Т. ЁҚУБОВ
С. КАЛЛИБЕКОВ

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Т. ЁҚУБОВ, С. КАЛЛИБЕКОВ

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Ўзбекистон республикаси халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари ва университетларининг математика факультетлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

Қайта ишланган ва тўлдирилган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ" 1996

Тақризчилар: Тошкент Давлат университети алгебра ва сонлар назарияси кафедраси, физика-математика фанлари номзоди **А. С. Юнусов,** катта ўқитувчилар **Х. Алламбергенов, С. Тажетдинов.**

Мазкур ўқув қўлланма педагогика институтлари ва университетларининг математика факультетлари талабаларига мўлжалланган. Ундан мактаб ўқитувчилари ва юқори синф ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин. Қўлланмада жумлалар алгебраси, жумлалар ҳисоби, предикатлар алгебраси, математик назариялар ва алгоритмлар назарияси элементлари баён этилган. Назарий материалларни баён қилишда мисоллардан кенг фойдаланилган. Ҳар қайси боб сўнгида мустақил ечиш учун машқлар келтирилган.

Ё $\frac{1602020000-150}{353(04)-96}$ 74 — 94

ISBN 5—645—01251—1

СЎЗ БОШИ

Математик мантиқ математиканинг тез ривожланиб бораётган бўлимларидан биридир. Буни математик мантиқнинг жуда кўп амалий масалаларни, чунончи ҳисоблаш машиналари ва автоматик системаларни лойиҳалаш, программалаштириш ва кибернетика масалаларини ҳал этишда катта роль ўйнаши билан тушунтириш мумкин. Педагогика институтлари математика факультетларининг ўқув режасига 1978 йили қайтадан киритилган математик мантиқ курси бўлажак ўқитувчиларни математик мантиқ фани асослари билан таништиради.

Электрон ҳисоблаш машиналарининг халқ хўжалигида, инсонлар ҳаётида роли юксак даражада ошганлиги туфайли аҳолининг „компьютерли билимдонлиги"ни кўтариш ҳозирги даврнинг энг асосий масалаларидан бирига айланди. Бу масалани ечиш йўлларидан бири бўлажак (ва мавжуд) ўқитувчиларни ҳисоблаш техникаси (ҳисоблаш математикаси), электрон ҳисоблаш машиналари, программалаштириш асослари билан таништириш ҳамда ўқитувчилар орқали мазкур билимларни келажак авлодга узатишдир.

Шу мақсадда кейинги йилларда педагогика институтлари ўқув режасига жиддий ўзгартиришлар киритилди: ўқув режасида информатика ва ҳисоблаш техникаси асослари, ҳисоблаш техникаси ва алгоритмизация каби курслар пайдо бўлди. Бундан ташқари, мазкур фанларни ўрганишда математик мантиқ алоҳида ўрин тутганлиги учун унга ажратилган ўқув соатлари оширилди. Бу ўзгаришлар математик мантиқни математика факультетларида ўрганиш алоҳида аҳамият касб этаётганлигидан дарак беради.

Ўқувчилар диққатига ҳавола этилаётган ушбу ўқув қўлланмаси муаллифларидан бирининг (Т. Ёқубов) Математик логика элементлари, „Ўқитувчи", Тошкент, 1983 й. китоби ўзбек ўқувчилари учун ёзилган дастлабки ўқув қўлланмаси эди.

Юқорида айтилган ўзгаришлар педагогика институтлари талабалари учун янада мазмунлироқ янги ўқув қулланмасини ёзишни тақозо қилди. Муҳтарам ўқувчи диққатига ҳавола этилаётган ушбу ўқув қулланмаси юқоридаги талабларга жавоб беради, деб ўйлаймиз.

Ўқув қўлланмаси 5 та бобдан иборатдир. I бобда жумлалар алгебраси баён этилган бўлиб, у ўз мазмунига кўра юқорида айтилган ўқув қўлланмасида баён этилган мулоҳазалар алгебрасидан фарқ қилади. Бу бобда жумлалар алгебрасининг функциялари, уларнинг баъзи хоссалари, функцияларни формулалар ёрдамида ифодалаш, функция ва формулаларнинг нормал формалари ва бошқа масалалар ўрганилади

Жумлалар алгебрасини формал аксиоматик асосда қуриш жумлалар ҳисоби бўлиб, у II бобнинг мазмунини ташкил қилади. Бунда жумлалар ҳисобининг аксиомалари системаси сифатида С. Клини томонидан таклиф этилган аксиомалар системаси олинди (юқорида айтилган ўқув қўлланмасида П. С. Новиков томонидан киритилган аксиомалар системаси олинган эди). Жумлалар ҳисобининг ҳар бир келтириб чиқарилувчи формуласи жумлалар алгебрасининг умумқийматли формуласи эканлигини ва аксинча, жумлалар алгебрасининг ҳар бир умумқийматли формуласи жумлалар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формула эканлигини кўрсатиш II бобнинг асосини ташкил этади.

Кейинги боб жумлалар алгебрасини ўз ичига олувчи предикатлар алгебрасига бағишланган. Кванторлар ва улар орасидаги боғланиш, кванторли формулалар ва уларни шакл алмаштириш, умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидалари ва бошқалар III бобда етарлича батафсил қараб чиқилган.

„Математик назариялар" деб номланган IV бобда дастлаб ҳар қандай математик назариянинг асосида ётувчи формал тил — биринчи тартибли предикатлар ҳисоби баён этилган. Сўнгра эса математик назариялардан намуналар келтирилиб, IV бобнинг сўнгида формал арифметика кўриб чиқилади.

Ўқув қўлланмасининг охирги бобида алгоритмлар назарияси элементлари баён этилган.

Тарихан алгоритм тушунчаси бир неча йўналишда ривожланган ва аниқланган: булар Тьюринг—Пост машиналари, қисмий-рекурсив функциялар ва Марковнинг нормал алгорифмлар назариясидир. Ўзаро эквивалент бўлган ушбу тушунчалар орасида Тьюринг—Пост машиналари назарияси ўзининг кўргазмалилиги билан ажралиб туради. Шу нуқтаи назардан алгоритм тушунчасини аниқлашда биз мазкур назариядан кенг фойдаландик. Аммо бу масалага фақат бир томонлама ёндашмаслик учун қўлланмада қисмий-рекурсив функциялар назариясининг дастлабки тушунчаларини келтириб, ҳар қандай қисмий-рекурсив функция мос Тьюринг машинасида ҳисобланади, деган теорема исботланди.

Ундан ташқари, V бобда алгоритмик ечилувчи ва алгоритмик ечилмайдиган масалалар ҳақида умумий тарзда маълумот берилган.

Ушбу ўқув қўлланмасида ишлатилган атамалар юқорида эслатилган китобдаги атамалардан бирмунча фарқ қилади. Масалан, биринчи китобда ишлатилган „мулоҳаза“ атамаси „жумла“, „айнан рост“ атамаси „умумқийматли“, „айнан ёлғон“ атамаси „радланувчи“ атамаси билан алмаштирилган. Бу атамалар, фикримизча, ҳақиқатга монандроқдир.

Мазкур ўқув қўлланмасидан мактаб ўқитувчилари ва ҳатто юқори синф ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин. Шу боисдан биз киритилаётган ҳар бир тушунчанинг мазмунини мисол ёрдамида очишга ҳаракат қилдик. Ўқув қўлланмасини ўқиш учун махсус билим талаб этилмайди.

Ўқув қўлланмаси ҳақидаги ҳар қандай танқидий фикр ва мулоҳазаларни китоб муаллифлари мамнуният билан қабул қиладилар.

Муаллифлар

I БОБ

ЖУМЛАЛАР АЛГЕБРАСИ

1-§. Жумлалар устида мантиқий амаллар (логик операциялар)

Одатда ўзбек тилида жумлалардан янги мураккаб жумлалар ҳосил қилиш учун бир неча мантиқий (логик) боғловчилардан фойдаланилади. Булар жумласига „ва“, „ёки“, „эмас“, „агар. . . бўлса, у ҳолда. . . бўлади“ ва бошка мантиқий боғловчилар киради. Бу мантиқий боғловчилар жумлалар устида бажариладиган мантиқий амаллардир.

Ўзбек тилидаги барча жумлалар тўпламини **V** билан, жумлаларни эса лотин алфавитининг бош ҳарфлари ёки индексланган бош ҳарфлар A, B, C, . . ., A_1, A_2, . . . билан белгилаймиз ҳамда уларни **ўзгарувчи жумлалар** ёки **пропозиционал ўзгарувчилар** деб атаймиз. Ҳар бир ўзгарувчи жумла фақат иккита: „рост“ ёки „ёлгон“ қийматга эга бўлиши мумкин. Қулайлик учун „рост“ ни 1, „ёлгон“ ни эса 0 билан белгилаймиз ҳамда уларни ўзгармас (константа) жумлалар деб атаймиз. N тўпламда қуйидаги мантиқий амалларни кўриб чиқайлик.

1. Конъюнкция (мантиқий кўпайтириш).

1-таъриф. A ва B жумлаларнинг *конъюнкцияси* деб, бу жумлалар бир пайтда рост бўлгандагина рост бўлувчи $A \wedge B$ жумлага айтилади.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Жумлалар конъюнкциясини AB каби белгилаш ҳам мумкин. $A \wedge B$ жумла „A ва B“ деб ўқилади. Конъюнкция амалининг таърифини жадвал кўринишда бериш ҳам мумкин.

2. Дизъюнкция (мантиқий қўшиш).

2-таъриф. A ва B жумлаларнинг *дизъюнкцияси* деб, бу жумлаларнинг камида биттаси рост бўлганда рост бўлувчи $A \vee B$ жумлага айтилади.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A \vee B$ жумла „A ёки B“ деб ўқилади

Жумлалар дизъюнкцияси таърифининг жадвал шакли қуйидагичадир:

3. Импликация (мантиқий хулоса).

3-таъриф. A ва B жумлаларнинг *импликацияси* деб A рост, B эса ёлғон бўлгандагина ёлғон бўлувчи $A \to B$ жумлага айтилади.

$A \to B$ жумла „агар A бўлса, у ҳолда B бўлади“, „A дан B келиб чиқади“ ёки „A бўлиши учун B нинг бўлиши зарур“ деб ўқилади.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$A \to B$ импликацияда A — импликациянинг шарти, B эса хулосаси дейилади.

3-таъриф ушбу жадвал ёрдамида ҳам берилиши мумкин:

Изоҳ. Математик мантиқда қараладиган жумлалар импликацияси жонли тилда ишлатиладиган импликациядан бирмунча фарқ қилади. Жонли тилда $A \to B$ ни ташкил этувчи A ва B жумлалар орасида маълум даражада маъновий боғлиқлик (яқинлик) бўлиши талаб этилса, математик мантиқда эса бундай талаб қўйилмайди — бу ерда A ва B жумлаларнинг мазмуни эмас, балки уларнинг қиймати эътиборга олинади. Масалан, A: „Қуш тўрт оёқлилар туркумига киради“, B: „13 — туб сон“ жумлалардан тузилган $A \to B$ импликация, яъни „Агар қуш тўрт оёқлилар туркумига кирса, у ҳолда 13 — туб сон“ мураккаб жумла рост қийматли деб ҳисобланади, ваҳоланки, жонли тилда бу каби жумлалар ишлатилмайди.

4. Эквиваленция (мантиқий тенгкучлилик).

A	B	$A \sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4-таъриф. A ва B жумлаларнинг *эквиваленцияси* деб, бу жумлалар бир хил қийматли бўлгандагина рост бўлувчи $A \sim B$ жумлага айтилади.

$A \sim B$ жумла „A бўлиши учун B бўлиши зарур ва етарли“, „A

B га эквивалент“ каби ўқилади. Эквиваленция таърифи юқори жадвал ёрдамида ҳам берилиши мумкин:

5. Инкор.

A	$\neg A$
1	0
0	1

5-таъриф. A жумланинг *инкори* деб A жумла рост бўлганда ёлғон, A ёлғон бўлганда эса рост бўлувчи $\neg A$ жумлага айтилади. $\neg A$ „A эмас“ каби ўқилади. Инкор амали ушбу жадвал ёрдамида ҳам аниқланиши мумкин:

Шундай қилиб, **V** тўпламда 4 та бинар (икки аргументли) ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$) ҳамда битта унар (бир аргументли) ($\neg$) мантиқий амални аниқладик. Булар асосий мантиқий амаллардир.

Албатта, жумлалар тўпламида аниқланиши мумкин бўлган бинар мантиқий амаллар ушбу амаллар билан чегараланмайди. Бинар мантиқий амалларни $f_i(A, B)$ билан белгиласак, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$ лар $f_1(A, B)$, $f_2(A, B)$, $f_3(A, B)$, $f_4(A, B)$ кўринишни олади. N да аниқланиши мумкин бўлган барча бинар мантиқий амаллар қуйидаги жадвалда келтирилган.

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0

Бу амаллардан f_5 ва f_6 лар: $f_5 = A \mid B$, $f_6 = A \downarrow B$ кўринишда белгиланади ва мос равишда „Шеффер штрихи“ ва „Пирс стрелкаси“ деб аталади. Бинар мантиқий амаллардан яна қуйидагиларни қайд этамиз: $f_8(A, B) = A \oplus B$, $f_{15}(A, B) \equiv 1$, $f_{16}(A, B) \equiv 0$. Булардан биринчиси „қатъий дизъюнкция“ ёки „2 модули бўйича қўшиш“ дейилса, кейинги иккитаси эса „константа амал“ (доимий амал) деб аталади.

2-§. Жумлалар алгебрасининг формулалари. Формулаларнинг ростлик қийматлари

1-таъриф. (**V**, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $\neg$) универсал алгебра *жумлалар алгебраси* дейилади.

Жумлалар алгебрасининг алфавити қуйидаги белгилардан иборат:

1. A, B, C, ..., A_1, A_2, ... — ўзгарувчи жумлалар.

2. $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\neg$ — мантиқий амаллар.

3. (,) — чап ва ўнг қавслар.

Жумлалар алгебрасининг асосий тушунчаларидан бири—формула тушунчасини киритамиз.

2-таъриф. 1) Ҳар бир ўзгарувчи жумла ва мантиқий константа формуладир.

2) Агар **A** ва **B** лар формула бўлса, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \sim \mathbf{B})$, $(\neg \mathbf{A})$ лар ҳам формуладир.

3) Бошқа формулалар йўқ.

1-мисол. $(((A \wedge (\neg B)) \to C) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg B)))$ ифода формуладир: A, B, C лар 1) га асосан, $(\neg B)$, $(A \vee (\neg B))$, $(A \vee C)$, $((A \wedge (\neg B) \to C)$, $((A \vee C) \wedge (\neg B))$, $(((A \wedge (\neg B)) \to C) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg B)))$ ифодалар эса 2) га асосан формуладир.

2-мисол. $(\neg A \to (\neg B)) \wedge C)$ ифода формула эмас, чунки A, B, C лар формула бўлсалар-да, аммо $\neg A$ ва бутун ифоданинг ўзи формула эмас. Биринчи ҳолда $\neg A$ ни ўровчи қавслар, иккинчи ҳолда эса бутун ифодани ўровчи чап қавс етишмайди.

Изоҳ. Формула тушунчасини киритишда биз қуюқ қора лотин ҳарфлардан фойдаландик. Бу ҳарфлар жумлалар алгебрасининг алфавитида бўлмаса-да, биз улардан формула ҳақида ахборот берувчи белгилар сифатида фойдаланамиз.

Юқоридаги мисоллардан кўринадики, формулалар таркибини қавслар мураккаблаштириб юборади. Бу мураккабликни юмшатиш мақсадида мантиқий амалларнинг „кучи“ (бажарилиш тартиби) тушунчасини киритамиз. Инкор энг „кучли“ мантиқий амал деб қабул қиламиз, формулаларни боғлаш „кучига“ қараб бошқа мантиқий амалларни қуйидаги тартибда жойлаштирамиз („кучи“ нинг пасайиши тартибида):

$$\wedge,\ \vee,\ \to,\ \sim.$$

Бундан ташқари, ҳожат бўлмаганда, формулани ўраб турувчи ташқи қавсларни ҳам ёзмасликка келишамиз. Бу келишувдан кейин 1-мисолда келтирилган формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(A \wedge \neg B \to C) \vee (A \vee C) \wedge \neg B.$$

3-таъриф. 1°. **A** формула ўзгарувчи жумла бўлса, унинг формула остиси ўзидан иборатдир.

2°. **A** формула $\mathbf{B} * \mathbf{C}$ кўринишда бўлиб, бунда $*$

белги $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ амалларнинг бирортаси бўлса, унинг формула-остилари ўзидан ҳамда **B** ва **C** ларнинг барча формулаостиларидан иборатдир.

3°. **A** формула $\neg$**B** кўринишда бўлса, унинг формулаостилари ўзидан ва **B** формуланинг бурча формулаостиларидан иборат.

3-мисол. 1-мисолда келтирилган формуланинг барча формулаостилари қуйидагилардир (қавслар камайтирилгач):

$$(A \wedge \neg B \rightarrow C) \vee (A \vee C) \wedge \neg B,$$
$$A \wedge \neg B \rightarrow C,\ (A \vee C) \wedge \neg B,$$
$$A \wedge \neg B,\quad A \vee C,\quad \neg B,\quad A,\ B,\ C.$$

Агар **A** формуланинг таркибида $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчилар қатнашган бўлса, бу формулани $\mathbf{A}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ каби ҳам ёзиш мумкин.

Изоҳ. Бундан буён „$\doteq$“ белги „... дан иборат“ ёки „... ни билдиради“ деган маъмунда ишлатилади. Масалан, $\mathbf{A}(A, B, C) \doteq A \wedge \neg B \rightarrow C$ ифода „$\mathbf{A}(A, B, C)$ формула $A \wedge \neg B \rightarrow C$ дан иборат“ ёки „$\mathbf{A}(A, B, C)$ $A \wedge \neg B \rightarrow C$ (формула) ни билдиради“ деб ўқилади.

$\mathbf{A}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ формуладаги $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлаларнинг ҳар бири 1-§ да айтилганидек фақат 1 ёки 0 қиймат қабул қилади. Ҳар бир ўзгарувчига муайян қиймат берилса, натижада ўзгарувчилар қийматларидан тузилган тартибланган n лик (тизма) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ҳосил бўлади: бунда $\alpha_i = 1$ ёки 0, $(i = \overline{1, n})$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тизманинг *i-координатаси*, n натурал сон эса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тизманинг *узунлиги* дейилади. Баъзан $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тизма узунлиги n га тенг бўлган *кортеж* ёки *вектор* деб ҳам аталади. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ тизмалар ҳар бир $i = 1, 2, \ldots, n$ учун $\alpha_i = \beta_i$ бўлгандагина тенг ҳисобланади. Демак, бир хил узунликка эга бўлган иккита тизма бир-биридан фарқ қилиши учун улар камида битта координатаси билан фарқ қилиши кифоядир. Узунлиги n га тенг бўлган тизмалар сони 2^n та эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — тизма, $\mathbf{A}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — жумлалар алгебрасининг ихтиёрий формуласи бўлсин. $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ифода берилган формуланинг берилган тизмадаги қиймати дейилади. Табиийки, $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ҳам 1 ёки 0 га тенгдир. Буни тўлиқроқ тушунтириш учун формуланинг берилган тизмадаги қийматини формула таърифига асосланган ҳолда унда қатнашган мантиқий амаллар сони бўйича индуктив аниқлаймиз.

4-таъриф. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуланинг *ранги* деб унда қатнашган барча мантиқий амаллар сонига айтилади. Алоҳида олинган ўзгарувчи жумла ёки мантиқий константанинг ранги таърифга кўра 0 деб олинади. Формула ранги $\mathrm{rang}(\mathbf{A})$ каби белгиланади.

4-мисол. $\mathbf{A}(A, B, C) \doteq \neg(A \vee \neg B \wedge C) \vee (\neg A \to B \wedge C)$ формуланинг ранги 8 га тенг.

5-таъриф. 1°. Агар $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \doteq A_i$, $(i = \overline{1,n})$, бўлса (яъни $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = 0$ бўлса), у ҳолда $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_i$ бўлади.

2°. Ранги $m \geqslant 1$ дан кичик бўлган барча формулаларнинг берилган тизмадаги қиймати аниқланган бўлиб, $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ эса ранги m га тенг бўлган формула бўлсин. У ҳолда $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула $\mathbf{C}(A_1, \ldots, A_n) * D(A_1, \ldots, A_n)$ кўринишда бўлиб,

а) $* - \wedge, \vee, \to, \sim$ ларнинг бири,

б) $\mathbf{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ва $\mathbf{D}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ лар аниқлангандир.

Бу ҳолда $\mathbf{A}$ формуланинг $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмадаги қиймати $\mathbf{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) * \mathbf{D}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ бўлади.

3°. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \doteq \neg\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$, $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < m$ ва $\mathbf{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ аниқланган бўлсин. У ҳолда $\mathbf{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \neg\mathbf{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ бўлади.

Демак, $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула ҳақида тўлиқ маълумотга эга бўлиш учун 2^n та тизманинг ҳар бирида унинг қийматини ҳисоблаб чиқиш зарур. Буни ростлик жадвали деб аталувчи жадвал ёрдамида бериш мумкин. Шу мақсадда формуланинг барча формулаостилари топилади ҳамда ўзгарувчи жумлалардан бошлаб барча формулаостилар кетма-кет жадвал устунларига ёзиб чиқилади (бунда берилган формула жадвалнинг охирги ўнг устунини эгаллайди). Ўзгарувчи жумлалар остига тизмалар ёзиб чиқилгач, бу тизмаларда бошқа формулаостиларнинг (жумладан, формуланинг ўзининг ҳам) қийматлари ҳисобланади.

5-мисол. $(A \vee \neg B) \wedge \neg C \to A \wedge C$ формуланинг қийматларини ростлик жадвали ёрдамида ҳисоблайлик.

Бу формуланинг барча формулаостилари қуйидагилардир:

$$A, B, C, \neg B, \neg C, A \vee \neg B, (A \vee \neg B) \wedge \neg C,$$
$$A \wedge C, (A \vee \neg B) \wedge \neg C \to A \wedge C.$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A\vee\neg B$	$(A\vee\neg B)\wedge$	$\neg C$	$A\wedge C$	$(A\vee\neg B)\wedge$ $\wedge\neg C\to A\wedge C$
1	1	1	0	0	1	0		1	1
1	1	0	0	1	1	1		0	0
1	0	1	1	0	1	0		1	1
1	0	0	1	1	1	1		0	0
0	1	1	0	0	0	0		0	1
0	1	0	0	1	0	0		0	1
0	0	1	1	0	1	0		0	1
0	0	0	1	1	1	1		0	0

Ушбу жадвалдан берилган формула (ва унинг формулаостилари) ўзгарувчиларнинг қандай қийматлари тизмаларида рост, қандай тизмаларида ёлғон қиймат қабул қилиши яққол кўриниб турибди. Ростлик жадвали формула ҳақида етарли маълумот берса-да, у амалий жиҳатдан жуда ноқулайдир, чунки n етарли даражада катта бўлганда 2^n та тизмада формула ва унинг формулаостиларининг қийматларини ҳисоблаб чиқиш қийиндир.

3-§. Жумлалар алгебраси формулаларининг тенг кучлилиги

Таъриф $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ ва $\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ формулалар ўзгарувчи жумлалар қийматларининг барча тизмаларида бир хил қиймат қабул қилса, улар *тенг кучли формулалар* дейилади.

A ва **B** формулалар тенг кучли бўлса, бу $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ каби ёзилади.

1-мисол. $A\to B$ ва $\neg A\vee B$ лар тенг кучли формулалар эканлигини кўрсатамиз:

A	B	$\neg A$	$A\to B$	$\neg A\vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$A\to B\equiv\neg A\vee B$ эканлиги жадвалдан кўриниб турибди.

V тўпламда аниқланган „$\equiv$“ муносабат эквивалентлик муносабати эканини кўриш қийин эмас:

1. Ҳар қандай $\mathbf{A}$ формула ўз-ўзига тенг кучлидир, яъни $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$.

2. Агар $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ дир.

3. Агар $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ ва $\mathbf{B} \equiv C$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}$ дир.

Шундай қилиб, барча жумлалар тўплами V ўзаро кесишмайдиган эквивалентлик синфларига ажрайди — ҳар бир синфда ўзаро тенг кучли бўлган формулалар жойлашган бўлади.

$\mathbf{A}$ формула, $\mathbf{B}$ унинг формулаостиси бўлса, буни $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ кўринишда ёзамиз. Масалан. $\mathbf{A}(A, B, C) \doteq \neg A \wedge \wedge (A \to B) \vee B \wedge \neg C$ формуланинг $\mathbf{B} \doteq A \to B$ формулаостисини алоҳида ажратиб кўрсатиш керак бўлса, буни $\mathbf{A}(A \to B)$ кўринишда ёзиш мумкин. $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ да $\mathbf{B}$ ни қандайдир $\mathbf{C}$ формула билан алмаштириш натижасида $\mathbf{A}(\mathbf{C})$ формула ҳосил бўлади. Масалан, юқорида келтирилган формулада $\mathbf{B} \doteq A \to B$ ни $\mathbf{C} \doteq \neg A \vee B$ билан алмаштирсак, $\mathbf{A}(\mathbf{C}) \doteq \neg A \wedge (\neg A \vee B) \vee B \wedge \neg C$ формула ҳосил бўлади.

1-теорема. $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ — *формула*, $\mathbf{B}$ *унинг формулаостиси бўлсин. Агар* $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$ *бўлса, у ҳолда* $\mathbf{A}(\mathbf{B}) \equiv \equiv \mathbf{A}(\mathbf{C})$ *бўлади.*

Исботи. $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$ бўлгани учун $\mathbf{B}$ ва $\mathbf{C}$ формулалар уларда қатнашган ўзгарувчи жумлалар қийматларининг барча тизмаларида бир хил қийматларга эришади. $\mathbf{B}$ ва $\mathbf{C}$ ларнинг қийматлари 1 ёки 0 бўлгани учун ё $\mathbf{A}(1) \equiv \mathbf{A}(1)$, ё $\mathbf{A}(0) \equiv \mathbf{A}(0)$ бўлади. Бу эса $\mathbf{A}(\mathbf{B}) \equiv \equiv \mathbf{A}(\mathbf{C})$ эканини кўрсатади.

2-теорема. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$, $A_1, \ldots, A_n$ *лар* $\mathbf{A}$ *ва* $\mathbf{B}$ *формулаларнинг ҳар бирида қатнашган барча ўзгарувчи жумлалар,* $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ *лар эса ихтиёрий формулалар бўлса, у ҳолда* $\mathbf{A}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n)$ *бўлади; бунда ҳар бир* A_i $(i = \overline{1,n})$ *ўзгарувчи жумла берилган тенг кучлиликда неча жойда қатнашган бўлса, шунча жойда мос* $\mathbf{C}_i$ *формула билан алмаштирилади.*

Исботи. $B_1, \ldots, B_k$ лар $\mathbf{C}_i$ $(i = \overline{1, n})$ формула таркибида қатнашган барча ўзгарувчи жумлалар. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ бу ўзгарувчилар қийматлари тизмаси, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ эса $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ формулаларнинг $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ тизмадаги қийматлари тизмаси бўлсин. $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ узунлиги n бўлган тизма бўлиб, $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ бўлгани учун $\mathbf{A}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathbf{B}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ва демак, $\mathbf{A}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n) \equiv \text{Б}(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n)$ бўлади.

Юқорида исботланган теоремалардан бевосита қуйидаги натижалар келиб чиқади.

Агар $A_1 \equiv B_1$ ва $A_2 \equiv B_2$ бўлса, у ҳолда

1) $A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$, 3) $A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$,

2) $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, 4) $A_1 \sim A_2 \equiv B_1 \sim B_2$,

5) $\neg A_1 \equiv \neg B_1$ (ёки $\neg A_2 \equiv \neg B_2$)

бўлади.

Энди қуйида жумлалар алгебрасининг асосий тенгкучлиликлари билан танишамиз:

1°. $\neg\neg A \equiv A$; 2°. $A \wedge B \equiv B \wedge A$;

3°. $A \vee B \equiv B \vee A$; 4°. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$;

5°. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;

6°. $A \wedge A \equiv A$;

7°. $A \vee A \equiv A$;

8°. $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$;

9°. $A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \vee (A \vee C)$;

10°. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$;

11°. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$;

12°. $A \vee \neg A \equiv 1$;

13°. $A \wedge \neg A \equiv 0$;

14°. $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$;

15°. $A \to B \equiv \neg A \vee B$;

16°. $A \to B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$;

17°. $A \vee B \equiv \neg A \to B$;

18°. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$;

19°. $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$;

20°. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$;

21°. $A \sim B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;

22°. $A \sim B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$;

23°. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$; 24°. $A \vee A \wedge B \equiv A$;

25°. $A \wedge 1 \equiv A$; $A \wedge 0 \equiv 0$, $A \vee 1 \equiv 1$, $A \vee 0 \equiv A$.

A, **B**, **C** формулаларнинг ҳар бири 1 ёки 0 қиймат қабул қилгани учун бу ерда келтирилган барча тенгкучлиликларнинг ўринли эканлигини ўқувчи ростлик жадвали ёрдамида осон текшириб кўра олади.

Юқорида келтирилган тенгкучлиликларнинг баъзилари (1° — 7°) мантиқий амаллар ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) нинг хоссаларини (коммутативлик, ассоциативлик, идемпотентлик ва бошқа) кўрсатса, баъзилари (1° — 11°) улар орасидаги боғланишларни намойиш этади. Қолган тенгкучлиликлар (14° — 22°) эса бир амални бошқа амаллар орқали ифодалаш мумкин эканлигини кўрсатади. 10° ва 11° лар „де Морган тенгкучлиликлари“ дейилади.

4-§. Умумқийматли ва бажарилувчи формулалар

1-таъриф. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула ўзгарувчи жумлалар қийматларининг барча тизмаларида рост бўлса, бундай формула *умумқийматли* (умумрост) *формула* дейилади.

Умумқийматли формулалар баъзан „айнан рост формула“, „тавтология“ ёки „мантиқий қонун“ ҳам дейилади.

1-мисол. $A \to (B \to A)$ умумқийматли эканлигини унинг ростлик жадвалини қуриш ёрдамида кўрсатайлик:

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

2-таъриф. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула ўзгарувчи жумлалар қийматларининг барча тизмаларида ёлғон бўлса, бундай формула *радланувчи* формула дейилади.

Радланувчи формула баъзан „айнан ёлғон формула“ ёки „зиддият“ ҳам дейилади.

2-мисол. $A \land \neg(B \to A)$ радланувчи формула эканлигини кўрсатамиз:

A	B	$B \to A$	$\neg(B \to A)$	$A \land \neg(B \to A)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0

3-таъриф. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула ўзгарувчи жумлалар қийматларининг камида битта тизмасида рост бўлса, бундай формула *бажарилувчи формула* дейилади.

Бажарилувчи формуланинг намунаси сифатида 2-§ даги 4-мисолда келтирилган формулани олиш мумкин.

1, 2 ва 3-теоремалардан

а) ҳар бир умумқийматли формула бажарилувчи формула эканлиги;

б) ҳар қандай умумқийматли формуланинг инкори радланувчи формула ва аксинча, ҳар қандай радланувчи формуланинг инкори умумқийматли формула эканлиги кўринади.

Бундан ташқари, умумқийматли формулалар тўплами $V_{(1)}$ билан барча радланувчи формулалар тўплами $V_{(0)}$ орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эканлигини кўриш қийин эмас.

Дарҳақиқат, бунинг учун ҳар бир умумқийматли **A** формулага унинг инкори (радланувчи) $\urcorner$**A** формулани мос қўйиш кифоядир.

Бундан буён „**A** умумқийматли формула" деган иборани қисқача $\models$**A** кўринишда ёзамиз.

1-теорема **A** $\equiv$ **B** *бўлиши учун* $\models$**A** $\sim$ **B** *бўлиши зарур ва етарлидир.*

Теореманинг ўринли эканлиги „$\equiv$" муносабатнинг ва „$\sim$" амалнинг таърифларидан келиб чиқади.

4-таъриф. $A_i(A_1, \ldots, A_n)$ $(i = \overline{1, k})$ формулаларнинг ҳар бири рост бўлган ҳар қайси тизмада **B**$(A_1, \ldots, A_n)$ формула ҳам рост бўлса, **B** формула $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ формулаларнинг *мантиқий натижаси* дейилади.

$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ ёзув **B** формула $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ формулаларнинг мантиқий натижаси эканлигини, $\mathbf{A}_1, \ldots, A_k \not\models B$ эса унинг инкорини билдиради. Бу ёзувдаги $\not\models$ белгининг чап томонидаги формулалар рўйхатини Γ билан белгиласак; $\Gamma = \{\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_k\}$, у ҳолда юқоридаги ёзувни $\Gamma \models \mathbf{B}$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Равшанки, $\Gamma = \varnothing$ бўлса, $\Gamma \models \mathbf{B}$ тушунча $\models \mathbf{B}$ тушунчага айланади.

Ушбу хоссаларни ўқувчи қийинчиликсиз текшириб кўриши мумкин.

1°. $\models \mathbf{B}$ ва $\Gamma = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ бўлса, у ҳолда $\Gamma \models \mathbf{B}$ бўлади.

2°. $\Gamma \models \mathbf{B}$ ва $\Delta = \{\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m\}$ формулаларнинг ихтиёрий рўйхати бўлса, у ҳолда $\Delta, \Gamma \models \mathbf{B}$ бўлади (бу ерда „Δ, Γ" ни „$\Delta \cup \Gamma$" деб тушунилади).

3°. $\Gamma \models \mathbf{B}$ ва $\Gamma \subseteq \Delta$ бўлса, у ҳолда $\Delta \models B$ бўлади.

4°. $\Gamma \models \mathbf{A}$ ва $\Gamma \models \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\Gamma \models \mathbf{B}$ бўлади.

5°. $\Gamma \models \mathbf{A}(A)$, **B** — ихтиёрий формула бўлса, у ҳолда $\Gamma \models \mathbf{A}(\mathbf{B})$ бўлади (бу ерда $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ формула $\mathbf{A}(A)$ формулада A ўзгарувчи жумла неча жойда қатнашган бўлса, шунча жойда A ни $\mathbf{B}$ билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинади.

6°. $\Gamma = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ бўлса, у ҳолда $\Gamma \models \mathbf{A}_i$ $(i = \overline{1, k})$ бўлади

2-теорема. (I). $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ *бўлиши учун* $\models \mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$ *бўлиши зарур ва етарлидир*; (II). $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ *бўлиши учун* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{A} \to B$ *бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. (I) ни исботлаймиз. $\mathbf{A}_i(A_1, \ldots, A_n)$ $(i = \overline{1, k})$ формулалар $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмада рост бўлсин. У ҳолда $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k$ формула ҳам α тизмада рост бўлади. $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ бўлгани учун $\mathbf{B}$ ҳам α тизмада ростдир, ва демак, α тизмада $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$ ҳам рост бўлади. Қандайдир $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ тизмада $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ ларнинг бирортаси ёлғон бўлса, у ҳолда бу тизмада $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k$ формула ҳам ёлғон бўлади. У ҳолда β тизмада $\mathbf{B}$ формуланинг қиймати қандай бўлишидан қатъи назар $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$ формула β тизмада рост бўлади. Бундан кўринадики $\models \mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$ дир.

Аксинча

$$\models A_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B} \qquad (*)$$

бўлсин. Фараз қилайлик, қандайдир $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмада ҳар бир $\mathbf{A}_i(A_1, \ldots, A_n)$ $(i = \overline{1, k})$ формула рост бўлиб, $\mathbf{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, яъни $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ бўлсин. У ҳолда $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k$ формула α тизмада рост, ва демак, $\mathbf{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_k \to \mathbf{B}$ формула шу тизмада ёлғон бўлади. Бу эса (*) га зиддир. Ҳосил бўлган зиддият $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ эканлигини кўрсатади.

(II) нинг исботига ўтамиз.

$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ бўлсин. Агар қандайдир $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмада $\mathbf{A}_i$ $(i = \overline{1, k})$ ва $\mathbf{A}$ формулалар рост бўлса, у ҳолда шу тизмада $\mathbf{B}$ ҳам рост бўлади, ва демак, $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ҳам ростдир. Агар $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ тизмада $\mathbf{A}_i$ $(i = \overline{1, k})$ ва $\mathbf{A}$ формулалар ёлғон бўлса, $\mathbf{B}$ формула β тизмада қандай қийматга эга бўлишидан қатъий назар яна $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ формула рост бўлади. Демак, $\mathbf{A}_1, \ldots, A_k \models \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлади.

Аксинча

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{A} \to \mathbf{B} \qquad (**)$$

1997

бўлсин. Фараз қилайлик, қандайдир $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмада $\mathbf{A}_i$ $(i = \overline{1, k})$ ва **A** формулалар рост, **B** эса ёлғон бўлсин. У ҳолда α тизмада $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ёлғон бўлади — бу эса (**) га зиддир. Демак, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ дир.

Натижа. $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \models \mathbf{B}$ *бўлиши учун*

$$\models \mathbf{A}_1 \rightarrow (\mathbf{A}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{A}_{k-1} \rightarrow (\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{B})) \ldots)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Ушбу натижанинг исботини ўқувчи қийинчиликсиз ҳал эта олади.

Жумлалар алгебрасида умумқийматли (умумрост, тавтология, мантиқий қонун) формулалар алоҳида аҳамиятга эга. Қуйида биз ана шундай формулалардан (энг асосийларидан) намуналар келтирамиз.

1°. $\models \mathbf{A} \rightarrow \neg\neg\mathbf{A}$ — қўш инкорни киритиш қонуни;
2°. $\models \neg\neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ — қўш инкорни йўқотиш қонуни;
3°. $\models \neg\neg\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ — *қўш инкор қонуни;*
4°. $\models \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ — $\wedge$ ни йўқотиш қонуни;
5°. $\models \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ — $\wedge$ ни йўқотиш қонуни;
6°. $\models \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ — $\wedge$ ни киритиш қонуни;
7°. $\models \mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ — $\wedge$ ни киритиш қонуни;
8°. $\models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ — $\vee$ ни киритиш қонуни;
9°. $\models \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ — $\vee$ ни киритиш қонуни;
10°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow ((\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$ — $\vee$ ни киритиш қонуни;
11°. $\models (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ — $\vee$ ни йўқотиш қонуни;
12°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{A} \sim \mathbf{B})$ — $\sim$ ни киритиш қонуни;
13°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow ((\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{A} \sim \mathbf{B}))$ — $\sim$ ни киритиш қонуни;
14°. $\models (\mathbf{A} \sim \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ — $\sim$ ни йўқотиш қонуни;
15°. $\models (\mathbf{A} \sim \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ — $\sim$ ни йўқотиш қонуни;
16°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A})$ — контрапозиция қонуни;
17°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A})$ — контрапозиция қонуни;
18°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$ — қарама-қаршисидан исботлаш қонуни;
19°. $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg A)$ — қарама-қаршисидан исботлаш қонуни;

20°. $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ — силлогизм қонуни;

21°. $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ — силлогизм қонуни;

22°. $\models (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)$ — силлогизм қонуни;

23°. $\models (A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ — шартларни қўшиш қонуни;

24°. $\models (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ — шартларни қўшиш қонуни,

25°. $\models A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C)$ — шартларнинг ўрнини алмаштириш қонуни;

26°. $\models A \to (B \to C) \sim A \wedge B \to C$ — шартларни бирлаштириш қонуни ёки шартларни ажратиш қонуни;

27°. $\models \neg A \to (A \to B)$ — шартларни инкор этиш қонуни;

28°. $\models A \to (B \to A)$ — шартларни инкор этиш қонуни;

29°. $\models (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ — хулосаларни бирлаштириш қонуни;

30°. $\models A \vee \neg A$ — учинчи ҳолни инкор этиш қонуни;

31°. $\models \neg A \wedge \neg A)$ — зиддиятни инкор этиш қонуни;

32°. $\models \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ — де Морганнинг биринчи қонуни;

33°. $\models \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$ — де Морганнинг иккинчи қонуни:

34°. $\models \neg(A \to B) \sim A \wedge \neg B$ — импликацияни инкор этиш қонуни;

35°. $\models A \wedge B \sim B \wedge A$ — $\wedge$ нинг коммутативлиги қонуни;

36°. $\models A \vee B \sim B \vee A$ — $\vee$ нинг коммутативлиги қонуни;

37°. $\models (A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$ — $\wedge$ нинг ассоциативлиги қонуни;

38°. $\models (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ — $\vee$ нинг ассоциативлиги қонуни;

39°. $\models A \wedge A - A$ — $\wedge$ нинг идемпотентлиги қонуни;

40°. $\models A \vee A \sim A$ — $\vee$ нинг идемпотентлиги қонуни;

41°. $\models A \sim A$ — $\sim$ нинг рефлексивлиги қонуни;

42°. $\models (A \sim A) \sim (B \sim A)$ — $\sim$ нинг коммутативлиги қонуни;

43°. $\models (A \sim B) \wedge (B \sim C) \to (A \sim C)$ — $\sim$ нинг транзитивлиги қонуни;

44°. $\models A \wedge (B \vee C) \sim A \wedge B \vee A \wedge C$ — $\wedge$ нинг $\vee$ га нисбатан дистрибутивлиги қонуни;

45°. $\models A \vee B \wedge C \sim (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ — $\vee$ нинг $\wedge$ га нисбатан дистрибутивлиги қонуни;

46°. $\models A \rightarrow B \sim \neg A \vee B$ — $\rightarrow$ ни $\neg$ ва $\vee$ орқали ифодалаш қонуни;

47°. $\models A \rightarrow B \sim \neg(A \wedge \neg B)$ — $\rightarrow$ ни $\neg$ ва $\wedge$ орқали ифодалаш қонуни;

48°. $\models A \vee B \sim \neg A \rightarrow B$ — $\vee$ ни $\neg$ ва $\rightarrow$ орқали ифодалаш қонуни,

49°. $\models A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $\vee$ ни $\neg$ ва $\wedge$ орқали ифодалаш қонуни;

50°. $\models A \wedge B \sim \neg(A \rightarrow \neg B)$ — $\wedge$ ни $\neg$ $\rightarrow$ орқали ифодалаш қонуни;

51°. $\models A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$ — $\wedge$ ни $\neg$ ва $\vee$ орқали ифодалаш қонуни;

52°. $\models (A \sim B) \sim (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ — $\sim$ ни $\rightarrow$ ва $\wedge$ орқали ифодалаш қонуни;

53°. $\models (A \sim B) \sim (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ — $\sim$ ни $\neg$, $\vee$ ва $\wedge$ орқали ифодалаш қонуни;

54°. $\models A \wedge (A \vee B) \sim A$ — ютилиш қонуни;

55°. $\models A \vee A \wedge B \sim A$ — ютилиш қонуни.

Юқорида келтирилган 1° — 55°-қонунлар ўринли эканлигига ўқувчи уларнинг ростлик жадвалларини ишлаб чиқиш ёрдамида ишонч ҳосил қилиши мумкин.

5-§. Умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидалари

Жумлалар алгебрасининг асосий масалаларидан бири берилган умумқийматли формулалардан янги умумқийматли формулалар ҳосил қилиш масаласидир. „$\models$“ муносабат бу масалани осон ечиш имконини беради. Берилган формулалардан янги умумқийматли формулалар ҳосил қилиш маълум схемалар ёрдамида бажарилади. Бундай схемалар *умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидалари* дейилади.

Қуйида биз ана шундай қоидалардан намуналар келтирамиз:

1. **Хулоса чиқариш** (Modus ponens) **қоидаси.** $\models A$ ва $\models A \rightarrow B$ бўлса, у ҳолда $\models B$ бўлади. Бу қоида „$\models$“ муносабатнинг 4°-хоссасидан келиб чиқа-

ди ($\Gamma = \varnothing$ бўлганда). Мазкур қоидани ушбу схема („каср“) ёрдамида ифодалаш ҳам мумкин:

$$\frac{\mathbf{A},\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}.$$

2. Ўрнига қўйиш қоидаси.

В — ихтиёрий формула ва $\models \mathbf{A}(A)$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A}(\mathbf{B})$ бўлади.

Мазкур қоида „$\models$“ нинг 5-хоссасидан келиб чиқади ($\Gamma = \varnothing$ бўлганда).

Келтирилган қоидани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\mathbf{A}(A)}{\mathbf{A}(B)}.$$

3. $\wedge$ ни киритиш қоидаси.

$\models \mathbf{A}$ ва $\models \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ бўлади:

$$\frac{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}.$$

4. $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси.

$\models \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A}$ ҳамда $\models \mathbf{B}$ бўлади:

$$\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{A}},\quad \frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{B}}.$$

5. $\vee$ ни киритиш қоидаси.

(I). $\models \mathbf{A}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ бўлади.

(II). $\models \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ бўлади:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\ \text{ёки}\ \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}.$$

6. $\vee$ ни йўқотиш қоидаси.

$\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ ва $\models \neg\mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A}$ бўлади:

$$\frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B},\ \neg\mathbf{B}}{\mathbf{A}}.$$

7. $\neg\neg$ ни киритиш қоидаси.

$\models \mathbf{A}$ бўлса, у ҳолда $\models \neg\neg\mathbf{A}$ бўлади: $\dfrac{\mathbf{A}}{\neg\neg\mathbf{A}}.$

8. $\neg\neg$ ни йўқотиш қоидаси.

$\models \neg\neg\mathbf{A}$ бўлса, у ҳолда $\models \mathbf{A}$ бўлади: $\dfrac{\neg\neg\mathbf{A}}{\mathbf{A}}.$

9. Контрапозиция қоидаси.

$\models \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\models \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$ бўлади:

$$\frac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}}.$$

10. $\sim$ ни киритиш қоидаси.

$\models A \to B$ ва $\models B \to A$ бўлса, у ҳолда $\models A \sim B$ бўлади:

$$\frac{A \to B,\ B \to A}{A \sim B}.$$

11. $\sim$ ни йўқотиш қоидаси.

$\models A \sim B$ бўлса, у ҳолда $\models A \to B$ ва $\models B \to A$ бўлади:

$$\frac{A \sim B}{A \to B} \text{ ва } \frac{A \sim B}{B \to A}.$$

12. Силлогизм қоидаси.

$\models A \to B$ ва $\models B \to C$ бўлса, у ҳолда $\models A \to C$ бўлади:

$$\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}.$$

13. Қарама-қаршисидан исботлаш қоидаси.

$\models A \to B$ ва $\models A \to \neg B$ бўлса, у ҳолда $\models \neg A$ бўлади:

$$\frac{A \to B,\ A \to \neg B}{\neg A}.$$

14 Ҳолларни таҳлил қилиш қоидаси.

$\models A \to C$ ва $\models B \to C$ бўлса, у ҳолда $\models A \vee B \to C$ бўлади:

$$\frac{A \to C,\ B \to C}{A \vee B \to C}.$$

15. Шартларни бирлаштириш қоидаси.

$\models A \to (B \to C)$ бўлса, у ҳолда $\models A \wedge B \to C$ бўлади:

$$\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}.$$

16. Шартларни ажратиш қоидаси.

$\models A \wedge B \to C$ бўлса, у ҳолда $\models A \to (B \to C)$ бўлади:

$$\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}.$$

17. Шартларнинг ўрнини алмаштириш қоидаси.

$\models A \to (B \to C)$ бўлса, у ҳолда $\models B \to (A \to C)$ бўлади:

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}.$$

Ўқувчи 1° — 55° ларда келтирилган умумқийматли формулалардан яна бир қатор ҳосилавий қоидаларни мустақил ҳосил қилиши мумкин. Масалан, 4° ва 5°-қонунлардан юқорида $\wedge$ ни йўқотиш қоидалари ҳосил қилинган.

Шуни ҳам қайд этамизки, „умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидаси" тушунчасини умумлаштириб, „мантиқий натижалар ҳосил қилиш қоидаси" тушунчасига ўтиш мумкин. Масалан, $\neg\neg$ ни киритиш қоидаси $\left(\frac{A}{\neg\neg A}\right)$ ни умумлаштирсак, $\frac{\Gamma \models A}{\Gamma \models \neg\neg A}$ қоидага ўтиш мумкин: „Агар $\Gamma \models A$ бўлса, у ҳолда $\Gamma \models \neg\neg A$ бўлади".

6-§. Жумлалар алгебрасининг функциялари

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар $E = \{0, 1\}$ тўпламдан қиймат қабул қилувчи ўзгарувчилар, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ эса шу тўпламдан қиймат қабул қилувчи n-ар (n — ўзгарувчили) функция бўлсин. Бундай функцияни ушбу жадвал ёрдамида бериш мумкин:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$
1	1	...	1	0	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
1	1	...	0	1	$f(1, 1, \ldots, 0, 1)$
...	...	...	...	...	. . . .
...	...	...	...	...	. . . .
0	1	...	1	1	$f(0, 1, \ldots, 1, 1)$
...	...	...	...	...	. . . .
0	0		0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$

(*)

Қаралаётган функциялар жумлалар алгебрасининг (баъзан, мантиқ алгебрасининг) функциялари ёки Буль функциялари дейилади.

Ўзгарувчилар қийматларидан тузилган, узунлиги n га тенг бўлган тизмалар 2^n та эканлиги маълум. Ҳар бир n-ар Буль функцияси (*) кўринишдаги ягона жадвал ёрдамида берилгани учун иккита бир хил аргументли Буль функцияси (иккита жадвал) бир-бириран ўнг томондаги устуннинг қийматлари билан фарқ қилиши мумкин. Бу устунда фақат иккита элемент (0 ёки 1) қатнашгани учун (*) жадвал ёрдамида бериладиган барча n-ар Буль функцияларининг сони 2^{2^n} та эканлигини кўриш қийин эмас.

Буль функциялари билан жумлалар алгебрасининг формулалари орасида узвий боғланиш мавжуддир.

Барча Буль функциялари тўпламини **B** билан белгилайлик. Умуман олганда, **B** билан барча жумлалар тўплами **V** орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас.

Масалан, ушбу жадвал ёрдамида берилган Буль функциясига бир неча формулаларни мос қўйиш мумкин: $A \to B$, $\neg A \vee B$, $\neg(A \wedge \neg B)$ ва бошқалар, яъни бу жадвал кўрсатилган формулаларнинг ҳар бири учун ростлик жадвали бўла олади. Аксинча, ҳар бир формулага унинг ростлик жадвали билан устма-уст тушувчи ягона Буль функцияси тўғри келади. Кейинги масала, яъни берилган формулани Буль функцияси орқали ифода этиш, табиий, равшандир (формуланинг ростлик жадвалини кўриш кифоя). Қуйида биз биринчи масала, яъни ҳар қандай Буль функциясини жумлалар алгебрасининг бирор формуласи ёрдамида ифодалаш мумкинлиги ҳақида фикр юритамиз.

x	y	$f(x, y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Бунинг учун ҳар бир ўзгарувчи x_i $(i = \overline{1, n})$ га A_i $(i = \overline{1, n})$ ўзгарувчи жумлани мос қўямиз.

Ёзувни соддалаштириш мақсадида $A \wedge B$ формулани AB кўринишда ёзишга келишамиз.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ихтиёрий Буль функцияси бўлсин. $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ $(i = \overline{1, n})$ — 0 ёки 1 лардан тузилган, узунлиги n га тенг бўлган тизма бўлса, $f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ — берилган функциянинг шу тизмадаги қиймати бўлиб, у ҳам 0 ёки 1 га тенгдир. Шунинг учун $f(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ A ёзувни $f(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ билан A нинг конъюнкцияси деб қараш мумкин. Ушбу формулани қарайлик:

$f(1, 1, \ldots, 1, 1) A_1 A_2 \ldots A_n \vee f(1 \ldots, 1, 0) A_1 A_2 \ldots$
$\ldots A_{n-1} \neg A_n \vee f(1, 1, \ldots, 0, 1) A_1 A_2 \ldots \neg A_{n-1} A_n \vee$
$$\vee \ldots \vee f(0, 0, \ldots, 0, 0) \neg A_1 \neg A_2 \ldots \neg A_n; \quad (1)$$

ундаги ҳар бир қўшилувчи (дизъюнкция ҳади) қуйидагича ҳосил қилинган: агар x_i ($i = \overline{1, n}$) ўзгарувчига 1 қиймат берилган бўлса, унга мос келувчи A_i ўзгарувчи жумланинг ўзи олинади, x_i га 0 қиймат берилган бўлса, A_i нинг инкори ($\neg A_i$) олинади.

(1) ни янада соддароқ ёзиш мақсадида қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$A^{\alpha} = \begin{cases} A, \text{ агар } \alpha = 1 \text{ бўлса,} \\ \neg A, \text{ агар } \alpha = 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (2)$$

(2) дан α қандай қиймат қабул қилишидан қатъи назар (0 ёки 1) $\alpha^{\alpha} = 1$ ҳамда $\alpha^{\neg \alpha} = 0$ эканлигини кўриш қийин эмас (A ҳам 0 ёки 1 қиймат қабул қилишини эслатиб ўтамиз). Қабул қилинган белгилашдан сўнг (1) қуйидаги кўринишга келади:

$$\bigvee_{(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})} f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) A_1^{\alpha_{i1}} A_2^{\alpha_{i2}} \ldots A_n^{\alpha_{in}}, \quad (3)$$

$$(i = \overline{1, 2^n})$$

бунда $\bigvee_{(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})}$ белги дизъюнкция барча $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ тизмалар бўйича олинади, деб тушунилади. Агар бирор $(\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \ldots, \alpha'_{in})$ тизмада $f(\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \ldots, \alpha'_{in}) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(\alpha'_{i1}, \ldots, \alpha'_{in}) A_1^{\alpha'_{i1}} A_2^{\alpha'_{i2}} \ldots A_n^{\alpha'_{in}} = 0$ бўлади ва табиий, бундай қўшилувчини (3) дан ташлаб юбориш мумкин. Нолга тенг бўлган қўшилувчилар ташлаб юборилгач, (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bigvee_{\substack{(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \\ f(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) = 1}} f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) A_1^{\alpha_{i1}} A_2^{\alpha_{i2}} A_n^{\alpha_{in}}, \quad (4)$$

бунда $\bigvee_{\substack{(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \\ f(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) = 1}}$ белги дизъюнкция фақат $f(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) = 1$ бўлган $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ тизмалар бўйича олинади, деб тушунилади.

(1) ёки (4) формула $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияни аниқлашини кўрсатамиз. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар-

га (ва демак, уларга мос қўйилган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлаларга ҳам) мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ қиймат берайлик $\left((\text{ҳар бир } \alpha_i = \begin{cases}0, \\ 1,\end{cases} i=\overline{1, n}\right)$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ қийматга эга бўлади. $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}$ қўшилувчидаги $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ларни мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ лар билан алмаштирсак, $\alpha_1^{\alpha_1}, \alpha_2^{\alpha_2}, \alpha_n^{\alpha_n}$ ҳосил бўлиб, бу ерда ҳар бир $\alpha_i^{\alpha_i}=1$, $i=\overline{1, n}$ (A^{α} нинг таърифига қаранг), ва демак, $\alpha_1^{\alpha_1}, \alpha_2^{\alpha_2}, \ldots, \alpha_n^{\alpha_n}=1$ дир. Демак, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}$ нинг $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тизмадаги қиймати $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ га тенг экан.

(4) ифодада $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1$ бўлгани учун (4) ни

$$\bigvee_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n} \tag{5}$$

каби ёзиш мумкин.

$f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни (5) кўринишда ифодаловчи формула ягона эканлигини кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, биз юқорида ушбу теоремани исботладик:

1-теорема. *Жумлалар алгебрасининг ҳар қандай айнан 0 га тенг бўлмаган функциясини жумлалар алгебрасининг* (1) (*ёки* (5)) *кўринишга эга бўлган формуласи сифатида ифодалаш мумкин.*

1-мисол. Қуйидаги жадвал ёрдамида берилган функцияни жумлалар алгебрасининг формуласи кўринишида ёзинг.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Берилган функция (1, 1, 1), (1, 0, 1) ва (1, 0, 0) тизмаларда 1 қийматга эга бўлиши жадвалда берилган.

(3) га асосан бундай функцияни $f(1, 1, 1)A_1A_2A_3 \vee f(1, 0, 1)A_1\neg A_2A_3 \vee f(1, 0, 0) A_1\neg A_2\neg A_3$ ёки $A_1A_2A_3 \vee A_1\neg A_2A_3 \vee A_1\neg A_2\neg A_3$ формула билан ифодалаш мумкин.

$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$ ни қуйидагича аниқлайлик:

$f(x_1, \ldots, x_n)$	$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$
1	0
0	1

$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияга қарама-қарши функция дейилади.

$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни $\bigvee\limits_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \overline{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}$

формула аниқлаган бўлсин. У ҳолда $\overline{\overline{f}}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни $\neg\left(\bigvee\limits_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \overline{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}\right)$

формула аниқлайди.

Охирги формула, тегишли шакл алмаштиришлар бажарилгандан сўнг қуйидаги кўринишга келади:

$$\bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}} (\neg A_1^{\alpha_1} \vee \neg A_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee \neg A_n^{\alpha_n}), \qquad (6)$$

бунда $\bigwedge\limits_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}}$ белги фақат $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ бўлган $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмалар бўйича олинади, деб тушунилади.

$\neg A^\alpha = A^{\neg\alpha}$ бўлгани учун (6) ни

$$\bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}} (A_1^{\neg\alpha_1} \vee A_2^{\neg\alpha_2} \vee \ldots \vee A_n^{\neg\alpha_n}) \qquad (7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $\alpha = 1$ бўлганда $A^\alpha = \neg A$, $\alpha = 0$ бўлганда $A^\alpha = A$ деб белгиласак, (7) ни

$$\bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}} (A_1^{\alpha_1} \vee A_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n}) \qquad (8)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 1$ бўлган ҳар қандай функцияни ягона (8) кўринишдаги формула аниқлашини ўқувчи осон кўра олади.

Шундай қилиб, биз юқорида ушбу теоремани исботладик:

2-теорема. *Ҳар қандай айнан 1 га тенг бўлмаган функцияни жумлалар алгебрасининг (8) кўринишга эга бўлган формуласи билан аниқлаш мумкин.*

1-таъриф. (5) $f(x_1, \ldots, x_n)$ функциянинг *мукаммал дизъюнктив нормал формаси* (МДНФ), (8) эса *мукаммал конъюнктив нормал формаси* (МКНФ) дейилади.

2-мисол. 1-мисолда қаралган функциянинг МКНФ сини топинг.

Берилган функция (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ва (0, 0, 0) тизмаларда 0 қийматга эга бўлгани учун у қуйидаги формула билан аниқланади:

$$(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge$$
$$\wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge$$
$$\wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3).$$

2-таъриф. Жумлалар алгебрасининг $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуласида $\rightarrow$ ва $\sim$ амаллар қатнашмаса, $\neg$ эса фақат ўзгарувчи жумлага тегишли бўлса, бундай формула *келтирилган формула* дейилади.

Ҳар бир ўзгарувчи жумла ёки унинг инкори ҳамда ҳар бир мантиқий константа таърифга кўра келтирилган формула ҳисобланади.

3-теорема. *Жумлалар алгебрасининг ҳар бир* $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ *формуласининг ё ўзи келтирилган формула, ёки у қандайдир келтирилган формулага тенг кучлидир.*

Исботи. Агар $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуланинг таркибида $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ ёки $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ кўринишдаги формулаостилари бўлса, бу формулаостиларни уларга мос равишда тенг кучли бўлган $\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ ва $(\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C})$ формулалар билан алмаштириш мумкин.

Агар $\mathbf{A}$ формула таркибида $\neg \mathbf{B}$ кўринишдаги формула бўлиб, $\mathbf{B}$ келтирилган формула бўлса, у ҳолда $\neg \mathbf{B}$ формулага 3-§ да келтирилган 1°, 10°, 11°-тенгкучлиликларни қўллаш натижасида келтирилган формулага ўтиш мумкин.

7-§. Нормал формалар

Олдинги параграфда мукаммал дизъюнктив (конъюнктив) нормал форма ҳақида гапирилган эди. Ушбу параграфда жумлалар алгебрасининг ҳар қандай формуласини турли нормал формаларда ифода қилиш мумкинлиги ва берилган формуладан унинг нормал формаларига ўтиш алгоритми кўрсатилади. Формуладан унинг МДНФ ёки МКНФ сига ўтиш муҳим бир масала билан боғлиқ. Ихтиёрий **A** формула берилганда унинг умумқийматли формулами ёки умумқийматли формула эмасми эканини кўрсатиб берадиган алгоритм (йўл, усул) мавжудми? Бу савол жумлалар алгебраси учун ечилиш проблемасини ташкил қилади. Унинг ижобий ечилиши 2-§ да кўрсатилган эди, яъни ҳар қандай формуланинг ростлик жадвалини қуриш ёрдамида унинг умумқийматлилиги ҳақида тўлиқ маълумот олиш мумкин. Шу параграфнинг ўзида бундай алгоритм амалий жиҳатдан жуда ноқулай эканлиги кўрсатилган эди. Формуланинг МДНФ си ёки МКНФ сини топиш ечилиш проблемасини осон ҳал қилишга ёрдам беради.

1-таъриф. Чекли сондаги ўзгарувчи жумлалар ёки уларнинг инкорларини конъюнкция (дизъюнкция) амали билан бирлаштириш натижасида ҳосил бўладиган формула *элементар кўпайтма (йиғинди)* дейилади.

Ҳар бир ўзгарувчи жумла ёки унинг инкори таърифга кўра элементар кўпайтма (йиғинди) ҳисобланади. Элементар кўпайтма (йиғинди) баъзан элементар конъюнкция (дизъюнкция) ҳам дейилади.

1-мисол. A, $\neg B$, $A \wedge B$, $A \wedge \neg A$, $\neg A \wedge \neg B$, $A \wedge A \wedge B$, $A \wedge B \wedge C$, $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ формулалар элементар кўпайтмадир: A, $\neg B$, $A \vee B$, $A \vee \neg A$, $\neg A \vee \neg B$, $A \vee A \vee B$, $A \vee B \vee C$, $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ лар эса элементар йиғиндилардир.

1-теорема. *Элементар йиғинди умумқийматли бўлиши учун унда бири иккинчисининг инкори бўлган ҳеч бўлмаганда иккита қўшилувчи бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. $A \vee \neg A \vee B \vee C \vee \ldots \vee D$ қаралаётган элементар йиғинди бўлсин. $A \vee \neg A$ умумқийматли формула бўлгани учун дизъюнкциянинг таърифига кўра элементар йиғинди ҳам умумқийматли бўлади. Аксинча, элементар йиғиндида бири иккинчисининг инкори бўлган қўшилувчилар бўлмасин. Бундай формула инкор остида турмаган ўзгарувчи жумлаларга 1, инкор остида турган ўзгарувчи жумлаларга 0 қиймат берилганда ёлғон жумлага айланади, яъни умумқийматли бўлмайди — бу эса теорема шартига зиддир.

2-теорема. *Элементар кўпайтма радланувчи (айнан ёлғон) формула бўлиши учун унда бири иккинчисининг инкори бўлган ҳеч бўлмаганда иккита кўпайтувчи бўлиши зарур ва етарлидир.*

Бу теореманинг исботи олдинги теореманинг исботига жуда ўхшаш бўлиб, уни ўқувчи қийинчиликсиз бажара олади.

2-таъриф. Элементар кўпайтма (йиғинди) A_1, $A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлалар (ёки уларнинг инкорлари) дан тузилган бўлсин. Элементар кўпайтма (йиғинди) да ҳар бир ўзгарувчи жумла (инкор амали остида қатнашганларини ҳам эътиборга олсак) бир мартадан ортиқ қатнашмаган бўлса, бундай элементар кўпайтма (йиғинди) *тўғри элементар кўпайтма* (йиғинди) дейилади.

2-мисол. A, $\neg A$, $A\wedge\neg B$, $\neg A\wedge\wedge C$, $A_1\wedge A_2\wedge A_3$ лар тўғри элементар кўпайтмалар, A, $\neg A$, $A\vee\neg B$, $\neg A\vee B\vee C$, $A_1\vee A_2\vee A_3$ лар тўғри элементар йиғиндилар бўлиб, $A\wedge A$, $A\wedge\neg A\wedge\neg B$, $A\wedge\neg B\wedge\neg B$ лар эса тўғри элементар кўпайтма эмасдир.

3-таъриф. Тўғри элементар кўпайтма (йиғинди) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлалардан тузилган бўлиб, унда бу ўзгарувчиларнинг ҳар бири (ё ўзи, ё унинг инкори) қатнашган бўлса, бундай элементар кўпайтма (йиғинди) *тўлиқ элементар кўпайтма* (ийғинди) дейилади.

3-мисол. Элементар кўпайтма (йиғинди) лар A, B, C ўзгарувчи жумлалардан тузилган бўлсин. $A\wedge B\wedge C$, $A\wedge B\wedge\neg C$, $\neg A\wedge\neg B\wedge C$, $\neg A\wedge B\wedge C$, $\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C$ лар тўлиқ элементар кўпайтмалар, $A\vee B\vee C$, $A\vee B\vee\neg C$, $A\vee\neg B\vee C$, $\neg A\vee B\vee C$, $\neg A\vee B\vee\neg C$ лар эса тўлиқ элементар йиғиндилардир.

Тўлиқ элементар кўпайтма (йиғинди) лар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлалардан тузилган бўлса, барча тўлиқ элементар кўпайтма (йиғинди)лар билан узунлиги n га тенг бўлган барча тизмалар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эканлигини сезиш қийин эмас. Ҳақиқатан, 6-§ даги (2) белгилашга асосан ҳар бир тўлиқ элементар кўпайтма (йиғинди) ни

$$A_1^{\alpha_1}\wedge A_2^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge A_n^{\alpha_n}(A_1^{\alpha_1}\vee A_2^{\alpha_2}\vee\ldots\vee A_n^{\alpha_n})$$

кўринишда ёзиш мумкин (бунда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ихтиёрий тизма). $n=3$ бўлган ҳол учун бундай мосликни алоҳида кўрсатайлик:

$$(1,\ 1,\ 1) \longrightarrow A^1 \wedge B^1 \wedge C^1 = A \wedge B \wedge C,$$
$$(1,\ 1,\ 0) \longrightarrow A^1 \wedge B^1 \wedge C^0 = A \wedge B \wedge \neg C,$$
$$(1,\ 0,\ 1) \longrightarrow A^1 \wedge B^0 \wedge C^1 = A \wedge \neg B \wedge C,$$
$$(1,\ 0,\ 0) \longrightarrow A^1 \wedge B^0 \wedge C^0 = A \wedge \neg B \wedge \neg C,$$
$$(0,\ 1,\ 1) \longrightarrow A^0 \wedge B^1 \wedge C^1 = \neg A \wedge B \wedge C,$$
$$(0,\ 1,\ 0) \longrightarrow A^0 \wedge B^1 \wedge C^0 = \neg A \wedge B \wedge \neg C,$$
$$(0,\ 0,\ 1) \longrightarrow A^0 \wedge B^0 \wedge C^1 = \neg A \wedge \neg B \wedge C,$$
$$(0,\ 0,\ 0) \longrightarrow A^0 \wedge B^0 \wedge C^0 = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

4-таъриф. Чекли сондаги тўғри элементар кўпайтма (йиғинди) ларнинг дизъюнкция (конъюнкция) си *дизъюнктив (конъюнктив) нормал форма* дейилади. Чекли сондаги такрорланмайдиган тўлиқ элементар кўпайтма (йиғинди) ларнинг дизъюнкция (конъюнкция) си *мукаммал дизъюнктив (конъюнктив) нормал форма* дейилади.

Таърифга кўра, алоҳида олинган тўғри (тўлиқ) элементар кўпайтма (йиғинди) ҳам ДНФ (МДНФ) (мос равишда КНФ (МКНФ)) ҳисобланади.

4-мисол. Тўғри (тўлиқ) элементар кўпайтма (йиғинди) лар A, B, C ўзгарувчи жумлалардан тузилган бўлса, A, $\neg B$, $A \vee \neg B \wedge C$, $A \wedge B \vee A \wedge C$, $\neg A \vee \neg B \vee \vee \neg C$ лар ДНФ, A, $\neg B$, $A \vee B \vee C$, $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \vee \neg C)$, $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B)$ лар КНФ, $A \wedge B \wedge C \vee \vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$, $A \wedge \neg B \wedge C$, $A \wedge B \wedge \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C$, $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ лар МДНФ, $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$, $\neg A \vee \vee \neg B \vee \neg C$, $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$, $(A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \vee \neg B \vee C)$ лар эса МКНФ га мисол бўла олади. Юқорида келтирилган таърифлардан ҳар қандай ДНФ, КНФ, МДНФ ва МКНФ келтирилган формула эканлигини кўриш қийин эмас.

6-§ да ҳар қандай Буль функциясини ягона усулда жумлалар алгебрасининг формуласи орқали ифода қилиш мумкинлиги ҳамда бу формулалар функциянинг МДНФ (МКНФ) си деб аталиши кўрсатилган эди. Қуйида эса биз мазкур тушунчалар жумлалар алгебрасининг барча формулалари учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз.

3-теорема. *Жумлалар алгебрасининг бажарилувчи ихтиёрий* $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ *формуласи ягона* МДНФ *га тенг кучлидир.*

Исботи. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула бажарилувчи бўлгани учун у 2^n та тизманинг камида биттасида рост бўлади. Формулани рост жумлага айлантирувчи тизмалар тўплами

$$\mathbf{M}_p = \{(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn})\},$$

$(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$ бўлсин.

Ушбу формулани қарайлик:

$$\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \equiv A_1^{\alpha_{11}} A_2^{\alpha_{12}} \ldots A_n^{\alpha_{1n}} \vee A_1^{\alpha_{21}} A_2^{\alpha_{22}} \ldots A_n^{\alpha_{2n}} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_n^{k_n} \qquad (1)$$

(ёзувни соддалаштириш мақсадида $\wedge$ ни ёзмасликка келишамиз: $A_1^{\alpha_{s1}} A_2^{\alpha_{s2}} \ldots A_n^{\alpha_{sn}}$ ифода $A_1^{\alpha_{s1}} \wedge A_2^{\alpha_{s2}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\alpha_{sn}}$ ни билдиради). (1) нинг ўнг томони МДНФ эканлиги аён. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ эканлигини кўрсатамиз. $(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) \in \mathbf{M}_p$ бўлса, $\mathbf{A}(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) = 1$ бўлади; $\mathbf{B}(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}) = 1$ эканлигини кўрсатиш учун $A_1, \ldots, A_n$ ўзгарувчиларни мос равишда $\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}$ лар билан алмаштирамиз:

$$\mathbf{B}(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}) \equiv \alpha_{s1}^{\alpha_{11}} \alpha_{s2}^{\alpha_{12}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{1n}} \vee \alpha_{s1}^{\alpha_{21}} \alpha_{s2}^{\alpha_{22}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{2n}} \vee \ldots \vee$$
$$\vee \alpha_{s1}^{\alpha_{s1}} \alpha_{s2}^{\alpha_{s2}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{sn}} \vee \ldots \vee \alpha_{s1}^{\alpha_{k1}} \alpha_{s2}^{\alpha_{k2}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{kn}}. \qquad (2)$$

$\mathbf{M}_p$ дан олинган s-тизма $(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn})$ $\mathbf{M}_p$ даги қолган барча тизмалардан фарқлидир, ва демак, s-тизма ҳар бир тизмадан қандайдир координатаси билан фарқ қилади (2-§ га қаранг).

α қандай қиймат қабул қилишидан қатъи назар (0 ёки 1) $\alpha^{\alpha} = 1$ ва $\alpha^{\neg\alpha} = 0$ эканлиги 6-§ да қайд этилган эди: ((2) белгилашга қаранг). Шу сабабли (2) ифодадаги биринчи қўшилувчи $\alpha_{s1}^{\alpha_{11}} \alpha_{s2}^{\alpha_{12}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{1n}}$ да бирор l-координата $(1 \leqslant l \leqslant n)$ учун $\alpha_{sl} \neq \alpha_{1l}$ экани, ҳамда $\alpha_{sl}^{\alpha_{1l}} = 0$ эканидан $\alpha_{s1}^{\alpha_{11}} \alpha_{s2}^{\alpha_{12}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{1n}} = 0$ экани келиб чиқади. Худди шундай, 2-, ..., $s-1$-, $s+1$-, ..., n- қўшилувчилар ҳам 0 га тенг эканини кўрсатиш мумкин. Аммо s қўшилувчи $\alpha_{s1}^{\alpha_{s1}} \alpha_{s2}^{\alpha_{s2}} \ldots \alpha_{sn}^{\alpha_{sn}} = 1$ бўлгани учун (2) ифоданинг, ва демак, $\mathbf{B}(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn})$ нинг қиймати 1 га тенг эканлиги келиб чиқади.

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ тизма $\mathbf{M}_p$ га тегишли бўлмаган ихтиёрий тизма бўлса, табиий, $\mathbf{A}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$ бўлади. У ҳол

$$\mathbf{B}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv \beta_1^{\alpha_{11}} \beta_2^{\alpha_{12}} \ldots \beta_n^{\alpha_{1n}} \vee \beta_1^{\alpha_{21}} \beta_2^{\alpha_{22}} \ldots \beta_n^{\alpha_{2n}} \vee \ldots \vee$$
$$\vee \beta_1^{\alpha_{k1}} \beta_2^{\alpha_{k2}} \ldots \beta_n^{\alpha_{kn}} = 0 \qquad (3)$$

дир. Ҳақиқатан, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ тизма $\mathbf{M}_p$ га кирган ҳар бир тизмадан фаркли бўлгани учун (3) нинг ҳар бир қўшилувчиси 0 га тенгдир.

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула учун $\mathbf{M}_p$ тўплам ягона бўлганлиги, $\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ эса шу тўпламга асосан қурилганлиги учун $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формулага мос келувчи МДНФ ягона эканлиги келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот этилди.

Натижа. *Жумлалар алгебрасининг $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи умумқийматли бўлиши учун унинг МДНФ сида 2^n та тўлиқ элементар кўпайтма қатнашиши зарур ва етарлидир.*

Бошқача қилиб айтганда, берилган $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула умумқийматлими ёки умумқийматли эмасми эканлигини билиш учун унинг МДНФ сига ўтиб, МДНФ да қатнашган тўлиқ элементар кўпайтмалар сонини аниқлаш кифоядир: агар тўлиқ элементар кўпайтмалар сони $k = 2^n$ та бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ умумқийматли, $1 \leqslant k < 2^n$ бўлганда эса бажарилувчи формула бўлади.

Ушбу теоремани ўқувчи мустақил равишда қийинчиликсиз исботлай олади:

4-теорема. *Жумлалар алгебрасининг ихтиёрий умумқийматли бўлмаган $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи ягона МКНФ га тенг кучлидир.*

Кўрсатма. Юқоридаги теореманинг исботи олдинги теореманинг исботига ўхшаш бўлиб „конъюнкция“ сўзи „дизъюнкция“ сўзи билан, „дизъюнкция“ сўзи эса „конъюнкция“ сўзи билан, „рост“ сўзи „ёлғон“ сўзи билан, „ёлғон“ сўзи эса „рост“ сўзи билан алмаштирилиши керак. Бундан ташқари

$$A^\alpha = \begin{cases} \urcorner A, & \alpha = 1, \\ A, & \alpha = 0 \end{cases}$$

белгилашдан фойдаланиш керак.

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ бажарилувчи формула бўлса, унинг МДНФ сини топиш учун қуйидаги ишлар бажарилиши керак:

(I). $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ келтирилган формула бўлмаса, маълум шакл алмаштиришлардан фойдаланиб (6-§ 3-теоремага қаранг), унга тенг кучли бўлган келтирилган формулага ўтиш керак.

(II). Ҳосил бўлган формулага 3-§ да келтирилган 1°, 6° — 9°, 16° — 23°-тенгкучлиликларни етарли марта қўллаб, унга тенг кучли формулага ўтиш керак.

Ҳосил бўлган формула $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ га тенг кучли бўлган ДНФ бўлади.

(III). Агар ҳосил бўлган ДНФ да тўлиқмас элементар кўпайтувчилар мавжуд бўлса, у ҳолда улар қуйидагича „тўлдирилади":

а) $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots A_n^{\alpha_n}$ бирор тўлиқмас элементар кўпайтма бўлса (A_i ўзгарувчи қатнашмаган), у $A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \ldots A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} (A_i \vee \urcorner A_i) A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots A_n^{\alpha_n}$ формула билан тенгкучли алмаштирилади.

б) Ҳосил бўлган формулага яна 6°—9°-тенгкучлиликлар қўлланилади.

5-мисол. $(A \vee \urcorner B) \wedge (C \vee \urcorner B) \rightarrow (\urcorner A \vee B) \wedge C$ формуланинг МДНФ сини ёзинг.

Берилган формула келтирилган формула бўлмаганлиги учун уни $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \urcorner \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ тенгкучлиликка асосан шакл алмаштирамиз:

$$(A \vee \urcorner B) \wedge (C \vee \urcorner B) \rightarrow (\urcorner A \vee B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv \urcorner((A \vee \urcorner B) \wedge (C \vee \urcorner B)) \vee (\urcorner A \vee B) \wedge C.$$

Тенгкучлиликнинг ўнг томони келтирилган формула эмас, чунки биринчи қўшилувчида $\urcorner$ амали мураккаб формула олдида турибди Шунинг учун унга 3-§ да келтирилган 10°-тенгкучлиликни қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\urcorner((A \vee \urcorner B) \wedge (C \vee \urcorner B)) \vee (\urcorner A \vee B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv \urcorner(A \vee \urcorner B) \vee (C \vee \urcorner B) \vee (\urcorner A \vee B) \wedge C.$$

Тенгкучлиликнинг ўнг томонидаги биринчи ва иккинчи қўшилувчиларга 3-§ даги 11°-, учинчи қўшилувчига эса 8°-тенгкучлиликларни қўлласак, қуйидаги тенгкучлиликка эришамиз:

$$\urcorner(A \vee \urcorner B) \vee \urcorner(C \vee \urcorner B) \vee (\urcorner A \vee B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv \urcorner A \wedge \urcorner \urcorner B \vee \urcorner C \wedge \urcorner \urcorner B \vee \urcorner A \wedge C \vee B \wedge C.$$

$\urcorner \urcorner B \equiv B$ бўлганлиги учун юқоридаги тенгкучлиликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\urcorner A \wedge \urcorner \urcorner B \vee \urcorner C \wedge \urcorner \urcorner B \vee \urcorner A \wedge C \vee B \wedge C \equiv$$
$$\equiv \urcorner A \wedge B \vee \urcorner C \wedge B \vee \urcorner A \wedge C \vee B \wedge C.$$

Шундай қилиб,

$$(A\vee\neg B)\wedge(C\vee\neg B)\to(\neg A\vee B)\wedge C\equiv$$
$$\equiv\neg A\wedge B\vee\neg C\wedge B\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C.$$

Тенгкучлиликнинг ўнг томони берилган формуланинг ДНФ сидир. Бу ДНФ нинг ҳар бир қўшилувчиси тўлиқмас элементар кўпайтмадир.

$$\neg A\wedge B\equiv\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C),$$
$$\neg C\wedge B\equiv(A\vee\neg A)\wedge B\wedge\neg C,$$
$$\neg A\wedge C\equiv\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C,$$
$$B\wedge C\equiv(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C$$

бўлганлиги учун

$$\neg A\wedge B\vee\neg C\wedge B\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C\equiv$$
$$\equiv\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge\neg C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C.$$

Ушбу тенгкучлиликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчига 3-§ даги 8°-тенгкучлиликни қўллаймиз:

$$\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C\vee\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge$$
$$\wedge C\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C\equiv\neg A\wedge B\wedge C\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee$$
$$\vee A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge B\wedge C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C\vee A\wedge B\wedge C\vee\neg A\wedge B\wedge C.$$

Бу тенгкучлиликнинг ўнг томонига $A\vee A\equiv A$ тенгкучлиликни қўлласак, у қуйидаги формулага тенг кучли бўлади:

$$\neg A\wedge B\wedge C\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee A\wedge B\wedge\neg C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C\vee A\wedge B\wedge C$$

бу эса берилган формуланинг МДНФ сидир. Шундай қилиб,

$$(A\vee\neg B)\wedge(C\vee\neg B)\to(\neg A\vee B)\wedge C\equiv$$
$$\equiv A\wedge B\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge B\wedge C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C.$$

3-теореманинг натижасига асосан берилган формула умумқийматли эмас экан, чунки унинг МДНФ сида фақат 5 та тўлиқ элементар кўпайтма қатнашган ($n=3$ бўлгани учун барча тўлиқ элементар кўпайтмалар $2^3=8$ тадир).

Берилган формулани МКНФ сифатида ҳам ёзиш мумкин (умумқийматли бўлмагани учун):

$$(A\vee\neg B)\wedge(C\vee\neg B)\to(\neg A\vee B)\wedge C\equiv$$
$$\equiv(\neg A\vee B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee C).$$

8 §. Иккилик принципи ва иккилик қонуни

Таъриф. $\mathbf{A}^*(A_1,\ldots,A_n)$ формула $\mathbf{A}(A_1,\ldots,A_n)$ келтирилган формуладан $\wedge$ ни $\vee$ билан, $\vee$ ни $\wedge$ билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, $\mathbf{A}^*$ формула $\mathbf{A}$ формулага *иккиламчи формула* дейилади.

Изоҳ. Берилган формуладан унга иккиламчи бўлган формулага ўтишда қуйидагига эътибор бериш керак:

A да **B** формулаости бўлиб, юқорида келтирилган алмаштиришлар натижасида **B** формула **B*** формулага айланса, у ҳолда **B*** ҳам **A*** формулада формулаости бўлиб қатнашиши керак.

Масалан, $\mathbf{A}(\mathbf{B})\equiv A\wedge\neg B\vee A\wedge B\vee C$ да $\mathbf{B}\equiv A\wedge\neg B$ десак, шакл алмаштириш натижасида $\mathbf{B}^*\equiv A\neg\vee B$ ҳосил бўлади. **A*** иккиламчи формулада **B*** формулаости бўлиб қатнашиши керак, яъни $\mathbf{A}^*(\mathbf{B}^*)\equiv(A\vee\neg B)\wedge$ $\wedge(A\vee B)\wedge C$ (агар айтилган шартларга амал қилинмаса, у ҳолда таърифда келтирилган алмаштиришлар натижасида ушбу нотўғри натижага келамиз:

$$A\vee\neg B\wedge A\vee B\quad C).$$

Юқоридаги таърифдан келтирилган формулага иккиламчи бўлган формула ҳам келтирилган формула бўлишини сезиш қийин эмас.

1-мисол $\mathbf{A}(A,\ B,\ C)\equiv\neg(\neg A\wedge B\vee A\wedge\neg C)\wedge$ $\wedge(A\wedge\neg B\vee\neg B\wedge C)$ формулага иккиламчи бўлган формула

$$\mathbf{A}^*(A,\ B,\ C)\equiv\neg((\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg C))\vee(A\vee\neg B)\wedge$$
$$\wedge\neg(B\vee C)$$

бўлади.

1 теорема $\mathbf{A}(A_1,\ldots,A_n)$ *жумлалар алгебрасининг ихтиёрий келтирилган формуласи,* $\mathbf{A}^*(A_1,\ldots,A_n)$ *унга иккиламчи формула бўлса, у ҳолда ушбу муносабат ўринлидир:*

$$\mathbf{A}\neg(A_1,\ldots,A_n)\equiv\mathbf{A}^*(\neg A_1,\ldots,\neg A_n),\qquad(1)$$

Иккилик принципи деб аталувчи бу муносабатнинг ўринли эканлигини исботлашда математик индукция усулидан фойдаланамиз. Индукция берилган формуланинг ранги бўйича олиб борилади.

