кўра ЕҚҚШ A_4 соф стратегияни танласа, унинг ютуғи энг кўп 19 га тенг бўлади.

Байес мезони

Бу мезонда табиатнинг ҳар бир T_j ҳолати маълум бир q_j эҳтимол билан рўй бериши аниқланган бўлади. Масалан T_1 ҳолатнинг рўй бериш эҳтимоли q_1, T_2 ҳолатники q_2,..., T_n ҳолат рўй бериш эҳтимоли q_n га тенглиги аниқланган. Бу ҳолда ЕҚҚШ ўз ютуғини максимал қилувчи йўлни яъни, берувчи йўлни танлайди,

$$\max_i \sum_j a_{ij} q_j$$

2-мисол. қуйидаги ютуғлар матрицаси кўринишида берилган ўйиннинг ечимини Байес мезони ёрдамида топинг.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+...+a_{in}q_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
P_j	0.1	0.2	0.5	0.2	max_i $\max(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+...+a_{in}q_n)=6.2$

Ечиш. ЕҚҚШ I стратегияни танласа, унинг ютуғи, 2·0,1+3·0,2+4·0,5+7·0,2=4,2 га тенг бўлади. II стратегиядаги ютуғ 3·0,1+6·0,2+5·0,5+4·0,2=4,8. Худди шунингдек III стратегиядаги ютуғ 6,2 бўлади.

Бу мисолда оптимал стратегия A_1. Бу йўлни танлаганда ЕҚҚШ 6.2 ютуққа эга бўлади.

Вальд мезони.

Бу мезон ўйинлар назариясидаги максимин-минимакс усулига ўхшайди. Агар a_{ij}–ютуқ бўлса, ЕҚҚШ

$$\max_i(\min_j a_{ij})$$

ни таъминловчи йўлни танлайди.

a_{ij}-ютқазув бўлса, min(max a_{ij})ни таъминловчи A_i йўлни танлайди.

3-мисол.

(a_{ij} ютқазув). қуйидаги жадвалда берилган ўйинни Вальд мезони билан ечинг.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$Max_j(a_{ij})$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$min_i\{max_j(a_{ij})\}=22$

Ечиш. Масалани ечиш жараёни жадвалда амалга оширилган. Масалан, A_1 стратегия учун max(7,11,14,24)=24, A_2 стратегия учун max(20,16,14,22)=22 A_3 стратегия учун max(9,8,10,23)=23 ва A_4 стратегия учун max(18, 26, 18, 14)=26 топилади ҳамда

$$\min_i\{\max_i a_{ij}\} = \min(24,22,23,26) = 22$$ аниқланади.

Демак, оптимал стратегия A_2 ва унга мос келувчи ютқазув 22 бўлади.

Сэвидж мезони

Сэвидж мезони ҳам минимакс принципига асосланган. Фақат бунда (a_{ij})– тўловлар ёки ютуғлар матрицаси ўрнига таваккалчилик матрицаси деб аталувчи (r_{ij}) матрица ишлатилади. Бу матрица элементлари қуйидагича топилади:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_i - a_{ij}, агар\ a_{ij}$$ *– ютуғ бўлса*

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij} = a_{ij} - \alpha_i, агар\ a_{ij} -$$ *ютқазув бўлса*

Бу ерда, $\beta_j(\alpha_j)$-табиатнинг T_j ҳолатидаги ЕҚҚШнинг максимал ютуғи (минимал ютқазув). r_{ij}-ЕҚҚШнинг таваккалчиликдан кўрган зарари.

4-мисол. Қуйидаги ўйинни Севидж мезони билан ечинг.

T_j A_i	T_1	T_2	$max_j(a_{ij})$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$min_i\{max_j(a_{ij})\}=100000$

Бу ўйинда ЕҚҚШ A_2 йўлни танласа, унинг минимал ютқазуви 100000 бўлади. Лекин бу ерда табиатнинг T_1 ҳолати ҳам, T_2 ҳолати ҳам бўлиши мумкин. Табиатнинг аниқ ҳолати ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун таваккалчилик матрицасини тузамиз,

T_j A_i	T_1	T_2	$max_j(a_{ij})$
A_1	10000	0	10000
A_2	0	99100	99100
			$min_i\{max_j(r_{ij})\}=10000$

$(r_{ij}=a_{ij}-mina_{ij})$. Жадвалдан кўринадики $maxr_{1j}=10000$ $maxr_{2j}=99100$, ҳамда Демак A_1 оптимал стратегия экан.

