В. Т. ПЕТРОВА

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

1

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС

В. Т. Петрова

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

В. Т. Петрова

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Часть 1

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

Москва

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

1999

ББК 22.151.5
П29

Петрова В. Т.

П29 Лекции по алгебре и геометрии: Учебник для вузов: В 2 ч.— М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999.— Ч. 1.— 312 с. ISBN 5-691-00077-2.
ISBN 5-691-00238-4 (I).

В первой части учебника рассматриваются основные понятия линейной алгебры и их геометрические интерпретации, входящие в программы учебных курсов педагогических и технических высших учебных заведений (первый семестр), рекомендованные Министерством общего и профессионального образования России.

Изложение учебного материала ведется на трех уровнях по глубине и сложности, позволяющих каждому студенту выбрать для начала его обучения любой из них в зависимости от его подготовленности и желания. Первый уровень обеспечивает знание основ, необходимых для дальнейшего усвоения математических курсов. Построение и стиль написания учебника стимулируют активное усвоение студентами содержащегося в нем учебного материала и дают возможность перехода на более высокий уровень его усвоения. Книга содержит исторические сведения по излагаемым в ней вопросам.

Автор планирует подготовку аналогичных учебников для обеспечения остальных вопросов классических программ высшей алгебры и высшей геометрии.

ББК 22.151.5

ISBN 5-691-00077-2
ISBN 5-691-00238-4 (I)

— Но мир! Но жизнь! Ведь человек
дорос, чтоб знать ответ на все
свои загадки.
— Что значит знать?
Вот, друг мой, в чем вопрос.

В. Гете

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из методов овладения все возрастающим потоком полезной, а часто даже и необходимой, информации является интенсификация процесса обучения, позволяющая не увеличивать срок обучения. Однако, решить эту задачу, не превысив при этом естественных возможностей обучающихся по качественному усвоению изучаемого предмета, совсем не просто. Предлагаемый учебник представляет собой удачную попытку решения этой задачи при изучении линейной алгебры и геометрии в объеме программ, принятых в педагогических университетах и ряде других высших учебных заведений. Он написан на основе опыта его автора, работавшего преподавателем в Рязанском педагогическом университете и Московском физико-техническом институте.

Манера подачи материала в учебнике несколько необычная и своеобразная. Автор не бесстрастно пересказывает определения вводимых понятий, доказывает сформулированные леммы и теоремы, а с помощью оригинальных методических приемов стремится помочь читателю активно, а не формально овладеть изучаемым предметом и достигает в этом успеха.

Это удается автору осуществить прежде всего за счет многоуровневого изложения материала в учебнике. В зависимости от степени своей подготовки читатель может придерживаться при изучении предмета одного из трех уровней. Первый уровень содержит максимально элементарное изложение минимально необходимых для дальнейшего обучения сведений. Следующий уровень изложения обеспечивает твердое знание предмета и предназначается для читателя, обладающего уже достаточной математической культурой. Наконец, третий уровень на основе более углубленного изучения предмета приводит к свободному владению изучаемыми понятиями и к умению применять их для решения задач. Изучив предмет на одном из первых двух уровней, чигателю будет легко и интересно вернуться к нему на более высоком уровне. Такое построение учебника и стиль изложения дает возможность расширить круг учебных заведений, в которых он может быть использован.

Важно отметить, что при изучении предмета студентом на любом уровне автор не дает возможности ему делать это пассивно: умело ставящиеся в учебнике вопросы заставляют студента вникать в смысл вводимых понятий, осознавать цель, для которой они вводятся, оценивать возможность и границы их использования и в заключение активно участвовать вместе с автором книги в процессе доказательств сформулированных утверждений. Содержащиеся в таком методе обучения элементы игры также интенсифицируют процесс обучения, делают его увлекательным, повышают любознательность студента, усиливают его интерес к предмету.

Наличие в учебнике большого числа контрольных вопросов и задач позволяет самому студенту, или с помощью преподавателя, правильно оценивать приобретенные им знания, дисциплинирует его мышление, содействует повышению его математической культуры.

Успешное осуществление новых методических идей автора стало возможным благодаря хорошо продуманному порядку подачи материала в учебнике, обстоятельному, четкому, строгому и вместе с тем простому его изложению, тщательному продумыванию его деталей. В результате учебник доступен широкому кругу студентов, может быть с успехом использован ими для самостоятельного изучения предмета.

Л. Д. Кудрявцев
член-корреспондент
Российской Академии Наук

Салтыковка
3 июля 1994 г.

Моим родителям,
моим Учителям

ОТ АВТОРА

Идея создания синтетического курса высшей алгебры и высшей геометрии возникала не раз при изменениях педвузовских учебных программ. Административные попытки их объединения имеют некоторую историческую и методическую мотивацию, так на механико-математическом факультете МГУ, математических и физических факультетах некоторых других вузов традиционно читаются курсы линейной алгебры, которая объединяет начала этих ветвей математики. В технических и инженерных вузах вопросы аналитической геометрии и линейной алгебры обычно включаются в программы курсов высшей математики. Однако, очевидно, что несмотря на самостоятельность и специфику этих разделов математики, связь их много глубже и интереснее, чем тематика собственно линейной алгебры. Чтобы подтвердить это, достаточно упомянуть роль трех знаменитых геометрических задач древности (о квадратуре круга, удвоении куба и трисекции угла) в истории создания теории разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, приложения теории групп в геометрии, а также Эрлангенскую программу Ф. Клейна, которая определила на много лет направления геометрических исследований. (Согласно этой программе всякая геометрия есть геометрия инвариантов некоторой алгебраической группы).

Поэтому курс, который содержал бы изложение общих основ высшей алгебры и высшей геометрии, мог бы быть интересен сам по себе, предоставляя возможность взглянуть на одни и те же проблемы с позиций этих уже обособившихся математических дисциплин. Такими идеями проникнута книга Ж. Дьедоне «Линейная алгебра и элементарная геометрия», переведенная и изданная у нас в 1972 году. Хотя с этого времени прошло более двадцати лет, ее идеи не устарели, но круг затронутых в ней вопросов ограничен ее названием, к тому же слишком формализованный язык этой книги затрудняет ее чтение малоподготовленному читателю.

В 1987 году в связи с введением во многих педвузах подготовки учителей по новым специальностям было предложено объединить учебные курсы алгебры и геометрии, это и сделало актуальным создание учебника по такому курсу. При этом синтезе стало просто необходимым предельно интенсифицировать обучение, что, в свою очередь, поставило проблемы методического характера. Одно из их решений предлагается в настоящем учебнике. Его идеи, как представляется автору, возможно, могут оказаться интересными и другим специальностям и дисциплинам, где естественны общая логика построения курса и аксиоматический метод.

Настоящая книга задумывалась первоначально как учебник для педагогических вузов и физико-математических специальностей университетов. Однако в процессе работы над ней сама логика построения учебного материала, многоуровневая система его изложения и программа привели к тому, что, как надеется автор, учебник может быть использован и студентами технических и инженерных вузов различных специализаций, а также служить полезным пособием для самообразования студенту, который увлечётся математикой.

Эта книга представляет собой первую часть учебника по курсу высшей алгебры и высшей геометрии, который должен обеспечивать семестр обучения (72 часа) и давать систематическое изложение его программы на современном уровне. Основное отличие этого учебника прежде всего в том, что он базируется на проблемно-аксиоматическом методе и некоторых идеях так называемых тетрадей с печатной основой. Это позволяет в корне изменить идеологию обучения: в центре его ставится проблема, новая информация служит скорее средством познания и обучения, а не самоцелью этого процесса, что заставляет читателя (студента) активно работать с изучаемым материалом и вместе с тем позволяет изменить технологию обучения по существу: не проработав текст, не заполнив его «пробелы», он просто не сможет двинуться дальше. Система работы с учебным материалом, который предлагает и даже навязывает читателю эта книга, призвана существенно активизировать его познавательную деятельность, сделать его знания предмета более основательными и прочными. Целый ряд приемов, которые были придуманы, продуманы и использованы автором (выделение основной части текста, несколько уровней сложности задач, системы вопросов, ссылок и адресаций, расположение материала в книге, даже сама его графика и оформление), направлен на интенсификацию усвоения и освоения учащимся учебного материала. Это, в частности, дает возможность студенту быстрее приобретать знания и навыки их применения в стандартных и нестандартных ситуациях. Книга, по мнению автора, должна учить и в какой-то мере научить читателя самостоятельному отбору информации, необходимой для решения поставленной ему задачи.

Читателю на необходимость продумать и дать самостоятельно ответ на какой-либо вопрос или обосновать заключение в тексте учебника, как правило, указывают специальные знаки: $\stackrel{?}{=}$, ? или ♦. Последний из них означает, что требуется не просто ссылка на какое-либо утверждение курса, но более продуманный и развернутый ответ. Обозначения, например, типа $\stackrel{\text{л.30.?}}{=}$ или $\stackrel{\text{л.30.?}}{\Longrightarrow}$ подсказывают, что соответствующим логическим обоснованием равенства или следствия является одна из лемм § 30, которую читателю следует отыскать (конечно, если он ее не помнит). Когда требуется подтвердить или опровергнуть то или иное отношение (равенство, включение, сравнение и т. п.), соответствующий символ сопровождается тоже знаком вопроса, например: $\stackrel{?}{=}$, $\stackrel{?}{\omega}$ и т. д. Знак $\overline{\text{?не?}}$ указывает на необходимость сделать альтернативный выбор. Старания автора были направлены к тому, чтобы выделяя таким образом вполне посильные читателю моменты доказательств и рассуждений, привлечь его внимание к важным фактам курса, пробудить интерес к предмету. Ведь еще А. Франс писал: «Чтобы переваривать знания, надо поглощать их с аппетитом». Можно рекомендовать студенту не вести конспект в обычном «вузовском» смысле этого слова, но в отдельной рабочей тетради систематически записывать ответы на такие вопросы. Такая самостоятельная и тщательная проработка учебного материала, к которой, можно сказать, вынуждает сама «геометрия текста» учебника, должна привести студента к более глубокому его пониманию. Для сокращения записей используются основные логические символы: $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$ и т. д., объяснения этих обозначений даются при первом появлении их в тексте. Окончание доказательства обычно обозначается знаком ■, однако, в тех случаях, когда по каким-либо соображениям доказательство того или иного факта приводится не полностью или указывается только его идея или схема, на окончание рассуждений указывает знак □. Внимательный читатель может заметить и систему контроля и отслеживания возможных ошибок при недостаточно аккуратной работе студента с учебным материалом.

Для облегчения работы в основной теоретической части каждой лекции выделен (вертикальной линией на полях) информационный минимум, который при использовании настоящей книги в качестве аудиторного учебного материала может быть, как правило, освоен за лекционное время при любой подготовленности студенческой аудитории, он является основой для самостоятельной работы студента и базой для следующей темы. Так как даже при дедуктивном изложении учебного курса не только невозможно, но и нецелесообразно приводить доказательство всех его фактов, то в такой «скелет лекции» выделены определения, примеры, утверждения и доказательства, важные в архитектуре и логике курса. Им во многих случаях предшествуют задания эвристического характера, которые позволяют читателю выдвигать и обдумывать различные гипотезы и варианты доказательств даже глубоких фактов курса. Если это происходит на лекции, то построение курса и совместные обсуждения проблем в аудитории вполне естественно способствуют развитию мышления студентов, а для будущих учителей еще и постановке правильной профессиональной речи.

Задачи включены непосредственно в текст каждой лекции и имеют преимущественно теоретический характер, в них вынесены доказательства (или фрагменты доказательств) многих, если не большинства утверждений курса. Выполняя их, читатель становится как бы соавтором учебника, а используя его в учебной работе, преподаватель будет иметь возможность превращать и практические занятия в обсуждение содержательных проблем, отказавшись от натаскивания на тривиальностях. Задачи имеют три уровня сложности: распознавания или репродуктивный, навыковый или продуктивный и последний — творческий, посильный из которых каждый студент выбирает себе сам. Это позволяет индивидуализировать процесс освоения учебного материала и по существу дает учебное пособие, написанное как бы на трех уровнях глубины и сложности, причем в отличие от многих учебников эти уровни не изолированы один от другого и позволяют читателю (и даже вынуждают его!) пробовать свои силы на более приемлемом для него. Причем, «расстояния» между уровнями сложности нарастают постепенно с приобретением читателем опыта работы и освоением учебного материала. В учебнике использованы и ротационные идеи: чтобы выполнить задачи и задания, читателю приходится обращаться к предыдущему тексту не раз, если он не был достаточно внимателен при первом знакомстве с лекцией.

Много основных и важных понятий курса вводятся в его начальных разделах (например, такие как: матрицы, свободный вектор, преобразования, подстановки, классы вычетов, пучок прямых и пучок плоскостей — в первых трех лекциях «Множества», «Бинарные отношения» и «Отображения», а понятие комплексного числа вводится в лекции 13, в то время как их основательному изучению посвящается несколько лекций в других семестрах), что позволяет изучать некоторые характеристики этих и других математических объектов и структур задолго до того, как сами они станут основным предметом глубокого изучения и исследования.

Все лекции делятся на параграфы, которые имеют сквозную нумерацию, все теоремы, утверждения, леммы, основные формулы, примеры и задания нумеруются в пределах параграфа, например, ссылка на теорему 15.2 означает теорему 2 параграфа 15. Если на какую-либо формулу ссылка делается в пределах только одного параграфа, то ее нумерация может быть буквенной или символьной, например: (27.a) или (15.*), если же формула важна для других разделов курса и потребует позднейших ссылок, ее нумерация числовая, например, (47.1) и т. п. Задачи учебника имеют тройную нумерацию, в которой последнее число (1, 2 или 3) указывает на номер ее уровня, так упоминание: «задачи 5.2.1» означает, что речь идет о задаче в § 5, второй в этом параграфе для первого уровня сложности освоения учебного материала. Номер уровня более сложных задач (второй и третий) выделен цветом. Звездочкой (*) отмечены более сложные темы (параграфы), которые могут быть опущены или изучены в информационном, обзорном порядке без нарушения общей логики курса. Знаком (°) отмечены темы, которые вполне могут быть освоены учащимся самостоятельно и иногда рекомендуются как подготовительные к лекции (в случае использования настоящего учебника в качестве аудиторного учебного материала). Так как книга планируется в первую очередь именно для такой работы, то штрихом (′) отмечены темы-параграфы, которые, как показала практика, удобнее обсуждать на практических занятиях. Информация об этих обозначениях предваряет те лекции, к которым автор счел необходимым дать свои рекомендации. Впрочем, идеология и структура текста учебника оставляют его читателю, лектору или студенту достаточную свободу в выборе доказательств и апробировании своих идей, словом, в соавторстве по созданию своего индивидуального учебника.

Укажем еще, что каждой лекции помимо рекомендаций предшествует перечисление ее основных понятий и сведений из предыдущих разделов курса, необходимых для ее понимания. Приводится также схема самой лекции (логическая связь ее тем-параграфов) и ее взаимосвязи с другими лекциями пособия. Это представляется полезным, поскольку дает читателю представление об архитектуре курса в целом и помогает в нем ориентироваться. В конце каждой лекции приводится список литературы по ее темам, основной и дополнительной, с постраничным указанием ссылок к каждому ее параграфу. Дополнительная литература, как правило, предлагает любознательному читателю другую точку зрения на исследуемый предмет, манеру изложения или принципиально иной подход к вопросу, а зачастую и более глубокие сведения и проблемы, чем предполагает учебный курс.

Еще одна особенность настоящего учебника в том, что автор счел полезным к каждой лекции дать историческую справку, где кратко сообщается история изучаемых понятий, обсуждается их место и значимость в науке. Это кажется важным и своевременным, поскольку дает читателю представление о математике, как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали математическим открытиям. Автор умышленно не приводт список литературы, из которой взят материал «Исторических справок», ибо он очень велик. Пожалуй, их составление — один из самых трудных этапов в работе над книгой, так как хотелось сообщить читателю, начинающему серьезную работу в математике, не только достоверную информацию, но и передать ту романтику, а порой и драматизм, которые сопутствуют математическим поискам и открытиям. Впрочем, по этому поводу хочется повторить слова Феликса Клейна, что в математике «...не может быть окончательного завершения, а вместе с тем и окончательно установленного первого начала...».

Каждой лекции предшествует рисунок автора, который чем-то отражает ее содержание или настроение. Внимательный и любознательный читатель, возможно, заметит отдельные мотивы Дали, Эшера, Чюрлениса, Босха или иных художников, но, как писал М. К. Эшер, «Все мои рисунки — это игры. Серьезные математические игры».

* *
*

В заключение автор хочет поблагодарить руководителей научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России (ранее — СССР) и за рубежом» профессора О. В. Мантурова (МПУ) и профессора Л. В. Сабинина (РУДН), поддержавших идеи настоящего учебника. Автор искренне признателен всем сотрудникам отдела теории функций Математического института им. В. А. Стеклова РАН за их теплое, благожелательное отношение и помощь в получении доступа к современным техническим средствам в последние годы работы над книгой, что позволило своевременно отредактировать и подготовить ее рукопись к печати. Чувство глубокой благодарности автор выражает члену-корреспонденту РАН, профессору Л. Д. Кудрявцеву, чье внимательное чтение рукописи и добрые советы существенно помогли в работе над этой книгой.

Работа над книгой была поддержана грантом Государственной научной программы «Развитие образования в России».

Автор

СЕМЕСТР I

Часть I

Часть II

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц заученных и не понятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно.

Д. Юнг

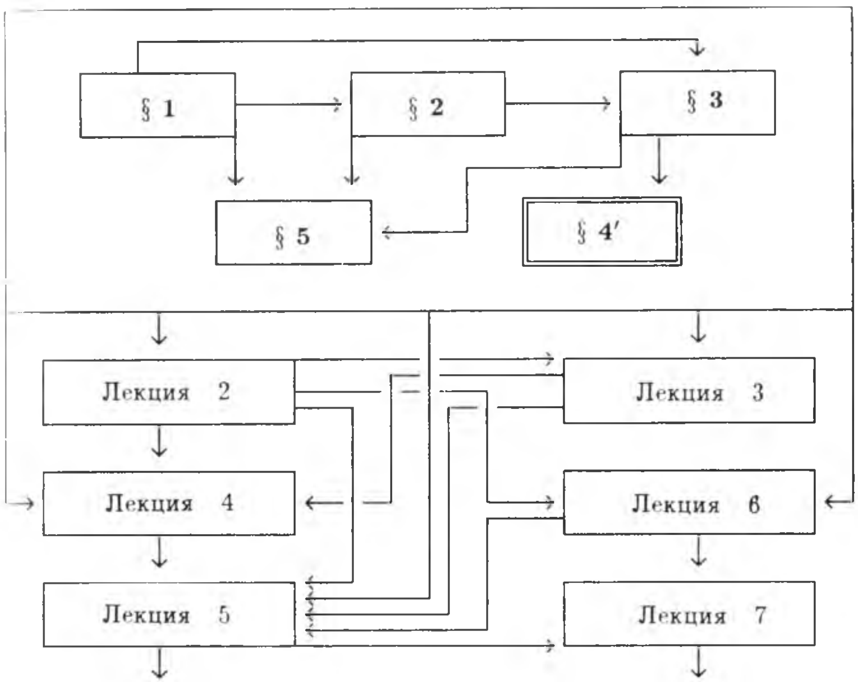
Лекция 1

МНОЖЕСТВА
ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

МНОЖЕСТВА
ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Основные понятия: множество, подмножество, пересечение и объединение множеств, разность множеств, дополнение множества, пустое множество, универсальное множество, декартово произведение множеств, направленный отрезок, аффинная система координат, n-арное отношение, равенство бинарных отношений, инверсия бинарного отношения.