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ ихтиёрий келтирилган формула бўлиб, унинг ранги 0 га тенг бўлсин. У ҳолда $\mathbf{A}$ формула ўзгарувчи жумла (масалан, A_i) $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} A_i$ $(i = \overline{1, n})$ бўлсин. У ҳолда

$$\neg \mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \neg A_i \tag{2}$$

ҳамда

$$\mathbf{A}^*(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} A_i \tag{3}$$

бўлади. (3) да ҳар бир A_k $(k = \overline{1, n})$ ни $\neg A_k$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A}^*(\neg A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \neg A_i \tag{4}$$

бўлади. (2) ва (4) дан (1) келиб чиқади. Фараз қилайлик, ранги $m \geqslant 1$ дан кичик бўлган барча формулалар учун теорема ўринли ҳамда $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = m$ бўлсин. $\mathbf{A}$ келтирилган формула бўлгани учун у ё $\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$ ёки $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ кўринишда бўлиши мумкин (бу ерда $\mathbf{B}$ ва $\mathbf{C}$ лар келтирилган формулалардир). У ҳолда табиий, $\mathrm{rang}\, \mathbf{B}) < m$ ва $\mathrm{rang}\,(\mathbf{C}) < m$ дир, ва демак, $\mathbf{B}$ ва $\mathbf{C}$ формулалар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$\neg \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n), \tag{5}$$

$$\neg \mathbf{C}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{C}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n). \tag{6}$$

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \wedge \mathbf{C}(A_1, \ldots, A_n)$ бўлса, у ҳолда

$$\neg \mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \neg \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \vee \neg \mathbf{C}(A_1, \ldots, A_n) \tag{7}$$

бўлади. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формулага иккиламчи формулага ўтсак,

$$\mathbf{A}^*(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \mathbf{B}^*(A_1, \ldots, A_n) \vee \mathbf{C}((A_1, \ldots, A_n) \tag{8}$$

бўлади. (8) да ҳар бир A_k ни унинг инкори $\neg A_k$ $(k = \overline{1, n})$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A}^* \neg A_1, \ldots, \neg A_n) \overset{\circ}{=} \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \vee$$
$$\vee\, \mathbf{C}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \tag{9}$$

ҳосил бўлади.

(7), (5), (6) ва (9) дан (1) келиб чиқади.

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \overset{\circ}{=} \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \vee \mathbf{C}((A_1, \ldots, A_n)$ бўлса, у ҳолда

$$\neg A(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg B(A_1, \ldots, A_n) \wedge \neg C(A_1, \ldots, A_n) \quad (10)$$

бўлади. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ га иккиламчи формулага ўтсак,

$$\mathbf{A}^*(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}^*(A_1, \ldots, A_n) \wedge \mathbf{C}^*(A_1, \ldots, A_n) \quad (11)$$

бўлади. (11) да ҳар бир A_k $(k = \overline{1, n})$ ни $\neg A_k$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \equiv \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \wedge \\ \wedge\, \mathbf{C}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \quad (12)$$

ҳосил бўлади.

(10), (5), (6) ва (12) дан (1) келиб чиқади.

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формула $\neg \mathbf{B}$ кўринишга эга бўлганда ҳам теорема ўринлидир (бунда $\mathbf{B}$ келтирилган формула бўлса-да, $\neg \mathbf{B}$ келтирилган формула бўлмаслиги мумкин).

$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ бўлса, у ҳолда

$$\neg \mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \quad (13)$$

бўлади. $\mathbf{A}$ га иккиламчи формулага ўтсак,

$$\mathbf{A}^*(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg \mathbf{B}^*(A_1, \ldots, A_n) \quad (14)$$

ҳосил бўлади. (14) да ҳар бир A_k $(k = \overline{1,n})$ ни унинг инкори $\neg A_k$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \equiv \neg \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \quad (15)$$

га эришамиз

(5) дан (иккала қисмидан инкор олиб)

$$\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \quad (16)$$

ни ҳосил қилиш мумкин.

(13), (14) ва (15) дан (1) келиб чиқади. Теорема тўлиқ исботланди.

2-мисол. $\mathbf{A}(A, B, C) \equiv (A \vee \neg C) \wedge (A \wedge \neg B \vee B \wedge \wedge \neg C)$ формула учун иккилик принципи ўринли эканини текширинг.

$\mathbf{A}(A, B, C)$ га иккиламчи формула $\mathbf{A}^*(A, B, C) \equiv \equiv A \wedge \neg C \vee (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)$ бўлади. A ни $\neg A$, B ни $\neg B$, ва C ни $\neg C$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A}^*(\neg A, \neg B, \neg C) \equiv \neg A \wedge \neg\neg C \vee (\neg A \vee \neg\neg B) \wedge \\ \wedge (\neg B \vee \neg\neg C)$$

ёки

$$\mathbf{A}^*(\neg A, \neg B, \neg C) \equiv \neg A \wedge C \vee (\neg A \vee B) \wedge \\ \wedge (\neg B \vee C) \quad (\alpha)$$

ҳосил бўлади.

Берилган формуланинг инкорини топиб, уни тенг кучли шакл алмаштирамиз:

$$\neg \mathbf{A}(A, B, C) \equiv \neg((A \vee \neg C) \wedge (A \wedge \neg B \vee B \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg(A \vee \neg C) \vee \neg (A \wedge \neg B \vee B \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg A \wedge \neg\neg C \vee \neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (B \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg A \wedge C \vee (\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg B \vee \neg\neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg A \wedge C \vee (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), \text{ яъни}$$

$$\mathbf{A} \neg (A, B, C) \equiv \neg A \wedge C \vee (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C). \qquad (\beta)$$

(α) ва (β) дан $\neg \mathbf{A}(A, B, C) \equiv \mathbf{A}^*(\neg A, \neg B, \neg C)$ эканлиги келиб чиқади.

Иккилик қонуни деб аталувчи ушбу теоремани исботлаймиз

2-теорема. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ *ва* $\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ *келтирилган формулалар бўлиб,* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ *бўлса, у ҳолда* $\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{B}^*$ *бўлади, яъни битта эквивалентлик синфидан олинган иккита формулага иккиламчи формулалар ҳам битта эквивалентлик синфига тегишли бўлади* (3-§ га қаранг).

Исботи. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ ва $\mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n)$ лар келтирилган формулалар бўлгани учун олдинги теоремага асосан

$$\neg \mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{A}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n), \qquad (17)$$

ва

$$\neg \mathbf{B}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \qquad (18)$$

бўлади.

(17) ва (18) ларнинг ҳар иккала қисмидан инкор олсак,

$$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg \mathbf{A}^*(A_1, \ldots, \neg A_n),$$

ва

$$\mathbf{B}(A_1, \ldots A_n) \equiv \neg \mathbf{B}^*(A_1, \ldots, \neg A_n)$$

ҳосил бўлади. Шартга кўра, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ бўлгани учун охирги иккита тенгкучлиликлардан

$$\neg \mathbf{A}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \equiv \neg \mathbf{B}^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \qquad (19)$$

тенгкучлиликни ҳосил қилиш мумкин.

(19) нинг иккала томонидан инкор олиб, ҳосил бўлган тенгкучлиликда ҳар бир A_i ($i = \overline{1,n}$) ни $\neg A_i$ билан алмаштирсак, $\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{B}^*$ келиб чиқади.

Теорема исботланди.

3-мисол. $\mathbf{A}(A, B, C) \equiv (A \vee \neg C) \wedge (A \wedge \neg B \vee B \wedge \wedge \neg C)$, $\mathbf{B}(A, B, C) \equiv A \wedge \neg B \vee B \wedge \neg C$ бўлсин. $\mathbf{A}(A, B, C) \equiv \mathbf{B}(A, B, C)$ эканлиги қуйидаги жадвалдан кўринади:

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A\vee\neg C$	$A\wedge\neg B$	$B\wedge\neg C$	$A\wedge\neg B\vee B\wedge\neg C$	$(A\vee\neg C)\wedge$ $\wedge(A\wedge\neg B\vee B\wedge\neg C)$
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Берилган формулага иккиламчи бўлган формулалар қуйидагилардир:

$$\mathrm{A}^*(A,\ B,\ C) \equiv A\wedge\neg C\vee(A\vee\neg B)\wedge(B\vee\neg C),$$
$$\mathrm{B}^*(A,\ B,\ C) \equiv (A\vee\neg B)\wedge(B\vee\neg C).$$

Қуйидаги жадвал эса $\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{B}^*$ эканини кўрсатади

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A\wedge\neg C$	$A\vee\neg B$	$B\vee\neg C$	$(A\vee\neg B)\wedge(B\vee\neg C)$	$A\wedge\neg C\vee(A\vee\neg B)\wedge$ $\wedge(B\vee\neg C)$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1

9-§. Функцияларнинг тўлиқ системалари

Ушбу жадвалда келтирилган Буль функциялари алоҳида аҳамиятга эгадир.

x	y	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$	$f_3(x, y)$	$f_4(x, y)$	$f_5(x, y)$	$f_6(x, y)$	$f_7(x, y)$	$f(x)$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1	

Уларни шартли равишда „конъюнкция", „дизъюнкция", „импликация", „эквиваленция", „2 модули бўйича қўшиш", („қатъий дизъюнкция", „Жегалкин функцияси"), „Шеффер штрихи", „Пирс стрелкаси" ва „инкор" деб атаб,

$$x \wedge y,\ x \vee y,\ x \to y,\ x \sim y,\ x + y,\ x \perp y,\ x \downarrow y,\ x'$$

каби белгилаймиз.

B барча Буль функциялари тўплами бўлсин.

1-таъриф. (**B**; $\wedge$, $\vee$, $'$) система *Буль алгебраси* дейилади.

Алгебрадан маълумки, (**A**; $f_1, \ldots, f_k$)—бирор алгебра[1], $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лар **A** тўпламнинг элементлари бўлиб, **A** нинг ихтиёрий b элементини $a_1, \ldots, a_n$ элементлар ва $f_1, \ldots, f_k$ амаллардан тузилган чекли ифода (сўз) кўринишида ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда $a_1, \ldots, a_n$ элементлар **A** алгебранинг *ташкил этувчилари* (ҳосил қилувчилари) дейилади. Қуйида биз $x \wedge y$, $x \vee y$ ва x' функциялар Буль алгебрасининг ташкил этувчилари эканлигини курсатамиз.

1-теорема. *$f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль алгебрасининг ихтиёрий функцияси бўлсин.*

Агар

(I) *f ўзгарувчилар қийматларининг ҳеч бўлмаганда битта тизмасида* 1 *га тенг бўлса, у ҳолда уни ягона усулда*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n} \tag{A}$$

кўринишда,

(II) *f ўзгарувчилар қийматларининг ҳеч бўлмаганда битта тизмасида* 0 *га тенг бўлса, у ҳолда уни ягона усулда*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}} (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}) \tag{B}$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Бу теорема (тўғрироғи, унинг (I) қисми) қуйида қараладиган 1-теоремадан ҳосил бўлади.

2-таъриф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль функцияси учун

[1] **A**—қаралаётган алгебранинг асосий тўплами дейилиб. $f_1, \ldots, f_k$ лар шу тўпламда аниқланган амаллар, $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ алгебранинг сигнатурасидир.

шундай иккита $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ ва $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ тизмалар топилсаки, улар учун

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq$$
$$\neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), \; (i = \overline{1,n}),$$

бўлса, $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция x_i ўзгарувчига *жиддий боғлиқ*,

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

бўлганда эса x_i ўзгарувчига *жиддий боғлиқмас* дейилади.

1-мисол. $f(x, y) = x \vee (x \wedge y)$ Буль функцияси x ўзгарувчига жиддий боғлиқ, аммо y ўзгарувчига эса жиддий боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан,

$$f(1, y) = 1 \vee (1 \wedge y) = 1 \vee y = 1,$$
$$f(0, y) = 0 \vee (0 \wedge y) = 0 \vee 0 = 0,$$

яъни $f(1, y) \neq f(0, y)$ (параграф бошидаги жадвалга қаранг)

$$f(x, 1) = x \vee (x \wedge 1) = x \vee x = x,$$
$$f(x, 0) = x \vee (x \wedge 0) = x \vee 0 = x,$$

яъни $f(x, 1) = f(x, 0)$.

3-таъриф. Бири иккинчисидан жиддий боғлиқ бўлмаган ўзгарувчини ташлаб юбориш ёки киритиш орқали ҳосил қилиниши мумкин бўлган иккита Буль функцияси тенг деб ҳисобланади.

2-мисол. $f(x, y) = x \vee (x \wedge y)$ ва $g(x, y) = x$ Буль функциялари тенгдир, чунки улар y ўзгарувчига жиддий боғлиқ эмас.

Қуйидаги белгилашни киритайлик:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{агар } \alpha = 1 \text{ бўлса,} \\ x', & \text{агар } \alpha = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

x ўзгарувчи ҳам 1 ёки 0 қиймат қабул қилинганлиги учун

$$1^1 = 1, \; 0^1 = 0, \; 1^0 = 1' = 0, \; 0^0 = 0' = 1$$

бўлиб, бундан эса

$$\alpha^\alpha = 1, \quad \alpha^{\neg\alpha} = 0 \qquad (C)$$

экани келиб чиқади.

2-теорема. *Айнан 0 га тенг бўлмагин ҳар қандай $f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль функциясини*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_r^{\alpha_r} \wedge$$

$$\wedge f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

$(1 \leqslant k \leqslant n)$ кўринишда ёзиш мумкин. Хусусан, $r=1$ бўлганда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee x' \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)$$

$r = n$ бўлганда эса

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n} \qquad (2)$$

бўлади, бунда (2) нинг ўнг томонидаги қўшилувчилар f функция 1 қиймат қабул қиладиган барча $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмалар бўйича олинади.

Исботи. $x_i = \alpha_i$ $(i = \overline{1,n})$ бўлганда $x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n} = 1$ бўлиши равшандир (юқоридаги (C) белгилашга қаранг). $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ узунлиги r га тенг бўлган ихтиёрий тизма ҳамда $x_i = \beta_i$ $(i = \overline{1, r})$ бўлса, (1) нинг чап томони $f(\beta_1, \ldots, \beta_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ бўлади. (1) нинг ўнг томонига $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ тизмани қўйсак,

$$\bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} \beta_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \beta_r^{\alpha_r} \wedge f(\beta_1, \ldots, \beta_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ тизмаларнинг бирортаси учун $\alpha_i = \beta_i$ $(i = \overline{1, r})$ бўлиб, ўша тизма учун $\beta_1^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \beta_r^{\beta_r} = 1$, қолган тизмалар учун эса $\beta_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \beta_r^{\alpha_r} = 0$ бўлади (чунки бирор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ тизма учун $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ бўлса, шундай j топиладики, $1 \leqslant j \leqslant r$, $\alpha_j \neq \beta_j$, яъни $\alpha_j = \beta_j'$ ёки $\alpha_j = \neg \beta_j$ бўлади, ва демак, (C) га биноан $\beta_j^{\alpha_j} = 0$ ҳамда $\beta_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \beta_j^{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \beta_r^{\alpha_r} = 0$ бўлади.

Демак, (3) даги қўшилувчиларнинг фақат биттасида $f(\beta_1, \ldots, \beta_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ олдидаги „коэффициент“ 1 бўлиб, қолганлари 0 га тенг бўлар экан. Шу сабабли (2) нинг ўнг томони ҳам $f(\beta_1, \ldots, \beta_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ бўлади. Теорема исботланди.

Исботланган теоремадаги (2) ифода 1-теореманинг (A) ҳолини ташкил қилади.

(1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни r та ўзгарувчиси бўйича ёйиш, (2) эса функциянинг мукаммал дизъюнктив нормал формаси (барча ўзгарувчилари бўйича ёйиш) дейилади.

Ўқувчи қийинчиликсиз қуйидаги теоремани исботлай олади деб ўйлаймиз.

3-теорема. *Айнан 1 га тенг бўлмаган ҳар қандай $f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль функциясини*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_r^{\alpha_r}) \vee f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_{r+}, \ldots, x_n),$$

$(1 \leqslant r \leqslant n)$ кўринишда ёзиш мумкин. Хусусан, $r = 1$ бўлса,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)] \wedge \wedge [x_1' \vee f(1, x_2, \ldots, x_n)],$$

$r = n$ бўлганда эса

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0}} (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}) \tag{4}$$

бўлади бунда (4) *нинг ўнг томонидаги кўпайтувчилар f функция* 0 *қиймат қабул қиладиган барча $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ тизмалар бўйича олинади.*

Изоҳ. 3-теоремани исботлашда ушбу белгилашдан фойдаланиш керак:

$$x^\alpha = \begin{cases} x', & \text{агар } \alpha = 1 \text{ бўлса}, \\ x, & \text{агар } \alpha = 0 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бу ерда 1-теореманинг (В) қисми (4) дан иборат эканини равшан

3-мисол.

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Ушбу жадвал билан берилган Буль функциясининг мукаммал дизъюнктив ва конъюнктив нормал формаларини тузинг.

Берилган функция (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1) тизмаларда 1 қийматга (1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0) тизмаларда эса 0 қийматга эга бўлгани учун унинг МДНФ си

$$f(x, y, z) = x \wedge y \wedge z' \vee x \wedge y' \wedge z \vee x' \wedge y \wedge z \vee x' \wedge y' \wedge z',$$

МКНФ си эса

$$f(x, y, z) = (x' \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y' \vee z) \wedge (x \vee y \vee z')$$

дан иборат бўлади

4-таъриф. $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m)$, $(i = \overline{1,n})$ Буль функциялари бўлса, у ҳолда $h(x_1, \ldots, x_m) = f_1(g(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$ функция берилган функциялардан *суперпозиция оператори ёрдамида ҳосил қилинган* дейилади.

4-мисол. $f(x, y) = x \wedge y$, $g_1(x, y, z) = x \to (y \vee z)$, $g_2(x, y, z) = x + z$ бўлса, у ҳолда $h(x, y, z) = (x \to (y \vee z)) \wedge (x + z)$ берилган функциялардан суперпозиция оператори ёрдамида ҳосил қилинган Буль функциясидир.

5-таъриф. $\sum = \{f_1, f_2, \ldots\}$ Буль функцияларининг бирор тўплами бўлсин. Ҳар бир Буль функциясини $\sum$ га кирган функцияларнинг суперпозицияси сифатида ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда $\sum$ Буль функцияларининг *тўлиқ системаси* дейилади.

5-мисол. а) Барча Буль функциялари тўплами, табиий, функцияларнинг тўлиқ системасини ташкил қилади.

б) $\sum_0 = \{x \wedge y, x \vee y, x'\}$ система тўлиқ система бўлишини 2- ва 3-теоремалардан кўриш мумкин

4-теорема. $\sum_1 = \{x \vee y, x'\}$, $\sum_2 = \{x \wedge y, x'\}$ ва $\sum_3 = \{x \to y, x'\}$ *лар функцияларнинг тўлиқ системаларидир.*

Исботи. Қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканини бевосита текшириб кўриш қийин эмас:

1°. $x \wedge y = y \wedge x$; 2°. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
3°. $x \wedge x = x$; 4°. $x \vee y = y \vee x$;
5°. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$; 6°. $x \vee x = x$;
7°. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
8°. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
9°. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$; 10°. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$;
11°. $x \wedge 1 = x$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$, $x \vee 0 = x$;

12°. $x \to y = x' \vee y$; 13°. $x \to y = (x \wedge y')'$;
14°. $x \sim y = (x \to y) \wedge (y \to x)$; 15°. $x \wedge y = (x' \vee y')'$;
16°. $x \vee y = (x' \wedge y')'$; 17°. $x \wedge y = (x \to y')'$;
18°. $x \vee y = x' \to y$; 19°. $(x')' = x$;
20°. $x \vee x' = 1$; 21°. $x \wedge x' = 0$;
22°. $x \vee (x \wedge y) = x$; 23°. $x \wedge (x \vee y) = x$.

Ҳақиқатан, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \to y$, $x \sim y$, x' функцияларнинг таърифидан кўринади-ки, бу функцияларни мос равишда $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $\neg A$ формулалар ёрдамида аниқлаш мумкин. 3-§ да келтирилган асосий тенгкучлиликлар ва улардан ҳосил қилиниши мумкин бўлган тенгкучлиликлардан 1°—23°-тенгликлар ўринли эканлигини кўриш осон.

Юқорида $\sum_0 = \{x \vee y, y \wedge y, x'\}$ тўлиқ система эканлиги кўрсатилган эди. $\sum_1$ нинг тўлиқ система эканлигини кўрсатиш учун $x \wedge y$ ни $x \vee y$ ва x' орқали ифодалаш мумкинлигини кўрсатиш кифоядир — бу эса 15° да кўрсатилган.

$\sum_2$ нинг тўлиқ система эканлиги $\sum_0$ ва 16° лардан ҳосил қилинади, $\sum_3$ нинг тўлиқ система эканлиги $\sum_0$, 17° ва 18° лардан ҳосил қилинади.

5-теорема. *$\sum_4 = \{x \mid y\}$ ва $\sum_5 = \{x \downarrow y\}$ лар тўлиқ системалардир.*

Исботи. $x' = x \mid x$ эканлигини бевосита текшириб кўриш мумкин

$x \mid y = (x \wedge y)'$ ёки $x \wedge y = (x \mid y)'$ эканлиги параграф бошидаги жадвалдан кўринади.

Демак, $x \wedge y = (x \mid y)' = (x \mid y) \mid (x \mid y)$ дир. $x \vee y$ ни $x \wedge y$ ва x' орқали ифода қилиш мумкинлигидан $x \vee y$ ни $x \mid y$ орқали ифода қилиш мумкинлиги келиб чиқади.

$\sum_5 = \{x \downarrow y\}$ нинг тўлиқ система ташкил этишини ўқувчи машқ сифатида бажариши мумкин.

6-теорема. *$\sum_6 = \{x + y, x \wedge y, 1\}$ ва $\sum_7 = \{x + y, x \vee y, 1\}$ лар тўлиқ системалардир; бу ерда 1 билан ўзгарувчилар қийматларининг ҳар қандай тизмасида 1 қиймат қабул қилувчи Буль функциясини белгиланган.*

Исботи. $x' = x+1$ эканлигини кўриш қийин эмас. $\sum_1 = \{x \vee y,\ x'\}$, $\sum_2 = \{x \wedge y,\ x'\}$ тўлиқ системалар эканлигидан $\sum_6$ ва $\sum_7$ ҳам тўлиқ системалар эканлиги келиб чиқади.

6-таъриф. Ω—Буль функцияларининг бирор тўплами бўлсин. Ω га кирган функцияларнинг барча суперпозицияларидан иборат бўлган функциялар тўплами Ω тўпламининг *ёпилмаси* дейилади ва $[\Omega]$ каби белгиланади.

7-таъриф. $[\Omega]=\Omega$ бўлса, Ω суперпозиция операторига нисбатан *ёпиқ тўплам* дейилади.

Масалан, Ω сифатида барча Буль функциялари тўплами $\mathbf{B}$ ни олсак, $[\Omega] = [\mathbf{B}] = \mathbf{B}$ бўлади.

8-таъриф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль функцияси учун $f(0, \ldots, 0) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, \ldots, x_n)$ *0 ни сақловчи функция* дейилади.

6-мисол. $f(x, y) = x \wedge y$, $f(x, y) = x \vee y$, $f(x, y) = x + y$ лар 0 ни сақловчи функциялардир.

7-теорема. *0 ни сақловчи функцияларнинг суперпозицияси яна 0 ни сақловчи функциядир, яъни 0 ни сақловчи барча функциялар тўплами ёпиқдир.*

Исботи. $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = \overline{1, n})$ 0 ни сақловчи функциялар, яъни $f(0, \ldots, 0) = 0$, $g_i(0, \ldots, 0) = 0$ $(i = \overline{1, n})$ бўлсин. У ҳолда $h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$ ҳам 0 ни сақловчи функция эканлиги равшандир.

9-таъриф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ Буль функцияси учун $f(1, \ldots, 1) = 1$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, \ldots, x_n)$ *1 ни сақловчи функция* дейилади.

7-мисол. $f(x, y) = x \wedge y$, $f(x, y) = x \vee y$, $f(x, y) = x \rightarrow y$, $f(x, y) = x \sim y$ лар 1 ни сақловчи функциялардир.

8-теорема. *1 ни сақловчи функцияларнинг суперпозицияси яна 1 ни сақловчи функциядир, яъни 1 ни сақловчи барча функциялар тўплами ёпиқдир.*

Исботни ўқувчининг диққатига ҳавола этамиз.

10-таъриф. $(f(x_1', \ldots, x_n'))' = h(x_1, \ldots, x_n)$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцияга *иккиламчи функция* дейилади. Агар $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1', \ldots, x_n'))'$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, \ldots, x_n)$ *ўз-ўзига иккиламчи функция* дейилади.

8-мисол. $f(x, y) = x \vee y$ функция $f(x, y) = x \wedge y$ функцияга иккиламчидир, чунки $(x' \wedge y')' = x \vee y$;

$f(x, y, z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$ ўз-ўзига иккиламчи функциядир, чунки $((x'\wedge y')\vee(x'\wedge z')\vee(y'\wedge\wedge z'))'=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$ дир.

9-теорема. *Ўз-ўзига иккиламчи бўлган функцияларнинг суперпозицияси яна ўз-ўзига иккиламчи бўлган функциядир, яъни ўз-ўзига иккиламчи бўлган барча функциялар тўплами ёпиқдир.*

Исботи. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тизманинг ҳар бир координатасини унинг қарама-қаршиси билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ тизма берилган тизмага қарама-қарши тизма деб аталади. Масалан, (1, 0, 1, 1, 0) тизмага қарама-қарши тизма (0, 1, 0, 0, 1) дир.

Бу келишувдан кейин ўз-ўзига иккиламчи бўлган функцияни қуйидагича таърифлаш мумкин: ҳар қандай иккита ўзаро қарама-қарши тизмада турли қиймат қабул қилувчи $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция ўз-ўзига иккиламчи функция дейилади:

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\neq f(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') \text{ ёки}$$

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha^n)=(f(\alpha_1', \ldots, \alpha_n'))'. \tag{5}$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i(x_1, \ldots, x_m)$, $(i=\overline{1,n})$ лар ўз-ўзига иккиламчи функциялар бўлсин, яъни (5) ва

$$g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)=(g_i(\alpha_1', \ldots, \alpha_m'))'$$

ўринли бўлсин.

У ҳолда $h(x_1,\ldots,x_m)=f(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_m))$ функция учун $(h(\alpha_1', \ldots,\alpha_m'))'=(f(g_1(\alpha_1', \ldots, \alpha_m'), \ldots,$

$$g_n(\alpha_1')\ldots, \alpha_n'))'=(f((g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m))', \ldots, (g_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m))'))'=f(g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, g_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m))=$$
$$=h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

бўлади. Теорема исботланди.

11-таъриф. $f(x_1, \ldots, x_n)=\beta_0+\beta_1\wedge x_1+\ldots+\beta_n\wedge x_n$ кўринишдаги Буль функцияси *чизиқли функция* дейилади (бунда „+“ „Жегалкин амали“ ёки „2 модули бўйича қўшиш“, $\beta_i=0$ ёки 1, $i=0, 1, \ldots, n$).

9-мисол. $f(x, y)=x+y$, $f(x, y, z)=x+y+z$, $f(x, y, z)=0\wedge x+1\wedge y+0\wedge z=y$ лар чизиқли функциялардир.

10-теорема. *Чизиқли функциялар суперпозицияси яна чизиқли функциядир, яъни барча чизиқли функциялар тўплами ёпиқдир.*

Ёзувни қисқартириш мақсадида $x \wedge y$ ни xy каби белгилаймиз.

Исботи. Жегалкин амали $x+y$ қуйидаги хоссаларга эга эканлигини кўрсатиш қийин эмас (буни ўқувчи мустақил равишда бажара олиши мумкин):

1. $x+y=y+x$;
1. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. $x(y+z)=(xy)+(xz)$.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\beta_0+\beta_1x_1+\ldots+\beta_nx_n,$$

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)=\gamma_{i0}+\gamma_{i1}x_1+\ldots+\gamma_{im}x_m \quad (i=\overline{1,n})$$

чизиқли функциялар берилган бўлсин. У ҳолда

$$h(x_1,\ldots,x_m)=f(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_m))=$$
$$=\beta_0+\beta_1(\gamma_{10}+\gamma_{11}+\ldots+\gamma_{1m}x_m)+\ldots+\beta_n(\gamma_{n0}+$$
$$+\gamma_{n1}x_1+\ldots+\gamma_{nm}x_m).$$

Юқорида келтирилган $x+y$ функциянинг хоссаларига асосан

$$h(x_1,\ldots,x_m)=(\beta_0+\beta_1\gamma_{10}+\ldots+\beta_n\gamma_{n0})+$$
$$+(\beta_1\gamma_{11}+\ldots+\beta_n\gamma_{n1})x_1+\ldots+(\beta_1\gamma_{1m}+\ldots+\beta_n\gamma_{nm})x_m.$$

$\beta_i=0$ ёки 1, $\gamma_{ij}=0$ ёки 1 бўлгани учун $\beta_i\gamma_{ij}=0$ ёки 1, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Демак, ҳар бир қавс 0 ёки 1 га тенг. Шундай қилиб, $h(x_2,\ldots,x_m)=\delta_0+\delta_1x_1+\ldots+\delta_mx_m$ бўлиб, бунда $\delta_0=\beta_0+\beta_1\gamma_{10}+\ldots+\beta_n\gamma_{n0}$, $\delta_1=\beta_1\gamma_{11}+\ldots+\beta_n\gamma_{n1},\ldots,\delta_m=\beta_1\gamma_{1m}+\ldots+\beta_n\gamma_{nm}$.

12-таъриф. $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ва $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ тизмалар учун $\alpha_i\leqslant\beta_i$ $(i=\overline{1,n})$ бўлса, „*α тизма β тизмадан катта эмас*“ дейилади ва $\alpha\leqslant\beta$ каби ёзилади.

Масалан, $\alpha=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ ва $\beta=(1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ тизмалар $\alpha\leqslant\beta$ муносабатни қаноатлантиради.

13-таъриф. $\alpha\leqslant\beta$ муносабатни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ва $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ тизмалар учун $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\leqslant f(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ бўлса, $f(x_1,\ldots,x_n)$ Буль функцияси *монотон функция* дейилади.

10-мисол. $f(x,\ y)=x\vee y$, $f(x)=x$ лар монотон функциялардир.

11-теорема. *Монотон функцияларнинг суперпозицияси яна монотон функциядир, яъни барча монотон функциялар тўплами ёпиқдир.*

Исботи. $f(x_1,\ldots,x_n)$, $(g_ix_1,\ldots,x_m)$ $(i=\overline{1,n})$ лар монотон функциялар, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$

лар эса $\alpha\leqslant\beta$ муносабатни қаноатлантирувчи тизмалар бўлсин. У ҳолда $h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$ функция учун

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = f(g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, g_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) \qquad (6)$$

ва

$$h(\beta_1, \ldots, \beta_m) = f(g_1(\beta_1, \ldots, \beta_m), \ldots, g_n(\beta_1, \ldots, \beta_m)) \qquad (7)$$

бўлади. $g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \gamma_i$, $g_i(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \tau_i$, $(i = \overline{1,n})$ каби белгиласак, $g_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = \overline{1,n})$ лар монотон функциялар бўлганлиги учун $\gamma_i \leqslant \tau_i$ дир. $f(x_1, \ldots, x_n)$ ҳам монотон функция бўлганлиги учун $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \leqslant \leqslant f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, ва демак, (6) ва (7) дан $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \leqslant \leqslant h(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ келиб чиқади.

Функционал тўлиқлилик ҳақидаги теорема деб аталувчи ушбу теоремани исботсиз келтирамиз.

12-теорема. *Буль функцияларининг Σ системаси (функционал) тўлиқ бўлиши учун бу системага ҳеч бўлмаганда битта 0 ни сақламайдиган функция, ҳеч бўлмаганда битта 1 ни сақламайдиган функция, ҳеч бўлмаганда битта ўз-ўзига иккиламчи бўлмаган функция, ҳеч бўлмаганда битта чизиқли бўлмаган функция ва ҳеч бўлмаганда битта монотон бўлмаган функция кириши зарур ва етарлидир.*

10-§. Жумлалар алгебрасининг қўлланилиши

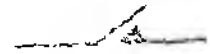
XX асрни „атом асри“ дейишади. Аммо бу асрни тўла ҳуқуқ билан „электрон ҳисоблаш машиналари асри“ деб аташ ҳам мумкин. Асримизнинг бу икки юксак хусусиятининг юзага келиши фанда илмий техника революциясининг юз берганлигидир. Ҳозирги пайтда халқ хўжалигини, инсон фаолиятининг ҳар қандай соҳасини ЭҲМ сиз фараз қилиб бўлмайди. Илмий-техника революциясининг юз беришида математик мантиқнинг катта ҳиссаси бор. XX асрнинг бошларидан бошлаб жуда тез ривожлана бошлаган математик мантиқдан янги мустақил соҳалар ажралиб чиқди: автоматлар назарияси, реле-контакт ва электрон схемалар синтези, алгоритмлар назарияси шулар жумласидандир. Асримизнинг ўттизинчи йилларига келиб ЭҲМ нинг математик таъминоти ишлаб чиқилди, қирқинчи йилларнинг бошларида эса биринчи ЭҲМ лар ишга туширилди. Автоматик бошқариш қурилмалари ва электрон ҳисоблаш машиналарида юзлаб ва минглаб реле-контакт, электрон-лампа, яримўтказгич ва магнит элементларини ўз ичига олган реле-контакт ва электрон-лампа схемалар учрайди. Бу схемалар автоматик бошқариш қурилмалари ва электрон ҳисоблаш машиналари таркибида бениҳоя катта тезликда жуда мураккаб операциялар бажаришда бевосита иштирок этади ва автоматларнинг барча иш фаолиятини бошқариб туради. Реле-контакт ва электрон схемаларни анализ ва синтез қилишда жумлалар алгебраси асосий вазифани бажаради. Ҳар қандай схемага бирор Буль функциясини (ёки жумлалар алгебрасининг бирор формуласини) мос қўйиш мумкин. Бу функцияни ўрганиб, берилган схеманинг имкониятларини аниқлаш, уни ихчамлаш мумкин. Қуйида реле-контакт схемаларини Буль функциялари ёрдамида реализация қилиш масаласини кўриб чиқамиз

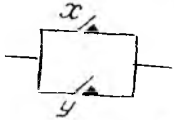
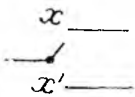
Тузилиши билан қизиқмаган ҳолда ток ўтказадиган ёки ток ўтказмайдиган ҳар қандай қурилмани контакт деб аташ мумкин. Одатда контактнинг ишлашида электромагнит реле иштирок этади — шунинг учун ҳам бу бирикма реле-контакт деб ҳам аталади. Контактни шартли равишда  кўринишда белгилаймиз.

Контактнинг ўзига хос хусусияти шундан иборат-ки, у ё ёпиқ (ток ўтказадиган) ёки очиқ (ток ўтказмайдиган) ҳолатда бўлиши мумкин. Шунинг учун контактнинг биринчи ҳолатини 1, иккинчи ҳолатини эса 0 билан белгилаш мумкин.

Барча контактлар орасида доимо ток ўтказадиган (доимо ёпиқ) ҳамда бутунлай ток ўтказмайдиган (доимо очиқ) контактлар мавжуддир — уларни ҳам мос равишда 1 ва 0 билан белгилаймиз ва мос равишда

1 0

кўринишда ифодалаймиз. Аксарият биз ўзгарувчи контактлар билан иш кўрганимиз учун уларни x, y, z, . . ҳарфлар билан белгилаймиз. Бизга  x ва  y

контактлар берилган бўлса, уларни кетма-кет улаш натижасида ҳосил бўлган  схема x ва y контактлар бир пайтда ёпиқ бўлгандагина ток ўтказиши аёндир. x ва y контактларни параллель улаш натижасида ҳосил бўладиган  схема x ва y контактларнинг камида биттаси ёпиқ бўлганда ток ўтказади. x контакт ёпиқ бўлганда очиқ, x очиқ бўлганда эса ёпиқ бўладиган контактни x' билан белгилаймиз ва x контактга қарама-қарши контакт деб атаймиз. Уни схематик равишда  каби ифодалаш мумкин.

Барча контактлар тўпламини $\mathscr{K}$ билан, контактларни кетма-кет улаш амалини „·“ билан, параллел улашни эса „+“ билан белгиласак, у ҳолда контактлар алгебраси деб аталувчи $(\mathscr{K}; \cdot; +)$ алгебра ҳосил бўлади. Бу алгебрада қуйидаги шартлар бажарилишини текшириб кўриш қийин эмас:

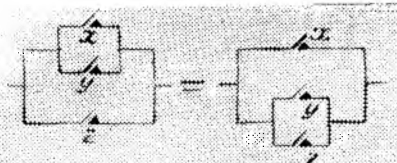
1°. $(x')' = x$, 

2°. $x \cdot y = y \cdot x$, 

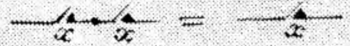
3°. $x + y = y + x$, 

4°. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, 

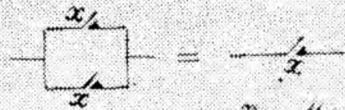
5°. $(x+y)+z=x+$
$+(y+z)$,



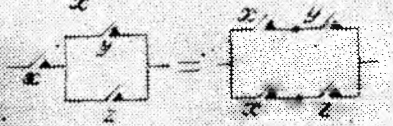
6°. $x\cdot x=x$;



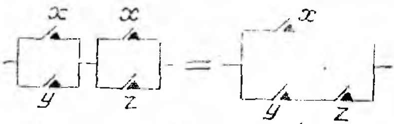
7°. $x+x=x$,



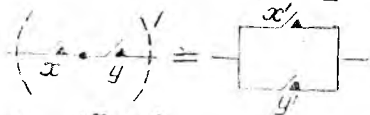
8°. $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+$
$+(x\cdot z)$,



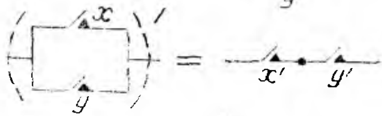
9°. $x+(y\cdot z)=(x+y)\times$
$\times(x+z)$,



10°. $(x\cdot y)'=x'+y'$,

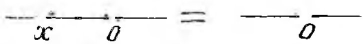


11°. $(x+y)=x'\cdot y'$,



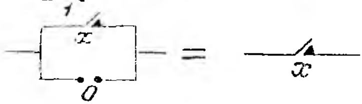
12°. $x\cdot 1=x$,

$x\cdot 0=0$,

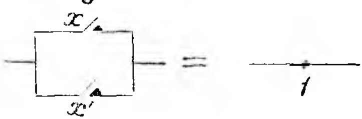


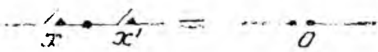
$x+1=1$,

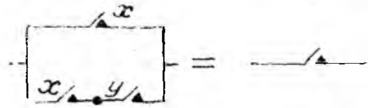
$x+0=x$,

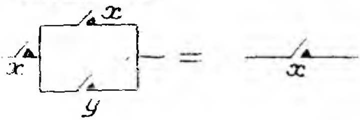


13°. $x+x'=1$,



14°. $x \cdot x' = 0$, 

15°. $x + x \cdot y = x$, 

16°. $x \cdot (x + y) = x$; 

Буни икки усулда текшириш мумкин.

1-усул. Схемада қатнашган ўзгарувчи контактларга 1 ёки 0 қиймат бериб, схемадан ток ўтиш ёки ўтмаслигини ҳисоблаб чиқиш мумкин. Масалан, 9° да $x=0$ (очиқ), $y=1$ (ёпиқ), $z=1$ (ёпиқ) бўлса, тенгликнинг ҳар иккала қисмидаги схемадан ток ўтади x, y ва z контактларга мумкин бўлган барча қийматларни бериб, схеманинг қийматлари ҳисоблаб чиқилади.

2-усул. Буль ўзгарувчилари $x, y, z, \ldots$ ларнинг ҳар бирининг қиймати 1 ёки 0 бўлганлиги учун, Буль ўзгарувчилари ички табиати бўйича контакт билан бир хилдир. Бундан ташқари контактлар устида бажариладиган амаллар билан баъзи Буль амаллари (функциялари) орасида узвий ўхшашлик мавжуддир Ҳақиқатдан, контактларни кетма-кет улаш амали $x \cdot y$ билан $x \wedge y$ функция, контактларни параллел улаш амали $x+y$ билан $x \vee y$ функция, қарама-қарши контактга ўтиш амали x' билан инкор функцияси x' табиатан бир хилдир. Юқорида келтирилган тенгликларнинг ўринли эканлиги 9-§ даги 1°—11°, 19°—23° лардан кўринади.

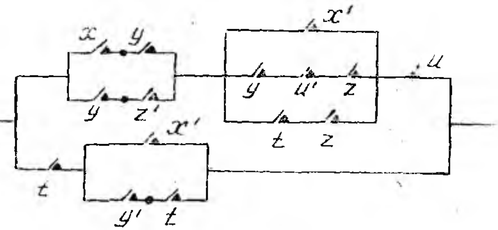
Контактлар алгебрасининг бирор мураккаб реле-контакт схемаси берилган бўлса, унга Буль алгебрасининг бирор функцияси (одатда ДНФ ёки КНФ) ни мос қўйиш мумкин.

1-мисол. 1-шаклда келтирилган реле-контакт схемасига

$$f(x, y, z, t, u) = (x \wedge y \vee y \wedge z') \wedge (x' \vee y \wedge u' \wedge z \vee t \wedge z) \wedge \\ \wedge u \vee t' \wedge (x' \vee y' \wedge t)$$

функция мос қўйилади.

Реле-контактлар схемаси назариясида қўйиладиган



1- шакл.

асосий масалаларидан бири реле контакт схемасини соддалаштиришдир (минимизациялаш). Бу масалани қуйидагича тушуниш керак.

Реле-контакт схемасининг узунлиги деб унда қатнашган контактлар сонига айтилади ва $l(\pi)$ билан белгиланади, бунда π—берилган реле контакт схемаси (π-схема) дир. Масалан, 1-мисолда келтирилган π-схеманинг узунлиги 14 га тенгдир.

Юқорида айтилганидек π-схемадан функцияга ўтишда ҳар бир контактга битта Буль ўзгарувчиси мос қўйилади. Шу сабабли $l(\pi)$ сонини функциянинг ҳам „узунлиги" (функцияда қатнашган ўзгарувчилар сони) дейиш мумкин

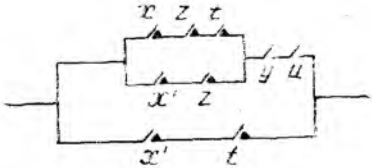
Шундай қилиб, π схемани минимизациялаш—шу схемани унга (функционал) тенг бўлган, аммо узунлиги кичик бўлган бошқа π-схема билан алмаштиришдир. Мураккаб π-схемаларни бевосита алмаштириш жуда қийин бўлиб, бу масалани π-схемага мос қўйилган функцияни соддалаштириш ёрдамида осон ҳал этиш мумкин. Буни 1-мисолда келтирилган π-схема мисолида қараб чиқайлик.

$$\begin{gathered} f(x, y, z, t, u) = (xy \vee yz')\cdot(x' \vee yu'z \vee tz)u \vee \\ \vee t'(x' \vee y't) = xyx'u \vee xyyu'zu \vee xytzu \vee \\ \vee yz'x'u \vee yz'yu'zu \vee yz'tzu \vee t'x' \vee t'y't = \\ = xyztu \vee x'yz'u \vee x't' = (xzt \vee x'z')yu \vee x't'. \end{gathered}$$

Бу ерда қисқалик учун $x \wedge y$ ни xy билан белгиладик.

Мазкур формулани шакл алмаштиришда биз 9-§ даги 1°—5°, 7°, 11°, 1°-тенгликлардан фойдаландик.

Ҳосил бўлган функция қуйидаги π-схемани реализация қилади:



2- шакл.

2- шаклда келтирилган π-схеманинг узунлиги 9 га тенгдир.

Шундай қилиб, 1- мисолда келтирилган π-схема билан ҳосил қилинган π-схема бир хил ишлайди.

Энди қуйида реле-контакт схемалари тузишга олиб борадиган муайян масалаларни қараб чиқамиз.

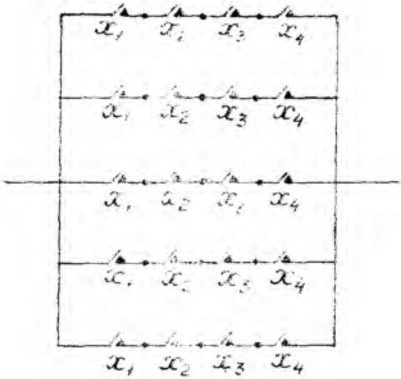
1- масала. „Овоз бериш счетчиги" деб аталувчи қурилманинг электр схемасини тузинг

Комитет 4 кишидан иборат бўлиб, улар бирор масала бўйича қарор қабул қилишаётган бўлсин. Масаланинг бирор ечими учун комитет аъзолари ўз олдиларидаги кнопкани босиш билан овоз берадилар. 4 кишидан кўпчилиги қаралаётган ечим учун овоз берса (кнопкани босса), лампочка ёнади ва шу ечим қабул қилинади, акс ҳолларда лампочка ёнмайди ва ечим қабул қилинмайди.

Ечиш. Комитет аъзолари кнопка (контакт) ларини x_1, x_2, x_3, x_4 лар билан белгилайлик. Комитет аъзоларининг, масалан, биринчиси ўз кнопкасини босса, x_1 контакт уланади, яъни у 1 қиймат қабул қилади (ток ўтказади). Лампочканинг ёниш-ёнмаслигини x_1, x_2, x_3, x_4 контактларга боғлиқ бўлган қандайдир $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функциянинг 1 ёки 0 қиймат қабул қилиши деб тушуниш мумкин.

Демак, „овоз бериш счетчигининг" электр схемасини тузиш учун фақат кўпчилик аргументлари 1 қиймат қабул қилганда қиймати 1 га тенг бўладиган $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0



3- шакл.

функциянинг юқоридаги жадвалини тузиш ва унга қараб бу функциянинг МДНФсини ёзиш керак экан.

Мазкур функция (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1) тизмалардагина 1 қийматга эга бўлгани учун унинг МДНФси

$$x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3x'_4 \vee x_1x_2x_3'x_4 \vee x_1x_2'x_3x_4 \vee x_1'x_2x_3x_4$$

бўлади, бу ерда биз қисқалик учун $x \wedge y$ ни xy каби ёздик.

Қаралаётган Буль функцияси ушбу реле-контакт схемасини реализация қилади (3- шакл).

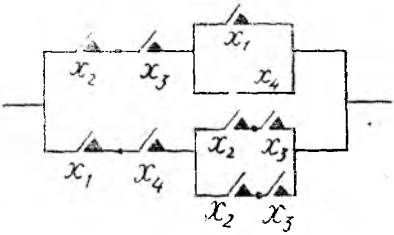
Қурилган схемада 20 та контакт қатнашганини кўрамиз. Мазкур схемани соддалаштириш учун ҳосил қилинган МДНФни айний шакл алмаштиришлар ёрдамида ушбу кўринишга келтирамиз:

$$x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4' \vee x_1x_2x_3'x_4 \vee x_1x_2'x_3x_4 \vee x_1'x_2x_3x_4 \equiv$$
$$\equiv x_2x_3(x_1 \vee x_4) \vee x_1x_4(x_2x_3' \vee x_2'x_3),$$

ва тенгкучлиликнинг ўнг томони реализация қиладиган схемани тузамиз (4- шакл).

3 ва 4- шаклларда кўрсатилган схемаларнинг тенг кучлилиги уларни реализация қилувчи функцияларнинг тенг кучлилигидан келиб чиқади.

2- масала. Тўртбурчакли залнинг учта эшиги бўлиб (учта томонида биттадан) ҳар қандай эшикдан кирган (ёки чиққан) одам зал чироқларини ёқиб (ёки ўчириб) кириши (ёки чиқиши) мумкин бўлган электр схемасини тузинг.



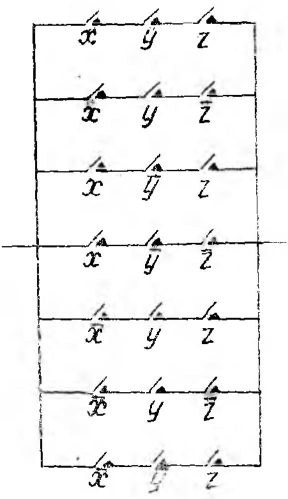
4- шакл.

Бу масалани яна қуйи.агича тушуниш мумкин: ҳар бир эшик ёнида улагич (включатель) бўлиб, шу улагичларнинг камида биттаси уланганда зал чироқлари ёниши керак (зал чироқлари барча улагичлар узилгандагина ўчади).

Ушбу жадвал изланаётган схемани реализация қилувчи функциянинг қийматлари жадвалидир:

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

$$f(x,\ y,\ z) = xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee \\ \vee xy'z' \vee x'yz \vee x'yz' \vee x'y'z.$$



5- шакл.

Бу функцияга мос келувчи схема 5- шаклда келтирилган.

$$f(x,\ y,z) = xyz \vee xyz' \vee \\ \vee xy'z \vee xy'z' \vee \\ \vee x'yz \vee x'yz' \vee x'y'z = \\ = xy \vee xy' \vee x'y \vee x'y'z = \\ = x \vee x'(y \vee y'z) = \\ = x \vee x'(y \vee z).$$

Бу тенгликдан кўринади-ки, ҳосил қилинган схема 6-шаклда келтирилган схемага тенг кучли экан.

Машқлар

1. Қуйидаги жумлалардан мантиқий амаллар ёрдамида мураккаб жумлалар тузинг ва уларнинг ростлиги ёки ёлғонлигини аниқланг.

а) A: „Киев-Украинанинг пойтахти",
   B: „Тошкент Европада жойлашган",

б) A: „Сон 2 га бўлиниши учун унинг охирги рақами 2 га бўлиниши керак".
   B: „π—иррационал сон".

в) A: „Натурал сонларни қўшиш коммутатив амал",
   B: „1 сони $x^2-3x+2=0$ тенгламанинг илдизи эмас".

2. Қуйидаги формулаларнинг ростлик жадвалини тузиб, уларнинг қайсилари умумқийматли эканини аниқланг:

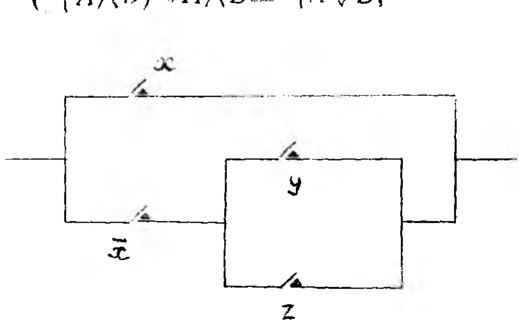
а) $A\wedge B\to\neg A\vee B$; б) $(\neg A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;
в) $(A\vee B)\wedge\neg C\to A\wedge B$; г) $\neg A\to(B\to A)$;
д) $A\wedge(B\to C)\vee(A\wedge\neg B\to B\wedge C)$.

3. Фақат қуйидаги тизмаларда 1 қийматга эга бўлган Буль функцияларининг МДНФ ва МКНФ ини тузинг:

а) (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0);
б) (0, 1), (1, 0);
в) (1, 0, 0), (0, 0, 1) (1, 0, 1);
г) (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0,1), (0, 1, 1, 1).

4. Тенгкучлиликларни исботланг.

а) $(\neg A\wedge B)\to A\wedge B\equiv\neg A\vee B$;



6- шакл.

б) $A\wedge B\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge\neg C\equiv(\neg A\quad B)\wedge A\wedge B\wedge C$;
в) $(A\to B)\wedge\neg C\equiv A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge\neg B\vee\neg C$;
г) $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)\equiv 1$.

5. Комитет 4 кишидан иборат бўлиб, уларнинг бири раисдир. Бирор масалани ҳал этиш учун комитетнинг ҳар бир аъзоси (шу жумладан раис ҳам) ўз олдидаги кнопкани босиб овоз беради. Масала ечими лампочка ёнганда қабул қилинди деб ҳисобланади. Лампочка қуйидаги ҳолларда ёнади:

1) кўпчилик кнопкани босганда;

2) кнопкани босганлар сони кнопкани босмаганлар сонига тенг бўлса, у ҳолда раиснинг қарорига қаралади: раис кнопкани босган бўлса, лампочка ёнади, босмаган бўлса, лампочка ёнмайди.

Кўрсатилган жараён учун электр схема тузинг.

6. „Жуфтлик счетчиги" учун электр схема тузинг. Счетчикнинг n та ($n=2, 3, 4, \ldots$) контактларидан жуфт сондаги контактлар улангандагина лампочка ёнади ($n=3$ ва $n=4$ бўлган ҳоллар кўриб чиқилсин).

II БОБ
ЖУМЛАЛАР ҲИСОБИ

1-§. Аксиоматик усул ҳақида

Математикада аксиоматик усул қадимги юнон математикларининг ишларида пайдо бўлди. Бу борада Евклиднинг „Негизлар" деб аталувчи геометрик системаси алоҳида эътиборга лойиқдир. Евклиднинг бу асари XIX асргача аксиоматик усулнинг юксак намунаси сифатида хизмат қилди. Эрамиздан 300 йил олдин ёзилган бу асарда Евклид биринчи марта аксиомалар деб аталувчи ва ростлиги шубҳа туғдирмайдиган бир қанча жумла (даъво, тасдиқ) лардан соф дедуктив йўл билан, яъни соф мантиқий мулоҳазалар ёрдамида геометрик назариянинг бутун мазмунини (теоремаларини) келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатди.

XIX асрда буюк рус математиги Н. И. Лобачевский ва венгер математиги Я. Больян томонидан ноевклид геометриянинг кашф этилиши аксиоматик усулнинг ривожланишида янги поғона бўлди. Улар Евклид геометрияси аксиомалари системасига кирувчи (параллел тўғри чизиқлар ҳақидаги) V постулатни унинг инкори билан алмаштирдилар ва натижада ҳосил бўлган аксиомаларнинг янги системаси кенг мазмунга эга бўлган янги геометрия ташкил этишини кўрсатдилар.

Шундай қилиб, аксиоматик усул математик назарияларни қуриш ва ўрганишда кучли аппарат эканлиги XIX асрга келиб математиклар томонидан тўла-тўкис эътироф этилди ва бу усул математикада кенг кўламда қўлланила бошланди.

Аксиоматик усулнинг мазмуни нимадан иборат?

Одатда, қандайдир предметлар (объектлар) системасини урганишда бу предметларнинг хоссалари ва улар орасидаги муносабатларни билдирувчи терминлардан фойдаланамиз. P_1, P_2, . . . , P_n лар шундай хосса ёки муносабатлар бўлсин. Таркибида шу хосса ёки муносабатлар қатнашган бир неча $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . . , $\mathbf{A}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) жумлаларни оламиз ҳамда уларни аксиомалар деб атаймиз. P_1, P_2, . . . , P_n лар ҳар хил тупламларда ҳар хил аниқланиши мумкин. Бирор $\mathscr{M}$ тўпламда юқоридаги хосса ёки муносабатлар аниқланган бўлиб, $A_1, \ldots, A_k$ аксиомалар $\mathscr{M}$ тўплам элементлари учун рост бўлса, у ҳолда $\mathscr{M}$ тўплам $A_1, \ldots, A_k$ аксиомалар системасини қаноатлантиради дейилади.

Табиий, берилган аксиомалар системасини қаноатлантирувчи (бўш бўлмаган) тўплам бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу ҳолда аксиомалар системаси зиддиятга эга дейилади

Юқорида айтилган фикрларни қуйидаги содда мисол билан тушунтирайлик.

$P(x, y)$: „x y дан кейин келади" деган муносабат бўлсин. Ушбу муносабатни турли тўпламда турлича аниқлаш мумкин. Масалан, натурал сонлар тўплами N да бу муносабатни „$x > y$" каби, ёки „$x < y$" каби, бутун сонлар тўплами Z да „$x \vdots y$"(„x y га бўлинади"), „$x = 2y$" ва ҳоказо, каби аниқлаш мумкин.

Таркибида $P(x, y)$ қатнашган қуйидаги жумлаларни аксиомалар сифатида қабул қилайлик:

1°. „Ҳеч қайси x ўз-ўзидан кейин келмайди",

2°. „Агар x y дан кейин келса, y эса z дан кейин келса, у ҳолда x z дан кейин келади"

Қабул қилинган аксиомалар системасини қаноатлантирувчи бўш бўлмаган тўпламлар мавжуд эканлигини сезиш қийин эмас. Масалан, натурал сонлар тўплами N да $P(x, y)$ ни „$x>y$" каби аниқласак, барча натурал сонлар учун 1 ва 2 аксиомалар рост жумлалар бўлади, яъни натурал сонлар тўплами юқоридаги аксиомалар системасини қаноатлантиради.

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ аксиомалар системасини қаноатлантирувчи $\mathscr{M}$ (бўш бўлмаган) тўплам шу аксиомалар системасининг интерпретацияси дейилади.

Бирор математик назарияни аксиоматик қуриш бу назарияда ўрганиладиган асосий объектлар ва улар орасидаги асосий муносабатларни келтиришдан бошланади. Бу объектлар ва муносабатлар аксиоматик назариянинг асосий тушунчалари ҳисобланади. Аксиоматик назариянинг қолган тушунчалари эса асосий тушунчалар орқали таърифланади. Кейинги қадамда аксиоматик назариянинг формулалари тўплами ҳосил қилинади.

Баъзи формулалар аксиомалар деб эълон қилинади ҳамда аксиоматик назария формулалари орасидаги маълум муносабатлар, яъни келтириб чиқариш қоидалари олинади. Келтириб чиқариш қоидаларини аксиомаларга қўллаш натижасида аксиомалардан маълум формулалар келтириб чиқарилади. Бундай формулалар аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формулалар ёки теоремалар деб аталади. Аксиоматик назария тушунчаси билан биз III ва IV бобларда батафсилроқ танишамиз, бу бобда эса математик мантиқни ўрганишда учрайдиган энг дастлабки аксиоматик назария — жумлалар ҳисоби билан танишамиз Жумлалар ҳисоби жумлалар алгебрасининг аксиоматик назарияси бўлиб, у жумлалар алгебрасини бутунлай бошқа нуқтаи назардан ёритади.

„Исбот назарияси" деб аталувчи бу усул жумлалар алгебрасини формал нуқтаи-назардан ўрганиб, ушбу асосий саволни қамраб олади: „аксиомалар" деб аталувчи баъзи бир формулалардан баъзи бир (келтириб чиқариш) қоидалар ёрдамида жумлалар алгебрасининг барча умумқийматли формулаларини ҳосил қилиш мумкинми?

Бошқача айтганда, аксиомалардан келтириб чиқарилувчи ҳар бир формула жумлалар алгебрасида умумқийматли бўлиши, ва аксинча, жумлалар алгебрасининг ҳар бир умумқийматли формуласи танланган аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи бўлиши юқоридаги саволнинг ижобий ечими бўлади.

Шуни ҳам қайд этамизки, аксиоматик назариялар ўз вазифасига кўра мазмунли ва формал аксиоматик назарияларга бўлинади. Мазмунли аксиоматик назарияда асосий тушунча *„ростлик" тушунчаси бўлса, яъни баъзи* берилган рост формулалардан маълум қоидаларга асосан янги рост формулалар келтириб чиқарилса, формал аксиоматик назарияда ҳар бир формула формал сўз (ҳарфларнинг чекли кетма-кетлиги) деб қаралади. Формал сўзни ташкил этувчи ҳарфларга, сўзнинг ўзига ҳеч қандай мазмун ва қиймат берилмайди. Баъзи формулалар аксиомалар деб қабул қилинади ҳамда келтириб чиқариш қоидалари берилиб, улар ёрдамида формал аксиоматик назариянинг теоремалари келтириб чиқарилади.

Шундай қилиб, қуйида қаралиши лозим бўлган „исбот назарияси" нинг ўрганадиган объектлари жумлалар ҳисобининг теоремаларидир. Бошқача айтганда, қандайдир тил (аниқроғи, унинг бир қисми) формал нуқтаи назардан ўрганилиб, унинг баъзи жумлалари (бизнинг таъбиримиз бўйича: формулалари) теоремалар деб аталади. Бу тил предмет-тил (ўрганилаётган тил) деб ҳисобланади.

Аммо предмет-тил теоремалари устида мулоҳаза юритишда биз яна бир жонли тилдан фойдаланамиз. Бу тил эса тадқиқотчи тили ёки метатил дейилади. Предмет-тилнинг теоремалари оддий қилиб теоремалар, метатилнинг теоремалари эса метатеоремалар деб аталади. Ҳозир киритилган тушунчаларни жумлалар алгебраси мисолида ҳам кўрса бўлади. Масалан, I бобда келтирилган $\models \mathbf{A} \to \neg\neg \mathbf{A}$ жумла („$\mathbf{A} \to \neg\neg \mathbf{A}$ формула жумлалар алгебрасининг умумқийматли формула (теорема) сидир“ деб ўқилишини эслатиб ўтамиз) метатилнинг теоремаси, $\mathbf{A} \to \neg\neg \mathbf{A}$ эса жумлалар алгебрасининг теоремасидир.

2-§. Жумлалар ҳисобини қуриш

Ҳар бир аксиоматик назария унинг алфавитини келтиришдан бошланади. Жумлалар ҳисобининг алфавити қуйидаги белгилар системасидан иборатдир.

а) $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ —ўзгарувчи жумлалар,
б) $\wedge, \vee, \to, \sim, \neg$ —мантиқий амаллар,
в) (,)—қавслар.

Алфавитнинг а) бандида келтирилган белгилар „ўзгарувчи жумлалар“ деб аталган бўлса-да, уларга ҳеч қандай қиймат ва мазмун берилмайди, балки уларга бир-биридан фарқ қилиниши мумкин бўлган ҳарфлар сифатида қаралади; б) ва в) бандида келтирилган белгилар ҳам худди шу каби таҳлил қилинади.

1-таъриф. 1°. Ҳар бир ўзгарувчи жумла жумлалар ҳисобида формула ҳисобланади.

2°. Агар $\mathbf{A}$ ва $\mathbf{B}$ жумлалар ҳисобининг формулалари бўлса, у ҳолда $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \sim \mathbf{B})$ ва $(\neg \mathbf{A})$ лар ҳам формула ҳисобланади.

3. Бошқа формулалар йўқ, яъни жумлалар ҳисобининг ҳар қандай формуласини фақат 1°—2°-бандлар ёрдамида ҳосил қилиш мумкин.

Формуладаги қавслар сонини камайтириш худди жумлалар алгебрасидагидек бажарилади. Жумлалар ҳисобининг аксиомалари сифатида қуйидаги формулаларни оламиз:

(1a): $A \to (B \to A)$,
(1b): $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$,
(2a): $A \wedge B \to A$,
(2b): $A \wedge B \to B$,
(2c): $A \to (B \to A \wedge B)$,
(3a): $A \to A \vee B$,
(3b): $B \to A \vee B$,
(3c): $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
(4a): $(A \sim B) \to (A \to B)$,
(4b): $(A \sim B) \to (B \to A)$,
(4c): $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \sim B))$,
(5a): $\neg\neg A \to A$,
(5b): $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

Шуни ҳам қайд қиламиз-ки, ҳар хил жумлалар ҳисоби системалари мавжуд бўлиб, улар бир-биридан, одатда, аксиомалар системасининг, аксиомаларда қатнашувчи мантиқий амалларнинг, келтириб чиқариш қоидаларининг танланиши билан фарқ қилади.

Масалан, машҳур немис математиги ва мантиқчиси Д. Гильберт таклиф этган жумлалар ҳисоби 4 та аксиомадан иборат бўлган системага асосланган бўлиб, бу аксиомаларда фақат импликация ($\to$) ва конъюнкция ($\wedge$) қатнашади. Гильберт аксиомалари қуйидагилардир:

1. $A \wedge A \to A$,
2. $A \to A \wedge A$,
3. $A \wedge B \to B \wedge A$,
4. $(A \to B) \to (C \wedge A \to C \wedge B)$.

Бундан ташқари, П. С. Новиков, Ж. Россер, Ц. Мередит, Г. Фреге, Я. Лукасевич, Ж. Нико ва бошқалар таклиф этган системалар ҳам кенг тарқалгандир. Булардан Ж. Россер аксиомалари системасини кўрсатиш билан чегараланамиз:

1. $A \to A \wedge A$,
2. $A \wedge A \to A$,
3. $(A \to B) \to (\neg(B \wedge C) \to \neg(A \wedge C))$.

Биз танлаган аксиомалар системаси учун асосий келтириб чиқариш қоидалари қуйидагилардир:

1°. Ўрнига қўйиш (суперпозиция) қоидаси.

A—ўзгарувчи жумла, B—ихтиёрий формула бўлсин. У ҳолда $A(A)$ формуладан унга кирган A ўзгарувчи жумлани B формула билан алмаштириш ёрдамида $A(B)$

формула келтириб чиқарилади. Хусусан, $\mathbf{A}(A)$ формула аксиомаларнинг натижаси бўлса, $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ ҳам аксиомаларнинг натижаси бўлади.

Изоҳ. $\mathbf{A}(A)$ формуладаги A ўзгарувчини $\mathbf{B}$ формула билан алмаштиришда A ўзгарувчи $\mathbf{A}(A)$ формулада неча марта қатнашган бўлса, шунча жойда A ўзгарувчи ўрнига $\mathbf{B}$ формула қўйилади.

Мазкур қоида шартли равишда (схематик) ушбу кўринишларда ифода қилинади:

$$S_A^{\mathbf{B}}(\mathbf{A}(A)) \doteq \mathbf{A}(\mathbf{B}) \quad \text{ёки} \quad \frac{\mathbf{A}(A)}{\mathbf{A}(\mathbf{B})}$$

ва баъзан „S-қоида“ деб аталади. Баъзи ҳолларда умумлашган ўрнига қўйиш (умумлашган суперпозиция) қоидасидан ҳам фойдаланишга тўғри келади:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўзгарувчи жумлалар, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ эса ихтиёрий формулалар бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ формуладан ҳар бир $A_i (i=\overline{1,n})$ ни $\mathbf{B}_i$ билан алмаштириш ёрдамида $\mathbf{A}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$ формулани келтириб чиқариш мумкин.

Умумлашган ўрнига қўйиш қоидасини қуйидагича ифодалаш мумкин.

$$S_{A_1, \ldots, A_n}^{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n}(\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)) \doteq \mathbf{A}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$$

$$\frac{\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)}{\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)}.$$

1-мисол. а) $\mathbf{A}(A) \doteq A \to (B \to A \wedge B)$ ҳамда $\mathbf{B} \doteq \urcorner(A \vee C)$ формулалардан S-қоида ёрдамида

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}) \doteq \urcorner(A \vee C) \to (B \to \urcorner(A \vee C) \wedge B)$$

формулани ҳосил қилиш мумкин.

б) $\mathbf{A}(A, B)$ яна $A \to (B \to A \wedge B)$ формуланинг ўзи, $\mathbf{B}_1 \doteq \urcorner(A \vee C)$, $\mathbf{B} \doteq \urcorner B \to A$ бўлса, у ҳолда бу формулалардан $S_{A,\ B}^{\mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2}\mathbf{A}((A, B)) \doteq \mathbf{A}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) \doteq \urcorner(A \vee C) \to$ $\to((\urcorner B \to \urcorner A) \to \urcorner(A \vee C) \wedge (\urcorner B \to \urcorner A))$ формула ҳосил қилинади.

2. Хулоса қилиш (Modus ponens) қоидаси. $\mathbf{A}$ ва $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ формулалардан $\mathbf{B}$ формулани келтириб чиқариш мумкин. Хусусан, $\mathbf{A}$ ва $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ лар аксиомаларнинг натижаси бўлса, $\mathbf{B}$ ҳам аксиомаларнинг натижаси бўлади.

Хулоса қилиш (Modus ponens) қоидаси шартли равишда қуйидагича ёзилади:

$$MP(\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}) \overset{\circ}{=} \mathbf{B} \quad \text{ёки} \quad \frac{\mathbf{A}.\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$

ва баъзан у „MP-қоида" деб аталади.

Баъзан умумлашган хулоса қилиш қоидасидан фойдаланишга ҳам тўғри келади:

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ ва $\mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B})) \ldots$

формулалардан **B** формулани келтириб чиқариш мумкин.

Буни схематик кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$MP(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots) \overset{\circ}{=} \mathbf{B})$$

ёки

$$\frac{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots)}{\mathbf{B}}.$$

2-мисол.

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \overset{\circ}{=} (A \to A \vee B) \to (B \to (A \to A \vee B)),$$
$$\mathbf{A} \overset{\circ}{=} A \to A \vee B$$

бўлса, $MP(A \to A \vee B, (A \to A \vee B) \to (B \to (A \to A \vee B))) \overset{\circ}{=}$ $\overset{\circ}{=} B \to (A \to A \vee B)$ бўлади.

Энди жумлалар ҳисобининг асосий тушунчаларидан бири — келтириб чиқарилувчи (исботланувчи) формула тушунчасини киритамиз.

2-таъриф. 1°. Ҳар бир аксиома аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формула ҳисобланади.

2°. **A** формула аксиомаларга ўрнига қўйиш қоидасини чекли марта қўллаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, **A** аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формула ҳисобланади.

3°. **A** формула аксиомаларга (ёки улардан ҳосил бўлган формулаларга) хулоса қилиш қоидасини чекли марта қўллаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, **A** аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формула ҳисобланади.

4. Бошқа келтириб чиқарилувчи формулалар йўқ.

Формал исбот тушунчаси жумлалар ҳисобининг (бошқа аксиоматик назарияларнинг ҳам) фундаментал тушунчаларидан биридир.

3-таъриф. Формулаларнинг чекли кетма-кетлиги $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ да ҳар бир $\mathbf{A}_i (i = \overline{1,n})$ формула а) ё аксиома,

б) ё ўзидан олдин келувчи формулалардан ўрнига қўйиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган,

в) ё ўзидан олдин келувчи формулалардан хулоса қилиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ кетма-кетлик ўзининг охирги формуласининг *исботи*, n сони эса формула *исботининг узунлиги* дейилади.

Ушбу таърифдан кўринадики, агар $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ кетма-кетлик $\mathbf{A}_n$ нинг исботи бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}_1$ аксиомадир (кетма-кетликда ундан олдин келувчи формула йўқлиги сабабли), $\mathbf{A}_2$ эса ё аксиома, ёки $\mathbf{A}_1$ дан ўрнига қўйиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган формуладир.

4-таъриф. Жумлалар ҳисобининг исботга эга бўлган ҳар қандай формуласи жумлалар ҳисобида *исботланувчи (келтириб чиқарилувчи) формула* дейилади.

Шундай қилиб, жумлалар ҳисобида дастлабки исботланувчи формулалар аксиомалар бўлиб, бошқа исботланувчи формулалар улардан келтириб чиқариш қоидалари ёрдамида ҳосил қилинади.

Жумлалар ҳисобининг аксиомалардан бошқа ҳар қандай исботланувчи формуласи *теорема* дейилади. Аксиомани, баъзан, исбот узунлиги 1 га тенг бўлган теорема сифатида қараш мумкин.

Метатилнинг „**A**—аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формула“ деган жумласини $\vdash \mathbf{A}$ каби белгилаймиз. Бу ифодани яна **A**—жумлалар ҳисобининг теоремаси“ ёки „**A**—келтириб чиқарилувчи формула“ ёки „**A**—исботланувчи формула“ деб ҳам ўқиш мумкин. $\not\vdash \mathbf{A}$ белги $\vdash \mathbf{A}$ нинг инкорини билдиради.

1-теорема. $\vdash A \to A$.

(Бу ифода „$A \to A$ формула—аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула“ деб ўқилиб, унинг метатил теоремаси эканлиги аёндир.)

Қуйидаги формулалар кетма-кетлиги $A \to A$ формуланинг исботидир:

$$A \to (B \to A),\ A \to (A \to A),\ (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)),\ (A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)),\ A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A),\ A \to ((A \to A) \to A),\ A \to A,$$

Ушбу исботни яна қуйидагича ёзиш мумкин (метатилнинг жумлалари (теоремалари) сифатида):

1°. $\vdash A \to (B \to A)$ (1 а) аксиома,

2°. $\vdash A \to (A \to A)$ S_B^A (1°), 3°. $\vdash(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$ — (1b) аксиома

4°. $\vdash(A\to(A\to A))\to((A\to((A\to A)\to A))\to(A\to A))$

— $S_{B,\ C}^{A\to A,\ A}$ (3°),

5°. $\vdash(A\to((A\to A)\to A))\to(A\to A)$ — MP(2°, 4°),

6°. $\vdash A\to((A\to A)\to A)$ — $S_B^{A\to A}$ (1°),

7°. $\vdash A\to A$ — MP(5°, 6°).

2-теорема. $\vdash A\vee B\to B\vee A$.

Исботи. 1°. $\vdash(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

— (3_C) аксиома.

2°. $\vdash(A\to B\vee A)\to((B\to B\vee A)\to(A\vee B\to B\vee A))$

— $S_C^{B\vee A}$ (1°),

3°. $\vdash B\to A\vee B$ — (3b) аксиома,

4°. $\vdash A\to B\vee A$ — $S_{A,\ B}^{B,\ A}$ (3°),

5°. $\vdash(B\to B\vee A)\to(A\vee B\to B\vee A)$ — MP(2°, 4°),

6°. $\vdash A\to A\vee B$ — (3a) аксиома,

7°. $\vdash B\to B\vee A$ — $S_{A,\ B}^{B,\ A}$ (6°),

8°. $\vdash A\vee B\to B\vee A$ — MP(5°, 7°).

3-теорема. $\vdash A\vee B\sim B\vee A$.

1°. $\vdash(A\to B)\to((B\to A)\to(A\sim B))$ — (4c) аксиома,

2°. $\vdash(A\vee B\to B\vee A)\to((B\vee A\to A\vee B)\to(A\vee B\sim B\vee A))$

— $S_{A,\ B}^{A\vee B,\ B\vee A}$ (1°),

3°. $\vdash A\vee B\to B\vee A$ — 2-теорема,

4°. $\vdash(B\vee A\to A\vee B)\to(A\vee B\sim B\vee A)$ — MP(2°, 3°),

5°. $\vdash B\vee A\to A\vee B$ — $S_{A,\ B}^{B,\ A}$ (3°),

6°. $\vdash A\vee B\sim B\vee A$ — MP(4°, 5°).

R билан жумлалар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формулани белгилаймиз, F билан эса шундай формулани белгилаймизки, F жумлалар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формула бўлсин.

4-теорема. A *ихтиёрий формула бўлса, у ҳолда* $\vdash \mathrm{A}\to \mathrm{R}$.

Исботи. 1°. $\vdash A\to(B\to A)$ — (1a) аксиома,

2°. $\vdash \mathrm{R}\to(a\to \mathrm{R})$ — $S_{A,\ B}^{R,\ a}$ (1°),

3°. $\vdash \mathrm{R}$ — берилган метатеорема,

4°. $\vdash a\to \mathrm{R}$ — MP(2°, 3°).

3-§. Гипотезалардан келтириб чиқариш. Дедукция теоремаси

1-таъриф. $\Gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ $(m \geqslant 0)$ гипотезалар деб аталувчи формулалар рўйхати бўлсин Формулаларнинг чекли кетма-кетлиги $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нинг ҳар бир A_i $(i = \overline{1, n})$ формуласи

1) ё аксиома,

2) ё Γ рўйхатнинг бирор формуласи,

3) ё ўзидан олдин келган теоремалардан (аксиомалар ёки улардан ҳосил қилинган формулалардан) ўрнига қўйиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган,

4) ё ўзидан олдин келган формулалардан хулоса қилиш (Modus ponens) қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кетма-кетлик ўзининг охирги формуласи A_n нинг Γ рўйхатдан келиб чиқадиган *исботи*[1], n сони эса бу исботнинг *узунлиги* дейилади.

„A формула Γ рўйхатдан келтириб чиқарилади" ибораси метатилнинг жумласи бўлиб, у

$$\Gamma \vdash A$$

каби белгиланади. Бу ёзувни $C_1, C_2, \ldots, C_m \vdash A$ ёзув билан алмаштириш ҳам мумкин. $\Gamma = \varnothing$ бўлса, $\Gamma \vdash A$ тушунча $\vdash A$ тушунчага айланади.

„Гипотезалардан келтириб чиқариш" нинг ушбу хоссалари диққатга сазовордир.

(α) Агар $\vdash A$, Γ — *ихтиёрий рўйхат бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash A$ *бўлади, яъни аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула ихтиёрий рўйхатдан ҳам келтириб чиқарилувчи бўлади.*

Исботи. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кетма-кетлик $A \overline{\overline{\circ}} A_n$ формуланинг исботи, $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_m\}$ ихтиёрий рўйхат бўлса: $D_1, D_2, \ldots, D_k$ (бунда $D_k \overline{\overline{\circ}} A_n$, $k = m + n$, $D_i \to \{C_1, \ldots, C_m, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, $i = \overline{1, k-1}$) кетма-кетлик A_n формуланинг Γ рўйхатдаги исботидир.

(β). *Агар* $\Gamma \vdash A_n$ *ҳамда* $\Gamma \subseteq \Delta$ *бўлса, у ҳолда* $\Delta \vdash A_n$ *бўлади.*

Исботи. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кетма-кетлик A_n формуланинг Γ рўйхатдаги исботи, $\Delta \setminus \Gamma = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$

[1] „Формуланинг Γ рўйхатидан келиб чиқадиган исботи" ибораси ўрнига бундан буён „Формуланинг Γ рўйхатидаги исботи" деб кетилаверади.

бўлсин. У ҳолда $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_l$ (бунда $\mathbf{B}_l \equiv \mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_i \in \{\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_k, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}\}$, $i = \overline{1, l-1}$, $l = k + n$) кетма-кетлик $\mathbf{A}_n$ формуланинг Δ рўйхатдаги исботидир.

(γ). $\Gamma \vdash \mathbf{A}_n$ *ва* Δ *ихтиёрий рўйхат бўлса, у ҳолда* $\Delta, \Gamma \vdash \mathbf{A}_n$ *бўлади* (бунда „Δ, Γ“ ни $\Delta \cup \Gamma$ деб тушунилади).

Исботни мустақил иш сифатида ўқувчига қолдирамиз

(δ). $\Gamma \vdash \mathbf{A}_n$ *ва* $\Gamma \vdash \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ *бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \mathbf{B}$ *бўлади.*

Исботи. $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ кетма-кетлик $\mathbf{A}_n$ нинг Γ рўйхатдаги исботи, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{n-1}, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ кетма-кетлик эса $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ нинг Γ рўйхатдаги исботи бўлсин. Ушбу исботлардан қуйидаги кетма-кетликни тузиб оламиз:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{n-1}, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}. \qquad (1)$$

(1) га МР-қоидани қўлласак, у ҳолда қуйидаги кетма-кетлик ҳосил бўлади:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{n-1}, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B}. \qquad (2)$$

(2) $\mathbf{B}$ формуланинг Γ рўйхатдаги исботи эканлиги равшандир.

(μ). $\mathbf{C}_i \in \Gamma$ *бўлса,* $\Gamma \vdash \mathbf{C}_i$ $(i = \overline{1, m})$ *бўлади.*

(τ). $\Gamma = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\}$, $\Lambda = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m\}$, $\Gamma \vdash \mathbf{B}_1$, $\Gamma \vdash \mathbf{B}_2$, $\ldots$, $\Gamma \vdash \mathbf{B}_m$, $\Lambda \vdash \mathbf{C}$ *бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ *бўлади.*

Исботни ўқувчига ҳавола этамиз.

5-теорема (дедукция теоремаси). *Агар*

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B} \qquad (3)$$

бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B} \qquad (4)$$

бўлади.

Исботи. Теореманинг исботи бир неча ҳолларни кўриб чиқишдан иборатдир.

1-ҳол. $\mathbf{B}$ формула $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ формулаларнинг бири бўлиши мумкин. Агар $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}_n$ бўлса, теорема шарти (3) $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{A}_n$ кўринишда бўлади. $\vdash A \rightarrow A$ эканлиги 1-теоремада кўрсатилган эди. A ни $\mathbf{A}_n$ билан алмаштирсак,

$$\vdash \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_n \qquad (5)$$

келиб чиқади. Гипотезалардан келтириб чиқаришнинг (α) хоссасига кўра $\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_n$ формула ихтиёрий рўйхатдан, жумладан, $\Gamma = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}\}$ дан келтириб чиқарилувчи бўлади, яъни

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_n. \tag{6}$$

Агар $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}_i$ $(i < n)$ бўлса, (3) шарт

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{A}_i \tag{7}$$

кўринишда бўлади.

$$\vdash A \to B(B \to A) \tag{8}$$

эканлиги маълум $(A \to (B \to A)$ аксиома бўлганлиги учун). (8) га $S^{\mathbf{A}_i,\ \mathbf{B}_n}_{A,\ B}$ ни қўлласак,

$$\vdash \mathbf{A}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_i)$$

бўлади. (α) га асосан эса

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_i) \tag{9}$$

ҳосил бўлади. $\mathbf{A}_i \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}\}$ бўлгани учун гипотезалардан келтириб чиқаришнинг (μ) хоссасига асосан

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_i \tag{10}$$

бўлади. (δ) хоссага асосан (9) ва (10 лардан

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_i$$

келиб чиқади.

2-ҳол. $\vdash \mathbf{B}$ бўлсин. У ҳолда (α) га асосан

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{B} \tag{11}$$

бўлади. (8) га $S^{\mathbf{B},\ \mathbf{A}}_{A,\ B}$ ни қўлласак, $\vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B})$ бўлиб, (α) га асосан эса

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}) \tag{12}$$

ҳосил бўлади. (11) ва (12) га (δ) ни қўлласак, (4) келиб чиқади

3-ҳол. $\mathbf{B}$ иккита $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{B}'$ ва $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{B}' \to \mathbf{B}''$ формулага МР-қоидани қўллаш натижасида ҳосил қилинган ва

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}', \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to (\mathbf{B}' \to \mathbf{B}'') \tag{14}$$

бўлсин $(\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'')$.

$$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$$

га $S_{A,\,B,\,C}^{\mathbf{A}_n,\,\mathbf{B}',\,\mathbf{B}''}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}') \to ((\mathbf{A}_n \to (\mathbf{B}' \to \mathbf{B}'')) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}'')),$$

унга эса (α) ни қўлласак,

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}') \to ((\mathbf{A}_n \to \\ \to (\mathbf{B}' \to \mathbf{B}'')) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}'')) \qquad (15)$$

ҳосил бўлади.

Дастлаб (13) ва (15) га, сўнгра эса ҳосил бўлган ифода ва (14) га (δ) ни қўлласак,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}''$$

келиб чиқади.

4-ҳол. **B** формула $\mathbf{A}_i \,\overline{\underline{\circ}}\, \mathbf{A}(A)$ $(i = \overline{1, n})$ формуладан S-қоида ёрдамида ҳосил қилинган (масалан, $\mathbf{B} \,\overline{\underline{\circ}}\, \mathbf{A}(\mathbf{C})$) ҳамда $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{C})$ бўлсин. (α) хоссага асосан

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}(\mathbf{C}) \qquad (16)$$

бўлади.

(8) га $S_{A,\,B}^{\mathbf{A}(\mathbf{C}),\,\mathbf{A}_n}$ ни қўлласак, $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{C}) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}(\mathbf{C}))$, унга эса ($\alpha$) хоссани қўлласак

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}(\mathbf{C}) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}(\mathbf{C})) \qquad (17)$$

ҳосил бўлади. (16 ва (17) дан

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}(\mathbf{C})$$

келиб чиқади. Теорема тўлиқ исботланди.

Қуйида биз дедукция теоремаси исботининг иккинчи вариантини келтирамиз (С. Клини).

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетлик **B** формуланинг $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ формулалардан ҳосил бўладиган исботи бўлсин Бу кетма-кетликда $\mathbf{C}_m \,\overline{\underline{\circ}}\, \mathbf{B}$ эканлиги маълум.

Ушбу формулалар кетма-кетлигини олайлик:

$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_1, \ \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m. \qquad (18)$$

Дедукция теоремасининг хулосаси бўлган $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$ (ёки $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$) формуланинг $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ формулалардан келиб чиқадиган исботини кўриш учун шундай формулалар кетма-кетлигини топишимиз керакки, унинг охирги ҳади $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$ (яъни $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$) бўлиши керак.

Изланаётган кетма-кетликни (18) кетма-кетликни „кенгайтириш" ёрдамида тузамиз. Бунинг учун ҳар бир

$\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ $(i = \overline{1, m})$ формула олдига ($\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_{i-1}$ ва $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_j$ лар орасига) шундай формулаларни киритиб ёзиш мумкинки, ҳосил бўлган кетма-кетлик $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$ нинг исботи бўлади.