Гурвиц мезони

Бу мезон ясама мезондан иборат бўлиб, унга асосан a_{ij} миқдор - даромадни билдирганда оптимал стратегия сифатида қуйидаги шартни қаноатлантирувчи стратегия танланади:

$$\max_i\left[\alpha\max_j a_{ij}+(1-\alpha)\min_j a_{ij}\right]\quad \alpha\in[0,1]$$

a_{ij} – ютқазувни билдирганда эса,

$$\min_i\left[\alpha\min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\right] \quad \alpha\in[0,1]$$

α - ечим қабул қилиш жараёнини субъектив баҳоловчи параметр. Агар α=1 бўлса, вазият оғир ва уни тўғирлаш учун чоралар кўриш кераклиги талаб қилинади. α=0 да вазият яхши (оптимал) ҳеч қандай чора кўрмаса ҳам бўлади деб фараз қилинади. α ни [0,1] оралиқдаги қиймати оптимистик ёки пессимистик назарга қараб танланади.

5-мисол. Табиат билан бўлган ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси билан берилган бўлсин.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

α = 0,4.

Бу ўйинга Гурвиц мезонини қўллаб оптимал стратегияни топамиз. Бунинг учун қуйидаги кўринишдаги жадвал чизамиз.

$$y = [\alpha\min_i a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}]$$

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	$min_j(a_{ij})$	$max_j(a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51.8
A_2	24	75	23	23	75	54.2
A_3	70	16	20	16	70	48.4
A_4	16	27	13	13	27	21.4
						$min_i\gamma=$ 21.4

a_{ij} – ютқазув бўлганда оптимал стратегия A_4 дан иборат экан. Агар a_{ij} – даромад бўлса, у ҳолда ечим қуйидаги кўринишда топилади:

$$y=\left[\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\min_j a_{ij}\right]$$

T_j \ A_i	T_1	T_2	T_3	$min_j(a_{ij})$	max_j (a_{ij})	γ
A_1	71	24	23	23	71	42.2
A_2	24	75	23	23	75	43.8
A_3	70	16	20	16	70	37.6
A_4	16	27	13	13	27	18.6
	Оптимал стратегия A_2					$max_i\gamma=43.8$

6-мисол. Савдо корхонасида 500 бирлик мавсумий маҳсулот сотилмай қолган бўлсин. Бу маҳсулотнинг олдинги нархи 20 бирликни ташкил этган бўлсин. Энди савдо корхонаси олдида маҳсулотнинг нархини тушириш масаласи турибди. Маҳсулот нархини неча фоизга туширганда унинг кўрадиган зарари минимал бўлади?

Савдо корхонаси маҳсулот нархини 20% (A_1 йўл), 30% (A_2 йўл), 40% (A_3 йўл), 50% (A_4 йўл) туширишга мўлжаллайди. Бу йўлларни ЕққШнинг стратегиялари деб қараймиз. «Табиат»нинг иккита йўли бор: 1) талабнинг кам эгилувчан бўлишлиги (T_1 йўл) ва 2) талабнинг кўп эгилувчанлиги (T_2 йўл). Ана шуларни назарга олиб қуйидаги жадвалларни тузамиз, бу ерда: 12 – бир бирлик маҳсулотни савдо корхонасига келтириш учун сарф қилинадиган ҳаражат.

I жадвал

ЕҚҚШ стратегия	нархининг тушиши %	эски баҳоси	Янги баҳоси	сотиладиган товар миқдори	куриладиган зарар T_1
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	4400=500·12-100·16 3900=500·12-14·150 3700=500·12-10·230 3360=500·12-12·220				4400=500·12-10·230

Худди шунингдек, жадвал талаб эгилувчанлиги кучли булган ҳол учун тузилади.