Необходимые сведения: модуль числа, числовая ось, координаты точки на оси и на плоскости, натуральные числа **(N)**, целые числа **(Z)**, рациональные числа **(Q)**, действительные числа **(R)**, параллельность прямых.



Семестр I

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1—§ 5).
Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения.
Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования.
Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество.
Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства.
Лекция 6 — Подстановки. Группы.
Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Под ***множеством*** *или совокупностью элементов (точек) понимаем некоторый объект, который может быть задан указанием характеристических свойств его элементов.*

Множества обычно обозначаются большими буквами алфавитов, а элементы множеств — малыми. Символическая запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A, или a принадлежит множеству A. Отрицание этого обычно обозначается $a \notin A$. Применяется также и равносильное обозначение: $A \ni a$ или, соответственно, $A \not\ni a$.

Когда множество задается перечислением его элементов, их обычно заключают в фигурные скобки и пишут: $A = \{a, b, c\}$.

Пример 1.1. Множество C всех пар целых чисел (x, y), по модулю не превосходящих 9 и удовлетворяющих условию $x^2 = y$, может быть задано перечислением его элементов:

$$C = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}.$$

Однако, если мы будем рассматривать множество C' **всех** пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x^2 = y$, то перечислить все его элементы, очевидно, уже не удастся, так как их бесконечно много.

Сравните множества C и C' с множеством C'' всех пар **действительных чисел**, удовлетворяющих тому же условию, с множеством всех точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению: $x^2 = y$ (рис. 1).

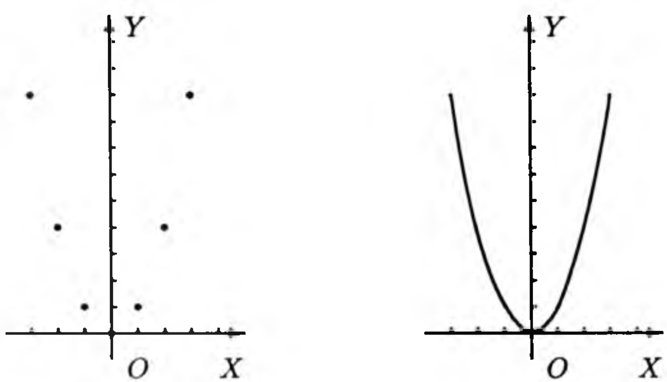


Рис. 1

При изображении множества точками координатной плоскости говорят о графическом способе его задания или его графике.

Одно и то же множество может быть задано несколькими способами. Так множество $B=\{-1, 4\}$ задано перечислением его элементов, но его же можно определить указанием каких-либо других характеристических свойств его элементов, например, как множество корней квадратного уравнения

$$x^2-3x-4=0$$

или как множество действительных корней уравнения

$$x^4-2x^3-6x^2-7x-4=0.$$

Полезно знать и уметь определять, когда *разные способы или условия задают одно и то же множество. В таком случае принято говорить о* ***равенстве*** *или* ***совпадении множеств.***

Установить равенство множеств A и B можно показав, что всякий элемент множества A содержится в B и наоборот: всякий элемент множества B содержится в A.

Обозначение равенства множеств A и B: $A=B$.

Это может быть символическим языком кратко записано так:

$$A=B \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

Обозначения: $\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда,
$\forall$ — любой, для любого,
$\wedge$ — и,
$\Rightarrow$ — следует.

(Символ $\forall$ — перевернутая буква A, начальная в английских словах Any — любой, всякий и All — все).

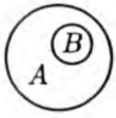
Определение 1.3. ***Множество*** B ***содержится в множестве*** A *(или* B *есть* ***подмножество*** A*), если каждый элемент множества* B *является элементом множества* A.

Обозначение. $B \subset A$ или $A \supset B$, (в литературе встречаются и такие, теперь редко употребляемые, обозначения: $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$). Если множество B не является подмножеством A, то пишется $B \not\subset A$ или $A \not\supset B$.

Определение удобно записать формулой:

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$$

и схематически изобразить чертежом (рис. 2):



$B \subset A$

Рис. 2

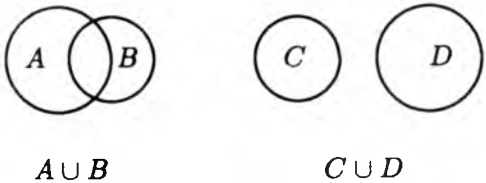


Рис. 3

Очевидно, $A \subset A$.

Условие равенства множеств в терминах включения множеств (или подмножеств) может быть теперь записано так:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A). \tag{1.1}$$

Его иногда называют ***принципом двойного включения***.

Определение 1.4. ***Объединением двух множеств*** *(A и B) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.*

Обозначение объединения множеств A и B: $A \cup B$.

Из определения следует, что

$$A \subset A \cup B \text{ и } B \subset A \cup B. \tag{1.2}$$

А его символическая запись:

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Обозначение $\overset{\text{def}}{=}$ — по определению, (def — сокращение от латинского слова «definitio», которое означает определять, устанавливать, толковать),

$\vee$ — или (т. е. хотя бы одно из двух),

$\mid$ — такой, что.

Задание 1.1. Укажите на чертежах объединения множеств (рис. 3).

Определение 1.5. ***Пересечением двух множеств*** *(A и B) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как одному, так и другому множеству.*

Обозначение пересечения множеств A и B: $A \cap B$.

Очевидно, что

$$A \cap B \subset A \text{ и } A \cap B \subset B. \tag{1.3}$$

Символическая запись этого определения следующая:

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

$A \cap B$ $\qquad$ $C \cap D$

Рис. 4

Задание 1.2. Укажите пересечения множеств (рис. 4).

Для удобства и единства обозначений (например, того факта, что множества не имеют общих элементов или отсутствуют элементы, обладающие данным характеристическим свойством) вводится понятие пустого множества, которое обозначается $\varnothing$. Его свойства относительно операций объединения, пересечения и включения (для любого множества A) принимаются по определению:

$$\varnothing \subset A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup \varnothing = A, \text{ и}$$
$$\varnothing \cap \varnothing = \varnothing,\ \varnothing \cup \varnothing = \varnothing. \qquad (1.4)$$

(Говорят, что этими равенствами аксиоматизируется пустое множество). Пустое множество можно представить себе как «множество без элементов», так что для множеств C и D предыдущего задания можно записать: $C \cap D = \varnothing$.

Задача 1.1.1. Если число элементов множества A конечно, то оно обозначается $n(A)$.

Определите, каковы наибольшие и наименьшие значения числа элементов $n(A \cup B)$ и $n(A \cap B)$, если $n(A) = p$, а $n(B) = q$,

1). $\max n(A \cup B) = ?$ $\qquad$ 3). $\min n(A \cup B) = ?$
2). $\max n(A \cap B) = ?$ $\qquad$ 4). $\min n(A \cap B) = ?$

Определение 1.6. *Для любого множества само это множество и пустое множество называются* ***несобственными подмножествами.*** *Все остальные подмножества носят названия* ***собственных.***

Задача 1.1.2. Множество, состоящее из двух элементов, например, $\{a, b\}$, имеет четыре подмножества: несобственные: $\{a, b\}$ и $\varnothing$, и собственные: $\{a\}$ и $\{b\}$. Сколько подмножеств имеет множество, состоящее из трех элементов? из четырех?

Задача 1.1.3. Определите число подмножеств множества, состоящего из n элементов.

Указание. Сколько подмножеств, состоящих из одного элемента, имеет такое множество? Из двух? трех? Сколько несобственных подмножеств имеет множество?

Пример 1.2. Для любых множеств A и B эквивалентны соотношения: 1. $A\subset B$. 2. $A\bigcup B\subset B$. 3. $A\subset A\bigcap B$.

Эквивалентность этих соотношений означает, что каждое из них имеет место тогда и только тогда, когда истинно любое другое. Мы установим это, доказав, что $1.\Rightarrow 2.\Rightarrow 3.\Rightarrow 1.$, т. е. из первого условия следует второе, из второго — третье, а из него — первое.

Доказательство. Докажем, что $1.\Rightarrow 2$.

Пусть $x\in A\bigcup B \xrightarrow{\text{опр. 1.4}} (x\in A\vee x\in B)\overset{?}{\Rightarrow} x\in B \xrightarrow{\text{опр. 1.3}} A\bigcup B\subset B.$

условие 1: $A\subset B \xrightarrow{\text{опр. 1.3}} (\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$

Это читается так. Пусть x — произвольный элемент множества $A\bigcup B$, это означает (по определению объединения множеств), что x принадлежит A или B (хотя бы одному из них), но по условию 1 всякий элемент, принадлежащий A, является элементом множества B. Следовательно, в любом случае x — элемент B, а в силу произвольности выбора $x\in A\bigcup B$ это влечет (по определению подмножества) включение: $A\bigcup B\subset B$.

Схема доказательства того, что из условия 2 следует условие 3:

Пусть $x\in A\overset{?}{\Rightarrow}(x\in A\wedge x\in B)\overset{?}{\Rightarrow} x\in A\bigcap B\overset{?}{\Rightarrow} A\subset A\bigcap B.$

условие 2: $A\bigcup B\subset B \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} ((\forall x\in A\bigcup B)\Rightarrow x\in B) \xrightarrow{\text{опр. 1.?}}$
$\xrightarrow{\text{опр. 1.?}} ((\forall x\in A\vee\forall x\in B)\Rightarrow x\in B)\Rightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$

Схема доказательства того, что $3.\Rightarrow 1.$:

Пусть $x\in A\overset{?}{\Rightarrow} x\in B\overset{?}{\Rightarrow} A\subset B.$

условие 3: $A\subset A\bigcap B\Rightarrow(\forall x\in A \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} x\in A\bigcap B \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} (x\in A\wedge x\in B))$

Тем самым утверждение доказано. ■

Определение 1.7. ***Разностью двух множеств*** *(A и B) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих первому из них (A), но не принадлежащих второму (B).*

Обозначение разности множеств A и B: $A\backslash B$.

Символически это записывается так:

$$A\backslash B\overset{\text{def}}{=}\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}.$$

Очевидно, что $A\backslash A=\varnothing$ для любого множества A и $A\backslash B\subset A$.

Задание 1.3. Укажите разности множеств (рис. 5).

$A \setminus B$ $\quad$ $C \setminus D$ $\quad$ $E \setminus F$

Рис. 5

Схематическое изображение множеств в виде фигур на плоскости, например, кругов, эллипсов (которые мы уже использовали), прямоугольников и т. п., дает наглядное представление о простейших свойствах множеств. Такие схемы носят название ***диаграмм Эйлера — Венна***.

Определение 1.8. *Если $A \subset B$, то разность множеств $B \setminus A$ называется* ***дополнением*** *множества A до множества B.*

Обозначение дополнения множества A до множества B: A'_B или $\mathbf{C}_B A$. ($\mathbf{C}$ — начальная буква от французского слова «complement» — дополнение).

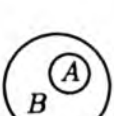
$$A'_B \overset{\text{def}}{=\!=} B \setminus A$$

Задание 1.4. Укажите (заштрихуйте) дополнение A до B (рис. 6).

Дополнением множества точек прямой, лежащей в плоскости, до этой плоскости является объединение двух (открытых) полуплоскостей. Дополнение $C=\{1, 2, 4\}$ до множества $A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ есть $B=\{?, ?\}$.

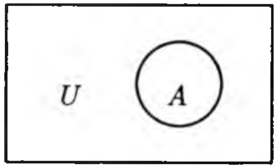
Объектами исследования могут быть и множества, элементами которых являются некоторые множества. Например: множество прямых плоскости, множества решений некоторого множества уравнений (системы уравнений), множества подмножеств какого-либо множества и т. д.

Иногда множество, подмножества которого рассматриваются в некоторой задаче, называют ***универсальным*** *для нее.*



A'_B

Рис. 6



A'

Рис. 7

Дополнение до универсального множества U его подмножества называют просто ***дополнением*** и обозначают A' или $\mathbf{C}A$.

$$A' \overset{\text{def}}{=} U \setminus A. \qquad (1.5)$$

Универсальное множество удобно использовать при изучении свойств дополнений множеств, на диаграммах Эйлера — Венна его принято изображать прямоугольником (рис. 7).

§ 2. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Приведем основные свойства операций включения, объединения, пересечения, разности и дополнения множеств, и проведем доказательства некоторых из них. Эти свойства будут использованы в дальнейшем при изучении алгебраических и геометрических структур. Многие из них интуитивно очевидны.

2.1. $A \subset A \quad \forall A.$

2.2. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C \quad \forall A,\ \forall B,\ \forall C.$

2.3. $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B \quad \forall A,\ \forall B.$

2.4. $A \subset A \cup B \wedge B \subset A \cup B \quad \forall A,\ \forall B.$

2.5. $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B \quad \forall A,\ \forall B.$

2.6. $A \cup B = B \cup A \quad \forall A,\ \forall B.$ объединения

коммутативность

2.7. $A \cap B = B \cap A \quad \forall A,\ \forall B.$ пересечения

(Commutatius — по латыни означает меняющийся, переставляющий).

2.8. $A \cup A = A \quad \forall A.$ объединения

идемпотентность

2.9. $A \cap A = A \quad \forall A.$ пересечения

(От латинских слов: idem — тот же самый, и potens — способный).

2.10. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \forall A,\ \forall B,\ \forall C.$ объединения

ассоциативность

2.11. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \forall A,\ \forall B,\ \forall C.$ пересечения

(Assotiatio — позднелатинское — соединение).

$B \cap C$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A \cap B$

$A \cap (B \cap C)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(A \cap B) \cap C$

Рис. 8

Докажем последнее равенство (установим равенство соответствующих множеств).

Прежде всего рассмотрим диаграммы Эйлера — Венна его левой и правой частей. Схематическое изображение множеств на диаграммах Эйлера — Венна обычно подсказывает доказательство утверждения, удобно для обнаружения контрпримеров или явно неверных теоретико-множественных предложений, однако, доказательством в строгом смысле этого слова не является.

Заштрихуем на диаграммах Эйлера — Венна множества $B \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$, затем $A \cap B$ и $(A \cap B) \cap C$ (рис. 8).

Сравните диаграммы. ♦

При доказательстве свойства 2.11, вообще говоря, надо установить равенство множеств $P = A \cap (B \cap C)$ и $Q = (A \cap B) \cap C$, т. е. в соответствии с принципом двойного включения (1.1) надо показать, что $P \subset Q$ и $Q \subset P$.

Доказательство свойства 2.11.

Пусть $x \in A \cap (B \cap C) \xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5} (x \in A \land x \in B \cap C) \xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5}$ $\xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5} (x \in A \land (x \in B \land x \in C)) \Rightarrow ((x \in A \land x \in B) \land x \in C) \xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5}$ $\xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5} (x \in A \cap B \land x \in C) \xLeftrightarrow{\text{опр. } 1.5} x \in (A \cap B) \cap C.$

«Проходя стрелки» слева направо, получим, что

$$A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C. \qquad (2.\Rightarrow)$$

(в силу произвольности выбора $x \in A \cap (B \cap C)$), а «проходя» их в противоположном направлении (также в силу произвольности $x \in (A \cap B) \cap C$), будем иметь:

$$(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C), \qquad (2.\Leftarrow)$$

$B \cap C$ $\qquad\qquad\qquad$ $A \cup B \quad A \cup C$

$A \cup (B \cap C)$ $\qquad\qquad\qquad$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Рис. 9

Включения (2. $\Rightarrow$) и (2. $\Leftarrow$) означают (в соответствии с принципом двойного включения), что для любых множеств A, B, C выполняется:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \qquad \blacksquare$$

Операции объединения и пересечения обладают свойствами дистрибутивности:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{2.12.}\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\ \ \forall A,\ \forall B,\ \forall C. \\ \textbf{2.13.}\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\ \ \forall A,\ \forall B,\ \forall C. \end{array}\right\}\ \text{дистрибутивность}$$

(2.12 — объединения относительно пересечения, 2.13 — пересечения относительно объединения).

Чтобы найти путь доказательства свойства 2.12, также начнем рассуждения с диаграммы Эйлера — Венна множеств каждой части равенства $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (рис. 9).

Доказательство свойства 2.12.

1) Докажем, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow (x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C).$$

Посмотрим, какие вытекают отсюда возможности принадлежности элемента x множествам:

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

1. $(\underline{x \in A} \wedge x \in C) \xrightarrow{\text{опр. 1.4}} x \in A \cup (B \cap C)$.
2. $(x \in A \wedge \underline{x \in A}) \xrightarrow{\text{опр. 1.4}} x \in A \cup (B \cap C)$.
3. $(x \in B \wedge \underline{x \in A}) \xrightarrow{\text{опр. 1.4}} x \in A \cup (B \cap C)$.
4. $(\underline{x \in B} \wedge \underline{x \in C}) \xrightarrow{\text{опр. 1.5}} x \in B \cap C \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} x \in A \cup (B \cap C)$.

Отсюда видно, что в любом случае $x \in A \cup (B \cap C)$, и значит, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ в силу произвольности выбранного $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2) Включение $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ докажите самостоятельно. ♦

Пусть $x \in A \cup (B \cap C) \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} (x \in A \vee x \in B \cap C) \Rightarrow$

$$1.\ x \in A \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{cases} \xrightarrow{\text{опр. 1.?}} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$2.\ x \in B \cap C \xrightarrow{\text{опр. 1.5}} (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\text{опр. 1.?} \Downarrow \qquad \Downarrow \text{опр. 1.?}$$

$$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Таким образом, в любом возможном случае элемент $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, а в силу произвольности $x \in A \cup (B \cap C)$ это и означает включение: $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3) По принципу двойного включения это влечет равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ для всех множеств A, B и C. ■

Следующие свойства операций на множествах будут в дальнейшем основой некоторых задач и примеров, более сложных и содержательных конструкций.

Свойства разности множеств

2.14. $A \setminus B \subset A$ $\quad \forall A,\ \forall B.$
2.15. $A \setminus B = A \cap B'$ $\quad \forall A,\ \forall B.$
2.16. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ $\quad \forall A,\ \forall B.$
2.17. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ $\quad \forall A,\ \forall B.$
2.18. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ $\quad \forall A,\ \forall B.$
2.19. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $\forall A,\ \forall B,\ \forall C.$
2.20. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $\forall A,\ \forall B,\ \forall C.$

Свойства дополнений множеств

2.21. $A \cup A' = U$ $\quad \forall A.$
2.22. $A \cup A' = \varnothing$ $\quad \forall A.$
2.23. $(A')' = A$ $\quad \forall A.$ — закон инволюции.
2.24. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\quad \forall A,\ \forall B$
2.25. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\quad \forall A,\ \forall B$
$\Big\}$ — законы де Моргана.

Свойства (аксиоматика) пустого множества

2.26. $\varnothing \subset A$ $\quad \forall A.$
2.27. $A \cap \varnothing = \varnothing$ $\quad \forall A.$
2.28. $A \cup \varnothing = A$ $\quad \forall A.$
2.29. $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing.$
2.30. $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$

Задача 2.1.1. Докажите свойства 2.2 и 2.21.

2.2. $A\subset B\wedge B\subset C\Rightarrow A\subset C\ \ \forall A,\ \forall B,\ \forall C.$

Если произвольный $x\in A$, а $A\subset B$, то $x\in B$, так как по определению подмножества (множества A) всякий его элемент содержится в данном множестве (B), тогда $x\in B$, а $B\subset C$, то $x\in ?$. Из произвольности $x\in A$ следует включение: $A\subset C$. ■

2.21. $A\cup A'=U\ \ \forall A.$

Пусть $x\in A\cup A' \xLeftrightarrow{\text{опр. 1.?}} (x\in ?\vee x\in ?) \xLeftrightarrow{(1.?)} (x\in ?\vee x\notin ?)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in U\Leftrightarrow (A\cup A'\subset U)\wedge(U\subset A\cup A') \xRightarrow{\text{св. 2.3}} A\cup A'=U.$ ■

Задача 2.1.2. Докажите свойства 2.6 и 2.24.