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетликда ҳар бир $\mathbf{C}_i$ формула:

1) ё аксиома, 2) ё $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ формулаларнинг бири, 3) ё ўзидан олдин келган формулалардаги МР-қоида ёрдамида ҳосил қилингандир.

(18) кетма-кетликларда ҳам $\mathbf{C}_i$ $(i = \overline{1, m})$ юқорида кўрсатилган учта ҳолнинг бирини қаноатлантиради.

Муайян $\mathbf{C}_i$ қайси ҳолни қаноатлантиришига қараб, $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ олдига муайян формулалар ёзилади. Агар $\mathbf{C}_i$ аксиома бўлса, $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ олдига $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$, $\mathbf{C}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i)$, $\mathbf{C}_i$ формулалар ёзиб қўйилади Агар $\mathbf{C}_i$ $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ формулаларнинг бири бўлса, у ҳолда $\mathbf{C}_i \overline{\underline{\circ}} \mathbf{A}_n$ ёки $\mathbf{C}_i \overline{\underline{\circ}} \mathbf{A}_j$ $(j < n)$ бўлиши мумкин. $\mathbf{C}_i \overline{\underline{\circ}} \mathbf{A}_n$ бўлса, $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига

$$A \to (B \to A),\ A \to (A \to A),\ (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to \to (A \to C)),\ (A \to (A \to A)) \to$$
$$\to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)),$$
$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A),$$
$$A \to ((A \to A) \to A),\ A \to A$$

формулалар, $\mathbf{C}_i \overline{\underline{\circ}} \mathbf{A}_j$ бўлганда эса $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига $A \to (B \to A)$, $\mathbf{C}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i)$, $\mathbf{C}_i$ формулалар ёзилади.

Ниҳоят, $\mathbf{C}_i$ ўзидан олдин келган иккита формуладан МР-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин. У ҳолда бу формулалардан биринчиси $\mathbf{C}_p$ $(p < i)$, иккинчиси эса $\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i$ кўринишда бўлиши керак ($\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетлик $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_p, \ldots, \mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{C}_m$ кўринишга эга бўлади). Демак, (18) кетма-кетлик

$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_p, \ldots, \mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i),$$
$$\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$$

кўринишга эгадир. Бундай ҳолда $A_n \to C_i$ формула олдига қуйидаги формулаларни ёзиб қўямиз:

$$(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)),$$
$$(\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_p) \to ((\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i)) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i)),$$
$$(\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i)) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i).$$

Шундай қилиб, (18) кетма-кетликдан биз янги

$$\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_q \tag{19}$$

кетма-кетликни ҳосил қилдик. (19) нинг таркибида (18) нинг барча ҳадлари қатнашишини, (19) нинг ўзи эса $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$ (яъни $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$) формула эканини кўриш қийин эмас.

Изоҳ. 1. Агар $\mathbf{C}_i$ $(i = \overline{2, m})$ бирор аксиомадан ўрнига қўйиш қоидаси (S-қоида) ёрдамида ҳосил қилинган формула бўлса, унинг олдига ҳам (аксиоманинг олдига қўйилганидек) $A \to (B \to A)$, $\mathbf{C}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i)$, $\mathbf{C}_i$ формулалар ёзилади.

2. Агар $\mathbf{C}_i$ $(i = \overline{2, m})$ формуланинг олдига ёзиладиган формулалардан бирортаси $\mathbf{C}_i$ дан олдин келган формулалар олдига ёзилган формулалар орасида учраса, бу формулани ёзмаслик мумкин (такрорланмаслиги учун).

Натижа.

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$$

бўлса,

$$\vdash \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots) \quad (20)$$

бўлади.

Исботи. Натижа шартидан дедукция теоремасига асосан (4) келиб чиқади.

(4) яна дедукция теоремасининг шартини қаноатлантиргани учун унга яна шу теоремани қўллаш мумкин:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-2} \vdash \mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}).$$

Ушбу мулоҳазани яна $n-2$ марта такрорласак, (20) келиб чиқади.

3-мисол. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $A \to B$, $B \to C$, $A \vdash C$ ни кўрсатиш кифоядир. Ҳақиқатан, $A \to B$, A, B, $B \to C$, C кетма-кетлик C формуланинг $\Gamma = \{A \to B, B \to C, A\}$ рўйхатдаги исботидир. $A \to B$, $B \to C$, $A \vdash C$ га дедукция теоремасини кетма-кет уч марта қўлласак,

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

ҳосил бўлади.

4-мисол.

$$\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)) \quad (21)$$

метатеоремани исботлаймиз. Бунинг учун

$$A \wedge B \to C,\ A,\ B \vdash C \qquad (22)$$

эканлигини кўрсатиш кифоядир. Ҳақиқатан

$\Gamma = \{A \wedge B \to C,\ A,\ B\}$ бўлса, у ҳолда

1. $\Gamma \vdash A \to (B \to A \wedge B)$ — (2c) аксиома
2. $\Gamma \vdash A$ — (μ)- хосса (3- §),
3. $\Gamma \vdash B \to A \wedge B$ — (δ)- хосса (3- §),
4. $\Gamma \vdash B$ — (μ)- „ „
5. $\Gamma \vdash A \wedge B$ — (δ)- „ „
6. $\Gamma \vdash A \wedge B \to C$ — (μ)- „ „
7. $\Gamma \vdash C$ — (δ)- „ „

метатеоремалар (метатилнинг рост жумлалари) (22) ўринли эканлигини кўрсатади. Унга дедукция теоремасини кетма-кет уч марта қўлласак, (21) келиб чиқади.

Энди шу мисолни дедукция теоремаси исботининг иккинчи вариантини қўллаган ҳолда ҳал этамиз. (22) ва унинг исботи иккинчи хил исботда ушбу формулалардан ташкил топгандир:

$$\mathbf{A}_1 \overline{\overline{\circ}}\, A \wedge B \to C,\ \mathbf{A}_2 \overline{\overline{\circ}}\, A,\ \mathbf{A}_3 \overline{\overline{\circ}}\, B,\ (n = 3),$$
$$\mathbf{C}_1 \overline{\overline{\circ}}\, A \to (B \to A \wedge B),\ \mathbf{C}_2 \overline{\overline{\circ}}\, A,\ \mathbf{C}_3 \overline{\overline{\circ}}\, B \to A \wedge B,$$
$$\mathbf{C}_4 \overline{\overline{\circ}}\, B,\ \mathbf{C}_5 \overline{\overline{\circ}}\, A \wedge B,\ \mathbf{C}_6 \overline{\overline{\circ}}\, A \wedge B \to C,\ \mathbf{C}_7 \overline{\overline{\circ}}\, C.\ (m = 7).$$

$B \to C$ формуланинг $A \wedge B \to C$, A формулалардан келиб чиқадиган исботини қуриш учун дастлаб

$$B \to (A \to (B \to A \wedge B)),\ B \to A,\ B \to (B \to A \wedge B),$$
$$B \to B,\ B \to A \wedge B,\ B \to (A \wedge B \to C),\ B \to C$$

кетма-кетликни ёзиб оламиз ва $\mathbf{C}_i$ $(i = \overline{1, 7})$ қандай формула бўлишига қараб, $B \to \mathbf{C}_i$ формула олдига баъзи формулаларни ёзиб, ушбу кетма-кетликни „узайтирамиз“

$\mathbf{C}_1$ аксиома бўлгани учун $B \to \mathbf{C}_1$ олдига $A \to (B \to A)$, $A \to (B \to A \wedge B)$, $(A \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to (A \to (B \to A \wedge B)))$ формулаларни ёзамиз. $\mathbf{C}_2$ гипотеза бўлгани учун (охиргиси эмас), унинг олдига ($\mathbf{C}_1$ ва $\mathbf{C}_2$ ларнинг орасига) ушбу формулаларни ёзиш керак:

$$A \to (B \to A),\ A \to (B \to A),\ A,$$

аммо уларнинг дастлабки иккитаси (бир хил) олдин ёзилгани учун ($B \to \mathbf{C}_1$ нинг олдида), уларни ёзмаслик мумкин. Шундай қилиб, $B \to \mathbf{C}_2$ формула олдига фақат

A ни ёзилади. C_3 ўзидан олдинги формулалардан MP-қоида ёрдамида ҳосил қилингани учун $B \to C_3$ формула олдига ушбу формулалар ёзилади:

$$(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)),$$
$$(B \to A) \to ((B \to (A \to (B \to A \wedge B))) \to$$
$$\to (B \to (B \to A \wedge B))),$$
$$(B \to (A \to (B \to A \wedge B))) \to (B \to (B \to A \wedge B)).$$

C_4 — охирги гипотеза бўлгани учун $B \to C_4$ формула олдига

$$A \to (A \to A),\ A \to (A \to A)) \to$$
$$\to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)),$$
$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A),$$
$$A \to ((A \to A) \to A),\ A \to A$$

формулалар ёзилади. C_5 — MP-қоида ёрдамида ҳосил қилинган формуладир. Шунинг учун $B \to C_5$ олдига ушбу формулалар ёзилади:

$$(B \to B) \to ((B \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to A \wedge B)),$$
$$(B \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to A \wedge B).$$

C_6 — гипотеза, шунинг учун $B \to C_6$ олдига қуйидаги формулаларни ёзиш керак:

$$(A \wedge B \to C) \to (B \to (A \wedge B \to C)),\ A \wedge B \to C.$$

Ниҳоят, C_7 — MP-қоида ёрдамида ҳосил қилинган формула бўлгани учун $B \to C_7$ формула олдига

$$(B \to A \wedge B) \to ((B \to (A \wedge B \to C)) \to (B \to C)),$$

$(B \to (A \wedge B \to C)) \to (B \to C)$ формулаларни ёзамиз. Натижада формулаларнинг ушбу кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

1°. $A \to (B \to A)$,
2°. $A \to (B \to A \wedge B)$,
3°. $(A \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to (A \to (B \to A \wedge B)))$,
4°. $B \to (A \to (B \to A \wedge B))$,
5°. A,
6°. $B \to A$,
7°. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$,
8°. $(B \to A) \to ((B \to (A \to (B \to A \wedge B))) \to (B \to B \to$
$\to A \wedge B)))$,
9°. $(B \to (A \to (B \to A \wedge B))) \to (B \to (B \to A \wedge B))$,
10°. $B \to (B \to A \wedge B)$,

11°. $A \to (A \to A)$,
12°. $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$,
13°. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$,
14°. $A \to ((A \to A) \to A)$,
15°. $A \to A$,
16°. $B \to B$,
17°. $(B \to B) \to ((B \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to A \wedge B))$,
18°. $(B \to (B \to A \wedge B)) \to (B \to A \wedge B)$,
19°. $B \to A \wedge B$,
20°. $(A \wedge B \to C) \to (B \to (A \wedge B \to C))$,
21°. $A \wedge B \to C$,
22°. $B \to (A \wedge B \to C)$,
23°. $(B \to A \wedge B) \to ((B \to (A \wedge B \to C)) \to (B \to C))$,
24°. $(B \to (A \wedge B \to C)) \to (B \to C)$,
25°. $B \to C$.

Бу кетма-кетлик $B \to C$ формуланинг $A \wedge B \to C$, A формулалардан келиб чиқадиган исботи эканлиги равшандир.

Демак, $A \wedge B \to C,\ A \vdash B \to C$ Дедукция теоремасига тескари бўлган метатеорема ҳам ўринли эканини кўрсатамиз.

6-теорема. *Агар*

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{B} \tag{23}$$

бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_{n-1},\ \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B} \tag{24}$$

бўлади.

Исботи. (23) га асосан $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетлик $\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ формуланинг $\Gamma' = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}\}$ рўйхатдаги исботи бўлсин (бунда $\mathbf{C}_m \stackrel{\circ}{=} \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$). У ҳолда $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_{m-1}, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}, \mathbf{B}$ кетма-кетлик B формуланинг $\Gamma' = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n\}$ рўйхатдаги исботидир, яъни (24) ўринлидир.

Натижа. *Агар*

$$\vdash \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots) \tag{25}$$

бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B} \tag{26}$$

бўлади.

Исботи. (25) га 6-теоремани кетма-кет n марта қўлласак, (26) ҳосил бўлади.

5-мисол. $A \to C,\ B \to C,\ A \vee B \vdash C$, чунки $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ дир ($\vdash$ белгиси остидаги формула (3с) аксиомадир).

4-§. Ҳосилавий келтириб чиқариш қоидалари

Жумлалар ҳисоби аксиоматик назариясида иккита асосий келтириб чиқариш қоидаси олинганлиги юқорида қайд этилган эди. Аммо, аксиомалар системасидан янги-янги келтириб чиқарилувчи формулалар (теоремалар) ҳосил қилишда асосий қоидалардан ташқари яна ҳосилавий келтириб чиқариш қоидалари ҳам ишлатилади. Бу қоидалар формуланинг исботини қуришда катта қулайликлар туғдиради.

I. Силлогизм қоидаси. 3-мисолда

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

эканлиги кўрсатилган эди. Унга $S_{A,\ B,\ C}^{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$$

ҳосил бўлади. 6-теореманинг натижасига кўра

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B},\ \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$$

бўлади. Бу муносабатдан кўринадики, $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ва $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ формулалар аксиомалардан келтириб чиқарилувчи бўлса, у ҳолда $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ ҳам аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула бўлади. Бу фактни қуйидагича схематик кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\mathbf{A} \to \mathbf{B},\ \mathbf{B} \to \mathbf{C}}{\mathbf{A} \to \mathbf{C}}.$$

II. Шартларнинг ўрнини алмаштириш қоидаси. Дастлаб $A \to (B \to C),\ B,\ A \vdash C$ эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $A \to (B \to C)$, A, $B \to C$, B. C кетма-кетлик C формуланинг $\Gamma = \{A \to (B \to C),\ B,\ A\}$ рўйхатдаги исботидир. $A \to (B \to C),\ B,\ A \vdash C$ га дедукция теоремасини икки марта қўлласак, ҳамда ҳосил бўладиган муносабатга $S_{A,\ B,\ C}^{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}$ ни қўлласак,

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$

га эришамиз. Бу муносабатдан ушбу қоида келиб чиқади:

$$\frac{\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})}{\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})},$$

яъни аксиомалардан $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$ кўринишдаги формулани келтириб чиқариш мумкин бўлса, у ҳолда $\mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ кўринишдаги формулани ҳам келтириб чиқариш мумкин.

III. $\wedge$ ни киритиш қоидаси. Бу қоида $\frac{\mathbf{A}, \mathbf{B}}{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}$ кўринишга эгадир. Унинг ўринли эканлигини кўрсатиш учун $A, B \vdash A \wedge B$ лигини кўрсатамиз.

$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$ дан ($\vdash$ остида (2*c*) аксиома турибди) 6-теоремага кўра (натижа)

$$A, B \vdash A \wedge B$$

ҳосил бўлади. Бу муносабатга $S^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}_{A, B}$ ни қўлласак $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ҳосил бўлади ва демак, $\wedge$ ни киритиш қоидаси ўринли эканлигини кўрсатади.

IV. $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси. $\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ ва $\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$ келтириб чиқариш қоидалари (2*a*) ва (2*b*) аксиомалардан келиб чиқади — буни ўқувчи қийинчиликсиз бажара олади.

V. Шартларни бирлаштириш қоидаси.

$$A \to (B \to C), A \wedge B \vdash C \tag{1}$$

эканлигини кўрсатамиз.

$\Gamma = \{A \to (B \to C), A \wedge B\}$ десак, у ҳолда

1°. $\Gamma \vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ — (1*b*) аксиома,

2°. $\Gamma \vdash (A \wedge B \to B) \to ((A \wedge B \to (B \to C)) \to$
$\to (A \wedge B \to C))$ — $S^{A \wedge B}_{A}$ (1°),

3°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to B$ — (2*b*) аксиома,

4°. $\Gamma \vdash (A \wedge B \to (B \to C)) \to (A \quad B \to C)$ — MP (2°, 3°),

5°. $\Gamma \vdash A \to (B \to C)$ — (μ)- хосса (3- §),

6°. $\Gamma \vdash (A \wedge B \to A) \to ((A \wedge B \to (A \to (B \to C))) \to$
$\to (A \wedge B \to (B \to C)))$ — $S^{A \wedge B,\ A,\ B \to C}_{A,\ B,\ C}$ (1°),

7°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to A$ — (2*a*) аксиома,

8°. $\Gamma \vdash (A \wedge B \to (A \to (B \to C))) \to$
$\to (A \wedge B \to (B \to C))$ — MP (6°, 7°),

9°. $\Gamma \vdash A \to (B \to A)$ — (1*a*) аксиома,

10°. $\Gamma \vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to$
$\to (A \to (B \to C)))$ — $S^{A \to (B \to C),\ A \wedge B}_{A,\ B}$ (9°),

11°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to (A \to (B \to C))$ — MP (5°, 10°),

12°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to (B \to C)$ — MP (8°, 11°),

13°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to C$ — MP (4 , 12°), 14°. $\Gamma \vdash A \wedge B$ — (μ - хосса (3- §)

15°. $\Gamma \vdash C$ — MP (13°, 14°),

яъни (1) ўринли экан.

(1) га дедукция теоремасини қўллаб,

$$A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз.

(2) да A ни $\mathbf{A}$, B ни $\mathbf{B}$ ва C ни $\mathbf{C}$ билан алмаштирсак,

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}$$

келиб чиқади.

Ҳосил бўлган муносабатдан

$$\frac{\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})}{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}}$$

қоида келиб чиқади, яъни $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$ аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ ҳам аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

VI. Шартларни ажратиш қоидаси.

$$\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}}{\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})}$$

қоидани асослаш учун $\Gamma = \{A \wedge B \to C, A, B\}$ рўйхатдан C ни келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз.

1°. $\Gamma \vdash A$ — (μ)- хоссага асосан (3- §),

2°. $\Gamma \vdash B$ — — „ — „ — „ —

3°. $\Gamma \vdash A \wedge B$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси

4°. $\Gamma \vdash A \wedge B \to C$ — (μ)- хоссага асосан (3- §),

5°. $\Gamma \vdash C$ — MP (3°, 4°).

Шундай қилиб $A \wedge B \to C, A, B \vdash C$ экан.

Дедукция теоремасига асосан $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$ ҳосил бўлади. Унга $S^{A,\ B,\ C}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}$ ни қўлласак,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$$

келиб чиқади. Бу муносабат юқоридаги қоидага тенг кучлидир.

I бобнинг 5- § да умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидалари келтирилган эди. Шу қоидаларнинг барчаси жумлалар ҳисобида келтириб чиқариш қоидалари вазифасини бажаради. Ўқувчига машқ сифатида мустақил равишда ана шу қоидаларни асослашни тавсия қиламиз.

Бундан ташқари, бу ерда шуни ҳам қайд этамизки, ҳар бир $\frac{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k}{\mathbf{B}}$ (яъни, „агар $\vdash \mathbf{A}_1$, $\vdash \mathbf{A}_2$, ..., $\vdash \mathbf{A}_k$ бўлса, у ҳолда $\vdash \mathbf{B}$ булади") кўринишдаги қоидада ҳар бир формула олдига „$\Gamma \vdash$" ни ёзиб чиқилса ҳам натижада ўринли қоида $\left(\text{яъни, } \frac{\Gamma\vdash \mathbf{A}_1,\ \Gamma\vdash \mathbf{A}_2, \ldots,\ \Gamma\vdash \mathbf{A}_k}{\Gamma\vdash \mathbf{B}}\right)$ ҳосил булади. Масалан, шартларни ажратиш қоидаси $\frac{\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\to\mathbf{C}}{\mathbf{A}\to(\mathbf{B}\to\mathbf{C})}$ (яъни „$\vdash \mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ бўлса, у ҳолда $\vdash \mathbf{A}\to(\mathbf{B}\to\mathbf{C})$ бўлади") да сурат ва махраж олдига „Γ" ни ёзиб чиқилса,

$$\frac{\Gamma\vdash \mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\to\mathbf{C}}{\Gamma\vdash \mathbf{A}\to(\mathbf{B}\to\mathbf{C})}$$

қоида ҳосил бўлади (бу ерда Γ — формулалар рўйхати).

5-§. Эквивалент алмаштириш ҳақидаги теорема

1-теорема. *Агар* $\mathbf{A}(A)$ *жумлалар ҳисобининг формуласи бўлса* (A ўзгарувчи жумла $\mathbf{A}$ формулага кирмаслиги ҳам мумкин), *у ҳолда*

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}(\mathbf{B}_2)) \qquad (1)$$

бўлади.

Исботи. Илгаригидек (I боб, 2-§) формуланинг ранги деб, унда қатнашган амаллар сонига айтилади.

Теореманинг исботини формула ранги бўйича индукция юритиш билан олиб борамиз. $\operatorname{rang}(\mathbf{A}(A)) = 0$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}(A) \overline{\overline{\circ}} A$ ёки $\mathbf{A}(A) \overline{\overline{\circ}} B$ ($B \overline{\overline{\circ}} A$) бўлади. $\mathbf{A}(A) \overline{\overline{\circ}} \mathbf{A}$ бўлса,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2),$$

$\mathbf{A}(A) \overline{\overline{\circ}} B$ бўлганда эса,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A} \sim \mathbf{A})$$

бўлади, бунда биринчи ҳолда

$$S_A^{\mathbf{B}_1}(\mathbf{A}(A)) \overline{\overline{\circ}} S_A^{\mathbf{B}_1}(A) \overline{\overline{\circ}} \mathbf{B}_1,$$
$$S_A^{\mathbf{B}_2}(\mathbf{A}(A)) \overline{\overline{\circ}} S_A^{\mathbf{B}_2}(A) \overline{\overline{\circ}} \mathbf{B}_2,$$

иккинчи ҳолда эса

$$S_A^{\mathbf{B}_1}(\mathbf{A}(A)) \cong S_A^{\mathbf{B}_1}(B) \cong B \cong \mathbf{A},$$

$$S_A^{\mathbf{B}_2}(\mathbf{A}(A)) \cong S_A^{\mathbf{B}_2}(B) \cong B \cong \mathbf{A}.$$

Энди $\mathrm{rang}(\mathbf{A}(A)) = n \geqslant 1$ бўлиб, ранги $< n$ бўлган, барча формулалар учун теорема ўринли бўлсин. $\mathbf{A}(A)$ формулада энг охирида бажариладиган амал $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ $\sim$ ёки $\neg$ ларнинг бири бўлиши мумкин, яъни $\mathbf{A}(A)$ қуйидаги кўринишда бўлиши мумкин:

I. $\mathbf{A}_1(A) \wedge \mathbf{A}_2(A)$; II. $\mathbf{A}_1(A) \vee \mathbf{A}_2(A)$; III. $\mathbf{A}_1(A) \rightarrow \mathbf{A}_2(A)$; IV. $\mathbf{A}_1(A) \sim \mathbf{A}_2(A)$; V. $\neg \mathbf{A}_1(A)$.

$\mathrm{rang}(\mathbf{A}_1(A)) < n$, $\mathrm{rang}(\mathbf{A}_2(A)) < n$ бўлгани учун индукция қадамига кўра $\mathbf{A}_1(A)$ ва $\mathbf{A}_2(A)$ формулалар учун теорема ўринлидир, яъни

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)), \tag{2}$$

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)). \tag{3}$$

Теорема тўлиқ исбот бўлиши учун биз қуйидагилар ўринли эканлигини кўрсатишимиз керак:

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)), \tag{4}$$

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)), \tag{5}$$

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \rightarrow \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)), \tag{6}$$

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow ((\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)) \sim (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \sim \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)), \tag{7}$$

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \rightarrow (\neg \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \sim \neg \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)). \tag{8}$$

Биз қуйида фақат (4) ва (5) ларнинг исботини келтириш билан чегараланамиз.

(4) ўринли эканлигини кўрсатамиз.

$\vdash A \wedge B \rightarrow A$ га $S_{A,\ B}^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)}$ ни қўлласак,

$$\vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \tag{9}$$

ҳосил бўлади.

$\Gamma = \{A \sim B\}$ бўлса,

1°. $\Gamma \vdash (A \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	— (4a) аксиома,
2. $\Gamma \vdash (A \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	— (4b) аксиома,
3. $\Gamma \vdash A \sim B$	— (μ)- хосса (3- §),
4. $\Gamma \vdash A \rightarrow B$	— MP (1°, 3°),
5. $\Gamma \vdash B \rightarrow A$	— MP (2°, 3°),
6. $\Gamma \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	— $\wedge$ ни киритиш қоидаси бўлади.

Шундай қилиб $A \sim B \vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$ экан. Унга дедукция теоремасини қўлласак,

$$\vdash (A \sim B) \to (A \to B) \wedge (B \to A). \tag{10}$$

(10) га $S_{A,\ \ B}^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \to ((\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \wedge \\ \wedge (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)) \tag{11}$$

бўлади. (2) ва (11) дан

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to ((\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \wedge \\ \wedge (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)) \tag{12}$$

келиб чиқади.
$\vdash A \wedge B \to A$ га $S_{A,\ \ B}^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \wedge (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)) \to \\ \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \tag{13}$$

келиб чиқади.

(12) ва (13) дан

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \tag{14}$$

ҳосил бўлади.

(14) дан шартларнинг ўрнини алмаштириш қоидасига асосан

$$\vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to ((\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \tag{15}$$

ни ҳосил қилиш мумкин.

(9) ва (15) дан силлогизм қоидасига асосан

$$\vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to ((\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \tag{16}$$

ни келтириб чиқарамиз. Шартларнинг ўрнини алмаштириш қоидасини (16) га қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \tag{17}$$

га эришамиз. Худди шу тахлитда

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \tag{18}$$

ни келтириб чиқариш мумкин

(17) ва (18) га $\wedge$ ни киритиш қоидасини қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \\ \wedge (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \tag{19}$$

га эришамиз.

$\Gamma = \{(A\to B) \quad (A\to C),\ A\}$ бўлса, $\Gamma \vdash B\wedge C$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас:

1°. $\Gamma \vdash (A\to B)\wedge(A\to C)$ — (μ)- хоссага асосан (3- §),
2°. $\Gamma \vdash A\to B$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,
3°. $\Gamma \vdash A\to C$ — — „ — „ — „ —
4°. $\Gamma \vdash A$ — (μ)- хоссага асосан (3- §),
5°. $\Gamma \vdash B$ — MP (2°, 4°)
6°. $\Gamma \vdash C$ — MP (3°, 4°),
7°. $\Gamma \vdash B\wedge C$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси.

Шундай қилиб

$$(A\to B)\wedge(A\to C),\ A\vdash B\wedge C,$$

дедукция теоремасига кўра эса

$$\vdash (A\to B)\wedge(A\to C)\to(A\to B\wedge C) \qquad (20)$$

бўлади. (20) га $S^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2),\ \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)}_{A,\ B,\ C}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2))\wedge(\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)\to$$
$$\to\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2))\to(\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \qquad (21)$$

келиб чиқади.

(19) ва (21) га силлогизм қоидасини қўллаб,

$$\vdash (\mathbf{B}_1\sim\mathbf{B}_2)\to(\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \qquad (22)$$

ни ҳосил қиламиз.

(4*a*), (4*b*) аксиомалар ва (22) дан

$$\vdash (\mathbf{B}_1\sim\mathbf{B}_2)\to(\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)) \qquad (23)$$

ни ҳам ҳосил қилиш мумкин.

$\Gamma = \{A\to B,\ B\to A\}$ бўлса, $\Gamma\vdash A\sim B$ эканлигини қуйидагича кўрсатиш мумкин:

1°. $\Gamma \vdash (A\to B)\to((B\to A)\to(A\sim B))$ — (4*c*) аксиома,
2°. $\Gamma \vdash A\to B$ — (μ)- хосса (3- §),
3°. $\Gamma \vdash B\to A$ — — „ — „ — „ —,
4°. $\Gamma \vdash (B\to A)\to(A\sim B)$ — MP (1°, 2°),
5°. $\Gamma \vdash A\sim B$ — MP (3°, 4°).

Шундай қилиб,

$$A\to B,\ B\to A\vdash A\sim B,$$

унга $S^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)}_{A,\ B}$ ни қўллагандан кейин эса

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)\to\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\wedge\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2),$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \vdash$$
$$\vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2) \qquad (24)$$

бўлади.

(22) ва (23) дан (24) га асосан

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)),$$

яъни (4) келиб чиқади.

(5) ни исботлаймиз.

$$\vdash (A \sim B) \to (A \to B), \qquad (25)$$

$\vdash A \to A \vee B$ ёки $S^{B,\ C}_{A,\ B}$ ни қўллагач

$$\vdash B \to B \vee C \qquad (26)$$

лар табиийдир (чунки $\vdash$ белгиси остидаги формулалар аксиомалардир).

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ эканлиги 3-мисолда кўрсатилган эди. Унга $S^{B \vee C}_{C}$ ни қўллаб, $\vdash (A \to B) \to$ $\to ((B \to B \vee C) \to (A \to B \vee C))$ ни, шартларнинг ўрнини алмаштириш қоидасини қўллаб эса

$$\vdash (B \to B \vee C) \to ((A \to B) \to (A \to B \vee C)) \qquad (27)$$

ни ҳосил қиламиз.

(26) ва (27) га хулоса қилиш (Modus ponens) қоидасини қўллаб,

$$\vdash (A \to B) \to (A \to B \vee C) \qquad (28)$$

ни келтириб чиқарамиз. (25) ва (28) га силлогизм қоидасини қўлласак,

$$\vdash (A \sim B) \to (A \to B \vee C) \qquad (29)$$

келиб чиқади. (29) га $S^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2),\ \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)}_{A,\ B,\ C}$ ни қўллаб

$$\vdash (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2))$$

ни ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган муносабат ва (2) дан силлогизм қоидасига кўра

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \qquad (30)$$

га эришамиз

Худди шунга ўхшаш,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \qquad (31)$$

ни келтириб чиқариш мумкин.

(30) ва (31) га $\wedge$ ни киритиш қоидасини қўллаб,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \wedge \wedge (\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \quad (32)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари,

$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ [(3c) аксиома],

$\vdash (A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ [шартларни бирлаштириш қоидасига кўра].

Охирги метатеоремага $S^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\vee\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)}_{A,\quad B,\quad C}$ ни қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \wedge (\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \to \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \quad (33)$$

бўлади. (32) ва (33) га силлогизм қоидасини қўллаб,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)) \quad (34)$$

ни ҳосил қиламиз. Худди шу каби

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(B_1)) \quad (35)$$

ни ҳосил қилиш мумкин.

(34) ва (35) ларни

$$\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2 \vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2), \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2 \vdash \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2) \to \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1)) \quad (37)$$

каби ёзиш мумкин.

$$\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2 \vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to (\mathbf{A} \sim \mathbf{B}))$$

аёндир. Бунга

$$S^{\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1)\vee\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1),\ \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2)\vee\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)}_{A,\quad B}$$

ни қўллаб, сўнгра ҳосил бўлган муносабат ҳамда (36) ва (37) ларга хулоса қилиш қоидасини кетма-кет икки марта қўлласак,

$$\vdash (\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{B}_2) \to (\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_1) \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2) \vee \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2)),$$

яъни (5) келиб чиқади.

6-§ Нормал формага келтириш ҳақидаги теорема

I бобнинг 7-§ ида жумлалар алгебрасининг формулаларини махсус кўринишдаги — дизъюнктив ёки конъюнктив нормал формаларда (хусусан, МДНФ ёки МКНФ ларда) ёзиш мумкинлиги ҳақида гапирилган эди.

Жумлалар ҳисобининг формулалари учун ҳам шундай формалар мавжуд эканлигини ушбу параграфда кўрсатамиз.

Дастлаб қуйидаги муносабатлар ўринли эканлигини кўрсатамиз:

$$\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \sim \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}), \qquad (1)$$

$$\vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \sim \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}), \qquad (2)$$

$$\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \vee \mathbf{A}, \qquad (3)$$

$$\vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \wedge A, \qquad (4)$$

$$\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \sim \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}. \qquad (5)$$

(1) ўринли эканини кўрсатайлик:

1°. $\vdash A \to A \vee B$ — (3a) аксиома,

2. $\vdash A \to A \vee (B \vee C)$ — $S_B^{B \vee C}$ (1°),

3°. $A \vdash A \vee (B \vee C)$ — 6-теорема (2°),

4°. $\vdash B \to B \vee C$ — $S_{A,\,B}^{B,\,C}$ (1°),

5°. $B \vdash B \vee C$ — 6-теорема (4°),

6°. $\vdash B \to A \vee B$ — (3b) аксиома,

7°. $\vdash B \vee C \to A \vee (B \vee C)$ — $S_B^{B \vee C}$ (6°),

8°. $B \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$ — 6-теорема (7°),

9°. $B \vdash A \vee (B \vee C)$ — силлогизм қоидаси (5°, 8°),

10°. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to$
$\to (A \vee B \to C))$ — (3c) аксиома,

11°. $\vdash (A \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to ((B \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to (A \vee B \to A \vee (B \vee C))$ — $S_C^{A \vee (B \vee C)}$ (10°),

12°. $\vdash (B \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to (A \vee B \to A \vee (B \vee C))$ — MP (2°, 11°),

13°. $\vdash A \vee B \to A \vee (B \vee C)$ — MP (9°, 12°),

14°. $\vdash C \to B \vee C$ — $S_{A,\,B}^{B,\,C}$ (6°),

15°. $C \vdash B \vee C$ — 6-теорема (14°),

16°. $C \vdash A \vee (B \vee C)$ — силлогизм қоидаси (8°, 15°),

17°. $A \vee B \vdash A \vee (B \vee C)$ — 6-теорема (13°),

18°. $\vdash C \to A \vee (B \vee C)$ — дедукция теоремаси (16°),

19°. $\vdash (A \vee B \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to ((C \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to ((A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C))$ — $S_{A,\,B,\,C}^{A \vee B,\,C,\,A \vee (B \vee C)}$ (10°)

20°. $\vdash (C \to A \vee (B \vee C)) \to$
$\to ((A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C))$ — MP (17°, 19°),

21°. $\vdash (A \vee C) \vee B \to A \vee (B \vee C)$ — MP (18°, 20°),

22°. $\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \to \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ — $S^{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}_{A,\ B,\ C}$ (21°).

Худди шундай усулда

23°. $\vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

24°. $\vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \sim B))$ — (4c) аксиома.

24 да A ни $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ билан, B ни $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ билан алмаштириб, ҳосил бўлган метатеоремага 22° ва 23° лардан фойдаланган ҳолда MP-қоидани икки марта қўлласак, (1) келиб чиқади.

Энди (4) нинг исботини келтирамиз.

25°. $A \wedge B \vdash A$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,

26°. $A \wedge B \vdash B$ — —„—„—„—

27°. $A \wedge B \vdash B \wedge A$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси,

28°. $\vdash A \wedge B \to B \wedge A$ — дедукция теоремаси (27°).

Худди шундай усулда

29°. $\vdash B \wedge A \to A \wedge B$

ни келтириб чиқариш мумкин.

30°. $\vdash (A \wedge B \to B \wedge A) \to ((B \wedge A \to$
$\to A \wedge B) \to (A \wedge B \sim B \wedge A)$ — $S^{A \wedge B,\ B \wedge A}_{A,\ B}$ (24°),

31°. $\vdash (B \wedge A \to A \wedge B) \to$
$\to (A \wedge B \sim B \wedge A)$ — MP (28°, 30°),

32°. $\vdash A \wedge B \sim B \wedge A$ — MP (29°, 31°),

33°. $\vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$ — $S^{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}_{A,\ B,\ C}$ (32°).

Энди (5) нинг исботига ўтамиз.

Дастлаб

$$\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \to (A \vee B) \wedge B, \tag{6}$$

$$\vdash (A \vee B) \wedge C \to A \wedge C \vee B \wedge C \tag{7}$$

эканлигини кўрсатамиз. Қуйида биз (6) метатеоремани келтириб чиқарамиз, (7) ни эса ўқувчи қийинчиликсиз мустақил келтириб чиқариши мумкин.

$\Gamma = \{A \to B,\ A \to C,\ A\}$ бўлса, $\Gamma \vdash B \wedge C$ эканлигини кўрсатайлик.

$A \to B$, A, B, $A \to C$, C, $B \wedge C$ кетма-кетлик $B \wedge C$ формуланинг Γ рўйхатдаги исботидир, ва демак,

$$A \to B,\ A \to C,\ A \vdash B \wedge C.$$

Бу муносабатга дедукция теоремасини кетма-кет уч марта қўлласак,

34°. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

келиб чиқади.

35°. $\vdash (A \wedge C \vee B \wedge C \to A \vee B) \to ((A \wedge C \vee B \wedge C \to C) \to$
$\to (A \wedge C \vee B \wedge C \to (A \vee B) \wedge C))$ — $S^{A\wedge C\vee B\wedge C,\ A\vee B}_{A,\ B}$ (34°),

36°. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ — (3c) аксиома

37°. $\vdash (A \wedge B \vee A \vee B) \to ((B \wedge C \to A \vee B) \to$
$\to (A \wedge C \vee B \wedge C \to A \vee B))$ — $S^{A\wedge B,\ B\wedge C,\ A\vee b}_{A,\ B,\ B}$ (36°),

38°. $A \wedge B \vdash A$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,

39°. $A \wedge B \vdash A \to A \vee B$ — (3a) аксиома,

40°. $A \wedge B \vdash A \vee B$ — MP (38°, 39°),

41°. $\vdash A \wedge B \to A \vee B$ — дедукция теоремаси (40°),

42°. $\vdash (B \wedge C \to A \vee B) \to$
$\to (A \wedge C \quad B \wedge C \to A \vee B)$ — MP (37°, 41°),

43°. $B \wedge C \vdash B$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,

44°. $B \wedge C \vdash A \vee B$ — $\vee$ ни киритиш қоидаси,

45°. $\vdash B \wedge C \to A \vee B$ — дедукция теоремаси (44°),

46°. $\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \to A \vee B$ — MP (42°, 45°),

47°. $\vdash (A \wedge C \vee B \wedge C \to C) \to$
$\to (A \wedge C \vee B \wedge C \to (A \vee B) \wedge C)$ — MP (35°, 46°),

48°. $\vdash (A \wedge C \to C) \to ((B \wedge C \to C) \to$
$\to (A \wedge C \vee B \wedge C \to C)$ — $S^{A\wedge B,\ B\wedge C}_{A,\ B}$ (36°),

49°. $\vdash A \wedge B \to B$ — (2b) аксиома,

50°. $\vdash A \wedge C \to C$ — S^{C}_{B} (49°),

51°. $\vdash (B \wedge C \to C) \to$
$\to (A \wedge B \vee B \wedge C \to C)$ — MP (48°, 50°),

52°. $\vdash B \wedge C \to C$ — S^{B}_{A} (50°),

53°. $\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \to C$ — MP (51°, 52°),

54°. $\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \to (A \vee B) \wedge C$ — MP (47°, 53°).

Шундай қилиб, (6) ўринли экан.

24° даги A ни $A \wedge C \vee B \wedge C$ билан, B ни эса $(A \vee B) \wedge C$ билан алмаштириб, (6) ва (7) лардан фойдаланган ҳолда MP-қоидани кетма-кет қўлласак,

55°. $\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \sim (A \vee B) \wedge C$ келиб чиқади. 55° га $S^{\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}}_{A,\ B,\ C}$ ни қўлласак (5) ҳосил бўлади.

(1) ва (2) лар $(\ldots(\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2) \vee \mathbf{A}_3) \ldots) \vee \mathbf{A}_n$ ва $(\ldots(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{A}_3) \ldots) \wedge \mathbf{A}_n$ формулаларни шартли равишда (кавссиз) $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ ва $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}_n$ кўринишда ёзиш имконини беради.

Дизъюнктив нормал форма хусусан МДНФ ва конъюнктив нормал форма (хусусан МКНФ) тушунчалари жумлалар алгебрасидагидек киритилади, яъни ДНФ

$$A_1^{\alpha_{11}} \wedge A_2^{\alpha_{12}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\alpha_{1n}} \vee \ldots \vee A_1^{\alpha_{m1}} \wedge A_2^{\alpha_{m2}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\alpha_{mn}},$$

$$(\alpha_{ij} = 1 \text{ ёки } 0,\ A_j^{\alpha_{ij}} = A_j \text{ ёки } \neg A_j,\ 1 \leqslant m \leqslant 2^n),$$

КНФ эса

$$(A_1^{\beta_{11}} \vee A_2^{\beta_{12}} \vee \ldots \vee A_n^{\beta_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_1^{\beta_{r1}} \vee A_2^{\beta_{r2}} \vee \ldots \vee A_n^{\beta_{rn}}),$$

$$(\beta_{ij} = 0 \text{ ёки } 1,\ A_j^{\beta_{ij}} = A_j \text{ ёки } \neg A_j,\ 1 \leqslant r \leqslant 2^n)$$

кўринишда бўлади.

1-теорема. *Жумлалар ҳисобининг ҳар бир* $\mathbf{A}$ *формуласи учун шундай* ДНФ $\mathbf{B}$ *ва шундай* КНФ $\mathbf{C}$ *мавжудки, улар учун*

$$\vdash \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \tag{8}$$

ва

$$\vdash \mathbf{A} \sim \mathbf{C}. \tag{9}$$

Исботи. Теоремани берилган формуланинг ранги бўйича индукция олиб бориш билан исботлаймиз.

$\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 0$ бўлса, $\mathbf{A} \equiv A$ ўзгарувчи жумладир, ва демак, теорема ўринли бўлади

Ранги $n \geqslant 1$ дан кичик бўлган барча формулалар учун теорема ўринли бўлсин. Агар $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$ бўлса, у қуйидаги кўринишлардан бирига эга бўлади:

(I). $\mathbf{D} \wedge \mathbf{N}$, (IV) $\mathbf{D} \sim \mathbf{N}$

(II). $\mathbf{D} \vee \mathbf{N}$, (V). $\neg \mathbf{D}$.

(III). $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{N}$,

$\operatorname{rang}(\mathbf{D}) < n$ ва $\operatorname{rang}(\mathbf{N}) < n$ бўлгани сабабли $\mathbf{D}$ ва $\mathbf{N}$ формулалар учун шундай ДНФлар $\mathbf{D}_1$ ва $\mathbf{N}_1$ ҳамда шундай КНФ лар $\mathbf{D}_2$ ва $\mathbf{N}_2$ мавжудки

$$\vdash \mathbf{D} \sim \mathbf{D}_1, \tag{10}$$

$$\vdash \mathbf{N} \sim \mathbf{N}_1, \tag{11}$$

$$\vdash \mathbf{D} \sim \mathbf{D}_2, \tag{12}$$

$$\vdash \mathbf{N} \sim \mathbf{N}_2 \tag{13}$$

бўлади.

Ушбу метатеорема ўринли эканини кўрсатамиз:
Агар $\vdash A \sim B$ *ва* $\vdash C \sim D$ *бўлса, у ҳолда*

$$\vdash A \wedge C \sim B \wedge D \qquad (*)$$

бўлади.

Исботи

1°. $\vdash (A \sim B) \to (B \to B)$ — (4a) аксиома,
2°. $\vdash A \sim B$ — берилган метатеорема,
3°. $\vdash A \to B$ — MP (1°, 2°),
4°. $\vdash (A \sim B) \to (B \to A)$ — (4b) аксиома,
5°. $\vdash B \to A$ — MP (2°, 4°),

Худди шундай $\vdash C \sim D$ дан

6°. $\vdash C \to D$,
7°. $\vdash D \to C$ ларни ҳосил қилиш мумкин
8°. $A \vdash B$ — 6-теорема (2-§),
9°. $B \vdash A$ — „ — „ — „ —,
10°. $C \vdash D$ — „ — „ — „ —,
11°. $D \vdash C$ — „ — „ — „ —,
12°. $A \wedge C \vdash A$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,
13°. $A \wedge C \vdash B$ — гипотезалардан келтириб чиқаришнинг (τ) хоссаси (8°, 12°),
14°. $A \wedge C \vdash C$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидаси,
15°. $A \wedge C \vdash D$ — (τ)-хосса (14°, 10°) (3-§),
16°. $A \wedge C \vdash B \wedge D$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси (13°, 15°),
17°. $\vdash A \wedge C \to B \wedge D$ — дедукция теоремаси (16°).

Худди шундай усулда

18°. $\vdash B \wedge D \to A \wedge C$ ни ҳосил қиламиз.
19°. $\vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \sim B))$ — (4c) аксиома

19° даги A ни $A \wedge C$ билан, B ни эса $B \wedge D$ билан алмаштириб, 17° ва 18° лардан фойдаланган ҳолда MP-қоидани кетма-кет икки марта қўлласак,

20°. $\vdash A \wedge C \sim B \wedge D$ ҳосил бўлади.

Теорема исботига қайтамиз.

$\mathbf{A} \equiv \mathbf{D} \wedge \mathbf{N}$ бўлса, (10) ва (11) лардан (*) метатеоремага асосан

$$\vdash \mathbf{D} \wedge \mathbf{N} \sim \mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{N}_1$$

бўлади.

$$\mathbf{D}_1 \overline{\overline{\circ}}\; A_{1}^{\alpha_{11}} \wedge A_{2}^{\alpha_{12}} \ldots \wedge A_{n}^{\alpha_{1n}} \vee \ldots \vee A_{1}^{\alpha_{m1}} \wedge$$
$$\wedge A_{2}^{\alpha_{m2}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\alpha_{mn}},$$
$$\mathbf{N}_1 \overline{\overline{\circ}}\; A_{1}^{\beta_{11}} \wedge A_{2}^{\beta_{12}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\beta_{1n}} \vee$$
$$\vee \ldots \vee A_{1}^{\beta_{r1}} \wedge A_{2}^{\beta_{r2}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\beta_{rn}}$$

бўлса,

$$\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{N}_1 \overline{\overline{\circ}}\; (A_{1}^{\alpha_{11}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\alpha_{1n}} \vee \ldots \vee A_{1}^{\alpha_{m1}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\alpha_{mn}}) \wedge$$
$$\wedge (A_{1}^{\beta_{11}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\beta_{1n}} \vee \ldots \vee A_{1}^{\beta_{r1}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\beta_{rn}}) \quad (14)$$

бўлади. (14) нинг ўнг томонига (3), (4) ва (5) ҳамда осон келтириб чиқарилиши мумкин бўлган

$$\vdash A \wedge A \sim A, \; \vdash A \vee A \sim A$$

метатеоремаларни қўлласак,

$$\vdash \mathbf{A} \sim A_{1}^{\gamma_{11}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\gamma_{1n}} \vee \ldots \vee A_{1}^{\gamma_{k1}} \wedge \ldots \wedge A_{n}^{\gamma_{kn}} \quad (15)$$

ҳосил бўлади: (15) теоремани қаноатлантирувчи метатеоремадир.

$$\mathbf{D}_2 \overline{\overline{\circ}}\; (A_{1}^{\delta_{11}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\delta_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_{1}^{\delta_{l1}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\delta_{ln}}),$$
$$\mathbf{N}_2 \overline{\overline{\circ}}\; (A_{1}^{\tau_{11}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\tau_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_{1}^{\tau_{p1}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\tau_{pn}})$$

бўлса,

$$\mathbf{D}_2 \wedge \mathbf{N}_2 \overline{\overline{\circ}}\; (A_{1}^{\delta_{11}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\delta_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_{1}^{\delta_{l1}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\delta_{ln}}) \wedge$$
$$\wedge (A_{1}^{\tau_{11}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\tau_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_{1}^{\tau_{p1}} \vee \ldots \vee A_{n}^{\tau_{pn}})$$

ва $\vdash \mathbf{A} \sim \mathbf{D}_2 \wedge \mathbf{N}_2$ бўлиб, охирги метатеорема теоремани қаноатлантиради

$\mathbf{A} \overline{\overline{\circ}}\; \mathbf{D} \vee \mathbf{N}$ бўлган ҳоли юқорида қаралган ҳолга ўхшаш бўлиб, бунда $\wedge$ ни $\vee$ билан, $\vee$ ни эса $\wedge$ билан алмаштириш керак.

$\mathbf{A} \overline{\overline{\circ}}\; \neg \mathbf{D}$ бўлсин. Индукция шартига кўра

$$\vdash \mathbf{D} \sim \mathbf{D}_1 \quad (A)$$

ва

$$\vdash \mathbf{D} \sim \mathbf{D}_2. \quad (B)$$

Қуйидаги метатеоремаларни қийинчиликсиз келтириб чиқариш мумкин:

$$\vdash (\mathbf{A} \sim \mathbf{B}) \sim (\neg \mathbf{A} \sim \neg \mathbf{B}), \quad (16)$$
$$\vdash \neg (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \sim \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}, \quad (17)$$
$$\vdash \neg (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \sim \neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}, \quad (18)$$
$$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \sim \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}. \quad (19)$$

(A) ва (16) дан ҳамда (B) ва (16) дан

$$\vdash \neg D \sim \neg D_1 \qquad (20)$$

ва

$$\vdash \neg D \sim \neg D_2 \qquad (21)$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб

$$\vdash A \sim \neg (A_{1\ 11}^{\alpha} \wedge \ldots \wedge A_{n\ 1n}^{\alpha} \vee \vee \ldots \vee A_{1\ m1}^{\alpha} \wedge \ldots \wedge A_{n\ mn}^{\alpha}), \qquad (22)$$

$$\vdash A \sim \neg ((A_{1\ 11}^{\delta} \vee \ldots \vee A_{n\ 1n}^{\delta}) \wedge \ldots \wedge \wedge (A_{1\ l1}^{\delta} \vee \ldots \vee A_{n\ ln}^{\delta}). \qquad (23)$$

(22) ва (23) га (17) ва (18) ларни қўлласак, теоремани қаноатлантирувчи метатеоремалар келиб чиқади.

$A \equiv D \to N$ бўлсин.

$\vdash D \sim D_1$ ва $\vdash N \sim N_1$ ҳамда $\vdash D \sim D_2$ ва $\vdash N \sim N_2$ бўлганлиги учун

$$\vdash (D \to N) \sim (D_1 \to N_1), \qquad (24)$$

$$\vdash (D \to N) \sim (D_2 \to N_2) \qquad (25)$$

бўлади. (24) ва (25) ларни қуйидагича асослаш мумкин:

Агар $\vdash A \sim B$ ва $\vdash C \sim D$ бўлса, у ҳолда $\vdash A \to C \sim B \to D$ бўлади,

Ҳақиқатан, $\vdash A \sim B$ бўлганлиги учун $\vdash A \to B$ ва $\vdash B \to A$ ёки $A \vdash B$ ва $B \vdash A$, $\vdash C \sim D$ бўлганлиги учун $\vdash C \to D$ ва $\vdash D \to C$ ёки $C \vdash D$ ва $D \vdash C$ бўлади.

1°. $B \vdash A$	— юқорида берилган,
2°. $A \to C,\ B \vdash A$	— (γ)- хосса (3- §),
3°. $A \to C,\ B \vdash A \to C$	—(μ)-хосса (3-§),
4°. $A \to C,\ B \vdash C$	—MP(2°, 3°),
5°. $C \vdash D$	юқорида берилган,
6°. $A \to C,\ B \vdash D$	—транзитив (4°, 5°),
7°. $\vdash (A \to C) \to (B \to D)$	—дедукция теоремаси (6°).

Худди шундай усулда

8°. $\vdash (B \to D) \to (A \to C)$ ни ҳосил қилиш мумкин.

9°. $\vdash (A \to B \to ((B \to A) \to (A \sim B))$ —(4*c*) аксиома.

9° да A ни $A \to C$, B ни $B \to D$ билан алмаштириб, 7° ва 8° дан фойдаланган ҳолда MP-қоидани кетма-кет икки марта қўлласак,

$$\vdash (A \to C) \sim (B \to D) \qquad (26)$$

келиб чиқади.

(26) да A ни $\mathbf{D}$, C ни $\mathbf{N}$, B ни $\mathbf{D}_1$ ва D ни $\mathbf{N}_1$ билан алмаштирсак, (24) келиб чиқади. Худди шундан усулда (25) ни ҳосил қиламиз.

$$\mathbf{D}_1 \to \mathbf{N}_1 \overline{\underline{\circ}} A_1^{\alpha_{11}} \wedge \ldots \wedge A_1^{\alpha_{1n}} \vee \ldots \vee A_1^{\alpha_{m1}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\alpha_{mn}} \to$$
$$\to A_1^{\beta_{11}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\beta_{1n}} \vee \ldots \vee A_n^{\beta_{r1}} \wedge \ldots \wedge A_n^{\beta_{rn}}.$$

га (19), (18), (17), (5)—(1) ларни қўлласак, теоремани қаноатлантирувчи метатеорема ҳосил бўлади.

$$\mathbf{D}_2 \to \mathbf{N}_2 \overline{\underline{\circ}} (A_1^{\delta_{11}} \vee \ldots \vee A_n^{\delta_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A^{\delta_{l1}} \vee \ldots \vee A_n^{\delta_{ln}}) \to$$
$$\to (A_1^{\tau_{11}} \vee \ldots \vee A_n^{\tau_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (A_1^{\tau_{p1}} \vee \ldots \vee A_n^{\tau_{pn}})$$

га ҳам (1)—(5), (17), (18) ларни қўлласак, керакли метатеорема келиб чиқади.

$\mathbf{A} \overline{\underline{\circ}} \mathbf{D} \sim \mathbf{N}$ бўлган ҳолни ўқувчи мустақил иш сифатида бажариши мумкин.

7- §. Жумлалар ҳисобининг зидсизлиги ва тўлиқлиги

Ҳар қандай аксиоматик назария сингари жумлалар ҳисоби учун ҳам аксиоматик назарияларга қўйиладиган асосий проблемалар: зидсизлик, тўлиқлик, эркинлик ва ечилиш проблемалари ҳал қилиниши керак.

1-таъриф. Жумлалар ҳисоби аксиомалари системасида ҳеч қандай **A** формула ўзининг инкори $\neg$**A** билан бир пайтда теорема (келтириб чиқарилувчи) бўлмаса, *жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси зидсиз* дейилади.

Таърифдан бевосита кўринадики, агар жумлалар ҳисобида ҳеч бўлмаганда битта **A** формула топилиб, у ўзининг инкори $\neg$**A** билан бир пайтда аксиомалардан келтириб чиқарилувчи бўлса, у ҳолда жумлалар ҳисоби зиддиятга эга бўлган аксиоматик назария бўлади.

1-теорема. *Агар* $\vdash$**A** *бўлса, у ҳолда* $\models$**A** *бўлади, яъни жумлалар ҳисобининг ихтиёрий исботланувчи формуласи умумқийматли формуладир.*

Исботи. Маълумки жумлалар ҳисобида дастлабки келтириб чиқарилувчи формулалар аксиомалардир. Бошқа келтириб чиқарилувчи формулалар улардан ўрнига қўйиш ва хулоса қилиш (Modus ponens) қоидалари ёрдамида ҳосил қилинади. Демак юқоридаги метатеоремани исботлаш учун дастлаб аксиомалар умумқийматли формулалар эканлигини, сўнгра эса аксиомалардан келтириб чиқариш қоидалари ёрдамида ҳосил қилинадиган ҳар бир формула умумқийматли эканлигини кўрсатиш керак.

4-§ да ҳар бир аксиома умумқийматли формула эканлиги кўрсатилган (бунга ўқувчи ҳар бир аксиоманинг ростлик жадвалини тузиб ишонч ҳосил қилиши мумкин). Келтириб чиқарилувчи ва умумқийматли бўлган **A** ва **A→B** формулаларга хулоса қилиш қоидасини қўллаганда яна умумқийматли формула ҳосил бўлиши, келтириб чиқарилувчи ва умумқийматли формула, **B** эса ихтиёрий формула бўлганда, улардан ўрнига қўйиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган A(B) формула ҳам умумқийматли бўлиши 4-§ да кўрсатилган.

2-теорема. *Жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси зидсиздир.*

Исботи. Фараз қилайлик, жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси зиддиятли бўлсин. У ҳолда шундай A формула топиладики, $\vdash$ **A** ва $\vdash \neg$ **A** бўлади. 1-теоремага **A** асосан $\models$**A** ва $\models \neg$ **A** бўлади. Аммо бу зиддиятдир, чунки умумқийматли формуланинг инкори радланувчи формуладир. Ҳосил бўлган зиддият қилинган фараз ўринсиз эканлигини кўрсатади.

Изоҳ. Юқорида исбот этилган теоремалар қабул қилинган аксиомалар системаси учун ўринлидир. Қандай жумлалар ҳисоби ҳосил бўлиши аксиомаларининг келтириб чиқариш қоидаларининг танланишига боғлиқ эканлиги 1-§ да айтилган эди. Шу сабабли ҳар бир жумлалар ҳисоби (аксиомалар системаси) учун зидсизлик проблемаси (ва бошқа проблемалар) алоҳида қаралиши керак.

2-таъриф. Ҳар бир умумқийматли формула жумлалар ҳисоби аксиомаларидан келтириб чиқарилувчи бўлса, у ҳолда бундай аксиомалар системаси *кенг маънода тўлиқ* дейилади.

3-теорема.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A). \qquad (*)$$

Исботи. $\Gamma = \{A \to B, \neg B\}$ бўлса, $\Gamma \vdash \neg A$ эканлигини кўрсатамиз.

1°. $\Gamma \vdash A \to (B \to A)$ —(1 a) аксиома,

2°. $\Gamma \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$ —$S_{A,B}^{\neg B, A}$ (1°),

3°. $\Gamma \vdash \neg B$ —μ-хосса (3-§),

4°. $\Gamma \vdash A \to \neg B$ —MP (2°, 3°),

5°. $\Gamma \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ — (5*b*) аксиома,
6°. $\Gamma \vdash A \to B$ — (μ)- хосса (3 §),
7°. $\Gamma \vdash (A \to \neg B) \to \neg A$ — MP (5°, 6°),
8°. $\Gamma \vdash \neg A$ — MP (4°, 7°).

Шундай қилиб, $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ экан. Унга кетма-кет икки марта дедукция теоремасини қўлласак, (*) ҳосил булади.

Биз қуйида яна ушбу метатеоремадан фойдаланамиз—унинг исботи олдинги параграфда келтирилган ($\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \to (A \vee B) \wedge C$ метатеореманинг исботига қаранг).

4-теорема. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$.

Қуйидаги теорема жумлалар ҳисоби аксиомалари системасининг кенг маънода тўлиқ эканини исботлашда муҳим аҳамиятга эгадир. Маълумки, $A \vee \neg A$ формула „учинчи ҳолни инкор этиш қонуни“ дейилиб, у жумлалар алгебрасида асосий мантиқий қонунлар қагорига киради.

5-теорема.

$$\vdash A \vee \neg A.$$

Ушбу теореманинг исботини келтиришдан олдин **R** ихтиёрий келтириб чиқарилувчи формула ($\vdash$ **R**), **F** эса $\vdash \neg$**F** бўлган формула эканлигини эслатиб ўтамиз (2-§). Бундан ташқари $\neg$**F** ни **R**, $\neg$ **R** ни эса **F** билан алмаштириш мумкинлиги равшандир.

Исботи.

1°. $\vdash A \to A \vee B$ — (3 а) аксиома,
2°. $\vdash A \to A \vee \neg A$ — $S_B^{\neg A}$ (1°),
3°. $\vdash B \to A \vee B$ — (3 в) аксиома,
4°. $\vdash \neg A \to A \vee \neg A$ — $S_B^{\neg A}$ (3°),
5°. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 3-теорема,
6°. $\vdash (A \to A \vee \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A)$ — $S_B^{A \vee \neg A}$ (5°),
7°. $\vdash \neg(A \vee \neg A) \to \neg A$ MP (2°, 6°),
8°. $\vdash (\neg A \to A \vee \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to$
$\to \neg\neg A)$ — $S_{A,\ B}^{\neg A,\ A \vee \neg A}$ (5°),
9°. $\vdash \neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$ — MP (4°, 8°),
10°. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (A \to$
$\to B \wedge C))$ — (4-теорема),
11°. $\vdash (\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to$
$\to ((\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A)$
$\to \neg\neg A \wedge \neg A))$ — $S_{A,\ B,\ C}^{(A \vee \neg A),\ \neg\neg A,\ \neg A}$ (10°),

12°. $\vdash(\neg(A\vee\neg A)\to\neg A)\to(\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A\wedge\neg A)$ —MP (9°, 11°),

13°. $\vdash\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A\wedge\neg A$ —MP(7°, 12°),

14°. $\neg\neg A\wedge\neg A\vdash\neg\neg A$ —$\wedge$ ни йўқотиш,

15°. $\neg\neg A\wedge\neg A\vdash\neg A$ — — „ — „ — „ —,

16°. $\neg\neg A\wedge\neg A\vdash\neg\neg A\to A$ —(5a) аксиома,

17°. $\neg\neg A\wedge\neg A\vdash A$ —MP (14°, 16°),

18°. $\neg\neg A\wedge\neg A\vdash A\wedge\neg A$ —$\wedge$ ни киритиш (15°, 17°),

19°. $\vdash\neg(A\vee\neg A)\to A\wedge\neg A$ —силлогизм (13°, 18°),

20°. $\vdash A\to(B\to A)$ —(1a) аксиома,

21°. $\vdash A\to(\mathbf{R}\to A)$ —$S_B^{\mathbf{R}}$ (20°),

22°. $\vdash(\mathbf{R}\to A)\to(\neg A\to\neg\mathbf{R})$ —$S_{A,\ B}^{\mathbf{R},\ A}$ (5°),

23°. $\vdash A\to(\neg A\to\neg\mathbf{R})$ —силлогизм (21°, 22°),

24°. $\vdash A\wedge\neg A\to\neg\mathbf{R}$ —шартларни бирлаштириш (23°),

25°. $\vdash A\wedge\neg A\to\mathbf{F}$,

26°. $\vdash\neg((A\vee\neg A)\to\mathbf{F})\to(\neg\mathbf{F}\to\neg\neg(A\vee\neg A))$ —$S_{A,\ B}^{\neg(A\vee\neg A,\ \mathbf{F}}$ (5°),

27°. $\vdash\neg(A\vee\neg A)\to\mathbf{F}$ —силлогизм (19°, 25°),

28°. $\vdash\neg\mathbf{F}\to\neg\neg(A\vee\neg A)$ —MP(26°, 27°),

29°. $\vdash\neg\neg A\to A$ —(5b) аксиома,

30°. $\vdash\neg\neg(A\vee\neg A)\to A\vee\neg A$ —$S_A^{A\vee\neg A}$ (29°),

31°. $\vdash\neg\mathbf{F}\to A\vee\neg A$ —силлогизм (28°, 30°),

32. $\vdash\neg\mathbf{F}$ —берилган метатеорема,

33. $\vdash A\vee\neg A$ —MP (31°, 32°).

6-теорема. *Ҳар бир асосий мантиқий амал учун қуйидагилар ўринлидир:*

$\wedge$ учун:

A	B	$A\wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$A,\ B\vdash A\wedge B$, (I)

$A,\ \neg B\vdash\neg(A\wedge B)$, (II)

$\neg A,\ B\vdash\neg(A\wedge B)$, (III)

$\neg A,\ \neg B\vdash\neg(A\wedge B)$. (IV)

$\vee$ учун:

A	B	$A\vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A,\ B\vdash A\vee B,$ (V)
$A,\ \neg B\vdash A\vee B,$ (VI)
$\neg A,\ B\vdash A\vee B,$ (VII)
$\neg A,\ \neg B\vdash \neg(A\vee B).$ (VIII)

$\rightarrow$ учун:

A	B	$A\rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$A,\ B\vdash A\rightarrow B,$ (IX)
$A,\ \neg B\vdash \neg(A\rightarrow B),$ (X)
$\neg A,\ B\vdash A\rightarrow B,$ (XI)
$\neg A,\ \neg B\vdash A\rightarrow B,$ (XII)

$\sim$ учун:

A	B	$A\sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$A,\ B\vdash A\sim B,$ (XIII)
$A,\ \neg B\vdash \neg(A\sim B),$ (XIV)
$\neg A,\ B\vdash \neg(A\sim B),$ (XV)
$\neg A,\ \neg B\vdash A\sim B.$ (XVI)

$\neg$ учун

A	A
1	0
0	1

$A\vdash \neg\neg A,$ (XVII)
$\neg A\vdash \neg A,$ (XVIII)

Биз қуйида $\wedge$ учун ўринли бўлган (I)—(IV) ларнинг исботини келтириш билан чегараланамиз.

(I). 1°. $A,\ B\vdash A$ — (μ)-хосса (3-§),
2°. $A, B\vdash B$ — „ — „ — „ — ,
3°. $A,\ B\vdash A\wedge B$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси

(II) 1°. $A,\ \neg B\vdash (A\rightarrow B)\rightarrow$
$\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$ — 3- теорема
2°. $A,\ \neg B\vdash (A\wedge B\rightarrow B)\rightarrow$
$\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg(A\wedge B))$ — $S_B^{A\wedge A}$ (1°),
3°. $A,\ \neg B\vdash A\wedge B\rightarrow B$ — (2 b) аксиома,
4°. $A,\ \neg B\vdash \neg B\rightarrow\neg(A\wedge B)$ — MP(2°, 3°),
5°. $A,\ \neg B\vdash \neg B$ — (μ)-хосса (3-§),

6°. $A, \neg B \vdash \neg(A \wedge A)$ — MP(7°, 5°).

(III) 1°. $\neg A, B \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ — (3-теорема),

2°. $\neg A, B \vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ — $S^{B,\ A}_{A \wedge B}$ (1°),

3°. $\neg A, B \vdash (A \wedge B \to A) \to (\neg A \to \neg(A \wedge B))$

— $S^{A,\ B}_{A}$ (2°),

4°. $\neg A, B \vdash A \wedge B \to A$ — (2*a*) аксиома,

5°. $\neg A, B \vdash \neg A \to \neg(A \wedge B)$ — MP(3°, 4°),

6°. $\neg A, B \vdash \neg A$ — (μ)-хосса (3-§),

7°. $\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B)$ — MP (5°, 6°).

(IV). 1°. $\neg A, \neg B \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

— (3- теорема),

2°. $\neg A, \neg B \vdash (A \wedge B \to B) \to (\neg B \to \neg(A \wedge B))$

— $S^{A \wedge B}_{A}$ (1°),

3°. $\neg A, \neg B \vdash A \wedge B \to B$ — (2*b*)- аксиома,

4°. $\neg A, \neg B \vdash \neg B \to \neg(A \wedge B)$ — MP (2°, 3°),

5°. $\neg A, \neg B \vdash \neg B$ — (μ)-хосса (3- §),

6°. $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ — MP (4°, 5°).

Жумлалар ҳисоби ва жумлалар алгебрасининг формулалари бир хил бўлгани учун жумлалар ҳисобининг формулаларини жумлалар алгебрасининг формулалари сифатида қараш мумкин.

Исботсиз келтириладиган ушбу теоремада A^{α} белги одатдагидек: $\alpha = 1$ бўлганда A ни, $\alpha = 0$ бўлганда эса $\neg A$ ни билдиради.

7-теорема. $\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$ — *жумлалар ҳисобининг формуласи*, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *эса 1 ёки 0 лардан тузилган ихтиёрий тизма бўлсин.*

Агар $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$ *бўлса, у ҳолда*

$$A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n),$$

$\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ бўлганда эса

$$A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_n^{\alpha_n} \vdash \neg\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n)$$

бўлади.

1-мисол. 7- теоремани

$$\mathbf{A}(A, B, C) \equiv A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge (B \vee C)$$

формула мисолида кўрсатамиз. Берилган формулани жумлалар алгебрасининг формуласи сифатида қарасак, унинг ростлик жадвали қуйидагичадир:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A\wedge\neg B$	$B\vee C$	$\neg A\wedge(B\vee C)$	$A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0

Қаралаётган формула, масалан, (1, 1, 1) тизмада 0 қийматга эга. Теоремага асосан

$$A,\ B,\ C\vdash\neg(A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)).$$

Шундай қилиб, қуйидаги 8 та метатеорема ўринли:

(I)′. $A,\ B,\ C\vdash\neg(A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C))$,
(II)′. $A,\ B,\ \neg C\vdash\neg(A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C))$,
(III)′. $A,\ \neg B,\ C\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$,
(IV)′. $A,\ \neg B,\ \neg C\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$,
(V)′. $\neg A,\ B,\ C\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$,
(VI)′. $\neg A,\ B,\ \neg C\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$,
(VII)′. $\neg A,\ \neg B,\ C\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$,
(VIII)′. $\neg A,\ \neg B,\ \neg C\vdash\neg(A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C))$.

(I)′—(VIII)′ метатеоремалардан (III)′ нинг исботини келтирайлик: $\Gamma=\{A,\ B,\ C\}$ бўлса, у ҳолда

1°. $\Gamma\vdash A$ — (μ)-хосса (3-§),
2°. $\Gamma\vdash\neg B$ — —„—„—„—,
3°. $\Gamma\vdash A\wedge\neg B$ — $\wedge$ ни киритиш қоидаси,
4°. $\Gamma\vdash A\wedge\neg B\vee\neg A\wedge(B\vee C)$ — $\vee$ ни киритиш қоидаси.

8-теорема. *Агар* $\mathbf{A}(A,\ldots,A_n)$ *умумқийматли формула бўлса, у ҳолда*

$$A_1\vee\neg A_1,\ \neg A_2\vee A_2,\ \ldots,\ A_n\vee\neg A_n\vdash\mathbf{A}(A_1,\ldots,A_n)\qquad(1)$$

бўлади.

Исботи. $n=1$ бўлса, у ҳолда ушбу жадвалга эга бўламиз:

A	$\mathbf{A}(A)$
1	1
0	1

Жадвалдан

$$(\mathrm{I}).\ A \vdash \mathbf{A}(A),$$
$$(\mathrm{II}).\ \neg A \vdash \mathbf{A}(A).$$

ёки

$$(\mathrm{I}').\ \vdash A \to \mathbf{A}(A),$$
$$(\mathrm{II})'.\ \vdash \neg A \to \mathbf{A}(A)$$

ҳосил бўлади.

$1°. \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ — (3 с) аксиома,

$2°.\ \vdash (A \to \mathbf{A}(A)) \to ((\neg A \to \mathbf{A}(A)) \to (A \vee \neg A \to \mathbf{A}(A)))$ — $S^{\neg A,\ \mathbf{A}(A)}_{B,\ \ C}$ (1°),

$3°.\ \vdash (\neg A \to \mathbf{A}(A)) \to (A \vee \neg A \to \mathbf{A}(A))$ — $MP((\mathrm{I})', 2°)$,

$4°.\ \vdash A \vee \neg A \to \mathbf{A}(A)$ — $MP((\mathrm{II})', 3°)$

лардан эса

$$A \vee \neg A \vdash \mathbf{A}(A)$$

келиб чиқади.

$n=2$ бўлса, ушбуга эга бўламиз:

A	B	$\mathbf{A}(A, B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Жадвалдан

$(\mathrm{I})''.\ A,\ B \vdash \mathbf{A}$ ёки $A \vdash B \to \mathbf{A}$,

$(\mathrm{II})''.\ A,\ \neg B \vdash \mathbf{A}$ ёки $A \vdash \neg B \to \mathbf{A}$,

$(\mathrm{III})''.\ \neg A, B \vdash \mathbf{A}$ ёки $\neg A \vdash B \to \mathbf{A}$,

$(\mathrm{IV})''.\ \neg A,\ \neg B \vdash \mathbf{A}$ ёки $\neg A \vdash \neg B \to \mathbf{A}$

ҳосил бўлади.

$1°.\ A \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ — (3 с) аксиома,

$2°.\ A \vdash (B \to \mathbf{A}) \to ((\neg B \to \mathbf{A}) \to (B \vee \neg B \to \mathbf{A}))$ — $S^{B,\ \neg B,\ \mathbf{A}}_{A,\ B,\ C}$ (1°),

$3°.\ A \vdash (\neg B \to \mathbf{A}) \to (B \vee \neg B \to \mathbf{A})$ — $MP(2°, (\mathrm{I})'')$,

$4°.\ A \vdash B \vee \neg B \to \mathbf{A}$ — $MP(3°, (\mathrm{II})'')$

лардан

$$A,\ B \vee \neg B \vdash \mathbf{A} \tag{2}$$

келиб чиқади.

Худди шундай (III)″ ва (IV)″ дан

$$\neg A, B \vee \neg B \vdash A \quad (3)$$

ни ҳосил қиламиз.

Юқоридаги мулоҳазани (2) ва (3) га қўлласак,

$$A \vee \neg A, \quad B \vee \neg B \vdash A\ (A, B)$$

га эришамиз.

$n > 2$ бўлган ҳол ҳам худди шундай таҳлилда исботланади.

9-теорема. *Агар* **A** *умумқийматли формула бўлса, у жумлалар ҳисобида келтириб чиқарилувчи бўлади, яъни* $\models$**A** *бўлса, у ҳолда* $\vdash$**A** *бўлади.*

Исботи. **A** умумқийматли формула бўлса, у ҳолда 8-теоремага асосан

$$A_1 \vee \neg A_1, \ldots, A_n \vee \neg A_n \vdash A \quad (4)$$

бўлади. 5-теоремага асосан

$$\vdash A_1 \vee \neg A_1, \ldots, \vdash A_n \vee \neg A_n. \quad (5)$$

(4) ва (5) ларга МР-қоидасини n марта кетма-кет қўлласак,

$$\vdash A$$

келиб чиқади.

Исбот этилган теорема жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси кенг маънода тўлиқ эканлигини кўрсатади.

3-таъриф. Жумлалар ҳисоби аксиомалари системасига шу системадан келтириб чиқарилмайдиган янги аксиома сифатида киритилганда зиддият ҳосил бўлса, у ҳолда жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси *тор маънода тўлиқ* дейилади.

Лемма. *Агар* **A**$\equiv$**B** *ва* $\vdash$**A** *бўлса, у ҳолда* $\vdash$**B** *бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик $\not\vdash$**B** бўлсин. У ҳолда $\not\models$**B** бўлади, яъни **B** умумқийматли бўлмай, ўзгарувчилар қийматларининг камида битта тизмасида 0 қиймат қабул қилади: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$—шундай тизмалардан бири, яъни $\mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ бўлсин. $\vdash$**A** бўлгани учун $\models$**A** бўлади, хусусан $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$ дир. Бу эса лемма шартига зиддир, ва демак, $\vdash$**B** дир.

9-теорема. *Жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси тор маънода тўлиқдир.*

Исботи. Фараз қилайлик, жумлалар ҳисоби аксиомалари системаси тор маънода тўлиқ бўлмасин, **A** эса аксиомалардан келтириб чиқарилувчи формула бўлмасин. Уни янги аксиома сифатида жумлалар ҳисоби аксиомалари системасига киритайлик. Дастлабки аксиомалар системасини (I) билан, кейин ҳосил бўлган (**A** ни аксиома сифатида киритилгандан кейин) аксиомалар системасини (II) билан белгилайлик. $\underset{(I)}{\vdash}\mathbf{B}$ ёки $\underset{(II)}{\vdash}\mathbf{B}$ ёзувлар мос равишда:

„**B** формула (I) аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчидир“, „**B** формула (II) аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчидир“ деб ўқилади. **A** формула танланишига кўра $\vdash\mathbf{A}$, аммо $\underset{(I)}{\nvdash}\mathbf{A}$ дир. У ҳолда $\not\models\mathbf{A}$ бўлиб, шундай тизма $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ топиладики, $\mathbf{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ бўлади. **A** формулани МКНФ га ёяйлик.

$$\mathbf{A}(A_1, \ldots, A_n) \equiv (A_1^{\alpha_1} \vee A_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n}) \wedge (\mathbf{C}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{C}_k)$$

бўлиб, бунда $\mathbf{C}_i (i = \overline{1,k})$ тўлиқ элементар йиғинди, A^α эса $\alpha = 1$ бўлганда $\rceil A$, $\alpha = 0$ бўлганда A ни билдиради. $\underset{(II)}{\vdash}\mathbf{A}$ бўлгани учун исботланган леммага асосан $\underset{(II)}{\vdash} (A_1^{\alpha_1} \vee A_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n}) \wedge (\mathbf{C}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{C}_k)$ бўлади. Унга $\wedge$ ни йўқотиш қоидасини қўлласак, $\underset{(II)}{\vdash}\mathbf{C}_i (i = \overline{1,k})$ ва

$$\underset{(II)}{\vdash} A_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n} \qquad (*)$$

ҳосил бўлади. $A_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n}$ формула $A_i = \alpha_i \ (i = \overline{1,n})$ бўлганда 0 қиймат қабул қилади, яъни у умумқийматли формула эмас, ва демак,

$$\underset{(II)}{\nvdash} A_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee A_n^{\alpha_n} \qquad (**)$$

бўлади. (*) ва (**) лардан кўринадики, (I) дан келтириб чиқарилмайдиган **A** формулани аксиома сифатида (I) га киритсак, ҳосил бўлган (II) аксиомалар системаси зиддиятли система бўлар экан. Демак, жумлалар ҳисоби тор маънода тўлиқ экан.

4-таъриф. Жумлалар ҳисобининг формулалари учун шундай алгоритм[1] (йўл, усул, метод, қоида) мавжуд бўлсаки, мазкур алгоритм ёрдамида ҳар бир формула жумлалар ҳисобида исботланувчи (теорема) ёки

---

[1] „Алгоритм“ тушунчаси V бобда батафсил қаралади.

исботланувчи эмас эканлигини кўрсатиш мумкин бўлса, у ҳолда жумлалар ҳисоби учун исботлаш масаласи *алгоритмик ечилувчи* дейилади

10-теорема. *Жумлалар ҳисоби формулалари учун исботланиш масаласи алгоритмик ечилувчидир.*

Исботи. **А** жумлалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлсин. Жумлалар ҳисоби кенг маънода тўлиқ бўлиши учун, маълумки, жумлалар алгебрасининг ҳар бир умумқийматли формуласи исботланувчи (келтириб чиқарилувчи) бўлиши керак. Шундай қилиб, **А** формула жумлалар ҳисобида исботланувчи ёки исботланувчи эмас эканини кўрсатиш учун у умумқийматли ёки умумқийматли эмас эканлигини кўрсатиш кифоядир. Ҳар қандай **А** формула умумқийматли ёки умумқийматли эмаслигини кўрсатадиган алгоритм мавжудлиги маълум—бу формуланинг ростлик жадвалини тузиш ёки унинг МДНФ сини қуришдир: ҳар иккала мазкур алгоритм чекли қадамдан сўнг қаралаётган саволга жавоб беради.

Машқлар

1. Қуйидаги формулалар жумлалар ҳисобида теорема эканлигини кўрсатинг:

а) $A\vee B\to(A\wedge(A\vee B)\to A)$;
б) $\neg(B\downarrow A)\to\neg A$;
в) $A\wedge C\vee B\wedge C\to C$;
г) $A\to(B\to A)\wedge\neg\neg A$;
д) $A\to\neg\neg A$.

2. Қуйидаги формулаларни дедукция теоремасига асосан исботланг:

а) $(B\to C)\to(A\wedge C\vee B\to C)$;
б) $\neg(A\vee B)\to\neg A$;
в) $A\wedge B\to(A\to C\vee A)$;
г) $(B\to\neg\neg A)\to(A\vee B\to\neg\neg A)$;
д) $((A\to B)\to\neg AB)\to((A\to B)\to\neg A)$.

3. 7-§ даги 6-теоремада келтирилган (V)—(XVIII) мегатеоремаларни исботланг.

4. I бобнинг 5-§ ида келтирилган умумқийматли формулалар ҳосил қилиш қоидаларига асосланган ҳолда жумлалар ҳисобининг ҳосилавий келтириб чиқариш қоидаларини асосланг.

III БОБ
ПРЕДИКАТЛАР АЛГЕБРАСИ

1-§. Предикатлар

Биз юқорида танишган жумлалар алгебраси фикрлашдаги кўпгина қонунларни ўз ичига олган бўлса-да, аммо тўплам элементларининг хоссалари ва элементлари орасидаги муносабатларни ифода қилишга, англатишга яроқсиздир. Жумлалар алгебрасида ҳар бир содда жумла ички тузилишига кўра эмас, балки абсолют рост ёки ёлғон қийматга эга бўлиш хоссасига кўра ўрганилади. Кўпгина математик мулоҳазаларда тўплам элементларининг берилган хоссаларидан ёки улар орасидаги муносабатлардан бошқа хосса ёки муносабатлар келиб чиқишини кўрамиз. Масалан, „(A): ҳар қандай дифференциалланувчи функция узлуксиз функция бўлади, $(B): y=\int_{1}^{x}\frac{dt}{t}$ функцияси дифференциалланувчидир, ва демак, (C): берилган функция узлуксиздир" деган мураккаб мулоҳазани, гарчи унинг кўриниши (A), $(B) \models (C)$ каби бўлса-да, жумлалар алгебрасида бундай мантиқий натижа (келтириб чиқариш) рост бўлавермайди. Бу мулоҳазада функциянинг дифференциалланувчи бўлиш хоссаси билан узлуксиз бўлиш хоссаси орасидаги боғланиш қўлланилаётир.

Ўзбек тилининг барча дарак гаплари тўпламида бир турдаги дарак гаплар учрайди. Буни бир неча мисолларда ёритайлик.

(1): „1—туб сон",
„2—туб сон",
„3—туб сон",
. . . .

Кўриниб турибдики, бу дарак гапларнинг ҳар бири рост ёки ёлғон жумлалар бўлиб, улар тузилиши бўйича бир хилдир. Бундан ташқари бу жумлалар таркибида қандайдир (бу ерда натурал сонлар) тўплам элементлари қатнашаётир.

(2): „1 1 дан кичик",
„1 2—"——"——",
„1 3„————"———"
. . . .
„2 1—„—„—„"
„2 2—„—„—„„"
„2 3—„—„—„„"
. . . .

(3): „$1+1=1$",
„$1+1=2$",
„$1+1=3$",
. . . .
„$1+2=1$",
„$1+2=2$",
„$1+2=3$",
. . . .

(4): „Аҳмад Саиднинг акаси"
„Эркин Каримнинг акаси",
„Маҳмуд Раънонинг акаси",
. . . .

(бунда Аҳмад, Саид, Эркин, Карим, Маҳмуд, Раъно ва ҳоказолар муайян одамлар).

(5): „Маълумотнома" („Справка")—кунчиликка маълум ҳужжатдир. Масалан, талабаларга бериладиган одатдаги маълумотнома нусхасини олайлик.

МАЪЛУМОТНОМА

Берилди ушбу маълумотнома шу ҳақдаки, ________ талаба-

________ институти ______________ факульте-
нинг ф. ва и.

тининг ______ курсида ўқийди.

Факультет декани ____________

Юқоридаги ишқоғоз (форма) да бешта „бўш жой" бўлиб, улар муайян номлар (маълум бир тўпламлар элементлари) билан тўлдирилмагунча, бу ишқоғоз рост ёки ёлғон бўлган жумлага (ҳақиқий ёки қалбаки маълумотномага) айланмайди.

Ўз-ўзидан равшанки, (1) да келтирилган бир турдаги жумлаларни битта форма орқали ёзиш мумкин — бу форма „x — туб сон" дир. Мазкур формада қатнашган x натурал сонлар тўпламидан қиймат қабул қилувчи предмет ўзгарувчидир.

(2), (3) ва (4) да келтирилган бир турдаги жумлаларни эса мос равишда „$x < y$" („x y дан кичик"), „$x + y = z$" ва „x y нинг акаси" формаларга мужассамлаштириш мумкин. (5) мисолда келтирилган ишқоғоз (форма) даги биринчи „бўш жойни" x, иккинчисини y, учинчисини z, тўртинчисини t ва ниҳоят, бешинчисини u билан белгиласак, у ҳолда бу ишқоғоз ҳам ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган формага (дарак гапга) айланади. Бундай дарак гаплар математик мантиқда жумлавий форма ёки предикат деб аталади. „x — туб сон" жумлавий форма бир ўзгарувчили, „$x < y$" ва „x y нинг акаси" жумлавий формалар икки ўзгарувчили, „$x + y = z$" форма эса уч ўзгарувчи эканлигини сезиш қийин эмас. Бундан ташқари, (1) — (3) ларнинг ҳар бирида чексиз кўп бир турдаги жумлалар қатнашган бўлса, (4) ва (5) даги бир турдаги жумлалар сони чеклидир.

Юқорида келтирилган формаларга бошқа нуқтаи назардан қараш — уларнинг ҳар бирини махсус функциялар деб қараш ҳам мумкин.