II жадвал

ЕҚҚШ стратегия	Нархининг тушиши %	эски баҳоси	янги баҳоси	сотиладиган товар миқдори	кўриладиган зарар T_2
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I ва II жадвалдан фойдаланиб тўловлар матрицасини тузамиз ва Вольт мезони қўллаб ечамиз,

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$max_i(a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	110	3000
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min_i max\ a_{ij}$ = =3360

Демак, савдо корхонаси маҳсулот нархини 40 фоизга туширганда зарар минимал бўлади, яъни 3360 га тенг бўлади.

Масалани Лаплас мезонига асосан ечамиз:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n$
A_1	4400	3600	4000
A_2	3900	1100	2500
A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
q_i	1/2	1/2	max_i $(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\ldots+a_{in}q_n)$=2280

Бу мезон бўйича ҳам нарх 40% туширилса, зарар 2280 бўлади.

Севидж мезонини қўллаш учун (r_{ij}) матрица тузамиз ва оптимал стратегияни топамиз:

T_j A_i	T_1	T_2	$max_j a_{ij}$
A_1	1100		2500
A_2	600		600
A_3	0		100
A_4	400		400
			$min_i maxr_{ii} = 100$

бу мезонга кўра ҳам нарх 40 фоизга туширилиши маъқул.

Таянч сўз ва иборалар.

Ўйин, рақобатли ҳолат, 0-суммали ўйин, матрицали ўйин, стратегия, оптимал стратегия, чекли ва чексиз ўйин, тўлов, тўловлар ва ютуғлар матрицаси, ўйиннинг қуйи баҳоси, ўйиннинг юқори баҳоси, ўйиннинг ечими (баҳоси), максимин ва минимакс стратегиялар, эгар нуқта, аралаш стратегия, соф стратегия, рақобатли бўлмаган ҳолат, табиатга қарши ўйин, “таваккалчилик” матрицаси, эҳтимоллик мезонлари.

Назорат саволлари

1. Ўйинлар назариясининг предмети нимадан иборат?
2. Ўйиннинг қандай турлари мавжуд?
3. Жуфтли ўйин нима?
4. Матрицали ўйин нима?
5. 0-суммали ўйин қандай бўлади?
6. Ютуғлар матрицаси қандай маънога эга?
7. Ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоси нима?
8. Минимакс ва максимин стратегияларни таърифланг.
9. Аралаш стратегия нима?
10. Соф стратегияни таърифланг.
11. Аралаш стратегиялардаги ечимда ўйиннинг ютуғи нимага тенг?
12. Табиат билан ўйин деганда қандай ўйинларни тушунасиз?
13. Табиат билан ўйин рақобатли ўйиндан нима билан фарқ қилади?
14. Вальд мезони қандай?

15.Лаплас мезонини таърифланг.

16.Сэвидж мезони қандай?

17.Гурвиц мезони қандай мезон?

18.Мезонлар орасидаги фарқ нимадан иборат?

Масалалар.

1. Ютуқ матрицалари:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

бўлган ўйинлар учун тўлов функциясини ёзинг, ўйновчиларнинг оптимал стратегияларини ва ўйин баҳосини топинг.

2. Ютуқ матрицалари:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлган ўйинларга эквивалент чизиқли программалаш масаласини тузинг ва ўйиннинг ечимини топинг.

3. $A=(a_{ij})$ ўйин матрицаси бир неча эгар нуқгага эга бўлиши мумкинми?

4. Қуйидаги берилган жадвал бўйича ютуғларни максималлаштирувчи стратегияни топинг:

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
P	0.2	0.7	0.1

5. Маҳсулот очиқ ҳавода сақлансин дейлик, табиатнинг 4 та ҳолати T_j ($j=1,2,3,4$) бўлиши мумкин (ёмғир ёғади, эҳтимоли $P_1=0,1$, ҳаво очиқ бўлади, эҳтимоли $P_3=0,5$ ва эҳтимоллари $P_2=P_4$ бўлган иккита ўртача ҳолат). А ўйновчи шахс (ечим қабул қилувчи шахс) табиат ҳолатларига қарши 3 та чора-тадбирларни қўллаши ва натижада турли даромадларга эга бўлиши мумкин. Қуйида даромадлар матрицаси келтирилган:

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	2	4	7
A_2	3	6	5	4
A_3	16	8	7	3
P	0,1	0,2	0,5	0,2

Ўйновчининг оптимал стратегиясини Байес мезони асосида топинг.