2.6. $A\cup B=B\cup A\ \ \forall A,\ \forall B.$

$x\in A\cup B \xLeftrightarrow{\text{опр. 1.?}} (x\in ?\vee x\in ?)\Leftrightarrow(x\in ?\vee x\in ?)\Leftrightarrow x\in\ ?\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(A\cup B\subset B\cup A)\vee(A\cup B\supset B\cup A)$, что по принципу двойного включения влечет равенство этих множеств. ■

2.24. $(A\cup B)'=A'\cap B'\ \ \forall A,\ \forall B.$

$(A\cup B)' \overset{(1.?)}{=\!=} U\backslash(A\cup B) \overset{\text{св. 2.?}}{=\!=} (U\backslash A)\cap(U\backslash B) \overset{(1.?)}{=\!=} A'\cap B'.$ ■

Задача 2.1.3. Докажите свойство 2.25.

2.25. $(A\cap B)'=A'\cup B'\ \ \forall A,\ \forall B.$

$(A\cap B)' \overset{(1.?)}{=\!=} U\backslash(A\cap B) \overset{\text{св. 2.?}}{=\!=} (U\backslash A)\cup(U\backslash B)=A'\cup B'.$ ■

Задача 2.2.1. Постройте диаграммы Эйлера — Венна следующих множеств и установите, какие из равенств верны для любых множеств A, B и C (рис. 10 и 11):

$B\backslash C$ $\qquad$ $C\cap B'$

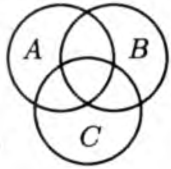
Рис. 10

$$1)\ B\backslash C=C\cap B',\quad 2)\ A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\backslash C.$$

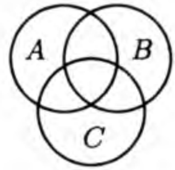
$$1)\ B\backslash C\overset{?}{\neq}C\cap B'.$$

$$2)\ A\backslash(B\backslash C)\overset{?}{\neq}(A\backslash B)\backslash C.$$

Задача 2.2.2. Постройте диаграммы Эйлера — Венна следующих множеств и установите, какие из равенств верны для любых множеств A, B и C (рис. 12 и 13).

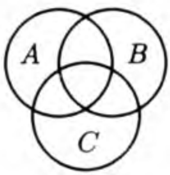


$A\setminus(B\setminus C)$

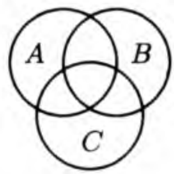


$(A\setminus B)\setminus C$

Рис. 11

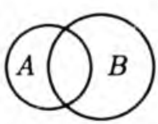


$B\cap(C\cup A)$



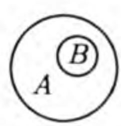
$(B\cap C)\cup(B\cap A)$

Рис. 12



$A\setminus B$

Рис. 13



$(A\setminus B)\cup B$

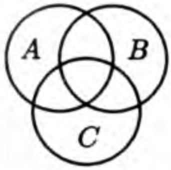
Рис. 14

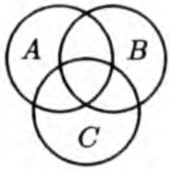
1) $B\cap(C\cup A)=(B\cap C)\cup(B\cap A)$, 2) $(A\setminus B)\cup B=A$.

1) $B\cap(C\cup A)\stackrel{?}{=}(B\cap C)\cup(B\cap A)$.

2) $(A\setminus B)\cup B\stackrel{?}{=}A$.

Задача 2.3.1. Постройте диаграммы Эйлера — Венна следующих множеств и установите, верно ли утверждение: если $B\subset A$, то $(A\setminus B)\cup B=A$ (рис. 14).





$A\cup(B\cap C)$ $(A\cup B)\cap C$

Рис. 15

Задача 2.3.2. Определите, для каких множеств A, B, C имеет место утверждение: $A\cup B=B\cap C$.

Задача 2.2.3. Проверьте, истинно ли для любых множеств A, B, C утверждение: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$ (рис. 15).

$$A\cup(B\cap C)\overset{?}{\neq}(A\cup B)\cap C.$$

Если утверждение истинно не для всех множеств, то постарайтесь найти все условия, при которых оно все же имеет место.

§ 3. ПРЯМОЕ (декартово) ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Если рассматривается множество, состоящее из конечного числа элементов такое, что порядок элементов не существен, то их заключают в фигурные скобки, например, $\{a, b, c\}$. Если же существенно, каков порядок элементов, то говорят об ***упорядоченном множестве элементов*** или ***кортеже***, используя для обозначения скобки $\langle\ \rangle$, например, кортеж (длины 3) тех же элементов: $\langle a, b, c\rangle$.

(«Cortége» в переводе с французского означает торжественное шествие, выезд, свита).

Определение 3.1. ***Два кортежа*** *называются* ***равными****, если они одинаковой длины и если равны их элементы на соответствующих местах.*

Так равенство $\langle x, y\rangle=\langle 1, \alpha\rangle$ имеет место тогда и только тогда, когда $x=1$ и $y=\alpha$.

Определение 3.2. ***Прямым*** *или* ***декартовым произведением множеств*** *A и B называется множество всех упорядоченных пар элементов, из которых первый принадлежит первому множеству A, а второй второму — B.*

Обозначение декартова произведения множеств A и B: $A\times B$.

$$A\times B\overset{\text{def}}{=}\{\langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

Тем самым декартово произведение множеств задается описанием характеристических свойств его элементов. Можно сказать, что таким образом для всех множеств определена новая операция: двум множествам сопоставляется третье — их декартово произведение.

Пример 3.1. Для множеств $A=\{1, 2, 4\}$ и $B=\{a, b\}$ выпишем все элементы декартовых произведений.

$$A\times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle\},$$
$$B\times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle\},$$

Несложно увидеть, что $A\times B\overset{?}{\neq} B\times A$ для произвольных множеств A и B. Это означает ***некоммутативность операции декартова умножения (произведения) множеств***.

Задание 3.1. Найдутся ли множества A и B такие, что $A\times B=B\times A$?

Естественно называть множество $A\times A$ ***декартовым квадратом множества*** A и обозначать его A^2.

$$A^2\overset{\text{def}}{=}A\times A.$$

Определение 3.3. ***Диагональю декартова квадрата множества*** A *называется множество всех пар вида* $\langle x, x\rangle$, где $x\in A$.

(Греческое «διανωυιοζ» означает идущий от угла к углу). Обозначение диагонали множества A: D_A или d_A, i_A или id_A.

$$D_A\overset{\text{def}}{=}\{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}.$$

Задание 3.2. Для множества $B=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ выпишите все элементы декартова квадрата и подчеркните все диагональные элементы:

$B^2=\{\langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle, \langle ?, ?\rangle\}$.

Задача 3.1.1. Определите, сколько элементов содержит множество $A\times B$, если $n(A)=p$, а $n(B)=q$? Почему?

Следующие задачи отражают свойства декартова произведения.

Задача 3.2.1. Докажите утверждение: Для любых множеств A, B и C, если $B\subset C$, то $A\times B\subset A\times C$.

Доказательство. $\langle x, y\rangle\in A\times B \xRightarrow{\text{опр. 3.2}} (x\in ?\wedge y\in ?)\overset{?}{\Rightarrow}$
$\overset{?}{\Rightarrow}(x\in ?\wedge y\in C) \xRightarrow{\text{опр. 3.?}} \langle x, y\rangle\in A\times C.$

$B\subset C\Rightarrow(\forall y\in B\Rightarrow y\in ?)$

В силу произвольности $\langle x, y\rangle \in A\times B$ следует, что $A\times B\subset A\times C$. ■

Задача 3.1.2. Определите, верны ли для любых множеств A, B, C равенства: 1. $A\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$. 2. $A\times\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$?

Указание. Рассмотрите сначала примеры для каких-либо множеств $A=\{\quad\}$, $B=\{\quad\}$ и $C=\{\quad\}$, если они подтвердят равенство, постарайтесь доказать его для произвольных множеств A, B, C.

$$1.\ A\cap(B\times C)\overset{?}{\neq}(A\cap B)\times(A\cap C).$$

Вывод. Пересечение множеств $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ обладает свойством дистрибутивности относительно декартова произведения множеств.

$$2.\ A\times(B\cap C)\overset{?}{\neq}(A\times B)\cap(A\times C).$$

Вывод. Декартово произведение множеств $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ обладает свойством дистрибутивности относительно пересечения множеств.

Задача 3.3.1. Определите, верно ли для любых множеств A, B, C равенство: $A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C)$?

$$A\times(B\backslash C)\overset{?}{=}(A\times B)\backslash(A\times C).$$

Вывод. Декартово произведение множеств $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ обладает свойством дистрибутивности относительно разности множеств.

Задача 3.1.3. Истинно ли для любых множеств A, B и C утверждение $A\cup(B\times C)=(A\times B)\cup(A\times C)$?

Указание. Рассмотрите сначала примеры для каких-либо множеств $A=\{\quad\}$, $B=\{\quad\}$ и $C=\{\quad\}$, если они подтвердят равенство, постарайтесь доказать его для произвольных множеств A, B, C.

$$A\cup(B\times C)\overset{?}{\neq}(A\times B)\cup(A\times C).$$

Вывод. Объединение множеств $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ обладает свойством дистрибутивности относительно декартова произведения множеств.

Определение декартова произведения двух множеств естественным образом обобщается на декартово произведение любого их числа:

Определение 3.4. ***Прямым*** *или* ***декартовым произведением множеств*** *A_1, A_2, ... A_n называется множество всех кортежей длины n, из которых первый принадлежит первому множеству — A_1, второй второму — A_2 и т. д. последний — A_n.*

Обозначение: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$,

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\overset{\text{def}}{=}\{\langle x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n\rangle\,|\,x_i\in A_i\wedge i=1,\ 2,\ \ldots\ n\}.$$

Отсюда при $n=1$ следует, что об элементах любого множества можно говорить как о кортежах длины 1, и

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n\rangle \mid x_i \in A \wedge i=1,\ 2,\ \dots\ n\}.$$

Из определения декартова произведения множеств следует, конечно, что n — всегда число натуральное.

Задание 3.3. Приведите примеры элементов множеств: $\mathbf{R}^2 \ni ?$ $\qquad \mathbf{R}^6 \ni ?$ $\qquad (\mathbf{R}^2)^3 \ni ?$

Задача 3.2.2. Если множество A состоит из конечного числа элементов, то их количество будем обозначать $n(A)$.

Пусть $n(A)=p$, $n(B)=q$, $n(C)=r$. Определите, сколько элементов содержат декартовы произведения

1) $n(A\times(B\times C))=?$
2) $n((A\times B)\times C)=?$
3) $n(A\times B\times C)=?$

Выше мы установили, что декартово произведение не обладает свойством коммутативности, оно и неассоциативно:

$$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C\neq A\times B\times C.$$

Например, если $\langle 1, \langle \alpha,\ a\rangle\rangle \in A\times(B\times C)$, то $\langle 1,\ \langle \alpha,\ a\rangle\rangle \notin (A\times B)\times C$, так как, хотя последнее множество и состоит из кортежей длины 2, но таких, что первый элемент упорядоченной пары сам является кортежем длины 2. В отличии, например, от первого элемента 1 кортежа $\langle 1,\ \langle \alpha,\ a\rangle\rangle$, который в лучшем случае можно принять только за кортеж длины единица (см. определение 3.1).

Однако, учитывая, что речь идет об упорядоченных множествах, часто бывает удобно отойти от формального закона и отождествлять элементы множеств $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C\neq A\times B\times C$ вида: $\langle 1,\ \langle \alpha, a\rangle\rangle$, $\langle\langle 1, \alpha\rangle\ a\rangle$, и $\langle 1, \alpha, a\rangle$. Это позволяет в дальнейшем, отождествляя в таком же смысле соответствующие элементы, не только отождествить множества $A\times(A\times A)$, $(A\times A)\times A$ и $A\times A\times A$, но по аналогии отождествлять без дополнительных разъяснений, если того потребует контекст, произвольные декартовы степени: $A^m\times A^n$ и $A^n\times A^m$ с A^{m+n}, где $\{m,\ n\}\subset N$.

§ 4′. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ МНОЖЕСТВ

В этом параграфе мы рассмотрим примеры декартовых произведений множеств и связанные с ними новые понятия, которые будут использованы в дальнейшем. Они, хотя и не сложны, но являются базовыми для серьезных разделов курса, которые предстоит изучать.

Пример 4.1. $\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел, элементами множества $(\mathbf{R}^4)^3$ являются кортежи длины 3, которые состоят из кортежей длины 4, например:
$(\mathbf{R}^4)^3 \ni \langle\langle 1, 3, 2, 4\rangle, \langle 4, 5, 0, 5\rangle, \langle -3, 2, 1, 7\rangle\rangle$, но такая запись кортежа кортежей весьма громоздка даже для элементов $(\mathbf{R}^4)^3$, не говоря уже о более высоких степенях. Удобнее записывать такие кортежи построчно:

$$\begin{matrix}\langle\ 1, & 3, & 2, & 4\rangle \\ \langle\ 4, & 5, & 0, & 5\rangle \\ \langle -3, & 2, & 1, & 7\rangle\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 7\end{Vmatrix}.$$

Аналогично построенные таблицы будем иметь и для других декартовых степеней множества действительных чисел $\mathbf{R}$:

$$(\mathbf{R}^3)^2 \ni \langle\langle 1, 3, 2\rangle, \langle 4, -3, 1\rangle\rangle \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{R}^2)^3 \ni \langle\langle -1, 4\rangle, \langle 5, 0\rangle, \langle 3, -2\rangle\rangle \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \\ 3 & -2\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{R}^1)^3 \ni \langle\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \langle -3\rangle\rangle \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{R}^4)^1 \ni \langle\langle 2, -5, 1, 7\rangle\rangle \quad \text{или} \quad (2\ \ -5\ \ 1\ \ 7).$$

Определение 4.1. ***Матрицей*** *называется любой элемент декартовой степени $(\mathbf{R}^n)^m$ множества действительных чисел. В таком случае говорят о матрице порядка m на n.*
Обозначение множества всех матриц порядка m на n: $\boldsymbol{M}(m\times n, \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{M}(m\times n)$.

Матрицу, принадлежащую $\boldsymbol{M}(m\times n, \mathbf{R})$, можно представлять числовой таблицей из m строк и n столбцов.

Так как матрица по своему определению есть кортеж кортежей, то естественно определять ***равенство матриц*** как равенство кортежей и считать матрицы равными, если они одного порядка и равны все их элементы на соответствующих местах.

Пример 4.2. Пусть $\mathbf{\Pi}$ — множество всех точек плоскости, $\mathbf{\Pi}^2=\{\langle A, B\rangle \mid \{A, B\}\subset \mathbf{\Pi}\}$ — все ее упорядоченные пары точек. Упорядоченность пары точек на чертеже удобно показывать стрелкой от ее первого элемента ко второму (рис. 16):

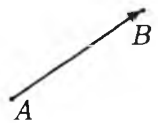


Рис. 16

Определение 4.2. *Элемент декартова квадрата множества всех точек плоскости (пространства), т. е. упорядоченную пару точек плоскости (пространства) принято называть* ***направленным отрезком.***

Если две такие упорядоченные пары отличаются только порядком элементов (точек), то их называют ***противоположно направленными отрезками****, а если первый и второй элементы упорядоченной пары совпадают, то такие направленные отрезки называют* ***нулевыми****.*

Для точек прямой, плоскости или пространства принято упорядоченную пару $\langle A, B\rangle$ обозначать $\overline{AB}$.

Пример 4.3. Если множество действительных чисел $\mathbf{R}$ изображать точками числовой прямой (оси), то элементы декартова квадрата $\mathbf{R}^2=\{\langle x, y\rangle \mid x\in \mathbf{R} \wedge y\in \mathbf{R}\}$ естественно представлять точками координатной плоскости.

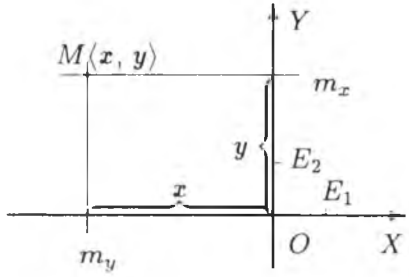
Определение 4.3. *Говорят, что на плоскости задана* ***аффинная*** *или* ***общая декартова система координат****, если заданы две непараллельных оси с общим началом. Если оси перпендикулярны и единицы измерений по разным координатным осям равны, то такую систему координат на плоскости называют* ***прямоугольной декартовой****.*

Напоминание: ***осью*** называется прямая с фиксированной точкой — началом, выбранным положительным направлением и единицей измерения.

Для произвольной точки плоскости M ее ***аффинные координаты*** определяются как $\langle x, y\rangle$, где $x=(OX)\cap m_y$, $y=(OY)\cap m_x$, (прямые $m_x \| (OX)$ и $m_y \| (OY)$, а точка $M=m_x\cap m_y$). Точку с координатами $\langle x, y\rangle$ обозначаем $M(x, y)$.

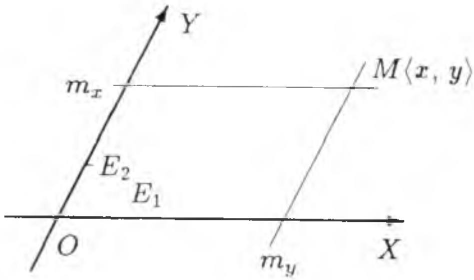
Напоминание: (AB) обозначена прямая, проходящая через различные точки A и B.

Выше мы отмечали, что можно представлять действительные числа точками числовой оси и обратно. Следовательно, можем считать, что $\langle x, y\rangle$ обозначает и упорядоченную пару чи-



прямоугольная декартова
система координат

Рис. 17



аффинная (общая)
система координат

Рис. 18

сел, соответствующую упорядоченной паре точек: x оси (OX) и y оси (OY).

Задание 4.1. Изобразите на плоскости множество $D_{\mathbf{R}^2}$, (диагональ множества $\mathbf{R}^2$), задав координатные оси. Сделайте чертеж. Подумайте, единствен ли ответ?

Задание 4.2. Подумайте, как можно представлять элементы множеств $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^4$, если действительные числа изображать точками числовой оси.

Задача 4.1.1. $\mathrm{I}=[0, 1]\subset\mathbf{R}$. Представьте на плоскости множества: $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$, $\mathrm{I}\times\mathbf{R}$, $\mathbf{R}\times\mathrm{I}$. (Задав, если нужно, систему координат).

Задача 4.1.2. Постарайтесь дать геометрическую интерпретацию декартовых произведений множеств: $S^1 \times \mathrm{I}$, $S^1 \times \mathbf{R}$ и $D^2 \times \mathbf{R}$, где обозначены: $\mathrm{I} = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, S^1 — окружность, $\mathbf{R}$ — прямая, а D^2 — круг. Задайте, если потребуется, систему координат. Как изменится ответ, если изменить систему координат? Сделайте рисунки.

Задача 4.1.3. Дайте геометрическую интерпретацию множеств: $S^1 \times S^1$, $S^1 \times D^2$ и $D^2 \times S^1$, где через D^2 обозначен круг, S^1 — окружность. Попробуйте изобразить эти множества.

Задача 4.2.3. Придумайте какие-либо геометрические интерпретации множеств: I^3, I^4, $\mathrm{I}^3 \times \mathbf{R}$ и $(S^1)^2 \times \mathbf{R}$.