V — илгаригидек барча жумлалар тўплами бўлсин. $f: N \to V$ функция натурал сонларни жумлалар тўпламига қуйидагича акслантирсин:

(1'): 1 ⟶ „1 — туб сон" (ёлғон),
2 ⟶ „2 — туб сон" (рост),
3 ⟶ „3 — туб сон" (рост),
4 ⟶ „4 — туб сон" (ёлғон),
. . . .

$f: N^2 \to V$ функция натурал сонлар тўплами декарт квадратини V тўпламга қуйидагича акслантиради:

(2'): (1, 1) ⟶ „1 1 дан кичик" (ёлғон),
(1, 2) ⟶ „1 2" —"—"— (рост),
(1, 3) ⟶ „1 3" —"—"— (рост),
. . . .
(2, 1) ⟶ „2 1" —"—"—"— (ёлғон),
(2, 2) ⟶ „2 2" —"—"—"— (ёлғон),
. . . .

$f: N^3 \to V$ функция натурал сонлар тўплами декарт кубини V тўпламга қуйидагича акслантирсин:

$$
\begin{aligned}
(3')\text{:}\ & (1, 1, 1) \longrightarrow \text{„}1+1=1\text{“ (ёлғон)},\\
& (1, 1, 2) \longrightarrow \text{„}1+1=2\text{“ (рост)},\\
& (1, 1, 3) \longrightarrow \text{„}1+1=3\text{“ (ёлғон)},\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& (1, 2, 1) \longrightarrow \text{„}1+2=1\text{“ (ёлғон)},\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Бундай функциялар пропозиционал функциялар ёки мантиқий функциялар деб аталади.

Шундай қилиб, M — предмет соҳа, V — жумлалар тўплами бўлса, n-ар (аргументли) ёки n ўринли пропозиционал функция деб

$$f: M^n \to V$$

акслантиришга айтилади; бунда M^n — предмет соҳанинг декарт n-даражаси, f нинг қийматлари бир турдаги жумлалардир, n-ар пропозиционал функциянинг M^n га тегишли бўлган $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-ликдаги қиймати сифатида шу n-ликка мос келувчи муайян жумлани (бир турдаги жумлаларнинг бирини) эмас, балки унинг қиймати (рост ёки ёлғон) ни олиш мумкин. Бу ҳолда пропозиционал функцияни $f: M^n \to \{1, 0\}$ (бунда 1 „рост“ ни, 0 эса „ёлғон“ ни билдиради) акслантириш сифатида қабул қилиш мумкин. n-ар f пропозиционал функция ўзи аниқланган M^n тўпламнинг характеристик функцияси деб ҳам аталади.

Таъриф. M тўпламда аниқланган *n ўринли предикат* деб ихтиёрий n-ар $f: M^n \to \{1, 0\}$ пропозиционал функцияга айтилади.

$n = 0$ бўлганда 0 ўринли предикат жумладан иборатдир. n ўринли предикатларни $R^{(n)}$, $Q^{(n)}$, $S^{(n)}$, ..., $R_1^{(n)}$, $R_2^{(n)}$, ... лар каби белгилаймиз (баъзан юқори индексларни ёзмасдан). $R^{(n)}$ — n ўринли предикат, x_1, x_2, ..., x_n — унда қатнашган предмет ўзгарувчилар бўлса, у ҳолда у $R^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ каби ёзилади.

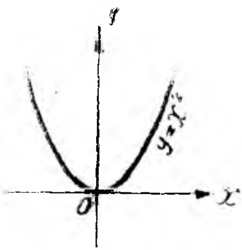
Бўш бўлмаган M тўпламда берилган n ўринли предикат шу тўпламда аниқланган n-ар муносабат билан чамбарчас боғлиқдир: ҳар бир предикат битта муносабатни, ҳар бир муносабат ҳам битта предикатни белгилайди.

$\widehat{R} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in M,\ i = \overline{1, n};\ R^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) = 1\} \subseteq M^n$ M тўпламда аниқланган n-ар муносабат $R^{(n)}$ предикатнинг M^n тўпламдаги ростлик соҳаси билан устма-уст тушади, яъни n ўринли предикат n-ар муносабатни аниқлайди. Аксинча, $S \subset M^n$ муносабат n ўринли предикатни аниқлайди: бунда $(a_1, \ldots, a_n) \in S$ бўлса, $S^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) =$ рост, $(a_1, \ldots, a_n) \overline{\in} S$ бўлса, $S^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) =$ ёлғон деб олиш кифоядир. Равшанки, „предикат — муносабат — предикат" ёки „муносабат — предикат — муносабат" ўзаро ўтишлар бир қийматлидир.

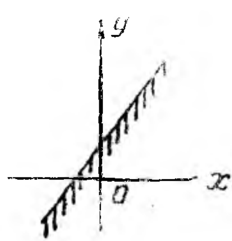
M чекли тўплам бўлса, унда аниқланадиган барча n ўринли предикатлар тўплами ҳам чекли бўлиб, уларнинг ҳар бирини чекли жадвал ёрдамида ифодалаш мумкин.

Агар M саноқли ва дискрет тўплам бўлса, у ҳолда унда аниқланган бир, икки ва ҳ. к. ўринли предикатларни чексиз жадвал ёрдамида бериш мумкин. Аммо M саноқли бўлмаган чексиз тўплам ёки узлуксиз тўплам бўлса, у ҳолда унда аниқланадиган предикатларни жадвал ёрдамида бериш ҳақида гап ҳам бўлиши мумкин эмас. Шундай бўлишига қарамасдан, баъзи бир икки ўринли предикатлар ростлик соҳасининг геометрик тасвирини келтириш мумкин. Масалан, ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган „$y = x^2$" предикатнинг ростлик соҳаси 7-шаклда кўрсатилган параболани ташкил этувчи барча нуқталар тўпламидан иборатдир. „$y < 2x + 1$" предикатнинг ростлик соҳаси эса $y = 2x + 1$ тўғри чизиқнинг остида ётган ярим текисликдир (8-шакл).

Бир тўпламда берилган иккита предикатнинг конъюнкцияси бу предикатларнинг иккаласи хам рост бўл-



7-шакл.



8-шакл.

ганда рост, қолган ҳолларда ёлғон бўлувчи янги предикат бўлади. Худди шунга ўхшаш предикатларнинг дизъюнкцияси, импликацияси, эквиваленцияси ва инкори ҳам янги предикатларни ҳосил қилади. Ҳосил бўлган янги предикатларнинг ростлик соҳалари берилган предикатлар ростлик соҳаларининг кесишмаси, бирлашмаси ва шу кабилар бўлиши аниқдир.

Масалан, $P(x)$: „x — туб сон", $R(x)$: „x — жуфт сон" предикатларининг конъюнкцияси $T(x) = P(x) \wedge \wedge R(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси $\{2\}$ тўпламдир.

2-§. Кванторлар

Математик мулоҳазаларда (таъриф, теорема ва ҳ. к.) „исталган", „барча", „ҳар бир", „топилади", „мавжуд" каби сўзлар учрайди. Масалан, функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифини олайлик:

„Исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сони топилсаки, $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада узлуксиз дейилади". Бу таърифда учраган „исталган", „барча" сўзлари бир хил мазмунга эга бўлиб, улар математик мантиқда „умумийлик квантори" деб, „топилади" (унга мазмундош бўлган „мавжуд", „бор" ва ҳ. к.) сўзи эса „мавжудлик квантори" деб аталади. Бу кванторлар мос равишда $\forall$ ва $\exists$ белгилари орқали ифодаланади.

Юқоридаги таъриф қуйидагича ёзилади:

$$f(x) — \text{узлуксиз} \sim \forall\varepsilon \exists\delta [\varepsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge \forall x (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0| < \varepsilon)].$$

Алгебрада кўп учрайдиган ассоциативлик, коммутативлик, дистрибутивлик қонунларида ҳам кванторлар учрайди:

(I). $\forall a \forall b \forall c [(a + b) + c = a + (b + c)]$,

(II). $\forall a \forall b [a + b = b + a]$,

(III). $\forall a \forall b \forall c [a(b + c) = ab + ac]$.

Туб сонлар тўпламининг чексизлиги ҳақидаги Евклид теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$\forall x \exists y [P(y) \wedge (x < y)],$$

бунда $x, y \in N$, $P(t)$: „t — туб сон“ бўлиб, теорема таркибида умумийлик ва мавжудлик кванторлари қатнашганлигини кўрамиз.

Алгебранинг асосий теоремаси

$$\forall a_0 \forall a_1 \ \ldots \ \forall a_n [a_0 \neq 0 \wedge n \geqslant 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists x (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ \ldots \ + a_{n-1} x + a_n = 0)]$$

да ҳам қатор кванторлар тенглама параметрлари (коэффициентлари) ва ўзгарувчи x ни боғланганлигини кўрамиз.

Кванторлар предикат таркибидаги предмет ўзгарувчиларига қўлланилади — бундай ўзгарувчилар боғланган (квантор билан боғланган) ўзгарувчилар дейилади. $R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ предикатда $x_1, \ldots, x_n$ лар кванторлар билан боғланмаган бўлса, улар эркин предмет ўзгарувчилар дейилади. Ушбу предикатда фақат x_1 ни квантор билан боғласак, қолган ўзгарувчилар эркинлигича қолаверадилар ва натижада $n-1$ ўринли

$$Q^{(n-1)}(x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_1) R^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

предикат ҳосил бўлади; бунда (x_1) билан $\forall x_1$ ёки $\exists x_1$ белгиланган.

$R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ предикатдаги ҳар бир эркин ўзгарувчини квантор билан боғласак, натижада жумла ҳосил бўлади:

$$(x_1)(x_2) \ \ldots \ (x_n) R^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Масалан: $P(x, y)$: „$y \vdots x$“ предикатда x ўзгарувчига $\forall$ кванторни қўлласак, $P_1(y) \equiv \forall x P(x, y)$: „$y$ ҳар қандай x натурал сонга бўлинади“ деган, $P(x, y)$ да y ни $\exists$ квантор билан боғласак, $P_2(x) \equiv \exists y P(x, y)$: „$x$ сонига бўлинадиган y натурал сон мавжуд“ — деган бир ўринли предикатлар ҳосил бўлса, x ва y ларнинг ҳар иккаласини кванторлар билан боғласак, жумлалар ҳосил бўлади. Масалан, $\forall x \exists y P(x, y)$: „ҳар бир x натурал сонга бўлинадиган y натурал сон мавжуд“ — деган жумладир. Ундан ташқари

$$\forall x \forall y P(x, y), \quad \exists x \forall y P(x, y), \quad \exists x \exists y P(x, y),$$
$$\exists y \forall x P(x, y), \quad \forall y \exists x P(x, y)$$

лар ҳам жумлалардир. Бу жумлалар рост ёки ёлғон қийматга эгадир. Масалан, $\exists x \forall y P(x, y)$ жумла: „шундай x натурал сон мавжудки, ҳар бир y натурал сон унга бўлинади“ — ростдир.

3-§. Предикатлар алгебрасининг формулалари ва уларнинг қийматлари

Дастлаб предикатлар алгебрасининг формулаларини, сўнгра эса предикатлар аниқланган тўплам берилганда формулаларнинг қийматини аниқлаймиз.

Предикатлар алгебрасининг алфавити қуйидаги белгилардан иборат:

1. $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — предмет ўзгарувчилар,
2. $R_0^{(n_0)}, R_1^{(n_1)}, \ldots, R_i^{(n_i)}, \ldots$ — предикат белгилар,
3. $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \neg$ — мантиқий белгилар,
4. $\forall, \exists$ — кванторлар,
5. (,) — қавслар (техник белгилар)*.

Предикат белгилар тўплами одатда сигнатура дейилади ва σ билан белгиланади. $n_0, n_1, \ldots, n_i, \ldots$ сонлар кетма-кетлиги предикатлар алгебрасининг тури дейилади. Равшанки, барча жумлалар 0 ўринли предикатлар сифатида предикатлар алгебрасига киради.

1-таъриф. 1°. а) $R_i^{(n_i)}$ предикат белги, $n_i = 0$ бўлса, у холда $R_i^{(n_i)}$ формула ҳисобланади;

б) $R_i^{(n_i)}$ предикат белги, $n_i > 0$ ҳамда $x_1, \ldots, x_{n_i}$ лар предмет ўзгарувчилар бўлса, у ҳолда $R_i^{(n_i)}(x_1, \ldots, x_{n_i})$ формула бўлади (бу формулада барча ўзгарувчилар эркиндир).

2°. **A** ва **B** лар формула бўлса, у ҳолда (**A** $\wedge$ **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\rightarrow$ **B**), (**A** $\sim$ **B**) ва ($\neg$**A**) лар ҳам формулалардир (бу формулаларда **A** ва **B** формулаларнинг эркин ўзгарувчилари эркин бўлади).

3°. Агар **A**$(x_1, \ldots, x_n)$ формула бўлиб, унинг барча эркин ўзгарувчилари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар тўпламига тегишли бўлса, у ҳолда $\forall x_i$ **A**$(x_1, \ldots, x_n)$ ва $\exists x_i$ **A**$(x_1, \ldots, x_n)$ лар ҳам формула бўлади (бу формулаларда x_i боғлиқ предмет ўзгарувчи бўлиб, $\forall$ ёки $\exists$ кванторлар **A** формулада x нинг эркин бўлиб қатнашганларигагина таъсир қилади. **A** формуладаги x_i дан бошқа эркин ўзгарувчилар ҳосил бўлган формулаларда ҳам эркин бўлиб қолаверади.

4°. Бошқа формулалар йўқ.

---

* Предикат белгилар тўпламининг қуввати саноқлидан катта бўлмаган ҳол қаралаётир.

1°-бандда киритилган формулалар атомлар, эркин ўзгарувчи қатнашмаган формулалар эса ёпиқ формулалар деб аталади. Баъзан ёпиқ формулалар тасдиқлар (ёки даъволар) деб ҳам аталади (тасдиқлар синфига барча жумлалар ҳам киради).

1-мисол. (а) $< R_1, R_2^{(3)}, R_3^{(2)} >$ сигнатурада қуйидаги формулани олайлик:

$$\exists x_3 (R_2^{(3)} (x_3, x_2, x_4) \wedge R_1 \rightarrow \forall x_2 R_3^{(2)} (x_2, x_3)). \qquad (1)$$

Бу формулада қайси квантор қайси ўзгарувчини боғлаганлигини чизиқлар ёрдамида осон кўрсатиш мумкин:

$$\exists x_3 (R_2^{(3)} (x_3, x_2, x_4) \wedge R_1 \rightarrow \forall x_2 R_3^{(2)} (x_2, x_3)). \qquad (*)$$

(*) дан кўринадики, (1) формулада x_2 ва x_4 ўзгарувчилар биттадан жойда эркин ҳолда, x_2 бир жойда боғланган ҳолда, x_3 эса ҳамма жойда боғланган ҳолда қатнашган дир. Шундай қилиб, предмет ўзгарувчи формулада ҳам эркин, ҳам боғланган ҳолда қатнашиши мумкин экан

(б). $< P^{(1)}, Q^{(2)}, R^{(2)}, \ldots >$ сигнатурадаги

$$\forall x (P^{(1)} (x) \wedge \exists x Q^{(2)} (x, z) \rightarrow \exists y R^{(2)} (x, y)) \vee \vee Q^{(2)} (z, x) \qquad (2)$$

формуланинг $\exists x Q^{(2)} (x, z)$ формулаостисида x боғлиқ, z эса эркин ўзгарувчи $\exists y R^{(2)} (x, y)$ формулаостида эса y боғланган x эркин ўзгарувчи бўлсада, аммо шу x берилган формуланинг ўзида $\forall x$ кванторн билан боғлангандир. $\forall x$ квантор яна формула таркибида қатнашган $P^{(1)} (x)$ формулаостидаги x нинг ҳам боғланганлиги равшан. $Q^{(2)} (z, x)$ формулаостиси ҳеч қайси кванторнинг таъсирида бўлмаганлиги учун ундаги z ва x лар эркин ўзгарувчилардир. Шундай қилиб, чизиқлар ёрдамида юқорида айтилганларни қуйидагича кўрсатиш мумкин:

$$\forall x (P^{(1)} (x) \exists \wedge x Q^{(2)} (x, z) \rightarrow \exists y R^{(2)} (x, y)) \vee Q^{(2)} (z, x).$$

(1) ва (2) формулаларда эркин предмет ўзгарувчилар қатнашганлиги учун, табиий, улар ёпиқ формула эмас. Шуни ҳам қайд қилиб ўтамизки, (1) формулани x_2 ва x_4 эркин ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган икки ўринли предикат деб қараш мумкин:

$$T(x_2, x_4) \stackrel{\circ}{=} \exists x_3 (R_2^{(3)}(x_3, x_2, x_4) \wedge R_1 \to$$
$$\to \forall x_3 R_3^{(2)}(x_2, x_3)),$$

(2) формулани эса x ва z эркин ўзгарувчили

$$S(x, z) \stackrel{\circ}{=} \forall x (P^{(1)}(x) \wedge \exists x Q^{(2)}(x, z) \to$$
$$\to \exists y R^{(2)}(x, y)) \vee Q^{(2)}(z, x)$$

предикат деб қараш мумкин.

(с). $< R_2^{(3)}, R_1, R_3^{(2)}, \ldots >$ сигнатурадаги

$$\forall x_2 (\exists x_3 R_2^{(3)}(x_3, x_2, x_3) \wedge R_1 \to \forall x_4 R_3^{(2)}(x_2, x_4))$$

формулада эркин предмет ўзгарувчилар бўлмагани учун бу формула ёпиқ (тасдиқ) дир.

Қулайлик учун предмет ўзгарувчиларни $x, y, z, t, \ldots$, предикат белгиларни эса $P, Q, R, \ldots$ каби ёзамиз.

(I). $\forall x (F(x, x) \wedge \exists y R(x, y, z) \to \exists z Q(x, y, z)) \vee$
$\vee F(z, y)$.

(II). $\forall t (F(t, t) \wedge \exists x R(t, x, z) \to \exists u Q(t, y, u)) \vee F(z, y)$,

(III). $\forall y (F(y, y) \wedge \exists x R(y, x, z) \to \exists z Q(y, x, z)) \vee$
$\vee F(z, y)$.

(I) ва (II) формулаларни бирини иккинчисидан боғланган ўзгарувчиларни қайта белгилаш ёрдамида ҳосил қилиш мумкинлиги шубҳасиздир. Бундай формулалар *ўзаро ўхшаш* ёки *конгруэнт* формулалар дейилади.

(III) формула (I) ва (II) формулаларнинг ҳеч бирига конгруэнт эмаслиги аёндир.

Предикатлар алгебрасида **A** формула **A**(x) кўринишида ёзилган бўлса, унда x эркин ўзгарувчи сифатида қатнашади деб ҳисобланади.

Юқорида битта формуланинг ўзига ўзгарувчи ҳам боғланган, ҳам эркин ҳолатда қатнашиши мумкинлиги ҳақида айтилган эди. Яна қуйидаги формулаларга эътибор берайлик.

$$P(x) \wedge (A \to \exists x Q(x, y)) \vee Q(x, z) \wedge P(z)$$

формулада x икки жойда эркин, бир жойда боғлиқ ҳолда қатнашган бўлса,

$$\forall x(P(x) \wedge (A \to \exists x Q(x, y)) \vee Q(x, z)) \wedge P(x)$$

формулада эса x бир жойда эркин, қолган жойларда боғлиқдир.

$\mathbf{A}(x)$ формулада x камида битта жойда эркин қатнашган бўлсин. Баъзан уни бошқа предмет ўзгарувчи билан алмаштириш зарурати туғилади. Қандай шартлар бажарилганда $\mathbf{A}(x)$ формуладан $\mathbf{A}(t)$ формулани ҳосил қилиш мумкин эканлигини кўрсатиш учун формуладаги предмет ўзгарувчини қайта номлаш қоидаси тушунчаси ва унга боғлиқ бўлган бир предмет ўзгарувчи иккинчи ўзгарувчи учун эркин бўлиши тушунчаси билан танишамиз.

(а). Агар x $\mathbf{A}$ формулада боғланган, t $\mathbf{A}(x)$ да қатнашмаган ўзгарувчи ёки x $\mathbf{A}(x)$ да t ни боғловчи кванторнинг таъсир соҳасида қатнашмаган бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}(x)$ формуладаги x боғлиқ ўзгарувчини t билан алмаштириш натижасида $\mathbf{A}(t)$ формулани ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳолда $\mathbf{A}(t)$ формула $\mathbf{A}(x)$ формуладан боғланган ўзгарувчи (x) ни қайта номлаш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган дейилади. Ушбу қоида баъзан, „$S_{\forall}$-“ ёки „$S_{\exists}$-қоида“ деб ҳам юритилади (ҳатто, қисқалик учун „$S_{\forall\exists}$-қоида“ деб ҳам атаймиз).

2-мисол. $\mathbf{A}(x) \equiv \forall x(\exists y P(x, y) \to Q(x, y, z))$ бўлса, мазкур формулага $S_{\forall}$-қоидани қўллаш натижасида

$$\mathbf{A}(t) \equiv \forall t(\exists y P(t, y) \to Q(t, y, z))$$

ҳосил бўлади.

(б). Агар x $\mathbf{A}$ да эркин ўзгарувчи сифатида қатнашган булса (камида битта жойда), у ҳолда x нинг эркин қатнашган барча жойларида уни t билан алмаштириб $\mathbf{A}(t)$ формулани ҳосил қилиш мумкин.

3-мисол. $\mathbf{A}(x) \equiv \forall x \exists y P(x, y) \vee Q(x, y, z) \to \forall y P(x, y)$ бўлса, $\mathbf{A}(t) \equiv \forall x \exists y P(x, y) \vee Q(t, y, z) \to \forall y P(t, y)$ бўлади.

Формуладаги эркин предмет ўзгарувчини қайта номлашда қуйидаги ҳолларга эътибор бериш лозим:

($б_1$). x эркин ўзгарувчи бўлсада, аммо бошқа бирор ўзгарувчи, масалан y ни боғлаган бирор кванторнинг таъсир соҳасида бўлиши мумкин;

($б_2$). x эркин ўзгарувчи бўлиб, ҳеч қандай кванторнинг (бошқа ўзгарувчиларни боғловчи) таъсир соҳасида жойлашмаган бўлиши мумкин.

$(б_1)$ ҳол яна иккита ҳолга ажралади:

$(б_1)'$. x ни y билан алмаштириш (яъни $t \equiv y$) натижасида $\mathbf{A}(y)$ формула ҳосил бўлади.

Бу ҳолда y ўзгарувчи x учун эркин эмас деб ҳисобланади.

$(б_1)''$. x ни t $(\neq y)$ билан алмаштириш натижасида $\mathbf{A}(t)$ формула ҳосил бўлади. Бу ҳолда t ўзгарувчи x учун эркин деб ҳисобланади.

4-мисол. $P(x, y) \to \forall yQ(x, y, z) \vee \forall x \exists zP(x, z)$ формулада x нинг эркин қатнашган жойларига (бу формулада x икки жойда эркин қатнашган) y ни қўйсак,

$$P(y, y) \to \forall yQ(y, y, z) \vee \forall x \exists zP(x, z)$$

формула ҳосил бўлади Табиий, бу ҳолда y ўзгарувчи x учун эркин эмас, чунки x ни y билан алмаштирилгач, y ўзгарувчи фақат бир жойда эркин бўлиб қолади (берилган формуланинг ўрта қисмида эркин эди, аммо ҳосил бўлган формулада ўша жойда y боғлиқдир).

5-мисол $\mathbf{A}(x) \equiv \forall x \exists yP(x, y) \vee Q(x, y, z) \to \to \forall y P(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{A}(t) \equiv \forall x \exists y P(x, y) \vee Q(t, y, z) \to \forall yP(t, y)$$

бўлиб, бунда t x учун эркиндир, чунки берилган формулада икки жойда эркин бўлган x ўрнига t қўйилиши натижасида ҳосил бўлган $\mathbf{A}(t)$ формуланинг ўша жойларида t ҳам эркиндир (икки жойда).

Шундай қилиб, $\mathbf{A}(x)$ формуладаги x ўзгарувчи учун қандай шартлар бажарилганда t ўзгарувчи x учун эркин деб ҳисобланади? Фараз қилайлик, $\mathbf{A}(x)$ формулада x ўзгарувчи m $(m \geq 1)$ жойда эркин қатнашган бўлсин (бир неча бошқа жойларда x боғланган бўлиши ҳам мумкин)

$\mathbf{A}(x)$ формулада x нинг эркин қатнашган жойларида уни t билан алмаштирсак, $\mathbf{A}(t)$ формула ҳосил бўлади. Агар $\mathbf{A}(x)$ да x қаерда эркин қатнашган бўлса, $\mathbf{A}(t)$ да t ҳам ўша жойларда эркин қатнашса (m та жойда), у ҳолда t ўзгарувчи $\mathbf{A}(x)$ формулада x учун эркин дейилади ва $\mathbf{A}(x)$ дан $\mathbf{A}(t)$ га ўтиш предмет ўзгарувчи учун эркин ўрнига қўйиш қоидасининг натижаси ҳисобланади ёки $\mathbf{A}(t)$ формула $\mathbf{A}(x)$ дан эркин предмет ўзгарувчи (x) ни қайта номлаш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган дейилади.

Ушбу қоидани баъзан „S^t_x-қоида“ деб ҳам атаймиз.

Юқорида келтирилган (I) формулада z ўзгарувчи эркин қатнашади, аммо z ўзгарувчи x учун ҳам, y учун ҳам эркин эмас. Ҳар бир ўзгарувчи ўзи учун эркин бўлиши, формулада қатнашмаган ўзгарувчи ҳар бир ўзгарувчи учун эркин бўлиши равшандир.

Предикатлар алгебраси формуласининг қийматини аниқлаш учун сигнатурадаги ҳар бир предикатга бўш бўлмаган тўпламда аниқланган предикатни мос қўйиш керак (бу предикатларни ҳам сигнатурадаги предикат белгилари билан белгилаш мумкин).

Агар M тўпламда сигнатурадаги ҳар бир предикат аниқланган бўлса, у ҳолда уни сигнатурадаги *модель* деб аталади ва

$$\mathbf{M} = < M;\ R_0,\ R_1,\ \ldots > \qquad (*)$$

орқали белгиланади.

Предикатлар алгебраси сигнатурасида бирор (*) модель берилган бўлсин. Бу моделда формулаларнинг қийматини аниқлаймиз.

Формулалаги эркин ўзгарувчилар M тўпламдан қиймат қабул қилади, 0 ўринли предикатлар (яъни жумлалар) эса 1 ёки 0 қиймат қабул қилади. Шундай қилиб, формула таърифининг 1°- бандида киритилган формулалар моделнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Таърифнинг 2°-бандида киритилган формулалар қийматлари жумлалар алгебрасидагидек аниқланади. 3°-банд бўйича ҳосил қилинган $\forall x_i \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ формуласи $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар мос равишда $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ қиймат қабул қилганда $\mathbf{A}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ формула x_i ўзгарувчи M тўпламнинг ҳар бир элементини қиймат сифатида қабул қилганда рост бўлса рост, қолган ҳолларда эса ёлғон қиймат қабул қилади, деб ҳисобланади. $\exists x_i \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ формула x_i ўзгарувчи M тўпламдан баъзи бир қийматлар қабул қилганда рост бўлса рост, қолган ҳолларда ёлғон бўлади, деб ҳисобланади.

Бир сигнатурадаги икки модель бир-биридан танланган тўпламлар билан ёки сигнатурадаги предикатларнинг аниқланиши билан фарқланади.

Ҳар бир ёпиқ формула берилган моделда рост ёки ёлғон қийматга эга бўлади. Берилган ёпиқ формула $\mathbf{M}$ моделда рост бўлиши

$$\mathbf{M} \models \mathbf{A}$$

каби белгиланади. Берилган M моделда рост бўлган ёпиқ формулалар тўплами M моделнинг элементар назарияси дейилади ҳамда $\mathrm{Th}(M)$ билан белгиланади.

Баъзан берилган сигнатурадаги моделларнинг бирор синфи — K ни қараш мумкин. K синфдаги ҳар бир моделда рост бўлган ёпиқ формулалар тўплами шу синфнинг *элементар назарияси* дейилади ва $\mathrm{Th}(K)$ каби белгиланади. Бундан

$$\mathrm{Th}(K) = \bigcap_{M \in K} \mathrm{Th}(M)$$

эканлиги равшандир.

Масалан, барча группаларда рост бўлган ёпиқ формулалар (жумлалар) тўплами группалар назарияси, барча чекли группада рост бўлган ёпиқ формулалар тўплами чекли группалар назарияси бўлади.

Биз юқорида предикат ва кванторлар билан танишганимизда қаралган муайян предикатлар қайси тўпламда қандай аниқланганлиги ўз-ўзидан кўриниб турган эди. Бўш бўлмаган тўпламда чекли ёки чексиз сондаги предикатлар аниқланган системани модель деб атадик. Қуйида моделларнинг баъзи бир намуналарига тўхтаб ўтамиз.

Натурал сонлар* тўплами N да

$$S^{(3)}(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x + y = z \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x + y \neq z \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$P^{(3)}(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ агар } xy = z \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } xy \neq z \text{ бўлса} \end{cases}$$

предикатларни аниқласак, улар ёрдамида $< N; S^{(3)}, P^{(3)} >$ ёки, индексларни ташлаб ёзсак, $< N; S, P >$ модель ҳосил бўлади. Бу моделда баъзи формулаларнинг мазмунини кўриб ўтайлик.

Қисқалик учун $\forall x \forall y \ldots \forall t$ ўрнига $\forall x y \ldots t$ деб ёзишга келишамиз.

(I). $\forall xyz\, [S(x, y, z) \to S(y, x, z)]$;

(II). $\forall xyz\, [P(x, y, z) \to P(y, x, z)]$;

(III). $\forall xyzuvw\, [S(x, y, u) \wedge S(u, z, v) \wedge S(y, z, w) \to S(x, w, v)]$;

---

* $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ натурал сонлар тўплами деб ҳисобланади.

(IV). $\forall xyzuvw\,[P(x, y, u) \wedge P(u, z, v) \wedge P(y, z, w) \rightarrow P(x, w, v)]$

формулаларнинг биринчиси қўшишнинг, иккинчиси кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик), учинчиси қўшишнинг, тўртинчиси эса кўпайтиришнинг ассоциативлик хоссаларини билдиради.

(V). $\forall yS(x, y, y)$; (VI). $\forall yP(x, y, y)$

формулаларнинг ҳар бири битта эркин ўзгарувчига эгадир, шунинг учун ҳам уларни мос равишда $O(x)$ ва $E(x)$ деб белгилаш мумкин. (V) формула $x=0$, (VI) формула эса $x=1$ бўлгандагина рост бўлади. Бошқача айтганда, $O(x)$ ва $E(x)$ предикатлар натурал сонлардан 0 ва 1 ни ажратади.

(VII). $\exists tS(x, t, y)$; (VIII). $\exists tP(x, t, y)$

иккита эркин ўзгарувчига эга бўлган формулалардир. Уларнинг биринчиси „$x \leqslant y$“ ни билдирса, иккинчиси эса „$y \vdots x$“ ни билдиради.

(IX). $\exists t\,[S(x, t, y) \wedge \neg O(t)]$ формула эса „$x < y$“ муносабатни билдиради.

(I) — (IX) ларга асосланган ҳолда „туб сон“ тушунчасини ёзиш мумкин:

(X). $\neg O(x) \wedge \neg E(x) \wedge \forall u, v\,[P(u, v, x) \rightarrow E(u) \vee \vee E(v)]$.

(XI). $\exists tS(t, t, x)$; (XII). $\exists tP(t, t, x)$

формулалар мос равишда „x — жуфт сон“ ва „x — тўлиқ квадрат“ деган бир ўринли предикатларни билдирса, бу формулаларнинг инкорлари $\neg\exists t\ S(t, t, x)$ ва $\neg\exists t\ P(t, t, x)$ лар эса мос равишда „x — тоқ сон“ ва „x — тўлиқ квадрат эмас“ деган предикатлардир.

Энди берилган a, b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий каррасини англатадиган формулаларни топайлик:

(XIII). $\exists u P(m, u, a) \wedge P(m, v, b) \wedge \forall w\,[\exists t_1 P(w, t_1, a) \wedge \exists t_2 P(w, t, b) \rightarrow \exists t P(w, t, m)]$;

(XIV). $\exists uP(a, u, n) \wedge \exists vP(b, v, n) \wedge \forall w\,[\exists t_1 P(a, t_1, w) \wedge \exists t_2 P(b, t_2, w) \rightarrow \exists t P(n, t, w)]$

лар изланган формулалардир. Ушбу формулаларнинг мос равишда $\exists uP(m, u, a) \wedge \exists vP(m, v, b)$ ҳамда $\exists uP(a, u, n) \wedge \exists vP(b, v, n)$ формулаостилари берилган иккита a ва b натурал сонларнинг умумий бўлувчиси ва умумий карралисининг мавжудлигини билдирса, кейинги формулаостлари мос равишда энг катта умумий бўлувчи шу сонларнинг ҳар бир умумий бўлувчисига бўлинишини ҳамда ихтиёрий умумий катта энг кичик умумий карралига бўлинишини билдиради. Моделнинг яна бир мисоли сифатида текисликдаги нуқта ва тўғри чизиқлар геометриясини олиш мумкин. M — текисликдаги нуқталар ва тўғри чизиқлар тўплами, $T(x)$: „x — нуқта“, $E(x, y)$: „$x \in y$“ предикатлар бўлсин. Бунда „$x \in y$“ предикатнинг мазмуни қуйидагича тушунилади: агар x ва y лар нуқталар ёки тўғри чизиқлар бўлса (бир пайтда), $x \in y$ уларнинг устма-уст тушишини, уларнинг бири нуқта, иккинчиси эса тўғри чизиқ бўлса, у ҳолда $x \in y$ нуқта тўғри чизиқ устида ётишини ёки тўғри чизиқ нуқтадан ўтишини билдиради. $\neg T(x)$ предикат „x — нуқта эмас“ ёки „x — тўғри чизиқ“ деган мазмунга эгадир.

(а). $\forall xy [T(x) \wedge T(y) \wedge \neg E(x, y) \to \exists z [\neg T(z) \wedge E(x, z) \wedge \exists (y, z) \wedge \forall t [E(x, t) \wedge E(y, t) \to E(z, t)]]]$;

(б). $\forall xy [\neg T(x) \wedge \neg T(y) \wedge \exists t [T(t) \wedge E(t, x) \wedge E(t, y)] \wedge \neg \exists t [E(t, x) \wedge E(t, y)]]$;

(в). $\forall xy [T(x) \wedge \neg T(y) \wedge \neg E(x, y) \to \exists z [\neg T(z) \wedge \wedge E(x, z) \wedge \neg \exists (t) [E(t, y) \wedge E(t, z)]]]$.

Бунда (а) формула турли икки нуқтадан фақат битта тўғри чизиқ ўтишини, (б) формула ҳар қандай икки тўғри чизиқ кесишишини (хусусан устма-уст тушишини) ёки кесишмаслигини, (в) формула эса тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта берилганда, шу нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқ мавжуд эканлигини билдиради.

Алгебраик система (математик структура) тушунчаси модель тушунчасининг умумлашмасидир.

Бу тушунчани киритиш учун сигнатурага функционал белгиларни киритиб сигнатурани кенгайтирамиз. $f_j^{(m_j)}$ — m_j-ар (аргументли) функционал белги, яъни $f_j^{(m_j)}: M^{m_j} \to M$ функциянинг белгиси бўлсин. Агар $m_j = 0$ бўлса, $f_j^{(0)}$ — M тўпламнинг ажратилган (тайин) элементи бўлиб, 0-ар функционал белгиларни $c_0, c_1, c_2, \ldots$ лар билан белгилаймиз ва уларни константалар деб атаймиз. Шундай қилиб, сигнатура янги белгилар — константалар ва функционал белгилар $f_0^{(m_0)}, f_1^{(m_1)}, \ldots, f_j^{(m_j)}, \ldots$ ҳисобига бойитилди.

Янги сигнатурадаги формула тушунчасини киритиш учун терм (ифода) тушунчасини киритиш зарурдир.

2-таъриф. 1°. Ҳар бир предмет ўзгарувчи ёки константа термдир.

2°. $f_j^{(m_j)}$ — функционал белги, t_1, t_2, ..., t_{m_j} лар термлар бўлса, $f_j^{(m_j)}(t_1, t_2, \ldots, t_{m_j})$ ҳам термдир.

3°. Бошқа термлар йўқ.

6-мисол. $f^{(3)}$ функционал белги орқали $f^{(3)}(c_1, x_0, c_0)$, $f^{(3)}(c_1, x, y)$, $f^{(3)}(x_1, x_1, x_1)$, $f^{(3)}(c_2, c_9, c_0)$, $f^{(3)}(x, y, z)$, $f^{(3)}(c_0, c_1, c_2)$ ва ҳоказо термларни тузиш мумкин.

7-мисол. $f_1^{(2)}$ функционал белги „+" ни, $f_2^{(2)}$ эса „·" ни билдирса, у ҳолда натурал сонлар ва ўзгарувчилар ёрдамида $x+y$, $x\cdot y$, $x+1$, $2\cdot x$, $(x+3y)\cdot t$, $5\cdot(3x+4)+2\cdot y$ ва ҳоказо термларни тузиш мумкин.

Алгебраик система (математик структура) формулаларини аниқлашда юқорида модель формулаларига берилган таърифга бир оз қўшимча киритиш керак. Мазкур таърифнинг б) банди қуйидагича бўлади: $R_j^{(n_j)}$ — предикат белги, t_1, t_2, ..., t_{n_j} лар терм бўлса, у ҳолда $R_j^{(n_j)}(t_1, t_2, \ldots, t_{n_j})$ формула бўлади. Таърифнинг 1°-бандини яна ушбу в) банд билан тўлдирамиз:

в) Агар t_1 ва t_2 лар терм бўлса, у ҳолда $t_1 = t_2$ формуладир.

Киритилган ўзгаришларда t_1, t_2, ..., t_{n_j} термлардаги предмет ўзгарувчилар эркин деб ҳисобланади.

Ҳосил бўлган формулалар тўплами (янги сигнатурадаги) биринчи босқичли формал тил деб аталади.

Шундай қилиб, кенгайтирилган сигнатурадаги модель бўш бўлмаган M тўплам, унинг константалар деб аталувчи ажратилган c_0, c_1, ... (чекли ёки чексиз) элементлари (0-ар функционал белгилар сифатида), m_j-ар ($j = 0, 1, 2, \ldots$) $f_j^{(m_j)}$ функционал белгилар (чекли ёки чексиз сондаги) ҳамда n_i ўринли ($i = 0, 1, 2, \ldots$) $R_i^{(n_i)}$ предикат белгилар (чекли ёки чексиз сондаги) тўпламидан иборат бўлиб, улар $M = \langle M: c_0, c_1, \ldots; f_0^{(m_0)}, f_1^{(m_1)}, \ldots; R_0^{(n_0)}, R_1^{(n_1)}, \ldots \rangle$ алгебраик системанинг асосини ташкил этади. Масалан, $M = \langle Z; 0, 1; +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)} \rangle$ бутун сонлар системаси (арифметикаси) ни ташкил этади: бунда Z — бутун сонлар тўплами 0,1 лар константалар (ажратилган элементлар), $+^{(2)}$ ва $\cdot^{(2)}$ („қўшиш" ва „кўпайтириш") бинар функционал белгилар, $<^{(2)}$ эса („кичик" муносабати) икки ўринли предикат белгидир. $\mathbf{M} = < C;\ 0,\ 1;\ i;\ +^{(2)},\ \cdot^{(2)} >$ — комплекс сонлар алгебраик системаси, $\mathbf{M} = < G;\ e;\ \cdot^{(2)} >$ алгебраик система — группадир.

Бизга $\mathbf{M}_1 = < M_1;\ R_0^{(n_0)},\ R_1^{(n_1)},\ \ldots >$ ва $\mathbf{M}_2 = < M_2;\ P_0^{(n_0)},\ P_1^{(n_1)},\ \ldots >$ моделлар ҳамда φ: $\mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ акслантириш берилган бўлсин. $\mathbf{M}_1$ моделнинг ҳар бир $R_i^{(n_i)}$ предикат белгиси ва M_1 тўпламнинг ҳар қандай $a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}$ элементлари учун $R_i^{(n_i)}(a_1, a_2, \ldots, a_{n_i})$ нинг ростлигидан $P_i^{(n_i)}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_{n_i}))$ нинг ростлиги келиб чиқса, у ҳолда φ $\mathbf{M}_1$ моделнинг $\mathbf{M}_2$ моделга бўлган гомоморфизми дейилади. Агар φ гомоморфизм инъектив ($a \neq b \to \varphi(a) \neq \varphi(b)$) акслантириш бўлса, у ҳолда φ — мономорфизм дейилади. Ўзаро бир қийматли (биектив) мономорфизм эса изоморфизм дейилиб, $\mathbf{M}_1$ ва $\mathbf{M}_2$ моделлар ўзаро изоморф моделлар дейилади ҳамда $\mathbf{M}_1 \sim \mathbf{M}_2$ каби ёзилади. φ изоморфизм бўлса, у ҳолда φ^{-1} мавжуд бўлиб, у ҳам изоморфизм бўлиши равшандир. Шунинг учун ўзаро изоморф моделлар бир-биридан фақат предикатларнинг номлари билан фарқ қилади дейиш мумкин.

Ўқувчи қийинчиликсиз гомоморфизм, мономорфизм ва изоморфизм тушунчаларини алгебраик системалар учун умумлаштириши мумкин.

8-мисол. $\mathbf{M}_1 = \langle R;\ 0,\ + \rangle$ ҳақиқий сонлар аддитив группаси билан $\mathbf{M}_2 = \langle R^+;\ 1,\ \cdot \rangle$ мусбат ҳақиқий сонлар мультипликатив группаси учун φ: $R \to R^+$ ёки $\forall x \in R\ (\varphi(x) = e^x)$ акслантириш изоморфизм эканлиги алгебра курсидан маълумдир.

4-§. Предикатлар алгебраси формулаларининг тенгкучлилиги

$\mathbf{M} = < M;\ R_0^{(n_0)},\ R_1^{(n_1)},\ \ldots >$ модель, $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ ва $B(x_1, \ldots, x_n)$ шу моделдаги икки формула бўлсин. Юқорида айтилганидек, бу формулалардаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар эркин ўзгарувчилардир.

1-таъриф. M тўпламнинг исталган $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементлари учун $\mathbf{A}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{B}(a_1, \ldots, a_n)$ бўлса, бундай формулалар M моделда *тенг кучли* дейилади. Агар **А** ва **В** формулалар мазкур сигнатурадаги барча моделларда тенг кучли бўлса, у ҳолда улар *тенг кучли формулалар* дейилади ҳамда $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ каби белгиланади.

Қуйида келтирилган тенгкучлиликлар предикатлар алгебрасида жуда кўп ишлатиладиган бир қатор тенгкучлиликлардан намуналардир:

1. $\forall x \forall y \mathbf{A}(x, y) \equiv \forall y \forall x \mathbf{A}(x, y)$;
2. $\exists x \exists y \mathbf{A}(x, y) \equiv \exists y \exists x \mathbf{A}(x, y)$;
3. $\neg \forall x \mathbf{A}(x) \equiv \exists x \neg \mathbf{A}(x)$;
4. $\neg \exists x \mathbf{A}(x) \equiv \forall x \neg \mathbf{A}(x)$;
5. $\forall x \mathbf{A}(x) \equiv \forall y \mathbf{A}(y)$;
6. $\exists x \mathbf{A}(x) \equiv \exists y \mathbf{A}(y)$.

(5- ва 6-тенгкучлиларда x ва y ўзгарувчиларнинг ҳар бири иккинчиси учун эркин бўлиши керак):

7. $\forall x (\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(x)) \equiv \forall x \mathbf{A}(x) \wedge \forall x \mathbf{B}(x)$;
8. $\exists x (\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(x)) \equiv \exists x \mathbf{A}(x) \vee \exists x \mathbf{B}(x)$;
9. $\forall x (\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{A}) \equiv \forall x \mathbf{A}(x) \vee A$

(бунда ва қуйида x ўзгарувчи A формулада эркин қатнашмайди);

10. $\exists x (\mathbf{A}(x) \wedge A) \equiv \exists x \mathbf{A}(x) \wedge A$;
11. $\forall x (\mathbf{A}(x) \to A) \equiv \exists x \mathbf{A}(x) \to A$;
12. $\exists x (\mathbf{A}(x) \to A) \equiv \forall x \mathbf{A}(x) \to A$;
13. $\forall x (A \to \mathbf{A}(x)) \equiv A \to \forall x \mathbf{A}(x)$;
14. $\exists x (A \to \mathbf{A}(x)) \equiv A \to \exists x \mathbf{A}(x)$;
15. $\forall x \mathbf{A}(x) \vee \forall x \mathbf{B}(x) \equiv \forall x \forall y (\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(y))$

(бунда y ўзгарувчи **А** ва **В** формулаларда қатнашмайдиган предмет ўзгарувчи бўлиши керак);

16. $\exists x \mathbf{A}(x) \wedge \exists x \mathbf{B}(x) \equiv \exists x \exists y (\mathbf{A}(x) \wedge \mathbf{B}(y))$

(бунда y ўзгарувчи **А** ва **В** формулаларда қатнашмайдиган предмет ўзгарувчи бўлиши керак).

Юқорида келтирилган тенгкучлиларни ўқувчи мустақил равишда исботлай олади деб ишонамиз. Мазкур тенгкучлилардан фойдаланган ҳолда формулаларда баъзи тенг кучли алмаштиришлар бажарилиши, жумладан, инкор белгисини формуланинг „ичига" киритиш, кванторларни қавслардан ташқарига чиқариш мумкин.

1-мисол.

$$\begin{aligned}&\forall x[P(x)\to Q(x)]\to\exists yR(x,y)\equiv\\&\equiv\neg\forall x[P(x)\to Q(x)]\vee\exists yR(x,y)\equiv\\&\equiv\exists x\neg[P(x)\to Q(x)]\vee\exists yR(x,y)\equiv\\&\equiv\exists y\neg[P(y)\to Q(y)]\vee\exists yR(x,y)\equiv\\&\equiv\exists y[\neg(P(y)\to Q(y))\vee R(x,y)]\equiv\\&\equiv\exists y[(P(y)\to Q(y))\to R(x,y)].\end{aligned}$$

Баъзи формулаларда барча кванторлар (агар улар бор бўлса) атом формулалардан мантиқий амаллар орқали тузилган бўлагининг олдида келади, яъни уларнинг кўриниши қуйидагича бўлади: $\bigwedge_1 x_1 \bigwedge_2 x_2 \ldots \ldots \bigwedge_n x_n \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)$; бунда $\bigwedge_i \in \{\forall, \exists\}$, $(i = 1, n)$, $x_1, \ldots, x_n$ — барча боғланган ўзгарувчилар, $y_1, \ldots, y_m$ — барча эркин ўзгарувчилар, $A(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)$ кванторсиз формулаостидир.

$\bigwedge_1 x_1 \bigwedge_2 x_2 \ldots \bigwedge_n x_n \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)$ кўринишга эга бўлган формулалар пренексли нормал формадаги формула дейилиб, $\bigwedge_1 x_1 \bigwedge_2 x_2 \ldots \bigwedge_n x_n$ унинг кванторли қўшимчаси (приставкаси), $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)$ эса матрицаси дейилади.

Юқорида келтирилган тенгкучлилар ёрдамида предикатлар алгебрасининг исталган формуласини пренексли нормал формага келтириш мумкин. Бунинг учун жумлалар алгебрасидаги тенгкучлилардан фойдаланиб, $\sim$, $\to$ амаллар $\wedge$, $\vee$ ва $\neg$ лар орқали ифодаланади. Инкор амалини формуланинг „ичига", яъни атом формулалар олдига киритилади, сунгра эса 1 — 16-тенгкучлилар ёрдамида кванторларни формула „ташқарисига" чиқарилади.

5-§. Предикатлар алгебрасининг умумқийматли ва бажарилувчи формулалари

Биз берилган сигнатурадаги предикатлар алгебраси формулаларининг қийматини шу сигнатурадаги моделда аниклаганимизда формуланинг қиймати фақат эркин предмет ўзгарувчиларга боғлиқ эканлигини, формулада эркин ўзгарувчи бўлмаса, у ҳолда ўша моделда бу формула рост ёки ёлғон бўлишини кўриб ўтган эдик.

1-таъриф. $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формула $\mathbf{M}$ моделда эркин ўзгарувчиларнинг баъзи қийматларида рост бўлса, у ҳолда у $\mathbf{M}$ моделда *бажарилувчи*, акс ҳолда эса *бажарилмайдиган* ёки $\mathbf{M}$ моделда *радланувчи* формула дейилади. $\mathbf{A}$ формула берилган сигнатуранинг баъзи бир моделларида рост бўлса, у ҳолда *бажарилувчи*, акс ҳолда эса *радланувчи формула* дейилади.

1-мисол. (а) $\exists y \mathbf{A}(x, y)$ формула $N = \langle N; 0,1; +, \cdot \rangle$ моделда бажарилувчидир: $\mathbf{A}(x, y)$ ни $x < y$ деб аниқласак, $x \neq 1$ бўлганда $\exists y \mathbf{A}(x, y)$ формула рост бўлади.

(б) $\forall x(\mathbf{A}(x) \wedge \urcorner \mathbf{A}(x))$ формула радланувчидир, чунки исталган моделда $\mathbf{A}(x) \wedge \urcorner \mathbf{A}(x)$ формула ёлғон қийматга эгадир.

2-таъриф. $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формула $\mathbf{M}$ моделда эркин ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида рост бўлса, у ҳолда у $\mathbf{M}$ моделда *умумқийматли формула* дейилади. $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формула берилган сигнатурадаги барча моделларда умумқийматли бўлса, бундай формула *умумқийматли формула* дейилади.

Умумқийматли формулалар берилган сигнатурадаги мантиқий қонунлар ҳисобланади. Масалан, $\forall x(\mathbf{A}(x) \vee \urcorner \mathbf{A}(x))$ ёки $\exists x(\mathbf{A}(x) \vee \urcorner \mathbf{A}(x))$ формулалар умумқийматли формулалардир. $\mathbf{A}$ формула $\mathbf{M}$ моделда умумқийматли бўлса, бу фактни $\mathbf{M} \models \mathbf{A}$ каби белгилаймиз. $\mathbf{A}$ формуланинг умумқийматли эканлигини эса $\models \mathbf{A}$ каби белгилаймиз.

Юқоридаги таърифлардан $x_1, \ldots, x_n$ эркин ўзгарувчиларга эга бўлган $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формуланинг бажарилувчи бўлиши унинг эркин ўзгарувчиларини мавжудлик кванторлари билан боғлаш натижасида ҳосил бўладиган $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ ёпиқ формуланинг рост бўлиши билан тенг кучли эканлиги, $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формуланинг умумқийматли бўлиши эса $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \mathbf{A}(x_2, \ldots, x_n)$ ёпиқ формула бўлиши билан тенг кучли эканлиги келиб чиқади. Бундан эса формулаларнинг бажарилувчи ёки умумқийматли бўлиши масаласини ёпиқ формулаларнинг рост бўлиши масаласига олиб келиш мумкинлиги келиб чиқади.

3-таъриф. Берилган сигнатурадаги моделларнинг ҳар бири k элементли $M_1, M_1, \ldots$ тўпламларда аниқланган бўлсин. Шу моделларнинг ҳар бирида рост бўлган формула k-умумқийматли формула дейилади.

Шуни ҳам қайд этиш керакки, k-умумқийматли бўлган формула $(k+1)$-умумқийматли бўлиши шарт эмас.

Масалан, $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$ формула 1-умумқийматлидир, чунки у бир элементли $\{a\}$ исталган моделда $P(a, a) \to P(a, a) \equiv \neg P(a, a) \vee P(a, a)$ кўринишга эга бўлиб, табиий, рост қийматга эга бўлади. Аммо берилган формула 2-умумқийматли эмас — буни кўрсатиш учун икки элементли $\{a, b\}$ тўпламда $P(x, y)$ предикатни $P(a, a) = P(b, b) =$ рост, $P(a, b) = P(b, a) =$ ёлғон каби аниқлаш кифоядир. Ҳақиқатан, $\forall x \exists y P(x, y)$ формулаости $x=a$ бўлганда $y=b$, ҳамда $x=b$ бўлганда $y=a$ деб олинганда рост бўлиб, иккинчиси томондан, $\exists y \forall x E(x, y)$ формулаости ёлғон бўлиши учун $y=a$ бўлганда $x=a$, $y=b$ бўлганда $x=b$ деб олиш кифоядир.

Энди қуйида чексиз моделда бажарилувчи аммо бирорта ҳам чекли моделда бажарилмайдиган формула намунасини келтирамиз:

$$\forall x(\neg P(x, x) \wedge \exists y P((x, y) \wedge \forall z \forall t (P(x, z) \wedge \\ \wedge P(z, t) \to P(x, t))).$$

Ҳақиқатан, чексиз $\mathbf{N}$ моделда $P(x, y)$ предикатни „$x < y$“ каби аниқласак, юқоридаги формула натурал сонлар системасининг „кичик“ муносабати бўйича тартибланганлиги хоссасини билдиради (рост бўлади). Мазкур формула ҳеч бир чекли моделда бажарилувчи бўлмаслигини кўриш қийин эмас.

Қуйидаги мисолда чекли моделда берилган формуланинг қийматлари жадвал ёрдамида қандай ҳисобланишини кўрсатиб ўтамиз.

2-мисол. $M=\{a, b\}$ — тўплам, $(A \to P(y) \wedge \forall x(P(y) \to A)$ берилган формула, ундаги A — ёпиқ формула, $P(t)$ — бир ўринли предикат бўлсин.

Дастлаб $P(t)$ предикатнинг мантиқий қийматларини берадиган пропозиционал функцияларни қурамиз. $P(t)$ бир ўринли предикат, M — икки элементли тўплам бўлгани учун бундай функциялар 4 та бўлади.

t	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$
a	1	1	0	0
b	1	0	1	0

Энди $A \to P(y)$, $P(x) \to A$, $\forall x(P(x) \to A))$ формулаостилар ва формуланинг ўзи учун жадвал қуриш имкониятига эгамиз.

№	A	t	$P(t)$	$A \to P(y)$	$P(x) \to A$	$\forall x(P(x) \to A)$	$(A \to P(y)) \wedge \wedge \forall x(P(x) \to A)$
1	1	a	$f_1(t)$	1	1	1	1
2	1	b	"	1	1	1	1
3	0	a	"	1	0	0	0
4	0	b	"	1	0	0	0
5	1	a	$f_2(t)$	1	1	1	1
6	1	b	"	0	1	1	1
7	0	a	"	1	0	0	0
8	0	b	"	1	1	0	0
9	1	a	$f_3(t)$	0	1	1	1
10	1	b	"	1	1	1	1
11	0	a	"	1	1	0	0
12	0	b	"	1	0	0	0
13	1	a	$f_4(t)$	0	1	1	1
14	1	b	"	0	1	1	1
15	0	a	"	1	1	1	1
16	0	b	"	1	1	1	1

Энди предикатлар алгебрасининг баъзи зарур умумқийматли формулалари билан танишамиз

1-теорема. *x — ўзгарувчи, $\mathbf{A}(x)$ — ихтиёрий формула, y x учун эркин бўлган ўзгарувчи, $\mathbf{A}(y)$ эса $\mathbf{A}(x)$ формуладан x ни y билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинган формула бўлсин. У ҳолда*

$$(\mathrm{I}).\ \models \forall x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(y),$$

$$(\mathrm{II}).\ \models \mathbf{A}(y) \to \exists x\mathbf{A}(x)$$

бўлади.

Биз қуйида (I) нинг исботини келтириб, (II) нинг исботини эса ўқувчи диққатига ҳавола қиламиз.

(I). M — ихтиёрий бўш бўлмаган тўплам, $\mathbf{A}(x)$ эса асосий тўплами M бўлган ихтиёрий моделнинг формуласи бўлсин. Агар M нинг ҳар бир элементи учун $\mathbf{A}(x)$ рост бўлса, у ҳолда $\forall x\mathbf{A}(x)$ формула умумқийматли бўлади. y ўзгарувчи ҳам M тўпламнинг барча элементларини қиймат сифатида қабул қилгани учун $\mathbf{A}(y)$ ҳам рост формуладир. „$\to$" нинг таърифига кўра $\models \forall x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(y)$ бўлади.

Фараз қилайлик, M тўпламда шундай t_0 элемент топилиб $\mathbf{A}(t_0) = 0$ бўлсин. У ҳолда M тўпламни ўзаро кесишмайдиган M_1 ва M_2 тўплам остиларга ажратиш мумкинки, $t \in M_1$ бўлганда $\mathbf{A}(t)=1$, $t \in M_2$ бўлганда эса $\mathbf{A}(t)=0$ бўлади. $\mathbf{A}(t_0)=0$ бўлгани учун $\forall x\mathbf{A}(x)=0$ дир. y M_1 ёки M_2 ларнинг қайси бирига тегишли бўлишига қарамай, яъни $A(y)$ қандай қийматга эга бўлишига қарамай, импликациянинг таърифига асосан $\models \forall x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(y)$ бўлади. Агар M тўпламнинг ҳар бир элементи t учун $\mathbf{A}(t)=0$ бўлса, (I) ўринли бўлиши равшандир.

2-теорема. *x — ихтиёрий ўзгарувчи, $\mathbf{A}(x)$ — ихтиёрий формула, $\mathbf{B}$ эса таркибида x эркин ҳолда қатнашмаган ихтиёрий формула бўлсин. У ҳолда*

(III). *агар* $\models \mathbf{B} \to \mathbf{A}(x)$ *бўлса,* $\models \mathbf{B} \to \forall x\mathbf{A}(x)$,

(IV). *агар* $\models \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$ *бўлса,* $\models \exists x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$

бўлади.

Теореманинг (IV) қисмини исботлаб, (III) ни исботлашни мустақил иш сифатида ўқувчига қолдирамиз.

M ихтиёрий бўш бўлмаган тўплам бўлсин. Фараз қилайлик, $\not\models \exists x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$ бўлсин. Бундай бўлиши учун M дан шундай x_0 элемент мавжуд бўлиши кераккки, $\mathbf{A}(x_0)=1$ ва демак, $\exists x\mathbf{A}(x)=1$ бўлиши, $\mathbf{B}$ эса 0 қийматга эга бўлиши керик. Аммо $\mathbf{A}(x_0)=1$, $\mathbf{B}=0$ бўлиши $\models \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$ га зиддир ($x=x_0$ бўлганда). Демак, қилинган фараз нотўғри экан.

Қуйидаги теорема осонликча исботланиши мумкин бўлганлиги учун унинг фақат ифодаланишини келтириш билан чегараланамиз.

3-теорема. (а). *$\mathbf{A}(t)$ формула $\mathbf{A}(x)$ формуладан (бунда x боғланган ўзгарувчидир) S_x^t-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда* $\models \mathbf{A}(x)$ *бўлса,* $\models \mathbf{A}(t)$ *бўлади.*

(б) *$\mathbf{A}(t)$ формула $\mathbf{A}(x)$ формуладан (бунда $\mathbf{A}(x)$ да x нинг эркин қатнашуви ҳам мавжуд) S_x^t-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда* $\models A(x)$ *бўлса,* $\models \mathbf{A}(t)$ *бўлади.*

3-мисол. (а) $P(x)$—бир ўринли предикат, t эса x учун эркин ўзгарувчи бўлсин.

1) $\models \exists x(P(x) \vee \neg P(x))$ бўлгани учун
$\models \exists t(P(t) \vee \neg P(t))$ бўлади;

2) $\models \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ бўлгани учун
$\models \forall t(P(t) \vee \neg P(t))$ бўлади.

(б) $Q(x)$ бир ўринли предикат, x унда эркин ўзгарувчи ҳамда $\mathbf{A}(x) \equiv Q(x) \vee \neg Q(x)$ бўлсин. $\models Q(x) \vee \neg Q(x)$ бўлгани учун, теоремага асосан, $\models Q(t) \vee \neg Q(t)$ бўлади.

Юқоридаги теоремани бир неча предмет ўзгарувчилар учун ҳам, шубҳасиз, умумлаштириш мумкин.

4-теорема. $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ — *ихтиёрий формула, $x_1, \ldots, x_n$ лар* $\mathbf{A}$ *таркибидаги барча турли предмет ўзгарувчилар, $t_1, \ldots, t_n$ ихтиёрий ўзгарувчилар (улар турлича бўлиши ва $x_1, \ldots, x_n$ лардан фарқли бўлиши шарт эмас), $\mathbf{A}(t_1, \ldots, t_n)$ эса $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ формулага $x_1, \ldots, x_n$ ларнинг эркин қатнашган ўринларига мос $t_1, \ldots, t_n$ ларни қўйиш натижасида ҳосил бўлган формула бўлсин. У ҳолда, агар $\models \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ бўлса, $\models \mathbf{A}(t_1, \ldots, t_n)$ бўлади.*

4-теорема олдинги теорема (б) қисмининг умумлашмасидир. Теореманинг (а) қисмини ўқувчи мустақил умумлаштира олади деб ўйлаймиз.

5-теорема.

$$\models \neg \exists x \mathbf{A}(x) \sim \forall x \neg \mathbf{A}(x).$$

Исботи. Теорема ўринли бўлиши учун қуйидаги метатеоремалар ўринли бўлиши кифоядир.

$$(\mathrm{I}).\quad \models \neg \exists x \mathbf{A}(x) \rightarrow \forall x \neg \mathbf{A}(x),$$
$$(\mathrm{II}).\quad \models \forall x \neg \mathbf{A}(x) \rightarrow \neg \exists x \mathbf{A}(x).$$

$\mathbf{M}$ — ихтиёрий бўш бўлмаган предмет соҳа, $\mathbf{A}(x)$ эса асосий тўплами $\mathbf{M}$ бўлган $\mathcal{M} = \langle \mathbf{M}; \ldots \rangle$ моделдаги ихтиёрий формула бўлсин.

(I). Фараз қилайлик, $\not\models \neg \exists x \mathbf{A}(x) \rightarrow \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ бўлсин. Бу ўз навбатида

$$(\mathrm{a}) \quad \forall x \neg \mathbf{A}(x) = 0.$$
$$(\mathrm{b}) \quad \neg \exists x \mathbf{A}(x) = 1$$

лар бир пайтда бажарилгандагина ўринлидир. $\neg \exists x \mathbf{A} x = 1$ бўлса, $\exists x \mathbf{A}(x) = 0$ бўлиб, охирги тенглик $\mathbf{M}$ тўпламда $\mathbf{A}(x)$ формулани ростга айлантирадиган элемент мавжуд эмас демакдир.

Бошқача айтганда $\mathbf{M}$ тўпламнинг ҳар бир элементи учун $\neg \mathbf{A}(x) = 1$, яъни $\forall x \neg \mathbf{A}(x) = 1$ демакдир. Охирги натижа (а) га зид бўлиб, қилинган фараз нотўғри эканини кўрсатади.

(II). Фараз қилайлик $\not\models \forall x \neg \mathbf{A}(x) \rightarrow \neg \exists x \mathbf{A}(x)$ бўлсин. Бу ўз навбатида

$$(\mathrm{c}). \quad \forall x \neg \mathbf{A}(x) = 1$$

ва

$$(d). \neg \exists x A(x) = 0)$$

бўлгандагина ўринли бўлади.

$\neg \exists x A(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\exists x A(x) = 1$ бўлади, яъни **M** тўпламда шундай x_0 элемент топиладики, $A(x_0) = 1$ бўлади. Бундан $\neg A(x_0) = 0$ ва $\forall x \neg A(x) = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Охирги тенглик (с) га зиддир.

Биз жумлалар алгебрасида формуладаги ўзгарувчи жумла ўрнига ихтиёрий формулани қўйиб янги формула ҳосил қилиш мумкинлигини кўрган эдик. Предикатлар алгебрасида ҳам худди шунга ўхшаш иккита қоида — ўзгарувчи жумлани формула билан алмаштириш ва ўзгарувчи предикатни формула билан алмаштириш қоидаларини кўриб чиқамиз. Ҳар қандай ўзгарувчи жумла 0 ўринли ўзгарувчи предикат бўлгани учун қуйида ўзгарувчи предикат ўрнига формула қўйиш қоидасини қараш кифоядир.

A формула таркибида P ўзгарувчи (n ўринли, $n \geq 0$) предикат ҳамда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предмет ўзгарувчилар қатнашган бўлсин. Бу предмет ўзгарувчилар **A** формулада эркин ёки боғланган ҳолда қатнашган бўлиши мумкин (уларнинг барчаси турли предмет ўзгарувчилар бўлиши шарт эмас) — уларни шартли равишда „белгиланган ўзгарувчилар“ деб атаймиз. P предикат **A** формулада $(q_1 y_1), \ldots, (q_k y_k)$ кванторларнинг таъсир соҳасида бўлсин, бунда $(q_i y_i)$, ё $\forall y_i$, ёки $\exists y_i$ $(i = \overline{1,k})$ бўлиб, ҳар бир $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ҳар бир $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дан фарқлидир. $(q_1 y_1), \ldots, (q_k y_k)$ кванторларни ҳам „белгиланган кванторлар“ деб атаймиз. Ниҳоят, **B**—бирор формула, $t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_m$ ундаги предмет ўзгарувчилар бўлиб, ҳар бир $t_1, \ldots, t_n$ (ҳаммаси бир хил бўлиши шарт эмас) **B** да эркин қатнашади ($t_1, \ldots, t_n$ ларнинг баъзилари **B** да боғланган бўлиб қатнашиши ҳам мумкин), ҳар бир $u_1, u_2, \ldots, u_m$ эса **B** да эркин бўлиб ҳам, боғлиқ бўлиб ҳам қатнашиши мумкин. $u_1, u_2, \ldots, u_m$ предмет ўзгарувчиларни „белгиланмаган ўзгарувчилар“ деб атаймиз. **B** формуладаги кванторларни (агар бор бўлса) $(q_1 z_1), \ldots, (q_l z_l)$ билан белгилаймиз, ва уларни „белгиланмаган кванторлар“ деб атаймиз ($(q_s z_s)$, ё $\forall z_s$, ёки $\exists z_s$ эканлигини эслатиб ўтамиз, $s = 1, 2, \ldots, l$).

P предикат **A** формулада нечта жойда қатнашган бўлса, ҳар бир жойда P ни **B** формула билан алмаштирайлик. Бундай алмаштириш жараёнида **B** формуладаги ҳар бир t_i ($i=\overline{1,n}$) мос равишда x_i ўзгарувчи билан алмаштирилади **A(B)** *формула* **A** *формуладаги* P предикат ўрнига **B** формулани қўйиш натижасида ҳосил бўлади Ушбу шакл алмаштириш ўзгарувчи предикат ўрнига қўйиш қоидаси дейилади.

4-таъриф. 1°. Ҳеч бир $(q_j z_j)$ $(j=\overline{1,l})$ квантор ҳеч бир $x_1,\ldots,x_n$ ўзгарувчини боғламаса, яъни ҳеч бир белгиланмаган квантор ҳеч бир белгиланган предмет ўзгарувчини боғламаса;

2°. Ҳеч бир $(q_\alpha y_\alpha)$ $(\alpha=\overline{1,k})$ квантор ҳеч бир $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ўзгарувчини боғламаса, яъни ҳеч бир белгиланган квантор ҳеч бир белгиланмаган ўзгарувчини боғламаса, у ҳолда **A** формуладаги P ўзгарувчи предикатни **B** формула билан алмаштириш *эркин* дейилади.

4-мисол. $\mathbf{A} \stackrel{o}{=} \forall xP(x)\to P(y)\wedge A$ бўлсин (бунда A ёпиқ формуладир). Бу формулада: x—боғланган, y эса эркин ўзгарувчи бўлиб, уларнинг иккаласи ҳам белгиланган ўзгарувчилардир; $\forall x$—белгиланган квантор.

$\mathbf{B} \stackrel{o}{=} \exists uQ(t, u, v)$ формула **A** формуладаги P предикат ўрнига қўйиладиган формула бўлсин. Бу формулада $\exists u$—белгилинмаган квантор, t, v—белгиланмаган ўзгарувчилардир Ўрнига қўйиш жараёнида t ни x билан, v ни эса y билан алмаштириш керак бўлсин. **B** ни **A** даги P нинг ўрнига қўйиш натижасида

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}) \stackrel{o}{=} \forall x\exists uQ(x, u, x)\to\exists uQ(y, u, y)\wedge A$$

формула ҳосил бўлади. Бу формула учун юқоридаги таърифнинг 1°- ва 2°-бандлари бажарилиши равшандир.

5-мисол.

$$\mathbf{A} \stackrel{o}{=} \forall xP(x)\to P(y)\wedge A,$$

$$\mathbf{B} \stackrel{o}{=} \exists uP(u)\to T(u) \quad \text{бўлсин.}$$

B формулага u ўзгарувчи ҳам боғлиқ, ҳам эркин ҳолда киради. Бу белгиланмаган ўзгарувчи бўлиб. ундан ташқари **B** формулада битта белгиланмаган $\exists u$ квантор бор.

A формулада битта белгиланган квантор $\forall x$ ҳамда иккита белгиланган x ва y ўзгарувчилар (бири боғлиқ, иккинчиси эса эркин ҳолда) қатнашади.

Ўрнига қўйиш қоидасини қўллаш натижасида

$$\forall x(\exists u P(u \to T(x))) \to (\exists y P(y) \to T(y)) \wedge A$$

формулани ҳосил қиламиз.

Ҳар иккала мисолда келтирилган ўрнига қўйиш қоидаси эркиндир.

Энди юқорида келтирилган мулоҳазалардан келиб чиқадиган ушбу хулосаларни келтирамиз:

1°. Берилган формуладаги ўзгарувчи предикат ўрнига бирор формулани қўйиш натижасида эркин предмет ўзгарувчилар пайдо бўлиши мумкин.

2°. 1°-бандда айтилган алмаштириш натижасида боғлиқ предмет ўзгарувчилар пайдо бўлиши мумкин.

3°. Агар берилган формулада эркин ўзгарувчи бўлса, ўрнига қўйиш натижасида бу ўзгарувчи эркин ҳолда сақланиб қолиши керак.

Эркин ўрнига қўйиш қоидасини таркибида бир неча ўзгарувчи предикат қатнашган $\mathbf{A}(P_1, \ldots, P_k)$ формула учун қийинчиликсиз умумлаштириш мумкин.

6-теорема. $\mathbf{A}$ — *таркибида P ўзгарувчи предикат қатнашган формула,* $\mathbf{B}$ — *бирор формула,* $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ *эса эркин ўрнига қўйиш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинган формула бўлсин. У ҳолда, агар* $\models \mathbf{A}$ *бўлса,* $\models \mathbf{A}(\mathbf{B})$ *бўлади.*

I бобда (4-§) $\mathbf{B}$ формула берилган $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ формулаларнинг мантиқий натижаси бўлиши тушунчаси билан танишган эдик. Худди шундай тушунчани предикатлар алгебрасида ҳам киритиш мумкин.

$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}$ формулаларда қатнашган барча эркин ўзгарувчилар $x_1, \ldots, x_n$ бўлиб, бу формулалар қандайдир (ихтиёрий) $\mathbf{M}$ предмет соҳада қаралаётган бўлсин. Эркин предмет ўзгарувчи $x_1, \ldots, x_n$ лар ўрнига $\mathbf{M}$ тўпламнинг элементларини қўйиб (бунда $\mathbf{M}$ тўплам элементларидан тузилган $(a_1, \ldots, a_n)$ n-ликлар ҳосил бўлади) $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}$ формулаларнинг қийматлари ҳисобланади. $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ формулалар бир вақтда рост бўлган барча тизмаларда $\mathbf{B}$ формула ҳам рост бўлса, $\mathbf{B}$ формула $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ формулаларнинг мантиқий натижаси деб ҳисобланади ва

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \models \mathbf{B}$$

каби ёзилади.

6-мисол. $\forall x(P \to Q(x)) \models P \to \forall x Q(x)$ эканлигини кўрсатамиз.

Биз қуйида $\mathbf{M}\{a, b\}$ икки элементли тўпламда юқоридаги муносабат ўринли эканлигини кўрсатамиз. $\mathbf{M}$

тўплам ихтиёрий қувватга эга бўлганда ҳам мазкур муносабат ўринли бўлишини кўриш қийин эмас. $\forall x(P\to Q(x))$ ва $P\to\forall xQ(x)$ формулаларда P ёпиқ формула, $Q(x)$ эса бир ўринли предикатдир. Дастлаб $Q(x)$ предикатнинг мантиқий қийматларини берадиган пропозиционал функцияларни оламиз:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
a	1	1	0	0
b	1	0	1	0

Энди берилган формулаларни қуйидаги жадвалга жойлаштириб, уларнинг қийматларини ҳисоблаймиз:

№	x	$Q(x)$	$\forall xQ(x)$	P	$P\to Q(x)$	$\forall x(P\to Q(x))$	$P\to\forall xQ(x)$
1	a	$f_1(x)$	1	1	1	1	1
2	b	„	1	1	1	1	1
3	a	„	1	0	1	1	1
4	b	„	1	0	1	1	1
5	a	$f_2(x)$	0	1	1	0	0
6	b	„	0	1	0	0	0
7	a	„	0	0	1	0	1
8	b	„	0	0	1	0	1
9	a	$f_3(x)$	0	1	0	0	0
10	b	„	0	1	1	0	0
11	a	„	0	0	1	0	1
12	b	„	0	0	1	0	1
13	a	$f_4(x)$	0	1	0	0	0
14	b	„	0	1	0	0	0
15	a	„	0	0	1	0	1
16	b	„	0	0	1	0	1

Бу жадвалдан кўринадики, $\forall x(P\to Q(x))$ рост бўлган сатрларда $P\to\forall xQ(x)$ ҳам рост бўлар экан, ва демак, $P\to\forall xQ(x)$ формула $\forall x(P\to Q(x))$ нинг мантиқий натижаси экан. Яна шу жадвалдан кўринадики, $P\to Q(x)\models P\to\forall xQ(x)$ ноўриндир: $P\to Q(x)$ формулада x эркин предмет ўзгарувчи бўлиб, $P\to\forall xQ(x)$ да эса боғланган ҳолда қатнашади. Бу ҳолатни тушунтириш учун предикатлар алгебрасида учрайдиган „мантиқий натижа“ тушунчасининг бошқа формасини обзор сифатида келтирамиз.

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ формулалар таркибида қатнашган барча эркин предмет ўзгарувчилар $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ бўлсин. Қисқалик учун $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \mathbf{A}_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ $(i = \overline{1,m})$ формулани $\forall' \mathbf{A}_i$ кўринишда белгилаймиз.

5-таъриф. $\forall' \mathbf{A}_1, \ldots, \forall' \mathbf{A}_m \models \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{B}$ формула $x_1, \ldots, x_n$ лардан бошқа барча ўзгарувчилар ўзгаришсиз олинганда $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ формулаларнинг *натижаси* дейилади ва

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \models^{x_1, \ldots, x_n} \mathbf{B}$$

каби белгиланади.

Юқорида келтирилган мисолда $\mathbf{B} \equiv P \to \forall x Q(x)$, $\mathbf{A} \equiv P \to Q(x)$ десак, таърифга асосан

$$\mathbf{A} \models^{x} \mathbf{B},$$

яъни $\forall' \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ бўлади, бунда $\forall' \mathbf{A} \equiv \forall x (P \to Q(x))$ дир (жадвалга қаранг).

Умуман олганда „$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \models^{x_1, \ldots, x_n} \mathbf{B}$“ тушунчаси „$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \models \mathbf{B}$“ тушунчасига нисбатан кенгроқдир, яъни агар $A_1, \ldots, A_m \models B$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \models^{x_1, \ldots, x_n} \mathbf{B}$ бўлади, аммо тескариси ҳамма вақт ўринли бўлавермайди.

Энди қисқача обзор сифатида предикатлар алгебраси учун ечилиш проблемасини кўриб чиқамиз.

Предикатлар алгебрасининг исталган формуласи умумқийматлими (бажарилувчими) ёки умумқийматли (бажарилувчи) эмасми эканлигини аниқлаб берадиган самарали жараён (процедура, алгоритм) нинг мавжуд ёки мавжуд бўлмаслиги предикатлар алгебраси учун ечилиш проблемасини ташкил этади.

Аввало исталган формула чекли моделда умумқийматли (бажарилувчи) бўлиши масаласи ечилувчи эканини эслатиб ўтамиз. Ҳақиқатан, чекли тўплам элементларини қиймат сифатида қабул қиладиган предмет ўзгарувчилар бўйича умумийлик квантори қўлланилган формула $(\forall x \mathbf{A}(x))$ чекли конъюнкцияга, мавжудлик квантори қўлланилган формула $(\exists x \mathbf{A}(x))$ эса чекли дизъюнкцияга тенг кучлидир. Масалан, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ тўпламда қаралаётган $\forall x \mathbf{A}(x)$ формуланинг рост бўлиши $\mathbf{A}(a_1) \wedge \mathbf{A}(a_2) \wedge \ldots \wedge \mathbf{A}(a_n)$ формуланинг, $\exists x \mathbf{A}(x)$ нинг рост бўлиши эса $\mathbf{A}(a_1) \vee \mathbf{A}(a_2) \vee \ldots \vee \mathbf{A}(a_n)$ формуланинг рост бўлишига тенг кучлидир. Шундай қилиб, чекли моделларда ечилиши масаласини кванторсиз формулалар учун қараш етарли бўлади. Кванторсиз формулаларнинг бажарилувчи бўлиши ўша формуладаги ҳар турли атом формулаларни ҳар турли ўзгарувчи жумла билан белгилаш (алмаштириш)дан ҳосил бўладиган жумлалар алгебраси формуласининг бажарилувчи бўлишига олиб келинади.

I бобда кўриб ўтилганидек бу масала ечилувчидир.

Умуман олганда берилган сигнатурадаги $\exists x A(x)$ кўринишдаги формуланинг бажарилувчи бўлиши масаласи баъзи бир сигнатурадаги кванторсиз формуланинг бажарилувчи бўлишига олиб келиши кванторларни йўқотиш (кванторлар элеминацияси) усули ёрдамида ҳал этилади. Бу усул ёрдамида баъзи бир назарияларнинг ечилувчи экани исботланади (батафсил танишиш учун [1], [4] китобларни тавсия қиламиз).

Агар берилган сигнатура фақат бир ўринли предикатлардан иборат бўлса, у ҳолда бу сигнатурадаги предикатлар алгебраси формулаларининг умумқийматли ёки бажарилувчи бўлиши масаласи ечилувчидир. Буни тасдиқловчи қуйидаги теорема ўринлидир.

7-теорема. *Таркибига n та бир ўринли предикат кирган формула бирор* **M** *моделда бажарилувчи бўлса, у ҳолда бу формула элементлари сони 2^n дан катта бўлмаган* **M'** *моделда ҳам бажарилувчи бўлади.*

Мазкур теоремадан ушбу натижани ҳосил қилиш мумкин.

Натижа. *Таркибига n та фақат бир ўринли предикат кирган формула элементлари сони 2^n дан катта бўлмаган исталган моделда умумқийматли бўлса, у ҳолда бу формула ихтиёрий моделда ҳам умумқийматли бўлади.*

Юқорида келтирилган даъволарнинг исботини [4], [27] китоблардан топиш мумкин.

1936 йили америкалик мантиқчи А. Чёрч ечилиш проблемаси предикатлар алгебраси учун умуман олганда ижобий ечилмаслигини кўрсатди.

Биз ушбу бобни Левенгеймнинг иккита теоремасини келтириш билан тугатамиз. Бу теоремаларда предикатлар алгебрасининг катта синфини ташкил қилувчи формулалари учун ечилиш проблемаси ижобий ҳал қилиниши келтирилади.

8-теорема. *Агар предикатлар алгебрасининг формуласи бирор чексиз тупламда бажарилувчи булса, у ҳолда бу формула саноқли тупламда ҳам бажарилувчи булади.*

9-теорема. *Эркин предмет узгарувчилар қатнашмаган (аммо, балки константалар қатнашган) формула бирор тупламда бажарилувчи булса, у ҳолда у чекли ёки саноқли тупламда ҳам бажарилувчи булади.*

Машқлар

1. Қуйидаги жумлавий форма ёрдамида берилган предикатларнинг ростлик соҳаларини топинг:

а) „$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$“;

б) „x—қуёш системасининг планетаси“;

в) „x—туб сон ва $10 < x < 30$“;

г) „$(x-y) \vdots 3$“ („$\vdots$“—булиниш муносабати);

д) „$x < 10$ ва $y < 8$, ва $x \vdots y$“.

2. Қуйидаги формулалар умумқийматли формулалар эканлигини курсатинг:

а) $\forall x \exists y (P(x) \vee \urcorner P(y))$;

б) $\forall y \exists x (Q(x, y) \rightarrow Q(x, x))$;

в) $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$;

г) $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$.

3. Ушбу формулалар бажарилувчи формулалар эканини курсатинг:

а) $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x, y)$;

б) $\urcorner (\exists x F(x) \rightarrow \forall x F(x))$;

в) $\forall x (R \rightarrow F(x)) \vee \urcorner F(y) \wedge R$, бу ерда R—ёпиқ формула.

4 Қуйидаги муносабатлар уринли эканлигини курсатинг:

а) $\forall x \exists y Q(x, y) \Leftarrow \exists y \forall x Q(x, y)$;

б) $\forall x \exists y Q(x, y) \not\equiv \forall y \exists x Q(x, y)$;

в) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

IV БОБ

МАТЕМАТИК НАЗАРИЯЛАР

1-§. Предикатлар ҳисоби

Турли-туман „математик назариялар" „математика" деб умумий ном билан аталувчи фаннинг ташкил этувчилари бўлиб, мисолларни математиканинг соҳалари деб аталувчи алгебра, математик анализ, геометрия, топология (ва бошқа соҳалар) дан келтириш мумкин. Бир соҳанинг ўзи турли-туман математик назариялардан иборат бўлиши мумкин. Натурал (бутун, рационал, ҳақиқий. комплекс) сонлар арифметикаси, группалар назарияси ҳалқалар назарияси, вектор фазолар назарияси, гиперкомплекс системалар ва бошқа турли назариялар математиканинг улкан бир бўлаги—алгебрани ташкил этади. Математик анализдан ҳақиқий аргументли функциялар назарияси, дифференциал ҳисоб, интеграл ҳисоб, комплекс аргументли функциялар назарияси ва кўпгина бошқа назарияларни мисол сифатида олишимиз мумкин. Евклид геометрияси ноевклид геометрия, проектив геометрия, дифференциал геометрия ва бошқа назариялар „геометрия" деб аталувчи улкан бир соҳани ташкил этади. Баъзи математик назариялар яна бошқа ташкил этувчи назариялардан иборат бўлиши мумкин Масалан, ҳалқалар назарияси ассоциатив ёки ноассоциатив ҳалқалар, коммутатив ёки нокоммутатив ҳалқалар, майдонлар, идеаллар назарияси ва бошқа мустақил назариялардан иборатдир.

Ҳар қандай математик назария қандайдир (формал ёки ноформал) тил асосида қурилади, ва шунга қараб, унинг ўзи формал ёки ноформал математик назария бўлиши мумкин Асосан, математик назария асосида олинадиган тил биринчи тартибли предикатлар алгебраси (нормал математик назарияни қурганда) ёки биринчи тартибли предикатлар ҳисоби (формал математик назарияни қурганда) дир. Шунинг учун ҳар қандай математик назариянинг асл табиатини ўрганиш учун унинг асоси—унинг мантиқий асосини ўрганиш зарурдир. Биз III бобда предикатлар алгебрасини ноформал система сифатида ўрганган эдик. Ушбу бобда эса биз даставвал янги аксиоматик назария—предикатлар ҳисобини ўрганамиз.

Предикатлзр ҳисоби формал аксиоматик назария бўлиб, ҳар қандай аксиоматик назария каби ўзининг тили, аксиомалар системаси ва келтириб чиқариш қоидаларига эгадир. Предикатлар ҳисобининг тили (алфавити, формулалари) предикатлар алгебрасиникидек ўзгарувчи жумлалар (0 ўринли предикат белгилар), предмет ўзгарувчилар, констангта белгилар (индивидуал белгилар ёки индивидлар), ўзгарувчан предикат белгилар, мантиқий амаллар, кванторлар, қавслар (техник белгилар) ва улардан тузилган формулалардан иборатдир (формула тушунчаси III бобда киритилган).