6. Келтирилган даромадлар матрицасидан фойдаланиб А шахснинг оптимал стратегиясини Лаплас мезони асосида топинг.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	7	11	14	24
A_2	20	16	14	22
A_3	9	8	10	23
A_4	18	26	18	14

7. Табиат билан булган ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси орқали берилган.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Вальд, Сэвидж ва Гурвиц мезонлари асосида ўйиннинг ечимини топинг.

8. Қуйидаги жадвалда берилган маълумотлар асосида табиат билан ўйинни ечинг (тўловлар матрицаси берилган).

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	3	3	0	8
A_2	6	2	4	0
A_3	0	0	5	2
A_4	7	1	6	6

АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Банди Б. Основы линейного программирования – М.: Радио и связь, 1989.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988.

3. Исследование операций /Под.ред.Моудера Дж., Элмаграби С. М.: Мир, 1985. I и II тома.

4. Кузнецов Ю.М. Кузубов В.И., Волощенко А.Б. математическое программирование – М.: Высшая школа, 1980.

5. Математическое программирование /Под.ред. Кремера Н.Ш. – М.: Финстатинформ, 1996.

6. Джемилев Н.И., Эйдельнант М.И. Сборник задач по линейному программированию. Т.: «Ўқитувчи», 1990.

7. Сафаева Қ., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари (ўқув қўлланма)

I қисм, Т.: «Ўқитувчи», 1984.

II қисм, Т.: «Ўқитувчи», 1990.

8. Сафаева Қ. Джемилев Н.И. Ноаниқлик ва таваккалчилик шароитида ечимлар қабул қилиш назарияси. Ўқув қўлланма. Т.: ТМИ, 1996.

9. Сафаева Қ. Математик программалашдан маъруза матнлари тўплами. ТМИ. 2003 й.

10. Кузнецов А.В., Новиков Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программариванию. Минск. «Вышсйшая школа», 1985 г.

11. Исследование операций. Учебное пособие для ВУЗов. Под редакцией Н.Ш.Кремра. М.: Банки и биржи. ЮНИТИ, 1997.

ҚЎШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Таха Х. Введение в исследование операций. Перевод с английского. Том 1,2. М: Мир, 1991.

2. Райцкас Р.Л. и др. Количественный анализ в экономике. М.: Мир, 1992.

3. Макаров И.М. и др. Теория выбора и принятия решений. М: Наука, 1992.

4. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1999.

5. Хазанова Л.Э. Модели и методы исследования операций. Часть 1. Линейная оптимизация и транспортные сети. – М.: Из-во Стакин, 1994.

6. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование экономических систем. Динамическое программирование – М.: ИНЭУП, 1997.

7. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике – М.: Издательство БЕК, 1998.

8. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. М.: Аудит, 1997.

9. Уотшем Т.Дж., Парраноу К. Количественные методы в финансах. М.: «Финансы». 1999 г.

10. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского. Издательство «Прогресс». М.: 1985 г.

11. Сакович В.А. Исследование операций. Минск. «Вышэйшая школа», 1991.

12. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. М. «Высшэйшая школа», 1991 г.

МУНДАРИЖА

Қумри САФАЕВА

Математик программалаш

(Ўқув қўлланма)

Тошкент - 2004

Нашр учун масъул	Н.А. Халилов
Таҳририят мудири	М.М. Миркомилов
Муҳаррир	А.Т. Эшов
Рассом	Ҳ.О. Қутлуқов
Мусаҳҳиҳ	Н.А. Мадёрова
Компьютерда саҳифаловчи	Л.А. Зокиров

Босишга рухсат этилди 25. 02. 2004 й. Бичими 84x108 1/32
Офсет қоғози. Шартли босма табоғи 15,0. Нашр табоғи 14,8.
Адади 500. 266 - буюртма

"ЎАЖБНТ" маркази, 700078, Тошкент, Мустақиллик
майдони, 5.

Андоза нусхаси Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта
махсус таълим вазирлигининг "ЎАЖБНТ" маркази
компьютер бўлимида тайёрланди.

TOSHKENT AXBOROT
TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETINING
матбаа бўлими. Тошкент ш., Юнусобод т.,
Амир Темур кўчаси, 108-уй