§ 5. БИНАРНЫЕ И n-АРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Одно из базовых понятий в математике — бинарное отношение, через него будут определены такие важнейшие понятия, как функция, отображение, преобразование множества.

Определение 5.1. ***Бинарным** (двойным) **отношением на множествах** A и B называется любое подмножество их декартова произведения $A \times B$.*

Бинарные отношения обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, например: $R \subset A \times B$, а для включения $\langle x, y \rangle \in R$ может быть использована запись xRy, что читается так: «элемент x находится в отношении R к элементу y» или «элементы x и y находятся в отношении R».

*Часто R называют **бинарным отношением на множестве** A, если $R \subset A \times A$.*

Иногда говорят просто о бинарном отношении, если его элементы-кортежи достаточно ясно описаны каким-либо характеристическим свойством. Например, бинарным отношением можно назвать все кортежи $\langle A, B \rangle$, где A и B — такие множества, что $A \subset B$. Но так как неопределяемо понятие множества всех множеств (см. историческую справку), то нельзя и в приведенном примере говорить о таком бинарном отношении как о множестве, хотя его элементы-кортежи вполне точно описаны. В дальнейшем преимущественно будут рассматриваться бинарные отношения на множествах или множестве (и сами являющиеся множествами), как наиболее содержательные и достаточно общие.

Задание 5.1. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{a, b\}$. Приведите примеры бинарных отношений на множествах A и B и на множествах B и A:

$A \times B = ?$	$B \times A = ?$
$R_1 = ?$	$R_3 = ?$
$R_2 = ?$	$R_4 = ?$

Подумайте, сколько бинарных отношений можно задать на данных множествах $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{a, b\}$?

Какое «самое большое» бинарное отношение может быть задано на паре произвольных множеств A и B?
«Самое маленькое»?

Какие из следующих множеств можно назвать бинарными отношениями на A и B? Бинарными отношениями на A?

$$R_4=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 4, a\rangle\},\ R_5=\varnothing,\ R_6=\{\langle 1, a\rangle\},$$
$$R_7=\{\langle 1, 1\rangle, \langle b, b\rangle\},\ \ R_8=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 1\rangle\},$$
$$R_9=\{\langle a, a\rangle\},\ R_{10}=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle\}.$$

Определение 5.2. *Если бинарные отношения S и R таковы, что $S\subset R$, то S называют* ***сужением*** *R, а R —* ***расширением*** *S.*

Так в предыдущем задании R_6 — сужение бинарного отношения R_4, а R_{10} — расширение бинарных отношений R_5 и R_8.

Прежде всего напомним, что бинарное отношение, как и всякое множество, может быть задано описанием свойств его элементов (в частности, их перечислением или графически).

Пример 5.1. $U=\{\langle x, y\rangle\,|$студент x учится в группе $y\}$. Укажите несколько элементов этого отношения.

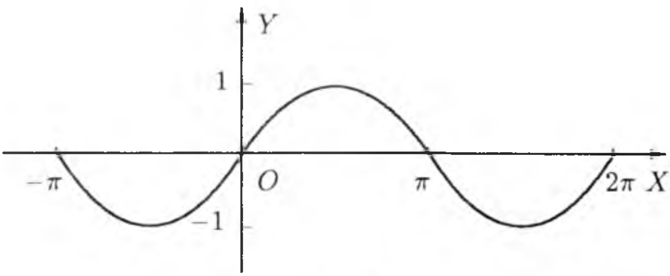


Рис. 19

Пример 5.2. $F=\{\langle x, y\rangle\,|\,\{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge y=\sin x\}$, наглядное задание этого отношения дает график функции $y=\sin x$ на координатной плоскости (рис. 19).

$$G=\{M\,(x, y)\,|\,\{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge y=\sin x\}.$$

Укажите несколько элементов этого отношения.

Понятно, что график любой числовой функции, как подмножество точек плоскости, отождествленной с множество $\mathbf{R}^2$ (см. пример 4.3), определяет некоторое бинарное отношение на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, в этом смысле и говорят о графическом задании бинарного отношения.

Бинарные отношения на множествах с конечным числом элементов удобно изображать с помощью ориентированных графов. Мы не будем останавливаться на точном и полном

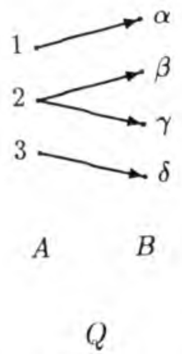


Рис. 20

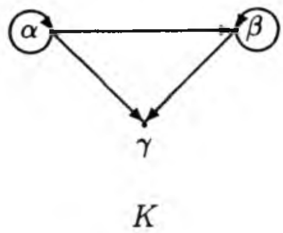


Рис. 21

определении, но вполне достаточное представление об ориентированных графах бинарных отношений дают иллюстрации следующего примера:

Пример 5.3. Бинарное отношение Q на множествах A и B состоит из кортежей: $Q=\{\langle 1, \alpha\rangle, \langle 2, \beta\rangle, \langle 2, \gamma\rangle, \langle 3, \delta\rangle\}$ (рис. 20).

Бинарное отношение

$$K=\{\langle\alpha, \alpha\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha, \gamma\rangle, \langle\beta, \beta\rangle, \langle\beta, \gamma\rangle\}$$

на множестве $X=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ задается графом (рис. 21).

Определение 5.3. *Множество всех* ***первых элементов*** *пар бинарного отношения называется* ***областью определения бинарного отношения***.

Ее обозначение для отношения R: Dom R.

Dom — сокращение от французского слова «domain», означающего область, район.

$$\text{Dom } R \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid (\exists\langle x, y\rangle \in R)\}. \qquad (5.1)$$

Обозначение. $\exists$ — существует.

(Символ — $\exists$ — перевернутая начальная буква английского слова "Exist", которое означает существовать, быть в наличии).

Задание 5.2. Укажите области определения бинарных отношений примеров 5.1—5.3.

Dom $Q=\{1, 2, 3\}$,

Dom $K=$?

Dom $U=$?

Dom $F=R^1$ — все действительные числа.

Определение 5.4. *Множество всех* ***вторых элементов*** *пар бинарного отношения называется* ***областью значений бинарного отношения.***

Ее обозначение для отношения R: $\operatorname{Im} R$.

Im — сокращение французского слова "image" — образ, представление.

$$\operatorname{Im} R \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid (\exists \langle x, y\rangle \in R)\}. \tag{5.2}$$

Задание 5.3. Укажите области значений бинарных отношений примеров 5.3 и 5.1.

$\operatorname{Im} Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,

$\operatorname{Im} K = ?$

$\operatorname{Im} U = ?$

В дальнейшем мы встретимся с сужениями отношений и отображений:

Определение 5.5. *Бинарное отношение S называется* ***сужением бинарного отношения R на множество X***, *если*

$$S \subset R \wedge \operatorname{Dom} S = X \wedge \operatorname{Im} S = \{y \in \operatorname{Im} R \mid \langle x, y\rangle \in S\}.$$

Сужение отношения R на множество X обозначается:

$$R|_X \stackrel{\text{def}}{=} S.$$

$Q' = \{\langle 1, \alpha\rangle, \langle 2, \beta\rangle, \langle 2, \gamma\rangle\}$ является сужением бинарного отношения Q примера 5.3 на множество $X = \{1, 2\} \subset A = \{1, 2, 3\}$.

$Q'' = \{\langle 1, \alpha\rangle, \langle 2, \beta\rangle\}$? не ? является сужением Q на X.

Так как ***бинарные отношения*** — множества, то естественно считать их ***равными***, если они равны как множества.

Доказательство их равенств основано на схеме:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} S \Leftrightarrow (R \subset S \wedge R \supset S).$$

Подробнее:

$$R = S \Leftrightarrow (((\forall \langle x, y\rangle \in R) \Rightarrow (\langle x, y\rangle \in S)) \wedge \\ \wedge ((\forall \langle u, v\rangle \in S) \Rightarrow (\langle u, v\rangle \in R))). \tag{5.3}$$

Из равенства бинарных отношений, очевидно, следует равенство их областей определения и областей значений.

Задание 5.4. Определите, равны ли бинарные отношения: $A = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ и $B = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset \{1, 2, 3, 5\} \wedge x < y < x + 2\}$?

Изменив порядок элементов в каждом из кортежей бинарного отношения R на множествах X и Y, очевидно, получим новое бинарное отношение — но на множествах Y и X.

Определение 5.7. ***Бинарное отношение*** *называется* ***обратным*** *к бинарному отношению R (или* ***инверсией*** *R), если оно состоит из всех таких пар $\langle y, x\rangle$, что $\langle x, y\rangle \in R$.*

Обозначение инверсии: R^{-1} для бинарного отношения R.

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Инверсия — от латинского "inversio" — перестановка.

Очевидно, $i_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\} = i_X^{-1}$.

Из определения следует, что всякое бинарное отношение обратимо (т. е. $\forall R\, \exists R^{-1}$) и с очевидностью имеют место утверждения.

Утверждение 5.1. $(R^{-1})^{-1} = R$ *для любого бинарного отношения* R.

Утверждение 5.2. *Для любого бинарного отношения* R: $\mathrm{Dom}\, R = \mathrm{Im}\, R^{-1}$ и $\mathrm{Im}\, R = \mathrm{Dom}\, R^{-1}$.

Задача 5.1.1. Докажите утверждение 5.1.

Доказательство. Пусть

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, R \overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists y \mid \langle x, y\rangle \in R) \overset{?}{\Leftrightarrow} \langle y, x\rangle \in R^{-1} \overset{?}{\Leftrightarrow} x \in \mathrm{Im}\, R^{-1}.$$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}\, R^{-1}$.

Это и означает, что любой элемент из $\mathrm{Dom}\, R$ принадлежит $\mathrm{Im}\, R^{-1}$ и наоборот, откуда $\mathrm{Dom}\, R = \mathrm{Im}\, R^{-1}$. ■

Пример 5.4: Найдем инверсию отношения

$$F = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R^1 \wedge y = x^2 + 1\}.$$

По определению, $F^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in F\}$, т. е.

$$F^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{R}^1 \wedge y = x^2 + 1\}.$$

Возможна и такая форма записи:

$$F^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{R}^1 \wedge x = y^2 + 1\},$$

если использовать обозначение $\langle x, y\rangle$ для кортежа, входящего в бинарное отношение F^{-1}.

Задание 5.5. Для бинарных отношений Q и K примера 5.3 найдите инверсии и постройте их графы (рис. 22 и 23):

$$Q = \{\langle 1, \alpha\rangle, \langle 2, \beta\rangle, \langle 2, \gamma\rangle, \langle 3, \delta\rangle\},$$

$$K = \{\langle \alpha, \alpha\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle, \langle \alpha, \gamma\rangle, \langle \beta, \beta\rangle, \langle \beta, \gamma\rangle\},$$

Вывод. Если на множестве с конечным числом элементов задан граф бинарного отношения, то, чтобы получить граф его инверсии, следует обратить каждую его стрелку.

Задача 5.1.2. Найдите $\mathrm{Dom}\, W$, $\mathrm{Im}\, W$, W^{-1} для бинарного отношения $W = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{Z} \wedge x$ делит $y\}$.

(**Напоминание:** x делит y, если найдется такое целое k, что $y = kx$).

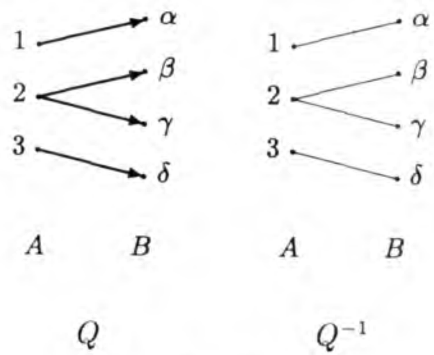


Рис. 22

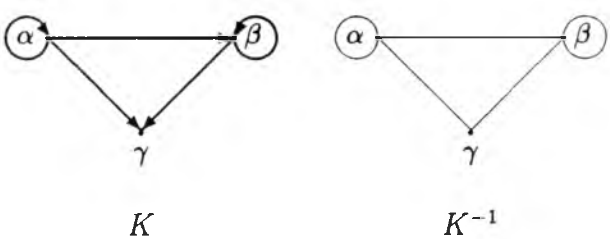


Рис. 23

Dom W = ?
Im W = ?
W^{-1} = ?

Задача 5.1.3. Найдите Dom V, Im V, V^{-1} для бинарного отношения $V=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{N} \wedge 3x\leqslant 2y\}$.

Dom V = ?
Im V = ?
V^{-1} = ?

Задача 5.2.3. Укажите область определения и область значений бинарного отношения

$$F=\{\langle R, S\rangle \mid R,\ S \text{ — бинарные отношения } \wedge R=S\}.$$

Dom F = ?
Im F = ?

Понятие бинарного отношения легко обобщается на случай ***n*-арного отношения** (при $n\in \mathbf{N}$), как подмножества декартова произведения n множеств: $R\subset A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$. Тогда его частный случай — ***унарное отношение*** (т. е. 1-арное отношение): $R \subset A$, есть ни что иное как подмножество A, следовательно, при необходимости всякое подмножество можно рассматривать как пример некоторого унарного отношения.

Пример 5.5. Примерами тренарных отношений могут служить сложение и умножение действительных чисел:

$$\{\langle x, y, z\rangle \mid \{x, y, z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = x + y\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3,$$

и

$$\{\langle x, y, z\rangle \mid \{x, y, z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = xy\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3.$$

Однако, подчеркивая роль первых двух элементов в таких кортежах, мы отдадим предпочтение обозначениям:

$$[+] = \{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mid \{x, y, z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = x + y\} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3,$$

и

$$[\cdot] = \{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mid \{x, y, z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = xy\} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3,$$

так что $\mathrm{Dom}\,[+] = \mathrm{Dom}\,[\cdot] = \mathbf{R}^2$ и $\mathrm{Im}\,[+] = \mathrm{Im}\,[\cdot] = \mathbf{R}$.

В дальнейшем предметом нашего изучения будут большей частью бинарные отношения, поскольку именно на них основаны такие важные математические понятия, как отношения порядка и эквивалентности, отображение.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

«Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?» — «Множество чего?» — спросила Алиса.— «Ничего,— отвечала Соня,— просто множество!»

Л. Кэррол. «Алиса в стране чудес»

Множество — одно из самых основных понятий современной математики, оно используется, как базовое, почти во всех ее областях, а без символики теории множеств сейчас немыслимо, пожалуй, ни одно математическое исследование. Однако, теория множеств получила официальное признание не так давно: это произошло на Первом международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1879 году, на котором Ж. Адамар и А. Гурвиц сообщили о многочисленных содержательных примерах ее применения в математическом анализе.

Появление теории множеств было вызвано, видимо, общей логикой развития науки, историческими процессами формализации языка математики (т. е. необходимостью выделения логических правил и допустимых приемов рассуждений), осознанием универсальности результатов и преимуществ метода, при котором содержанием математического исследования становятся свойства какого-либо математического понятия, структуры, которые определяются априори своими основными характеристическими свойствами или аксиомами. Позднее, при полной кристаллизации идеи, такой метод будет назван аксиоматическим и его осознание позволит сделать громадный шаг в науке к новым, немыслимым до того областям. Но это произойдет только в XIX—XX веках.

Еще в IV в. до нашей эры в работах Аристотеля (Αριστοτέλησ, 384—322 до н. э.) подвергались исследованию особые отношения и логические рассуждения, которые он называл силлогизмами и которые на современном теоретико-множественном языке могут быть проиллюстрированы предложениями: $A \subset B$, $A \cap B \neq \varnothing$, или более сложными: $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$. (Здесь через A, B, C обозначены множества). У Аристотеля это формулировалось примерно так: «Всякое A есть B». «Некоторое A есть B», и аналогичными предложениями, в которых, и это очень важно, было несущественно, какие именно предметы составляют A или B. Однако, еще им самим было замечено, что подобный язык и схемы оказывались недостаточными для описания всех рассуждений и доказательств результатов, известных в математике к тому времени.

Идеи Аристотеля оказались плодотворными для немецкого математика Г. Лейбница (Leibniz Gotfried Wilhelm, 1646—1716), который был не только великолепным и многосторонним исследователем (область его интересов составляли вопросы логики, геометрии, математического анализа, физики, механики, даже палеонтологии и ботаники, он изобрел «счетную машину», что дает право называть его одним из провозвестников современной компьютерной математики), но и глубоким философом. Видимо, поэтому Лейбниц длительное время был увлечен идеей создания метода, который сводил бы все понятия в математике к примитивным и основным, составляющим как бы «азбуку человеческой мысли» и посредством «азбуки правил» затем формальным путем давал бы все истинные математические утверждения и теоремы.

Ему же принадлежит идея символических обозначений, которые, по его мнению, должны служить указателями мышлению. Лейбниц писал: «Истинный метод должен давать filum Ariadnes (нить Ариадны), т. е. некоторое осязаемое и грубое средство, которое направляло бы разум подобно начертанным линиям в геометрии... Без этого наш разум не смог бы проделать длинный путь, не сбившись с дороги». Более того, в его работах просматривается понимание идеи формализованного языка, как комбинации знаков и их сцеплений, что позволило бы механически получать новые истинные высказывания. Лейбниц несколько раз приступал к реализации этих своих идей, стараясь привести в систему основные правила силлогизмов Аристотеля, но всякий раз его подстерегала неудача, он сталкивался с большими трудностями, связанными с понятиями пустого множества и отрицаниями высказываний (дополнениями множеств).

Таким образом, несмотря на плодотворность идей и множество содержательных результатов, порожденных их развитием, попытки Лейбница формализовать логику Аристотеля закончились неудачей. Большая часть его результатов оставалась неопубликованной до начала XX века и поэтому не оказала существенного влияния на работы других математиков при формировании математической логики и теории множеств. До середины XIX века, т. е. в течение еще почти двух веков, несмотря на интерес к этому кругу вопросов, никому из математиков не удалось продвинуться существенно дальше Лейбница.

Наиболее значительным продвижением в этой области следует признать результаты английского математика Дж. Буля (Boole George, 1815—1864), который считается создателем современной символической логики. Он ввел обозначения символами операций объединения и пересечения множеств и высказываний (дизъюнкции и конъюнкции), что придало гибкость его системе. В середине XIX века шотландским математиком Де Морганом (De Morgan Augustus, 1806—1871) система Буля была усовершенствована: он установил не только законы дистрибутивности, но и двойственности для логических высказываний, которые в теории множеств потом получили название законов Де Моргана. Позднее английским логиком Д. Венном (Venn John, 1834—1923) была разработана специальная наглядная графическая система, нашедшая применение в математической логике и теории множеств под названием диаграмм Эйлера — Венна. Однако, большинство знаков — символов, которыми теперь пользуется математика: $\bigcup$, $\bigcap$, $\in$, $\subset$, $\setminus$, было введено итальянским математиком Дж. Пеано (Peano Giuseppe, 1858—1932).