Предикатлар ҳисобининг аксиомалари сифатида жумлалар ҳисобининг барча аксиомалари (улар $(1a)$, $(1b)$, $(2a)$, $(2b)$, $(2c)$, $(3a)$, $(3b)$, $(3c)$, $(4a)$, $(4b)$, $(4c)$, $(5a)$, $(5b)$ каби тартибланган) ва яна ушбу формулаларни қабул қиламиз:

$$(6a)\quad \forall x P(x) \to P(y),$$
$$(6b)\quad P(y) \to \exists x P(x).$$

Бу ерда $P(x)$—ихтиёрий ўзгарувчи предикат, y эса x учун эркин ўзгарувчидир.

Предикатлар ҳисобининг келтириб чиқариш қоидалари сифатида ушбу қоидаларни қабул қиламиз:

I. MP-қоида: $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$ (хулоса қилиш қоидаси).

(Ўқилиши: Агар **A** ва **A** $\to$ **B** формулалар предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формулалар бўлса, у ҳолда **B** ҳам келтириб чиқарилувчи формула бўлади.)

II. S_p-қоида: **A**(**B**) формула таркибида ўзгарувчи P предикат қатнашган **A**(P) формуладан эркин ўрнига қўйиш қоидаси (III бобнинг 5-§ идаги 4-таъриф) ёрдамида ҳосил қилинган ҳамда **A**(P) келтириб чиқарилувчи формула бўлса, **A**(**B**) ҳам келтириб чиқарилувчи формула бўлади (P—0 ўринли предикат бўлса, S_p-қоида жумлалар ҳисобида олинган S-қоидага айланади).

III $S_{\forall\exists}$-қоида: **A**(t) формула **A**(x) формуладан боғланган ўзгарувчи (x) ни қайта номлаш қоидаси (III бобдаги 3-§) ёрдамида ҳосил қилинган ҳамда **A**(x) келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда **A**(t) ҳам келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

IV. S^t_x-қоида: $\mathbf{A}(t)$ формула $\mathbf{A}(x)$ формуладан предмет ўзгарувчи (x) ни эркин ўрнига қўйиш (қайта номлаш) қоидаси (III бобдаги 3-§) ёрдамида ҳосил қилинган ҳамда $\mathbf{A}(x)$ келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}(t)$ ҳам келтириб чиқарилувчи формула бўлади.

V. $\forall$-қоида: $\dfrac{\mathbf{B}\rightarrow \mathbf{A}(x)}{\mathbf{B}\rightarrow \forall x\mathbf{A}(x)}$; бунда x ўзгарувчи $\mathbf{B}$ формулага эркин ҳолда кирмайди:

(Ўқилиши: $\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}(x)$ предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда $\mathbf{B}\rightarrow\forall x\mathbf{A}(x)$ ҳам келтириб чиқарилувчи формули бўлади).

VI. $\exists$-қоида: $\dfrac{\mathbf{A}(x)\rightarrow \mathbf{B}}{\exists x\mathbf{A}(x)\rightarrow \mathbf{B}}$; бу ерда x ўзгарувчи $\mathbf{B}$ формулага эркин ҳолда кирмайди;

(Ўқилиши: $\forall$-қоиданинг ўқилиши каби).

Изоҳ: S_p-, $S_{\forall\exists}$- ва S^t_x-қоидалар бир пайтда бир неча ўзгарувчилар ва бир неча эркин предмет ўзгарувчилар учун осонликча умумлаштирилиб, бир пайтда барча ўзгарувчилар бўйича қўлланилишлари мумкин.

1-таъриф. 1°. Предикатлар ҳисобининг ҳар бир аксиомаси предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формула ҳисобланади.

2°. Аксиомаларга келтириб чиқариш қоидаларини чекли марта қўллаш натижасида ҳосил қилинадиган ҳар бир формула предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи формула ҳисобланади.

3°. Бошқа келтириб чиқарилувчи формулалар йўқ.

2-таъриф. Предикатлар ҳисобидаги (аксиомалар системасидаги) *исбот* деб, формулаларнинг шундай чекли кетма-кетлиги $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ га айтиладики, бу кетма-кетликнинг ҳар бир $\mathbf{C}_i$ $(i=\overline{1,n})$ ҳади

1°. ё аксиомага,

2°. ё ўзидан (шу кетма-кетликда) олдин келувчи формула(лар) га MP-қоида, S_p-қоида, $S_{\forall\exists}$-қоида, S^t_x-қоида, $\forall$-қоида ёки $\exists$-қоидани қўллаш натижасида ҳосил қилингандир. $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ кетма-кетлик ўзининг охирги ҳади $(\mathbf{C}_n)$ нинг *исботи* дейилади.

3-таъриф. Предикатлар ҳисобининг исботга эга бўлган ҳар бир формуласи предикатлар ҳисобида исботланувчи (келтириб чиқарилувчи) формула дейилади.

Юқоридаги таърифдан кўринадики, бирор $\mathbf{A}$ формуланинг исботи $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{A}\equiv \mathbf{C}_n$,

C_1 — аксиома, ҳар бир C_{i+1} $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ эса ё аксиома, ё ўзидан олдин келувчи формулалардан келтириб чиқариш қоидаси ёрдамида ҳосил қилинар экан.

„**A**—аксиомалар системасидан келтириб чиқарилувчи формула“, „**A**—исботланувчи формула“ (ва шу) каби иборалар одатдагидек $\vdash$**A** кўринишда белгиланади. Предикатлар ҳисобининг ҳар бир исботга эга бўлган формуласи шу ҳисобнинг теоремаси дейилади (аксиомаларни исботи узунлиги 1 га тенг бўлган теоремалар деб қараш мумкин).

Предикатлар ҳисоби формал аксиоматик назариясини (биринчи тартибли формал аксиоматик тил сифатида) L_1 билан белгилаймиз. Агар **A** келтириб чиқарилувчи формула бўлса, у ҳолда $\vdash$**A** ёзув баъзан $\vdash_{L_1}$**A** каби ҳам ёзилади.

И з о ҳ. $\vdash$**A** (ёки $\vdash_{L_1}$**A**) бўлса, у ҳолда **A** предмет тилнинг (ўрганилаётган тилнинг, яъни „предикатлар ҳисоби“ деб аталувчи формал аксиоматик тилнинг) теоремаси, „$\vdash$**A**“ (ёки $\vdash_{L_1}$**A**) жумла эса метатилнинг (яъни, тадқиқотчи ёки формал тилни ўрганаётган шахс тилининг) теоремаси эканлигини эслатиб ўтамиз.

Предикатлар ҳисобига жумлалар ҳисобининг барча аксиомалари ва келтириб чиқариш қоидалари кирганлиги учун жумлалар ҳисоби тўлиқлигича предикатлар ҳисобига киришини сезиш қийин эмас. Жумлалар ҳисобида „исбот“ (яъни „аксиомалардан келтириб чиқариш“) тушунчаси „гипотезалардан (берилган формулалардан) келтириб чиқариш“ тушунчасигача кенгайтирилган эди. Предикатлар ҳисоби учун ҳам худди шундай тушунчани киритамиз.

$\Gamma = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m\}$ $(m>0)$ гипотезалар деб аталувчи формулалар рўйхати бўлсин.

4-т а ъ р и ф. Γ рўйхатдан ҳосил қилинадиган *исбот* (қисқача, Γ рўйхатдаги исбот) деб, формулаларнинг шундай кетма-кетлиги $C_1, C_2, \ldots, C_n$ га айтиладики, бу кетма-кетликдаги ҳар бир C_i $(i=\overline{1,n})$ формула

а) ё аксиома,

б) ё Γ рўйхатнинг бирор формуласи,

---

* „Ҳар бир аксиома“ ёки „аксиомалар системаси“ деганда биз қабул қилинган аксиомалар системаси $[(1a)-(6b)]$ ва унга кирган аксиомаларни назарда тутамиз.

в) ё ўзидан (шу кетма-кетликда) олдин келувчи формула(лар)дан MP-қоида, S_P-қоида, $S_{\forall\exists}$-қоида, S^t_x-қоида, $\forall$-қоида ёки $\exists$-қоидаларнинг бири ёрдамида ҳосил қилингандир; бу ерда S_P-қоида фақат мазкур кетма-кетликдаги аксиома ва уларнинг натижаларига қўлланилади (аксиомаларнинг натижаси деганда аксиомалардан келтириб чиқариш қоидалари ёрдамида ҳосил қилинадиган формулалар тушунилади).

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ кетма-кетлик Γ рўйхатдаги исбот бўлса, у ўзининг охирги ҳади ($\mathbf{C}_n$) нинг исботи дейилади. Агар $\mathbf{A}$ формула $\Gamma = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m\}$ рўйхатдан келтириб чиқарилувчи бўлса, у ҳолда бу далил $\Gamma \vdash \mathbf{A}$ (ёки $\Gamma \vdash_{L_2} \mathbf{A}$) ёки $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m \vdash \mathbf{A}$ (ёки $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m \vdash_{L_2} \mathbf{A}$) каби белгиланади. Агар $\Gamma = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $\Gamma \vdash \mathbf{A}$ тушунча $\mathbf{A}$ тушунчага айланади.

Юқорида эслатилганидек жумлалар ҳисобида ҳосил қилинган келтириб чиқариш муносабатлари (метатеоремалар) тўлиқлигича предикатлар ҳисобида сақланиб қолади. Шунинг учун биз улардан предикатлар ҳисобида ҳам керакли мақсадларда фойдаланишимиз мумкин. Масалан, „$\vdash \mathbf{A} \to B$ ва $\vdash B \to \mathbf{A}$ бўлса, у ҳолда $\vdash \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ бўлади“ деган метатеорема предикатлар ҳисобида ҳам ўринлидир.

Энди қуйидаги мисолларни кўриб чиқайлик (уларни метатеорема сифатида ёзамиз).

1-теорема. $\vdash \forall x\mathbf{A}(x) \sim \forall x\mathbf{A}(y)$.

Исботи. 1°. $\vdash \forall xP(x) \to P(y)$ — (6а) аксиома,

2°. $\vdash \forall xP(x) \to \forall yP(y)$ — $\forall$-қоида (1°),

3°. $\vdash \forall yP(y) \to P(x)$ — S^x_y, $S_\forall$-қоидалар (1°),

4°. $\vdash \forall yP(y) \to \forall xP(x)$ — $\forall$-қоида (3°),

5°. $\vdash \forall x\mathbf{A}(x) \to \forall y\mathbf{A}(y)$ — S_P-қоида (2°),

6°. $\vdash \forall y\mathbf{A}(y) \to \forall x\mathbf{A}(x)$ — S_P-қоида (4°),

7°. $\vdash \forall x\mathbf{A}(x) \sim \forall y\mathbf{A}(y)$ — (5° ва 6° дан юқорида келтирилган метатеоремага асосан).

Ушбу исботни янада соддароқ кўринишда ёзиш мумкин—3° ни ташлаб юбориб, 4° ни 2° дан $S_\forall$-қоида ёрдамида ҳосил қилиш мумкин.

2-теорема. $\vdash \exists x\mathbf{A}(x) \sim \exists y\mathbf{A}(y)$.

Бу теореманинг исботи олдинги теореманинг исботига ўхшаш бўлиб, уни ўқувчи қийинчиликсиз бажариши мумкин.

3-теорема. $\forall y(R\to P(y))\vdash R\to\forall xP(x)$, *бу ерда* R — *ёпиқ формула.*

Формулаларнинг қуйидаги кетма-кетлиги $R\to\forall xP(x)$ формуланинг $\Gamma=\{\forall y(R\to P(y))\}$ рўйхатдаги исботидир:

1°. $\forall xP(x)\to P(y)$	— (6а) аксиома,
2°. $\forall tP(t)\to P(y)$	— $S_\forall$-қоида (1°),
3°. $\forall tP(t)\to P(x)$	— S_y^x-қоида (2°),
4°. $\forall yP(y)\to P(x)$	— $S_\forall$-қоида (3°),
5°. $\forall yP(y)\to\forall xP(x)$	— $\forall$-қоида (4°),
6°. $\forall yP(y)\to P(y)$	— S_x^y-қоида (4°),
7°. $\forall y(R\to P(y))\to(R\to P(y))$	— S_p-қоида (6°),
8°. $\forall y(R\to P(y))$	— гипотеза ($\in\Gamma$),
9°. $R\to P(y)$	— MP (7°, 8°),
10°. $R\to\forall yP(y)$	— $\forall$-қоида (9°),
11°. $R\to\forall xP(x)$	— $S_\forall$-қоида (10°).

Шундай қилиб, $\forall y(R\to P(y))\vdash R\to\forall xP(x)$ экан. Ҳосил бўлган муносабат $\vdash(\forall y(R\to P(y)))\to(R\to\forall xP(x))$ деб ёзишга асос бўла оладими? Бу саволга жавоб бериш учун предикатлар ҳисобида „дедукция теоремаси" ўринли эканини кўрсатиш керак.

Дедукция теоремасининг ифодаланиши II бобнинг 3-§ ида келтирилган — бу ифода предикатлар ҳисоби учун ҳам яроқлидир. Унинг бевосита исботига ўтишдан олдин баъзи тушунчаларни ва маълумотларни киритамиз ҳамда эслатиб ўтамиз.

II бобнинг 4-§ ида ҳосилавий келтириб чиқариш қоидалари келтирилиб, улар орасида „шартларни бирлаштириш", „шартларни ажратиш" ва „шартларнинг ўрнини алмаштириш" қоидалари кўрсатилган эди. Мазкур қоидалар ва дедукция теоремасига асосан ушбу формулалар келтириб чиқарилувчи бўлади:

1. $(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)$,
2. $(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C))$,
3. $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$ ёки
   $(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$.

Шартли равишда бу формулаларнинг биринчисини (ШБ), иккинчисини (ША), учинчисини эса (ШЎА) каби белгилаймиз.

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ формулалар кетма-кетлиги **B** формуланинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулалардан келиб чиқадиган исботи (предикатлар ҳисобида), $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \geqslant 0)$ лар эса гипотезаларда қатнашган барча эркин предмет ўзгарувчилар бўлсин. $A_1, \ldots, A_n$ формулаларнинг $C_1, \ldots, C_m$ исботда қатнашган энг биринчиси $A_i (\equiv C_k)$ бўлсин, $(i = \overline{1,n}\ k = \overline{1,m})$. Бу шуни англатадики, исботнинг $C_1, \ldots, C_{k-1}$ қисмида $A_1, \ldots, A_n$ формулаларнинг бирортаси ҳам қатнашмайди. Агар ушбу шартлар бажарилса, $C_1, \ldots, C_m$ исботда $x_1, \ldots, x_r$ ўзгарувчилар ўзгаришсиз сақланади деймиз:

α) $\forall$- ва $\exists$-қоидалар $x_1, \ldots, x_r$ ўзгарувчилар бўйича $A_1, \ldots, A_n$ формулаларга қўлланилмайди;

β) Исбот давомида $\forall$- ва $\exists$-қоидалар $x_1, \ldots, x_r$ ўзгарувчиларга нисбатан исботнинг фақат $C_1, C_2, \ldots, C_{k-2}$ қисмидаги формулаларга қўлланилиши мумкин.

Дедукция теоремасининг исботи.

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ формулалар **B** формуланинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулалардан келиб чиқадиган исботи бўлсин. Агар A_n бу исботда қатнашмаган бўлса, берилган исботга ушбу формулаларни киритиб, уни „узайтирамиз".

$$A \to (B \to A),\ C_m \to (A_n \to C_m),\ A_n \to C_m,$$

яъни формулаларнинг қуйидаги кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, A \to (B \to A), C_m \to (A_n \to C_m), A_n \to C_m.$$

Бу кетма-кетлик $A_n \to C_m$ формулаларнинг $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ формулалардан ҳосил бўладиган исботидир. ($C_m \equiv B$ ҳамда ҳосил бўлган исботда A_n қатнашмаслигини эслатиб ўтамиз), ва демак,

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$$

ўринлидир.

Фараз қилайлик, A_n берилган исботда қатнашган бўлиб, унинг исботдаги биринчи қатнашиши $A_n \equiv C_k$ бўлсин. C_k дан бошлаб исботдаги ҳар бир $C_k, C_{k+1}, \ldots, C_m$ формуланинг олдига „$A_n \to$" белгини „улаб" ушбу кетма-кетликни ҳосил қиламиз:

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_{k-1}, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_k, \mathbf{A}_n\mathbf{C} \to_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m \qquad (1)$$

(1) даги ҳар бир формула олдига баъзи формулаларни ёзган ҳолда бу кетма-кетликни „узайтириб", $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m$ формуланинг исботини қурамиз. Бунда ҳар бир i учун $\mathbf{C}_i$ қандай формула эканлигига қараб, унинг олдига маълум бир формулаларни ёзиш керак. Ҳар бир $\mathbf{C}_i$:

1) ё аксиома,

2) ё $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ формуланинг бири,

3) ё ўзидан олдин келувчи қандайдир иккита формуладан MP-қоида ёрдамида ҳосил қилинган,

4) ё ўзидан олдин келган бирор формуладан S_p-қоида ёрдамида ҳосил қилинган,

5) ё ўзидан олдин келган бирор формуладан $\forall$-қоида ёрдамида ҳосил қилинган,

6) ё ўзидан олдин келган бирор формуладан $\exists$-қоида ёрдамида ҳосил қилинган,

7) ё ўзидан олдин келган бирор формуладан S_x^t-қоида ёрдамида ҳосил қилинган,

8) ё ўзидан олдин келган бирор формуладан $S_{\forall\exists}$-қоида ёрдамида ҳосил қилингандир.

$\mathbf{C}_i$ 1—2-бандда айтилганидек формула бўлса, у ҳолда теореманинг исботи II боб (2-§) да келтирилган исботдек бўлади.

$\mathbf{C}_i$ $(i > k)$ 3-бандда айтилгандек формула бўлсин, яъни $\mathbf{C}_i$ ўзидан олдин келган қандайдир $\mathbf{C}_p$ ва $\mathbf{C}_q$ $(p, q < n)$ формулалардан MP-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин. Равшанки, $\mathbf{C}_q \equiv \mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i$ бўлиб, **B** нинг исботи ушбу кўринишда бўлади:

$$\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_p, \ldots, \mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{C}_k, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{C}_m. \qquad (2)$$

У ҳолда (1) кетма-кетлик

$$\begin{gathered}\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_p, \ldots, \mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{C}_{k-1}, \\ \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_k, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_m \end{gathered} \qquad (1')$$

кўринишда бўлади ($\mathbf{C}_k \equiv \mathbf{A}_n$ эканлигини эслатиб ўтамиз). (1′) кетма-кетликни „узайтириш" учун $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига ушбу формулаларни ёзамиз: $A \to (B \to A)$, $\mathbf{C}_p \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_p)$, $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_p$, $(\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i) \to (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i))$, $\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i)$, $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$, $(\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_p) \to ((\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i)) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i))$, $((\mathbf{A}_n \to (\mathbf{C}_p \to \mathbf{C}_i)) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i)$.

$\mathbf{C}_i$ $(i > k)$ 4-бандда айтилгандек формула бўлсин. Маълумки, S_p-қоида фақат аксиомалар ва уларнинг натижаларига қўлланилади. Шунинг учун $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига ушбу формулаларни ёзиш кифоядир:

$$A \to (B \to A), \quad \mathbf{C}_i \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i).$$

$\mathbf{C}_i$ формула $(i > n)$ ўзидан олдин келган бирор $\mathbf{C}_p$ $(p < i)$ формулалардан $\forall$-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин (5-банд). Бундай ҳолда $\mathbf{C}_p \equiv \mathbf{D} \to \mathbf{A}(x)$, $\mathbf{C}_i \equiv \mathbf{D} \to \forall x \mathbf{A}(x)$ эканлиги равшандир, бу ерда $\mathbf{D}$—таркибида x ўзгарувчи эркин қатнашмаган формуладир. (1′) кетма-кетлик $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига ушбу формулаларни ёзиш билан „узайтирилади":

1°. $A \to (B \to A)$,
2°. $(\mathbf{D} \to \mathbf{A}(x)) \to (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{D} \to \mathbf{A}(x)))$,
3°. $\mathbf{A}_n \to (\mathbf{D} \to \mathbf{A}(x))$,
4°. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$ — [(ШБ)],
5°. $(\mathbf{A}_n \to (\mathbf{D} \to \mathbf{A}(x))) \to (\mathbf{A}_n \wedge \mathbf{D} \to \mathbf{A}(x))$,
6°. $\mathbf{A}_n \wedge \mathbf{D} \to \mathbf{A}(x)$,
7°. $\mathbf{A}_n \wedge \mathbf{D} \to \forall x \mathbf{A}(x)$ — [$\forall$-қоидага асосан],
8°. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$ — [(ША)],
9°. $(\mathbf{A}_n \wedge \mathbf{D} \to \forall x \mathbf{A}(x)) \to (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{D} \to \forall x \mathbf{A}(x)))$,
10°. $\mathbf{A}_n \to (\mathbf{D} \to \forall x \mathbf{A}(x))$.

$\mathbf{C}_i$ $(i > n)$ формула ўзидан олдин келган бирор $\mathbf{C}_p$ $(p < i)$ формуладан $\exists$-қоида ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин (6-банд). Бундай ҳолда $\mathbf{C}_p \equiv \mathbf{A}(x) \to \mathbf{D}$, $\mathbf{C}_i \equiv \exists x \mathbf{A}(x) \to \mathbf{D}$ эканлиги равшандир, бу ерда $\mathbf{D}$—таркибида x ўзгарувчи эркин қатнашмаган формуладир. (1′) кетма-кетликни $\mathbf{A}_n \to \mathbf{C}_i$ формула олдига ушбу формулаларни ёзиш ҳисобига „узайтирамиз".

1°. $A \to (B \to A)$,
2°. $(\mathbf{A}(x) \to \mathbf{D}) \to (\mathbf{A}_n \to (\mathbf{A}(x) \to \mathbf{D}))$,
3°. $\mathbf{A}_n \to (\mathbf{A}(x) \to \mathbf{D})$,
4°. $(\mathbf{A}_n \to (\mathbf{A}(x) \to \mathbf{D})) \to (\mathbf{A}(x) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{D}))$ — [(ШУА)],
5°. $\mathbf{A}(x) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{D})$,
6°. $\exists x \mathbf{A}(x) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{D})$ — [$\exists$-қоидага асосан],
7°. $(\exists x \mathbf{A}(x) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{D})) \to (\mathbf{A}_n \to (\exists x \mathbf{A}(x) \to \mathbf{D}))$ — [(ШУА)],
8°. $\mathbf{A}_n \to (\exists x \mathbf{A}(x) \to \mathbf{D})$.

Олдинги иккита бандда $i > n$ бўлганлигидан $\forall$- ва $\exists$-қоидалар $\mathbf{A}_n$ нинг исботидаги дастлабки учрашидан кейин қўлланилган. Шу сабабли x ўзгарувчи ўзгаришсиз сақланади, ва демак, $\mathbf{A}_n$ формулага эркин ҳолда кирмайди. $\mathbf{D}$ формулада шартга кўра x эркин ҳолда қатнашмаганлиги учун $\mathbf{A}_n \wedge \mathbf{D}$ формулага эркин ҳолда кирмайди.

Ниҳоят, $\mathbf{C}_l$ ўзидан олдин келган бирор формуладан S^t_x-ёки $S_{\forall\exists}$-қоидалар ёрдамида ҳосил қилинган бўлсин (7 ва 8-бандлар). Бу ҳоллар учун дедукция теоремасини исботлаш жуда осон бўлганлиги учун уни ўқувчининг диққатига ҳавола этамиз.

1-мисол. Ушбу мисолда биз дастлаб

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \quad \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$$

эканлигини кўрсатиб, сўнгра эса келтирилган исботга таяниб

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

эканлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги формулалар кетма-кетлиги $\forall x Q(x)$ формуланинг $\forall x(P(x) \to Q(x))$ ва $\forall x P(x)$ формулалардан келиб чиқадиган исботидир; бу ерда $\mathbf{A}_1 \equiv \forall x(P(x) \to \to Q(x)$, $\mathbf{A}_2 \equiv \forall x P(x)$, $n=2$, $\mathbf{B} \equiv \forall x Q(x)$;

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ — гипотеза,
2. $\forall x P(x) \to P(y)$ — $(6a)$ аксиома,
3. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(y) \to Q(y)C$— S_y-қоида (2°),
4. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(x) \to Q(x)$—$C$ S^x_y-қоида (3°),
5. $P(x) \to Q(x)$ — MP-қоида (1°, 4°),
6. $\forall x P(x)$ — гипотеза,
7. $\forall x P(x) \to P(x)$ — S^x_y-қоида (2°),
8. $P(x)$ — MP-қоида (6°, 7°),
9. $Q(x)$ — MP-қоида (8°, 5°),
10. $A \to (B \to A)$ — $(1a)$ аксиома,
11. $Q(x) \to ((A \wedge B \to A) \to Q(x))$ — S_p-қоида (10°),
12. $(A \wedge B \to A) Q(x)$ — MP-қоида (9°, 11°),
13. $(A \wedge B \to A) \to \forall x Q(x)$ — $\forall$-қоида (12°),
14. $A \wedge B \to A$ — $(2a)$ аксиома,
15. $\forall x Q(x)$ — MP-қоида (13°, 14°).

Ушбу исботда $\mathbf{A}_2$ олтинчи ўринда ($k=6$) учрайди, яъни $\mathbf{C}_6 \equiv A_2 \equiv \forall x P(x)$, шунинг учун олтинчи формуладан бошлаб кейинги формулаларнинг олдига

„$\forall xP(x)\to$" ифодани „улаб" янги кетма-кетлик ҳосил қиламиз:

1°. $\forall x(P(x)\to Q(x))$,

2°. $\forall xP(x)\to P(y)$,

3°. $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(P(y)\to Q(y))$,

4° $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(P(x)\to Q(x))$,

5°. $P(x)\to Q(x)$,

6°. $\forall xP(x)\to\forall xP(x)$,

7°. $\forall xP(x)\to(\forall xP(x)\to P(x))$,

8°. $\forall xP(x)\to P(x)$,

9°. $\forall xP(x)\to Q(x)$,

10°. $\forall xP(x)\to(A\to(B\to A))$,

11°. $\forall xP(x)\to(Q(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x)))$,

12°. $\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x))$,

13°. $\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x))$,

14°. $\forall xP(x)\to(A\wedge B\to A)$,

15°. $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$,

Энди ҳар бир C_i ($i>6$) нинг (юқоридаги 1 — 15-формулалар кетма-кэтлигида) қандай формула эканлигига қараб $\mathbf{A}_n\to\mathbf{C}_j$ (7°—15°) формулалар олдига керакли формулаларни ёзиб, мазкур 1°—15°-кетма-кетликни „узайтирамиз" ва натижада $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ формуланинг $\forall x(P(x)\to Q(x))$ формуладан келиб чиқадиган исботига эга бўламиз.

1′. $\forall xP((x)\to Q(x))$,

2′. $\forall xP(x)\to P(y)$,

3′. $\forall x(P(x)\to Q(x))'\to(P(y)\to Q(y))$,

4′. $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(P(x)\to Q(x))$,

5′. $P(x)\to Q(x)$,

6′. $\forall xP(x)\to\forall xP(x)$,

7′. $\forall xP(x)\to P(x)$,

8′. $A\to(B\to A)$

9′. $(\forall xP(x)\to P(x))\to(\forall xP(x)\to(\forall xP(x)\to P(x)))$,

10′. $\forall xP(x)\to(\forall xP(x)\to P(x))$,

11′. $(P(x)\to Q(x))\to(\forall xP(x)\to(P(x)\to Q(x)))$,

12′. $\forall xP(x)\to(P(x)\to Q(x))$,

13′. $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C)$,

14′. $(\forall xP(x)\to P(x))\to((\forall xP(x)\to(P(x)(\to Q(x)))\to$
$\to(\forall xP(x)\to Q(x))),$

15′. $(\forall xP(x)\to(P(x)\to Q(x)))\to(\forall xP(x)\to Q(x)),$

16′. $\forall xP(x)\to Q(x),$

17′. $(Q(x)\to)(A\wedge B\to A)\to Q(x)))\to\forall xP(x)\to$
$\to(Q(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x)))),$

18′. $Q(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x)),$

19′. $\forall xP(x)\to(Q(x)\to((A\wedge B\to A(\to Q(x))),$

20′. $(\forall xP(x)\to Q(x))\to((\forall xP(x)\to(Q(x)\to((A\wedge B\to A)\to$
$\to Q(x))))\to(\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x)))),$

21′. $(\forall xP(x)\to(Q(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x))))\to$
$\to(\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x))),$

22′. $\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x),$

23′. $(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C),$

24′. $(\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to Q(x)))\to(\forall xP(x)\wedge$
$\wedge(A\wedge B\to A)\to Q(x)),$

25′. $\forall xP(x)\wedge(A\wedge B\to A)\to Q(x),$

26′. $\forall xP(x)\wedge(A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x),$

27′. $(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C)),$

28′. $(\forall xP(x)\wedge(A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x))\to(\forall xP(x)\to$
$\to((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x))),$

29′. $\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x)),$

30′. $(A\wedge B\to A)\to(\forall xP(x)\to(A\wedge B\to A)),$

31′. $A\wedge B\to A,$

32′. $\forall xP(x)\to(A\wedge B\to A),$

33′. $((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x))\to(\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to$
$\to\forall xQ(x))),$

34′. $\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x)),$

35′. $(\forall xP(x)\to(A\wedge B\to A))\to((\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to$
$\to\forall xQ(x)))\to(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))),$

36′. $(\forall xP(x)\to((A\wedge B\to A)\to\forall xQ(x)))\to$
$\to(\forall xP(x)\to\forall xQ(x)),$

37′. $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$

Изоҳ. 1′—37′-кетма-кетликни ҳосил қилиш жараёнида биз баъзи такрорланувчи формулаларни ташлаб юбордик.

Натижа. *Агар* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\vdash \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1} \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots)$$

бўлади.

4-теорема. *Агар* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ *бўлса, у ҳолда*

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$$

булади.

Ушбу теореманинг исботи жумлалар ҳисобида ўринли бўлган худди шу теореманинг исботи билан бир хилдир.

Натижа. *Агар* $\vdash \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \ldots \to (\mathbf{A}_{n-1}) \to (\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}))\ldots)$ *булса, у ҳолда*

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$$

булади.

2-§. Ҳосилавий келтириб чиқариш қоидалари. Баъзи тавтологияларнинг исботи

Предикатлар ҳисоби (алгебраси) нинг жумлалар ҳисоби (алгебраси) дан принципиал фарқи унда кванторлар деб аталадиган иккита махсус амалнинг мавжудлигидир. Бу фарқда иккала системада ишлатиладиган келтириб чиқариш (ҳосил қилиш) қоидалари ҳам намоён булади. Жумлалар ҳисобининг (алгебрасининг) барча келтириб чиқариш (ҳосил қилиш) қоидалари предикатлар ҳисобида (алгебрасида) сақланиб қолиши билан бир қаторда, предикатлар ҳисоби (алгебраси) да кванторлар билан боғлиқ бўлган янги қоидалар мавжуддир.

1-теорема. $\mathbf{A}(x)$ — *ихтиёрий формула,* $\mathbf{A}(t)$ *эса бу формуладан x ни эркин қатнашган жойларида t билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинган формула,* Γ *эса гипотезалар тўплами бўлсин* (Γ = ∅ булиши ҳам мумкин).

У ҳолда

I. ∀ ни *киритиш*: $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x)$ *булса,* $\Gamma \vdash \forall x \mathbf{A}(x)$ *булади;*

II. ∀ ни *йўқотиш*: $\forall x \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{A}(t)$;

III. ∃ ни *киритиш*: $\mathbf{A}(t) \vdash \exists x \mathbf{A}(x)$;

IV; ни *йўқотиш*; $\Gamma, \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}$ *булса,* $\Gamma, \exists x \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}$ *булади; бу ерда, бундан ташқари, қуйидаги шартлар бажарилиши керак:*

1) ∀ *ни йўқотиш ва* ∃ *ни киритишда* $\mathbf{A}(x)$ *формуладаги x учун t эркиндир;*

2) $\forall$ *ни киритиш ва* $\exists$ *ни йуқотишда* x *узгарувчи* Γ *руйхатдаги формулаларга эркин ҳолда кирмайди;*

3) $\exists$ *ни йуқотишда* x *узгарувчи* **B** *формулага эркин ҳолда кирмайди.*

Исботи. (I) **B** бирорта аксиома ёки келтириб чиқарилувчи формула бўлсин:

1°. $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x)$	— теорема шарти,
2°. $\Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}(x)$	— (II боб, 3-§, (γ) хосса),
3°. $\Gamma \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{A}(x)$	— дедукция теоремасига асосан,
4°. $\Gamma \vdash \mathbf{B} \to \forall x \mathbf{A}(x)$	— $\forall$-қоида (3°) га асосан,
5°. $\Gamma, \mathbf{B} \vdash \forall x \mathbf{A}(x)$	— 2-теоремага асосан (2-§).
6°. $\Gamma \vdash \forall x \mathbf{A}(x)$	

Қуйида биз 3° дан 4° га, ва 5° дан 6° га ўтиш жараёнини кўрсатамиз.

$\Gamma \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{A}(x)$ бўлиб, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетлик $\mathbf{B} \to \mathbf{A}(x)$ формуланинг Γ руйхатдаги исботи бўлсин. Маълумки, шартга кўра ушбу исбот жараёнида x ўзгарувчи ўзгаришсиз сақланади ҳамда $\mathbf{C}_m \equiv \mathbf{B} \to \mathbf{A}(x)$ дир.

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетликни $\mathbf{B} \to \forall x \mathbf{A}(x)$ формула ҳисобига „узайтирсак“,

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_{m-1}, \mathbf{B} \to \mathbf{A}(x), \mathbf{B} \to \forall x \mathbf{A}(x)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлиб, у $\mathbf{B} \to \forall x \mathbf{A}(x)$ нинг Γ руйхатдаги исботи бўлади (бу кетма-кетликда охирги формула ўзидан олдинги формуладан $\forall$-қоида ёрдамида ҳосил қилинган). 3° дан 4° га ўтиш ўринли эканлиги кўрсатилди.

$\Gamma, \mathbf{B} \vdash \forall x \mathbf{A}(x)$ бўлсин. Шартга кўра $\vdash \mathbf{B}$ бўлганлиги учун $\Gamma \vdash \mathbf{B}$ бўлади (II боб, 3-§, (α) хосса). $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m$ кетма-кетлик $\forall x \mathbf{A}(x)$ нинг $\Gamma \cup \{\mathbf{B}\}$ руйхатдаги, $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_k$ эса **B** нинг Γ руйхатдаги исботи бўлсин. Буларда $\mathbf{C}_m \equiv \forall x \mathbf{A}(x)$ ҳамда $\mathbf{D}_k \equiv \mathbf{B}$ эканлиги маълум. $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_{k-1}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{m-1}, \forall x \mathbf{A}(x)$ кетма-кетлик ўзининг охирги формуласининг Γ руйхатдаги исботи бўлиши равшандир.

(II). $\mathbf{A}(t)$ формула шартга кўра $\mathbf{A}(x)$ формуладан x нинг эркин қатнашган ўринларида x учун эркин бўлган t ўзгарувчига алмаштириш ёрдамида ҳосил қилингандир. Шунинг учун $\forall x P(x) \to P(y)$ аксиомага S_p-қоидани қўлласак, $\forall x \mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(t)$ келтириб чиқарилувчи формула ҳосил бўлади, яъни

$$\vdash \forall x \mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(t) \qquad \text{(I)}$$

булади. (I) дан 2-теоремага асосан (4-боб)

$$\forall x\mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{A}(t)$$

келиб чиқади.

(III). Исботни ўқувчининг диққатига ҳавола этамиз.

IV. 1°. $\Gamma, \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}$ — теорема шарти;

2°. $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$ — дедукция теоремасига асосан;

3°. $\Gamma \vdash \exists x\mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}$ — $\exists$-қоидага асосан;

4°. $\Gamma, \exists x\mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}$ — (4-боб) 2-теоремага асосан

(2° дан 3° га ўтиш жараёнини ўқувчи қийинчиликсиз ҳал эта олади).

Исбот этилган теорема бизга унинг шарт ва хулосаларини ушбу келтириб чиқариш қоидалари сифатида ёзишга имкон беради:

I. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(x)}{\Gamma \vdash \forall x\mathbf{A}(x)}$ — $\forall$ ни киритиш қоидаси;

II. $\dfrac{\forall x\mathbf{A}(x)}{\mathbf{A}(t)}$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидаси;

III. $\dfrac{\mathbf{A}(t)}{\exists x\mathbf{A}(x)}$ — $\exists$ ни киритиш қоидаси;

IV. $\dfrac{\Gamma, \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}}{\Gamma, \exists x\mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{B}}$ — $\exists$ ни йўқотиш қоидаси.

Бу ерда, табиий, 1-теореманинг барча шартлари бажарилади деб фараз этилади.

2-теорема.

(а). *Агар* $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}(x)$ *бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \forall x\mathbf{A}(x) \to \forall x\mathbf{B}(x)$ *булади.*

(б). *Агар* $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}(x)$ *бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \exists x\mathbf{A}(x) \to \exists x\mathbf{B}(x)$ *булади.*

(в). *Агар* $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x) \sim \mathbf{B}(x)$ *бўлса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \forall x\mathbf{A}(x) \sim \forall x\mathbf{B}(x)$ *булади*

(г). *Агар* $\Gamma \vdash \mathbf{A}(x) \sim \mathbf{B}(x)$ *булса, у ҳолда* $\Gamma \vdash \exists x\mathbf{A}(x) \sim \exists x\mathbf{B}(x)$ *булади.*

Исботи. (а). $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_{m-1}, \mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}(x)$ кетма-кетлик $\mathbf{A}(x) \to \mathbf{B}(x)$ формуланинг Γ рўйхатдаги исботи бўлсин. Ушбу кетма-кетликни қуйидаги формулалар ҳисобига „узайтирсак“, $\forall x\mathbf{B}(x)$ формулаларнинг $\Gamma \cup \cup \{\forall x\mathbf{A}(x)\}$ рўйхатдаги исботи ҳосил булади:

1°. $\forall x\mathbf{A}(x)$,
2°. $\forall xP(x)\to P(y)$,
3°. $\forall x\mathbf{A}(x)\to\mathbf{A}(y)$,
4°. $\forall x\mathbf{A}(x)\to\mathbf{A}(x)$,
5°. $\mathbf{A}(x)$,
6°. $\mathbf{B}(x)$,
7°. $A\to(B\to A)$,
8°. $\mathbf{B}(x)\to((A\to A\vee B)\to B(x))$,
9°. $(A\to A\vee B)\to B(x)$,
10°. $(A\to A\vee B)\to\forall xB(x)$,
11°. $A\to A\vee B$,
12°. $\forall x\mathbf{B}(x)$.

($\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{m-1}$, $\mathbf{A}(x)\to\mathbf{B}(x)$, $1°, \ldots, 12°$ кетма-кетлик назарда тутилаяпти).

Демак, $\Gamma, \forall x\mathbf{A}(x)\vdash\forall x\mathbf{B}(x)$ экан. Дедукция теоремасига асосан эса $\Gamma\vdash\forall x\mathbf{A}(x)\to\forall x\mathbf{B}(x)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш:

(a′). „Агар $\Gamma\vdash\mathbf{B}(x)\to\mathbf{A}(x)$ бўлса, у ҳолда $\Gamma\vdash\forall x\mathbf{B}(x)\to\forall x\mathbf{A}(x)$ бўлади" деган метатеоремани исботлаш мумкин.

Маълумки „$\Gamma\vdash A\to B$ ва $\Gamma\vdash B\to A$ бўлса, у ҳолда $\Gamma\vdash A\sim B$ бўлади" деган метатеорема ўринлидир. Ушбу метатеоремани (а) ва (а′) ларга қўлласак, у ҳолда (в) келиб чиқади. (б) ва (г) ларни мустақил исботлаш учун ўқувчига қолдирамиз.

3-теорема. $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{A}(x, y)$ *лар ихтиёрий формулалар, x, y—турли ўзгарувчилар*, $\mathbf{C}$ *ва* $\mathbf{D}$ *лар эса x эркин қатнашмаган ихтиёрий формулалар бўлса, у ҳолда:*

1^+. $\vdash\forall x\forall y\mathbf{A}(x, y)\sim\forall y\forall x\mathbf{A}(x, y)$;

2^+. $\vdash\exists x\exists y\mathbf{A}(x, y)\sim\exists y\exists x\mathbf{A}(x, y)$;

3^+. $\vdash\exists x\forall y\mathbf{A}(x, y)\to\forall y\exists x\mathbf{A}(x, y)$;

4^+. $\vdash\neg\exists x\mathbf{A}(x)\sim\forall x\neg\mathbf{A}(x)$;

5^+. $\vdash\neg\forall x\mathbf{A}(x)\sim\exists x\neg\mathbf{A}(x)$;

6^+. $\vdash\forall x(\mathbf{A}(x)\wedge\mathbf{B}(x))\sim\forall x\mathbf{A}(x)\wedge\forall x\mathbf{B}(x)$;

7^+. $\vdash\exists x(\mathbf{A}(x)\vee\mathbf{B}(x))\sim\exists x\mathbf{A}(x)\vee\exists x\mathbf{B}(x)$;

8^+. $\vdash\forall x(\mathbf{C}\wedge\mathbf{A}(x))\sim\mathbf{C}\vee\forall x\mathbf{A}(x)$;

9^+. $\vdash\exists x(\mathbf{C}\wedge\mathbf{A}(x))\sim\mathbf{C}\wedge\exists x\mathbf{A}(x)$;

10^+. $\vdash(\mathbf{D}\to\forall x\mathbf{B}(x))\sim\forall x(\mathbf{D}\to\mathbf{B}(x))$;

11^+. $\vdash(\mathbf{D}\to\exists x\mathbf{B}(x))\sim\exists x(\mathbf{D}\to\mathbf{B}(x))$;

12^+. $\vdash(\forall x\mathbf{A}(x)\to\mathbf{D})\sim\exists x(\mathbf{A}(x)\to\mathbf{D})$;

13^+. $\vdash(\exists x\mathbf{A}(x)\to\mathbf{D})\sim\forall x(\mathbf{A}(x)\to\mathbf{D})$.

Исботи. (1^+).

1°. $\forall x\forall y\mathbf{A}(x, y)\vdash\forall y\mathbf{A}(t, y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидаси;

2°. $\forall yA(t, y) \vdash A(t, v)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидаси;
3°. $\forall x \forall yA(x, y) \vdash A(t, v)$ — транзитивлик (1°, 2°);
4°. $\forall x \forall yA(x, y) \vdash \forall tA(t, v)$ — $\forall$ ни киритиш қоидаси;
5°. $\forall x \forall yA(x, y) \vdash \forall v \forall tA(t, v)$ — $\forall$ ни киритиш қоидаси;
6°. $\forall v \forall tA(t, v) \vdash \forall tA(t, y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидаси;
7°. $\forall tA(t, y) \vdash A(x, y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидаси;
8°. $\forall v \forall tA(t, v) \vdash A(x, y)$ — транзитивлик (6°, 7°);
9°. $\forall v \forall tA(t, v) \vdash \forall xA(x, y)$ — $\forall$ ни киритиш қоидаси;
10. $\forall v \forall tA(t, v) \vdash \forall y \forall xA(x, y)$ — $\forall$ ни киритиш қоидаси;
11°. $\forall x \forall yA(x, y) \vdash \forall y \forall xA(x, y)$ — транзитивлик (5°, 10°);
12°. $\vdash \forall x \forall yA(x, y) \to \forall y \forall xA(x, y)$ — дедукция теоремасига асосан.

Худди шундай усулла (13° — 25° кетма-кетликни ҳосил қилиб)

25°. $\vdash \forall y \forall xA(x, y) \to \forall x \forall yA(x, y)$
га эга бўламиз.

12° ва 25° дан эса

$$\vdash \forall x \forall yA(x, y) \sim \forall y \forall xA(x, y)$$

ни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Юқоридаги исботда 3°, 8° ва 11° да „$\vdash$“ муносабатнинг транзитивлик хоссасидан фойдаландик: „агар $A \vdash B$ ва $B \vdash C$ бўлса, у ҳолда $A \vdash C$ бўлади“.

Ҳақиқатан, $A_1, \ldots, A_n$ ($A_n \equiv B$) B нинг исботи (A формуладан келиб чиқадиган), $B_1, \ldots, B_m$ ($B_m \equiv C$) эса C нинг исботи бўлсин. У ҳолда $A_1, \ldots, A_{n-1}, B, B_1, \ldots, B_{m-1}, C$ кетма-кетлик C нинг A формуладан келиб чиқадиган исботи бўлади.

3⁺. 1°. $\forall yA(x, y) \vdash A(x, v)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига асосан,

2°. $A(x, v) \vdash \exists zA(z, v)$ — $\exists$ ни киритиш қоидасига асосан,

3°. $\forall yA(x, y) \vdash \exists zA(z, v)$ — транзитивлик (1°, 2°), 4°. $\exists x \forall y \mathbf{A}(x, y) \vdash \exists z \mathbf{A}(z, v)$ — $\exists$ ни йўқотиш қоидаси (3°).

5°. $\exists x \forall y \mathbf{A}(x, y) \vdash \forall v \exists z \mathbf{A}(z, v)$ — $\forall$ ни киритиш (4°),

6°. $\exists x \forall y \mathbf{A}(x, y) \vdash \forall y \exists z \mathbf{A}(z, y)$ — $S_{\forall}$-қоида (5°),

7°. $\exists x \forall y \mathbf{A}(x, y) \vdash \forall y \exists z \mathbf{A}(x, y)$ — $S_{\exists}$-қоида (6°),

8°. $\vdash \exists x \forall y \mathbf{A}(x, y) \to \forall y \exists z \mathbf{A}(x, y)$ — дедукция теоремасига асосан.

4+. Дастлаб $\vdash \neg \exists x \mathbf{A}(x) \to \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ ни кўрсатамиз.

1°. $\mathbf{A}(y) \vdash \exists x \mathbf{A}(x)$ — $\exists$ ни киритиш қоидасига кўра,

2°. $\neg \exists x \mathbf{A}(x) \vdash \neg \mathbf{A}(y)$ — контрапозиция „—„—,

3°. $\neg \exists x \mathbf{A}(x) \vdash \forall y \neg \mathbf{A}(y)$ — $\forall$ ни киритиш (2°),

4°. $\neg x \mathbf{A}(x) \vdash \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ — $S_{\forall}$-қоида (3°).

Энди $\vdash \forall x \neg \mathbf{A}(x) \to \neg \exists x \mathbf{A}(x)$ эканлигини кўрсатамиз.

5°. $\forall x \neg \mathbf{A}(x) \vdash \neg \mathbf{A}(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

6°. $\neg \neg \mathbf{A}(y) \vdash \neg \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ — контрапозиция „—„,

7°. $\mathbf{A}(y) \vdash \neg \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ — $\neg\neg$ ни йўқотиш „—„,

8°. $\exists y \mathbf{A}(y) \vdash \neg \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ — $\exists$ ни йўқотиш „—„,

9°. $\neg\neg \forall x \neg \mathbf{A}(x) \vdash \neg \exists y \mathbf{A}(y)$ — контрапозиция

10°. $\forall x \neg \mathbf{A}(x) \vdash \neg \exists y \mathbf{A}(y)$ — $\neg\neg$ ни йўқотиш „

11°. $\forall x \neg \mathbf{A}(x) \vdash \neg \exists x \mathbf{A}(x)$ — $S_{\exists}$-қоидасига кўра.

4° дан $\vdash \neg \exists x \mathbf{A}(x) \to \forall x \neg \mathbf{A}(x)$, 11° дан эса $\vdash \forall x \neg \mathbf{A}(x) \to \neg \exists x \mathbf{A}(x)$ келиб чиқади, ва ниҳоят $\vdash \neg \exists x \mathbf{A}(x) \sim \forall x \neg \mathbf{A}(x)$ га эга бўламиз.

Бу исботда ушбу метатеоремалардан фойдаландик:

(I). „Агар $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\neg \mathbf{B} \vdash \neg \mathbf{A}$ бўлади" ёки „Агар $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\vdash \neg \mathbf{B} \to \neg \mathbf{A}$ бўлади";

(II). „Агар $\neg\neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ бўлади" ёки „Агар $\vdash \neg\neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ бўлади".

Мазкур метатеоремаларнинг исботини келтирайлик.

(I). $A_1, \ldots, A_{n-1}, A \to B$ кетма-кетлик $A \to B$ формуланинг исботи бўлсин. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ эканлиги бизга маълумдир (контрапозиция). У ҳолда ушбу кетма-кетлик $\neg B \to \neg A$ нинг исботи бўлади: $A_1, \ldots, A_{n-1}, A \to B, (A \to B) \to (\neg B \to \neg A), (A \to B) \to \neg B \to \neg A), \neg B \to \neg A$.

Демак, $\vdash A \to B$ бўлса, $\vdash \neg B \to \neg A$ бўлар экан, яъни $A \vdash B$ бўлса, $\neg B \vdash \neg A$ бўлади.

(II) нинг исботини ўқувчи мустақил бажарса, мақсадга мувофиқ бўлади.

6+. 1°. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(y) \wedge B(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

2°. $A(y) \wedge B(y) \vdash A(y)$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

3°. $A(y) \wedge B(y) \vdash B(y)$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

4°. $\forall x(A(x) \wedge B(x) \vdash A(y)$ — транзитивлик (1°, 2°),

5°. $\forall x(A(x) \wedge B(x) \vdash B(y)$ — транзитивлик (1°, 3°),

6°. $\forall x(A(x) \wedge B(x) \vdash \forall yA(y)$ — $\forall$ ни киритиш (4°),

7°. $\forall x(A(x) \wedge B(x) \vdash \forall yB(y)$ — $\forall$ ни киритиш (5°),

8°. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall yA(y) \wedge \forall yB(y)$ — $\wedge$ ни киритиш (6°, 7°).

9°. $\forall xA(x) \wedge B(x)) \vdash \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ — $S_\forall$ -қоида (8°),

10°. $\vdash \forall x(A(x) \wedge B(x)) \to \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ — дедукция теоремасига асосан,

11°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash \forall xA(x)$ — $\wedge$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

12°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash \forall xB(x)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

13°. $\forall xA(x) \vdash A(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

14°. $\forall xB(x) \vdash B(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра, 15°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash A(y)$ — транзитивлик (11°, 13°),

16°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash B(y)$ — транзитивлик (12°, 14°),

17°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash A(y) \wedge B(y)$ — $\wedge$ ни киритиш (15°, 16°),

18°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash \forall y(A(y) \wedge B(y))$ — $\forall$ ни киритиш (17°),

19°. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash \forall x(A(x) \wedge B(x))$ — $S_{\forall}$-қоида (18°),

20°. $\vdash \forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \rightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$ — дедукция теоремасига асосан.

10° ва 20° дан

$$\vdash \forall xA((x) \wedge B(x)) \sim \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

келиб чиқади.

Изоҳ. 6^+ ни исботлашда биз ушбу метатеоремалардан фойдаландик: „Агар $A \vdash B$ ва $A \vdash C$ бўлса, у ҳолда $A \vdash B \wedge C$ бўлади“.

8^+. 1°. $\forall x(C \vee A(x)) \vdash C \vee A(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

2°. $C \vee A(y) \vdash \neg C \rightarrow A(y)$ — илова (I) га қаранг,

3°. $\forall x(C \vee A(x)) \vdash \neg C \rightarrow A(y)$ — транзитив (1°, 2°),

4°. $\forall x(C \vee A(x)), \neg C \vdash A(y)$ — 6-теорема (II-боб, 3-§) га асосан,

5°. $\forall x(C \vee A(x)), \neg C \vdash \forall yA(y)$ — $\forall$ ни киритиш (4°) қоидасига кўра,

6°. $\forall x(C \vee A(x)) \vdash \neg C \rightarrow \forall yA(y)$ — дедукция теоремасиги кўра,

7°. $\neg C \rightarrow \forall yA(y) \vdash C \vee \forall yA(y)$ — илова (II) га қаранг,

8°. $\forall x(C \vee A(x)) \vdash C \vee \forall yA(y)$ — транзитив (6°, 7°),

9°. $\forall x(C \vee A(x)) \vdash C \vee \forall xA(x)$ — $S_{\forall}$-қоида (8°) га асосан,

10°. $\vdash \forall x(C \vee A(x)) \rightarrow C \vee \forall xA(x)$ — дедукция теоремасига асосан, 11°. $\forall xA(x) \vdash A(y)$ — $\forall$ ни йўқотиш қоидасига кўра,

12°. $A(y) \vdash C \vee A(y)$ — $\vee$ ни киритиш қоидасига кўра,

13°. $\forall xA(x) \vdash C \vee A(y)$ — транзитив (11°, 12°),

14°. $C \vdash C \vee A(y)$ — $\vee$ — ни киритиш қоидасига кўра,

15°. $C \vee \forall xA(x) \vdash C \vee A(y)$ — (илова (III) га қаранг),

16°. $C \vee \forall xA(x) \vdash \forall y(C \vee A(y))$ — $\forall$ ни киритиш (15°) га кўра.

17°. $C \vee \forall xA(x) \vdash \forall x(C \vee A(x))$ — $S_{\forall}$ - қоида (16°),

18°. $\vdash C \vee \forall xA(x) \to \forall x(C \vee A(x))$ — дедукция теоремасига кўра.

10° ва 18° лардан 8^{+} келиб чиқади.

Изоҳ. 8^{+} нинг исботида биз ушбу метатеоремалардан фойдаландик:

(I). „$A \vee B \vdash \neg A \to B$“;

(II). „$\neg A \to B \vdash A \vee B$“.

(III). „Агар $A \vdash B$ бўлса, у ҳолда $A \vee C \vdash B$ бўлади“. Бу метатеоремаларни мустақил иш сифатида ўқувчига ҳавола этамиз.

10^{+}. $D \to \forall xB(x) \sim \neg D \vee \forall xB(x) \sim$
$\sim \forall x(\neg D \vee B(x)) \sim \forall x(D \to B(x))$.

12^{+}. $\forall xA(x) \to D \sim \neg \forall xA(x) \vee D \sim$
$\sim \exists x \neg A(x) \vee D \sim \exists x(\neg A(x) \vee D) \sim$
$\sim \exists x(A(x) \to D)$.

(10^{+} ва 12^{+} нинг исботида улардан олдинги 1^{+} — 9^{+}, 11^{+} ва изоҳларда келтирилган баъзи метатеоремалар ишлатилди (кераклилари).

2^{+}, 5^{+}, 7^{+}, 9^{+}, 11^{+} ва 13^{+} ларни исботлаш мустақил иш сифатида ўқувчига қолдирилди.

III бобнинг 4-§ ида предикатлар алгебрасининг баъзи формулалари махсус пренексли форма кўринишига эга эканлиги ва ҳар қандай формулани тенг кучли шакл алмаштиришлар ёрдамида пренексли формага келтириш мумкинлиги айтилган эди. Предикатлар алгебраси билан предикатлар ҳисобининг формулалари бир хил бўлгани учун предикатлар ҳисобида ҳам пренексли формага эга бўлган формулаларни ажратиш мумкин.

4-теорема. **A** *предикатлар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлса, шундай пренексли формага эга бўлган* **B** *формула топиладики,* $\vdash A \sim B$ *ўринли бўлади.*

Мисол.

$$\vdash \neg \exists x \forall z P(x, y, z) \wedge \forall x \exists y S(x, y, z) \sim$$
$$\sim \forall x \neg \forall z P(x, y, z) \wedge \forall x \exists y S(x, y, z) \sim$$
$$\sim \forall x \exists z \neg P(x, y, z) \wedge \forall x \exists y S(x, y, z) \sim$$
$$\sim \forall x (\exists z \neg P(x, y, z) \wedge \exists y S(x, y, z)) \sim$$
$$\sim \forall x (\exists t \neg P(x, y, t) \wedge \exists u S(x, u, z)) \sim$$
$$\sim \forall x \exists t \exists u (\neg P(x, y, t) \wedge S(x, u, z)).$$

3-§. Предикатлар ҳисобининг зидсизлиги ва тўлиқлиги

Ҳар қандай аксиоматик назария учун қўйиладиганидек предикатлар ҳисоби учун ҳам энг асосий проблемалар—зидсизлик проблемасининг ифодаланиши жумлалар ҳисобида келтирилган — бу ифодалаш предикатлар ҳисоби учун ҳам сақланиб қолади.

1-теорема. *Предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи ҳар қандай формула умумқийматлидир.*

Исботи. Мазкур теорема жумлалар ҳисоби учун ҳам исбот этилган эди. Жумлалар ҳисобининг барча аксиомалари ва келтириб чиқариш қоидалари предикатлар ҳисобига киргани учун эслатилган исбот бу ерда ҳам сақланади. 1-теорема тўлиқ исботланиши учун предикатлар ҳисобининг (6*a*), (6*b*) аксиомалари умумқийматли формулалар эканлигини ҳамда $\forall$-қоида, -$\exists$ қоида, $S_\forall$- ва $S_\exists$-қоидалар умумқийматли формулаларга қўлланилганда яна умумқийматли формулаларга олиб келишини кўрсатиш кифоядир.

(6*a*) ва (6*b*) аксиомаларнинг умумқийматли формулалар эканлиги III боб, 5-§ даги 1-теоремада, $\forall$- ва $\exists$-қоидаларнинг хоссалари эса III боб, 5-§ даги 2-теоремада кўрсатилган.

Умумқийматли формулаларга $S_\forall$- ва $S_\exists$-қоидаларни қўллаганда яна умумқийматли формулалар ҳосил бўлиши равшандир.

Теорема исботланди.

2-теорема. *Предикатлар ҳисоби зидсиздир.*

Ушбу теореманинг исботи жумлалар ҳисоби учун исботланган худди шундай теореманинг исботи билан бир хилдир.

Жумлалар ҳисоби ўрганилганда унинг аксиомалари системаси учун тор ва кенг маънолардаги тўлиқлилик проблемалари ечилган эди. Бу проблемалардан иккинчиси асосий проблема бўлиб, уни қуйида предикатлар ҳисоби учун келтирамиз.

1-таъриф. Предикатлар алгебрасининг ҳар бир умумқийматли формуласи предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи бўлса, у ҳолда предикатлар ҳисоби аксиомалари системаси *кенг маънода тўлиқ* дейилади.

Бундан буён предикатлар ҳисобининг тўлиқлиги ҳақида гапирилганда биз унинг кенг маънодаги тўлиқлигини тушунамиз.

Предикатлар ҳисобининг тўлиқлигини 1930 йилда К. Гёдель исботлади. Гёдель теоремаси математик мантиқнинг марказий теоремаларидан бири бўлиб, у предикатлар мантиғи даражасида рост жумлалар исботга эга эканини, бу эса ўз навбатида предикатлар ҳисоби асосида математиканинг у ёки бу бўлимларини формаллаштириш мумкин эканлигини кўрсатади.

Ихтиёрий кванторсиз ёки эркин ўзгарувчига эга бўлмаган формула ёпиқ формула ёки тасдиқ деб аталишини эслатиб ўтамиз. Хусусан, ҳар қандай жумла тасдиқ эканлиги равшандир.

S — тасдиқларнинг бирор тўплами бўлсин.

2-таъриф. (I). Агар $S \vdash \mathbf{A}$ ва $S \vdash \neg \mathbf{A}$ бўлган ҳеч қандай A тасдиқ мавжуд бўлмаса, S *тасдиқларнинг зиддиятсиз тўплами* дейилади.

(II). S тўпламга кирувчи ҳар бир тасдиқ рост бўладиган модель мавжуд бўлса, S *тасдиқларнинг бажарилувчи тўплами* дейилади.

(III). Ҳар бир $\mathbf{A}$ тасдиқ учун $S \vdash \mathbf{A}$ ёки $S \vdash \neg \mathbf{A}$ ўринли бўлса, S (дедуктив) *тўлиқ тўплам* дейилади.

Тасдиқларнинг (дедуктив) тўлиқ тўплами сифатида барча тасдиқлар тўпламини олиш мумкин, аммо бу тўплам зиддиятлидир. Зиддиятли тўплам тасдиқларнинг бажарилувчи тўплами бўлиши мумкин эмаслиги табиийдир. Шу сабабли биз бундан буён тасдиқларнинг зиддиятсиз тўпламларини қараймиз.

1-лемма. *Агар $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$ шартни қаноатлантирувчи ҳар бир S_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) тасдиқлар тўплами зиддиятсиз бўлса, у ҳолда тасдиқларнинг $S = \bigcup\limits_{i>0} S_i$ тўплами зиддиятсиз бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, ҳар бир S_i зиддиятсиз бўлганда S зиддиятли бўлсин. У ҳолда шундай **A** тасдиқ топиладики, $S \vdash$ **A** ва $S \vdash \neg$ **A** бўлади. Бундан эса $\wedge$ ни киритиш қоидасига кўра $S \vdash$ **A** $\wedge \neg$ **A** келиб чиқади **A** $\wedge \neg$ **A** формуланинг исботида S тўпламнинг чекли сондаги формулалари қўлланилади. $S' \subseteq S$, S' — формулаларнинг чекли тўплами ва $S' \vdash$ **A** $\wedge \neg$ **A** бўлсин. У ҳолда қандайдир S_k учун $S' \subseteq S_k$ бўлади, ва демак, $S_k \vdash$ **A** $\wedge \neg$ **A** бўлади. Ҳосил бўлган муносабат тасдиқларнинг S_k тўплами зиддиятли эканлигини кўрсатади — бу эса лемма шартига зиддир. Лемма исботланди.

2-лемма. *Тасдиқларнинг S тўплами зиддиятсиз бўлиши учун унинг ҳар бир чекли тўпламостиси зиддиятсиз бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурий шартнинг бажарилиши (яъни S зиддиятсиз бўлиши) равшан. Етарлиликни қарама-қаршисини фараз этган ҳолда исботлаймиз: S тўпламнинг ҳар бир чекли тўпламостиси зиддиятсиз бўлган ҳолда, S тўпламнинг ўзи зиддиятли бўлсин. У ҳолда S да шундай **A** формула топиладики, $S \vdash$ **A** $\wedge \neg$ **A** бўлиб, **A** $\wedge \neg$ **A** нинг исботида чекли S' тўпламнинг формулалари қатнашади. $S' \subseteq S$ ва $S' \vdash$ **A** $\wedge \neg$ **A** бўлгани учун S' зиддиятли тўплам ҳамда қилинган фараз нотўғри эканлиги келиб чиқади.

3-теорема (Линденбаум). *Агар S тасдиқларнинг зиддиятсиз тўплами бўлса, у ҳолда S ни ўз ичига олган тасдиқларнинг T тўлиқ системаси мавжуддир.*

Исботи. Теоремани керакли T тўпламни тузиш йўли билан исботлаймиз. Даставвал қаралаётган алфавит саноқли (алфавитнинг қуввати — тўплам қуввати сифатида) эканини, унинг таркибига кирган сигнатура, барча формулалар тўплами ва унинг таркибига кирган барча тасдиқлар тўплами саноқли тўпламлар эканини эслатиб ўтамиз. Шунинг билан бирга сигнатурадаги ҳар бир ифода формула бўлиши, формуланинг эса тасдиқ бўлишини биз аниқлай оламиз.

Бу бизга ҳар бир тасдиқни қандайдир усул ёрдамида натурал сонлар билан номерлаш имконини беради. Тасдиқларни шундай номерлаш мумкинки, тасдиқнинг ўзи берилганда унинг натурал номерини топиш, номерига қараб эса тасдиқнинг ўзини тиклаш мумкин. Саноқли тўплам элементларини (тасдиқлар тўпламини) бундай номерлаш Гёдель номерацияси дейилади.

$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots$ бундай номерациялардан бири бўлсин[1].

Кераклн T тўпламни 2-леммада келтирилган „кенгайиб борадиган" тасдиқлар тўпламлари кетма-кетлигининг бирлашмаси сифатида тузамиз. Ҳар бир S_i тўплам i қадамда тузилиб, унинг зидсизлиги индукция бўйича исботланади.

Нолинчи қадамда S_0 тўпламни қуйидагича тузайлик:

$$S_0 = \begin{cases} S, & \text{агар } S \vdash \mathbf{A}_0, \text{ ёки } S \vdash \neg \mathbf{A}_0 \text{ бўлса,} \\ S \cup \{\mathbf{A}_0\}, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

Агар $S_0 = S$ бўлса, у ҳолда S_0 табиий, зиддиятсиздир (S тўплам шартга кўра зиддиятсиз бўлгани учун). $S_0 = S \cup \{\mathbf{A}_0\}$ бўлсин. Шартга кўра $S \not\vdash \mathbf{A}_0$ ва $S \not\vdash \neg \mathbf{A}_0$. S_0 зиддиятли тўплам деб фараз қилсак, у ҳолда қандайдир $\mathbf{B}$ формула учун $S, \mathbf{A}_0 \vdash \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}$, бошқача айтганда $S \vdash \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}$ бўлади.

$S \vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\neg \mathbf{B} \to \neg \mathbf{A})$ — (контрапозиция),

$S \vdash (\mathbf{A}_0 \to \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \to (\neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \to \neg \mathbf{A}_0)$,

$S \vdash \neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \to \neg \mathbf{A}_0$,

$S, \neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \vdash \neg \mathbf{A}_0$.

$\vdash \neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \sim \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}$,

$S \vdash \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}$, ($\vdash \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}$ бўлгани учун),

$S, \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B} \vdash \neg \mathbf{A}_0$

муносабатлардан $\dfrac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C}, \ \Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{C}}$ қоидага асосан $S \vdash$ $\vdash \neg \mathbf{A}_0$ келиб чиқади, бу эса юқоридаги шартга зиддир. Демак, S_0 зиддиятсиз тўплам экан. S_n n-қадамда тузилган ва зиддиятсизлиги исботланган тўплам бўлсин. $(n+1)$-қадамда ушбу тўпламни тузамиз:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n, & \text{агар } S_n \vdash \mathbf{A}_{n+1}, \text{ ёки } S_n \vdash \neg \mathbf{A}_{n+1} \text{ бўлса,} \\ S_n \cup \{\mathbf{A}_{n+1}\} & \text{акс ҳолда,} \end{cases}$$

---

[1] Бундай номерация ягона бўлмай, биз ўз мақсадимиз учун уларнинг ихтиёрий биттасини олишимиз мумкин. Номерация усулидан фойдаланиб К. Гёдель 1931 йили арифметиканинг тўлиқ эмаслиги ҳақидаги машҳур теоремасини исботлади.

S_{n+1} нинг зиддиятсизлиги S_0 нинг зиддиятсизлигини исботланганидек исботланади.

Энди T сифатида қурилган S_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ тупламларнинг бирлашмасини оламиз: $T=\bigcup_i S_i$. 1-леммага асосан T тасдиқларнинг зиддиятсиз тўпламидир. T нинг тўлиқ эканлигини кўрсатайлик. **С** мазкур тўпламдан олинган ихтиёрий тасдиқ бўлсин. У ҳолда шундай n натурал номер топиладики, $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}_n$ бўлади. S_n тупламнинг тузилиши бўйича $S_n \vdash \mathbf{A}_n$ ёки $S_n \vdash \neg A_n$ бўлади. $S_n \subseteq T$ бўлганлиги учун $T \vdash \mathbf{A}_n$ ёки $T \vdash \neg \mathbf{A}_n$ бўлади, яъни T — тасдиқларнинг тўлиқ тўпламидир.

Теорема тўлиқ исботланди.

4-теорема (мавжудлик теоремаси). *Агар S тасдиқларнинг зиддиятсиз тўплами бўлса, у ҳолда бу тўпламдаги ҳар бир тасдиқ рост бўладиган модель мавжуддир, яъни S зиддиятсиз тўплам бўлса, у ҳолда S бажарилувчи тўплам бўлади.*

Исботи. Дастлаб сигнатурага доимий (ўзгармас) предметлар сифатида саноқли (тўплам қуввати маъносида) $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ белгиларни киритамиз, ҳамда кенгайтирилган сигнатурадаги тасдиқларни натурал сонлар ёрдамида номерлаб чиқамиз (Гёдель нумерацияси).

$$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m, \ldots \tag{1}$$

шундай номерациянинг бири бўлсин. Табиий, бу кетма-кетлик таркибида сигнатурадаги барча тасдиқлар ва улар орасида эса S тўпламнинг барча формулалари қатнашади. Энди Линденбаум теоремасини исботлангандагидек тасдиқларнинг тўпламларини тузамиз. Нолинчи қадамда ушбу S_0 тўпламни оламиз:

$$S_0=\begin{cases} S \cup \{\neg B_0\} & \text{агар } S \vdash \neg B_0 \text{ бўлса,} \\ S \cup \{B_0\}, & \text{агар } S \nvdash \neg B_0 \text{ ва } \exists \text{ квантор билан бошланмаса,} \\ S \cup \{B_0, D_0(c_i)\}, & \text{агар } S \nvdash \neg B_0 \text{ ва } B_0 \equiv \exists x\, D_0(x) \text{ бўлса,} \end{cases}$$

(бу ерда c_{i_0} доимий предмет B_0 да қатнашмайдиган $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ тўпламдаги биринчи белгидир).

S_0 нинг зиддиятсизлигини қарама-қаршисини фараз этган ҳолда кўрсатамиз. Фараз этайлик S_0 зиддиятли, ва демак, бирор C формула учун $S_0 \vdash \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}$ бўлсин. S_0 нинг аниқланишига мувофиқ учта ҳолни қараймиз.

(а). $S_0 = S \cup \{\neg B_0\}$ бўлса, у ҳолда $S, \neg B_0 \vdash C \wedge \wedge \neg C$ бўлади.

Контрапозиция қоидасини қўллаб, $S, \neg (C \wedge \neg C) \vdash \vdash \neg \neg B_0$ ни ҳосил қилиш мумкин. $\vdash \neg \neg B_0 \sim B_0$ ва $\vdash \neg (C \wedge \neg C)$ бўлганлигидан $S \vdash B_0$ келиб чиқади. Аммо бу S_0 нинг аниқланишидаги шартга ($S \nvdash \neg B_0$) зиддир. Ҳосил бўлган зиддият (а) ҳол учун S_0 зиддиятсиз тўплам эканлигини кўрсатади.

(б). $S_0 = S \cup \{B_0\}$. Бу ҳол (а) ҳолга ўхшаш ҳал этилади.

(в). $S_0 = S \cup \{B_0, D_0(c_{i_0})\}$, $B_0 \overset{\circ}{=} \exists x D_0(x)$.

S_0 тўплам зиддиятли деб фараз қилсак, у ҳолда қандайдир C формула учун $S, B_0, D_0(c_{i_0}) \vdash C \wedge \neg C$ бўлади. Контрапозиция қоидасига биноан

$$S, B_0, \neg (C \wedge \neg C) \vdash \neg D_0(c_{i_0}),$$

$\vdash \neg (C \wedge \neg C)$ бўлганлиги учун эса

$$S, B_0 \vdash \neg D_0(c_{i_0})$$

бўлади. Шартга кўра c_{i_0} доимий предмет S тўплам формулалари ва B_0 формулада қатнашмаганлиги учун c_{i_0} ўрнига t эркин ўзгарувчини қўйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$S, B_0 \vdash \neg D_0(t).$$

Бундан эса

$S, B_0 \vdash \forall t \neg D_0(t)$ — $\forall$ ни киритиш қоидасига кўра,

$S, B_0 \vdash \neg \exists t D_0(t)$ — 5^+ га асосан,

$S, B_0 \vdash \neg \exists x D_0(x)$ — $S_\exists$-қоидага кўра,

$S, B_0 \vdash \neg B_0$ — ($B_0 \overset{\circ}{=} \exists x D_0(x)$ бўлгани учун),

$S, B_0 \vdash B_0$ — ($B_0 \vdash B_0$ бўлгани учун)

ва ниҳоят $S \vdash \neg B_0$ келиб чиқади.

Ҳосил бўлган охирги муносабат $S \nvdash \neg B_0$ шартига зиддир. Демак (в) ҳоли учун ҳам S_0 зиддиятсиз тўпламдир. Шундай қилиб, $S \subseteq S_0$ ҳамда $S_0 \vdash B_0$ ёки $S_0 \vdash \neg B_0$ экан. n-қадамгача $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ тўпламлар тузилган бўлиб, улар зиддиятсиз бўлсин.

n-қадамда ушбу S_n тўпламни тузамиз:

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} \cup \{\neg B_n\}, & \text{агар } S_{n-1} \vdash \neg B_n \text{ бўлса,} \\ S_{n-1} \cup \{B_n\}, & \text{агар } S_{n-1} \nvdash \neg B_n \text{ ва } B_n \ \exists \text{ дан бошланмаса,} \\ S_{n-1} \cup \{B_n, D_n(c_{i_n})\}, & \text{агар } B_n \overset{\circ}{=} \exists x D_n(x) \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бунда c_{i_n} $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ формулаларда қатнашмайдиган биринчи доимий предмет белгисидир. Ушбу ҳол учун S_n тупламнинг зиддиятсиз эканлигини ўқувчи осонликча ҳал эта олади (S_0 нинг зиддиятсизлигини исботлашга қаранг). Шундай қилиб, биз ҳар бири зиддиятсиз, кенгайиб борувчи ва ушбу шартни қаноатлантирувчи

$$S \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$$

тўпламларга эга бўламиз. У ҳолда

$$T = \bigcup_{i \geq 0} S_i$$

зиддиятсиз ва тўлиқ тўпламдир. Навбатдаги вазифамиз асосий тўплами $M = \{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ бўлган кенгайтирилган сигнатурадаги моделни қуришдир. Қурилаётган $\mathbf{M}$ моделдаги предикатларнинг қийматини аниқлаймиз. $R_i^{(n_i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ n_i ўринли предикат белги, $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_{n_i}}$ лар M нинг элементлари бўлса,

$$R_i^{(n_i)}(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n_i}}) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ агар } T \vdash R_i^{(n_i)}(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n_i}}) \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } T \vdash \neg R_i^{(n_i)}(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n_i}}) \text{ бўлса} \end{cases} \qquad (2)$$

деб оламиз. T тасдиқларнинг тўлиқ тўплами бўлгани учун унда $R_i^{(n_i)}(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n_i}})$ тасдиқнинг ўзи ёки унинг инкори келтириб чиқарилувчи, T зиддиятсиз бўлганлигидан эса ҳар бир $(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n_i}})$ тизма учун $R_i^{(n_i)}$ ёки $\neg R_i^{(n_i)}$ ларнинг фақат биттаси келтириб чиқарилувчи бўлади.

Шундай қилиб,

$$\mathbf{M} = \langle M; R_1^{(n_1)}, R_2^{(n_2)}, \ldots, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \rangle$$

моделни туздик.

Энди ҳар бир $\mathbf{B}$ тасдиқ учун:

$\mathbf{M} \models \mathbf{B}$ бўлиши учун $T \vdash \mathbf{B}$ бўлиши зарур ва етарли эканини, яъни

$$\mathbf{M} \models \mathbf{B} \Longleftrightarrow T \vdash \mathbf{B} \qquad (3)$$

эканини кўрсатамиз. (Бу ерда „$\Longleftrightarrow$" метатилнинг белгиси бўлиб, „... бўлиши учун ... нинг бўлиши зарур ва егарлидир" деб ўқилади). Буни исботлашда **B** формула таркибида қатнашган мантиқий амаллар ва кванторларнинг сони бўйича индукция усулидан фойдаланамиз; (бунда инкор амали фақат атом формулаларга тегишли деб ҳисоблаймиз (тенг кучли шакл алмаштиришлар ёрдамида бунга эришиш қийин эмас).

rang(**B**) = 0 бўлса, яъни **B** атом (элементар) формула бўлса, (3) нинг ўринли эканлиги (2) дан келиб чиқади. *B* формула атом формуланинг инкоридан иборат бўлса ҳам (3) нинг ўринли эканлиги яна ўша (2) таърифдан келиб чиқади (иккинчи сатр).

(3) муносабат ранги r (>0) дан катта бўлмаган барча формулалар учун ўринли бўлсин. **B** формуланинг ранги эса $r+1$ га тенг бўлсин. У ҳолда **B** қуйидаги кўринишларга эга бўлади:

$$1)\ \mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{C} \vee \mathbf{D}, \qquad 3)\ \mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \exists x \mathrm{C}(x),$$
$$2)\ \mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}, \qquad 4)\ \mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \forall x \mathrm{C}(x).$$

Бу ерда индукция шартига асосан **C**, **D** ва **C**(x) формулалар учун (3) ўринлидир.

1) $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ ва $T \vdash \mathbf{B}$ бўлсин, rang(**C**) $\leqslant r$, rang(**D**) $\leqslant r$ бўлгани учун $T \vdash \mathbf{C}$ ёки $T \vdash \mathbf{D}$ бўлади.

$T \vdash \mathbf{C}$ бўлса, индукция шартига асосан $M \models \mathbf{C}$ ёки $\vee$ ни киритиш қоидасига асосан $M \models \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ бўлади. $T \vdash \mathbf{D}$ бўлганда ҳам ҳозиргидай мулоҳаза юритиб $M \models \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ эканини ҳосил қиламиз, яъни $M \models \mathbf{B}$ бўлади.

Аксинча, $M \models \mathbf{B}$ бўлса, у ҳолда $M \models \mathbf{C}$ ёки $M \models \mathbf{D}$ бўлади. Индукция шартига асосан $T \vdash \mathbf{C}$ ёки $T \vdash \mathbf{D}$ бўлиб, булардан $T \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ келиб чиқади.

2) $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$ ҳамда $T \vdash \mathbf{B}$, яъни $T \vdash \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$ бўлсин.

У ҳолда $\wedge$ ни йўқотиш қоидасига асосан $T \vdash \mathbf{C}$ ва $T \vdash \mathbf{D}$ бўлади. Индукция шартига кўра $M \models \mathbf{C}$ ва $M \models \mathbf{D}$ бўлиб, улардан эса $M \models \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$ ($\wedge$ ни киритиш қоидасига асосан) келиб чиқади.

Аксинча, $M \models \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$ бўлганда $T \vdash \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$, яъни $T \vdash \mathbf{B}$ бўлишини ўқувчи қийинчиликсиз ҳал эта олади.

3) $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \exists x \mathbf{C}(x)$ ҳамда $T \vdash \mathbf{B}$ бўлсин. У ҳолда бирор n учун $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{B}_n$ ҳамда $\mathbf{D}_n(c_{1_n}) \in S_n \subseteq T$ бўлади. Демак, $T \vdash \mathbf{D}_n(c_{n_1})$, индукция шартига асосан $M \models$ $\models \exists x \mathbf{D}_n(x)$. ва ниҳоят $M \models \exists x \mathbf{C}(x)$ бўлади.

Аксинча $M \models \exists x \mathbf{C}(x)$ бўлса, у ҳолда қандайдир $c_k \in M$ учун $M \models \mathbf{C}(c_k)$ бўлади. Индукция шартига биноан охирги муносабатдан $T \vdash C(c_k)$ ҳосил бўлади. Маълумки, $\vdash P(y) \to \exists xP(x)$ ($\vdash$ белги остида (6в) аксиома турибди) га S_p-қоидани қўлласак

$$\vdash C(y) \to \exists xC(x),$$

бунга $S_y^{c_k}$ — қоидани қўллагандан сўнг эса

$$\vdash C(c_k) \to \exists xC(x)$$

ёки

$$T \vdash C(c_k) \to \exists xC(x)$$

ҳосил бўлади. MP-қоидасига асосан ниҳоят

$$T \vdash \exists xC(x)$$

га эга бўламиз.

4) $B \equiv \forall xC(x)$ ва $T \vdash B$ бўлсин. Фараз этайлик $M \not\models B$ муносабат бажарилсин. У ҳолда қандайдир $c_m \in M$ элемент учун $M \models C(c_m)$ бўлади.

Индукция шартига кўра $T \vdash \neg C(c_m)$ бўлиб, 3) бандга асосан $T \vdash \exists x \neg C(x)$, $\vdash \exists x \neg C(x) \sim \neg \forall xC(x)$ ҳамда $\neg \forall xC(x) \equiv \neg B$ бўлганлигидан $T \vdash \neg B$ ҳосил бўлади. Охирги муносабат ва $T \vdash B$ T тўпламнинг зиддиятли эмаслигига зиддир.

Аксинча, $M \models B$, яъни $M \models \forall xC(x)$ бўлса, исталган $c \in M$ элемент учун $M \models C(c)$ бўлади. Индукция шартига кўра $T \vdash C(c)$, яъни $T \vdash C(x)$, $\forall$ ни киритиш қоидасига асосан эса $T \vdash \forall xC(x)$ бўлади. Бошқа мантиқий амаллар $\wedge$, $\vee$ ва $\neg$ лар орқали ифодаланганни учун $B \equiv C \to D$ ва $B \equiv C \sim D$ ҳолларни қараш шарт эмас.

Натижа (Скулем теоремаси).

Агар предикатлар ҳисобининг бирор **A** *формуласи (тасдиғи) бажарилувчи бўлса, у ҳолда у чекли ёки саноқли тўпламда ҳам бажарилувчи бўлади.*

5-теорема (К. Гёдель, тулиқлик теоремаси). *Ихтиёрий* **A** *тасдиқ предикатлар ҳисобида келтириб чиқарилувчи* (исботланувчи) *бўлиши учун у умумқийматли бўлиши зарур ва етарлидир, яъни*

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A.$$

Исботи. Зарурий шарт 1-теореманинг мазмунини ташкил қилади.

Етарлилик. Исбот давомида биз мавжудлик теоремаси (4-теорема) га тенг кучли бўлган ушбу жумладан фойдаланамиз:

„Агар тасдиқларнинг S тўплами бажарилувчи бўлмаса, у ҳолда S зиддиятли тўплам бўлади".

А умумқийматли формула (тасдиқ) бўлсин. У ҳолда унинг инкори бажарилмайдиган $\{\neg \mathbf{A}\}$ тўплам ташкил қилади, яъни қандайдир B тасдиқ учун

$$\neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}$$

бўлади. Контрапозиция қоидасига биноан

$$\neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}) \vdash \neg \neg \mathbf{A},$$

$\vdash \neg (\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B})$ ва $\vdash \neg \neg \mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ ларга кўра эса $\vdash \mathbf{A}$ келиб чиқади.

6-теорема (А. И. Мальцев, компактлик теоремаси). *Тасдиқларнинг S тўплами бажарилувчи бўлиши учун унинг ҳар бир чекли тўпламостиси бажарилувчи бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурий шартнинг бажарилиши равшандир. S тўпламнинг ҳар бир чекли тўпламостиси бажарилувчи, S нинг ўзи эса бажарилувчи бўлмасин. У ҳолда S зиддиятли тўплам бўлиб, қандайдир **С** тасдиқ учун $S \vdash \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}$ бўлади. $\mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}$ тасдиқнинг исботида чекли сондаги формулалар қатнашади — уларнинг тўплами S' бўлсин. Равшанки, $S' \subseteq S$ бўлиб, $S' \vdash \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}$ дан S' зиддиятли тўплам эканлиги келиб чиқади. Бу эса теорема шартига зиддир.

7-теорема (биргаликда бажарилиш). *Агар* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *ва* **B** *формулалар биргаликда бажарилувчи (B формула* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *формулаларнинг мантиқий натижаси) бўлса, яъни* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *тасдиқларнинг ҳар бири рост бўлган ҳар бир моделда* **B** *тасдиқ ҳам рост бўлса, у ҳолда* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ *бўлади.*

Исботи. **В** тасдиқ $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ ларнинг мантиқий натижаси бўлгани учун $S = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \neg \mathbf{B}\}$ бажарилмайдиган, ва демак, зиддиятли тўпламдир. У ҳолда қандайдир **С** тасдиқ учун

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \neg \mathbf{B} \vdash \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}$$

ўринли бўлади. Контрапозиция қоидасига асосан

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \neg (\mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C}) \vdash \neg \neg \mathbf{B},$$

$\neg \neg (\mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{C})$ ва $\vdash \neg \neg \mathbf{B} \sim \mathbf{B}$ бўлгани учун эса

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$$

келиб чиқади.

4-§. Математик назариялар. Математик назариялар намуналари

Биз III бобнинг 3-§ ида „алгебраик система“, „биринчи босқичли тил“ тушунчаларини киритган эдик. 1-§ да айтилганидек ҳар қандай математик назария бирор мантиқий система устига қурилади. Масалан, формал арифметикани қуриш учун предикатлар ҳисоби аксиомалари системасига формал арифметиканинг ўз аксиомалари киритилади (формал арифметика аксиомалари номантиқий аксиомалар ҳисобланади).

Биринчи тартибли тил математиканинг у ёки бу бўлимларини предикатлар ҳисобини тузганимиздек аксиоматик усул ёрдамида баён қилишга имкон беради. Математиканинг бирор бўлагини формаллаштиришда мантиқий аксиомалар билан бир қаторда махсус (номантиқий, шу математик назарияни тасвирловчи) аксиомалар ишлатилади. Махсус аксиомалар қаралаётган математик назария сигнатурасидаги предмет константалар (доимий предметлар) нинг, функциялар (амаллар) нинг ҳамда предикатларнинг махсус (асосий) хоссаларини билдирадиган формулалардан иборат бўлади.

Хуллас ҳар қандай математик назарияни схематик равишда ушбу кўринишда ифодалаш мумкин:

{Математик назария} = {предикатлар ҳисоби} + + {махсус аксиомалар}.

Биринчи босқичли тилда „тенглик“ предикати („=“) қатнашганлиги учун унинг хоссалари ҳамда унинг функциялар ва предикатлар билан боғланишлари аксиомалар сифатида қабул этилади. Берилган сигнатурада бундай формал система тузиш, унинг „ички“ мазмунини“ (теоремаларини) келтириб чиқариш қўлланилувчи (амалий) предикатлар ҳисобини ташкил этади.

Амалий предикатлар ҳисоби мантиқий аксиомалардан ташқари, юқорида айтилганидек, тенглик предикатининг хоссаларини белгиловчи

(T1). $x = x$,

(T2). $x = y \to y = x$,

(T3). $x = y \wedge y = t \to x = t$,

(T4). $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_m \to [R(x_1, \ldots, x_m) \to \to R(y_1, \ldots, y_m)]$,

(T5). $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_m \to [\tau(x_1, \ldots, x_m) = = \tau(y_1, \ldots, y_m)]$

аксиомалар ҳам олинади; бу ерда $x, y, t, x_1, \ldots, x_n, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_m$ лар предмет ўзгарувчилар ёки константа (доимий) белгилар, R — сигнатурадаги ихтиёрий m ўринли предикат (агар мавжуд бўлса), τ — m ўринли термдир.

Сигнатурадаги ҳар бир f функционал белги учун эса функциянинг таърифи ва бирқийматлилигини билдирадиган ушбу аксиома қабул қилинади:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists t [(f(x_1, \ldots, x_n) = t) \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) = y) \to t = y].$$

Амалий предикатлар ҳисобида мантиқий аксиомалар, тенглик аксиомалари ҳамда функция (амал) лар учун аксиомалар очиқ кўрсатилиши шарт эмас, аммо улар ҳамма вақт мавжуд (берилган) деб ҳисобланади. Юқорида айтилган аксиомаларга ўлароқ математик назариянинг сигнатураси ва махсус аксиомалари албатта кўрсатилиши керак.

Математик назариялар махсус аксиомаларининг сони чекли ёки чексиз бўлишига қараб математик назариялар „чекли аксиомалаштирилувчи „ёки“ чексиз аксиомалаштирилувчи“ бўлади*.

Қуйида биз математик назарияларга бир қатор мисоллар келтирамиз, натурал сонлар назарияси (арифметика) га эса батафсилроқ тўхталамиз.

I. Группалар назарияси. Бу назариянинг сигнатураси $\langle +, 0 \rangle$, махсус аксиомалари эса

(I). $\forall x \forall y \forall z [x + (y + z) = (x + y) + z]$,

(II). $\forall x [x + 0 = 0 + x = x]$,

(III). $\forall x \exists y [x + y = y + x = 0]$

лардан иборатдир. Агар бу махсус математик аксиомаларга яна ушбу махсус аксиомани қўшсак, Абель группалари (коммутатив группалар) назарияси пайдо бўлади:

(IV). $\forall x \forall y [x + y = y + x]$.

Z — бутун сонлар тўплами, „+“ — бутун сонларни қўшиш бўлса, у ҳолда $M = \langle Z; +, 0 \rangle$ коммутатив группалар назариясининг модели бўлади.

---

* Чексиз аксиомалаштирилувчи математик назариялар орасида рекурсив, рекурсив саналадиган аксиомалар системасига эга назариялар қаралади [3].

Абель группаси тўлиқ бўлиши учун ушбу аксиома бажарилиши керак:

(V). $\forall n \forall x \exists y [n \in N \wedge n \geqslant 1 \to ny = x]$;

бу ерда N — натурал сонлар тўплами, $ny = \underbrace{y + y + \ldots + y}_{n \text{ та}}$ дир (V) аксиома $<+, 0>$ сигнатурадаги формула эмас, чунки n ни боғловчи квантор группанинг элементларига эмас, балки натурал сонларга нисбатан қўлланилаётдир. Бу аксиомани сигнатурадаги қуйидаги чексиз кўп формулалар билан алмаштириш мумкин:

$$\forall x \exists y (2y = x), \ \forall x \exists y (3y = x), \ldots,$$
$$\forall x \exists y (ny = x), \ldots.$$

Абель группаси даврий группа бўлиши учун унда қуйидаги аксиома бажарилиши керак:

(VI). $\forall x \exists n [n \in N \wedge n \geqslant 1 \to nx = 0]$.

Ушбу аксиома ҳам группа сигнатурасидаги формула эмаслиги равшандир, аммо уни ҳам чексиз кўп аксиомалар (сигнатуранинг формулалари) билан алмаштириш мумкин.

II. Қисмий тартибланган тўпламлар назарияси. Сигнатурасида 2 ўринли „$\leqslant$" („кичик ёки тенг" деб ўқилади) предикат бўлган бу математик назария қуйидаги махсус аксиомаларга эгадир:

(I). $\forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z)$,
(II). $\forall x \forall y (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y)$,
(III). $\forall x (x \leqslant x)$.

$M = <N; \leqslant>$ келтирилган математик назариянинг моделларидан биридир.

Қисмий тартибланган тўпламлар назарияси махсус аксиомалари қаторига яна ушбу аксиомани киритсак, у ҳолда чизиқли тартибланган тўпламлар назарияси ҳосил бўлади:

(IV). $\forall x \forall y (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Зич чизиқли тартибланган тўпламлар назариясини ҳосил қилиш учун (I) — (IV) аксиомалар системасига иккита янги махсус аксиомаларни киритиш кифоядир:

(V). $\forall x \forall y [x \leqslant y \wedge x \neq y \to \exists z (x \leqslant z \wedge z \leqslant y \wedge$
$\wedge x \neq z \wedge z \neq y)]$,
(VI). $\exists x \exists y (x \neq y)$.

Ушбу махсус аксиомани киритиш ёрдамида биз четки элементларга эга бўлмаган зич чизиқли тартибланган тўпламлар назариясига эга бўламиз:

$$(\mathrm{VII}).\ \forall x \exists y \exists z (x \leqslant y \wedge y \neq x \wedge z \leqslant x \wedge z \neq x).$$

Четки элементларга эга бўлмаган зич чизиқли тартибланган ҳар қандай иккита саноқли тўплам ўзаро изоморф эканлигини исботсиз эслатиб ўтамиз.

III. Сигнатура $\langle \cup, \cap, \overline{}, 0, 1 \rangle$ бўлсин. Қуйидаги махсус аксиомалар системасига эга бўлган математик назария Буль алгебраси дейилади:

1°. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$;	11°. $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$;
2°. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$;	12°. $\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$;
3°. $x \cup y = y \cup x$;	13°. $x \cup 0 = x$;
4°. $x \cap y = y \cap x$;	14°. $x \cap 0 = 0$;
5°. $x \cup x = x$;	15°. $x \cup 1 = 1$;
6°. $x \cap x = x$;	16°. $x \cap 1 = x$;
7°. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$;	17°. $0 \neq 1$;
8°. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$;	18°. $\overline{\overline{x}} = x$;
9°. $x \cup (x \cap y) = x$;	19°. $x \cup \overline{x} = 1$;
10°. $x \cap (x \cup y) = x$;	20°. $x \cap \overline{x} = 0$.

Бу аксиомалар олдида умумийлик квантори бўлиб, биз ёзувни қисқартириш мақсадида уларни ташлаб юбордик. Буль алгебрасига $x \leqslant y \stackrel{\text{def}}{=} (x \cup y = y \Longleftrightarrow x \cap y = x)$ белгилаш ёрдамида тартиб муносабатини киритиш мумкин. Агар $x \leqslant t$ муносабатини фақат $x = 0$ элемент қаноатлантирса, у ҳолда t элемент Буль алгебрасининг атоми дейилади. Тартиб муносабати киритилган Буль алгебрасида

$$21°.\ \forall x [x \neq 0 \to \exists y [y \leqslant x \wedge y \neq 0 \wedge \forall z (z \leqslant y \to z = 0 \vee z = y)]]$$

аксиома бажарилса, у атомлик Буль алгебраси, акс ҳолда эса уни атомсиз Буль алгебраси дейилади. Буль алгебралари назариясида ҳар қандай иккита саноқли атомсиз Буль алгебралари ўзаро изоморф эканлиги исботланади.

V. Бирлик элементига эга бўлган коммутатив ва ассоциатив ҳалқалар назарияси $\langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$

сигнатурада қурилади ва ушбу махсус аксиомаларга таянади:

$1°.\ 0 \neq 1;\quad 2°.\ x+(y+z)=(x+y)+z;$

$3°.\ x+y=y+x;\quad 4°.\ x+0=x;\quad 5°.\ x(y+z)=xy+xz;$

$6°.\ \exists t\,(x+t=y);\quad 7°.\ x(yz)=(xy)z;\quad 8°.\ xy=yx;$

$9°.\ x\cdot 1=x$

(бу ерда ҳам барча ўзгарувчиларни боғловчи умумийлик кванторлари ташлаб юборилади).

Мазкур ҳалқанинг модели сифатида $M=<R;\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1>$ ни олиш мумкин (бу ерда R — барча ҳақиқий сонлар тўплами). Бу моделда

$$10°.\ xy=0 \to x=0 \vee y=0$$

аксиома ҳам бажарилишини кўриш қийин эмас. 10°-аксиомани қаноатлантирувчи бирлик элементга эга бўлган коммутатив-ассоциатив ҳалқа бутунлик соҳаси (ёки бутунлик ҳалқаси) дейилади. Бутунлик соҳаси аксиомалари қаторига яна ушбу аксиомани киритсак, майдонлар назарияси деб аталувчи математик структура пайдо бўлади:

$$11°.\ x\neq 0 \to \exists y\,(xy=1).$$

1-майдоннинг бирлик элементи, n — натурал сон бўлсин. $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{та}\ 1}=n\cdot 1$ деб белгилайлик.

$$12°.\ \exists n\,[n\in N \wedge n\cdot 1=0 \wedge \forall m\,(m\in N \wedge m\cdot 1=0 \to m\geqslant n)]$$

аксиома ўринли бўлган майдонлар характеристикаси n га тенг бўлган майдонлар назариясини ташкил этади. Майдонлар назариясида майдон характеристикаси фақат 0 ёки p туб сон бўлиши мумкинлиги исботланади ($n\cdot 1=0$ тенглик ҳеч бир n натурал сон учун бажарилмаса, бундай майдоннинг характеристикаси нолга тенг деб қабул қилинади). $\underbrace{x\cdot x\ \ldots\cdot x}_{n\ \text{та}\ x}$ кўпайтмани қисқалик учун x^n каби белгилаймиз.

Алгебраик ёпиқ майдон назарияси майдонда ушбу аксиоманинг бажарилишини тақозо қилади:

$$13°.\ \forall \exists n\ x \forall a_n \ldots \forall a_1 \forall a_0 (n\in N \wedge n\geqslant 1 \to$$
$$\to a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \vee a_n=0).$$

Бир хил характеристикали ва тенг қувватли ҳар қандай иккита алгебраик ёпиқ майдон ўзаро изоморф эканлигини исботсиз эслатиб ўтамиз.

Маълумки, сигнатурадаги моделнинг бирор K синфига кирган ҳар бир моделда рост бўлган ёпиқ формула (тасдиқ) лар тўплами K синфнинг элементлар назарияси дейилади ва $\mathrm{Th}(K)$ каби белгиланади (III боб, 3-§).

Юқорида қараб ўтилган математик назариялар ўз махсус аксиомалари билан берилади. Махсус аксиомалар мантиқий аксиомалар (предикатлар ҳисобининг) билан биргаликда шу назариянинг барча аксиомалари системасини ташкил этади. Бу аксиомалар системасидан мантиқий воситалар (келтириб чиқариш қоидалари) ёрдамида мазкур назариянинг барча тасдиқлари ҳосил қилинади.

Агар T назария ўзининг бирор модели **M** учун $T = \mathrm{Th}(\mathbf{M})$ бўлса, у ҳолда у тўлиқ назария дейилади.

T математик назариянинг ихтиёрий иккита модели изоморф бўлса, бундай назария қатъий назария дейилади.

5-§. Формал арифметика

Натурал сонлар назарияси (арифметикаси) деб аталувчи математик структуранинг сигнатураси $<+, \cdot, s, 0>$ бўлиб, унинг тури $<2, 2, 1, 0>$ дир. Сигнатурадаги s унар (бир аргументли) функционал белги бўлиб, уни баъзан „кейин келиш“ функцияси деб ҳам аталади. Бошқача айтганда, **M** формал арифметиканинг бирор модели, x эса унинг элементи бўлса, у ҳолда $S(x)$ ҳам моделнинг элементи бўлиб, $S(x)$ x дан „кейин келувчи“ элемент дейилади. Арифметиканинг формулалари (хусусан, тасдиқлари) ни тузиш учун дастлаб унинг термлари тўпламини аниқлашимиз керак.

Таъриф: 1°. 0 — термдир;

2°. Ҳар бир предмет ўзгарувчи термдир;

3°. Агар τ_1 ва τ_2 лар терм бўлса, $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \cdot \tau_2$, $s(\tau_1)$ лар ҳам терм бўлади.

Предмет ўзгарувчи қатнашмаган термлар ёпиқ термлар дейилади. Масалан, 0, $s(o)$, $0 + s(o)$, $0 \cdot s(o)$, $s(o) + s(o)$, $s(s(o))$, $s(s(s(o)))$ ва бошқалар ёпиқ термлар, $0 + x$, $s(x) \cdot y$, $x + y$, $s(o) \cdot s(x)$ лар эса ёпиқ термлар эмас.

Формал арифметиканинг формулалари билан танишамиз.

Таъриф: 1°. τ_1, τ_2 лар терм бўлса, $\tau_1 = \tau_1$ формуладир;

2°. Агар **A** ва **B** лар формула бўлса, у ҳолда $(\urcorner \mathbf{A})$, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \urcorner \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \sim \mathbf{B})$ лар ҳам формуладир.

3°. Агар **A** формула, x эркин предмет ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $\forall x\mathbf{A}$ ва $\exists x\mathbf{A}$ лар ҳам формуладир.

4°. Арифметикада формулалар фақат 1° — 3°-бандлар ёрдамида ҳосил қилинади.

Формал арифметиканинг аксиомалари ушбу формулалардир:

(A1). $\forall x \urcorner (s(x) = 0)$;

(A2). $\forall x \forall y [s(x) = s(y) \urcorner x = y]$;

(A3). $\forall x \forall y [x = y \urcorner s(x) = s(y)]$;

(A4). $\forall x [x + 0 = x]$;

(A5). $\forall x \forall y [x + s(y) = s(x + y)]$;

(A6). $\forall x [x \cdot 0 = 0]$;

(A7). $\forall x \forall y [x \cdot s(y) = x \cdot y + x]$;

(A8). $\mathbf{A}(o) \wedge \forall x [\mathbf{A}(x) \urcorner \mathbf{A}(s))] \urcorner \mathbf{A}(t)$;
(t — эркин ўзгарувчи),

бу ерда $\mathbf{A}(x)$ — ихтиёрий формула, $\mathbf{A}(o)$ x нинг $\mathbf{A}(x)$ формуладаги эркин қатнашган жойларига 0 ни қўйиш натижасида ҳосил бўлган формула, $\mathbf{A}(s) x))$ эса x нинг $\mathbf{A}(x)$ даги эркин қатнашган жойларига $s(x)$ ни қўйиш натижасида ҳосил бўлган формуладир

(A8) аксиома баъзан ушбу кўринишда ҳам ёзилиши мумкин:

$$(\mathrm{A8})'.\ \mathbf{A}(0, x_2, \ldots, x_n) \wedge \forall x [\mathbf{A}(x, x_2, \ldots, x_n) \urcorner$$
$$\urcorner \mathbf{A}(s(x), x_2, \ldots, x_n)] \urcorner \mathbf{A}(t, x_2, \ldots, x_n).$$

(A8) (ёки (A8)′) аксиомада **A** — ихтиёрий формула бўлгани учун (A8) ни (ёки (A8)′ ни) чексиз кўп аксиомалар схемаси деб қаралади.

Шундай қилиб, {формал арифметика} = {предикатлар хисоби} + {(A1), (A2), ..., (A8)} деб қараш мумкин (шартли равишда). (A1) — аксиоманинг ноформал мазмуни: „0 ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайди" деб тушунилади.

(A2) ва (A3) аксиомалар қуйидаги мазмунга эгадир: „Ҳар қандай x ва y натурал сонлардан кейин келувчи сонлар тенг бўлса, у ҳолда бу сонларнинг ўзи ҳам тенгдир"; „Ҳар қандай иккита x ва y натурал сонлар тенг бўлса, у ҳолда улардан кейин келувчи сонлар ҳам тенгдир". (A4) ва (A5) аксиомалар қўшиш амалининг асосий ҳоссаларини, (А6) ва (А7) лар эса кўпайтириш амалининг асосий хоссаларини билдиради.

(А8) аксиома алоҳида аҳамиятга эга бўлиб, у „тўлиқ математик индукция“ дейилади*.

Формал математика сигнатурасидаги баъзи формулалардан фойдаланган ҳолда сигнатурага янги предикат белгилар киритиш мумкин.

Масалан,

$$x \neq y \overset{\circ}{=} \neg (x = y),$$
$$x > y \overset{\circ}{=} \exists t (x = y + t),$$
$$x \geqslant y \overset{\circ}{=} x > y \vee x = y,$$
$$x < y \overset{\circ}{=} \exists t (y = x + t),$$
$$x \leqslant y \overset{\circ}{=} x < y \vee x = y,$$
$$x \mid y \overset{\circ}{=} \exists t (x = y \cdot t)$$

(бу ерда „$\overset{\circ}{=}$“ метатилнинг белгиси бўлиб, „. . . ифода . . . ни билдиради“ деб ўқилади).

Энди формал арифметиканинг баъзи теоремаларини кўриб чиқайлик.

1-теорема. $\vdash x \neq y \to s(x) \neq s(y)$ *ёки* $\vdash \neg (x = y) \neg [s(x) = s(y)]$.

Исботи, 1°. $\vdash s(x) = s(y) \to x = y$ —(А2) аксиома,

2°. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ —(контрапозиция),

3°. $\vdash (s(x) = s(y) \to x = y) \to$
$\to (\neg (x = y) \to \neg (s(x) = s(y)))$ — ўрнига қўйиш қоидасига асосан

4°. $\vdash \neg (x = y) \to \neg (s(x) = s(y))$ — MP (1°, 3°).

Худди шунга ўхшаш ушбу теоремани исботлаш мумкин.

2-теорема. $\vdash s(x) \neq s(y) \to x \neq y$ *ёки*
$\vdash \neg (s(x) = s(y) \to \neg (x = y)$.

3-теорема $\vdash 0 + x = x$.

Исботи. $A(x) \overset{\circ}{=} (0 + x = x)$ бўлсин.

1°. $\vdash x + 0 = x$ — (А1) аксиома,
2°. $\vdash 0 + 0 = 0$, (ёки $\vdash A(0)$) — S_x^0- қоида (1°),
3°. $\vdash 0 + t = t$, (ёки $\vdash A(t)$ — гипотеза,
4°. $\vdash x + s(t) = s(x + t)$ — (А5) аксиома,

* Бу математик индукциянинг саноқли варианти бўлиб, аслида тўлиқ математик индукция натурал сонлар тўпламининг ихтиёрий тўпламостисига нисбатан қўлланилади, яъни саноқли бўлмаган тўпламлар ҳам қамраб олинади.

5°. $\vdash 0+s(t)=s(0+t)$ — S_{x}^{0}- қоида (4°),

6°. $\vdash (x=y)\rightarrow(s(x)=s(y))$ — (A3) аксиома,

7°. $\vdash (0+t=t)\rightarrow(s(0+t)=s(t))$ — $S_{x,\ y}^{0+t,\ t}$ (6°),

8°. $\vdash s(0+t)=s(t)$ — MP (3°, 7°),

9°. $\vdash 0+s(t)=s(t)$, (ёки $\vdash \mathbf{A}(s(t))$) — транзитивлик (5°, 8°),

10°. $\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$ — (1A) аксиома,

11°. $\vdash A(s(t))\rightarrow(\mathbf{A}(t)\rightarrow\mathbf{A}(s(t)))$ — $S_{A,\ \ B}^{\mathbf{A}(s(t)),\ \mathbf{A}(t)}$ (10°),

12°. $\vdash \mathbf{A}(t)\rightarrow\mathbf{A}(s(t))$ — MP (9°, 11°),

13°. $\vdash \forall t(\mathbf{A}(t)\rightarrow\mathbf{A}(s(t)))$ — $\forall$ ни киритиш (12°),

14°. $\vdash \mathbf{A}(o)\wedge\forall t(\mathbf{A}(t)\rightarrow\mathbf{A}(s(t)))$ — $\vee$ ни киритиш (2°, 13°),

15°. $\vdash \mathbf{A}(0)\wedge\forall t(\mathbf{A}(t)\rightarrow\mathbf{A}(s(t)))\rightarrow\mathbf{A}(x)$ — аксиома (A8),

16°. $\vdash \mathbf{A}(x)$ (ёки $\vdash 0+x=x$) — MP (14°, 15°).

4-теорема. $\vdash (y=t)\rightarrow(y+x=t+x)$.

Исботи. $\mathbf{A}(x)\equiv(y=t)\rightarrow(y+x=t+x)$ бўлсин.

1°. $\vdash x=x$ — (T1) аксиома,

2°. $\vdash 0=0$ — S_{x}^{0} (1°),

3°. $\vdash A\rightarrow(A\rightarrow B\ \ A)$ — (мустақил исботланг!),

4°. $\vdash (0=0)\rightarrow((y=t)\rightarrow(y=t)\wedge(0=0))$ — $S_{A,\ \ B}^{0=0,\ y=t}$ (3°),

5°. $\vdash (y=t)\rightarrow(y=t)\wedge(0=0)$ — MP (2°, 4°),

6°. $\vdash (y=t)\wedge(u=v)\rightarrow(y+u=t+v)$ — аксиома (T5),

7°. $\vdash (y=t)\wedge(0=0)\rightarrow(y+0=t+0)$ — $S_{u,\ v}^{0,\ 0}$ (6°),

8°. $\vdash (y=t)\rightarrow(y+0=t+0)$, яъни $\vdash \mathbf{A}(0)$ — транзитивлик (5°, 7°),

9°. $\vdash \mathbf{A}(m)$, яъни $\vdash (y=t)\rightarrow(y+m=t+m)$ — гипотеза,

10°. $\vdash (y=t)\rightarrow(y+s(m)=t+s(m))$, яъни $\vdash \mathbf{A}(s(m))$ — $S_{m}^{s(m)}$- қоида (9°),

11°. $\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$ — аксиома (1a),

12°. $\vdash \mathbf{A}(s(m))\rightarrow(\mathbf{A}(m)\rightarrow\mathbf{A}(s(m)))$ — $S_{A,\ \ B}^{\mathbf{A}(s(m)),\ \mathbf{A}(m)}$ (11°),

13°. $\vdash \mathbf{A}(m)\rightarrow\mathbf{A}(s(m))$ — MP (10°, 12°),

14°. $\vdash \forall m[\mathbf{A}(m)\rightarrow\mathbf{A}(s(m))]$ — $\forall$ ни киритиш (13°), 15°. $\vdash \mathbf{A}(0) \wedge \forall m [\mathbf{A}(m) \to \mathbf{A}(s(m))]$ — $\wedge$ ни киритиш (8°, 14°),

16°. $\vdash \mathbf{A}(0) \wedge \forall m [\mathbf{A}(m) \to \mathbf{A}(s(m))] \to \mathbf{A}(x)$ — аксиома (A8),

17°. $\vdash \mathbf{A}(x)$, яъни $\vdash (y = t) \to (y + x = t + x)$ — MP (15°, 16°).

5-теорема. $\vdash s(x) + y = s(x + y)$.

Исботи. $\mathbf{A}(y) \equiv s(x) + y = s(x + y)$ бўлсин.

1°. $\vdash x + 0 = x$ — аксиома (A4),

2°. $\vdash s(x) + 0 = s(x)$ — $S_x^{s(x)}$- қоида (1°),

3°. $\vdash (x = y) \to (y = x)$ — аксиома (T2),

4°. $\vdash (x + 0 = x) \to (x = x + 0)$ — $S_{x,\ y}^{x+0,\ x}$ (3°),

5°. $\vdash x = x + 0$ — MP (1°, 4°),

6°. $\vdash (x = x + 0) \to (s(x) = s(x + 0))$ — (A3) (6°),

7°. $\vdash s(x) = s(x + 0)$ — MP (6°, 7°),

8°. $\vdash (s(x) + 0 = s(x)) \wedge (s(x) = s(x + 0))$ — $\wedge$ни киритиш (2°, 7°),

9°. $\vdash (x = y) \wedge (y = z) \to (x = z)$ — (T3) аксиома,

10°. $\vdash (s(x) + 0 = s(x)) \wedge (s(x) = s(x + 0)) \to$
$\to (s(x) + 0 = s(x + 0))$ — $S_{x,\ y,\ z}^{s(x)+0,\ s(x),\ s(x+0)}$ (9°),

11°. $\vdash s(x) + 0 = s(x + 0)$, яъни $\vdash \mathbf{A}(0)$ — MP (8°, 10°),

12°. $\vdash \mathbf{A}(t)$, яъни $\vdash s(x) + t = s(x + t)$ — гипотеза,

13°. $\vdash \mathbf{A}(s(t))$, яъни $\vdash s(x) + s(t) = s(x + s(t))$ — $S_t^{s(t)}$ (12°),

14°. $\vdash A \to (B \to A)$ — аксиома (1a),

15°. $\vdash \mathbf{A}(s(t)) \to (\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t)))$ — $S_{A,\ B}^{\mathbf{A}(s(t)),\ \mathbf{A}(t)}$ (14°),

16°. $\vdash \mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))$ — MP (13°, 15°),

17°. $\vdash \forall t [\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))]$ — $\forall$ ни киритиш (16°),

18°. $\vdash \mathbf{A}(0) \wedge \forall t [\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))]$ — $\wedge$ ни киритиш (17°, 11°),

19°. $\vdash \mathbf{A}(0) \wedge \forall t [\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))] \to \mathbf{A}(y)$ — аксиома (A8),

20°. $\vdash \mathbf{A}(y)$, яъни $\vdash s(x) + y = s(x + y)$ — MP (18°, 19°).

6-теорема. $\vdash \neg(x=0) \to \neg(x+y=y)$.

Исботи. $\mathbf{A}(y) \overset{\circ}{=} \neg(x=0) \to \neg(x+y=y)$ бўлсин. Дастлаб $x+0=0 \vdash x=0$ эканлигини кўрсатамиз. Ушбу формулалар кетма-кетлиги $x=0$ формуланинг $x+0=0$ формуладан келиб чиқадиган исботи бўлади:

1°. $x+0=0$ — гипотеза,

2°. $x+0=x$ — аксиома (A4),

3°. $(x=y) \to (y=x)$ — аксиома (T2),

4°. $(x+0=x) \to (x=x+0)$ — $S^{x+0,\ x}_{x,\ y}$ (3°),

5°. $x=x+0$ — MP (2°, 4°).

6°. $(x=x+0) \wedge (x+0=0)$ — $\wedge$ ни киритиш (1°, 5°),

7°. $(x=y) \wedge (y=z) \to (x=z)$ — аксиома (T3),

8°. $(x=x+0) \wedge (x+0=0) \to (x=0)$ — $S^{x+0,\ 0}_{y,\ z}$ (7°),

9°. $x=0$ — MP (6°, 8°),

Демак, $x+0=0 \vdash x=0$ ёки контрапозиция қоидасига асосан $\neg(x=0) \vdash \neg(x+0=0)$ бўлади. Дедукция теоремасига асосан

10°. $\vdash \neg(x=0) \to \neg(x+0=0)$, яъни $\vdash \mathbf{A}(0)$ бўлади.

11°. $\vdash \mathbf{A}(t)$, яъни $\vdash \neg(x=0) \to \neg(x+t=t)$ бўлсин (индукция қадами).

12°. $\vdash \neg(x=0) \to \neg(x+s(t)=s(t))$, яъни $\vdash \mathbf{A}(s(t))$ — $S^{s(t)}_{t}$ (11°),

13°. $\vdash A \to (B \to A)$ — аксиома (1a),

14°. $\vdash \mathbf{A}(s(t)) \to (\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t)))$ — $S^{\mathbf{A}(s(t)),\ \mathbf{A}(t)}_{A,\ B}$ (13°),

15°. $\vdash \mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))$ — MP (12°, 14°),

16°. $\vdash \forall t\,[\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))]$ — $\forall$ ни киритиш (15°),

17°. $\vdash \mathbf{A}(o) \wedge \forall t\,[\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))]$ — $\wedge$ ни киритиш (10°, 16°),

18°. $\vdash \mathbf{A}(o) \wedge \forall t\,[\mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(s(t))] \to \mathbf{A}(y)$ — аксиома (A8),

19°. $\vdash \mathbf{A}(y)$, яъни $\vdash \neg(x=0) \to \neg(x+y=y)$ — MP (17°, 18°).

7-теорема. $\vdash x+y=y+x$.

Исботи. $\mathbf{A}(y) \overset{\circ}{=} (x+y=y+x)$ бўлсин.

1°. $\vdash x+0=x$ — (A4) аксиома,

2°. $\vdash 0+x=x$ — 3-теорема,

3°. $\vdash (x=y) \wedge (y=z) \rightarrow (x=z)$ — (T3) аксиома,
4°. $\vdash (x=y) \rightarrow (y=x)$ — (T2) аксиома,
5°. $\vdash (0+x=x) \rightarrow (x=0+x)$ — $S^{0+x,\ x}_{x,\ \ y}$ (4°),
6°. $\vdash x=0+x$ — MP $(2^\circ, 5^\circ)$,
7°. $\vdash (x+0=x) \wedge (x=0+x) \rightarrow (x+0=0+x)$ — $S^{x+0,\ x,\ 0+x}_{x,\ \ z}$ (3°),
8°. $\vdash (x+0=x) \wedge (x=0+x)$ — $\wedge$ ни киритиш $(1^\circ, 6^\circ)$,
9°. $\vdash x+0=0+x$, яъни $\vdash \mathbf{A}(0)$ — MP $(7^\circ, 8^\circ)$,
10°. $\vdash \mathbf{A}(t)$, яъни $\vdash x+t=t+x$ бўлсин (индукция қадами),
11°. $\vdash x+s(t)=s(t)+x$, яъни $\vdash \mathbf{A}(s(t))$ — $S^{s(t)}_{t}$ (10°),
12°. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ — (1a) аксиома,
13°. $\vdash \mathbf{A}(s(t)) \rightarrow (\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}(s(t)))$ — $S^{\mathbf{A}(s(t)),\ \mathbf{A}(t)}_{A,\ \ \ B}$ (12°),
14°. $\vdash \mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}(s(t))$ — MP $(11^\circ, 13^\circ)$,
15°. $\vdash \forall t(\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}(s(t)))$ — $\forall$ ни киритиш (14°),
16°. $\vdash \mathbf{A}(o) \wedge \forall t(\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}(s(t)))$ — $\wedge$ ни киритиш $(9^\circ, 15^\circ)$,
17°. $\vdash \mathbf{A}(o) \wedge \forall t(\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}(s(t))) \rightarrow \mathbf{A}(y)$ — аксиома (A8),
18°. $\vdash \mathbf{A}(y)$, яъни $\vdash x+y=y+x$ — MP $(16^\circ, 17^\circ)$.

8-теорема. $\vdash (x+y)+z=x+(y+z)$.

Исботи. $\mathbf{A}(z) \overset{\circ}{=} [(x+y)+z=x+(y+z)]$ бўлсин.

1°. $\vdash x+0=x$ — (A4) аксиома,
2°. $\vdash (x+y)+0=x+y$ — S^{x+y}_{x} (1°),
3°. $\vdash x=x$ — (T1) аксиома,
4°. $\vdash (x=y) \rightarrow (y=x)$ — (T2) аксиома,
5°. $\vdash (y+0=y) \rightarrow (y=y+0)$ — S^{y+0}_{x} (4°),
6°. $\vdash y+0=y$ — S^{y}_{x} (1°),
7°. $\vdash y=y+0$ — MP $(5^\circ, 6^\circ)$,
8°. $\vdash (x=x) \wedge (y=y+0)$ — $\wedge$ ни киритиш $(3^\circ, 7^\circ)$,
9°. $\vdash (x=y) \wedge (z=t) \rightarrow (x+z=y+t)$ — (T5) аксиома,
10°. $\vdash (x=x) \wedge (y=y+0) \rightarrow (x+y=x+(y+0))$ — $S^{x,\ y,\ y+0}_{y,\ z,\ \ t}$ (9°),

11°. $\vdash x + y = x + (y + 0)$ — MP (8°, 10°),

12°. $\vdash (x + y) + 0 = x + (y + 0)$ — транзитивлик (2°, 11°),

13°. $\vdash \mathbf{A}(t)$, яъни $\vdash (x + y) + t = x + (y + t)$ — гипотеза,

14°. $\vdash \mathbf{A}(s(t))$, яъни $\vdash (x + y) + s(t) = x + (y + s(t))$ — $S_t^{s(t)}$ (13°).

15° — 21°-бандлар олдинги теореманинг 12° — 18°-бандлари билан бир хилдир, аммо бу мисолда $\vdash \mathbf{A}(z)$ мегатеорема $\vdash (x + y) + z = x + (y + z)$ ни билдиради.

Биз юқорида формал арифметиканинг баъзи теоремаларини исботладик (бу теоремалар: $x \neq y \to s(x) \neq \neq s(y)$, яъни $\mathbf{A}(x = y) \to \mathbf{A}(s(x) = s(y))$; $s(x) \neq \neq s(y) \to x \neq y$, яъни $\mathbf{A}(s(x) = s(y)) \to \mathbf{A}(x = y)$; $0 + x = x$; $(y = t) \to (y + x = t + x)$; $s(x) + y = s(x + + y)$; $\mathbf{A}(x = 0) \to \mathbf{A}(x + y = y)$; $x + y = y + x$; $(x + + y) + z = x + (y + z)$ формулалардир).

Худди шунга ўхшаш формал арифметиканинг бошқа теоремаларини ҳам исботлаш мумкин.

Шуни ҳам эслатиб ўтамизки, 1 — 8-теоремалар метатилнинг теоремалари (метатеоремалар) бўлиб, $\vdash$ белгиси остидаги формулаларгина формал арифметиканинг теоремаларидир.

Қуйида биз бир қатор метатеоремалар келтирамиз: уларда $\vdash$ белгиси остидаги формулалар формал арифметиканинг теоремаларидан иборатдир.

(a) $\vdash x > y \wedge y > z \to x > z$;

(b) $\vdash x < y \wedge y < z \to x < z$

(c) $\vdash x > y \wedge z > t \to x + z > y + t$;

(d) $\vdash x < y \wedge z < t \to x + z < y + t$;

(e) $\vdash x > y \to x + t > y + t$;

(f) $\vdash x < y \to x + t < y + t$;

(g) $\vdash x > y \wedge t \neq 0 \to xt > yt$;

(h) $\vdash x < y \wedge t \neq 0 \to xt < yt$.

(a)′ — (h)′: „$>$“ ни „$\geqslant$“ га, „$<$“ ни „$\leqslant$“ га алмаштириб яна 8 та метатеорема ҳосил қилиш мумкин.

Изоҳ. Юқорида айтилганидек „$>$“, „$\geqslant$“, „$<$“, „$\leqslant$“, „$\neq$“ лар формал арифметика сигнатурасининг белгилари бўлмаса-да, бу теоремаларни сигнатуранинг белгилари ёрдамида ёзиш қийин эмас. Масалан,

(i). $\vdash \exists u(x=y+u) \wedge \neg(t=0) \rightarrow \exists v(xt=yt+v)$,
(j) $\vdash xy=yx$ („·" нинг коммутативлиги);
(k) $\vdash (xy)z=x(yz)$ („·" нинг ассоциативлиги);
(l) $\vdash x(y+z)=xy+xz$ (дистрибутивлик);
(m) $\vdash \forall x \forall y \exists n\ (y \neq 0 \wedge ny > x)$ (Архимед аксиомаси),
(n) $\vdash (x|y) \wedge (y|z) \rightarrow (x|z)$ („|" нинг транзитивлиги);
(o) $\vdash (x|z) \wedge (y|z) \rightarrow ((x+y)|z)$

XIX асрнинг 70- йилларида немис математиги Г. Кантор тўпламлар назариясини ишлаб чиқиб, матбуотда чоп қилдирганда аксарият математиклар бу назарияга ишончсизлик билан, баъзилар эса тўғридан-тўғри душманлик назари билан қарадилар. Аммо бир неча йиллар давомида мазкур назарияга кўпчилик математик ва файласуфларнинг муносабати кескин ўзгарди — бу математикада кўп даврлар ечилмай ётган талай масалаларнинг тўпламлар назарияси ёрдамида осон ҳал қилинганлигининг натижаси бўлди. Тўпламлар назариясига аксарият математикларнинг муносабати ўзгарибгина қолмай, балки ўша даврнинг илғор математиклари „тўпламлар назарияси математиканинг фундаментидир" дея бошладилар. Тўпламлар назарияси ўзининг юксак шуҳратига эриша бошлаган бир пайтда италиялик С. Бурали-Форти тўпламлар назариясида зиддият (парадокс, антиномия) бор эканлигини кўрсатди (1897 й.). 1902 йили инглиз математиги ва файласуфи Б. Рассел яна бир зиддиятни кўрсатди — бу Кантор назариясига берилган янги зарба эди. Энди фақатгина тўпламлар назариясининг ўзига эмас, балки математика ва унинг мантиқий асосларига ҳам жиддий хавф туғила бошлади.

1903 йилда бўлган жаҳон математикларининг конгрессида Д. Гильберт ўша давргача ечилмаган ва Гильбертнинг фикрича катта аҳамиятга эга бўлган 23 та проблемани таклиф этди. Ана шу проблемалардан бири — математикани асослаш проблемаси эди. Бу проблема ушбу кўринишда қўйилиши мумкин: „Математика зиддиятсиз эканлиги исботлансин ёки рад этилсин".

Бу улкан проблемани ечишда бир неча йўналиш пайдо бўлди. Ҳар бир йўналиш намояндалари ўз дастурлари билан чиқиб, мазкур проблемани ечишга ҳаракат қила бошладилар. „Формализм", „Интуициовизм", „логицизм", „конструктивизм" шу оқимлар жумласидандир. „Формалистлар" деб аталувчи Д. Гильберт бошчилигидаги немис математиклари қуйидаги дастур (Гильберт дастури) ни илгари суришди:

1. Математика ёки унинг катта бир фрагменти (бўлаги) (масалан, арифметика, анализ ва тўпламлар назарияси) формаллаштирилиши керак, яъни математикани (ёки бўлагини) бирор формал система (формализм) кўринишига келтириш керак.

2. Ҳосил бўлган формал система аксиомаларидан аниқланган (ва берилган) қоидалар (тўплами) ёрдамида ҳеч бўлмаганда математиканинг асосини ташкил этувчи жумлаларни (формулаларни) келтириб чиқариш керак.

3. Келтириб чиқариш қоидаларини формал система аксиомаларига қўлланилганда ҳеч қачон (формал) зиддият ҳосил бўлмаслигини кўрсатиш керак.

Гильберт „формаллаштириш" деганда қуйидаги жараённи таклиф этган эди: маълумки жонли тилда кўп мазмунлилик кўп учрайдиган ҳолатдир, яъни битта жумла бир неча мазмунга эга бўлиши мумкин. Шунинг учун қандайдир формал тил ёрдамида математик жумлаларни шундай ифодалаш (ёзиш) керакки, бунда формула ягона мазмунга (қийматга) эга бўлиши керак. Формал тилда ҳар бир формула тил алфавити устидаги қандайдир сўз (алфавит ҳарфларининг чекли кетма-кетлиги) сифатида қаралиб, унинг мазмуни (қиймати) эътиборга олинмайди. Баъзи сўзлар (формулалар) аксиомалар деб қабул қилинади; келтириб чиқариш қоидалари эса сўзларни шакл алмаштириш қоидалари сифатида қаралади.

T формал системанинг зидсизлиги унинг аксиомаларидан келтириб чиқарилмайдиган формула мавжуд эканлиги билан тенг кучлидир, чунки зиддиятга эга бўлган назарияда шу назариянинг ихтиёрий формуласи келтириб чиқарилиши мумкин. Ҳақиқатан, $\vdash_T A$ ва $\vdash_T \neg A$ бўлса, $\vdash_T \neg A \to (A \to B)$ бўлганлигидан дедукция теоремасига асосан $\vdash_T B$ бўлади (бу ерда B — ихтиёрий формула).

T формал система аксиомалари системасининг (кенг маънода) тўлиқлиги унинг аксиомаларидан ихтиёрий умумрост формуланинг келтириб чиқарилувчи бўлишидир (бу ерда алфавити T нинг алфавити билан бир хил бўлган мазмунли назариянинг умумрост формуласи назарда тутилаётир).

Формал (назария) система формаллаштирилган назария тушунчасининг хусусий ҳоли бўлиб, формал назария ўзининг исботланувчи (келтириб чиқарилувчи) формулалари синфи билан аниқланса, формаллаштирилган назария ўзининг рост (умумрост, умумқийматли) формулалари синфи билан аниқланади. Бу синф, одатда, келтириб чиқаришга нисбатан ёпиқ бўлиши керак, яъни рост формулалардан келтириб чиқарилувчи ҳар бир формула рост бўлиши керак. Табиий, бунда формаллаштирилган назариянинг аксиомалари ҳам рост формулалар бўлиши керак.

Формаллаштирилган назарияни маълум бир мазмунда унга эквивалент бўлган формал система билан ифодалаш мумкин, яъни бу назариянинг барча рост формулалари синфини бирор аксиомалар системасидан келтириб чиқариш қоидалари ёрдамида ҳосил қилинадиган формулалар синфи сифатида ҳосил қилиш мумкинми— деган масала, одатда, муҳим масаладир. Бу масалани яна қуйидагича қўйиш мумкин: формаллаштирилган назарияни аксиомалаштириш мумкинми, яъни уни бирор аксиоматик қурилган формал системага эквивалент дейиш мумкинми?

„Формализм“ йўналишининг намояндалари бутун математика аксиомалаштирилувчи назария деб ҳисоблашган эдилар. Аммо аслида кўпгина математик назариялар, жумладан, натурал сонлар арифметикаси аксиомалаштирилувчи назария эмаслиги аниқ бўлди.

1931 йили австралиялик К. Гёдель ўзининг машҳур иккита теоремасини эълон қилди. Бу теоремалардан биринчисининг мазмуни шундан иборатки, (формал) арифметиканинг ёки (формал) арифметикани ўз ичига олган ҳар қандай формал системанинг зидсизлигини шу назариянинг ўз воситалари ёрдамида исботлаб бўлмайди, яъни формал системанинг зидсизлигини исботлаш учун унга кирмайдиган кучлироқ воситалар ишлатилиши керак.

Гёдель теоремасининг иккинчиси ушбу мазмунга эгадир:

Формал арифметикада шундай формула топиладики, у рост формула бўлиб, ўзи ҳам, инкори ҳам формал арифметикада келтириб чиқарилувчи формулалар эмасдир.

Мазкур теорема Гёделнинг арифметиканинг тўлиқ эмаслиги ҳақидаги теоремаси дейилади. Гёдель теоремалари, биринчидан, арифметика аксиомалаштирилувчи назария эмаслигини кўрсатган бўлса, иккинчидан Гильберт дастури бажарилмаслигини намойиш қилди.

Машқлар

1. 2-§ да келтирилган 2^+, 5^+, 6^+, 7^+, 11^+, 13^+ муносабатларни исботланг.

2. а) $a > 0$ бўлганда $M = [0, a]$ кесмада ушбу амалларни олайлик: $x, y \in M$ бўлса, $x \cap y = \min(x, y)$, $x \cup y = \max(x, y)$, $\overline{x} = a - x$.

$<\cap, \cup, \overline{}, 0, 1>$ сигнатуранинг 0 сифатида $0 \in M$ ни, 1 сифатида $a \in M$ ни олайлик.

$\mathbf{M} = <M; \cap, \cup, \overline{}, 0, 1>$ Буль алгебрасининг модели эканини кўрсатинг.

б) $N > 1$ бўлган ихтиёрий натурал соннинг барча бўлувчилари тўплами M бўлсин:

$$M = \{n \mid N \vdots n\}.$$

M да ушбу амалларни қараймиз: $x, y \in M$ бўлса, $x \cap y =$ ЭКУБ (x, y), $x \cup y =$ ЭКУК (x, y), $\overline{x} = \frac{N}{x}$; $<\cap, \cup, \overline{}, 0, 1>$ сигнатуранинг 0 сифатида $1 \in M$ ни, 1 сифатида $N \in M$ ни оламиз.

$\mathbf{M} = <M; \cap, \cup, \overline{}, 0, 1>$ Буль алгебрасининг модели эканини кўрсатинг.

3. 5-§ даги (а) — (0) метатеоремаларни исботланг.

V БОБ

АЛГОРИТМЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Алгоритм тушунчаси

Математиканинг дастлабки ривожланиш поғоналаридаёқ унда соф механик характерга эга бўлган, маълум бир схема ёрдамида олиб бориладиган ҳисоблаш жараёнлари пайдо бўла бошлади.

Бир турдаги, бир хил мазмунга эга бўлган кўп масалалар бир хил усул (йўл, қоида) ёрдамида ҳисоблана бошланди. Математикадаги бундай жараёнлар алгоритмлар деб атала бошланди. Шу ерда „бир турдаги масалалар", „бир хил мазмунга эга бўлган масалалар" деган тушунчаларни бир оз ёритиш эҳтиёжи туғилади.

Ҳар қандай математик масала унинг „шартлари" деб аталувчи миқдорларнинг бирор системаси ва унинг „ечими" (жавоби) деб аталувчи миқдорларнинг иккинчи бир системасидан иборат бўлади. Математик масаланинг шартлари одатда берилган бўлиб, унинг ечимини топиш талаб этилади. Бу ерда „миқдор" тушунчаси кенг мазмунда тушунилиши керак — сонлар, функциялар, матрицалар, жумлалар, формулалар, геометрик объектлар ва ҳоказолар миқдор тушунчасига мисол бўла олади.

Масалан, 1) „a ва b натурал сонларининг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топинг" деган масалада a ва b натурал сонлар масала шартини ташкил этувчи миқдорлардир.

2) „$\int xe^x dx$ аниқмас интегрални ҳисобланг" деган масаланинг шартини $y = xe^x$ функция ташкил қилади.

3) „Матрицаларни кўпайтириш ассоциатив амал эканлигини исботланг" деган масалада шартни ихтиёрий учта A, B, C матрица (миқдорлар системаси) ташкил этса, масаланинг ечими эса $(AB)C = A(BC)$ тенгликнинг ростлиги (ёки ёлғонлиги) дан иборатдир.

4) „ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle C = \angle C_1$ бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш эканлигини кўрсатинг" деган масалада унинг шартини (миқдорлар-

нинг системасини) $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ лар ташкил этиб, унинг ечимини эса $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ муносабатнинг ўринли эканлиги ташкил этади.

Мазкур масалаларнинг ҳар бирига хос бўлган умумий хосса бор эканлигини сезиш қийин эмас — ҳар бир масаланинг шартлари қандайдир чексиз тўплам (лар) дан олинган бўлади. Масалан, 1-масаланинг шартлари натурал сонлар тўплами $N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$* дан, 2-масаланинг шартлари битта ҳақиқий аргументли дифференциалланувчи функциялар тўпламидан, 3-масаланинг шартлари ихтиёрий P майдон (ёки ассоциатив ҳалқа) устида қаралаётган матрицалар тўплами $M(P)$ дан, 4-масаланинг шартлари барча учбурчаклар тўплами ва бу учбурчаклар бурчаклари тўпламидан олиниши равшандир. **A** ихтиёрий математик масала, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ унинг Q тўпламдан олинган шартлари бўлса, у ҳолда шартлари (масалан, $b_1, b_2, \ldots, b_m$) шу тўпламдан олинган ва **A** масала билан бир хил бўлган чексиз кўп масалалар мавжуд бўлади. Масалан, 1-масала қуйида чексиз кўп бир турдаги, бир хил хусусий масалаларни ўзида мужассамлантиргандир: „2 ва 5 нинг ЭКУБни топинг“, „6 ва 8 нинг ЭКУБ ни топинг“, „20 ва 1215 нинг ЭКУБ ни топинг“ ва ҳоказо (a ва b ларнинг ўрнига ихтиёрий натурал сонлар қўйилади). Шундай қилиб, ҳар бир **A** математик масала ўзида чексиз кўп бир турдаги масалаларни бирлаштирар экан. Барча бир турдаги масалалар тўплами „оммавий масала“ дейилади.

Бир турдаги масалаларнинг яна бир умумий хоссаси шундан иборатки, бу масалалар бир хил йўл, усул, яъни бир хил алгоритм ёрдамида ечилади. Яна битта масалани олайлик:

5) „$a \neq 0$ ва a, b, c лар ҳақиқий сонлар бўлса, $ax + bx + c = 0$ тенгламани ечинг“. Табиий, a, b ва c ларга ихтиёрий ҳақиқий қийматлар берилганда ($a \neq 0$) чексиз кўп бир турдаги масалалар пайдо бўлиб, уларнинг ҳар бири битта йўл билан ечилади:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

---

* „Натурал сонлар тўплами“ деганда ушбу китобда кенгайтирилган натурал сонлар тўплами $N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ тушунилади.

Мазкур формуладан кўринадики, тенгламанинг илдизини топиш чекли қадамда бажарилади: b ни квадратга кўтариш, a ни c га, ac ни эса 4 га кўпайтириш, b^2 дан $4 \cdot ac$ ни айириш, b^2-4ac дан квадрат илдиз чиқариш, $(-b)$ га (дан) $\sqrt{b^2-4ac}$ ни қўшиш (айириш), a ни 2 га кўпайтириш ва ниҳоят $-b \pm \sqrt{b^2-4ac}$ ни $2a$ га бўлиш яна шу қадамлардир.

Яна 1-масалага қайтамиз. Маълумки, иккита натурал соннинг ЭКУБни топишда Евклид алгоритми деб аталувчи усулдан фойдаланилади. Евклид алгоритмининг қадамлари қуйидагилардир:

1°. $a=b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ бўлса, уларнинг ЭКУБи шу сонларнинг бирилир.

2°. Агар $a \neq b$ бўлиб, масалан, $a>b$ бўлса, у ҳолда a сони b га бўлинади:

$$a=bq_1+r_1,\ (0 \leqslant r_1 < b). \tag{1}$$

Бунда $r_1=0$ бўлса, у ҳолда алгоритм ўз ишини тўхтатиб, ЭКУБ b эканлигини кўрсатади, $r_1 \neq 0$ бўлса, алгоритм ўз ишини давом эттиради.

3°. b сони r_1 га бўлинади:

$$b=r_1q_2+r_2,\ (0 \leqslant r_2 < r_1). \tag{2}$$

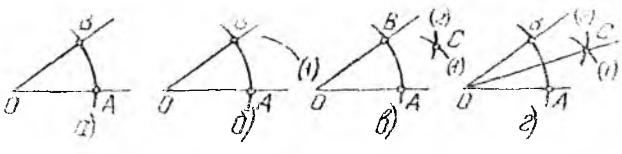
Агар $r_1=0$ бўлса, у ҳолда алгоритм ўз ишини тўхтатиб, ЭКУБ r_1 эканлигини курсатади, $r_2 \neq 0$ бўлса, алгоритм ўз ишини давом эттиради.

4°. r_1 қолдиқ r_2 га бўлинади:

$$r_1=r_2q_3+r_3,\ (0 \geqslant r_3 < r_2). \tag{3}$$

Ушбу жараён чекли қадамдан сўнг тугайди, чунки (1), (2) (3), ... лардан кўринадики, r_1, r_2 r_3, ... қолдиқлар $r_1>r_2>r_3>\ldots$ шартларни қаноатлантиради, ва демак, k қадамдан сўнг $r_k=0$ бўлади. Шундан сўнг алгоритм ўз ишини тўхтатиб, ЭКУБ r_{k-1} эканлигини кўрсатади. Равшанки, ушбу жараён натурал сонларнинг баъзи жуфтликлари учун қисқа бўлса, баъзи жуфтликлари учун эса узоқ давом этиши мумкин. Аммо, ушбу алгоритмнинг қадамлари сони чекли бўлиб, алгоритм натурал сонларнинг ихтиёрий жуфтлиги учун унинг ЭКУБни ҳисоблаб беради. Шундай қилиб, Евклид алгоритми ҳам чексиз кўп жуфтликлар учун ЭКУБ ни топиш масаласини ечади.

II бобда жумлалар ҳисобининг формулалари учун алгоритмик масала қўйилган эди: „Жумлалар ҳисоби-



9- шакл.

нинг ихтиёрий **A** формуласи шу ҳисобда исботланувчими ёки исботланувчи эмасми?“ Мазкур масала ҳам оммавий масалалардан биридир, чунки жумлалар ҳисобида чексиз кўп формулалар бўлиб, уларнинг ҳар бири учун юқоридаги савол қўйилади ва бунинг натижасида чексиз кўп бир турдаги масалалар ҳосил бўлади. I бобнинг охирида юқорида келтирилган масала алгоритмик ечилувчи эканлиги кўрсатилган эди: **A** формула исботланувчи ёки исботланувчи эмаслигини кўрсатиш учун унинг ростлик жадвалини тузиш кифоядир.

Ниҳоят қуйидаги геометрик оммавий масалани қарайлик: „Текислик устида олинган бурчакни ($\neq 360°$) чизғич ва циркуль ёрдамида тенг иккига бўлинг“ (9-шакл). Ушбу масала оммавий масала эканлигини сезиш қийин эмас: текислик устида чексиз кўп бурчаклар олиш ҳамда уларнинг ҳар бири учун юқоридаги масалани қўйиш мумкин.

Элементар геометрия (геометрик ясаш усуллари) дан маълумки, ушбу масалани ечиш жараёнида қуйидаги (алгоритмик) қадамлар бажарилади (бу қадамларнинг барчаси берилган муайян бурчакда бажарилади, аммо бу қадамлар кетма-кетлигини яққолроқ кўрсатиш учун 4 та чизмада ифода этдик):

1°. Циркулнинг учини O нуқта (бурчак учи) га қўйиб, ихтиёрий $l > 0$ радиус билан бурчак томонларини кесувчи ёй чизилади (биринчи қадам натижаси: бурчак учидан тенг узоқлашган A ва B нуқталар ҳосил қилинади).

2°. Циркуль учини A нуқтага қўйиб, бирор (етарли даражада катта бўлган) радиус билан ёй чизилади [бу ёй (1) билан белгиланган].

3°. Циркуль учини B нуқтага қўйиб, 2-қадамда ишлатилган радиус билан (1) ёйни кесувчи (2) ёй чизилади (2°- ва 3°-қадамнинг натижаси: A ва B нуқталардан тенг узоқлашган C нуқта топилади).

4°. O ва C нуқталар орқали чизғич ёрдамида нур ўтказилади.

Баён этилган ушбу жараёнда шунга эътиборни жалб этиш кераккн, бу жараён текисликда берилган ихтиёрий бурчакка ($\neq 360°$) қўлланилиши мумкин.

Юқорида қаралган масалалардан кўринадики, ҳар бир алгоритмик жараён чексиз кўп бир хил мазмунли масалаларни ечишга қўлланилар экан. Алгоритмнинг бу хусусияти унинг оммавийлик хусусиятини ташкил этади.

Ҳар бир алгоритм қандайдир миқдорларнинг бошланғич системаси (масаланинг шартлари) устида иш бошлайди ҳамда дискрет* режимда ишлаб, ҳар бир навбатдаги вақт моментида (оралиғида) миқдорларнинг системасини маълум бир қонун (дастур) га асосан миқдорларнинг кейинги (янги) системасига ўтказади. Буни мисолда кўрсатайлик.

1-масалада $a=39$, $b=16$ бўлсин. Бу хусусий масалада миқдорларнинг дастлабки системаси (39, 16) жуфтликдир. $39 \neq 16$ ва $39 > 16$ бўлгани учун алгоритмнинг биринчи қадами ($39=16\cdot 2+7, 0<7<16$) дан сўнг миқдорларнинг кейинги системаси (39, 16, 2, 7) пайдо бўлади ($q_1=2$, $r_1=7$). $r_1\neq 0$ бўлгани учун иккинчи қадами ($16=7\cdot 2+2$, $0<2<7$, $q_2=2$, $r_2=2$) дан кейин миқдорларнинг учинчи системаси (16, 7, 2, 2) ҳосил бўлади. $r_2\neq 0$ бўлгани учун алгоритмнинг учинчи қадами ($7=2\cdot 3+1$, $0<1<2$, $q_3=3$, $r_3=1$) дан сўнг янги система (7, 2, 3, 1) ҳосил бўлади. Ниҳоят, $r_3\neq 0$ булгани учун алгоритмнинг тўртинчи қадами ($2=1\cdot 2+0$, $q_4=2$, $r_4=0$) дан сўнг миқдорларнинг охирги системаси (9, 1, 2, 0) ҳосил бўлади. Бу жараённи шартли равишда қуйидагича ифодалаш мумкин: $(39, 16)\rightarrow(39, 16, 2, 7)\rightarrow(16, 7, 2, 2)\rightarrow(7, 2, 3, 1, 1)\rightarrow(2, 1, 2, 0)$.

Алгоритмнинг ишлаши жараёнида қандайдир вақт моментида (бошланғич моментдан бошқа) ҳосил қилинган миқдорлар системаси олдинги вақт моментида ҳосил қилинган миқдорлар системаси орқали бир қийматли аниқланади. Бу алгоритмнинг яна бир хусусияти — унинг бир қийматли аниқланувчанлигини (бир қийматлилигини) кўрсатади.

---

* Дискретлик (лотинча discretus — узлукли) — узлуксизликка қарама-қарши тушунча бўлиб, берилган тўплам элементлари орасида „сакраш“, „оралиқ“ нинг бўлиши.

Биз юқорида 39 ва 16 сонларининг ЭКУБни ҳисоблаш алгоритмини (4 қадамдан иборат) курсатган эдик. Бу қадамларнинг ўзида баъзи оммавий масалаларни ечадиган бошқа алгоритмлар қўлланилгандир (уларнинг қадамлари юқорида келтирилмаган). Масалан, биринчи қадамда ушбу оммавий масалани ечувчи алгоритмик жараён ишлатилган: „a натурал сонни b натурал сонига қолдиқли бўлинг". Элементар арифметикадан маълумки, бир натурал сон иккинчисига „бурчак" қилиб бўлинади:

$$\begin{array}{r|l} -\,39 & 16 \\ \underline{32} & \overline{\,2\,} \\ 7 & \end{array} \qquad (*)$$

Бундан $39 = 16 \cdot 2 + 7$ тенгликни ҳосил қилган эдик. Агар (*) га эътибор қилсак, бўлиш алгоритмининг ишлатилиши жараёнида биз яна иккита бошқа алгоритмик жараёндан — натурал сонни натурал сонга кўпайтириш ҳамда натурал сондан натурал сонни айиришдан фойдаландик:

$$\times\begin{array}{r} 16 \\ 2 \\ \hline 32 \end{array}, \qquad -\begin{array}{r} 39 \\ 32 \\ \hline 07 \end{array}$$

Шундай қилиб, юқорида келтирилган мулоҳазалардан куринадики, баъзан бирор алгоритмнинг (баъзи) қадамлари янада майдароқ (содда) қадамларга ажралиб кетиши мумкин экан. Демак, миқдорларнинг кейинги системасини олдингисидан ҳосил қилиш қонуни содда қадамлардан иборат бўлиши керак экан. Алгоритм қадамларининг соддалиги (элементарлиги) унинг яна бир хусусиятидир.

Баъзан алгоритм бирор объектлар (миқдорлар) системаси устида ишлаганда бирор кадамда ҳосил бўлган системадан кейинги системага ўтиш усули натижа бермаслиги мумкин (бунда алгоритм миқдорларнинг бошлангич системасини „аниқмасликка" қайта ишлайди (ўтказади) дейилади). Масалан, $ax^2 + bx + c + = 0$ тенглама илдизларини топишда фақат ҳақиқий илдизлар билан чегаралансак, у ҳолда $b^2 - 4ac < 0$ бўлганда алгоритм натижа бермайди. Бундай ҳолда нима алгоритмнинг натижаси деб ҳисобланиши кўрсатилиши керак (бизнинг мисолда алгоритмнинг натижаси сифатида

„тенгламанинг ҳақиқий илдизлари йўқ" деган жумла олинади). Бу эса алгоритмнинг йўналувчанлик хоссасидир.

Юқорида айтилганидек, ҳар бир алгоритмик жараён дискрет табиатга эга бўлиб*, ҳар бир вақт моментида алгоритмнинг битта қадами амалга ошади (бажарилади). Дискретлик алгоритмнинг асосий хоссаларидан яна биридир. Шундай қилиб, алгоритмик жараён — алгоритмни маълум бир объектлар (миқдорлар) системасига қўллаш жараёни бўлиб, алгоритмнинig ҳар бир қадами алгоритмик жараённинг бир ҳолатини иккинчи ҳолати билан маълум бир қоида ёки бевосита қайта ишлаш қонуни (программа) асосида алмаштириб боради. Ҳар қандай алгоритм ўз ишини қандайдир бошланғич ҳолатдан бошлайди ҳамда унинг қадамлар сони чекли бўлса, у ҳолда алгоритм ўз ишини қандайдир охирги ҳолатда тугатади — бу ҳолатда (охирги ҳолатда) алгоритм ўзи қўлланилган масаланинг ечимини беради.

Алгоритм бирор миқдорлар системасига қўлланилганда алгоритмик жараён қуйидаги учта йўлдан бориши мумкин;

1) Алгоритмнинг ишлаши жараёнида бир ҳолат иккинчи ҳолат билан алмашинаверсада, бу жараён ҳеч қачон тугамайди;

2) алгоритмик жараённинг бирор қадамидан сўнг шундай ҳолат юз берадики, ҳосил бўлган объект (ёки объектлар системаси) га бевосита қайта ишлаш қонуни (қоидаси) ни қўллаб бўлмайди ва алгоритм ҳеч қандай натижа бермай ўз ишини тўхтатади;

3) алгоритмик жараённинг бирор қадамидан сўнг охирги ҳолат юз бериб, ишдан тўхтайди.

Шундай қилиб, алгоритмик жараён учинчи йўлдан кетишини таъминлаш учун унинг мазкур алгоритм қўлланилиши мумкин бўлган объектларга нисбатан ишлатилиши керак — булар натурал сонлар, рационал (ва бошқа) сонлар, кўпҳадлар, матрицалар, бирор алфавитдаги сўзлар, теоремалар, геометрик формалар ва ҳоказолардир.

Математикада, одатда, шартларига бутун қийматли чекли сондаги x_1, x_2, . . ., x_n параметрлар қийматлари

---

* Табиатда узлуксиз жараёнлар ҳам мавжуддир. Масалан, вақтнинг ўтиши (оқими) узлуксиз жараёндир.

кирган масалани ечиш алгоритмини топиш талаб этилади. Ушбу ҳол $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументларга боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ бутун қийматли функция* қийматини ҳисоблайдиган алгоритмни топиш демакдир.

Қиймати маълум бир алгоритм ёрдамида ҳисобланувчи сонли функция** ҳисобланувчи функция дейилади.

Алгоритм тушунчаси математикада фундаментал тушунчалардан бири бўлиб, у ўз аҳамияти ва ўрнига кўра тўплам ёки функция тушунчалари билан бир хилдир. Дарҳақиқат, дастлабки математик тушунчалар пайдо бўла бошлагандаёқ (масалан, натурал сонларни қўшиш ва ҳоказо) инсонлар баъзи алгоритмик жараёнлар (масалан, натурал сонларни қўшиш алгоритми ва бошқалар) дан фойдалана бошлаганлр (албатта, „алгоритм“ тушунчаси ва атамаси анча кейин пайдо бўлган бўлиб, инсонлар бу тушунчадан дастлабки даврларда интуитив ҳолда фойдаланганлар). Алгоритм тушунчасини аниқлаш ва уни таърифлашга уриниш асримизнинг 20-йилларида бошланди. Аммо дастлабки тадқиқотлар алгоритм тушунчаси тўплам тушунчасига ўхшаш математиканинг бошланғич тушунчаларидан бири эканлигини кўрсатди. Алгоритм тушунчасига таъриф бериш мумкин эмас, уни фақат интуитив тушуниш мумкин. Ҳисобланувчи функция тушунчасида таърифланмайдиган алгоритм тушунчаси қатнашганлиги учун ҳисобланувчи функция тушунчаси ҳам таърифланмайди, балки интуитив тушунилади, холос.

Шундай бўлишига қарамасдан, асримизнинг 30-йилларида америкалик математиклар А.Чёрч, К.Гёдель ва С.Клинилар алгоритм тушунчасини рекурсив функциялар ёрдамида аниқлаш мумкин эканлигини (гипотеза ҳолида) кўрсатдилар. 1931 йили К.Гёдель биринчи марта барча рекурсив функциялар синфини бирор формал системада аниқланган сонли функциялар синфи сифатида аниқлади [30]. 1936 йилда А.Чёрч бу масалага бутунлай бошқа нуқтаи назардан ёндашиб, К. Гёдель аниқлаган сонли функциялар синфини ҳосил қилди [29].

---

* $f: Z^n \to Z$ $(n=1, 2, \ldots)$ функция n-ар бутун қийматли функция дейилади; бунда Z – бутун сонлар тўплами, Z^n – унинг декарт n-даражасидир.

** $f: N^m \to N$ $(m=1, 2, \ldots)$ функция m-ар сонли (ёки арифметик) функция дейилади.

Сонли функциялар синфига олиб келган гоялар таҳлили А.Чёрчга биринчи бўлиб қуйидаги тезисни эълон этишга имкон берди:

Чёрч тезиси. Рекурсив функция синфи аргументларнинг барча қийматларида аниқланган ҳисобланувчи функциялар синфи билан бир хилдир.

Чёрч тезиси таркибида аниқ таърифланмайдиган ҳисобланувчи функция тушунчаси қатнашганлиги сабабли, бу тезисни исботлаш мумкин эмас.

Юқорида биз баъзи алгоритмлар қандайдир бошланғич миқдорлар системасига қўлланилганда, бу миқдорларни қайта ишлаш жараёни чексиз давом этиши, яъни алгоритм $x_1, \ldots, x_n$ миқдорлар системасини „аниқламасликка“ ўтказишини айтиб ўтган эдик. Чексиз давом этувчи жараёнларни қамраб олиш мақсадида 1936 йили С.Клини қисмий рекурсив функциялар тушунчасини киритди ва қуйидаги гипотезани илгари сурди:

Клини тезиси. Алгоритм ёрдамида ҳисобланувчи қисмий функциялар синфи қисмий рекурсив функциялар синфи билан бир хилдир.

Табиийки, Чёрч тезиси сингари Клини тезисини ҳам исботлаш мумкин эмас, чунки Чёрч тезиси Клини тезисининг хусусий ҳолидир.

Алгоритм тушунчасини аниқлаш йўлидаги уринишлар бошқа йўналишларда ҳам бораётган эди. Алгоритм тушунчасини аниқлашга ва сўнгра унинг ёрдамида ҳисобланувчи функция тушунчасини аниқлашга бир-биридан бехабар ҳолда Э. Пост [31] 1939 йили ва А. Тьюринг [32] 1937 йили эришдилар.

Пост ва Тьюринг алгоритмик жараёнлар маълум бир тузилишга эга бўлган „машина“ бажарадиган жараёнлар эканлигини кўрсатдилар. Улар ўша пайтдаги математикада маълум бўлган барча алгоритмик жараёнларни бажара оладиган „абстракт математик машиналар“ синфини ҳосил қилиб, уларга аниқ математик атамалар ёрдамида таъриф бердилар. Пост ва Тьюринг ушбу машиналар ёрдамида ҳисобланувчи барча функциялар синфи барча қисмий ресурсив функциялар синфи билан бир хил эканлигини кўрсатдилар. Бу Чёрч тезисининг яна битта фундаментал тасдиғи бўлди.

Шундай қилиб, асримизнинг 30 — 40-йилларида бажарилган тадқиқотлар қисмий рекурсив функция ва Тьюринг машинаси тушунчаларининг ҳар бири алгоритм тушунчаси учун илмий эквивалент бўла олишини кўрсатди.

Алгоритмлар назарияси математиканинг ички эҳтиёжлари туфайли пайдо бўлди: математик мантиқ, алгебра, математик анализ, геометрия, математика асослари ва математиканинг кўпгина бошқа соҳалари алгоритмлар назариясининг асосий қўлланиладиган соҳаларидир. Асримизнинг 40-йилларида электрон ҳисоблаш ва бошқарувчи машиналарнинг пайдо бўлиши алгоритмлар назариясининг янада юксалишига олиб келди. Натижада Пост- Тьюринг машиналари жуда катта аниқлик билан электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида моделлаштирила бошланди. Бундан ташқари, алгоритмлар назарияси иқтисод, лингвистика, психология, мия физиологияси ва бошқа соҳаларда кенг қўлланилмоқда.

2- §. Қисмий рекурсив функциялар

1-таъриф. X ва Y бўш бўлмаган тўпламлар бўлсин. Агар X тўпламнинг баъзи элементларига Y тўпламнинг бир қийматли аниқланган элементлари мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда f *қисмий функция берилган* дейилади. Бунда X тўпламнинг Y тўпламда образи (акси) мавжуд бўлган элементлари тўпламостиси аниқланган қисмий функциянинг *аниқланиш соҳаси*, Y тўпламнинг X тўпламда прообрази (асли) мавжуд бўлган барча элементлари тўпламостиси қисмий функциянинг *қийматлари тўплами* дейилади.

Мазкур таърифдан қисмий функция тушунчасининг баъзи хусусий ҳолларини ҳосил қилиш мумкин. f X тўпламда аниқланган (берилган) қисмий функция, X' унинг аниқланиш соҳаси, Y' эса қийматлар соҳаси бўлсин. Агар $X=X'$ бўлса, у ҳолда қисмий функция тушунчаси одатдаги (математик анализ ёки алгебрада аниқланадиган) функция тушунчасига айланади. Бундай қисмий функциялар тўлиқ аниқланган (X тўпламнинг ҳар бир элементи учун аниқланган) функция дейилади. Агар $Y=\varnothing$ бўлса, у ҳолда f аниқланмаган функция дейилади. $f: X \to Y$ қисмий функция бўлиб, бунда X нинг x элементига Y нинг y элементи мос қўйилган бўлса, $f(x)=y$ кўринишда ёзамиз.

$f: X \to Y$ ва $h: X \to Y$ қисмий функциялар бўлсин. Агар бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси бир хил (масалан, $X' \subseteq X$) бўлиб, аниқланиш соҳасининг ҳар бир x элементи учун $(x \in X')$ $f(x) = h(x)$ бўлса, у ҳолда f ва h қисмий функциялар тенг дейилади $(f = h)$.

$f: X \to Y$ қисмий функция берилиб, бунда $X = Y^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлса, у ҳолда $f: Y^n \to Y$ Y тўпламда аниқланган n-ар (n аргументли, n та ўзгарувчига боғлиқ бўлган) қисмий алгебраик амал дейилади. Агар Y^* мазкур қисмий алгебраик амалнинг аниқланиш соҳаси ҳамда $Y^* = Y^n$ бўлса, у ҳолда n-ар қисмий алгебраик амал тушунчаси алгебрада аниқланадиган одатдаги n-ар алгебраик амал (тўлиқ аниқланган) тушунчасига айланади. Шундай қилиб, одатдаги (тўлиқ аниқланган) функция ёки алгебраик амал тушунчалари қисмий функция ёки қисмий алгебраик амал тушунчаларининг хусусий ҳоли эканлиги равшандир. Бундан ташқари, $f: X \to Y$ қисмий функция, $X = Z^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлса, у ҳолда f Z тўпламда берилган (аниқланган) n-ар қисмий функция дейилади. Қисмий функциялар орасида қисмий арифметик (ёки сонли) функциялар алоҳида аҳамиятга эгадир: $f: Z^n \to Y$ қисмий функция $Z = N$ (натурал сонлар) тўпламда аниқланган бўлиб, қийматлар соҳаси ҳам натурал сонлар тўпламида бўлса, $(Y = N)$, бундай қисмий функция n-ар қисмий арифметик функция дейилади. $f: N^m \to N$ m-ар қисмий арифметик функция. $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$, f функция $(x_1, \ldots, x_m)$ тизмага y натурал сонни мос қўйган бўлса, у ҳолда буни $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y$ каби ёзамиз.

1-мисол. a) $f(x) = x + 1$; b) $f(x, y) = x + y$;

c) $f(x, y) = x^y$; d) $f(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{агар } x \geqslant y \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{—„— } x < y \text{ —„—}; \end{cases}$

e) $f(x) = [e^x]$ (бу ерда $[t]$ — „t нинг бутун қисми"),

f) $f(x) = 2$; g) $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ („сигнум x" деб ўқилади) функциялар тўлиқ аниқланган арифметик функциялардир. h) $f(x) = \frac{x}{2}$; i) $f(x, y) = x - y$;

j) $f(x) = \sin x$; k) $f(x) = \sqrt{x}$ лар эса қисмий арифметик функциялар бўлиб, бунда $f(x) = \sin x$ функция фақат битта нуқтада $(x = 0)$ аниқланган бўлиб, x нинг бошқа натурал қийматларида аниқланган эмас. Аммо бу функциялардан тўлиқ аниқланган функциялар ҳосил қилиш мумкин:

h′) $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$; i′) $f(x, y)=|x-y|$;

j′) $f(x)=[|\sin x|]$; k′) $f(x)=[\sqrt{x}]$.

Барча қисмий арифметик функциялар тўпламини $F_{\text{а. ф.}}$ каби белгилаймиз: $F_{\text{а. ф.}}$ тўпламга кирувчи $s(x)=x+1$, $\theta(x_1, \ldots, x_n)=0$ ва $\tau_m^n(x_1, \ldots, x_n)=x_m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ функциялар алоҳида аҳамиятга эга бўлиб, улар базис функциялар дейилади: бунда $s(x)$ — „кейин келиш“ функцияси (бу функция x натурал сон берилганда ундан кейин келувчи натурал сонни ҳисоблайди), $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ — „доимий (константа) функция“, $\tau_m^n(x_1, \ldots, x_n)$ эса „m-аргументни танловчи функция“ дейилади.

Баъзи ҳолларда $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ ўрнига унинг хусусий ҳоли бўлган $\theta(x)=0$ функцияси олинади.

Энди қисмий арифметик функциялар устида бажариладиган асосий амалларни кўриб чиқамиз — улар операторлар деб аталади.

Суперпозиция **оператори** (S-оператор). f n-ар, g_i $(i=1, n)$ эса m-ар (қисмий) арифметик функциялар бўлсин. У ҳолда $h(x_1, \ldots, x_m)=f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$ (қисмий) функция берилган функциялардан суперпозиция оператори ёрдамида ҳосил қилинган дейилади ҳамда

$$h=S(f, g_1, \ldots, g_n)$$

кўринишда белгиланади.

Агар $f, g_1, \ldots, g_n$ лар тўлиқ аниқланган функциялар бўлса, $S(f, g_1, \ldots, g_n)$ ҳам тўлиқ аниқланган функция бўлиши табиийдир.

2-мисол. 1) $f(x, y)=2x^y+\frac{x^2}{x+y}$, $g_1(x, y, t)\equiv 1$, $g_2(x, y, t)=x+y+t$ бўлса, у ҳолда $h(x, y, t)=f(g_1(x, y, t), g_2(x, y, t))=2+\frac{1}{x+y+t+1}$, $h(x, y, t)=2+\frac{1}{x+y+t+1}$ бўлади.

2) $f(x, y)=xy$, $g_1(x)=2^{x+1}$, $g(x)=2(x+3)$ бўлса, у ҳолда $h(x)=f(g_1(x), g_2(x))=2^{x+1}\cdot 2(x+3)=2^{x+2}(x+3)$, $h(x)=2^{x+2}(x+3)$ бўлади.

3-мисол. $h(x, y, z)=x+yz$ функцияни суперпозиция оператори ёрдамида ифодаланг.

$y\cdot z=S(\cdot, \tau_2^3, \tau_3^3)(y, z)$, бу ерда $\tau_2^3(x, y, z)=y$,

$\tau_3^3(x, y, z)=z$. $x+y\cdot z=S(+, \tau_1^3, S(\cdot, \tau_2^3, \tau_3^3))(x, y, z)$, бу ерда $\tau_1^3(x, y, z)=x$.

4-мисол. $s(x)$, $0(x)$, τ_m^n функциялардан S-оператор ёрдамида $\Theta(x_1, \ldots, x_n)=0$ функцияни қуйидагича ҳосил қилиш мумкин: $\Theta=S(0, \tau_1^n)$.

Агар $f(x_1, \ldots, x_n)=a$ $(a\in N)$ ихтиёрий доимий функция бўлса, у ҳолда уни S-оператор ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$a=S(s, S(s, \ldots, (s, S(s, 0))\ldots)), \qquad (*)$$

бу ерда s — „кейин келиш" функцияси, 0 — доимий функция, S-оператор $(*)$ да a марта олингандир.

Примитив рекурсия* оператори (PR-оператор).

f $n+2$-ар $(n=0, 1, \ldots)$, g эса n-ар (қисмий) функция бўлсин. Агар $n+1$-ар $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ (қисмий) функция

$$\begin{cases} h(x_1, \ldots, x_n, 0)=g(x_1, \ldots, x_n), \\ h(x_1, \ldots, x_n, y+1)=f(x_1, \ldots, x_n, y, h(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{cases}$$

схема ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда у берилган функциялардан примитив рекурсия оператори ёрдамида ҳосил қилинган дейилади ва

$$h=\mathrm{PR}(f, g)$$

кўринишда белгиланади.

$f(x_1, \ldots, x_n, y, t)$ ва $g(x_1, \ldots, x_n)$ лар тўлиқ аниқланган функциялар бўлса, табиий, $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ ҳам тўлиқ аниқланган функция бўлади. Кўп ҳолларда примитив рекурсия операторнинг содда кўриниши $(n=0)$ ишлатилади: бунда g 0-ар функция бўлиб, у қандайдир натурал сондан иборат, яъни $g=a$, $a\in N$, f эса бинар (икки аргументли) функция бўлади. У ҳолда примитив рекурсия схемаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} h(0)=a, \\ h(x+1)=f(x, h(x)). \end{cases} \qquad (*)'$$

Функцияни PR-оператор ёрдамида ҳосил қилишнинг мазмуни шундан иборатки, изланаётган $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ функциянинг $n+1$-аргументи $y=0$ бўлганда (агар

* „Рекурсия" сўзи „қайтиш" демакдир.

рекурсия $n+1$-аргумент бўйича олинган бўлса) ихтиёрий $x_1, \ldots, x_n$ лар учун функциянинг қиймати $g(x_1, \ldots, x_n)$ га тенг бўлиб, $n+1$-аргумент $y+1$ (y дан кейинги натурал сон) га тенг бўлганда эса h нинг қиймати (ихтиёрий $x_1, \ldots, x_n$ лар учун) f функция орқали ҳисобланади — бунда h функциянинг $(x_1, \ldots, x_n, y)$ тизмадаги („олдинги нуқтадаги") қиймати маълум бўлиши керак. Рекурсиянинг табиатини яққолроқ кўрсатиш учун (*)′ схема ёрдамида бериладиган $h(x)$ функциянинг натурал нуқталардаги қиймати қандай ҳисобланишини кўрсатамиз.

Схемада берилишича $h(0)=a$ ($x=0$ бўлганда). $h(1)$ ни ҳисоблаш учун схеманинг иккинчи сатрида $x=0$ деб олиш керак: $h(1)=f(0, h(0))=f(0, a)$; демак, $h(1)$ ни ҳисоблаш учун берилган $f(x, y)$ функциянинг $(0, a)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш керак экан:

$$h(2)=f(1, h(1))=f(1, f(0, h(0)))=f(1, f(0, a)),$$
$$h(3)=f(2, h(2))=f(2, f(1, f(0, a)))$$

ва ҳоказо.

5-мисол. $g=2$, $f(x, y)=x+y$ бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} h(0)=2, \\ h(x+1)=f(x, h(x)) \end{cases}$$

схема ёрдамида берилган функциянинг $x=0, 1, 2, \ldots$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$h(0)=2;\ h(1)=f(0, h(0))=f(0, 2)=0+2=2;$$
$$h(1)=2;\ h(2)=f(1, h(1))=f(1, 2)=1+2=3,$$
$$h(2)=3;\quad h(3)=f(2, h(2))=f(2, 3)=2+3=5,$$
$$h(3)=5;\quad h(4)=f(3, h(3))=f(3, 5)=$$
$$=3+5=8,\quad h(4)=8$$

ва ҳоказо.

2-таъриф. Базис функцияларга суперпозиция ва примитив рекурсия операторларини чекли марта қўллаб ҳосил қилинадиган ҳар қандай функция *примитив рекурсив функция* дейилади.

Ушбу таърифдан кўринадики, базис функциялар дастлабки примитив рекурсив функциялар бўлиб, бошқа примитив рекурсив функциялар улардан S-оператор ва PR-операторлар ёрдамида ҳосил қилинади.

Примитив рекурсив функция тушунчасига яна қуйидагича таъриф бериш мумкин.

3-таъриф. f арифметик функция учун арифметик функцияларнинг шундай чекли кетма-кетлиги φ_1, φ_2, ..., φ_m мавжуд бўлсаки, бунда $\varphi_m = f$ бўлиб, ҳар бир φ_i $(i = \overline{1, m})$

1) ё бирор базис функция,

2) ё ўзидан олдин келувчи функциялардан S-оператор ёрдамида ҳосил қилинган,

3) ё ўзидан олдин келувчи функциялардан PR-оператор ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда φ_1, φ_2, ..., φ_m кетма-кетлик f арифметик функциянинг *примитив рекурсив баёни* дейилади. Примитив рекурсив баёнга эга бўлган ҳар қандай арифметик функция *примитив рекурсив функция* дейилади.

φ_1, φ_2, ..., φ_{m-1}, φ_m кетма-кетлик примитив рекурсив баён бўлса, у ҳолда у ўзининг охирги ҳади (φ_m) нинг баёни ҳисобланади. Бундан ташқари, бу кетма-кетликда φ_1 базис функция бўлиши аёндир.

Примитив рекурсияда қатнашувчи f ва g функциялар тўлиқ аниқланган функциялар бўлса, у ҳолда улардан PR-оператор ёрдамида ҳосил бўладиган $h = \mathrm{PR}(f, g)$ ҳам тўлиқ аниқланган функция бўлиши равшандир. S-оператор ва PR-оператор тўлиқ аниқланган функцияларга қўлланилганда яна тўлиқ аниқланган функциялар ҳосил бўлганлиги учун барча примитив рекурсив функциялар тўлиқ аниқланган функциялардир.

6-мисол. $h(x, y) = x + y$ примитив рекурсив функция эканлигини кўрсатинг.

$$\begin{cases} h(x, 0) = x = \tau_1^1(x), \\ h(x, y+1) = (x+y)+1 = s(x+y) = g(x, y, h(x, y)), \end{cases}$$

схемадан кўринадики, $x + y$ функция $\tau_1^1(x)$, $s(x)$, $g(x, y, t) = t + 1$ функциялардан S-оператор ва PR-операторлар ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин экан, ва демак, $x + y$ — примитив рекурсив функциядир.