Потребности анализа и углубленное изучение функций действительной переменной, которое интенсивно проводилось с середины XVIII века, положили начало разделу математики, который позже был назван теорией множеств. Работы немецкого математика Г. Кантора (Cantor Georg, 1845—1918) о тригонометрических рядах привели его к необходимости классификации некоторых «исключительных множеств», а эта задача, в свою очередь — к созданию современной теории множеств. Так что Г. Кантор считается основоположником этого раздела математики, хотя история вопроса, как мы видели, нисходит к философским школам Древней Греции. Ему принадлежит такое определение: «Под множеством понимается объединение в одно общее объектов хорошо различимых нашей интуицией или мыслью». Оно почти не вызвало критики современников, но как только к понятию множества помимо основных теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и т. п.) стали присоединяться вполне естественные понятия числа (элементов множества) и величины (множества), положение стало существенно сложнее. Так в течение трех лет с 1784-го года Кантор пытался доказать невозможность, как ему казалось, взаимно однозначного соответствия между множествами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ при $n>1$, пока к своему удивлению он не построил такое соответствие. «Я это вижу, но не верю в это,» — писал он Дедекинду. К концу XIX века в теории множеств уже набралось несколько примеров парадоксальных множеств, нарушавших принцип: «элемент, который определяется через совокупность элементов какого-либо множества, не может принадлежать этому же множеству». К таким парадоксальным множествам следовало бы отнести и «множество всех множеств», которое должно бы было содержать себя в качестве элемента. Принципиальные противоречия возникали и при сравнении множеств, состоящих из бесконечного числа элементов. Эти противоречия по существу так или иначе сводились к сложным философским понятиям актуальной и потенциальной бесконечности.

Попытки многих математиков конца XIX — начала XX веков совершенствовать аксиоматику теории множеств (Рассел, Цермело, Френкель, фон Нейман, Гедель и т. д.) не увенчались существенным успехом: преимущества в отдельных областях математики вынуждали в других к ограничениям круга приемлемых для рассмотрения задач, будучи не в состоянии обеспечить описание всех проблем другого раздела. В итоге математики осознали печальную истину невозможности создания универсальной непротиворечивой теории множеств, как азбуки математики в целом. Однако, символика, язык, возможность кратко записать основную логическую идею доказательства, т. е. аппарат теории множеств и, главное, ее идеи, сохранили свою привлекательность и используются и поныне, несмотря на понимание ограниченности ее возможностей. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором»,— писал Д. Гильберт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 624 с.
3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1986.— 336 с.
4. *Базылев В. Т, Дуничев К. И, Иваницкая В. П.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1974.— 352 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 368 с.
6. *Бурбаки Н.* Теория множеств.— М.: Мир, 1965.— 456 с.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа: Учеб. для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.— 736 с.
8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 1. Множества. Операции над множествами

[1] — стр. 39—43, 44—46.
[2] — стр. 17—19.
[4] — стр. 5—6.
[5] — стр. 7—9.
[6] — стр. 75—82.
[7] — стр. 11—13.
[8] — стр. 38—41.

§ 2. Свойства операций над множествами

[1] — стр. 43—44.
[5] — стр. 9—11.
[6] — стр. 101—108.
[8] — стр. 40.

§ 3. Прямое (декартово) произведение множеств

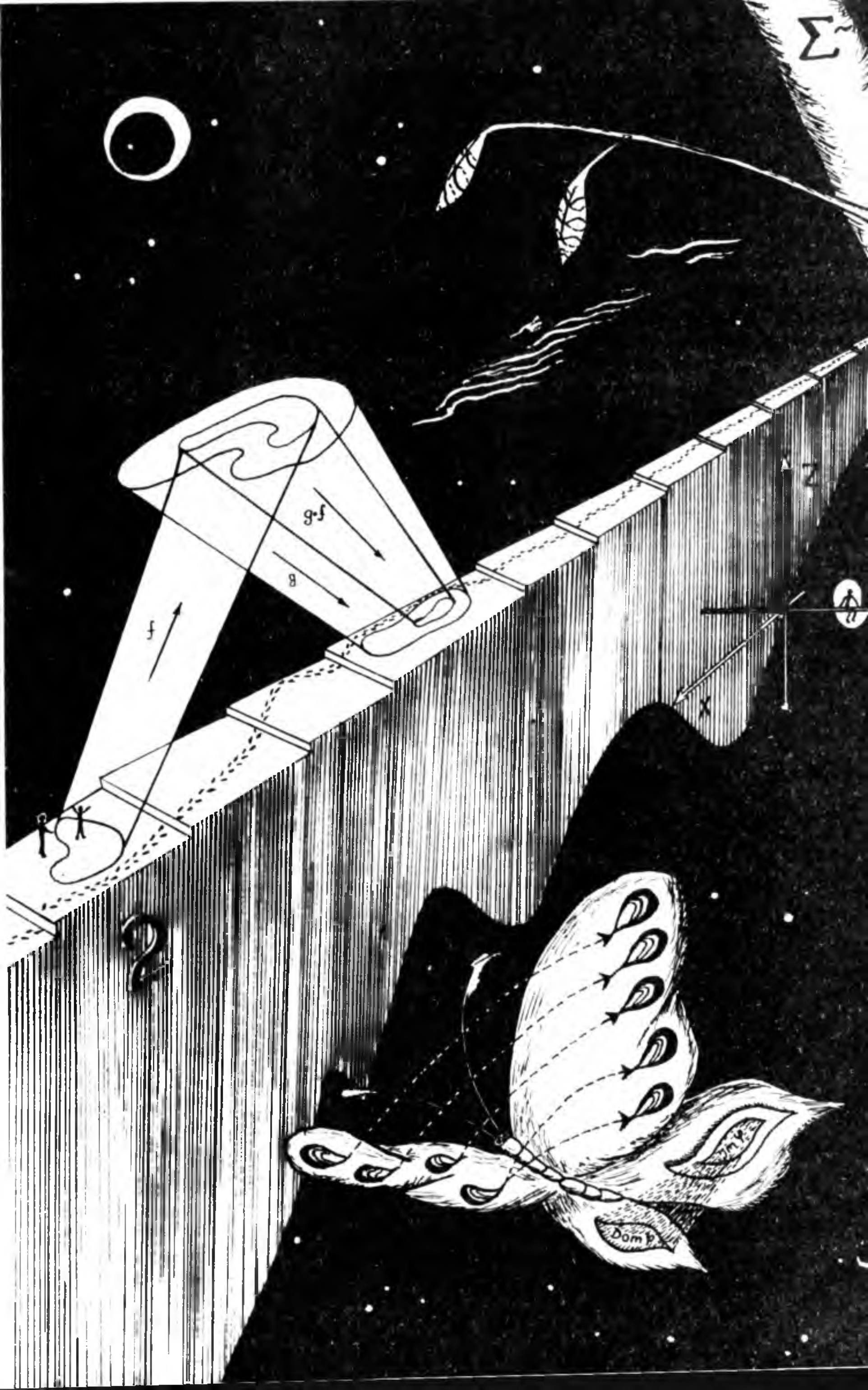
[1] — стр. 48—49.
[6] — стр. 82—84.

§ 4′. Некоторые примеры декартовых произведений множеств

[3] — стр. 35—36, 67.
[4] — стр. 10, 33—34.
[8] — стр. 47—48

§ 5. Бинарные и *n*-арные отношения

[1] — стр. 49—53.
[6] — стр. 82, 84—88.



Σ
g∘f
g
f
Z
X
Im φ
Dom φ

Лекция 2

ОПЕРАЦИИ НА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

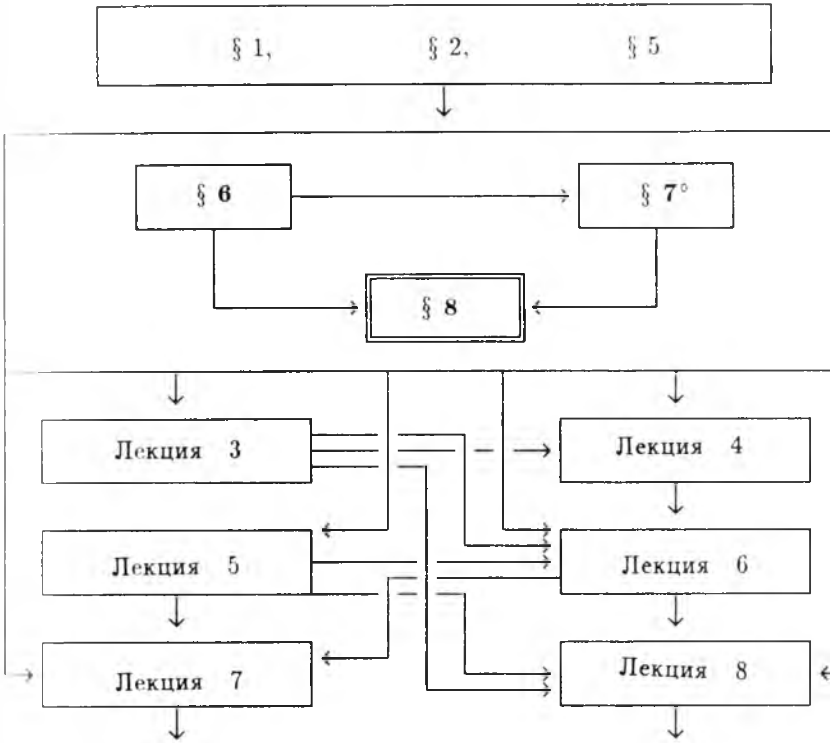
ОТОБРАЖЕНИЯ

ОПЕРАЦИИ НА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ
ОТОБРАЖЕНИЯ

Основные понятия: композиция бинарных отношений, отображение, форма, функционал, композиция отображений, обратимость отображения.

Необходимые сведения: множество, операции над множествами, бинарные и n-арные отношения, область определения и область значений бинарного отношения, инверсия бинарного отношения, натуральные числа (**N**), целые числа (**Z**), их свойства.

Рекомендации: если использовать книгу в лекционной работе, то рекомендуется предварительное знакомство студента с содержанием (определениями) § 7°.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах.
(§ 1 — §
Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения.
(§ 6 — §
Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования.
Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор множество.
Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства.
Лекция 6 — Подстановки. Группы.
Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы вектор
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 6. ОПЕРАЦИИ НА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

С двумя операциями на бинарных отношениях мы уже знакомились: это равенство бинарных отношений (опр. 5.6) и инверсия, или обращение бинарного отношения (опр. 5.7). Еще одна операция позволяет любым двум бинарным отношениям сопоставлять некоторое третье бинарное отношение:

Определение 6.1. ***Композицией бинарных отношений*** *$R \subset X \times Z$ и $S \subset Z \times Y$ называется новое бинарное отношение, состоящее из всех пар $\langle x, y\rangle$ таких, что для некоторого z кортеж $\langle x, z\rangle \in R$, а кортеж $\langle z, y\rangle \in S$.*

Обозначение: $S \circ R$. (Читается: композиция $\boxed{R}$ и S).

$$S \circ R \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\langle x, y\rangle \mid \exists z \mid (\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}.$$

Композиция — слово латинского происхождения: “compositio” означает составление, для обозначения этой же операции иногда используется термин ***суперпозиция*** (от латинского “superpositio” — наложение).

Очевидно, что $i_X \circ i_X = i_X = \{\langle x, x\rangle \mid \forall x \in X\}$.

Если бинарные отношения состоят из конечного числа элементов, то можно перечислить элементы их композиции.

Пример 6.1. Найдем композиции бинарных отношений $S \circ R$: $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$ и $S = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 9\rangle\}$.

Для того, чтобы указать все элементы множества $S \circ R$, поступим следующим образом: возьмем первый кортеж бинарного отношения R $\langle 1, 2\rangle$, его второй элемент равен 2, в соответствии с определением композиции бинарных отношений будем искать среди кортежей бинарного отношения S такие, чтобы они начинались с элемента 2. Таких пар две: $\langle 2, 5\rangle$ и $\langle 2, 6\rangle$, это означает, что $S \circ R \supset \{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$. Так же поступим с остальными кортежами отношения R: для $\langle 2, 4\rangle$ найдется $\langle ?, ?\rangle \in S$, а для пары $\langle 3, 7\rangle$ — в S подходящего кортежа нет. Следовательно:

$$S \circ R = \{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 9\rangle\}.$$

Аналогично находится композиция $R \circ S$:
$R \circ S = ?$

Вывод. Сравнивая полученные композиции бинарных отношений $R \circ S$ и $S \circ R$, видим, что $R \circ S \stackrel{?}{\neq} S \circ R$, или, другими словами, композиция бинарных отношений некоммутативна.

Если $S \circ R = \varnothing$, т. е. в результате композиции двух бинарных отношений получается пустое множество, то говорят, что ***композиция*** данных ***бинарных отношений не определена.***

Так, можно сказать, что композиция $S \circ S$ предыдущего примера неопределена.

$$S^2 = S \circ S = ?, \qquad \text{но } R^2 = R \circ R \stackrel{?}{=} \{\langle 1, 4\rangle\}.$$

Можно заметить, что композиция бинарных отношений $S \circ R$ определена тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} R \subset \operatorname{Dom} ? \stackrel{?}{=} \varnothing$, и неопределена, если $\operatorname{Im} R \not\subset \operatorname{Dom} ?$. ◆

Пример 6.2. Найдем композиции бинарных отношений:

$$f = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R \wedge y = x^2\}$$

и

$$g = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R \wedge y = x + 1\}.$$

Чтобы определить $g \circ f$, для удобства рассуждений изменим обозначения, не меняя сути зависимостей:

$$f = \{\langle x, \underline{z}\rangle \mid \{x, z\} \subset R \wedge \underline{z} = x^2\}$$

и

$$g = \{\langle \underline{z}, y\rangle \mid \{z, y\} \subset R \wedge y = \underline{z} + 1\}.$$

Из определения 6.1 следует, что композиция отношений $g \circ f$ состоит из всех кортежей $\langle x, y\rangle$ таких, что найдется z, что $\langle x, z\rangle \in f$, а $\langle z, y\rangle \in g$. В отношении g: $y = z + 1$, а для отношения f: $z = x^2$. Откуда $y = z + 1 = x^2 + 1$ и

$$g \circ f = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R \wedge y = x^2 + 1\}.$$

Аналогично находится композиция бинарных отношений $f \circ g$ и декартовы степени отношений $f^2 = f \circ f$ и $g^2 = g \circ g$.

Так для определения композиции $f \circ g$ удобно опять переобозначить элементы кортежей бинарных отношений, учитывая тот порядок, в котором они берутся: сначала — g, затем — f:

$g = \{\langle x, z\rangle \mid \{x, z\} \subset R \wedge z = ?\}$ и $f = \{\langle z, y\rangle \mid \{z, y\} \subset R \wedge y = ?\}$, тогда $y = z^2 = ?$, и окончательно:

$$f \circ g = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R \wedge y = \ ?\ \}.$$

Для $f^2 = f \circ f$ поступим аналогично:

$f = \{\langle x, \underline{z}\rangle \mid \{x, z\} \subset R \wedge z = ?\}$ и $f = \{\langle \underline{z}, y\rangle \mid \{z, y\} \subset R \wedge y = ?\}$,

тогда $y = z^2 = ?$, и окончательно:

$$f^2 = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset R \wedge y = \ ?\ \}.$$

Задание 6.1. Определите композиции бинарных отношений $G \circ U$ и $U \circ G$, если

$$U = \{\langle x, y \rangle \mid \text{студент } x \text{ учится в группе } y\},$$

а $G = \{\langle y, z \rangle \mid \text{группа } y \text{ есть учебная группа института } z\}$.

$G \circ U = \{\langle x, z \rangle \mid \text{студент } x\ ?\ \}$,

$U \circ G = ?$

Композицию бинарных отношений, заданных на множествах, состоящих из конечного числа элементов, удобно находить, используя графы.

Задание 6.2. Рассмотрите на графах композиции бинарных отношений (рис. 24, 25, 26):

1.

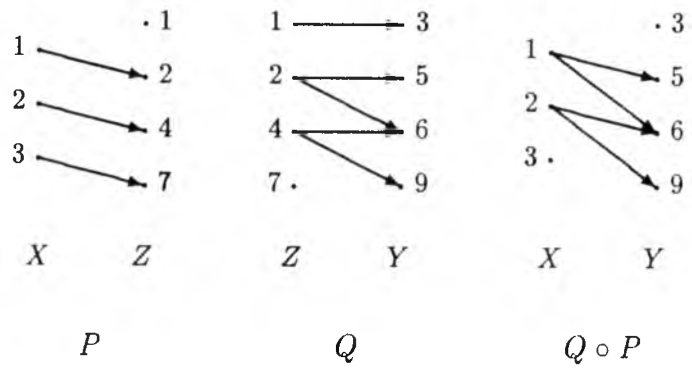


Рис. 24

Соединяя одинаковые элементы $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Dom} Q$, получим новые стрелки и соответствующие кортежи отношения $Q \circ P$:

$$Q \circ P = \{\langle 1, 5 \rangle,\ \langle 1, 6 \rangle,\ \langle 2, 6 \rangle\}.$$

Одно из свойств композиции бинарных отношений мы отмечали: некоммутативность, следующее — ассоциативность композиции, к нему придется обращаться в том или ином качестве на протяжении всего курса.

Теорема 6.1. *Для любых бинарных отношений R, S, Q имеет место: $Q \circ (S \circ R) = (Q \circ S) \circ R$. (Композиция бинарных отношений ассоциативна).*

Доказательство. Пусть отношения $Q \circ (S \circ R)$ и $(Q \circ S) \circ R$ определены, их равенство означает совпадение множеств $Q \circ (S \circ R)$ и $(Q \circ S) \circ R$, что доказывается по принципу двойного включения.

2.

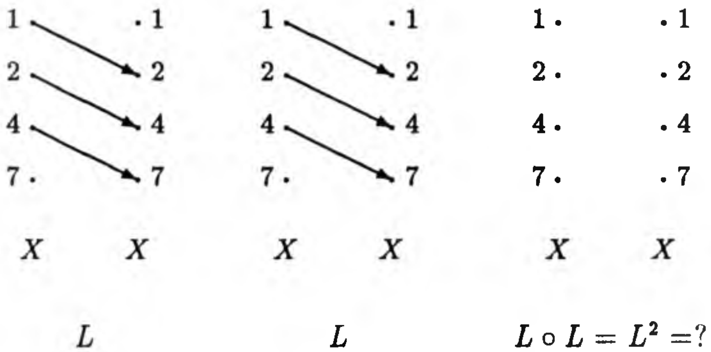


Рис. 25

3.

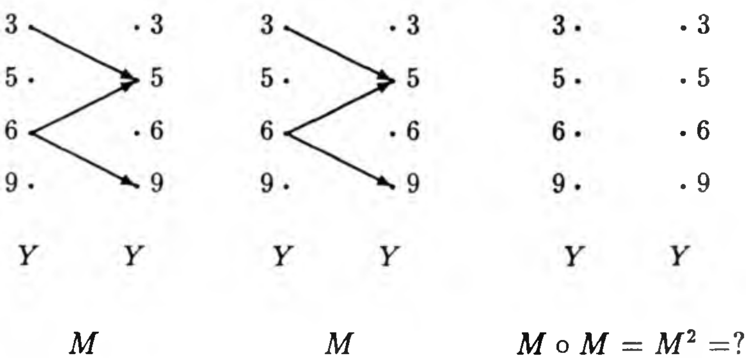


Рис. 26

Рассмотрим схему доказательства:

$$\langle x, y\rangle \in (Q\circ S)\circ R \overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists z|(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in Q\circ S)) \overset{?}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists z|(\langle x, z\rangle \in R \wedge (\exists u|(\langle z, u\rangle \in S \wedge \langle u, y\rangle \in Q)))) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\exists z \wedge \exists u)|(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, u\rangle \in S \wedge \langle u, y\rangle \in Q)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\exists z \wedge \exists u)|((\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, u\rangle \in S) \wedge \langle u, y\rangle \in Q)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists u \wedge \exists z)|((\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, u\rangle \in S) \wedge \langle u, y\rangle \in Q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\exists u|\langle u, y\rangle \in Q) \wedge (\exists z|\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, u\rangle \in S)) \overset{?}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists u|\langle x, u\rangle \in S\circ R) \wedge (\langle u, y\rangle \in Q) \overset{?}{\Leftrightarrow} \langle x, y\rangle \in Q\circ(S\circ R).$$

Предыдущее означает, что $\langle x, y\rangle \in (Q\circ S)\circ R$ тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle \in Q\circ(S\circ R)$, т. е. по определению равенства бинарных отношений (5.3):

$$(Q\circ S)\circ R = Q\circ(S\circ R) \tag{6.1}$$

и доказана ассоциативность композиции бинарных отношений. □

Задача 6.1.2. Подумайте, как изменятся рассуждения (доказательство), если $S\circ R=\varnothing$? Сохранится ли истинность равенства (6.1)? Если $Q\circ S=\varnothing$? Постарайтесь провести доказательство.