7-мисол. $h(x, y) = xy$ функция примитив рекурсив эканлигини кўрсатинг.

$O(x)$, $g(x, y, z) = x + z$ функциялардан примитив рекурсия ёрдамида xy функцияни ҳосил қилиш қийин эмас.

$$\begin{cases} h(x, o) = x \cdot o = 0 = o(x), \\ h(x, y+1) = xy + x = g(x, y, h(x, y)). \end{cases}$$

8-мисол. $h(x, y) = x^y$ примитив рекурсив функция эканлигини кўрсатинг.

4-мисолда ҳар қандай доимий функция примитив рекурсив эканлиги кўрсатилган эди. Хусусан, $\varphi(x) = 1$ ҳам примитив рекурсивдир $f(x, y, z) = xz$ олдинги мисолда примитив рекурсив функция эканлиги кўрсатилган эди.

Демак,

$$h(x, 0) = x^0 = 1 = \varphi(x),$$
$$h(x, y+1) = x^{y+1} = x^y \cdot x = f(x, y, h(x, y))$$

схема билан бериладиган x^y функция ҳам примитив рекурсив функциядир.

Минимизация оператори. $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ (қисмий) арифметик функция берилган бўлсин ($n \geqslant 1$) Дастлабки $n-1$ та аргумент $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ларга муайян қийматлар (масалан, $x_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$) бериб, ушбу тенгламани (y га нисбатан) қаноатлантирувчи энг кичик y ни топиш талаб этилган бўлсин:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n \qquad (1)$$

Бунинг учун биз кетма-кет f функциянинг

$$\begin{aligned}&f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0),\\ &f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f(x_1, \ldots, x_{n-1}, k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (2)$$

қийматларини ($x_1, \ldots, x_{n-1}$ аргументларнинг муайян танланган қийматларида) ҳисоблашимиз керак. (2) сонлар орасида x_n нинг берилган қийматига тенг бўлган сон бўлиши мумкин (улар бир нечта бўлиши ҳам мумкин). Агар юқорида айтилган шарт бажарилса, (2) ни қаноатлантирувчи y нинг энг кичик қийматини

$$\mu_y [f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n] \qquad (3)$$

билан белгилаймиз. (2) сонлар системасини қуриш, табиий, қуйидаги ҳолларда чексиз давом этади:

1) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ аниқланмаган,

2) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ нинг қийматлари $y = 0, 1, 2, \ldots, t-1$ бўлганда аниқланган бўлиб, аммо x_n дан фарқли, $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ эса аниқланмаган,

3) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ нинг қийматлари барча натурал y лар учун аниқланган бўлса-да, аммо x_n га тенг эмас. Бу ҳолларнинг ҳар бирида (3) ифода аниқланмаган деб ҳисобланади.

Агар кўрсатилган ҳисоблаш жараёнида мазкур учта ҳол юз бермаса, у ҳолда бу жараён чекли қадамдан сўнг (1) тенгламанинг энг кичик ечимини ҳосил қилади.

μ_y минимизация оператори дейилиб, баъзан у Mf кўринишида ҳам белгиланади. f (қисмий) арифметик функцияга μ_y- оператор қўлланилганда, одатда (қисмий) арифметик функция ҳосил бўлади, яъни

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y [f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n].$$

9-мисол. $f(y, x) = y + x$ функцияга μ_t- операторни қўлласак, яъни $f(y, t) = x$ ёки $y + t = x$ тенгламани қаноатлантирувчи t нинг энг кичик қийматини топсак, $\mu_t [y + t = x] = x - y$ бўлиб, ва демак, $g(x, y) = \mu_t [y + t = x] = x - y$ функция ҳосил бўлади.

Ушбу мисолдан кўринадики, тўлиқ аниқланган (бизнинг мисолимизда: $y + x$) функцияга μ_t- оператори қўлланганда қисмий арифметик (бизнинг мисолимизда: $x - y$) функция ҳосил бўлиши мумкин экан.

10-мисол. $f(x) = \frac{x}{2}$ функцияга μ_y- операторни қўлласак, яъни $\frac{y}{2} = x$ ёки $f(y) = x$ тенгламани қаноатлантирувчи y нинг энг кичик қийматини топсак, $\mu_y \left[\frac{y}{2} = x\right] = 2x$ бўлиб, ва демак, $g(x) = 2x$ функция ҳосил бўлади.

Мазкур мисол кўрсатадики, қисмий арифметик функция $\left(\frac{x}{2}\right)$ га μ_y- операторни қўлланилганда тўлиқ аниқланган ($2x$) функция ҳосил бўлиши мумкин экан. (Қисмий) арифметик функцияга бирор аргументи бўйича μ_y- оператор қўлланилган бўлса, натижада шу аргумент бўйича берилган функцияга „тескари“ функция ҳосил бўлишини сезиш қийин эмас.

Агар берилган f функция бир аргументли бўлса, у ҳолда Mf ни f^{-1} каби белгиланади ва у f функцияга тескари функция дейилади.

9-мисолда келтирилган $g(x, y) = x - y$ функция x аргумент бўйича $f(y, x) = y + x$ функцияга „тескари“ бўлса, 10-мисолда келтирилган $g(x) = 2x$ функция $f(x) = \frac{x}{2}$ функцияга тескари функциядир, яъни

$$g(x) = 2x = f^{-1}(x) = \mu_y \left[\frac{y}{2} = x\right].$$

4-таъриф. Базис функцияларга S-, PR- ва μ_y-операторларни чекли марта қўллаш натижасида ҳосил бўладиган ҳар қандай (қисмий) арифметик функция *қисмий рекурсив функция* дейилади.

Ушбу таърифдан кўринадики, ҳар қандай примитив рекурсив функция қисмий рекурсив функция, аммо ҳар қандай қисмий рекурсив функция примитив рекурсив бўлиши шарт эмас. Масалан, 9-мисолда $x+y$ функциядан μ_y-оператор ёрдамида ҳосил қилинган $g(x, y) = x - y$ функция қисмий рекурсив бўлиб, аммо примитив рекурсив эмасдир.

5-таъриф. f (қисмий) арифметик функция учун (қисмий) арифметик функцияларнинг шундай чекли кетма-кетлиги $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ мавжуд бўлсаки, бунда $\varphi_m = f$ бўлиб, ҳар қандай φ_i $(i = \overline{1, m})$

1) ё бирор базис функция,

2) ё ўзидан олдин келувчи функциялардан S-оператор ёрдамида ҳосил қилинган,

3) ё ўзидан олдин келувчи функциялардан PR-оператор ёрдамида ҳосил қилинган,

4) ё ўзидан олдин келувчи функциядан μ_y-оператор ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ кетма-кетлик f арифметик (қисмий) функциянинг *қисмий рекурсив баёни* дейилади. Қисмий рекурсив баёнга эга бўлган ҳар қандай (қисмий) арифметик функция *қисмий рекурсив функция* дейилади.

Барча қисмий рекурсив функциялар тўпламини $F_{\text{қ.р.}}$ билан белгиласак, у ҳолда барча примитив рекурсив функциялар тўплами $F_{\text{п.р.}}$ ва $F_{\text{қ.р.}}$ орасида $F_{\text{п.р}} \subset F_{\text{қ.р.}}$ муносабат бажарилишини юқоридаги мулоҳазадан кўриш қийин эмас.

6-таъриф. Тўлиқ аниқланган қисмий рекурсив функция *умумрекурсив функция* дейилади.

Умумрекурсив функциялар тўпламини $F_{\text{у.р.}}$ деб белгиласак, $F_{\text{у.р.}} \subset F_{\text{қ.р.}}$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Бу ерда шуни ҳам қайд этиб ўтамизки, функцияларнинг ҳар қандай чекли тўпламидан суперпозиция, примитив рекурсия ёки минимизация операторларини бир мартадан қўллаш натижасида қуввати саноқлидан юқори бўлган функциялар тўпламини ҳосил қилиш мумкинлиги туфайли $F_{\text{п.р.}}$, $F_{\text{у.р.}}$ ва $F_{\text{қ.р.}}$ тўпламларнинг ҳар бири саноқли тўпламдир.

Баъзи арифметик функцияларнинг примитив рекурсивлигини кўрсатамиз.

1) $\operatorname{sg}(x)$ („сигнум x" деб ўқилади) функция натурал сонлар тўпламида қуйидагича аниқланади:

$$\operatorname{sg}(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 1, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{sg}(0)=0,\\ \operatorname{sg}(x+1)=1=f(x, \operatorname{sg}(x))\end{cases}$$

схемадан кўринадики, $\operatorname{sg}(x)$ примитив рекурсив функция экан, чунки у $g=0$ ва $f(x, y)=1$ примитив рекурсив функциялардан PR-оператор орқали ҳосил қилинган ($f(x, y)=1=s(s(0))$ — п. р. функция эканлиги равшан).

2)

$$\overline{\operatorname{sg}}(x)=1-\operatorname{sg}(x)=\begin{cases}1, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция п. р. функция эканлиги аёндир.

3) $x \dot{-} y$ („кесилган айирма" дейилади) ушбу кўринишда аниқланади:

$$x \dot{-} y=\begin{cases}x-y, \text{ агар } x \geqslant y \text{ булса,}\\ 0, \text{ агар } x<y \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Дастлаб

$$\begin{cases}0 \dot{-} 1=0=0(x),\\ (x+1) \dot{-} 1=x=\tau_1^1(x)\end{cases}$$

схема $x \dot{-} 1$ функция п. р. эканлигини кўрсатади. $x \dot{-} y$ функция $f(x, y, z)=z \dot{-} 1$ ва $\tau^1(x)$ функцияларга PR-операторни қўллаш натижасида ҳосил бўлишини ушбу схемадан кўриш мумкин:

$$\begin{cases}x \dot{-} 0=x=\tau_1^1(x),\\ x \dot{-}(y+1)=(x \dot{-} y) \dot{-} 1=f(x, y, x \dot{-} y)).\end{cases}$$

4) $|x-y|=(x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$ тенгликдан $|x-y|$ функция п. р. эканлиги кўринади.

5) $\left[\frac{x}{y}\right]$ („x ни y га бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма") $y=0$ бўлганда аниқланган эмас, ва демак, қисмий функциядир Аммо $\left[\frac{x}{0}\right]=x$ деб қабул қилсак, у тўлиқ аниқланган функцияга айланади.

Агар $\left[\frac{x}{y}\right]=q$ бўлса, у ҳолда q

$$qy \leqslant x < (q+1)\,y$$

тенгсизликларни қаноатлантириб,

$$1\cdot y \dot{-} x,\ 2y \dot{-} x,\ \ldots,\ qy \dot{-} x,\ \ldots,\ xy \dot{-} x$$

кетма-кетликдаги ноллар сонига тенгдир, яъни

$$\left[\frac{x}{y}\right]=\overline{\mathrm{sg}}\,(1\cdot y \dot{-} x)+\overline{\mathrm{sg}}\,(2y \dot{-} x)+\ldots+\overline{\mathrm{sg}}\,(xy \dot{-} x)$$

бўлиб, $\overline{\mathrm{sg}}$, $\dot{-}$, $+$ ларнинг п. р. эканлигидан $\left[\frac{x}{y}\right]$ нинг ҳам п. р эканлиги келиб чиқади.

6) $\mathrm{rest}\,(x, y)$ („x ни y га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқ") функцияни $\dot{-}$, $\cdot$, $\left[\frac{x}{y}\right]$ лар орқали ифодалаш мумкин:

$$\mathrm{rest}\,(x, y)=x \dot{-} \left(y\cdot\left[\frac{x}{y}\right]\right),$$

ва демак, у п. р. функция экан.

7) $\mathrm{div}\,(x, y)$ („x y га бўлинади") функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mathrm{div}\,(x, y)=\begin{cases}1, & \text{агар } \mathrm{rest}\,(x, y)=0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } \mathrm{rest}\,(x, y)\neq 0 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Ушбу тенглик

$$\mathrm{div}\,(x, y)=\overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rest}\,(x, y))$$

қаралаётган функция п. р. эканлигини кўрсатади.

8) $x\neq 0$ бўлганда $\mathrm{nd}\,(x)$ билан x сонининг барча натурал бўлувчилари сонини белгилаймиз

$$\mathrm{nd}\,(x)=\mathrm{div}\,(x, 0)+\mathrm{div}\,(x, 1)+\ldots+\mathrm{div}\,(x, x)$$

тенглик $nd\,(x)$ функция п. р. эканлигини кўрсатади $\left(\left[\frac{x}{0}\right]=x\right.$, яъни „$x$ 0 га бўлинади" деб олинганлигини эслатиб кетамиз).

9) „x — туб сон" деган хоссанинг (предикатнинг) характеристик функциясини $\chi_p(x)$ билан белгиласак,

$$\chi_p(x)=\overline{\mathrm{sg}}\,|\mathrm{nd}\,(x)-2|$$

тенгликдан $\chi_p(x)$ п. р. ф. эканлигини кўрамиз (туб сон фақат иккита турли бўлувчига эга).

10) $\pi(x)$ („x дан катта бўлмаган барча туб сонлар сони") функция учун

$$\pi(x) = \mathrm{sg}(\chi_p(0)) + \mathrm{sg}(\chi_p(1)) + \ldots + \mathrm{sg}(\chi_p(x))$$

тенглик ўринли, ва демак, $\pi(x)$ п. р. ф. дир.

11) $p(x) = p_x$ („туб сонлар қаторида x — туб сон") функция учун

$$p(x) = \mu_y(|\pi(y) - (x+1)| = 0)$$

муносабат ўринли эканлигини кўриш қийин эмас. $p(x) = p_x$ функция п. р. эканлиги алгоритмлар назариясида исботланади.

12) $\exp(x, y)$ („p_x туб соннинг y сонидаги экспотентаси") функция p_x туб соннинг y ни бўлувчи энг юқори даражасининг кўрсаткичини ҳисоблайди. Масалан, $y = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ($i \neq j$ бўлганда $p_i \neq p_j$) бўлса, $\exp(0, y) = \alpha_0$, $\exp(1, y) = \alpha_1$, $\ldots$, $\exp(k, y) = \alpha_k$ дир. Таъриф бўйича $\exp(x, 0) = 0$ деб қабул қилсак, $\exp(x, y)$ тўлиқ аниқланган функцияга айланади. Алгоритмлар назариясида

$$\exp(x, y+1) = \mu_t(\mathrm{sg}(\mathrm{rest}(y+1, p_x^{t+1})) = 0)$$

эканлиги ва бундан

$$\exp(x, y) = \exp(x, (y-1)+1)$$

п. р. функция эканлиги келиб чиқиши кўрсатилади.

13) $[\sqrt{x}]$ („$\sqrt{x}$ нинг бутун қисми") функция учун

$$[\sqrt{x}] = \mu_t(\mathrm{sg}((t+1)^2 - x) = 1)$$

муносабат ўринли. Мазкур функция ҳам п. р. эканлиги п. р. функциялар назариясида кўрсатилади.

Ушбу параграфнинг охирида биз кейинги ишларимизда фойдаланадиган қуйидаги теоремани келтирамиз.

Теорема. *Агар $f(x_1, \ldots, x_n)$ п. р. функция бўлса, у ҳолда*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) \qquad (*)$$

ҳам п. р. функциядир (бу ерда $\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \times \times a_n$ дир).

Исботи. (*) ўринли эканлигини кўрсатиш учун математик индукция усулидан фойдаланайлик. $x_n = 0$ бўлса, $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ функция теорема шартига кўра п. р. дир. Фараз қилайлак, $x_n = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ учун теорема ўринли, яъни

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, k) = \prod_{i=0}^{k} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \cdot f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \times$$
$$\times \ldots \cdot (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, k)$$

п. р. функция бўлсин. У ҳолда

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, k+1) = S(\varphi, h', f) \times$$
$$\times (x_1, \ldots, x_{n-1}, k+1)$$

тенглик $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, k+1)$ ҳам п. р. функция эканини кўрсатади; бу ерда $\varphi(z, t) = z \cdot t$, $h' = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, k)$ п. р. функциялардир. Демак, $h(x_1, \ldots, x_n)$ п. р. функция экан.

$h(x_1, \ldots, x_n)$ функция баъзан $f(x_1, \ldots, x_n)$ п. р. функциядан мультипликация оператори ёрдамида ҳосил қилинган функция дейилади.

3-§. Тьюринг машиналари

Тьюринг машинаси „абстракт", „ҳисобловчи" машинадир. „Абстракт" сўзи қўштирноқ ичига олинганининг сабаби шундаки, Тьюринг машинаси муайян механик қурилма бўлмай, балки „хаёлий" математик машинадир. „Идеаллаштирилган" бу машинанинг тузилиши шунчалик содлаки, уни ҳозирги замон электронҳисоблаш машиналарига таққослаш катта хатога олиб келган бўлар эди. Шунга қарамасдан, Тьюринг машинасининг „ҳисоблаш" қобилияти шунчалик юқорики, у ихтиёрий математик алгоритмни реализация қилиши мумкин.

Тьюринг машинаси иккала томонга ихтиёрий давом эттириш мумкин бўлган ва тенг катакча (ячейка) ларга бўлинган тасмадан ҳамда тасма бўйлаб ҳаракат қиладиган каретка (ҳисобловчи қурилма) дан иборатдир. Каретка ҳар бир вақт моментида фақат катакча қаршисида туради. Тьюринт машинасининг тасмаси каретка (ичи) дан ўтказилган деб ҳам ҳисоблаш мумкин (10-шаклга қаранг); ундаги стрелка каретка қайси катакчани „кўриб" турганини билдиради.

Тьюринг машинасининг „ички“ ва „ташқи“ алфавити (белгилар системалари) мавжуддир. „Ташқи алфавит“ деб аталувчи $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ $(m \geqslant 1)$ чекли тўплам элементлари машина тасмасига ёзиладиган белгилардир. S тўплам элементларининг чекли кетма-кетлиги S алфавит устидаги сўз дейилади. Сўзни ташкил этган белгилар сони шу сўзнинг узунлиги дейилади. Чунончи, S алфавитнинг ҳар бир элементи узунлиги 1 га тенг бўлган сўздир. S алфавит устидаги барча сўзлар тўпламини $A(S)$ билан белгилаймиз. S тўпламга яна битта s_0 белги киритсак, ҳосил бўлган $S' = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ алфавит Тьюринг машинасининг „кенгайтирилган ташқи алфавити“ деб аталади; бунда s_0 — бўш катакни („бўш сўзни“) англатувчи белги ҳисобланади. Масалан, агар тасманинг бирор катагига s_0 белги ёзилган бўлса, шу катак бўш (яъни S алфавитнинг ҳеч бир элементи ёзилмаган) деб ҳисобланади. S алфавитнинг элементлари „ташқи алфавитнинг“ актив белгилари, s_0 эса S' алфавитнинг пассив белгиси дейилади. Машина тасмасига фақатгина алоҳида ҳарфларнигина эмас, балки узунлиги бирдан катта бўлган сўзлар ва сўзларнинг чекли кетма-кетлигини ҳам ёзиш мумкин. Узунлиги α $(\alpha \geqslant 1)$ га тенг бўлган сўзни тасмага ёзишда бу сўзни ташкил этувчи ҳар бир ҳарф алоҳида катакчага ёнма-ён қилиб ёзилади (бўш катак ташламасдан), сўзлар кетма-кетлигини ёзишда эса қўшни сўзлар орасида битта ёки ундан кўп бўш катаклар ташлаб ёзилади.

„Ички алфавит“ деб аталувчи $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$ $(k \geqslant 1)$ чекли тўплам элементлари Тьюринг машинасининг ички ҳолатлари; бунда q_1 — Тьюринг машинасининг бошланғич ҳолати, q_0 — охирги ҳолати, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ лар машинанинг актив ички ҳолатлари дейилади. Тьюринг машинасининг q_0 ички ҳолатда бўлиши унинг ишдан тўхтаганлигини билдиради. Q тўплам Тьюринг машинасининг „ички хотираси“ деб ҳам аталади. Иш жараёнида Тьюринг машинаси бир ички ҳо-

10- шакл.

латдан бошқа ички ҳолатга ўтиши ҳамда тасмага S' алфавит элементларини ёзиши мумкин. Тьюринг машинаси тасмасининг ҳар бир катакчаси чекли ҳолатда бўлади, яъни катакча ё бўш (s_0 белги ёзилган) бўлиши ёки унда s_i ($i = \overline{1, m}$) белги ёзилган бўлиши мумкин.

Иш жараёнида Тьюринг машинаси қуйидаги ишларни бажариши мумкин:

1. Ҳар бир вақт моментида каретка тасма бўйлаб битта катак чапга ёки ўнгга силжиши, ёки ўз ўрнида туриши мумкин.

2 Каретка тасмага ёзилган белгиларни ўзгартириши, яъни тасмага ёзилган белгини ўчириши, унинг ўрнига бошқа белгини ёзиши, бўш катакка актив белгилардан бирини ёзиши мумкин.

3. Машина ҳар бир вақт моментида ўз ички ҳолатини сақлаши ёки бошқа ҳолатга алмаштириши мумкин.

Ҳар бир Тьюринг машинаси ўз программасига эга бўлиб, у ана шу программа асосида ишлайди. Машина программаси 11-шаклда кўрсатилган жадвалдан иборат бўлиб, устунлари бўйлаб „кенгайтирилган ташқи алфавит“ белгилари, йўллари бўйлаб эса актив ички ҳолатлар белгилари жойлаштирилган бўлади. Жадвални ташкил этган катакларга Тьюринг машинаси иш давомида бажарадиган „командалар“ („буйруқлар“) ёзилган бўлади. Ҳар бир команда $s_i R q_j$ кўринишида бўлиб, бунда R билан $П$, $Л$, $Н$ (мос равишда „ўнг“, „чап“ ва „жойида“ сўзларини билдиради) белгиларнинг бири белгилангандир: $П$, $Л$ белгилари мос равишда каретканинг ўнгга ёки чапга сурилишини, $Н$ эса карет-

	s_0	s_1	...	s_t	...	s_m
q_1			...		...	
q_2			...		...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
q_v				$s_j R q_l$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
q_k			...		...	

11- шакл.

а тасма бўйлаб ўз ҳолатини сақлаганини билдиради. Юқорида айтилганидек, Тьюринг машинаси дискрет режимда (қадам-бақадам) ишлайди; у ҳар бир вақт моментида (оралиғида) фақат битта командани бажаради. Тьюринг машинасининг бир қадамда бажарган иши такт дейилиб, уни $q_r s_t \to s_i R q_l$ кўринишида ифодалаш мумкин. Мазкур ифодани қуйидагича ўқиш керак:

„Тьюринг машинаси q_r ички ҳолатда лента устидаги s_t белгини „кўриб" турган бўлса, унинг ўрнига (s_t ни ўчириб) s_i белгини ёзади, сўнгра R ҳаракат қилиб, ўз ички ҳолатини q_l га ўзгартиради" (11-шаклга қаранг).

Машинанинг ишлаш жараёнида ҳар бир тактдан сўнг маълум бир вазият ҳосил бўлади. Вазият қуйидаги ташкил этувчилардан иборатдир:

1) тасмадаги ёзув;

2) кареткaнинг тасма бўйлаб ҳолати;

3) машинанинг ички ҳолати.

Бу ерда биз машина ишлай бошлагандан сўнг ҳосил бўладиган вазиятлар ҳақида гапирдик. Аммо машина ишлай бошлаши учун у маълум бир бошланғич вазиятга келтирилган бўлиши керак. Бошланғич вазиятни:

1) тасмадаги ёзув;

2) машина шу ёзувнинг ўнгдаги энг охирги белгисини „кўриб" турганлиги;

3) машина мазкур белгини бошланғич q_1 ички ҳолатда „кўриб" турганлиги ташкил этади.

Машина ўз программаси бўйича ишлаб ишдан тўхтаса, натижада охирги вазият ҳосил бўлади. Охирги вазиятни:

1) тасмадаги ёзув;

2) машина шу ёзувнинг қайси белгисини „кўриб" турганлиги;

3) машина мазкур белгини охирги q_0 ички ҳолатда кўриб турганлиги ташкил этади.

Агар t вақт моментида вужудга келган вазиятни шартли равишда w_t билан белгиласак ($t = 0, 1, 2, \ldots$), у ҳолда Тьюринг машинасининг ишини шартли равишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$w_0 \to w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_l \to \ldots \to w_f,$$

яъни машинанинг иши вазиятлар кетма-кетлигидан иборат бўлиб, ҳар бир такт иш бажарилгач (программадаги командаларга асосан), бир вазият иккинчи вазият билан алмашиниб боради (бошланғич вазиятдан бошқа).

Юқорида айтилганидек, Тьюринг машинасининг қўлланиш объектлари $A(S)$ тўплам элементлари (сўзлар) бўлиб, у тасмага ёзилган **a** сўз устида ишлаб, уни қандайдир **b** сўз билан алмаштиради.

Баъзан Тьюринг машинаси бирор сўз устида чексиз ишлаши мумкин. Бундай ҳолда машина бу сўзни „аниқламасликка ўтказади" дейилади.

Бир оммавий масалани ечувчи қандайдир алгоритм берилган бўлсин. Мазкур алгоритм ишлаши учун масаланинг шартлари ҳисобланувчи миқдорларнинг бирор $a_1, \ldots, a_n$ системаси бўлиши керак. Одатда бу миқдорлар натурал сонлар бўлиб, алгоритм берилган миқдорлар системасини бошқа системага қайта ишлаб ўтказади, яъни алгоритм қандайдир арифметик функциянинг қийматини ҳисоблайди. Агар $a_1, \ldots, a_n$ миқдорларни Тьюринг машинаси ташқи алфавит белгилари ёрдамида кодлаш мумкин бўлса, у ҳолда алгоритм ҳисобловчи функциянинг қийматларини Тьюринг машинасида ҳисоблаш мумкин бўлади. Қийматларини бирор мос Тьюринг машинаси ёрдамида ҳисоблаш мумкин бўлган арифметик функциялар Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар дейилади. Тьюринг ва Постларнинг тадқиқотлари шуни кўрсатадики, математикада ўша давргача бўлган барча маълум алгоритмларни Тьюринг машиналарида реализация қилиш мумкин экан. Бу мулоҳазалар Тьюрингга ушбу тезисни илгари суришга асос бўлди.

Тьюринг тезиси. Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар тўплами барча ҳисобланувчи функциялар тўплами билан бир хилдир.

Табиий, бу тезисни исботлаш мумкин эмас, чунки унда таркибига таърифланмайдиган алгоритм тушунчаси кирган ҳисобланувчи функция тушунчаси қатнашади.

Энди қуйида баъзи алгоритмларни мос Тьюринг машиналарида реализация қилишга мисоллар кўриб ўтамиз.

1-мисол. $\varphi(x) = x + 1$ функция қийматларини ҳисобловчи Тьюринг машиналарини қуринг.

Тьюринг машинасини қуриш — унинг программасини тузиш демакдир.

	s_0	$\mid$
q_1	$\mid Н q_0$	$\mid П q_1$

12- шакл.

а) Берилган функциянинг қийматларини ҳисобловчи машинанинг „кенгайтирилган қийматларини ҳисобловчи машинанинг“ кенгайтирилган ташқи алфавити“ $S' = \{s_0, \mid\}$ бўлсин; бунда натурал сонлар $\mid$ („таёқча“) ёрдамида кодланади:

0 нинг коди $\mid$, 1 нинг коди $\mid\mid$, 2 нинг коди $\mid\mid\mid$, ..., n нинг коди $\underbrace{\mid\mid \cdots \mid\mid}_{n+1 \text{ та}}$ ва ҳоказо.

Изланаётган Тьюринг машинасининг программаси 12- шаклдаги кабидир.

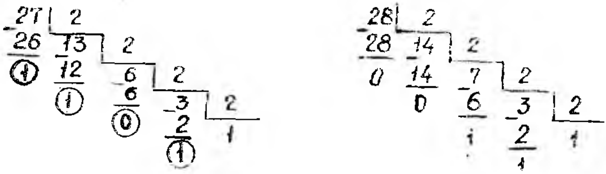
б) Натурал сонлар „иккили системада“ кодланган бўлсин, яъни Тьюринг машинасининг алфавити $S = \{0, 1\}$ бўлсин. Бизга „таниш“ бўлган натурал сонлар, одатда, $S = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ алфавитда („ўнли система“да) кодлангандир. Ўнли системада кодланган натурал сонларни иккили системасида кодлаш алгебра курсида кўрилган бўлса-да, уни бу ерда яна бир эслатиб кетамиз:

0 ни 0 билан, 1 ни 1 билан, 2 ни 10, 3 ни 11, 4 ни 100 билан кодланади ва ҳоказо. $m = 2^n$ кўринишдаги натурал сонниng коди $\underbrace{100 \ldots 0}_{n \text{ та } 0}$ кўринишда бўлади. m дан $m+1$ га ўтиш учун $100 \ldots 0$ нинг охирги позицияси (0) га 1 қўшилади. Агар m нинг иккили системасидаги кодининг охирги рақами 1 бўлса, $m+1$ га ўтишда ўша 1 га 1 қўшилади. Иккили системасида қўшиш амали ушбу жадвал билан берилади:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Демак, $1 + 1 = 0$ бўлганлигидан 1 бирлик олдинги позицияга қўшилади.

Масалан, $110111 + 1 = 111000$, $111 + 1 = 1000$, $11101 + 1 = 111100$ ва ҳ. к. Ўнли системасида берилган натурал сонни иккили системасига ўтказиш учун „бурчак“ қилиб ўша сонни 2 га бўлиб чиқилади, ҳамда қолган қолдиқлар ва охирги (2 га бўлинмайдиган) бўлинма белгиланади. Мазкур булинма ва қолдиқлар ўша соннинг иккили системасидаги коди бўлади. Масалан:



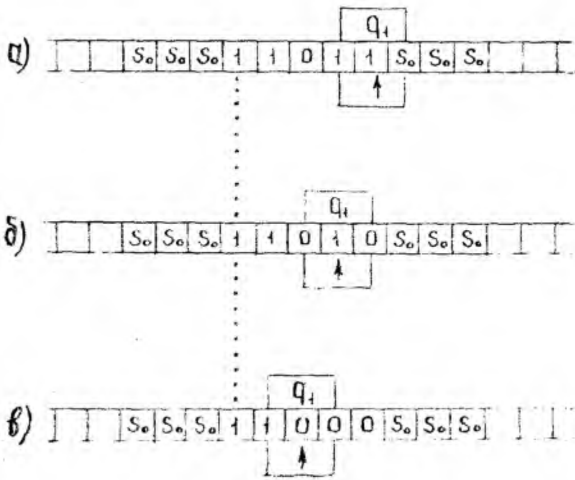
Демак, 27 нинг иккили системасидаги коди 11011 дир. Бундан 28 нинг коди эса 11100 эканлигини кўрамиз.

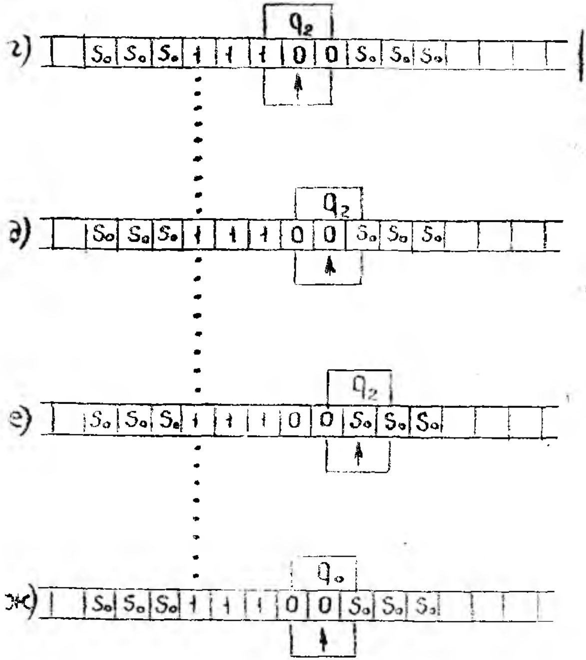
Изланаётган Тьюринг машинаси 13- шаклда кўрсатилган программага эгадир:

	S_0	0	1
q_1	$1\Pi q_2$	$1\Pi q_2$	$0\Pi q_1$
q_2	$S_0\Pi q_0$	$0\Pi q_2$	$1\Pi q_2$

13- шакл.

Тьюринг машинаси муайян натурал сон берилганда $\varphi(x) = x + 1$ функция қийматини ҳисоблашда ўз программасини қандай бажаришини кўрсатайлик. Масалан, $x = 27$ (яъни 11011) бўлса, уни тасмага ёзилади ва ма-





14- шакл.

шинани бошланғич вазиятга олиб келинади (14- *а* шакл). Ҳисоблаш жараёнида вужудга келадиган барча вазиятлар битта тасмада юз берса-да, биз уларни ажратиб кўрсатдик (кареткранинг юқори қисмида ҳар бир вақт моментида машина қандай ички ҳолатда бўлиши кўрсатилган).

в) Ташқи алфавити $S = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ бўлган Тьюринг машинаси $\varphi(x) = x + 1$ функциянинг қийматини 15- шаклда кўрсатилган программага асосан ҳисоблайди.

	S_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	$1Пq_2$	$1Пq_2$	$2Пq_2$	$3Пq_2$	$4Пq_2$	$5Пq_2$	$6Пq_2$	$7Пq_2$	$8Пq_2$	$9Пq_2$	$0Лq_1$
q_2	$S_0Лq_0$	$0Пq_2$	$1Пq_2$	$2Пq_2$	$3Пq_2$	$4Пq_2$	$5Пq_2$	$6Пq_2$	$7Пq_2$	$8Пq_2$	$9Пq_2$

15- шакл.

	s_0	0	1	2
q_1	$s_0Лq_2$	$s_0Лq_1$	$s_0Лq_1$	$s_0Лq_1$
q_2	$0Hq_0$	$0Hq_1$	$1Hq_1$	$2Hq_1$

16- шакл.

	s_0	1
q_1	$s_0Лq_2$	$s_0Лq_1$
q_2	$1Hq_0$	$1Hq_1$

17- шакл.

2- м и с о л. $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ функциянинг қийматини ҳисобловчи Тьюринг машинасини қуринг.

а) Ташқи алфавит $S = \{ | \}$ бўлсин. Бундай Тьюринг машинасининг программаси 16- шаклдаги кўринишга эгадир.

б) $S = \{0, 1, 2\}$ (учли системаси) ташқи алфавитга эга бўлган Тьюринг машинаси берилган функциянинг қийматларини ҳисоблашда 17- шаклдаги программа бўйича ишлайди.

Бу мисолда шунга эътибор бериш керакки, тасмага $x_1, \ldots, x_n$ ларни ёзишда қўшни сонлар орасида фақат битта бўш катак қолдирилади.

Биз юқорида жуда содда алгоритмларни реализация қиладиган Тьюринг машиналарига мисоллар келтирдик. Мураккаб алгоритмларни реализация қилиш учун берилган Тьюринг машиналаридан маълум бир амаллар ёрдамида мураккаб Тьюринг машиналари ҳосил қилишни билиш керак. Тьюринг машиналари устида бажариладигин асосий учта амал билан танишамиз.

I. М а ш и н а л а р к о м п о з и ц и я с и. Ташқи алфавитлари бир хил $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ бўлган, ички алфавитлари мос равишда $Q_1 = \{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$ ва $Q_2 = \{q'_0, q'_1, \ldots, q'_r\}$ бўлган M_1 ва M_2 Тьюринг машиналари берилган бўлсин. M_1 ва M_2 машиналарнинг программаларини кетма-кет „улаб“ ҳамда M_1 машина программасидаги s_iRq_0 кўринишдаги командаларда q_0 ни M_2 нинг бошланғич ички ҳолати q'_1 билан алмаштириб, янги программа, яъни янги Тьюринг машинасини тузиш мумкин. Ҳосил бўлган машинани $M_1 \cdot M_2$ каби белгилаймиз. $M_1 \cdot M_2$ машина қуйидагича ишлайди: дастлаб тасмага ёзилган **a** сўз устида M_1 машина ишлайди ва уни **b** сўз билан алмаштиради. M_1 машинанинг охирги (тўхташ) ички ҳолати q_0 M_2 нинг бошланғич ички ҳолати q'_1 га „уланганлиги“ учун **b** сўз устида M_2 машина ишлай бошлайди, уни с сўз билан алмаштиради. Шундай қилиб, $M_1 \cdot M_2$ машина **а** сўзни **с** сўзга ўтказади.

Тьюринг машиналари устида бажариладиган композиция амали ассоциатив (яъни $(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \times \times (M_2 \cdot M_3)$), аммо нокоммутатив (яъни $M_1 \cdot M_2 \neq \neq M_2 \cdot M_1$) эканлиги равшандир. Бундан ташқари, фақатгина иккита эмас, балки исталган чекли сондаги Тьюринг машиналари берилганда ҳам (ташқи алфавитлари бир хил бўлган), уларнинг композициясини тузиш мумкинлиги аёндир.

M_1 ва M_2 машиналар композицияси амалга оширилгач, янги программада ички ҳолатларини қайтадан номерлаб чиқиш мумкин; бунда M_2 нинг ички ҳолатлари q_1', q_2', ..., q_r' лар мос равишда q_{k+1}, q_{k+2}, ..., q_{k+r} лар билан, q_0^1 эса яна q_0 билан қайта номланади.

3- мисол. 1- мисолнинг: а) қисмида келтирилган машина M_1, 2- мисолнинг ҳам б) қисмида келтирилган машина M_2 бўлсин.

Мазкур машиналардан композиция ёрдамида 18- шаклда кўрсатилган машинани ҳосил қилиш мумкин. Бу ерда M_2 нинг ички ҳолатларини вақтинча q_0', q_1', q_2' кўринишда ёздик. Энди ҳосил бўлган программада ички ҳолатларини қайта номерлаб чиқиш мумкин. Ниҳоят биз 19- шаклда кўрсатилган программани ҳосил қиламиз.

$M_2 \cdot M_1$ машина программасини ўқувчи қийинчиликсиз туза олади. Бунда $M_1 \cdot M_2$ машина $f = 0$ функция қийматларини, $M_2 \cdot M_1$ эса $f = 1$ функция қийматларини ҳисоблашини сезиш қийин эмас.

II. Машиналарни тармоқлаш. Ташқи алфавитлари бир хил, ички алфавитлари мос равишда

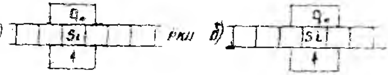
$$Q_1 = \{q_0, q_1, \ldots, q_k\}, \quad Q_2 = \{q_0', q_1', \ldots, q_r'\},$$
$$Q_3 = \{q_0^*, q_1^*, \ldots, q_t^*\}$$

	s_0	1
q_1	$1Hq_1'$	$1Пq_1$
q_1'	$s_0Лq_2'$	$s_0Лq_1'$
q_2'	$1Hq_0'$	$1Hq_1'$

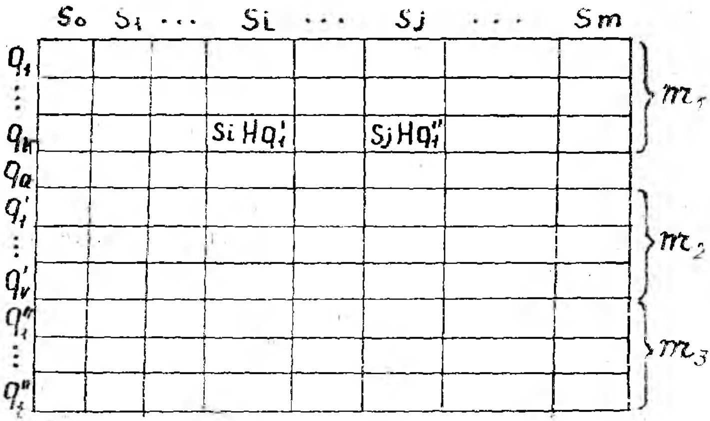
18- шакл.

	s_0	1	
q_1	$1Hq_2$	$1Пq_1$	m
q_2	$s_0Лq_3$	$s_0Лq_2$	m
q_3	$1Hq_0$	$1Hq_2$	

19- шакл



20- шакл.



21- шакл

бўлган M_1, M_2, M_3 машиналар берилган бўлсин. Ташқи алфавитда s_i ва s_j ($i \neq j$) белгилар ажратилган бўлсин. M_1 машина қандайдир **а** сўз устида ишлаб, чекли қадамдан сўнг $s_\alpha R q_0$ команда билан тўхтаган бўлсин ҳамда охирги вазият 20-шаклдаги кўринишларнинг бирига эга бўлсин. Берилган машиналар программаларини 21-шаклдагидек „улаймиз“. M_1 ва M_2 лар программалари орасига қўшимча q_α ички ҳолат киритиб бу программалар кетма-кет „уланади“. Ҳосил бўлган программага M_3 нинг программаси „уланади“ (21-шаклга қаранг). Натижада $k+r+t+1$ актив ички ҳолатга эга бўлган программа ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган программага қуйидаги ўзгаришлар киритилади.

Дастлаб $s_\alpha R q_0$ командадаги q_0 ни q_α билан алмаштирамиз. Сўнгра, агар M_1 машина а) вазиятда тўхтаган бўлса, у ҳолда q_α йўл ва s_i устунлар кесишган катакка $s_i H q'_1$ командасини, агар M_1 машина б) вазиятда тўхтаган бўлса, у ҳолда q_α йўл ва s_j устунлар кесишган катакка $s_j H q_1''$ командасини ёзамиз. Мазкур ўзгартишларнинг мазмуни қуйидагичадир:

q_α ички ҳолат M_1 ни M_2 билан ёки M_1 ни M_3 билан боғловчи ҳолат бўлиб, агар M_1 машина а) вазиятда тўхтаса, бошқариш M_2 машинага, M_1 машина б) вазиятда тўхтаса, бошқариш M_3 га узатилади.

Шундай қилиб, агар M_1 машина **a** сўз устида ишлаб а) вазиятда ишдан тўхтаса (яъни s_l белгини „кўриб" турган ҳолда ишдан тўхтаса), у ҳолда тасмада ҳосил бўлган **b** сўз устида M_2 машина ишлай бошлайди ва уни қандайдир **c** сўз билан алмаштириб ишни тугатади; агар M_1 машина б) вазиятда ишдан тўхтаса (яъни, s_j белгини „кўриб" турган ҳолда ишдан тўхтаса), у ҳолда тасмадаги сўз устида M_3 машина ишлай бошлайди ва уни қандайдир **d** сўз билан алмаштириб ишни тугатади. M_1, M_2 ва M_3 машиналардан тузилган янги машина

$$M = M_1 \begin{cases} M_2 \\ M_3 \end{cases}$$

каби белгиланади. M машинанинг программаси қуриб бўлингач, ундаги ички ҳолатларини қайта номерлаб чиқиш мумкин (бунда q_α ни q_{k+1} билан, q_i' $(i = \overline{1, r})$ ни q_{k+i+1} билан, q_j'' $(j = \overline{1, t})$ ни эса $q_{k+r+j+1}$ билан, ва ниҳоят, q_0' ва q_0'' ни эса яна қайтадан q_0 билан алмаштирилади).

Табиий, тармоқлаш амали фақатгина учта машина устидагина эмас, балки ихтиёрий n $(n > 3)$ та машина устида ҳам бажарилиши мумкин; аммо бунда ташқи алфавит белгилари сони $m \geqslant n - 1$ шартни қаноатлантириши керак.

4-мисол. 22-шаклда келтирилган программага эга бўлган M_1, M_2, M_3 машиналарига тармоқлаш амалини қўлланг.

	s_0	1
q_1		s_0Лq_2
q_2	1Лq_0	1Лq_2

(m_1)

	s_0	1
q_1'	s_0Пq_2'	1Лq_1'
q_2'	s_0Лq_0'	1Пq_2'

(m_2)

	s_0	1
q_1''	s_0Лq_1''	1Пq_2'
q_2''	s_0Пq_2''	s_0Пq_3''
q_3''	1Нq_0''	1Пq_3''

(m_3)

22-шакл.

	s_0	$\vert$
q_1		$s_0 Л q_2$
q_2	$\vert Л q_\alpha$	$\vert Л q_2$
q_α	$s_0 Н q_1'$	$\vert Н q_1''$
q_1'	$s_0 П q_2'$	$\vert Л q_1'$
q_2'	$s_0 Л q_0'$	$\vert П q_2'$
q_1''	$s_0 Л q_1''$	$\vert П q_2''$
q_2''	$s_0 Л q_2''$	$s_0 П q_3''$
q_3''	$\vert Н q_0''$	$\vert П q_3''$

(Пр.1)

	s_0	$\vert$
q_1		$s_0 Л q_2$
q_2	$\vert Л q_3$	$\vert Л q_2$
q_3	$s_0 Н q_4$	$\vert Н q_6$
q_4	$s_0 П q_5$	$\vert Л q_4$
q_5	$s_0 Л q_0$	$\vert П q_5$
q_6	$s_0 Л q_6$	$\vert П q_7$
q_7	$s_0 Л q_7$	$s_0 П q_8$
q_8	$\vert Н q_0$	$\vert П q_8$

(Пр.2)

23- шакл.

Бу ерда $m=1$, $k=2$, $r=2$, $t=3$, $s_i=s_0$, $s_j=|$ дир.

Дастлаб (Пр. 1) билан белгиланган программани тузамиз (23- шакл). (M_1) дан кўринадики, M_1 машина $|Л q_0$ команда билан ишдан тўхтар экан. M_1 машина ишни тугатгач, каретка ё s_0, ёки $|$ қаршисида тўхтайди. $|Л q_0$ командада q_0 ни q_α билан алмаштириб, q_α йўл ва s_0 устунлар кесишган катакка $s_0 H q_1'$, ёнидаги катакка эса $|H q_1''$ командаларни ёзамиз. Ҳосил бўлган (Пр. 1) программада ички ҳолатларни қайта номерлаб, талаб этилган программага (Пр. 2) эришамиз (23- шакл). Мазкур машина қандай алгоритмни реализация қилади? Тасмага x ва y сонлар (тўғрироғи, уларнинг $S=\{\,|\,\}$ алфавитдаги кодлари) ёзилган бўлиб, улар орасида $n+1$ та бўш катак (s_0) бўлсин ҳамда машина бошланғич вазиятга келтирилган (яъни каретка y сонининг энг охирги „таёқчасини“ „кўриб“ турган) бўлсин. Агар $n \geqslant 1$, яъни x билан y орасида камида иккита бўш катак бўлса, у ҳолда машина y ни бир хона чапга суради — бошқача айтганда машина

$$s_0\underbrace{|||\;\ldots\;||}_{x}\underbrace{s_0 s_0\;\ldots\;s_0}_{n+1\text{ та}}\overbrace{||\;\ldots\;\underset{q_1}{|}|}^{y}s_0$$

бошланғич вазиятдан

$$s_0 \overbrace{|| \ldots |}^{x} \underbrace{s_0 s_0 \ldots s_0}_{n+1} \overbrace{| \ldots \underset{q_0}{|}}^{y}$$

охирги вазиятга ўтади.

Агар $n = 0$, яъни x билан y орасида фақат битта бўш катак бўлса, машина дастлаб y ни чапга бир хона суриб, сўнгра яна ўз ўрнига қайтаради.

III. Тьюринг машинасини цикллаш. Тьюринг машинаси программасида q_0 ички ҳолат қатнашган биттадан ортиқ команда мавжуд бўлсин. Шу командаларнинг бири (ёки бир нечаси) даги q_0 ни q_1 билан алмаштирамиз. Натижада, машина тасмадаги сўз устида ишлаб, ишни юқорида айтилган команда билан тугатса, у ҳолда тасма устида пайдо бўлган сўз билан яна ишни давом эттиради.

Бу амал M машинани цикллаш дейилади ва $\dot{M}$ каби белгиланади.

5-мисол. Олдинги мисолда қурилган машина программаси (Пр. 2) да q_0 қатнашган иккита команда мавжуд ($s_0 Л q_0$ ва $| H q_0$). Шу командаларнинг бирортасида, масалан, $s_0 Л q_0$ да q_0 ни q_1 билан алмаштирсак, натижада янги $\dot{M}'$ машина ҳосил булади. Агар тасмада ораларида $n+1$ та бўш катак бўлган x ва y сонлари ёзилиб, машина ишни бошланғич вазиятда бошлаган бўлса, у ҳолда машина ишдан тўхтагач тасмадаги ёзув ушбу кўринишда бўлади:

$$\overbrace{| \ldots |}^{x} s_0 \overbrace{| \ldots |}^{y},$$

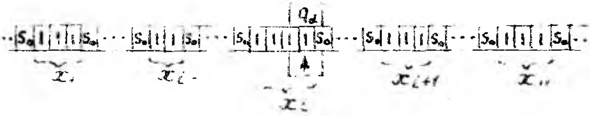
яъни машина y ни x нинг „ёнига“ битта бўш катак қолдириб „суриб“ ёзади.

Агар $| H q_0$ командадаги q_0 ни q_1 билан алмаштирсак, у ҳолда $\dot{M}''$ машина ҳосил бўлади; аммо бу машина тўхтовсиз ишлайди, у доимо y ни суриб, яна жойига қайтараверади ва бу жараён чексиз давом этади.

Ташқи алфавити $S = \{ | \}$ бўлган Тьюринг машинаси бир ҳарфли Тьюринг машинаси дейилади. Ўзининг соддалигига қарамасдан бундай машиналарнинг ҳисоблаш „қобилияти“ жуда юксак бўлиб, улар бошқа алфавитга эга бўлган Тьюринг машиналаридан қолишмайди.

Натурал сонлар бу машиналарнинг алфавитда қандай кодланиши юқорида келтирилган. Бундан кейин „x натурал сон“ деганда унинг коди $\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{x+1\ \text{та}}$ ни тушунамиз. Бундан ташқари биз натурал сонлар „кетма-кетлиги“ ва „тизма“ тушунчалари билан иш курамиз. Агар машина тасмасига бир неча натурал сонларни ёзиш керак бўлса, буни икки хил усулда бажариш мумкин: ҳар иккита қўшни натурал сон орасида фақат битта бўш катак қолдириб ёзиш ва ҳар иккита қўшни натурал сон орасида камида битта бўш катак ташлаб ёзиш ана шу усуллардир. Биринчи усул иккинчи усулнинг хусусий ҳоли эканлигини сезиш қийин эмас. Чекли сондаги натурал сонларни тасмага биринчи усулда ёзишни „натурал сонлар тизмаси“, иккинчи усулда ёзишни эса „натурал сонлар кетма-кетлиги“ дейилади. Натурал сонлар тизмаси ёки кетма-кетлигини фақатгина тасмада эмас, балки қоғозга (масалан, ушбу китоб саҳифаларида) ҳам ифода этишимиз керак. Натурал сонлар тизмасини қоғозда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каби, натурал сонлар кетма-кетлигини эса $x_1 \wedge x_2 \quad \ldots \wedge x_n$ каби ёзамиз; бунда тизмада қатнашган вергул („,“) битта бўш катак вазифасини бажаради, натурал сонлар кетма-кетлигида „$\wedge$“ белги „оралиқ“ деб аталиб, у камида битта бўш катак вазифасини ўтайди.

Бундан ташқари, биз яна $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ ва $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_n$ $(i = \overline{1, n})$ ёзувлардан фойдаланамиз. Уларнинг мазмуни шундан иборатки, тасмага $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ тизма (ёки $x_1 \wedge x_2 \wedge \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_n$ кетма-китлик) ёзилган бўлиб, каретка соннинг ўнгдаги энг охирги „таёқчаси“ рўпарасида бирор ички ҳолатда турганини билдиради. Буни машинада 24-шаклдагидек кўрсатиш мумкин (бу ерда $x_1 = 2, \ldots, x_{i-1} = 1, \ x_i = 3, \ x_{i+1} = 2, \ldots, x_n = \underline{=} 2$). Хусусан, $x_1, \ldots, x_n$ ёки $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ ёзувлар машина бошланғич q_1 ички ҳолатда x_n нинг охирги „таёқчасини“ „кўриб“ турганлигини англатади



24- шакл.

	s_0	1
q_1	$1Hq_0$	$1\Pi q_1$

25- шакл.

	s_0	1
q_1	—	$s_0\Pi q_0$

26- шакл.

(баъзан, охирги q_0 ички ҳолатда). M Тьюринг машинаси, масалан, $x_1, \ldots, x_n$ тизма устида ишлаб, уни $y_1, \ldots, y_m$ тизмага ўтказса, у ҳолда машинанинг ишини ушбу кўринишда ёзишга келишамиз:

$$x_1, x_2, \ldots, \overline{x_n} \xrightarrow{M} y_1, y_2, \ldots, \overline{y_m}. \qquad (*)$$

(*) ифода биринчи қисмининг мазмуни шундан иборатки, бунда машина бошланғич ички ҳолатда x_n нинг охирги „таёқчаси" рўпарасида турган бўлади. иккинчи қисми эса машина y_m нинг охирги „таёқчасининг" рўпарасида охирги ички ҳолатда (q_0) турганлигини билдиради.

Барча мураккаб Тьюринг машинасининг асосини энг элементар алгоритмларни реализация қиладиган баъзи машиналар ташкил этади. Қуйида биз бу машиналар билан танишамиз.

А машина (охирги сонни бир бирликка оширувчи машина). Мазкур машинанинг программаси 25- шаклда кўрсатилган бўлиб, унинг ишини $x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_n} \xrightarrow{A} x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_n + 1}$ каби ифодалаш мумкин (хусусан, $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ ўрнига $x_1, \ldots, x_n$ ни ҳам олиш мумкин).

В машина (охирги сонни бир бирликка камайтирувчи машина). Бу машинанинг программаси 26- шаклда кўрсатилган бўлиб, унинг ишини $x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_n} \xrightarrow{B} x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_n - 1}$ каби ифодалаш мумкин.

С машина (кетма-кетликнинг охирига 0 ни ёзувчи машина). Бу машина 27- шаклда кўрсатилган программага эга бўлиб унинг иши

	s_0	1
q_1	$s_0\Pi q_2$	$1\Pi q_1$
q_2	$1Hq_0$	$1Hq_1$

27- шакл.

	s_0	1
q_1	s_0 П q_2	1 П q_1
q_2	s_0 Л q_2	1 Н q_0

28- шакл.

	s_0	1
q_1	s_0 Н q_2	1 П q_1
q_2	1 П q_2	1 Л q_3
q_3		s_0 Л q_0

29- шакл.

$$x_1 \wedge \dots \wedge \overline{x_n} \xrightarrow{C} x_1 \wedge \dots \wedge x_n, \overline{0}$$

формула билан ифодаланади; бу ерда, хусусан, юқоридагиларга ўхшаш натурал сонлар тизмасини ҳам олиш мумкин (бундан ташқари 0 нинг коди | эканлигини, $\overline{0}$ эса аслида $\overline{|}$ эканлигини эслатиб ўтамиз), x_n билан 0 орасида битта бўш катак ташланади.

D машина (ораликни тўлдирувчи машина). Мазкур машинанинг программаси 28- шаклда кўрсатилган бўлиб, унинг ишини

$$x_1 \wedge \dots \wedge \overline{x_i}\, \underbrace{s_0 s_0 \dots s_0}_{k+1} x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n \xrightarrow{D}$$

$$\xrightarrow{D} x_1 \wedge \dots \wedge \overline{x_i + k - 1}\, s_0\, x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n$$

каби ифодалаш мумкин; бунда машина x_i дан кейинги $k-1$ та катак „таёқчалар" билан тўлдиради — табиий, бунда x_i ўзгариб $x_i + k - 1$ га айланади, x_{i+1} билан $x_i + k - 1$ орасида битта бўш катак қолдириб, $x_i + k - 1$ сонининг охирги „таёқчаси" рупарасида тўхтайди.

L машина (кареткани чапга сурувчи машина). Бу машинанинг программаси 29- шаклда кўрсатилган бўлиб, унинг иши

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \overline{x_{i+1}} \wedge \dots \wedge x_n \xrightarrow{L}$$

$$\xrightarrow{L} x_1 \wedge \dots \wedge \overline{x_i} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n$$

формула билан ифодаланади; бошқача айтганда, машина кареткаси тасмадаги ёзувни ўзгартирмай, x_{i+1} сондан чапдаги x_i сонига ўтади.

L^k машина (L машинанинг k марта такрори). L^k машина L машинанинг k тасининг ўзаро композицияси натижасида ҳосил бўлиб, унинг ишлаши қуйидаги тарзда бўлади:

	s_0	1
q_1	s_0 Л q_2	1 Л q_1
q_2	s_0 Л q_2	1 Н q_3
q_3	s_0 Л q_4	1 Л q_3
q_4	s_0 Л q_4	1 Н q_5
q_5	s_0 Л q_6	1 Л q_5
q_6	s_0 Л q_6	1 Н q_0

30- шакл.

	s_0	1
q_1		1 П q_2
q_2	s_0 П q_2	1 Н q_3
q_3	s_0 П q_0	1 Н q_3

31- шакл.

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge \overline{x}_{i+k} \wedge \ldots \wedge x_n \xrightarrow{L^k}$$
$$\xrightarrow{L^k} x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_i} \wedge \ldots \wedge x_{i+k} \wedge \ldots \wedge x_n.$$

$k=3$ бўлганда L^3 нинг программаси 30- шаклда кўрсатилгани каби бўлади.

($L \cdot L \cdot L$ композициядаги иккинчи ва учинчи L машиналарнинг ички ҳолатлари қайта номерланган).

R **машина** (кареткани ўнгга сурувчи машина). Бу машина 31- шаклда кўрсатилган программага эга бўлиб, унинг бажарадиган иши

$$x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_i} \wedge x_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_n \xrightarrow{R}$$
$$\xrightarrow{R} x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \overline{x}_{i+1} \wedge \ldots \wedge x_n$$

формула билан ифодаланади. Равшанки, R машина $x_1 \wedge \wedge \ldots \wedge \overline{x}_n$ вазиятда иш бошласа, у ўз ишини чексиз давом эттиради (чексиз ўнгга қараб кетади).

R^k **машина** (R машинанинг k марта такрори). Бу машина R машинадан k дона олиниб, улардан композиция ёрдамида қурилади, яъни

$$R^k = \underbrace{R \cdot R \cdot \ldots \cdot R}_{k \text{ та}}$$

R^k машинанинг ишини ушбу формула ёрдамида кўрсатиш мумкин:

$$x_1 \wedge \ldots \wedge \overline{x_i} \wedge \ldots \wedge x_{i+k} \wedge \ldots \wedge x_n \xrightarrow{R^k} x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge$$
$$\wedge \ldots \wedge \overline{x}_{i+k} \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Мисол сифатида R^2 нинг программасини келтирамиз (32-шакл).

	S_0	|
q_1		| Л q_2
q_2	S_0 П q_2	| Н q_3
q_3	S_0 Л q_4	| Н q_3
q_4		| П q_5
q_5	S_0 П q_5	| Н q_6
q_6	S_0 Л q_0	| Н q_6

32- шакл.

P машина (текширувчи машина). Баъзан ҳисоблаш жараёнида *M* машина бирор катак рўпарасида турган бўлса, шу катакнинг чап томонидаги қўшни катак бўш ёки бўш эмаслиги (| ёзилганлиги) ни текширишга тўғри келади. Бу вазифани программаси 33-шаклда кўрсатилган *P* машина бажаради. Бу жараён машинанинг ўзида 34- шаклда кўрсатилгани каби бўлади.

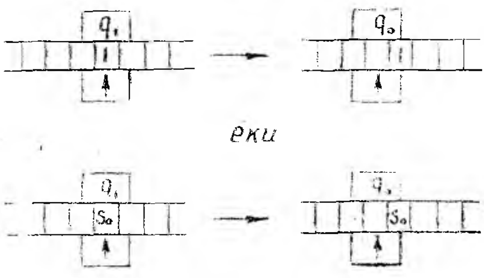
	S_0	|
q_1	S_0 П q_0	| П q_0

33- шакл.

V машина (тикловчи машина). Одатда *P* машина чап томондаги қўшни катакни текшириб кўргач, машинани (кареткани) олдинги позицияга қайтариш керак бўлади. Бу вазифани программаси 35- шаклда курсатилган *V* машина бажаради. Бирор мураккаб машина таркибига *V* машина фақат *P* машина билан бирга (*PV* композиция сифатида) кириши мумкин.

T_m машина (танловчи машина). Бу машина юқорида келтирилган машиналардан композиция, тармоқлаш ва цикллаш амаллари ёрдамида

$$T_m = C \cdot \dot{L}^m \cdot P \cdot \begin{cases} V \cdot D \cdot R^m, \\ V \cdot B \cdot R^m \cdot \dot{A} \end{cases}$$



34- шакл.

	s_0	1
q_1	$s_0 Л q_0$	$1 Л q_0$

35- шакл.

	s_0	1	
q_1	$s_0 П q_2$	$1 П q_1$	C
q_2	$1 H q_3$	$1 H q_1$	
q_3	$s_0 Л q_4$	$1 Л q_3$	L
q_4	$s_0 Л q_4$	$1 H q_5$	
q_5	$s_0 Л q_6$	$1 Л q_5$	L
q_6	$s_0 Л q_6$	$1 H q_7$	
q_7	$s_0 Л q_8$	$1 Л q_8$	P
q_8	$s_0 H q_9$	$1 H q_{19}$	
q_9	$s_0 Л q_{10}$	$1 H q_0$	V

q_{10}	$s_0 H q_{11}$	$1 П q_{10}$	
q_{11}	$1 П q_{11}$	$1 Л q_{12}$	D
q_{12}		$s_0 Л q_{13}$	
q_{13}		$1 П q_{14}$	
q_{14}	$s_0 П q_{14}$	$1 H q_{15}$	R
q_{15}	$s_0 Л q_{16}$	$1 H q_{15}$	
q_{16}		$1 П q_{17}$	
q_{17}	$s_0 П q_{17}$	$1 H q_{18}$	R
q_{18}	$s_0 Л q_0$	$1 H q_{18}$	

q_{19}	$s_0 П q_{20}$	$1 П q_{20}$	V
q_{20}		$s_0 Л q_{21}$	B
q_{21}		$1 П q_{22}$	
q_{22}	$s_0 П q_{22}$	$1 H q_{23}$	K
q_{23}	$s_0 Л q_{24}$	$1 H q_{23}$	
q_{24}		$1 П q_{25}$	
q_{25}	$s_0 П q_{25}$	$1 H q_{26}$	K
q_{26}	$s_0 Л q_{27}$	$1 H q_{26}$	
q_{27}	$1 H q_3$	$1 П q_{27}$	A

36- шакл.

кўринишда ҳосил қилинади. Унинг иши эса $x_1, x_2, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{T_m} x_1, x_2, \ldots, x_m, \overline{x_1}$ формула билан ифодаланади, яъни T_m $x_1, \ldots, x_m$ тизмадаги x_1 дан x_m дан кейин битта бўш катак ташлаб бир нусха кўчиради. Мисол тариқасида биз T_2 нинг программасини келтирамиз (36-шакл).

Бу ерда шунга эътибор қилиш керакки, $M = L^m \times P \cdot V \cdot B \cdot R^m \cdot A$ циклланган машина бўлгани учун A нинг охирги ички ҳолати q_0 L^m нинг бошлангич ички ҳолати q_3 га „уланган“ (алмаштирилган). Бундан ташқари $M_1 = C \cdot L^m \cdot P$, $M_2 = V \cdot D \cdot R^m$ ва $M_3 = V \times B \cdot R^m \cdot A$ машиналарга тармоқлаш амали қўлланилгани учун бошқаришни M_1 дан ё M_2, ёки M_3 га узатувчи янги q_8 ички ҳолат киритилди. Бу ички ҳолат P машина текширган катакнинг ҳолатига (ё бўш, ёки | ёзилганига) қараб, мос равишда, бошқаришни бошлангич ички ҳолати q_9 бўлган V машинага, ёки бошлангич ички ҳолати q_{19} бўлган иккинчи V машинага узатади.

Биз юқорида T_m машина $x_1, \ldots, x_m$ тизмага қўлланилганда у x_1 ни танлашини ва уни x_m дан кейин битта бўш катак ташлаб қайта ёзишини кўрдик. T_m нинг x_1 ни танлаши унинг таркибида қатнашган L^m машинага боғлиқдир. Агар бизга $x_1, \ldots, x_m$ тизманинг x_i $(1 \leq i \leq m)$ ҳадини танлаш ва уни қайта кўчириш зарур бўлса, у ҳолда унга T_{m-i+1} машинани қўллаш зарурлигини сезиш қийин эмас:

$$x_1, \ldots, x_i, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{T_{m-i+1}} x_1, \ldots, x_m, \overline{x_i}.$$

T_m^k машина (T_m машинанинг k марта такрори, $k \leq m$). T_m^k машинанинг иши ушбу формула ёрдамида кўрсатилиши мумкин:

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{T_m^k} x_1, \ldots, x_m, x_1, x_2, \ldots, \overline{x_k},$$

яъни

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{T_m} x_1, \ldots, x_m, \overline{x_1} \xrightarrow{T_m} x_1, \ldots, x_m,$$
$$x_1, \overline{x_2} \xrightarrow{T_m} \ldots \rightarrow x_1, \ldots, x_m, x_1, x_2, \ldots; \overline{x_k}.$$

Хусусан, $k = m$ бўлса, T_m^m машина қуйидаги шакл алмаштиришни бажаради:

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{T_m^m} x_1, \ldots, x_m, x_1, \ldots, \overline{x_m}.$$

K_m машина (тизмани иккита бўш катак узра кўчирувчи машина).

$$K_m = A \cdot T_m^m B \cdot L^m \cdot B \cdot R^m$$

формула ёрдамида ифодаланадиган бу машина ушбу шакл алмаштиришни бажаради:

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{K_m} x_1, \ldots, x_m s_0 s_0 x_1, \ldots, \overline{x_m},$$

яъни K_m машина $x_1, \ldots, x_m$ тизмани x_m дан сўнг иккита бўш катак ташлаб қайта кўчиради.

S машина (ўчирувчи ва сурувчи машина). Мазкур машина $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \wedge s_0 x_1, \ldots, x_m$ (y_n билан x_1 орасида камида иккита бўш катак бўлиши керак)

	s_0	1
q_1	s_0 Л q_2	1 Л q_1
q_2	s_0 Н q_3	1 Н q_5
q_3	s_0 П q_3	1 Н q_4
q_4	s_0 Л q_6	1 П q_4
q_5	s_0 Н q_1	s_0 Л q_5

37- шакл.

q_6		s_0 П q_7
q_7	s_0 Л q_8	1 Л q_7
q_8	s_0 Н q_9	1 Н q_{11}
q_9	s_0 П q_{10}	1 Л q_0
q_{10}	s_0 П q_6	1 П q_{10}
q_{11}	s_0 Л q_{11}	1 П q_{12}
q_{12}	s_0 Л q_{12}	s_0 П q_{13}
q_{13}	1 Н q_0	1 П q_{13}

38- шакл.

кўринишдаги кетма-кетликка қўлланилиб ($n \geqslant 1$), унинг иши ушбу формула билан ифодаланади:

$$y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \wedge s_0 x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{S} y_1 \wedge \ldots \wedge y_n, \overline{x_m},$$

яъни S машина дастлаб y_n билан x_m орасидаги барча сонларни ўчириб, сўнгра x_m ни y_n унинг „ёнига“ битта бўш катак ташлаб кўчиради. S машинанинг программаси қуйидагидир (37, 38- шакллар).

4- §. Қисмий-рекурсив функцияларни Тьюринг машиналарида ҳисоблаш

1- таъриф. Бир ҳарфли ташқи алфавитга эга бўлган ва тасмага дастлаб ёзилган $x_1, \ldots, x_n$ тизмани стандарт ҳолатда (x_n кодининг энг ўнг „таёқчасини“ q_1 ички ҳолатда) „кўриб“ турган вазиятда иш бошлаб, кейинги вазиятларда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи Тьюринг машинаси берилган $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни *тўғри ҳисоблайди* дейилади:

1°. Агар φ функция $x_1, \ldots, x_n$ тизмада аниқланган бўлса, машина чекли қадамдан сўнг

$$x_1, \ldots, x_n, \ \overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$$

кўринишдаги вазиятда ишни тугатади; бунда

а) $x_1, \ldots, x_n$ тизма тасмага ёзилган дастлабки вазиятни сақлаб қолади.

β) иш жараёнида машина (каретка) сурилиши мумкин бўлган энг чап катак x_1 дан олдин келувчи бўш катакдир.

2°. Агар φ функция $x_1, \ldots, x_n$ тизмада аниқланмаган бўлса, у ҳолда машина тўхтовсиз ишлайди.

1-мисол. $M_s = T_1 \cdot A$ машина $s(x) = x+1$, $M_0 = C$ машина $0(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $M_\tau = T_{n-m+1}$ машина $\tau_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ базис функцияларни тўғри ҳисоблайди.

M_s машинанинг ишини $\bar{x} \xrightarrow{M_s} x, \overline{x+1}$ формула билан, M_0 нинг ишини $x_1, \ldots, \bar{x}_n \xrightarrow{M_0} x_1, \ldots, x_n, \bar{0}$ формула билан, M_τ нинг ишини эса $x_1, \ldots, \bar{x}_n \xrightarrow{M_\tau} x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_m$ формула билан ифодалаш мумкин.

2-§ да биз барча қисмий арифметик функция тўпламидан барча қисмий рекурсив функциялар синфи $F_{\text{қ.р.}}$ ни ажратган эдик. Бундан ташқари арифметик функцияларни ҳисоблашда Тьюринг машиналарининг имконияти катта эканлигини, Тьюринг машиналари ёрдамида ҳисобланувчи функцияларни Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар деб аталиши айтиб ўтилган эди. Бундай функциялар синфини $F_{\text{т.ф.}}$ каби белгилайлик. 1-§ да эса ҳисобланувчи функциялар тушунчаси билан танишган эдик. Ҳисобланувчи функция тушунчаси аниқ таърифланмаслиги, уни фақат интуитив тушуниш мумкинлиги ва шунинг учун ҳам бу тушунча аниқ математик объект эмаслиги бизга маълумдир. Барча ҳисобланувчи функциялар синфини шартли равишда $F_{\text{х.ф.}}$ билан белгиласак, табиий, $F_{\text{х.ф.}}$, $F_{\text{қ.р.}}$ ва $F_{\text{т.ф.}}$ тўпламлар орасида қандай боғланишлар бор деган савол туғилади.

$F_{\text{қ.ф.}}$ ва $F_{\text{т.ф.}}$ синфлар аниқ математик атамалар ёрдамида аниқланган (таърифланган) функциялар синфларидир. $F_{\text{х.ф.}}$ синфга кирувчи функциялар аниқ математик атамалар ёрдамида аниқланган функциялар эмаслиги сабабли

$$F_{\text{х.ф.}} = F_{\text{қ.р.}}$$

тенглик теорема (исботга эга бўлган тасдиқ) бўлмай, балки тезис (исботланмайдиган тасдиқ) дир. Маълумки, бу тезис Чёрч тезиси номи билан юритилади.

Худди шунга ўхшаш

$$F_{\text{ҳ.ф.}} = F_{\text{т.ф.}}$$

ҳам тезис бўлиб, у Тьюринг тезиси номи билан маълумдир. Ушбу параграфнинг мазмунини

$$F_{\text{қ.р.}} \subseteq F_{\text{т.ф.}}$$

муносабатнинг ўринли эканлигини кўрсатиш ташкил қилади (аслида $F_{\text{қ.р.}} = F_{\text{т.ф.}}$ муносабат ўринли бўлиб, биз бу муносабатнинг $F_{\text{т.ф.}} \subseteq F_{\text{қ.р.}}$ қисмини 6-§ да қараймиз).

1-теорема. *Ҳар қандай қисмий-рекурсив функциянинг қийматларини ҳисобловчи мос Тьюринг машинаси мавжуддир.*

Исботи. Маълумки, ихтиёрий қисмий-рекурсив функция — базис функциялардан суперпозиция (S-оператор), примитив рекурсия (PR-оператор) ва минимизация (μ_y-оператор) операторлари ёрдамида ҳосил қилинадиган функциядир. Демак, ихтиёрий қисмий рекурсив функцияни мос Тьюринг машинасида ҳисоблаш мумкин эканлигини кўрсатиш учун:

1) базис функцияларни тўғри ҳисоблайдиган машиналар мавжуд эканлигини,

2) f, g_i $(i = \overline{1, n})$ функцияларни тўғри ҳисоблайдиган M_f, M_{g_i} машиналар мавжуд бўлганда берилган функциялардан S-оператор ёрдамида ҳосил қилинадиган

$$h = S(f, g_1, \ldots, g_n) \tag{1}$$

функцияни тўғри ҳисоблайдиган M_h машина мавжуд эканлигини,

3) f ва g функцияларни тўғри ҳисоблайдиган M_f ва M_g машиналар мавжуд бўлганда, берилган функциялардан PR-оператор ёрдамида ҳосил қилинадиган

$$h = PR(f, g) \tag{2}$$

функцияни тўғри ҳисоблайдиган M_h машина мавжуд эканлигини,

4) f функцияни тўғри ҳисобланадиган M_f машина мавжуд бўлганда, ундан μ_y-оператор ёрдамида ҳосил қилинадиган

$$h = \mu_y(f) \tag{3}$$

функцияни тўғри ҳисоблайдиган M_h машина мавжуд эканлигини кўрсатиш кифоядир.

Юқорида базис функцияларни M_s, M_0 ва M_c машиналар тўғри ҳисоблаши айтиб ўтилган эди.

Энди 2), 3) ва 4) бандларнинг шартлари бажарилган бўлсин. У ҳолда

$$M_h = K_m \cdot M_{g_1} \cdot T_{m+1}^m \cdot M_{g_2} \cdot T_{m+1}^m \cdot \ldots \times$$
$$\times T_{m+1}^m \cdot M_{g_n} \cdot T_{(n-1)m+n} \cdot T_{(n-2)m+n} \cdot \ldots \times$$
$$\times T_n \cdot M_f \cdot S \tag{4}$$

машина (1) даги $h(x_1, \ldots, x_m)$ функцияни тўғри ҳисоблайди;

$$M_h = K_{n+1} \cdot T_{n+1}^n \cdot M_g \cdot T_{n+2} \cdot P \times$$
$$\times \begin{cases} V \cdot T_2 \cdot S, \\ V \cdot T_{n+2}^n \cdot G \cdot T_{n+3}^n \cdot M_f \end{cases} \cdot T_{n+4} \cdot B \cdot P \times$$
$$\times \begin{cases} V \cdot T_2 \cdot S, \\ V \cdot T_{n+4}^{n+1} \cdot \dot{A} \end{cases} \tag{5}$$

машина (2) даги $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ функцияни тўғри ҳисоблайди:

$$M_h = K_n \cdot C \cdot M_f \cdot P \cdot \begin{cases} V \cdot T_2 \cdot S, \\ V \cdot T_{n+2}^{n+1} \cdot \dot{A} \end{cases} \tag{6}$$

машина (3) даги $h(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни тўғри ҳисоблайди.

Биз қуйида (4) машинанинг иши билан муфассалроқ танишамиз; бунда биз $n = 3$ бўлган хусусий ҳолни кўриб чиқиш билан чегараланамиз.

Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, x_3)$ ҳамда $g_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, 3)$ функциялар берилган бўлиб, M_f, M_{g_1}, M_{g_2}, M_{g_3} лар бу функцияларни тўғри ҳисоблайдиган машиналар бўлсин. Бу ҳолда (4) ушбу кўринишда бўлади:

$$M_h = K_m \cdot M_{g_1} \cdot T_{m+1}^m \cdot M_{g_2} \cdot T_{m+1}^m \cdot M_{g_3} \cdot T_{2m+3} \times$$
$$\times T_{m+3} \cdot T_3 \cdot M_f \cdot S.$$

Берилган функцияларга S-операторни қўллаш натижасида

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m),$$
$$g_2(x_1, \ldots, x_m), \; g_3(x_1, \ldots, x_m))$$

функция ҳосил бўлади. Мазкур функциянинг бирор $x_1, \ldots, x_n$ тизмадаги (нуқтадаги) қийматини ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. g_i $(i = 1, 2, 3)$ функциянинг $x_1, \ldots, x_m$ тизмадаги қиймати a_i, f функциянинг (a_1, a_2, a_3) учликдаги қиймати b бўлсин, яъни

$$g_i(x_1, \ldots, x_m) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad f(a_1, a_2, a_3) = b.$$

Тасмага $x_1, x_2, \ldots, x_m$ тизма ёзилган ҳамда M_h машина стандарт вазиятга, яъни каретка q_1 бошланғич ички ҳолатда x_m нинг охирги „таёқчаси" рўпарасига келтирилган бўлсин. Дастлаб $x_1, \ldots, x_m$ тизма устида K_m машина ишлай бошлайди; у ёзилган тизмадан кейин иккита бўш катак ташлаб шу тизмани қайтадан кўчиради. Буни қуйидагича ифода этиш мумкин:

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{K_m} x_1, \ldots, x_m\, s_0\, s_0\, x_1, \ldots, \overline{x_m}. \qquad (7)$$

(7) да стрелкадан кейинги $\overline{x_m}$ ёзувнинг мазмуни шундан иборатки, K_m машина ишни тугатиб, бошқаришни M_{g_1} машинага узатган, M_{g_1} машина ўзининг бошланғич ички ҳолатида (стрелкадан кейинги) x_m нинг охирги „таёқчаси" рўпарасида тургандир. Кейинги „ҳисоблашни" M_{g_1} машина давом эттиради: у x_m дан сўнг битта бўш катак ташлаб, g_1 нинг $x_1, \ldots, x_m$ тизмадаги қиймати a_1 ни ёзади. Шундай қилиб, биз ушбу ёзувга эришамиз:

$$x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{K_m} x_1, \ldots, x_m\, s_0\, s_0\, x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{M_{g_1}} x_1, \ldots,$$
$$x_m\, s_0\, s_0\, x_1, \ldots, x_m, \overline{a_1}. \qquad (8)$$

Бундан кейинги (8) га ўхшаш ёзувларни тушунтиришсиз давом эттирамиз.

$$(8) \xrightarrow{I^m_{m+1}} x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{M_{g_2}}$$
$$\to x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m, \overline{a_2} \xrightarrow{I^m_{m+1}}$$
$$\to x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m, a_2, x_1,$$
$$\ldots, \overline{x_m} \xrightarrow{M_{g_3}} x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m,$$
$$a_2, x_1, \ldots, \overline{x_m}, \overline{a_3} \xrightarrow{I_{2m+3}} x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1,$$
$$x_1, \ldots, x_m, a_2, x_1, \ldots, x_m, a_3, \overline{a_1} \xrightarrow{I_{m+3}} x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1,$$

$$\ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m, a_2, x_1, \ldots, x_m, a_3, a_1, a_2 \xrightarrow{L_1}$$

$$\to x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1, \ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m, a_2, x_1,$$

$$\ldots, x_m, a_3, a_1, \ldots, a_2, \overline{a_3} \xrightarrow{M_f} x_1, \ldots, x_m\, s_0 s_0\, x_1,$$

$$\ldots, x_m, a_1, x_1, \ldots, x_m, a_2, x_1, \ldots, x_m, a_3, a_1, a_2, a_3,$$

$$\overline{b} \xrightarrow{S} x_1, \ldots, x_m, \overline{b}. \qquad (9)$$

(8) ва (9) лардан кўринадики, M_h машина тасмага ёзилган $x_1, \ldots, x_m$ тизма устида ишлаб, ўз ишини тугатгач, тасмада $x_1, \ldots, x_m, b$ ёзув қолади. Бу эса M_h машина h функцияни тўғри ҳисоблашини кўрсатади ($b = f(a_1, a_2, a_3)$ бўлганлиги учун) (5) ва (6) машиналар ишини текшириб кўришни ўқувчига ҳавола қиламиз.

5-§. Рекурсив ва рекурсив санаб чиқилувчи тўпламлар

Ушбу параграфда ўрганиладиган асосий объект натурал сонлар тўпламининг тўпламостиларидан иборатдир

A натурал сонлар тўплами $N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ нинг тўпламостиси бўлсин.

1-таъриф.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар, } x \in A \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x \overline{\in} A \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция A тўпламининг *характеристик функцияси* дейилади.

Ушбу таърифдан тўпламнинг характеристик функцияси тўлиқ (барча натурал нуқталарда) аниқланган функция эканлигини кўрамиз.

2-таъриф. *Характеристик функцияси* умумрекурсив* бўлган тўплам *рекурсив тўплам* (р. т.) дейилади. Хусусан, характеристик функцияси примитив рекурсив бўлган тўплам *примитив рекурсив тўплам* (п. р. т.) дейилади

1-мисол. $A = \varnothing$, $A = N$, $A = N_{(2)}$ (жуфт натурал сонлар тўплами) лар рекурсив тўпламлардир, чунки

---

* Тўлиқ аниқланган қисмий рекурсив функция умумрекурсив функция дейилишини эслатиб ўтамиз.

уларнинг характеристик функциялари мос равишда $\chi_{\varnothing}(x) \equiv 0$, $\chi_N(x) \equiv 1$, $\chi_{N_{(2)}}(x) = \mathrm{rest}(x, 2)$ ($\mathrm{rest}(x, y)$: „x ни 2 га бўлгандаги қолдиқ“) лар бўлиб, уларнинг ҳар бири умумрекурсив функция эканлигини кўриш қийин эмас.

1-теорема. *Агар A ва B лар рекурсив тўпламлар бўлса, у ҳолда $A \cup B$, $A \cap B$ ва $\bar{A}$ лар ҳам рекурсив тўпламлардир.*

Исботи. $\chi_A(x)$ ва $\chi_B(x)$ лар мос равишда A ва B ларнинг характеристик функциялари бўлса, $\chi_{A \cup B}(x) = \mathrm{sg}(\chi_A(x) + \chi_B(x))$, $\chi_{A \cap B}(x) = \mathrm{sg}(\chi_A(x)\,\chi_B(x))$, $\chi_{\bar{A}}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_A(x))$ лар мос равишда $A \cup B$, $A \cap B$ ва $\bar{A}$ ларнинг характеристик функцияси бўлади. $\chi_{A \cup B}(x)$, $\chi_{A \cap B}(x)$ ва $\chi_{\bar{A}}(x)$ лар примитив рекурсив функциялар эканлиги равшандир.

Рекурсив тўпламлар алгоритмлар назариясида асосий ролларидан бирини ўйнайди. Бу қуйидаги масала билан боғлиқдир:

„x натурал соннинг A тўпламга кириши (яъни A нинг элементи бўлиши) ёки кирмаслигини чекли қадамда кўрсатиб берадиган, яъни A тўпламнинг характеристик функцияси қийматларини ҳисоблайдиган алгоритмни топиш керак“. Бу A тўпламга „кириш проблемаси“ дейилиб, бундай алгоритмнинг мавжуд бўлиши A тўплам характеристик функциясининг умумрекурсив бўлишига тенг кучлидир. Шунинг учун рекурсив тўпламларни „кириш проблемаси“ алгоритмик ечилувчи бўлган тўпламлар деб қараш мумкин. Бундай тўпламлар ечилувчи тўпламлар ҳам дейилади. Тескари даъво, яъни ечилувчи тўпламлар рекурсив тўпламлар эканлиги Чёрч тезисидан иборатлигини эслатиб ўтамиз.

3-таъриф. Бўш ёки бирор умумрекурсив функция қийматлари тўпламидан иборат бўлган тўплам *рекурсив санаб чиқилувчи тўплам* (р. с. ч. т.) дейилади. Ўз навбатида мазкур функция *тўпламни санаб чиқувчи функция* дейилади.

2-мисол. 1) Тоқ сонлар тўплами, 3 га бўлинганда 2 қолдиқ берадиган натурал сонлар тўплами, барча натурал сонлар тўплами р. с. ч. т. дир — уларни мос равишда $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = 3x + 2$, $f(x) = x$ функциялар санаб чиқади.

2) $E_1=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $E_2=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$, $E_3=\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}=\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ лар ҳам р. с. ч. т. лардир — уларни санаб чиқувчи функциялар мос равишда $\varphi(x)=2x$, $\varphi(x)=p_x$ („x — туб сон“) ва $\varphi(x)=2^x$ лардир.

Р. с. ч т. таърифидан кўрамизки, A р. с. ч. т., $\varphi(x)$ уни санаб чиқувчи умумрекурсив функция бўлса, у ҳолда

$$A=\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots\}$$

бўлиб, у саноқли тўпламдир.