Так как композиция бинарных отношений обладает свойством ассоциативности, то естественно определить степень бинарных отношений при $n\in\mathbf{N}$:

$$R^n \overset{\text{def}}{=\!=} R\circ R\circ\ldots\circ R \text{ и } R^{-n} \overset{\text{def}}{=\!=} R^{-1}\circ R^{-1}\circ\ldots\circ R^{-1}.$$

Положив $R^0 \overset{\text{def}}{=\!=} i_{\operatorname{Dom} R}$, получим $R^m\circ R^n = R^{m+n}$ $\forall\{m, n\}\subset\mathbf{Z}$.

Теорема 6.2. *Если композиция бинарных отношений $S\circ R$ определена, то $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим вытекающие из определений инверсии и композиции бинарных отношений условия для элементов бинарных отношений:

$$\begin{array}{ccc} \langle x, y\rangle\in S\circ R & \overset{?}{\Leftrightarrow} & (\exists z|(\langle x, z\rangle\in R\wedge\langle z, y\rangle\in S)) \\ \Updownarrow & \text{по определению} \quad \Updownarrow \quad \text{инверсии} & \Updownarrow \\ \langle y, x\rangle\in(S\circ R)^{-1} & & \langle z, x\rangle\in R^{-1}\wedge\langle y, z\rangle\in S^{-1} \end{array}$$

Они позволяют увидеть идею и путь доказательства. Пусть

$$\langle y, x\rangle\in(S\circ R)^{-1}\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in S\circ R \xLeftrightarrow{\text{опр. 6.?}}$$
$$\xLeftrightarrow{\text{опр. 6.?}}(\exists z|(\langle x, z\rangle\in R\wedge\langle z, y\rangle\in S)) \xLeftrightarrow{\text{опр. 5.?}}$$
$$\xLeftrightarrow{\text{опр. 5.?}}(\exists z|(\langle z, x\rangle\in R^{-1}\wedge\langle y, z\rangle\in S^{-1}))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\exists z|(\langle y, z\rangle\in S^{-1}\wedge\langle z, x\rangle\in R^{-1}))\overset{?}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{?}{\Leftrightarrow}\langle y, x\rangle\in R^{-1}\circ S^{-1}.$$

Таким образом, из предыдущего следует, что

$$\forall\langle y, x\rangle\in(S\circ R)^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\langle y, x\rangle\in R^{-1}\circ S^{-1})\wedge(\forall\langle y, x\rangle\in R^{-1}\circ S^{-1})\Rightarrow\langle y, x\rangle\in(S\circ R)^{-1},$$

т. е. выполняются условия (5.3) равенства бинарных отношений, что и означает совпадение множеств: $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$. ■

Задача 6.1.1. Докажите, что для любых бинарных отношений R и S имеют место включения: $\mathrm{Dom}\,(S \circ R) \subset \mathrm{Dom}\, R$ и $\mathrm{Im}\,(S \circ R) \subset \mathrm{Im}\ S$.

Доказательство.

1. $\forall x \in \mathrm{Dom}\,(S \circ R) \xrightarrow{\text{опр. } 5.3} (\exists y \mid \langle x,\ y \rangle \in S \circ R) \xrightarrow{\text{опр. } 6.?}$

$$\xrightarrow{\text{опр. } 6.?} ((\exists\ y \wedge \exists\ z) \mid (\langle x,\ z \rangle \in R \wedge \langle z,\ y \rangle \in S)) \Rightarrow$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (\exists z \mid \langle x,\ z \rangle \in R) \Rightarrow x \in \mathrm{Dom}\ R.$$

В силу произвольности $x \in \mathrm{Dom}\,(S \circ R)$ из этого следует, что $\mathrm{Dom}\,(S \circ R) \subset \mathrm{Dom}\, R$.

2. $\mathrm{Im}\,(S \circ R) \overset{\text{утв. } 5.?}{=\!=\!=} \mathrm{Dom}\,(S \circ R)^{-1} \overset{\text{утв. } 6.2}{=\!=\!=}$

$$= \mathrm{Dom}\,(R^{-1} \circ S^{-1}) \subset \mathrm{Dom}\ S^{-1} \overset{\text{утв. } 5.?}{=\!=\!=} \mathrm{Im}\ S. \qquad \blacksquare$$

Определение 6.2. *Диагональ декартова квадрата множества X называют* ***тождественным бинарным отношением*** *или* ***тождеством*** *на X.*

В этом случае обычно используются обозначения: e_X, i_X или id_X.

$$id_X \overset{\text{def}}{=\!=} \{\langle x,\ x \rangle \mid \forall x \in X\}.$$

(i, id — начальные буквы латинского слова “identicus” тождественный, одинаковый).

Задание 6.3. Чтобы установить еще одно свойство бинарных отношений, найдем композиции отношений примера 6.1:

1. $R = \{\langle 1,\ 2 \rangle,\ \langle 2,\ 4 \rangle,\ \langle 3,\ 7 \rangle\}$, $R^{-1} = \{\langle 2,\ 1 \rangle,\ \langle 4,\ 2 \rangle,\ \langle 7,\ 3 \rangle\}$.

$$R^{-1} \circ R = ? \qquad\qquad R \circ R^{-1} = ?$$

2.
$$S = \{\langle 3,\ 1 \rangle,\ \langle 2,\ 5 \rangle,\ \langle 2,\ 6 \rangle,\ \langle 4,\ 9 \rangle\},$$
$$S^{-1} = \{\langle 1,\ 3 \rangle,\ \langle 5,\ 2 \rangle,\ \langle 6,\ 2 \rangle,\ \langle 9,\ 4 \rangle\}.$$
$$S^{-1} \circ S = ? \qquad\qquad S \circ S^{-1} = ?$$

Эти примеры позволяют высказать гипотезу, что имеет место следующее.

Утверждение 6.1. $R^{-1} \circ R \supset i$, и $R \circ R^{-1} \supset i$, *для произвольного бинарного отношения R.*

Доказательство. $R^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\langle y,\ x \rangle \mid \langle x,\ y \rangle \in R\}$.

1. Рассмотрим

$$R^{-1} \circ R = \{\langle x,\ y \rangle \mid (\exists z \mid (\langle x,\ z \rangle \in R \wedge \langle z,\ y \rangle \in R^{-1}))\} \supset$$

$$\supset \{\langle x,\ x \rangle \mid x \in \mathrm{Dom}\ R\} = i_{\mathrm{Dom}\ R}.$$

$\boxed{\forall x \in \mathrm{Dom}\ R\ \ \exists z \mid \langle x,\ z \rangle \in R \wedge \langle z,\ x \rangle \in R^{-1}}$

Следовательно, $R^{-1}\circ R\supset i_{\mathrm{Dom}\,R}$ для любого бинарного отношения R.

2. Второе утверждение: $R\circ R^{-1}\supset i_{\mathrm{Im}\,R}$ можно доказать аналогично, но попробуйте придумать более короткое доказательство, используя полученный результат п. 1. (см. утверждения 5.1, 5.2). ◆■

Задача 6.1.3. Найдите для бинарного отношения задачи 5.1.3: $V=\{\langle x,\ y\rangle \mid \{x,\ y\}\subset \mathbf{N}\wedge 3x\leqslant 2y\}$ композиции отношений:

$$V\circ V^{-1}=?\qquad V^{-1}\circ V=?\qquad V^2=?$$

§ 7°. ОТОБРАЖЕНИЯ

В математике одно из важнейших понятий — отображение или функция. „Functio" — латинское слово, которое в переводе означает исполнение, осуществление.

Определение 7.1. *Бинарное отношение f называется* ***отображением*** *или* ***функцией****, если для всякого $x\in\mathrm{Dom}\,f$ существует единственный $y\in\mathrm{Im}\,f$ такой, что $\langle x,\ y\rangle\in f$. Если $f\subset X\times Y$, то говорят об* ***отображении из*** *X* ***в*** *Y.*

В этом случае отображение обозначается $f: X\rightarrowtail Y$.

Другими словами, чтобы отношение f было отображением **из** X в Y, требуется выполнение условий:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \mathrm{Dom}\, f\subset X. & \\ 2.\ \forall x\in\mathrm{Dom}\, f & \left|\begin{array}{l}\langle x,\ y_1\rangle\in f\\ \langle x,\ y_2\rangle\in f\end{array}\right\}\Rightarrow y_1=y_2. \\ 3.\ \mathrm{Im}\, f\subset Y. & \end{array}\tag{7.1}$$

Условие 2 может быть прочитано так: $\forall x\in\mathrm{Dom}\,f$ кортеж $\langle x,\ y\rangle\in f$ единствен.

Очевидно, что отношение $f\subset X\times Y$ не является отображением, если нарушено второе из условий (7.1), т. е.

$$2'.\ \exists x\in\mathrm{Dom}\, f\ \left|\begin{array}{l}\langle x,\ y_1\rangle\in f\\ \langle x,\ y_2\rangle\in f\end{array}\right\}\wedge y_1\overset{?}{=}y_2.\tag{7.2}$$

Определение 7.2. ***Областью определения отображения*** *f* ***из*** *X* ***в*** *Y и* ***множеством (областью)*** *его* ***значений*** *называются область определения и, соответственно, область значений отношения f на множествах X и Y.*

Обозначения этих областей: $\mathrm{Dom}\,f$ и соответственно $\mathrm{Im}\,f$.

Наиболее содержательным и чаще употребляемым является не общее понятие отображения из множества в множество, а его частный случай: отображение множества **в** множество или функции на X с значениями **в** Y.

Определение 7.3. *Если $\mathrm{Dom}\,f=X$, то отображение f из X в Y называется* ***отображением*** *X* ***в*** *Y.*

Обозначение: $f: X \to Y$. Множество всех отображений X в Y обычно обозначается ***Map*** (X, Y). (От английского слова „map", что означает отображение, карта).

Присоединяя это требование к (7.1), получим условие того, что бинарное отношение f является отображением X в Y.

$$\begin{aligned} &1.\ \mathrm{Dom}\, f = X. \\ &2.\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f \quad \left.\begin{array}{l} |\langle x, y_1\rangle \in f \\ |\langle x, y_2\rangle \in f \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2. \\ &3.\ \mathrm{Im}\, f \subset Y. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Определение 7.4. *Если* $\mathrm{Dom}\, f \in \mathbf{R}^n$, *то отображение часто называют* ***функцией n переменных****, если же* $\mathrm{Im}\, f \subset \mathbf{R}^1$, *то говорят о* ***форме*** *или* ***функционале*** *на множестве* $\mathrm{Dom}\, f$.

Например,

$$f = \{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R^2 \wedge z = x^2 + y^2\}$$

и

$$g = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R^2 \wedge y = \sin x\}$$

— функционалы, и в то же время — функции: двух переменных и, соответственно, одной, а отображение, сопоставляющее любому треугольнику его периметр, функционал, но не числовая функция, так как область его определения не является подмножеством $\mathbf{R}^n$.

Задание 7.1. Определим, какие из следующих бинарных отношений на множествах $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ являются отображениями? Отображениями X в Y?

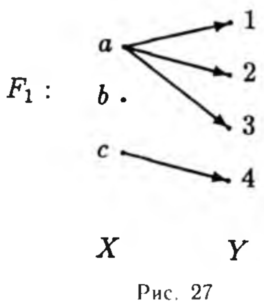


Рис. 27

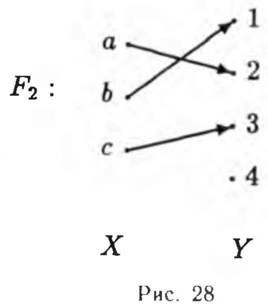


Рис. 28

Построим графы этих отношений и постараемся выделить особенности тех из них, которые являются отображениями (рис. 27, 28, 29).

$$F_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}.$$

Можно заметить, что $(\langle a, 1\rangle \in F_1 \wedge \langle a, 2\rangle \in F_1)$, но $1 \neq 2$, это означает, что F_1 ? не ? является отображением.

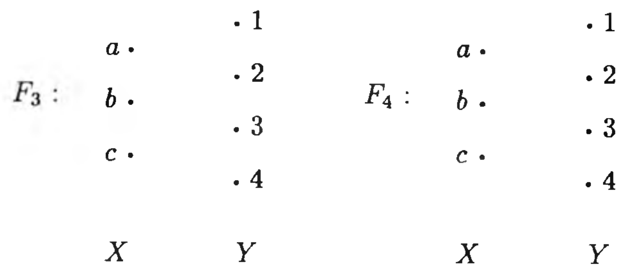
$$F_2=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

отображение, так как нет неравных кортежей с одинаковыми первыми элементами, и

$$\mathrm{Dom}\, F_2=\{a, b, c\}=X, \ \mathrm{Im}\, F_2=\{1, 2, 3\}\subset Y,$$

следовательно, $F_2: X \to Y$.

$$F_3 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 4\rangle\} \quad F_4 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$$



? не ? является отображением ? не ? является отображением

Рис. 29

Вывод. Граф отношения на множествах X и Y, состоящих из конечного числа элементов, есть граф отображения **из** X в Y, если ? ◆
и является графом отображения X **в** Y, если ? ◆

Пример 7.1. Бинарные отношения примера 5.5:

$$[+]=\{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mid \{x, y, z\}\subset \mathbf{R} \wedge z=x+y\}\subset \mathbf{R}^2\times \mathbf{R}=\mathbf{R}^3,$$

и

$$[\cdot]=\{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mid \{x, y, z\}\subset \mathbf{R} \wedge z=xy\}\subset \mathbf{R}^2\times \mathbf{R}=\mathbf{R}^3,$$

являются отображениями $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, так как в силу свойств действительных чисел их сумма и произведение определяются однозначно и не существует кортежей

$$\langle\langle x_0, y_0\rangle, z_1\rangle \in [+] \text{ и } \langle\langle x_0, y_0\rangle, z_2\rangle \in [+]$$

таких, чтобы $z_1 \neq z_2$. Аналогично для отношения $[\cdot]$.

Ссылаясь на этот факт и свойства таких простых операций с действительными числами, мы будем через некоторое время утверждать, например, что сложение и умножение матриц — тоже отображения, а потом введем еще и более сложные отображения.

Очевидно утверждение.

Утверждение 7.1. *Для любого множества X тождественное отношение $i_X = \{\langle x, x\rangle \mid \forall x \in X\}$ есть отображение.*

Определение 7.5. ***Сужением отображения*** *f: $X \to Y$ на подмножество $X' \subset X$ называется такое сужение $f|_{X'}$ отношения f,* что $\operatorname{Dom} f|_{X'} = X'$.

Ясно, что если f — отображение X в Y, то условие (7.3.2) единственности кортежа $\langle x, y\rangle \in f$ с произвольным фиксированным $x \in X$ сохраняется для любых кортежей $f|_{X'}$, а $\operatorname{Dom} f|_{X'} = X'$, тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 7.2. *Для любого отображения $f: X \to Y$ его сужение $f|_{X'}: X' \to Y$ есть отображение.*

Так в задании 7.1 отображение $F_4 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$ есть сужение отображения $F_2 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle\}$ на множество $X' = \{?, ?\} \subset X = \{a, b, c\}$.

Пример 7.2. В примере 4.3, по существу, вводилось и бинарное отношение на множествах всех точек плоскости $\mathbf{\Pi}$ и всех упорядоченных пар действительных чисел $\mathbf{R}^2$ сопоставлением точке ее координат относительно некоторой заданной системы координат:

$$p = \{\langle M, \langle x, y\rangle\rangle \mid x = m_y \cap (OX),\ y = m_x \cap (OY)\} \subset \mathbf{\Pi} \times \mathbf{R}^2.$$

(Для наглядности будем считать заданную на плоскости систему координат прямоугольной декартовой) (рис. 30).

Это отношение есть отображение $p: \mathbf{\Pi} \to \mathbf{R}^2$. Докажем это, показав выполнимость всех условий определения 7.3.

1. $\operatorname{Dom} p = \mathbf{\Pi}$, так как для любой точки плоскости проводима конструкция примера 4.3 и определены ее координаты.

2. p — отображение.

$$\forall M \in \mathbf{\Pi} \left| \begin{array}{l} \langle M, \langle x_1, y_1\rangle\rangle \in p \\ \langle M, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in p \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle.$$

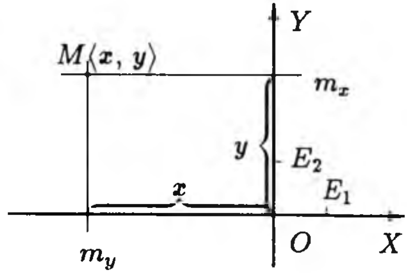


Рис. 30

3. Очевидно, что $\operatorname{Im} p \subset \mathbf{R}^2$.

Таким образом, сопоставление точке плоскости ее координат однозначно и является отображением $p: \mathbf{\Pi} \to \mathbf{R}^2$. Естественно, аналогичное утверждение имеет место для точек пространства, только областью значений соответствующего отображения является $\mathbf{R}^3$. ■

Задача 7.1.2. Является ли бинарное отношение задачи 5.1.2 $W=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{Z} \wedge x$ делит $y\}$ отображением? Почему?

Указание. Выпишите сначала несколько кортежей отношения W, например, с $x=2$, и проверьте выполнимость условия (7.1).

$$2\in \operatorname{Dom} W=\mathbf{Z}\left|\begin{array}{l}\langle 2, ?\rangle\in W\\ \langle 2, ?\rangle\in W\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow} \; ? \; .$$

Следовательно, отношение делимости W $\overline{\text{? не ?}}$ является отображением.

Задание 7.2. Определим, является ли отношение T, сопоставляющее каждому треугольнику вписанную в него окружность, отображением множества Δ всех треугольников (плоскости) в множество Θ всех окружностей (плоскости)? Почему?

1. $\operatorname{Dom} T=?$

2. Второе условие, по существу, требует ответа на вопрос — единственна ли окружность, вписываемая в треугольник? ◆

3. $\operatorname{Im} T\overset{?}{=}\Theta$.

Следовательно, T — $\overline{\text{? не ?}}$ является отображением $\Delta\to\Theta$.

Является ли отношение O, сопоставляющее каждой окружности описанный вокруг нее треугольник, отображением множества Θ всех окружностей (плоскости) в множество Δ всех треугольников (плоскости)? Почему?

Прежде чем решать эту задачу, отметим, что $O=T^{-1}$, т. е.бинарное отношение O является инверсией T.

1. $\operatorname{Dom} O\overset{?}{=}\operatorname{Im} T=\Theta$.

2. Условие требует ответа на вопрос — единствен ли треугольник, описанный около окружности? ◆

3. $\operatorname{Im} O\overset{?}{=}\operatorname{Dom} T=\Delta$.

Следовательно, O — $\overline{\text{? не ?}}$ является отображением $\Theta\to\Delta$.

Определение 7.6. *Для $\langle x, y\rangle\in f$ отображения $f: X\to Y$ второй элемент y кортежа называют* ***образом*** *его первого элемента x, а первый элемент кортежа x —* ***прообразом*** *второго элемента y.*

Обозначения: $y=f(x)$ и, соответственно, $x=f^{-1}(y)$, или $f: x\to y$.

Рассмотрев графы отображений F_2, F_3 и F_4 задания 7.1, можно сделать следующий вывод.

Вывод. Прообразов у элемента может быть несколько, а **образ всегда единствен** в силу единственности в отображении кортежа с данным первым элементом.

Объединение всех прообразов элемента при данном отображении иногда называют его ***полным прообразом****.*

Можно говорить об образе подмножества области определения и прообразе (полном образе) подмножества области значения отображения:

$$\text{Образ } D - f(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x)\ x \in D \subset \operatorname{Dom} f\},$$
$$\text{прообраз } C - f^{-1}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{-1}(y) | y \in C \subset \operatorname{Im} f\}.$$

Полезно знать некоторые соотношения для образов подмножеств области определения и прообразов подмножеств области значения отображений. Доказательства следующих утверждений не составляют большого труда.

Лемма 7.1. *Если $f: X \to Y$, то для любых подмножеств $\{A, B\} \subset X$ имеет место: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,* но

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),\ f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B).$$

Если к тому же $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$.

Лемма 7.2. *Если $f: X \to Y$, то для любых подмножеств $\{C, D\} \subset \operatorname{Im} f$ имеет место: $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(C)$ и $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D)$, но $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.*

Если к тому же $C \subset D$, то $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

Задача 7.1.1. Докажите равенство $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ для любых подмножеств области определения отображения f.

Доказательство. Пусть $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow (y = f(x) | x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y = f(x) | (x \in ? \vee x \in ?)) \Leftrightarrow (y = f(x) | x \in ?) \vee (y = f(x) | x \in ?) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y \in f(A) \vee y \in f(B)) \stackrel{?}{\Rightarrow} y \in f(A) \cup f(B)$.

$$f(A \cup B) \stackrel{?}{=} f(A) \cup f(B). \qquad \blacksquare$$

Задача 7.1.3. Если равенство $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ (см. лемму 7.1.) верно не для всякого отображения f, постарайтесь определить условия, которые надо потребовать от f, чтобы равенство было истинно для любых подмножеств $\operatorname{Dom} f$.

Задача 7.2.2. Найдите все отображения **из** множества $A = \{1, 2, 4\}$ в множество $B = \{a, b\}$ и все отображения A **в** B. Сколько всего бинарных отношений и сколько из них отображений A в B? Сравните с результатами задания 5.1.

Указание. Так как всякое отображение f из A в B есть подмножество $A \times B$, причем множества A и B конечны, а значит, конечно и множество $A \times B$ (оно состоит из ? элементов), то, во-первых, можно просто сосчитать (выписать) все его подмножества и таким образом определить число бинарных отношений на A и B, во-вторых, отобрать те из них, которые являются отображениями. Последнее удобно делать, используя графы (особенности графов отображений). Используйте рис. 31.

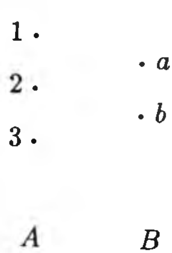


Рис. 31

Задача 7.2.3. Сколько существует отображений A в B, если $n(A)=p$, а $n(B)=q$. (Например, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$)?

§ 8. ОПЕРАЦИИ НА ОТОБРАЖЕНИЯХ

Так как всякое отображение есть отношение, то вполне естественно рассматривать их равенства, композиции и инверсии, как равенства, композиции и инверсии отношений. Однако, как мы знаем, не всякое отношение есть отображение, и поэтому эти операции на отображениях имеют свои особенности, изучением их мы и займемся.

Конечно, естественно считать ***отображения равными*** или ***совпадающими***, если они равны как отношения.

Обозначение: $f=g$.

По существу, при равенстве двух отображений, как и при равенстве отношений и множеств, речь идет о различных способах задания одного и того же множества.

Например, если Δ — множество всех треугольников некоторой плоскости, а Θ — множество всех ее окружностей, то бинарное отношение T задания 7.2, сопоставляющее каждому треугольнику вписанную в него окружность, является отображением. Отображением является и отношение, сопоставляющее всякому треугольнику плоскости окружность с центром в точке пересечения биссектрис его внутренних углов и радиусом $r=S/p$ (где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр). В силу известной теоремы о радиусе вписанной окружности равенство таких отображений очевидно.

Заметим, что и в общем случае из равенства отображений $f=g$ немедленно следует совпадение множеств:

$$\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g \text{ и } \operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g,$$

и более того: $f(x)=g(x)$ для любого $x\in\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g$. Очевидно и обратное: если $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g$ и $f(x)=g(x)$ для всех $x\in\operatorname{Dom} f$, то $f=g$.

Удобна символическая запись этого результата:

$$f=g \Leftrightarrow ((\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g)\wedge(\forall x\in\operatorname{Dom} f\Rightarrow f(x)=g(x))). \quad (8.1)$$

Полезно выделить признаки неравенства отображений — нарушение хотя бы одного из двух предыдущих условий, а именно:

$$f\neq g \Leftrightarrow ((\operatorname{Dom} f\neq\operatorname{Dom} g)\vee(\exists x \mid f(x)\neq g(x))). \quad (8.2)$$

Как мы уже отмечали, в математике существенно чаще приходится пользоваться отображениями **множества в множество**, поэтому предметом нашего изучения сейчас будут именно такие отображения.

Постараемся установить, является ли композиция двух отображений отображением.

Рассмотрим композицию отображений $f:X \to Y$ и $g:Y \to Z$ (как композицию бинарных отношений) и выясним, является ли она отображением.

1. В задаче 6.1.1 мы определили, что

$$\operatorname{Dom} g\circ f \subset \operatorname{Dom} f, \text{ а } \operatorname{Im} g\circ f \subset \operatorname{Im} g,$$

однако, в нашем случае $\operatorname{Dom} f = X$ и $\operatorname{Im} g \subset Z$, следовательно, как отношение, композиция $g\circ f \subset X \times Z$. Таким образом, выполнимость для $g\circ f$ условия 3 определения отображения установлена: $\operatorname{Im} g\circ f \subset Z$, а $\operatorname{Dom} g\circ f \subset X$.

2. Докажем, что $\operatorname{Dom} g\circ f = X$, т. е. для $g\circ f$ выполняется условие 1. определения отображения .

По определению композиции бинарных отношений f и g:

$$g\circ f = \{\langle x, z\rangle \mid (\exists\, y \in Y \mid (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g)\} \subset X \times Z.$$

Возьмем $\forall x \in X = \operatorname{Dom} f \xrightarrow{\text{опр. 5.? для } f} (\exists y \in Y \mid \langle x, y\rangle \in f)$, но $\operatorname{Dom} g \overset{?}{=} Y$, следовательно, и для указанного выше y найдется $z \in Z$ такой, что $\langle y, z\rangle \in g$.

В совокупности это означает, что

$$(\forall x \in X \;\; \exists\, z \in Z \mid \langle x, z\rangle \in g\circ f) \overset{?}{\Rightarrow} x \in \operatorname{Dom} g\circ f.$$

Это в силу произвольности элемента $x \in X$ влечет включение $X \subset \operatorname{Dom} g\circ f$, а в конечном счете, учитывая установленное выше $\operatorname{Dom} g\circ f \subset X$ — совпадение этих множеств.

3. Проверим выполнимость условия 7.1.2. для отношения $g\circ f$, т. е.

$$\forall x \in X \left| \begin{array}{l} \langle x, z_1\rangle \in g\circ f \\ \langle x, z_2\rangle \in g\circ f \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 \overset{?}{=} z_2.$$

f и g — отображения, это означает, что

$$\forall x \in X \left| \begin{array}{l} \langle x, y_1\rangle \in f \\ \langle x, y_2\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2 \qquad (8.*)$$

и

$$\forall y \in Y \left| \begin{array}{l} \langle y, z_1\rangle \in g \\ \langle y, z_2\rangle \in g \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = z_2. \qquad (8.**)$$

Возьмем $\langle x, z_1\rangle \in g\circ f$ и $\langle x, z_2\rangle \in g\circ f$ с произвольным $x\in X$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall\langle x, z_1\rangle \in g\circ f \overset{?}{\Rightarrow} (\exists y_1\in Y|(\langle x, y_1\rangle\in f\wedge\langle y_1, z_2\rangle\in g)) \\ \qquad\qquad \underline{(7.?): f \text{ — отображение}} \qquad \Big\|\, ? \\ \forall\langle x, z_2\rangle \in g\circ f \overset{?}{\Rightarrow} (\exists y_2\in Y|(\langle x, y_2\rangle\in f\wedge\langle y_2, z_2\rangle\in g)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Обозначим $y_1=y_2=y$.

$$\Rightarrow\left(\forall x\in X\ \exists y\in Y\,|\,\langle x, y\rangle\in f\wedge\left\{\begin{array}{c}\langle y, z_1\rangle\in g\\ ?\Big\|\\ \langle y, z_2\rangle\in g\end{array}\right.\right)\Rightarrow z_1\overset{?}{=}z_2.$$

Итак, с данным x кортеж $\langle x, z\rangle\in g\circ f$ единствен. Это означает, что $g\circ f$ — отображение, и $g\circ f$: $\mathrm{Dom}\, g\circ f\to Z$. ■

Тем самым доказана теорема.

Теорема 8.1. *Композиция отображений f: $X\to Y$, и g: $Y\to Z$ есть отображение $g\circ f: X\to Z$.*

В этом случае говорят еще, что множество отображений замкнуто относительно операции композиции отношений, а теорема делает корректным определение композиции отображений.

Определение 8.2. ***Композицией отображений*** *$g\circ f$ называется отображение, являющееся композицией отношений $g\circ f$.*

Напомним, что композиция отображений $g\circ f$, как отношений, определена только в том случае, если $\mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Dom}\, g$.

Композицию отображений удобно представлять схемой (рис. 32).

Таким образом, по определению, образ произвольного элемента при композиции отображений определяется как:

$$(g\circ f)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}(g\,(f\,(x))). \tag{8.3}$$

Задание 8.1. Для отображений f и g примера 6.2: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, где

$$f=\{\langle x, y\rangle\,|\{x, y\}\subset\mathbf{R}\wedge y=x^2\},\ g=\{\langle x, y\rangle\,|\{x, y\}\subset\mathbf{R}\wedge y=x+1\},$$

рассмотрите композиции отображений и постройте их графики:

1. $g\circ f\overset{?}{=}\{\langle x, y\rangle\,|\{x, y\}\subset\mathbf{R}\wedge y=x^2+1\}$.
2. $f\circ g\overset{?}{=}\{\langle x, y\rangle\,|\{x, y\}\subset\mathbf{R}\wedge y=x^2+2x+1\}$.

Они наглядно показывают, что композиция отображений, как и композиция бинарных отношений ? не ? коммутативна.

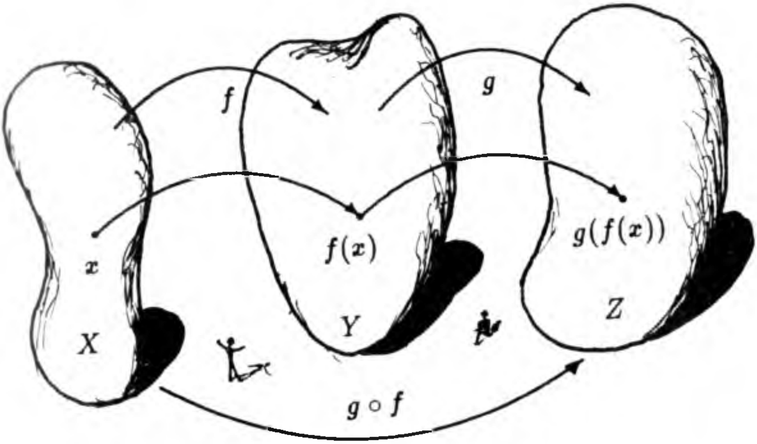


Рис. 32

Если f и g числовые функции, в частности:

$$\{\mathrm{Dom}\, f \times \mathrm{Im}\, f,\ \mathrm{Dom}\, g \times \mathrm{Im}\, g\} \subset \mathbf{R}^2,$$

то их композицию обычно называют ***сложной функцией***.

Теорема 8.2. *Композиция отображений обладает свойством ассоциативности, т. е. для любых отображений f, g, h:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \qquad (8.4)$$

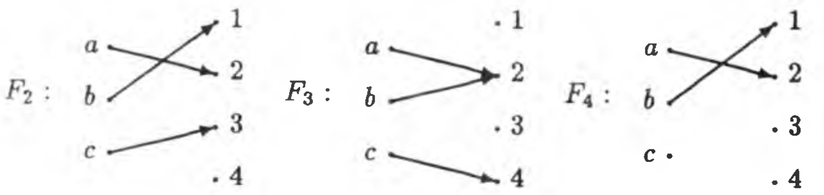
Ее доказательство следует из свойства композиции бинарных отношений (теорема 6.?). ♦

Таким образом, можно сделать вывод, что эти свойства композиции отображений (теоремы 8.1 и 8.2) в точности повторяют свойства бинарных отношений.

Теперь вполне естествен вопрос — каковы свойства инверсии отображения (как отношения) и является ли она для произвольного отображения тоже отображением.

Заданием 7.2 выше установлено, что бинарное отношение, сопоставляющее треугольнику вписанную в него окружность, есть отображение ($T: \Delta \to \Theta$), тогда как его инверсия — $O = T^{-1}$ отображением не является. Этот пример отвечает на предыдущий вопрос и показывает, что инверсия отображения, вообще говоря, может не быть отображением, или множество отображений не замкнуто относительно инверсии отношений. Это влечет необходимость следующего определения:

Определение 8.3. *Инверсия f^{-1} отображения f: $X \to Y$, как отношения, называется* ***обратным отображением*** *к f, если f^{-1} есть отображение. В этом случае* ***отображение*** *f называют* ***обратимым***.



? не ?обратимо ? не ?обратимо ? не ?обратимо

Рис. 33

З а д а н и е 8.2. Какие из отображений задания 7.1 F_2, F_3, F_4 обратимы? Каковы особенности их графов? (рис. 33).

Укажите признак графа обратимого отображения множества, состоящего из конечного числа элементов, в множество, также состоящее из конечного числа элементов. ◆

Условие, что отношение f^{-1} должно быть отображением существенно: если инверсия отношения определена всегда, то далеко не всякое отображение, как мы видели, обратимо, для его обратимости надо требовать, чтобы это обратное отношение удовлетворяло условиям (7.1), в частности:

$$\forall y \in \mathrm{Dom}\, f^{-1} \left| \begin{array}{l} \langle y,\ x_1\rangle \in f^{-1} \\ \langle y,\ x_2\rangle \in f^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2, \tag{8.5}$$

или

$$\forall y \in \mathrm{Im}\, f \left| \begin{array}{l} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{8.6}$$

Очевидно, что, если имеет место (8.6), то и истинно (8.5). Это означает, что установлено следующее.

У т в е р ж д е н и е 8.1. *Отображение f обратимо тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathrm{Im}\, f$ существует только единственный кортеж $\langle x,\ y\rangle \in f$ или* ***всякий*** *$y \in \mathrm{Im}\, f$ имеет* ***единственный прообраз***.

З а д а ч а 8.1.1. Определите, обратимы ли отображения (функции) f_1 и f_2.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $f_1 = \{\langle x,\ y\rangle \mid \{x,\ y\} \in \mathbf{R} \wedge y = x^3\}$.

Для решения задачи, очевидно, следует проверить выполнимость условия (8.6):

$$\text{Пусть } \left. \begin{array}{r} \langle x_1,\ y\rangle \in f_1 \Leftrightarrow y = x_1^3 \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f_1 \Leftrightarrow y = x_2^3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow ?$$ ◆

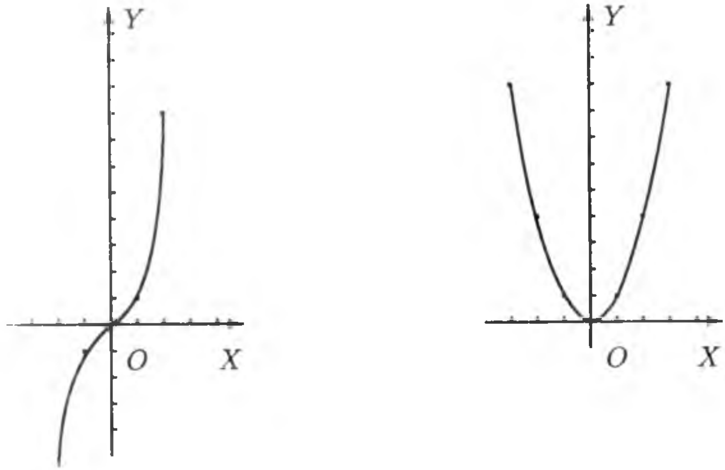


Рис. 34

Следовательно, отображение f_1 ? не ?обратимо.

2. $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, где $f_2=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge y=x^2\}$.

Так же проверим выполнимость условия (8.6):

$$\text{Пусть } \left.\begin{array}{l}\langle x_1, y\rangle\in f_2\Leftrightarrow y=x_1^2\\ \langle x_2, y\rangle\in f_2\Leftrightarrow y=x_2^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow ?$$ ♦

Следовательно, отображение f_2 ? не ?обратимо.

3. Сравните графики этих функций, укажите в чем проявляются на графиках их особенности, как обратимого и необратимого отображений (рис. 34).

Совершенно очевидны следствия.

Следствие 8.1. *Тождественное отображение* $i_X=\{\langle x, x\rangle \mid x\in X\}$ *обратимо.*

Следствие 8.2. *Если отображение* $f:X\to Y$ *обратимо, то* $\operatorname{Im} f=\operatorname{Dom} f^{-1}$, $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Im} f^{-1}$, $f^{-1}: \operatorname{Im} f\to X$.

Доказательство. По утверждению 5.2 $\operatorname{Im} f=\operatorname{Dom} f^{-1}$ и $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Im} f^{-1}$, следовательно, остается показать выполнимость условия 2 определения 7.3. Сделайте это самостоятельно. ♦

Указание: см. утверждение 8.1.

Задача 8.2.1. Для обратимого отображения f_1 задачи 8.1.1 укажите обратное.

$$f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \text{ где } f_1=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge y=x^3\}.$$

$$f_1^{-1}=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge y=?\}.$$

Его график на рис. 35.

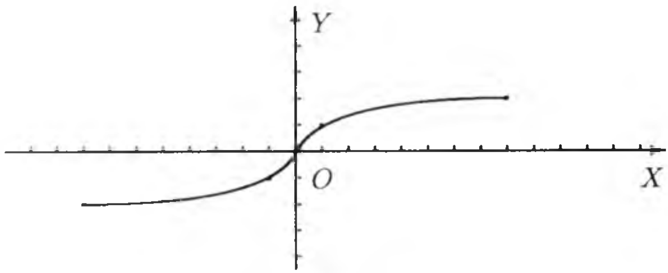


Рис. 35

Вывод. Графики обратимых функций $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ строго монотонны, причем графики f и f^{-1} симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Так как по утверждению 5.1 для любого бинарного отношения $(f^{-1})^{-1}=f$, а условия (8.5) и (8.6), очевидно, выполнимы одновременно, то имеет место следующее.

Следствие 8.3. *Если $f:X\to Y$ обратимо, то f^{-1} тоже обратимо, а $(f^{-1})^{-1}=f$.*

Укажем еще некоторые свойства композиции и обратимых отображений, которые важны в дальнейшем (особенно в таких вопросах курса, как преобразования множеств и теория групп):

Следствие 8.4. *Если $f:X\to Y$ обратимо, то $f^{-1}\circ f=i_X$ и $f\circ f^{-1}=i_{\operatorname{Im} f}$.*

Доказательство. По утверждению 6.?. $f^{-1}\circ f\supset i_X$ и $f\circ f^{-1}\supset i_{\operatorname{Im} f}$ так что достаточно доказать обратные к данным включения, чтобы можно было воспользоваться принципом двойного включения.