Р. с. ч. т. ларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна р. с. ч. т. бўлишини кўрсатиш қийин эмас (бу тасдиққа кейинроқ яна қайтамиз ва унинг қатъий исботини келтирамиз). Масалан, $f(x)$ ва $g(x)$ мос равишда р. с ч. A ва B тўпламларни санаб чиқувчи функциялар бўлса

$$h(x)=\begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right), & \text{агар } x\text{—жуфт бўлса,} \\ g\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{агар } x\text{—тоқ бўлса} \end{cases}$$

функция $A\cup B$ тўпламни санаб чиқади.

Р. с. ч. т. нинг тўлдирувчиси р. с. ч. т. бўлмаслиги мумкин—буни биз кейинроқ кўрсатамиз.

Умумрекурсив функциялар синфи $F_{у.р}$ саноқли тўплам бўлганлиги, ҳар бир умумрекурсив функция эса фақат битта тўпламни санаб чиқа олиши сабабли р. с. ч. т. лар синфи саноқлидир.

Маълумки, барча натурал сонлар тўпламининг барча тўплам остилари синфи саноқсиз тўпламдир. Бу эса р. с. чиқилмайдиган тўпламлар мавжуд дейишга асос бўлади.

2-теорема. *Агар A рекурсив тўплам бўлса, у ҳолда* у р. с. ч. т. дир.

Исботи. Мумкин бўлган ушбу учта ҳолни қараймиз.

а) $A=\varnothing$ бўлса, теорема ўринли эканлиги аёндир.

б) $A=\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ чекли тўплам бўлсин.

У ҳолда бу тўпламни санаб чиқувчи функция

$$f(x)=\begin{cases} a_x, & \text{агар } x\leqslant k \text{ бўлса,} \\ a_k, & \text{агар } x>k \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бўлади.

в) A чексиз тўплам $\chi_A(x)$ нинг характеристик функцияси бўлсин, у ҳолда

$$\begin{cases} f(0)=\mu_y[\chi_A(y)=1], \\ f(x+1)=\mu_y[\chi_A(y)=1 \wedge y \wedge f(x)] \end{cases}$$

схема ёрдамида аниқланган $f(x)$ функция A тўпламни санаб чиқувчи функциядир.

3-теорема (Пост). *A рекурсив тўплам бўлиши учун A нинг ўзи ва $\bar{A}=N\setminus A$ (A нинг тўлдирувчиси)* р. с. ч. т. *бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. 2-теоремага асосан A рекурсив тўплам бўлса, A р. с. ч. т. бўлади, 1-теоремага асосан эса A рекурсив ва демак, р. с. ч. т. бўлади. Аксинча, A ва $\bar{A}$ лар р. с. ч. т. лар бўлсин. $A=\varnothing$ (ёки $\bar{A}=\varnothing$) бўлса, етарлилиги равшандир. Агар $A\neq\varnothing$ ва $\bar{A}\neq\varnothing$ бўлса, у ҳолда A ва $\bar{A}$ тўпламлар мос равишда қандайдир $f(x)$ ва $g(x)$ умумрекурсив функциялар қийматлари тўпламидан иборат бўлади. Ушбу алгоритмик жараённи қарайлик: a натурал сон бўлса, у A тўпламга кирадими, ёки $\bar{A}$ га кирадими, деган масалани ҳал этиш учун $f(0)$, $g(0)$, $f(1)$, $g(1)$, ..., $f(n)$, $g(n)$, ..., сонларни кетма-кет қараб чиқамиз. Агар a $f(x)$ функциянинг қиймати бўлса, у ҳолда $a\in A$, агар a $g(x)$ функциянинг қиймати бўлса, у ҳолда $a\in\bar{A}$ бўлиб, $A\cup\bar{A}=N$ бўлгани учун a албатта ё $f(x)$ нинг, ёки $g(x)$ нинг қийматидан иборат бўлади. Бошқача айтганда A тўпламнинг характеристик функцияси тўлиқ аниқланган умумрекурсив функция, A нинг ўзи эса рекурсив тўплам бўлади.

4-таъриф. Шундай $f(x)$ умумрекурсив функция мавжуд бўлсаки, A тўплам $f(x)$ нинг қийматлари тўпламидан иборат бўлиб, $f(x)$ ўсувчи (яъни $\forall x\forall y[x<y\to f(x)<f(y)]$) функция бўлса, у ҳолда A *ўсиб бориш тартибида* р. с. ч. т. дейилади.

3-мисол. 1, 3, 5, 7, 9, ... тоқ сонлар тўплами ўсиб бориш тартибида рекурсив санаб чиқилувчи тўпламдир—у $f(x)=2x+1$ ўсувчи умумрекурсив функциянинг қийматлари тўпламидан иборатдир.

4-теорема. *A чексиз тўплам бўлсин. A* р. т. *бўлиши учун у ўсиб бориши тартибида* р. с. ч. т. *бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурлиги. A—чексиз ва р. г. $\chi_A(x)$ унинг характеристик функцияси бўлсин.

$$\begin{cases} f(0)=\mu_y[(\chi_A(y)=1], \\ f(x+1)=\mu_y[\chi_A(y)=1 \wedge f(x)<y] \end{cases}$$

схема ёрдамида ҳосил қилинган функция умумрекурсив ҳамда A тўплам бу функция қийматлари тўпламидан иборат эканлиги 2-теоремада айтилган эди. $f(x)$ ўсувчи функция эканлиги равшандир. Демак, A ўсиб бориш тартибида р. с. ч. т. экан.

Етарлилиги. $f(x)$ A ни ўсиб бориш тартибида сановчи функция бўлсин. a натурал сонининг A га кириш ё кирмаслигини аниқлаш учун $f(x)$ нинг қийматларини ҳисоблай бошлаймиз. Бу жараённи $f(x)$ нинг a дан катта қиймати пайдо бўлгунча давом эттирамиз. $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(x)$, ... ларни ҳисоблаш жараёнида a дан катта сон пайдо бўлса, $a \in A$ пайдо бўлмаса, $a \in \overline{A}$ эканлиги аён. Демак, A тўпламнинг характеристик функцияси тўлиқ аниқланган функция бўлиб, унинг қийматларини ҳисоблайдиган жараён мавжуддир, ва демак, у умумрекурсив функция, A эса рекурсив тўплам экан.

5-теорема. *Ҳар қандай р. с. ч. т. чексиз рекурсив тўпламостисига эгадир.*

Исботи. A чексиз р. с. ч. т., $f(x)$ умумрекурсив функция уни санаб чиқувчи функция бўлсин (A тўплам $f(x)$ функция қийматлари тўпламидан иборат).

$$\begin{cases} g(0)=f(0), \\ g(x+1)=f(\mu_y[f(y)>g(x)]) \end{cases}$$

умумрекурсив схема ёрдамида берилган функцияни қарайлик. Бу функциянинг қийматлари тўплами қандайдир B тўпламдан иборат бўлиб, $g(x)$ уни ўсиб бориш тартибида санаб чиқади. Олдинги теоремага асосан B чексиз ва р. т. дир. $B \subseteq A$ эканлиги $g(x)$ функциянинг аниқланишидан келиб чиқади.

Энди қуйида биз р. с. ч. т. лар назариясининг асосий теоремасини исботсиз келтирамиз.

6-теорема. *A р. с. ч. т. бўлиши учун A қандайдир қисмий рекурсив функциянинг аниқланиш соҳасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.*

Рекурсив ва р. с. ч. т. тушунчалари фақат натурал сонлар тўпламостилари учунгина эмас, балки натурал сонлар жуфтликлари, учликлари ва умуман n-ликлари тупламлари ҳамда предикатлар учун ҳам киритилиши мумкин.

Бунинг учун ушбуларни бажариш керак:

а) натурал сонлар барча жуфтликларини натурал сонлар билан номерлаб чиқиш зарур;

б) натурал сонлар барча учликларини натурал сонлар билан номерлаб чиқиш зарур ва ҳоказо, умуман

в) натурал сонлар барча n-ликларини ($n=2, 3, \ldots$) натурал сонлар билан номерлаб чиқиш зарур. N^2, N^3, $\ldots, N^n, \ldots$ тўпламлар элементлари натурал сонлар билан номерлаб чиқилгач, энди, масалан, натурал сонлар жуфтликлари тўплами N^2 нинг тўпламостисининг рекурсив ёки р. с. ч. тўплам эканлиги унинг элементлари номерларидан тузилган тўпламнинг рекурсив ёки р. с. ч тўплам эканлиги орқали аниқланади.

Бу ишларни бажаришни биз натурал сонлар жуфтликларини номерлашдан бошлаймиз. Бунинг учун жуфтликларни қандайдир хоссасига қараб кетма-кет жойлаштириб чиқишимиз керак. (x, y) ва (z, t) натурал сонлар жуфтликлари бўлса, улар орасида $(x, y)\propto(z, t)$ („(x, y) жуфтлик (z, t) жуфтликдан олдин келади" деб ўқилади) муносабат ўрнатамиз:

$$(x, y)\propto(z, t)\underset{df}{\Longleftrightarrow}(x+y<z+t)\vee(x+y=z+t\wedge x<z),$$

яъни жуфтликларни кетма-кетликка жойлаштирганимизда (x, y) ва (z, t) жуфтликлар учун $x+y<z+t$ бўлса (x, y) жуфтликни (z, t) жуфтликдан олдин ёзамиз, $x+y=z+t$ бўлганда эса биринчи координатаси кичик бўлганини олдин ёзамиз. У ҳолда жуфтликлар қуйидагича жойлашади:

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), \ldots .$$

Жуфтликларни бундай жойлаштириш *кантор бўйича жойлаштириш* дейилади*.

(x, y) жуфтликнинг номерини $c(x, y)$ билан, номери n бўлган (яъни $c(x, y)=n$ бўлган) жуфтликнинг биринчи ва иккинчи координаталарини мос равишда $l(n)$ ва $r(n)$ билан белгилаймиз: $l(n)=x$, $r(n)=y$. Шундай қилиб, $c(x, y)=n$ бўлса,

---

* Қаралаётган нарсалар ҳақида тўлиқроқ тасаввур ҳосил қилиш учун [15] ни мушоҳада қилишни тавсия этамиз.

$$c(l(n),\ r(n))=n,\ l(c(x,\ y))=x,\ r(c(x,\ y))=y \qquad (1)$$

эканлиги равшандир,

Биз қуйида $c(x,\ y)$, $l(n)$, $r(n)$ функцияларни таниш арифметик функциялар орқали қандай ифода этилишини кўрсатиб ўтиш билан чегараланамиз:

$$c(x,\ y)=\frac{1}{2}[(x+y)(x+y+1)]+x, \qquad (2)$$

$$l(n)=x=n\dot{-}\frac{1}{2}\left[\frac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{[\sqrt{8n+1}\dot{-}1}{2}\right], \qquad (3)$$

$$r(n)=y=2n\dot{-}\left(\left[\frac{[\sqrt{8n+1}\dot{-}1}{2}\right]^2+3\left(n\dot{-}\frac{1}{2}\left[\frac{[\sqrt{8n+1}+1}{2}\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\frac{[\sqrt{8n+1}\dot{-}1}{2}\right]\right)\right), \qquad (4)$$

бу ерда $[t]$ — „t нинг бутун қисми“ дир.

Натурал сонлар жуфтликларини бундай номерлаш кантор номерацияси дейилади.

Жуфтликларни номерлаш орқали натурал сонлар учликлари ва ҳоказо, n-ликларини номерлаш қуйидагича бажарилади:

а) $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ тартибланган учлик бўлса, у ҳолда

$$c(x_1,\ x_2,\ x_3)=c(c(x_1,\ x_2),\ x_3),$$

б) $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ тартибланган туртлик бўлса, у ҳолда

$$c(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=c(c(c(x_1,\ x_2),\ x_3),\ x_4)$$

ва умуман, $(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ тартибланган n-лик (тизма) бўлса,

$$c(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)=c(c(\ldots(c(x_1,\ x_2,),\ x_3),$$
$$\ldots),\ x_{n-1}),\ x_n)$$

деб оламиз.

$m=c(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ натурал сон $(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ тизманинг *кантор номери* дейилади.

Натурал сонлар тизмаларини номерлаш, албатта, бошқа усуллар ёрдамида бажарилиши ҳам мумкин. Қуйида биз яна битта усул билан танишамиз:

$$z=2^x(2y+1)\dot{-}1 \qquad (5)$$

функция N^2 билан N орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишини кўриш қийин эмас, яъни ҳар бир

(x, y) жуфтликка ягона натурал сон z, ва аксинча, ҳар бир натурал сон z га ягона (x, y) жуфтлик мос келади. (5) дан $z+1=2^x(2y+1)$, бундан эса

$$x=\exp(0, z+1), \tag{6}$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{z+1}{2^{\exp(0,z+1)}}-1\right] \tag{7}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, (5) нинг ўнг томонини $\mu(x, y)$, (6) нинг ўнг томонини $\lambda_1(z)$, (7) нинг ўнг томонини $\lambda_2(z)$ билан белгиласак, ушбу айниятларга эга бўламиз:

$$\mu(\lambda_1(z), \lambda_2(z))=z,$$
$$\lambda_1(\mu(x, y))=x,$$
$$\lambda_2(\mu(x, y))=y.$$

Ҳосил бўлган $\mu(x, y)$, $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ функциялар орқали натурал сонлар учликлари, тўртликлари, умуман n-ликларини номерлаб чиқиш юқорида кўрсатилганидек амалга оширилади.

Маълумки, натурал сонлар тўпламида аниқланган бир ўринли (битта эркин предмет ўзгарувчили) предикатнинг ростлик соҳаси N нинг бирор тўпламостиси, икки ўринли предикатнинг ростлик соҳаси N^2 нинг тўпламостидан иборатдир ва ҳоказо. N, N^2, N^3, ... ларнинг тўпламостилари учун рекурсив ва р. с. ч. т. тушунчалари маълум бўлганлиги сабабли, энди рекурсив ва р. с. ч. предикат тушунчасини киритиш мумкин.

5-таъриф. Натурал сонлар тўпламида аниқланган ва ростлик соҳаси рекурсив ёки р. с. ч. т. бўлган n-ўринли $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ предикат мос равишда *рекурсив* ёки *р. с. ч. предикат* дейилади ($n=1, 2, \ldots$).

6-таъриф. 1. $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases}1, & P(x_1, \ldots, x_n)=\text{рост бўлса},\\ 0, & P(x_1, \ldots, x_n)=\text{ёлғон бўлса},\end{cases}$$

Аниқланган $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция $P(x_1, \ldots, x_n)$ предикатнинг *характеристик функцияси* дейилади.

2. Характеристик функцияси умумрекурсив (примитив рекурсив) бўлган предикат *умумрекурсив* (примитив рекурсив) *предикат* дейилади.

7-теорема. A р. с ч т. *бўлиши учун* $y\exists xP(x, y)$ *кўринишга эга бўлган предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир* (бу ерда $P(x, y)$—умумрекурсив предикат).

Исботи. Зарурлиги. A р. с. ч. т. бўлсин. Агар $A=\varnothing$ бўлса, у ҳолда уни $\exists x[c_1^2(x, y)=0]$ предикатнинг ростлик соҳаси деб қараш мумкин (бу ерда $c_a^n(x_1, \ldots, x_n)\equiv a$—доимий функция эканлигини эслатиб ўтамиз). $A\neq\varnothing$ бўлсин. Таърифга кўра шундай $\varphi(x)$ умумрекурсив функция мавжудки, бу функция A ни санаб чиқади, яъни

$$A=\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots\}.$$

У ҳолда A $\exists x[\varphi(x)=y]$ предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлади.

Ҳақиқатан, $y_0\in A$ бўлса, $\varphi(x)$ A ни санаб чиқувчи функция бўлгани учун шундай x_0 топиладики, $y_0=\varphi(x_0)$ бўлиб, $\exists x[\varphi(x)=x_0]$ рост бўлади.

Аксинча, y_0 $\exists xP(h, y)\equiv\exists x[\varphi(x)=y]$ предикатнинг ростлик соҳасидан олинган, яъни $\varphi(x)=y_0$ тенгликни рост жумлага айлантирадиган x_0 мавжуд бўлсин. У ҳолда $\exists x(\varphi(x)=y_0)$ рост бўлиб, $\varphi(x)$ A ни санаб чиқувчи функция бўлгани учун $y_0\in A$ бўлади.

Етарлилиги: $P(x, y)$ умумрекурсив предикат, A $\exists xP(x, y)$ нинг ростлик соҳаси бўлсин.

„$\exists xP(x, y)$ предикатнинг ростлик соҳаси" деган иборани $y\exists xP(x, y)$ билан белгилайлик Бундан, демак, $A=y\exists xP(x, y)$ дир. A тўплам р. с. ч. т. эканини кўрсатамиз.

$f(x, y)$ $P(x, y)$ предикатнинг характеристик функцияси, $a\in A$ бўлса,

$$\varphi(z)=\lambda_2(z)\cdot\overline{sg}(f(\lambda_1(z), \lambda_2(z)))+a\cdot f(\lambda_1(z), \lambda_2(z))$$

тўлиқ аниқланган, умумрекурсив ва A тўпламни санаб чиқувчи функциядир.

Ҳақиқатан, z ихтиёрий натурал сон бўлса, у ҳолда шундай ягона (x_0, y_0) жуфтлик топиладики $z=\mu(x_0, y_0)$, $\lambda_1(z)=x_0$, $\lambda_2(z)=y_0$ бўлади.

$$P(x_0, y_0)=\text{ёлғон, яъни } f(x_0, y_0)=0 \text{ бўлса,}$$

$\overline{sg}(f(\lambda_1(z), \lambda_2(z)))=1$, ва демак, $\varphi(z)=\lambda_2(z)=y_0$ бўлиб, $\exists xP(x, y_0)$=рост, $y_0\in A$ бўлади.

$P(x_0, y_0)=$рост, яъни $f(x_0, y_0)=1$ бўлса, $\overline{sg}(f(\lambda_1(z), \lambda_2(z))=0$, ва демак, $\varphi(z)=a$ бўлади. Демак, z қандай бўлишидан қатъи назар $\varphi(z)\in A$, яъни $\varphi(z)$ A ни санаб чиқувчи умумрекурсив функциядир.

Юқорида р. с. ч. т. ларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна р. с. ч. т. бўлиши уқтирилган эди. Қуйида шу тасдиқнинг қатъий исботини келтирамиз.

A ва B лар р. с. ч. т. лар бўлсин. У ҳолда олдинги теоремага асосан улар қандайдир $\exists xP(x, y)$, $\exists xQ(x, y)$ умумрекурсив предикатларнинг ростлик соҳаларидан иборат бўлади:

$$A=\widehat{y}\,\exists xP(x, y), \quad B=\widehat{y}\,\exists xQ(x, y).$$

У ҳолда $A\cup B=\widehat{y}\,(\exists xP(x, y)\vee\exists xQ(x, y))=\widehat{y}\,\exists x\times$ $\times(P(x, y)\vee Q(x, y))$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан, агар $y_0\in A\cup B$ бўлса, y_0 A ва B тўпламларнинг камида биттасига тегишли бўлиб, $\exists xT(x, y_0)=$ $=$рост бўлади; бунда $T(x, y)=P(x, y)\vee Q(x, y))$. Умумрекурсив предикатларнинг дизъюнкцияси яна умумрекурсив предикат бўлгани учун $A\cup B$ р. с. ч. т. бўлади (f $P(x, y)$ нинг, g эса $Q(x, y)$ нинг характеристик функцияси бўлса, $P(x, y)\vee Q(x, y)$ нинг характеристик функцияси

$$sg(f(x, y)+g(x, y))$$

бўлади.

Ундан ташқари,

$$A\cap B=\widehat{y}\exists xP(x, y)\cap\widehat{y}\exists xQ(x, y),$$

$f(x)$ ва $g(x)$ лар мос равишда A ва B тўпламларни санаб чиқувчи умумрекурсив функция бўлсин. $y_0\in A\cap B$ бўлса, шундай $x_1\in A$ ва $x_2\in B$ топиладики, $f(x_1)=y_0$ ва $g(x_2)=y_0$ бўлади

Маълумки, ихтиёрий z натурал сон учун координаталари мос равишда $\lambda_1(z)$ ва $\lambda_2(z)$ бўлган жуфтлик топилади, ва демак, y_0 учун шундай z топиладики

$$\exists z(f(\lambda_1(z))=y_0\wedge g(\lambda_2(z))=y_0) \qquad (*)$$

рост бўлади. Агар $y_0\overline{\in} A\cap B$ бўлса, у $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳеч бирининг қиймати бўла олмайди ва демак, (*) предикат ёлғон бўлади.

Бундан кўринадики, $A\cap B$ тўплам

$$\exists z(f(\lambda_1(z)=y\wedge g(\lambda_2(z))=y)$$

предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлиб, у р. с. ч. г. дир.

Натижа. *А рекурсив тўплам бўлиши учун у қандайдир умумрекурсив предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи 2-ва бундан олдин исбот этилган теоремадан келиб чиқади.

Юқорида 4-теоремани исботлашда ноконструктив усулдан фойдаланган эдик, яъни унинг исботида Чёрч тезисидан фойдаланган эдик (ошкормас ҳолда).

Қуйида биз шу теореманинг қатъий исботини келтирамиз.

Зарурлиги. A—чексиз рекурсив тўплам, a унинг энг кичик элементи бўлсин.

$$\begin{cases} f(0)=a, \\ f(x+1)=\mu_y(y>f(x)\wedge P(y)) \end{cases}$$

схема ёрдамида берилган функцияни олайлик; бу ерда $P(y)$ A тўпламда рост бўлган умумрекурсив предикат (A тўпламнинг характеристик функцияси $\chi_A(y)$ $P(y)$ нинг ҳам характеристик функцияси бўлиши аёндир).

$f(x)$ тўлиқ аниқланган ҳамда PR-ва μ_y-операторлар ёрдамида аниқланганлиги учун умумрекурсив функциядир. Бундан ташқари, $f(x)$ A ни санаб чиқувчи функциядир. Ҳақиқатан, $x=0$ бўлганда $f(0)=a\in A$, $x>0$ бўлганда $f(x)>a$ (a A нинг энг кичик элементи бўлганлиги учун), $\mu_y(y>f(x))$ бўйича аниқланган y шундай танланадики, $P(y)$=рост бўлиши керак. $P(y)$ предикат A тўпламда рост бўлгани учун $(x+1)$—нуқталардаги $f(x)$ нинг қийматлари A тўплам элементлари бўлади. Демак, ўсувчи умумрекурсив $f(x)$ функциянинг қийматлари тўплами A тўплам билан бир хил экан.

Етарлилиги. A—ўсувчи умумрекурсив $f(x)$ функциянинг қийматлари тўплами бўлсин. Ҳар қандай натурал сон x учун

$$x\leqslant f(x)$$

ўринлидир. Ҳақиқатан, $f(0)=a\geqslant 0$; $x\leqslant f(x)$ бўлса, $x\leqslant f(x)<f(x+1)$, ёки $x<f(x+1)$, яъни $x+1\leqslant f(x+1)$ дир. A $\exists x(x\leqslant y\wedge f(x)=y)$ предикатнинг ростлик соҳасидан иборат эканлигини кўриш қийин эмас, яъни

$$A=y\exists x(x\leqslant y\wedge f(x)=y).$$

$F(y)\rightleftharpoons\exists x(x\leqslant y\wedge f(x)=y)$ умумрекурсив предикат бўлгани учун A р. с. ч. т. дир.

δ-теорема. $A\subseteq N^n$ р. с. ч. т. *бўлиши учун у* $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ *кўринишдаги тизмалар тўплами бўлиши зарур ва етарлидир,* бу ерда $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1, n})$ умумрекурсив функция.

Исботи. Зарурлиги. $A\leqslant N^n$ бўлсин. Маълумки, A нинг элементларини натурал сонлар билан номерлаб чиқиш мумкин—ана шу номерлар тўплами B бўлсин. Агар A р. с. ч. т. бўлса, B ҳам р. с. ч. т. тўпламдир. У ҳолда B ни санаб чиқувчи $\varphi(\ )$ умумрекурсив функция мавжуддир z сони $(x_1, \ldots, x_n)$ тизманинг номери бўлса, қисқалик учун

$$z=\mu(\mu(\ldots(\mu(x_1, x_2), x_3), \ldots), x_{n-1}), x_n) \qquad (**)$$

ни $z=\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ каби белгилаймиз. Бундан

$$\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)=\mu^{(n-1)}(\mu(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_n) = \\ =\mu^{(n-2)}(\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) x_4, \ldots, x_n)=\ldots$$

тенгликларни ёзиш мумкин.

$(**)$ дан $x_1=\lambda_1(\lambda_1(\ldots(\lambda_1(z))\ldots))$ каби ёзиш мумкин;

$\lambda_1(\lambda_1(\ldots(\lambda_1(z))\ldots))=\lambda_1^{(n)}(z)$ белгилаш киритсак,

$$x_1=\lambda_1^{(n)}(z),\ x_2=\lambda_2(\lambda_1(\ldots(\lambda_1(z))\ldots))=\lambda_2^{(n)}(z), \ldots, \\ x_n=\lambda_n^{(n)}(z)=\lambda_n^{(n-1)}(z)=\ldots=\lambda_3^{(3)}(z)=\lambda_2(z)$$

ҳосил бўлади. Энди z сифатида $\varphi(x)$ ни олсак,

$$x_1=\lambda_1^{(n)}(\varphi(x)),\ x_2=\lambda_2^{(n)}(\varphi(x)), \ldots, x_n=\lambda_n^{(n)}(\varphi(x))$$

бўлиб,

$$\lambda_i^{(n)}(\varphi(x))=\varphi_i(x) \text{ десак, } (i=\overline{1, n}),\quad A\ (\varphi_1(x), \ldots, \\ \ldots, \varphi_n(x))$$

кўринишдаги тизмалар тўплами эканлигини кўрамиз.

Етарлилиги. A $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ кўринишдаги тизмалар тўплами, $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ умумрекурсив функция, A нинг элементлари номерлари тўплами B бўлсин.

$$\varphi(x)=\mu^n(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

функция умумрекурсив ҳамда A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатувчи функциядир. Ҳақиқатан $\mu^{(n)}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ сон $(\varphi_1(x), \ldots,$

$\varphi_n(x))$ тизманинг номери булиб, у B га тегишли ва демак, $\varphi(x)$ B ни санаб чиқувчи функциядир. $\varphi(x)$ аниқланишига кўра умумрекурсив бўлгани учун B, ва демак, A тўпламлар р. с. ч. т. дир.

9-теорема $A\subseteq N^n$ *тўплам рекурсив бўлиши учун у қандайдир* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *умумрекурсив предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Зарурлиги. $A\subseteq N^n$ рекурсив тўплам, унинг элементлари номерлари тўплами B бўлсин. B рекурсив тўплам бўлгани учун у қандайдир $P(z)$ умумрекурсив предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлади. z ни $\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ билан алмаштирсак

$$P(\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (***)$$

n ўринли предикат ҳосил бўлади. (***) предикат рост бўлиши учун $(x_1, \ldots, x_n)\in A$ бўлиши зарур ва етарли эканлиги равшандир

Етарлилиги. A умумрекурсив бўлган $P(x_1, \ldots ,x_n)$ предикатнинг ростлик соҳаси, A тўплам элементлари номерлари тўплами B бўлсин.

z сони $(x_1, \ldots, x_n)$ тизманинг номери, $\lambda_1^{(n)}(z), \ldots, \lambda_n^{(n)}(z)$ функциялар мос равишда шу тизманинг координаталари бўлса, уларни $P(x_1, \ldots ,x_n)$ га қўйсак,

$$P(\lambda_1^{(n)}(z), \ldots, \lambda_n^{(n)}(z)) \qquad (****)$$

бир ўринли предикат ҳосил бўлади. $z_0\in B$ бўлса, z_0 A дан олинган $(x_1,\ldots,x_n)$ тизманинг номери бўлгани учун $x_i=\lambda_i^{(n)}(z_0)$, $(i=\overline{1,n})$, $P(x_1, \ldots, x_n)=$рост бўлгани учун эса $P(\lambda_1^{(n)}(z_0), \ldots \lambda_n^{(n)}(z_0))=$ рост бўлади. Демак, B (****) предикатнинг ростлик соҳасидан иборат экан. Бу эса B, ва демак, A тўпламлар рекурсив эканлигини кўрсатади.

6-§. Универсал функциялар

Алгоритмлар назариясида универсал функция тушунчаси марказий роллардан бирини ўйнайди.

A n-ар функцияларнинг бирор синфи бўлсин.

1-таъриф $F(m, x_1, \ldots, x_n)$ функция қуйидаги шартни қаноатлантирса, у **A** синф учун *универсал функция* дейилади.

A дан олинган ҳар бир $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция учун шундай m_0 натурал сон топиладики,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (F(m_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n))$$

бўлади.

Таърифдан кўринадики, **A** га кирувчи ҳар бир f_i функцияга m_i натутал сон мос қўйилиб,

$$F(0, x_1, \ldots, x_n), F(1, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F(m, x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

кетма-кетликда **A** даги ҳар бир функция учрайди, яъни $F(m, x_1, \ldots, x_n)$ функция **A** даги функцияларни номерлаб чиқади. Юқорида келтирилган кетма-кетликка кирган баъзи функциялар **A** га кирмаслиги ҳам табиийдир.

Аксинча, функцияларнинг қандайдир **A** синфи берилиб, **A** га кирган функциялар номерланган бўлса, у ҳолда **A** синф функциялари учун универсал функция мавжуддир.

Ҳақиқатан, **A** функцияларнинг синфи бўлиб, унда бирор номерация берилган бўлсин. Мазкур номерация N дан унинг қандайдир A тўпламостисини ажратади ҳамда **A** билан A орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади.

Универсал функцияни, у ҳолда, қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$F(m, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_m(x_1, \ldots, x_n), \text{ агар } m \in A \text{ бўлса,} \\ \text{аниқмас, агар } m \overline{\in} A \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$F_{\text{п.р}}$, $F_{\text{у.р}}$ ва $F_{\text{қ.р}}$ синфлар учун универсал функциялар мавжудми, деган савол табиийдир.

Алгоритмлар назариясида қуйидаги теоремалар исботланади.

1-теорема. *Барча примитив рекурсив функциялар синфи $F_{\text{п.р.}}$ учун универсал бўлган примитив рекурсив функция мавжуд эмас.*

2-теорема. *Барча умумрекурсив функциялар синфи $F_{\text{у.р}}$ учун универсал бўлган умумрекурсив функция мавжуд эмас.*

3-теорема. *Ҳар бир $n = 1, 2, \ldots$ учун барча n-ар примитив рекурсив функциялар синфи умумрекурсив универсал функцияга эгадир.*

4-теорема. *Ҳар бир $n=1, 2, \ldots$ учун барча n-ар қисмий рекурсив* (ва демак, примитив рекурсив, умумрекурсив) *функциялар синфи қисмий рекурсив универсал функцияга эгадир.*

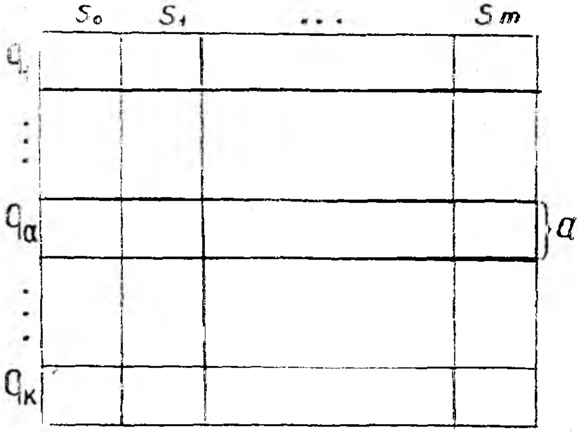
Қуйида биз дастлаб Тьюринг машиналарини Гёдель номерацияси ҳамда машина иши натижасида ҳосил бўладиган вазиятлар номерацияси билан танишиб, сўнгра эса 4-теореманинг исботини келтирамиз.

Маълумки, ҳар қандай Тьюринг машинаси чекли ташқи ва ички алфавитларга эга бўлиб, у ўзининг программаси билан берилади. Тьюринг машинасининг программаси чекли жадвал бўлиб, унинг $k(m+1)$ ($m+$ $+1$—ташқи алфавитнинг актив ва пассив белгилари сони, k эса актив ички ҳолаглар сони) хонасига сони $k(m+1)$ дан кўп бўлмаган командалар ёзилган бўлади. Ҳар бир команда узунлиги 3 га тенг бўлган (чекли) сўз бўлгани учун программанинг ҳар бир сатри (йўли, қатори) ни ҳам чекли сўз сифатида, программада сатрлар сони ҳам чекли бўлгани учун бутун программани ҳам чекли сўз деб қараш мумкин. Шу нарсаларни эътиборга олсак, барча Тьюринг машиналарини номерлаб чиқиш мумкинлигини кўриш қийин эмас. Бундан ташқари Тьюринг машинасининг ишлаш жараёнида турли вазиятлар вужудга келади ва Тьюринг машинасининг ишлаши вазиятлар кетма-кетлигидан иборат эканлиги маълум: бир вазиятдан кейинги вазиятга ўтиш программадаги команда ёрдамида амалга оширилади Ҳар бир вазият ҳам чекли объект бўлгани учун биз барча вазиятларни ҳам номерлаб чиқишимиз мумкин.

M Тьюринг машинаси $S=\{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ ташқи, $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$ ички алфавитга эга бўлсин. S ва Q га кирган белгилардан ташқари командаларда кареткaнинг ҳаракатини билдирувчи учта махсус белги $П$, $Л$, $Н$ лар қатнашади.

$П$, $Л$, $Н$, s_0, $s_1, \ldots, s_m$ ларни мос равишда 1, 3, 5, 7, 9... (тоқ) сонлар билан, q_0, $q_1, \ldots, q_k$ ички ҳолатларни эса 2, 4, 6, ... (жуфт) сонлар билан номерлайлик (39-шакл).

Ҳар бир команда $s_i R q_j$ ($i=0,1, \ldots, m$; $j=0,1, \ldots, k$; $R=П$, $Л$, $Н$) куринишдаги сўз бўлиб, бир сатрда жойлашган командаларни яна битта сўз деб қараш мумкин. 40-шаклда l сатрда ёзилган командалар кўрсатилган: $s_{i0} R q_{j0}$, $s_{i1} R q_{j1}, \ldots, s_{im} R q_{jm}$. Бу сатрдаги



39- шакл.

белгилар сони $3(m+1)$ дан катта эмас (баъзи катакларда командалар бўлмаслиги мумкин). $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3(m+1)}$ шу белгиларнинг номери бўлса, у ҳолда l-сатрнинг номери сифатида

$$g(l)=P_0^{a_0}P_1^{a_1}\ldots P_{3(m+1)}^{a_{3(m+1)}}=2^{a_0}\cdot 3^{a_1}\ldots P_{3(m+1)}^{a_{3(m+1)}}$$

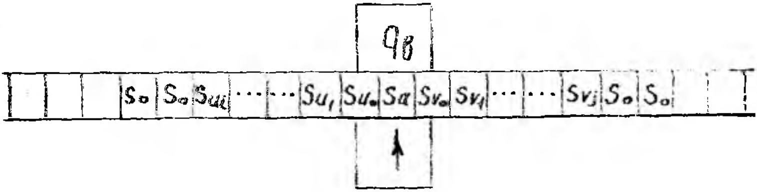
натурал сон олинади. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ программанинг мос равишда ҳар бир сатрининг номери бўлса, у ҳолда

$$g(m)=2^{\beta_0}\cdot 3^{\beta_1}\ldots P_{k-1}^{\beta_{k-1}}$$

натурал сон m Тьюринг машинасининг номери бўлади. Тьюринг машиналарини бундай номерлаш Гёдель нумерацияси дейилади. Агар бирор N натурал сон би-

	S_0	S_1	...	S_m
	...	...	...	...
q_a	$S_{i_0}Rq_{j_0}$	$S_{i_1}Rq_{j_1}$	...	$S_{i_m}Rq_{j_m}$
	...	...	...	...

40- шакл.



41- шакл.

рор Тьюринг машинасининг номери бўлса, у ҳолда N ни туб кўпайтувчилар кўпайтмасига ажратиб, машина программасини тиклаш мумкин.

Энди Тьюринг машинаси ишлаши жараёнида ҳосил бўладиган вазиятларни номерлаш масаласини қараб чиқамиз. Ташқи алфавит белгилари s_0, s_1, ..., s_m ларни мос равишда 0,1, ..., m натурал сонлар билан, ички ҳолатлар q_0, q_1, ..., q_k ларни мос равишда 0, 1, ..., k натурал сонлар билан номерлаймиз. M Тьюринг машинаси иш жараёнида 41-шаклда кўрсатилган вазият ҳосил қилган бўлсин: бунда машина q_b ички ҳолатда тасма устидаги ёзувнинг s_a ҳарфини „кўриб" турибди, s_a ҳарфнинг чап томонида $s_{u_i}s_{u_{i-1}}\ldots s_{u_1}s_{u_0}$, ўнг томонида эса $s_{v_0}s_{v_1}\ldots s_{v_j}$ сўз ёзилган. Тасмадаги $s_{u_i}s_{u_{i-1}}\ldots s_{u_0}s_as_{v_0}s_{v_1}\ldots s_{v_j}$ сўз ҳарфларининг номерлари мос равишда u_i, u_{i-1}, ..., u_0, a, v_0, v_1, ..., v_j ички ҳолатнинг номери b бўлса, у ҳолда

1) s_a нинг чап томонидаги сўзнинг Гёдель номери

$$u = p_0^{u_0}p_1^{u_1}\ldots p_i^{u_i} = 2^{u_0}\cdot 3^{u_1}\ldots p_i^{u_i},$$

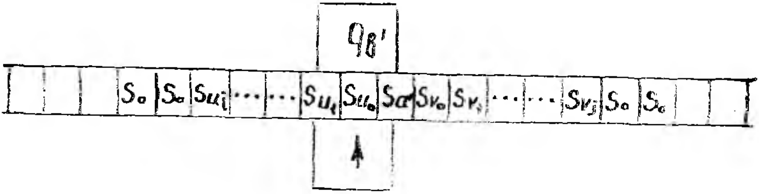
2) s_a нинг ўнг томонидаги сўзнинг Гёдель номери

$$v = p_0^{v_0}p_1^{v_1}\ldots p_j^{v_j} = 2^{v_0}\cdot 3^{v_1}\ldots p_j^{v_j},$$

3) вазиятнинг ўзининг номери эса

$$w = 2^u\cdot 3^a\cdot 5^b\cdot 7^v$$

бўлади. Вазиятни асосан машинанинг ички ҳолати, машина тасмадаги сўзнинг қайси ҳарфини „кўриб" турганлиги ва шу ҳарфнинг чап ва ўнг томонларидаги ёзувлар белгилаганлиги учун вазият номерини $p_{ab}(u, v)$ билан белгилаймиз. Демак, $w = p_{ab}(u, v)$ на-



42- шакл.

турал сон 41- шаклда кўрсатилган вазиятнинг Гёдель номеридир. Фараз қилайлик, $q_b s_a \to s_a Л q_b$, команда бажарилган ва машина кейинги вазиятга ўтган бўлсин (42- шакл).

Мазкур вазиятнинг Гёдель номери

$$p_{a'b'}(u', v') = 2^{u'} \cdot 3^{u_0} \cdot 5^{b'} \cdot 7^{v'}$$

бўлиб, бунда

$$u' = p_0^{u_1} p_1^{u_2} \ldots p_{i-1}^{u_i} = p_0^{\exp(1,\, u)} \cdot p_1^{\exp(2,\, u)} \ldots =$$
$$= \prod_{k=0}^{u} p_k^{\exp(k+1,\, u)},$$
$$u_0 = \exp(0,\, u),$$
$$v' = p_0^{a'} \cdot p_1^{v_0} \cdot p_2^{v_1} \ldots p_{j+1}^{v_j} = p_0^{a'} \cdot p_1^{\exp(0,\, v)} \cdot p_2^{\exp(1,\, v)} \ldots =$$
$$p_0^{a'} \cdot \prod_{k=0}^{v} p_{k+1}^{\exp(k,\, v)}.$$

Шундай қилиб, тайин a ва b учун $p_{ab}(u, v)$ функция машина фақат q_b ички ҳолатда бўлиб, тасмада фақат s_a белгини „кўриб“ турган пайтда (u ва v номерли турли сўзлар учун) иш жараёнида ҳосил бўладиган вазиятларнинг номерини ҳисоблар экан; бу функцияга кирувчи параметрлар: a — машина айни пайтда „кўриб“ турган белгининг номери, b — машинанинг шу белгини „кўриб“ турган ички ҳолатининг номери, u — „кўриб“ турилган белгининг чап томонидаги ёзувнинг номери, ва ниҳоят, v — ўша белгининг ўнг томонидаги ёзувнинг номеридир.

Аслида $p_{ab}(u, v)$ биргина функция бўлмай, балки $k(m+1)$ та турли функцияларни билдиради — буни кўрсатайлик.

Маълумки, Тьюринг машинаси программасидаги командалар уч турда бўлади:

I тур. $q_b s_a \to s_{a'} H q_{b'}$,

II тур $q_b s_a \to s_{a'} Л q_{b'}$,

III тур. $q_b s_a \to s_{a'} П q_{b'}$.

Агар бу командаларда $b' \neq 0$ бўлса, у ҳолда машина актив вазиятга ўтади. Машина q_0 ички ҳолатда бўлганда у ҳеч қандай иш бажармаганлиги учун, унинг актив командалари, ва демак, актив вазиятлари сони $k(m+1)$ га тенгдир.

Шундай қилиб, p_{01}, p_{11}, p_{02}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, ... лар барча актив вазиятларнинг номерларини ҳисобловчи икки аргументли функциялардир. $w = p_0^u \cdot p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^v$ бирор актив вазиятнинг номери бўлсин. Равшанки, $\exp(0, w) = u$, $\exp(1, w) = a$, $\exp(2, w) = b$, $\exp(3, w) = v$ ва демак, масалан, $p_{01}(\exp(0, w), \exp(3, w)) = p_{01}(u, v)$.

Тьюринг машиналари ҳолатлари Гёдель номерацияларини тавсифловчи яна ушбу функцияларни киритамиз.

1. $p(w)$ функция: агар w бирор актив вазиятнинг номери бўлса, ($q_b \neq q_0$), $p(w)$ шу вазиятга тегишли команда ёрдамида ҳосил бўладиган кейинги вазиятнинг Гёдель номеридир; агар w охирги вазиятнинг Гёдель номери бўлса, у ҳолда $p(w) = w$.

$p(w)$ функцияни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$p(w) = \begin{cases} p_{01}(u, v), & a = 0 \wedge b = 1 \text{ бўлса}, \\ p_{02}(u, v), & a = 0 \wedge b = 2 \text{ бўлса}, \\ \cdots & \cdots \\ p_{a'b'}(u, v), & a = a' \wedge b = b' \text{ бўлса}, \\ \cdots & \cdots \\ w, & b = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

ёки

$$p(w) = \begin{cases} \exp(1, w) = 0 \wedge \exp(2, w) = 1 \text{ бўлса}, \\ \exp(1, w) = 0 \wedge \exp(2, w) = 2 \text{ „ }, \\ \cdots \\ \exp(1, w) = a' \wedge \exp(2, w) = b' \text{ „ }, \\ \cdots \\ \exp(2, w) = 0 \text{ „ }, \end{cases}$$

$$
= \begin{cases} p_{01}(\exp(0,\ w),\ \exp(3,\ w)), \\ p_{02} = (\exp(0,\ w),\ \exp(3,\ w)), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{a'b'}(\exp(0,\ w),\ \exp(3,\ w)), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w. \end{cases} \tag{A}
$$

2. $\theta(w,\ z)$ функция: w—актив вазиятнинг номери, z эса бирор натурал сон бўлса, $\theta(w,\ z)$ шу вазиятдан z қадамдан кейин ҳосил бўладиган вазиятнинг Гёдель номери (агар шу қадамлар давомида охирги вазият пайдо бўлмаса); агар z қадам давомида охирги вазият пайдо бўлса, $\theta(w,\ z)$ охирги вазиятнинг Гёдель номерига тенг.

$$
\begin{cases} \theta(w,\ 0) = w, \\ \theta(w,\ z+1) = p(\theta(w,\ z)) \end{cases} \tag{B}
$$

эканлиги шубҳасиздир.

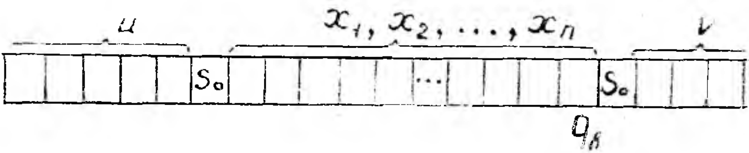
3. $\tau_n(x_1, \ldots, x_n,\ b,\ u,\ v)$ функция: бу функциянинг қиймати қуйидаги вазиятнинг Гёдель номеридир:

1) машинанинг ички ҳолати q_b;

2) тасмага $x_1, \ldots, x_n$ тизма ёзилган бўлиб, унинг чап томонида битта бўш катак s_0, бу бўш катакнинг чап томонида Гёдель номери u бўлган ихтиёрий ёзув, тизманинг ўнг томонида ҳам битта s_0 бўш катак, унинг ўнг томонида эса Гёдель номери v бўлган ихтиёрий ёзув жойлашган;

3) каретка x_n нинг энг охирги ҳарфи рўпарасида туради (43- шакл).

Энди юқорида келтирилган 4- теореманинг исботига қайтамиз. G барча Тьюринг машиналари Гёдель номерлари тўпламининг бирор тўпламостиси бўлсин. Агар $m \in G$ бўлса, у ҳолда m нинг каноник ёйилмаси (туб сонлар даражалари кўпайтмаси) ни топиб, номери m бўлган Тьюринг машинаси программасини тиклаш мум-



43- шакл.

кин. Демак, берилган натурал сон Тьюринг машинасининг номери буладими ёки йуқми эканлигини аниқлайдиган алгоритм мавжуд экан (бу алгоритмни шартли равишда Ag каби белгилаймиз).

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ Тьюринг машинасида ҳисобланувчи функция булсин. У ҳолда **M** Тьюринг машинаси номери m га шу машина ҳисоблайдиган $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни мос қуйялик. Бунинг натижасида биз Тьюринг машиналарида ҳисобланувчи функцияларни номерлаб чиққан буламиз. Агар $m \in G$ булса, номери m булган n узгарувчили функцияни туғри ҳисоблайдиган машина мавжуд булиб. демак, ҳар бир номерга фақат битта машина мос келади. $G = \{m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots\}$ булса, у ҳолда шу номерли машиналар ҳисоблайдиган функцияларни

$$\varphi_{m_1}(x_1, \ldots, x_n), \varphi_{m_2}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{m_i}(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

каби ёзиш мумкин.

У ҳолда Тьюринг машиналарида ҳисобланувчи n узгарувчили функциялар учун

$$F(m, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), & \text{агар } m \in G \text{ булса}, \\ 0, & \text{агар } m \overline{\in} G \text{ булса} \end{cases}$$

универсал функция мавжуддир.

Теорема тулиқ исбот булиши учун ҳар бир $\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ ва демак, $F(m, x_1, \ldots, x_n)$ функция қисмий рекурсив эканлигини курсатиш кифоядир.

Бу эса ушбу теореманинг мазмунини ташкил этади.

5-теорема. *Тьюринг машинасида ҳисобланувчи ҳар бир функция қисмий рекурсив функциядир.*

Теорема исботига киришмасдан олдин юқорида қаралган $p_{ab}(u, v)$, $p(w)$, $\theta(w, z)$, $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, b, u, v)$ функциялар примитив рекурсив эканлигини курсатамиз.

$p_{ab}(u, v) = 2^u \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^v$ функция x^y, p_k ва xy п. р. функциялардан ҳосил қилинганлиги учун унинг п. р. эканлиги шубҳасиздир.

$p(w)$ функция п. р. эканлигини курсатишдан олдин ушбу теоремани куриб чиқамиз.

6 теорема. $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, k})$ *п. р. функция,* $p_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = \overline{1, k-1})$ *эса характеристик функцияси* $\chi_j(x_1, \ldots, x_n)$ п. р. *булган предикат булиб,*

ўзгарувчиларнинг барча қийматларида ҳеч қандай иккитаси бир пайтда рост бўлмасин. У ҳолда

$$
f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \chi_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ бўлса}, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \chi_2(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ » }, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f_{k-1}(x_1, \ldots, x_n), & \chi_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ » }, \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) & \text{бошқа ҳолларда} \ldots \end{cases} \quad \text{(C)}
$$

схема билан аниқланган функция ҳам п. р. *бўлади.*

Исботи.

$$
\begin{gathered}
f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot sg(\chi_1(x_1, \ldots, x_n)) + \\
+ f_2(x_1, \ldots, x_n) \cdot sg(\chi_2(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + \\
+ f_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) sg(\chi_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)) + f_k(x_1, \ldots, \\
x_n) \cdot \overline{sg}(\chi_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \ldots \cdot \chi_{k-1}(x_1, \ldots, x_n))
\end{gathered}
$$

тенглик $f(x_1, \ldots, x_n)$ п. р. функция эканини кўрсатади. (С) схема бўлакли схема, $f(x_1, \ldots, x_n)$ эса бўлакли схема ёрдамида берилган функция дейилади.

(А) схема $p(w)$ функция бўлакли схема ёрдамида берилганлигини кўрсатади; демак, $p(w)$ п. р. функциядир

(В) схема $\theta(w, z)$ функция п. р. функция эканлигини кўрсатади. $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, b, u, v)$ п. р. функция эканлигини кўрсатиш учун математик индукция усулидан фойдаланамиз.

$n = 1$ бўлса, $\tau_1(x, b, u, v) = 2^{u'} \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^v$ бўлиб, бунда u' — машина „кўриб“ турган белгининг чап томонидаги ёзувнинг номери ҳамда

$$
u' = \prod_{i=0}^{x-1} p_i \cdot \prod_{i=0}^{u} p_{x+1+i}^{\exp(i,\, u)}
$$

дир; агар $x = 0$ бўлса,

$$
u' = \prod_{i=0}^{u} p_{i+1}^{\exp(i;\, u)},
$$

$$
v = p_1^{\exp(0,\, v)} \cdot \ldots \cdot p_{v+1}^{\exp(v,\, v)} = \prod_{i=0}^{v} p_{i+1}^{\exp(i,\, v)}.
$$

u' ва v — п. р. бўлгани учун $\tau_1(x, b, u, v)$ ҳам п. р. функциядир.

Фараз қилайлик, $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, b, u, v)$ п. р. функция бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, b, u, v) = \tau_1(x_{n+1}, b, \exp(0, \tau_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1, b, u, v)), v)$$

тенглик τ_{n+1} ҳам п. р. функция эканини кўрсатади; бунда

$$\exp(0, \tau_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n+1, b, u, v)) = 2^u \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^v.$$

Шундай қилиб, $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, b, u, v)$ функция ҳар бир $n \geqslant 1$ учун п. р. функция экан.

m Тьюринг машинаси $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни ҳисобласин. Ҳисоблаш жараёнида бошланғич вазиятнинг номери $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 0, 0)$, охирги вазиятнинг номери $\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y, 0, u, v)$ бўлиб, бунда $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, яъни φ функциянинг $x_1, \ldots, x_n$ тизмадаги қийматидир. Машина бошланғич вазиятдан охирги вазиятга ўтиши учун шундай z сон мавжуд бўлиши керакки,

$$\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 0, 0), z) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y, 0, u, v) \quad (*)$$

бўлади. Бошқача айтганда, φ функция $x_1, \ldots, x_n$ тизмада аниқланган бўлса, шундай тўртлик $<z, y, u, v>$ топиладики, (*) бажарилади, ва аксинча, юқоридагидек тўртлик топилиб, (*) бажарилса, у ҳолда φ функция $x_1, \ldots, x_n$ тизмада аниқланган бўлади. Табиий, φ кўрсатилган тизмада аниқланмаган бўлса, у ҳолда ҳар қандай z учун $\theta(\tau_n, z)$ ҳеч қачон охирги вазият номерига тенг бўлмайди. φ функциянинг $x_1, \ldots, x_n$ тизмадаги қийматини ҳисоблаш учун машина z_0 қадам сарфлаган бўлсин. У ҳолда $\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 0, 0), z_0) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y, 0, u, v)$ бўлиб, табиий, θ функциянинг қиймати ихтиёрий $z > z_0$ учун ҳам $z = z_0$ нуқтадаги қиймати билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, (*) ни қаноатлантирувчи $<z, y, u, v>$ тўртлик мавжуд бўлса, у ҳолда (*) ни $z' \geqslant z$ бўлган ихтиёрий $<z', y, u, v>$ ҳам қаноатлантиради.

$z < z_0$ бўлган ихтиёрий z ва ихтиёрий y, u, v лар учун (*) нинг чап ва ўнг томонлари аниқланган, чунки (*) нинг ҳар иккала томонида п. р. функциялардир. Шунинг учун (* кўрсатилган тўртликларда аниқланган предикат деб қараш мумкин. У ҳолда ҳар бир

$\langle z, y, u, v\rangle$ тўртлик учун шундай ягона $t = 2^z \cdot 3^y \times \times 5^u \cdot 7^v$ топиладики,

$$\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 0, 0), \exp(0, t)) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, \exp(1, t), 0, \exp(2, t), \exp(3, t))$$

бўлади. Мазкур предикат $n+1$ ўринли бўлиб, тенглик предикатига п. р функцияларни қўйиш натижасида ҳосил бўлгани учун ўзи ҳам п. р. предикатдир. $\alpha(x_1, \ldots, x_n, t)$ қаралаётган предикатнинг характеристик функцияси бўлсин. Бу функция п. р. эканлиги равшандир. Демак, φ функция $x_1, \ldots, x_n$ тизмада аниқланган бўлиши учун

$$\exp(1, t) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ ва } \alpha(x_1, \ldots, x_n, t) = 1$$

ларни қаноатлантирувчи t топилиши зарур ва етарлидир. У ҳолда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exp(1, \mu_t(\alpha(x_1, \ldots, x_n, t) = 0))$$

бўлиб, унинг қ. р. эканлиги шубҳасиздир.

Демак, Тьюринг машинасида ҳисобланувчи ҳар қандай функция қисмий рекурсивдир.

Теорема исботланди.

Таъриф. $\varphi(x)$ аниқланган нуқталарда $g(x) = \varphi(x)$ бўлса, $g(x)$ функция $\varphi(x)$ нинг *давоми* дейилади.

Қисмий рекурсив функцияларнинг давоми бўлган умумрекурсив функцияларнинг мавжуд бўлиши табиийдир, аммо бу ҳар қандай қисмий рекурсив функция учун бажарилиши шарт эмас.

7-теорема. *Умумрекурсив функциягача давом эттирилмайдиган қисмий рекурсив функция мавжуддир.*

Исботи. $F(m, x)$ барча бир аргументли қ. р. функциялар синфи учун универсал қ. р. функция бўлсин.

$G(x) = \overline{sg}(F(x, x))$ функцияни қарайлик. $G(x)$ изланган функция эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, аксинча, $g(x)$ умумрекурсив функция $G(x)$ нинг давоми бўлсин. 4-теоремага асосан шундай m_0 топиладики, ҳар бир x учун $F(m_0, x) = g(x)$ бўлади. Хусусан, $x = m_0$ учун

$$F(m_0, m_0) = g(m_0) \qquad (*)$$

га эга бўламиз. У ҳолда, гарчи $F(m, x)$ қ. р. бўлсада, $g(x)$ умумрекурсив функция бўлгани учун $F(m, x)$, ва демак, $G(x)$ функция $x=m_0$ нуқтада аниқлангандир, яъни

$$G(m_0)=\overline{sg}(F(m_0, m_0))=g(m_0). \qquad (**)$$

Бунда $G(m_0)=g(m_0)$ тенглик фаразга кўра $g(x)$ функция $G(x)$ нинг давоми эканлигидан ҳосил бўлади.

Аммо (*) ва (**) лар бир-бирига знд бўлган тенгликлардир. Бу эса қилинган фараз нотўғри эканини, яъни $G(x)$ умумрекурсив функциягача давом эттирилмайдиган қ. р. фуикция эканини кўрсатади.

8-теорема. *Рекурсив бўлмаган рекурсив санаб чиқилувчи тўплам мавжуддир.*

Исботи. Маълумки, ҳар қандай р. т. р. с. ч. т. дир. Рекурсив бўлмаган р. с. ч. т. мавжуд эканлигини шундай тўпламни қурган ҳолда кўрсатамиз. Бундан р. с. ч. т. синфи р. с. лар синфидан кенг эканлиги келиб чиқади.

$$\alpha(x)=\mu_t(x+t=1) \qquad (1)$$

функция қ. р. бўлиб, фақат $x=1$ нуқтада аниқланган, қолган натурал нуқталарда қийматга эга эмас (аниқланмаган). Юқорида фақат иккита қиймат (1 ва 0) қабул қилувчи $G(x)$ функция қурилган эди.

$$\alpha(G(x))=\mu_t(G(x)+t=1) \qquad (2)$$

функцияни қарайлик. $G(x)$ нинг аниқланиш соҳаси A бўлсин. У ҳолда

$A=B \cup C$ $(B \cap C=\varnothing)$ бўлиб, $B=\{x | x \in A \wedge G(x)=0\}$,

$C=\{x | x \in A \wedge G(x)=1\}$ дир. $x \in C$ бўлганда $G(x)=1$ ва демак, $\alpha(G(x))=0$ бўлгани учун C тўплам $\alpha(G(x))$ функциянинг аниқланиш соҳасидир. (B тўплам элементлари учун $\alpha(G(x))$ аниқланган эмас.)

C рекурсив бўлмаган р. с. ч. т. эканини кўрсатамиз. Аввало C қ. р. функциянииг аниқланиш соҳасидан иборат бўлгани учун, у р. с. ч. т дир.

Энди фараз қилайлик, C рекурсив тўплам бўлсин. У ҳолда C қандайдир $P(x)$ умумрекурсив предикатнинг ростлик соҳасидан иборат бўлади.

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & x \in C, \text{ яъни } P(x)=\text{рост бўлганда} \\ 0 & x \overline{\in} C, \text{ яъни } P(x)=\text{ёлғон бўлганда} \end{cases}$$

функция $P(x)$ предикатнинг характеристик функцияси бўлсин. $x \in C$ (ёки $P(x)$ ва $x \overline{\in} C$) ёки $P(x)$ умумрекурсив предикатлар бир пайтда рост бўла олмаслиги сабабли $\varphi(x)$ функция бўлакли схема ёрдамида берилган умумрекурсив функция сифатида $G(x)$ нинг давомидир, чунки $x \in C$ бўлса, $G(x) = 1$ ва $\varphi(x) = 1$, $x \overline{\in} C$ бўлса, $G(x) = 0$ ва $\varphi(x) = 0$. Демак, $G(x)$ умумрекурсив функциягача давом эттирилувчи қ. р. функция экан. Аммо, олдинги теоремада $G(x)$ умумрекурсив функциягача давом эттирилмайдиган функция эканлиги исботланган эди. Ҳосил бўлган зиддият C рекурсив бўлмаган тўплам эканини кўрсатади.

Теорема тўлиқ исботланди.

7-§. Алгоритмик ечилмайдиган проблемалар

A натурал сонларнинг бирор тўплами бўлса, „кириш проблемаси" („A тўпламнинг элементи бўлиш проблемаси") қуйидагича қўйилади; берилган натурал сон x бўйича у A тўпламга кирадими ёки йўқми эканини аниқлаб берадиган алгоритм мавжудми?

5-§ нинг бошида айтилганидек бу проблема рекурсив бўлган тўпламлар учун ижобий ҳал бўлади, яъни A рекурсив тўплам бўлса, у ҳолда берилган ихтиёрий x сон A га кириши ёки кирмаслигини аниқлаб берадиган алгоритм мавжуддир—шунинг учун рекурсив тўпламлар ечилувчи тўпламлар ҳам дейилади. Шундай қилиб, рекурсив тўпламлар „кириш проблемаси" алгоритмик ечилувчи тўпламлардир. Рекурсив санаб чиқилувчи тўпламлар (р. с. ч. т.) учун мазкур проблема алгоритмик ечилувчи эмас, яъни агар A р. с ч. т. бўлса, x натурал сон A га кириши ёки кирмаслигини аниқлаб берадиган алгоритм мавжуд эмас.

Маълумки, σ сигнатура моделлари K синфига кирувчи ҳар бир моделда рост бўлган барча формулалар тўплами $\mathrm{Th}(K)$ K синфининг элементар назарияси дейилади. $\mathrm{Th}(K)$ га кирган ҳар бир формула қандайдир **A** алфавитдаги сўз деб қаралиши мумкин. $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ алфавит белгиларини, масалан, 1, 2, $\ldots$, k сонлар билан номерласак, у ҳолда ихтиёрий (шу алфавитдаги) $\mathbf{a} = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$ сўзни $g(\mathbf{a}) = 2^{i_1} \cdot 3^{i_2} \cdot \ldots$ $\ldots P_{m-1}^{i_m}$ сон билан номерлаш мумкин. Табиий, бунда турли сўзлар турли номерга эга бўладилар ва агар бирор a сон қандайдир сўзнинг номери бўлса, у ҳолда a ни туб сонлар кўпайтмасига ажратиб ўша сўзни тиклаш мумкин.

Шундай қилиб, $\mathrm{Th}(K)$ элементар назарияга унга кирган формулалар номерларидан тузилган A тупламни мос қуйиш мумкин. Агар A р. (ёки р. с. ч.) туплам булса, у ҳолда $\mathrm{Th}(K)$ рекурсив (ёки р. с. ч.) туплам дейилади. Демак, бирор элементар назария алгоритмик ечилувчи ёки ечилувчи эмаслигини („кириш проблемаси“ га нисбатан) аниқлаш учун унга мос қуйилган номерлар туплами алгоритмик ечилувчи ёки ечилувчи эмас эканини аниқлаш кифоядир.

Ана шу усулга таянилган ҳолда купгина элементар назариялар учун алгоритмик масалалар ҳал қилинади Албатта, элементар (ва бошқа) назариялар учун турли алгоритмик масалалар қуйиш мумкин. Масалан, рекурсив изоморфизм проблемаси, сузларнинг эквивалентлиги проблемаси ва бошқалар шундай алгоритмик масалалар жумласидандир.

1936 йили А. Чёрч [29] предикатлар ҳисоби учун формулаларнинг умумқийматли булиши алгоритмик масаласи алгоритмик ечилмайдиган масала эканлигини курсатди.

Теорема (А. Чёрч). *Предикатлар ҳисобининг барча умумқийматли формулалари туплами T рекурсив эмас, яъни предикатлар ҳисобининг ихтиёрий A формуласи умумқийматли ёки умумқийматли эмаслигини аниқлаб берадиган алгоритм мавжуд эмас.*

Мазкур теореманинг исботланиши яқиндагина юзага келган алгоритмлар назариясининг улкан ютуғи эди.

Қуйида биз алгоритмик ечилувчи ва алгоритмик ечилмайдиган элементар назариялардан намуналар келтирамиз.

I. Барча ҳақиқий сонлар ҳалқаси элементар назарияси рекурсивдир (яъни алгоритмик ечилувчидир).

II. Барча комплекс сонлар ҳалқаси элементар назарияси рекурсивдир.

III. Барча бутун сонлар ҳалқаси элементар назарияси рекурсив эмас (яъни алгоритмик ечилмайдиган назария).

IV. Барча рационал сонлар ҳалқаси элементар назарияси рекурсив эмас (Ю. Робинсон)

V. Барча метаабель ва барча чекли метаабель группалар элементар назариялари рекурсив эмас (А. И. Мальцев [22]).

VI. Барча чекли симметрик группалар ва барча чекли содда (туб) группалар элементар назариялари рекурсив эмас (Ю. Л. Ершов [23]).

Энди биз муайян иккита алгоритмик проблемани кўриб чиқамиз.

1-теорема. *Тьюринг машиналарининг ихтиёрий берилган программаси бўйича бу машина тўлиқ аниқланган бир ўзгарувчили функцияни ҳисоблайдими ёки йўқми эканини кўрсатувчи алгоритм мавжуд эмас.*

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган Тьюринг машинасининг программаси бўйича мазкур машина тўлиқ аниқланган бир ўзгарувчили функцияни ҳисоблаши ва ҳисобламаслигини аниқлайдиган алгоритм мавжуд бўлсин. Шартли равишда бу алгоритмни Ag билан белгилайлик. A бир ўзгарувчини тўлиқ аниқланган функцияларни ҳисобловчи Тьюринг машиналарининг номери бўлсин. Ушбу функцияни олайлик:

$$\varphi(x) = \begin{cases} G(x), & x \in A \text{ бўлса}, \\ 0 & x \overline{\in} A \text{ бўлса}, \end{cases}$$

(7-теоремага қаранг). Бу функция тўлиқ аниқлангандир. $\varphi(x)$ алгоритмик ҳисобланувчи эканлигини кўрсатамиз. x натурал сон бўлсин. Дастлаб x Тьюринг машинасининг номери бўладими ёки йўқми эканини аниқлаймиз (x ни туб кўпайтувчиларга ажратиб, буни ҳамма вақт бажариш мумкин):

1° Агар x бирор машинанинг Гёдель номери бўлмаса, у ҳолда $\varphi(x)=0$ бўлади.

2°. Агар x машинанинг Гёдель номери бўлса, бу номер бўйича машинанинг программасини тиклаймиз. Сўнгра исботнинг бошида айтилган Ag алгоритм ёрдамида машина бир ўзгарувчили тўлиқ аниқланган функцияни ҳисоблайдими ёки йўқми эканини аниқлаймиз:

а) агар Ag алгоритм машина бир ўзгарувчили тўлиқ аниқланган функцияни аниқлайди деб жавоб берса, у ҳолда $x \in A$ ва демак, $\varphi(x)=G(x)$;

б) агар Ag алгоритм қарама-қарши жавобни берса, у ҳолда $x \overline{\in} A$, ва демак, $\varphi(x) = 0$.

Машина тасмасига x ни ёзайлик. Машина чекли қадамдан сўнг қандайдир натижа билан ишдан тўхтайди.

Маълумки Гёдель номери m бўлган ҳар бир Тьюринг машинаси қандайдир $\alpha_m(x)$ функцияни ҳисоблайди. Агар **M** $\varphi(x)$ ни ҳисоблайдиган машина бўлса, у ҳолда ҳар қандай x учун

$$\alpha_m(x) \equiv \varphi(x),$$

хусусан, $x=m$ учун

$$\alpha_m(m) = \varphi(m)$$

бўлади. $\alpha_m(x)$ умумрекурсив функция бўлгани учун 4-теоремага асосан $\alpha_m(x) = F(m, x)$, хусусан,

$$\alpha_m(m) = F(m, m),$$

яъни

$$\varphi(m) = F(m, m) \qquad (1)$$

бўлади. Аммо, иккинчи томондан,

$$\varphi(m) = G(m) = \overline{sg}(F(m, m)). \qquad (2)$$

(1) ва (2) лар бир-бирига зиддир. Ҳосил бўлган зиддият қилинган фараз нотўғри, теорема эса ўринли эканини кўрсатади.

Таъриф. G тўплам ва унда аниқланган ассоциатив „·" амалдан иборат $\langle G; \cdot \rangle$ система *ассоциатив система* ёки *ярим группа* дейилади.

$\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ бирор алфавит бўлсин. Одатдагидек, **A** алфавит ҳарфларининг ихтиёрий кетма-кетлигини **A** алфавит устидаги сўз деб атаймиз; бўш кетма-кетлик бўш сўз деб аталиб Λ каби белгиланади.

A алфавит устидаги барча сўзлар тўпламини $\sum(\mathbf{A})$ билан белгилайлик ҳамда мазкур тўпламда сўзлар „кўпайтмаси" тушунчасини киритайлик. Агар **a** ва **b** $\sum(\mathbf{A})$ дан олинган сўзлар бўлса, уларнинг „кўпайтмаси" $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ деб бу сўзларни кетма-кет ёзишдан ҳосил бўлган **ab** сўзга айтилади. Шундай қилиб, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \underset{df}{=} \mathbf{ab}$. Равшанки, сўзларни „кўпайтириш" $\sum(\mathbf{A})$ да ассоциатив амалдир, ва демак, $\sum(\mathbf{A})$ бу амалга нисбатан ассоциатив система ташкил қилади.

Агар **a** сўзни **abd** кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда **b** сўз **a** сўзнинг сўзостиси дейилади; бу ерда **c** ёки **d** лар бўш сўзлар бўлиши ҳам, бир сўз иккинчи сўзнинг таркибига бир ёки бир неча марта кириши ҳам мумкин.

Маълумки алгебраик система маълум аниқловчи муносабатлар ёрдамида берилиши мумкин. Масалан, Абель (коммутатив) группалари

$$(xy)z = x(yz),$$
$$xy = yx,$$
$$xe = ex = x,$$
$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

кўринишдаги аниқловчи муносабатлар ёрдамида берилади; бунда, бу аниқловчи муносабатларни ташкил этувчи тенгликларнинг ҳар иккала қисмларини шу группа алфавитдаги сўз деб қаралади.

G группа ва уни аниқловчи муносабатлар

$$w = w_1', \; w_2 = w_2', \; \ldots, \; w_k = w_k' \qquad (3)$$

берилган бўлсин; бунда w_i ва w_i' ($i = \overline{1, k}$) лар группа алфавитидаги сўзлардир. u сўз таркибида қатнашган $w_s(s = \overline{1, k})$ сўзостини w_s' сўз билан алмаштириш натижасида v сўзни ҳосил қилиш мумкин бўлса, у ҳолда v сўз u сўздан ўнг элементар шакл алмаштириш натижасида ҳосил қилинган дейилади. Худди шундай (w' ни w_s билан алмаштириш) чап элементар шакл алмаштириш тушунчасини киритиш мумкин.

Агар u сўздан v сўзга ўнг ёки чап элементар шакл алмаштиришларни чекли марта қўллаш натижасида ўтиш мумкин бўлса, у ҳолда u ва v лар эквивалент сўзлар дейилади ва $u \equiv v$ каби белгиланади. Шундай қилиб, $u \equiv v$ бўлса, сўзларнинг шундай $q_1 \to q_2 \to \ldots \to q_m$ занжири мавжудки, бунда q_1 сўз u дан, q_m эса v сўздан иборат бўлиб, ҳар бир $q_i \to q_{i+1}$ ($i = \overline{1, m-1}$) ифода ягона ўнг ёки чап элементар шакл алмаштиришдан иборатдир.

1914 йили норвегиялик Туэ қуйидаги масалани қуйди:

(3) аниқловчи муносабатлар билан берилган G группанинг ихтиёрий иккита u ва v сўзи эквивалентми ёки йўқми эканлигини аниқловчи алгоритм мавжудми?

Бу масала фақат 50-йилларнинг бошларида буюк рус математиги П. С. Новиков томонидан ечилди— натижада ушбу масала, яъни группаларда сўзлар эквивалентлиги масаласи алгоритмик ечилмайдиган масала эканлиги намоён бўлди—бу алгоритмлар назариясининг буюк ютуқларидан бири эди.

Яна ассоциатив системаларга қайтамиз.

$\sum(A)$—ассоциатив система ҳамда уни аниқловчи

$$A_1 \sim B_1, \quad A_2 \sim B_2, \; \ldots, \; A_k \sim B_k$$

муносабатлар бўлсин; бунда „$\sim$“ махсус белги бўлиб, у „формал тенглик“ деб аталади. $\sum(\mathbf{A})$ ассоциатив системадаги бирор A сўз таркибида $A_s(s=\overline{1,k})$ сўзости қатнашган бўлса, уни B_s сўз билан алмаштириш (ўнг элементар шакл алмаштириш), B сўз таркибида B_s сўзости қатнашган бўлса, уни A_s билан алмаштириш (чап элементар шакл алмаштириш) мумкин. Ассоциатив системада сўзлар эквивалентлиги тушунчаси юқоридагидек киритилади.

Ассоциатив системалар учун ушбу алоритмик проблемаларни қарайлик:

I. Берилган ассоциатив системанинг ихтиёрий иккита сўзи эквивалентми ёки йўқми эканлигини аниқловчи алгоритм мавжудми?

II. Ихтиёрий ассоциатив системадаги иккита ихтиёрий сўз эквивалентми ёки йўқми эканлигини аниқловчи алгоритм мавжудми?

I алгоритмик проблема муайян ассоциатив система учун қўйилган бўлиб, табиий, бу проблеманинг ечилмаслигидан II проблеманинг ечилмаслиги келиб чиқади.

Қуйида биз сўзлар эквивалентлиги проблемаси ечилмайдиган муайян ассоциатив система қурамиз.

Рекурсив бўлмаган р. с. ч. т. мавжудлиги ҳақидаги теореманинг исботида $\alpha(G(x))$ қ. р. функциядан фойдаланган эдик. Бу функция 1 қиймат қабул қилган тўплам C бўлиб, у рекурсив бўлмаган р. с. ч. т. эканлиги ўша теоремада кўрсатилган эди.

Мазкур функцияни ҳисобловчи бир ҳарфли Тьюринг машинаси мавжуд бўлиб, бу машина тасмасига x натурал сон (тўғрироғи, унинг $S=\{|\}$ алфавитдаги коди) ёзилса, $\underset{q_1}{s_0||\ldots||s_0}$ бошланғич вазиятдан иш бошлаб, $\alpha(G(x))$ функция x нуқтада аниқланган бўлса, чекли қадамдан сўнг ушбу охирги вазиятда ишни тугатади.

Бошқача айтганда, $x\in G$ бўлиши учун $\mathbf{M}$ машина юқорида келтирилган бошлангич вазиятни юқорида келтирилган охирги вазиятга ўтказиш зарур ва етарлидир.

C норекурсив тўплам бўлгани учун бир ўринли „$x\in C$“ „кириш“ предикати, табиий, умумрекурсив предикат эмас. Демак, ихтиёрий x натурал сон C тўпламга кирадими ёки йўқми эканлигини аниқловчи алгоритм мавжуд эмас. Бу эса ўз навбатида ихтиёрий x натурал сон учун машина $\underset{q_1}{s_0||\ldots||s_0}$ бошланғич вазиятни $\underset{q_0}{s_0||\ldots|s_0|s_0}$ охирги вазиятга ўтказадими ёки йўқми эканини аниқлайдиган алгоритм мавжуд эмас эканлигини кўрсатади. Бу масала баъзан „машинанинг тўхташи проблемаси“ ҳам дейилади.

Бизнинг мақсадимиз, бошланғич вазиятни охирги вазиятга ўтказмайдиган, яъни бошланғич вазиятдан иш бошлаб ҳеч қачон тўхтамайдиган машина қуришдир.

Бунинг учун **M** машина ички ва ташқи алфавитлари ҳамда унинг программаси билан боғлиқ бўлган ассоциатив система қурамиз. Машинанинг ташқи белгилари s_0 ва $|$, ички ҳолатлари $q_0, q_1, \ldots, q_m$ бўлса, яна битта янги h белги киритиб, $\mathbf{A}=\{s_0, |, q_0, q_1, \ldots, q_m, h\}$ алфавитни ҳосил қиламиз. $\sum(\mathbf{A})$ ассоциатив системанинг аниқловчи муносабатларини машина программасидаги командаларга қараб танлаймиз.

Маълумки, командалар уч турда бўлади:

$$\text{I. } s_i q_\alpha \to s_j H q_\beta; \quad \text{II. } s_i q_\alpha \to s_j Л q_\beta; \quad \text{III. } s_i q_\alpha \to s_j П q_\beta,$$

бунда масалан, s_i s_0 ёки $|$ ни билдиради. Ҳар бир командага унинг турига қараб бир ёки бир неча аниқловчи муносабатларни мос қўямиз.

Аввало „Пост сўзи“ тушунчасини киритайлик

Машинанинг ишлаш жараёнида ҳосил бўладиган $a \underset{q_\alpha}{s_i} b$ вазиятга $\sum(\mathbf{A})$ даги $has_iq_\alpha bh$ сўзни мос қўямиз: бунда a ва b лар **A** алфавит устидаги бирор сўзлар бўлиб, h мос қўйилган сўзнинг „четлари“ дир $hasq_\alpha bh$ пост сўзи дейилиб, ҳар қандай пост сўзи $\sum(\mathbf{A})$ ассоциатив системанинг сўзи эканлиги, аммо $\sum(\mathbf{A})$ нинг сўзи пост сўзи бўлмаслиги мумкинлиги равшандир. Пост сўзларининг характерли томони шундан иборатки, h ҳарфи пост сўзида фақат иккита жойда, q_α эса фақат бир жойда учрайди.

I тур командаларига $s_iq_\alpha \sim s_jq_\beta$ аниқловчи муносабатни, яъни

$$s_0q_\alpha \sim s_0q_\beta, \quad s_0q_\alpha \sim |q_\beta, \quad |q_\alpha \sim s_0q_\beta, \quad |q_\alpha \sim |q_\beta$$

аниқловчи муносабатларни мос қўямиз.

II тур командалар икки хил гуруҳга ажратилади:

$$\text{а) } s_iq_\alpha \quad Лq_\beta; \qquad \text{б) } s_iq \to s_0Лq_\beta.$$

Биринчи тур командаларга ушбу аниқловчи муносабат мос қўйилса:

$$s_0 | q_\alpha \sim s_0 q_\beta |,$$
$$|| q_\alpha \sim | q_\beta |,$$
$$h | q_\alpha \sim h q_\beta |,$$

иккинчи тур командаларга қуйидаги 9 та аниқловчи муносабат мос қўйилади:

$$s_r s_l q_\alpha s_t \sim s_r q_\beta s_0 s_t, \quad (r,\ t = 0{,}1),$$
$$h s_l q_\alpha s_t \sim h s_0 q_\beta s_0 s_t, \quad (t = 0{,}1),$$
$$s_r s_l q_\alpha h \sim s_r q_\beta h, \quad (r = 0{,}1),$$
$$h s_l q_\alpha h \sim h s_0 q_\beta h;$$

бу ерда s_r, s_l, s_t лар s_0 ёки | дан иборат ($s_1 = |$). Шунга ўхшаш II тур командаларга ҳам жами 12 та аниқловчи муносабатни мос қўйиш мумкин.

Шундай қилиб, $\sum(A)$ ассоциатив системанинг барча (25 та) аниқловчи муносабатлари ҳосил қилинади. Табиийки, σ_{k+1} вазият σ_k вазиятдан ҳосил қилинган бўлса, A_{k+1} сўз A_k сўздан юқорида келтирилган аниқловчи муносабатлар ёрдамида ҳосил қилинади.

2-теорема. $\sum(A)$ *ассоциатив системада* $has_l q_\alpha q h$ *ва* $hcs_j q_0 d h$ *пост сўзлари эквивалент бўлиши учун* **M** *Тьюринг машинаси* $a\underset{q_\alpha}{s_l}b$ *вазиятни чекли қадамдан сўнг* $c\underset{q_0}{s_j}d$ *вазият билан алмаштириши зарур ва етарлидир.*

3-теорема. $\sum(A)$ *ассоциатив системада ихтиёрий* u *ва* v *сўзлар эквивалент ёки эквивалент эмаслигини кўрсатувчи алгоритм мавжуд эмас.*

Машқлар

1. Қуйидаги арифметик функциялар примитив рекурсив функциялар эканини кўрсатинг:

а) $\varphi(x) = 2x$; б) $\varphi(x) = 2x+3$; в) $\varphi(x) = 2^x$;

г) $\varphi(x) = 3$; д) $\varphi(x) = x^2 + 3x + 2$; е) $\varphi(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$ — „x дан унинг чап томонидаги энг яқин тўлиқ квадратгача бўлган масофа“, бунда

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ агар } x \geq y \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x < y \text{ бўлса.} \end{cases}$$

2. Иккилик системада ушбу функцияларнинг қийматларини ҳисобловчи мос Тьюринг машиналарини қуринг:

а) $\varphi(x) = x + 2$; б) $\varphi(x) = x \dot{-} 1$;

в) $\varphi(x) \equiv 3$; г) $\varphi(x) \equiv a$, $a \in N$,

3. Натурал сон $\{|\}$ алфавитда кодланган бўлса, унинг ўнли системадаги шаклини топувчи Тьюринг машинасини қуринг.

4. Натурал сонлар ўнли системада кодланганда 2-машқда келтирилган функцияларнинг қийматларини ҳисобловчи мос Тьюринг машиналарини қуринг.

5. Ташқи алфавити $\{|\}$ бўлган Тьюринг машиналарида қуйидаги функцияларни реализация қилинг:

а) $\varphi(x) = x \dot{-} 1$; б) $\tau(x, y) = y$; в) $\psi(x, y) = \max(x, y)$; г) $\gamma(x, y) = \min(x, y)$.

АДАБИЕТ

1. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.

2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., «Наука», 1984.

3. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика М., «Наука», 1979.

4. Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ. 1957.

5. Клини С. К. Математическая логика М., ИЛ, 1973.

6. Чёрч А. Введение в математическую логику. М., ИЛ, 1960.

7. Столл Р. Множество. Логика. Аксиоматические теории. М., «Просвещение», 1968.

8. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М., ИЛ, 1947.

9. Калужнин Л. А. Что такое математическая логика? М., «Наука», 1964.

10. Эдельман С. Л. Математическая логика М., «Высшая школа», 1975.

11. Мощенский В. А. Лекции по математической логике, Изд-во БГУ, Минск, 1973.

12. Пензов Ю. Е. Элементы математической логики и теории множеств. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1968.

13. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., «Наука», 1975.

14. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М., «Наука», 1972.

15. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1965.

16. Трахтенборг Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. М., «Физматгиз», М., 1960.

17. Калбертсон Т. Математика и логика цифровых устройств. М., «Просвещение», 1965.

18. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств, М., 1961.

19. Шестаков В. И. Математическая логика и автоматика. «Математика в школе», 1958, № 6, 1959, № 1.

20. Яблонский С. В. Основы алгебры логики и теории контактных схем. Тр. ин-та математики им. В. А. Стеклова, М., 1958, т., 51.

21. Феферман Р. Числовые системы. М., «Наука», 1971.

22. Мальцев А. И. Эффективная неотделимость множеств тождественно истинных и конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий. Докл. АН, 139, № 4, 1961.

23. Ершов Ю. Л. Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп. Докл. АН, 158, № 4, 1962.

24. Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей, М., «Мир», 1977.

25. Справочная книга по математической логике.

Часть I: Теория моделей, М., «Наука», 1982.

Часть III: Теория рекурсии, М., «Наука», 1982.

Часть IV: Теория доказательств и конструктивная математика, М. «Наука», 1983.

26. Ёқубов Т. Математик логика элементлари, Т., «Ўқитувчи», 1983.

27. Шенфильд Дж. Математическая логика, М., «Наука», 1975.

28. Чёрч А. An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. 58, № 2, 1936.

29. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathemetica und Verwandter Systeme, I, Monatsh. für Math. und Physik, 38, 1931.

30. Post E. L. Finite combinatory processes — formulation. J. Symbolic Logic, 1, № 3, 1936.

31. Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscteidungs-problem, Proc. London Math. Soc, 2, t. 42, 1936.

МУНДАРИЖА

V боб. АЛГОРИТМЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

ЁҚУБОВ ТОЛИБ, КАЛЛИБЕҚОВ КАЛЛИБЕҚОВ С.

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Педагогика институтлари ва университетлари
талабалари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Муҳаррир **Н. Ғоипов**
Расмлар муҳаррири **Н. Сучкова**
Тек. муҳаррир Т. Грешникова
Мусаҳҳиҳ **Томрова З., Потапова Е.**

ИБ № 5410

Теришга берилди 10.05.94. Босишга рухсат этилди 1.08.95. Формати 84×108 1/32. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 14,28. Шартли кр.-отт. 14,49. Нашр. л. 12,58. 1000 нусхада босилди. Буюртма № 1510.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9-322-90.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмхонаси. Самарканд ш., У. Турсунов кўчаси, 82. 1996.

Ë 93

Ëқубов Т., Каллибеков С.

Математик мантиқ элементлари: Педагогика институтлари талабалари учун ўқув қўлланма —Қайта ишланган 2-нашри.—Т.: Ўқитувчи 1996—272 б.

I. Автордош.

22.1я73

«ЎҚИТУВЧИ»