1. Докажем, что $f^{-1}\circ f\subset i_X$. Пусть

$$\langle x,\ z\rangle\in f^{-1}\circ f\overset{?}{\Rightarrow}(\exists y\in\operatorname{Im} f\,|\,(\langle x,\ y\rangle\in f\wedge\langle y,\ z\rangle\in f^{-1})),$$

по утверждению 8.1 кортеж $\langle x, y\rangle\in f$ с данным y единствен, значит, из того, что $\langle y,\ z\rangle\in f^{-1}$, а $\langle x,\ y\rangle\in f$ следует, что $z=?$, а отображение $f^{-1}\circ f$ содержит только кортежи вида $\langle x,\ x\rangle$, где $x\in\operatorname{Dom} f=X$, т. е. $f^{-1}\circ f=i_X=\{\langle x,\ x\rangle\,|\,x\in X\}$.

2. Второе включение $f\circ f^{-1}\subset i_{\operatorname{Im} f}$ установите самостоятельно, подумайте, как это можно сделать, не повторяя предыдущих рассуждений. ♦

Указание. См. утверждения 6.1 и 5.1. ■

Теорема 8.3. *Если отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ обратимы, то обратима их композиция $g \circ f$, причем $(g \circ f)^{-1}$: $\mathrm{Im}(g \circ f) \to X$ и*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{8.7}$$

Задача 8.1.3—8.1.2. Докажите теорему 8.3.

Доказательство.

Указание. См. задача 6.1.1, теорема 6.2, утверждение 8.1, следствие 8.2.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ g \text{ — обратимо} \xrightarrow{\text{утв. } 8.1} (\forall z \in \mathrm{Im}\, g\, \exists y \in Y \mid \langle y, z \rangle \in g) \\ \quad f \text{ — обратимо} \xrightarrow{\text{утв. } 8.1} (\forall y \in \mathrm{Im}\, f\, \exists x \in X \mid \langle x, y \rangle \in f) \end{array}\right\}$$

причем такие y и z единственны.

Из этого следует, что для всякого $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ единствен $\langle x, z \rangle \in g \circ f$, следовательно отображение $g \circ f$ — обратимо. ♦

2. $g \circ f$ — обратимо $\xrightarrow{\text{сл. } 8.?} (g \circ f)^{-1}: Z \to X$.

3. $(g \circ f)^{-1} \overset{\text{теор. } 6.?}{=\!=\!=} f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Задача 8.2.2—8.2.3. Докажите, что для любого обратимого отображения f и любых подмножеств $\{C, D\} \subset \mathrm{Im}\, f$ имеет место равенство: $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Указание. См. лемма 7.2, задача 7.1.3.

Отметим еще, что для сужений отображения f: $X \to Y$ на подмножества X имеет место

Утверждение 8.2. *Для любого отображения f: $X \to Y$ и подмножеств $X \supset X' \supset X''$ равны сужения $(f|_{X'})|_{X''} = f|_{X''}$.*

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Я тут недавно разработал очень любопытный удар лапой эн в направлении икс.

Е. Шварц. «Дракон»

Понятия бинарного отношения, его инверсии и композиции бинарных отношений по существу являются обобщениями аналогичных операций с отображениями, а отображение в свою очередь обобщает понятие числовой функции — при отображении существен не только характер элементов множеств, но закон, правило, по которому каждому из них сопоставляется какой-либо элемент того же самого или другого множества. Как и почти все основные понятия математики, понятие отображения претерпело довольно длительную эволюцию и только к концу XIX века приобрело современное содержание.

Можно с уверенностью утверждать, что математики древнего мира, включая и его эллинистический период, не осознавали функциональной зависимости в тех закономерностях, которые они открывали, хотя еще в Древнем Египте были известны точные формулы для вычислений площадей и объемов основных геометрических фигур (треугольников, параллелограммов, трапеций и, соответственно, пирамид, призм и т. д.), а идею зависимости от значений слагаемых можно заметить даже при вычислениях простейших числовых сумм. Круг интересов математиков того времени был ограничен исключительно статичными задачами: числовыми величинами, пространственными формами и их численными характеристиками.

Однако необходимо было ввести в математику некоторые новые, можно сказать, кинематические идеи, чтобы осознать подобные количественные зависимости между величинами, и сделать их предметом изучения. Это и происходит в начале XVII века, когда изменения в самом характере знания — эволюция от созерцательного к естественно-испытательному привели к появлению в науке таких исследователей, как Р. Декарт (Decartes René, 1596—1656), П. Ферма (Fermat Pierre, 1601—1665), И. Ньютон (Newton Isaac, 1643—1723), Г. Лейбниц, Я. Бернулли (Bernulli Jacob, 1654—1705), Д. Бернулли (Bernulli Daniel, 1700—1782), Л. Эйлер (Euler Leonard, 1707—1783), Ж. Б. Фурье (Fourier Jean Baptist Josepf, 1768—1830) и П. Г. Дирихле (Dirichlet Peter Gustav Lejene, 1805—1859). Их работы в различных областях оптики, механики и физики не только принесли им заслуженную славу, но и определили направления развития этих наук на долгие годы.

В исследовании французского математика П. Ферма «Введение в изучение плоских и телесных мест» встречается: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место». Под «местом» Ферма понимал линию, и таким образом, в этой работе шла речь по существу о графическом задании функциональной зависимости. Изучением линий по их уравнениям занимался и другой знаменитый французский математик Р. Декарт, в его «Геометрии», изданной в 1637 г., уже достаточно ясно указывалось на взаимную зависимость переменных величин геометрического истолкования, заданных аналитически. (Декарт заложил основы аналитической геометрии, введя систему координат и изучение линий по их уравнениям, ему же принадлежат многие из современных обозначений: a, b, c — для коэффициентов уравнений, x, y — для переменных, x^2, x^3 — для степеней). По работам в области дифференциального и интегрального исчисления другого математика XVII в.— англичанина И. Барроу (Barrow Isaac, 1630—1677) можно заметить, что тот уже вполне осознавал функциональную зависимость между двумя переменными. Однако, как и великий И. Ньютон, он представлял подобные зависимости прежде всего геометрически или, скорее, в некоторой механистической интерпретации, т. е. экспериментально и интуитивно.

Собственно термин «функция» (от позднелатинского — functio исполнение, осуществление) был введен Г. Лейбницем в работах по дифференциальному исчислению, хотя под функцией он понимал нечто отличное от общепринятого в настоящее время значения этого термина — различные отрезки, связанные с кривой, в частности, абсциссы и ординаты ее точек. Видимо, то понятие функции, от которого произошло ее современное определение, было введено к концу XVIII века французскими математиками Н. Кондорсе (Condorset Marie Jean Antoin Nicolas de Caritat, 1743—1794) и С. Лакруа (Lacroix Silvestr François, 1765—1843) независимо друг от друга. Историки математики до сих пор не имеют единого мнения, кому из них принадлежит это первенство. Интересно, что оба они, вообще говоря, полагали необязательным задание функции аналитически (формулой). Однако, большинство даже крупных математиков XVIII века не придавали этому значения и не осознавали различия между функцией и ее аналитическим заданием. Это послужило основанием для критики Л. Эйлером решения знаменитой задачи о колебании струны, которое предложил Д. Бернулли в 1753 году.

Эйлер считал, что функция — это произвольно начертанная кривая, а последователи Д'Аламбера (D'Alembert Jean Le Rond, 1717—1783), к которым относился и Д. Бернулли,— что суть функциональной зависимости в ее аналитическом выражении. Получив решение некоторого дифференциального уравнения в виде тригонометрического ряда, он предположил, что и любая функция (непрерывная) должна быть разложима в подобный ряд. Гипотеза о представлении любой непрерывной функции аналитическим выражением, развитая в работах французских математиков С. Лакруа и Ж. П. Фурье, была подтверждена в 1885 году выдающимся немецким математиком К. Вейерштрассом (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm, 1815—1897). Более того, в 1940 г. русский математик Д. Е. Меньшов (1892—1983) доказал, что для действительных функций действительного аргумента в разумном, но достаточно широком смысле (для измеримых и почти всюду конечных функций), такие два подхода к функции, как к геометрическому соответствию и как к аналитическому выражению эквивалентны.

Дискуссия по сущности понятия функции привела к тому, что к началу XIX века более употребляемым стало ее определение без требования аналитического задания, что позволило П. Дирихле в 1837 году сформулировать его знаменитое определение числовой функции, принимаемое до сих пор: «y есть функция переменного x, определенная на отрезке ($a \leqslant x \leqslant b$), если всякому значению переменного x, содержащемуся в этом отрезке, соответствует вполне определенная величина переменного y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено это соответствие». А крупнейший русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), знакомый с трудами Лакруа, еще в 1834 году пользовался понятием функции, весьма близким к определению Дирихле, ставшим столь широко известным позднее.

Долгое время понятие функции Дирихле считалось столь совершенным и точным, что недопустима была и мысль о возможности ее критики. И только после довольно длительного изучения функций с различными специальными свойствами стала насущной необходимость большей ясности пункта определения функции: «...причем совершенно неважно, каким именно способом установлено данное соответствие». Сначала шведский математик Т. Броден (Broden Torsten, 1857—?) указал в 1897 году пример функции на отрезке, составленной из разнородных и независимых между собой кривых, каждая из которых определена на одном из отрезков его бесконечного разбиения на отрезки меньшей длины. Такое бесконечное множество кривых, по его мнению, не только невозможно задать аналитически, но в силу своей природы не может быть изучено. В процессе развернувшейся дискуссии, в которой основное участие приняли математики французской школы, Р. Бэром (Bair René Louis, 1874—1932) была указана необходимость, по его мнению, описания закона соответствия всякому x числа $y(x)$. Ж. Адамар (Hadamard Jacques Salomon, 1865—1963), полемизируя с Ф. Борелем (Borel Félix Édouard, 1871—1956), утверждал, что подобное ограничение, во-первых, сильно напоминает требование аналитичности задаваемой функции, что необязательно, во-вторых, по существу сужает область применения теории функции, например, в теории газов, где она уже показала свою эффективность. Работы Бэра, Лебега и Адамара по теории функций оказались очень плодотворными, но вместе с тем чрезвычайно запутали вопрос с самим понятием функции, в котором математическая «зависимость» или «независимость» переменных в конечном счете оказалась связанной с обсуждением одного из положений теории множеств, известного в математике под названием принципа произвольного выбора или аксиомы Цермелло (немецкий математик, Zermello Ernst, 1871—1953), который сформулировал ее в 1904 году: Пусть дано множество $\mathscr{M}$, состоящее из попарно непересекающихся множеств M_α, тогда существует множество M, каждый элемент m_α которого принадлежит некоторому M_α, причем $M \cap M_\alpha = m_\alpha$

Основные противоречия в понятии функции находятся в довольно специализированных разделах математики и ее приложений Бэр писал: «Для нашего ума все приводится к конечному». Но в тех ее областях, где вполне непротиворечиво определение Дирихле, теория функций оказалась необычайно интересной и плодотворной, разрешив к тому же множество задач прикладной математики, физики, механики и т. д., породив целые разделы этих наук (дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальную геометрию, теорию функций комплексного переменного, теорию функциональных рядов, рядов Фурье и многие другие). А начиная с немецкого ученого В. Дедекинда (Dedecind Iulius Wilhelm Richard, 1831—1916), наряду с дискуссией вокруг самого понятия функции в работах различных математиков конца XIX — начала XX веков, происходит постепенное обобщение его на нечисловые множества (собственно указания на возможность таких обобщений отмечены еще в работах С. Лакруа и В. Кондорсе), а с середины XX века закрепляется традиционная ныне терминология в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 624 с.
3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1986.— 336 с.
4. *Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1974.— 352 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Бурбаки Н.* Теория множеств.— М.: Мир, 1965.— 456 с.
6. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 368 с.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа: Учеб. для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.— 736 с.
8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.
9. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 432 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 6. Операции на бинарных отношениях

[1] — стр. 50—52.
[5] — стр. 87—89.

§ 7°. Отображения (функции)

[1] — стр. 54—56.
[3] — стр. 111—112.
[4] — стр. 71—72.
[5] — стр. 90—92.
[7] — стр. 13—15.
[8] — стр. 41—42.

§ 8. Операции на отображениях

[1] — стр. 56—58, 60—64.
[3] — стр. 72—74.
[4] — стр. 71—73.
[5] — стр. 93—95.
[8] — стр. 43—46.


2 3 4 5 6 7 8
1 8 2 6 4 7 5 3
Y
X

Лекция 3

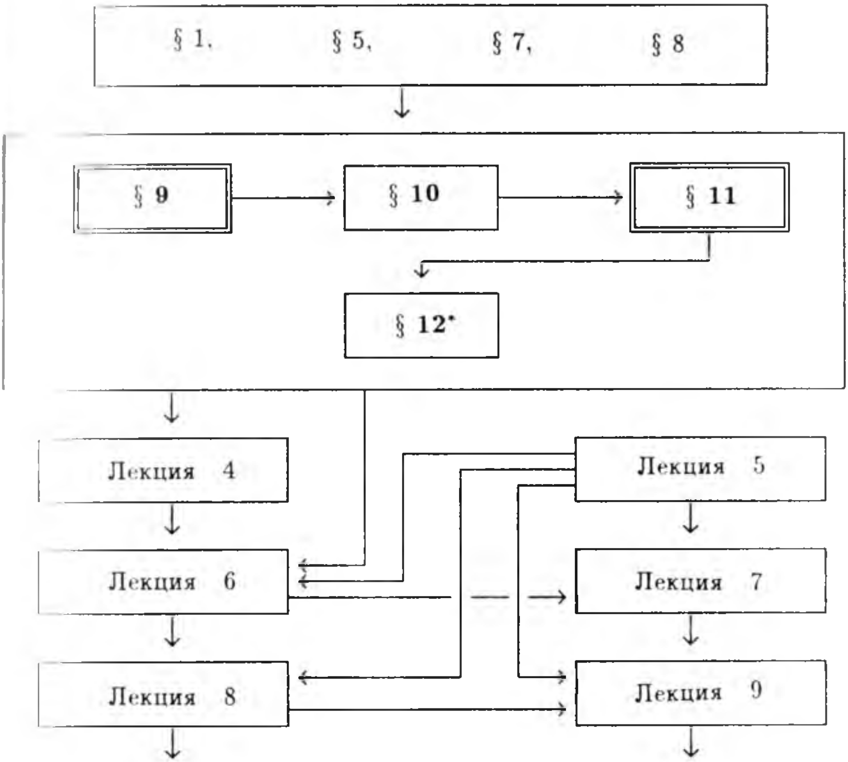
БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные понятия: инъективность, сюръективность и биективность отношения и отображения, преобразование множества, подстановка, симметрическая группа, мощность множества, равномощные множества; виды множеств: конечные, бесконечные, счетные, счетнобесконечные, несчетные.

Необходимые сведения: множество, бинарные и n-арные отношения, область определения и область значений бинарного отображения, образ и прообраз элемента и множества, операции на отображениях, обратимое отображение, сужение отображения, аффинная система координат на плоскости, аффинные координаты точки на плоскости, натуральные числа ($\mathbf{N}$), целые числа ($\boldsymbol{Z}$).

Рекомендации: при изучении темы материал § 12* (за исключением определений) можно опустить.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).
Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6— § 8).
Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9— § 12).
Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество.
Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства.
Лекция 6 — Подстановки. Группы.
Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 9. СЮРЪЕКТИВНЫЕ И ИНЪЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Два специальных вида бинарных отношений представляют особый интерес, первое из них — сюръективное или сюръекция, это название происходит от французского слова surjection — наложение, «sur» означает «на».

Определение 9.1. ***Бинарное отношение*** *$f \subset X \times Y$ называется* ***сюръективным,*** *если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $\langle x, y \rangle \in f$, т. е. $\operatorname{Im} f = Y$.*

Символическая запись этих условий:

$$\begin{array}{rl} & 1.\ \operatorname{Dom} f \subset X, \\ \text{sur:} & 2.\ \operatorname{Im} f = Y. \end{array} \qquad (9.1)$$

Последнее условие может быть сформулировано иначе (см. определение 5.4):

$$\text{sur: } 2'.\ \forall y \in Y\ \exists x \in X \mid \langle x, y \rangle \in f. \qquad (9.2)$$

Очевидно, отношение не сюръективно, если $\operatorname{Im} f \neq Y$ или

$$2''.\ \exists y \in Y\ \forall x \in X \mid \langle x, y \rangle \notin f. \qquad (9.3)$$

Естественно назвать ***сюръективным*** *и* ***отображение****, которое, как бинарное отношение, сюръективно и можно сказать, что отображение f: $X \to Y$ сюръективно, если* ***всякий элемент множества Y имеет прообраз.***

Обозначение такого отображения: f — sur, а множества всех сюръективных отображений X в Y — ***SMap***(X, Y).

Совокупность всех условий, чтобы бинарное отношение f было сюръективным отображением X в Y:

$$\begin{array}{rl} & 1.\ \operatorname{Dom} f = X. \\ \text{sur:} & 2.\ \operatorname{Im} f = Y. \\ & 3.\ \forall \{y_1, y_2\} \subset Y \left| \begin{array}{l} \langle x, y_1 \rangle \in f \\ \langle x, y_2 \rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2. \end{array} \qquad (9.4)$$

Из определения следует, что, чтобы установить, что отображение $f: X \to Y$ сюръективно, надо показать, что всякий элемент множества Y имеет прообраз, а несюръективно — найти в Y хотя бы один элемент, не имеющий прообраза.

Пример 9.1. Определим, какие из следующих отношений сюръективны и почему? Какие являются сюръективными отображениями? (рис. 36—41).

Первое отношение есть отображение $g_1: X \to Y$, где $X = \{a, b, c, d\}$, а $Y = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, так как всякому элементу из

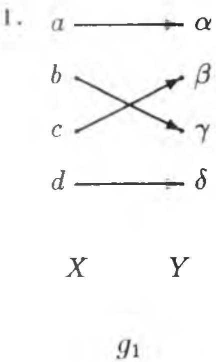


Рис. 36

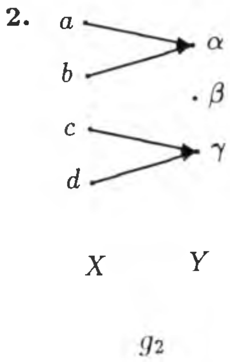


Рис. 37

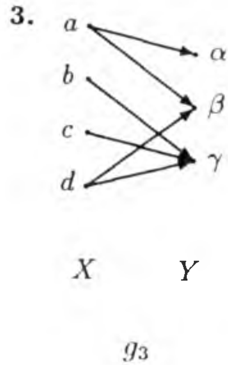


Рис. 38

X соответствует единственный элемент из Y. Оно сюръективно, так как при этом каждый элемент из Y имеет прообраз.

Отношение $g_2 \subset X \times Y$, где $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ также является отображением, $g_2 : X \to Y$, оно не сюръективно, так как элемент ? не имеет прообраза.

Бинарное отношение $g_3 \subset X \times Y$ не является отображением, так как оно содержит по крайней мере два кортежа $\langle ?, ? \rangle$ и $\langle ?, ? \rangle$ с одинаковыми первыми элементами.

Как отношение, g_3 сюръективно. ◆

Предыдущие примеры позволяют сделать заключение.

В ы в о д. Особенностью графа сюръективного отображения множества X, состоящего из конечного числа элементов, в множество Y с конечным числом элементов является то, что в каждом элементе множества X начинается стрелка графа и каждый элемент множества Y является концом некоторой стрелки графа.

А особенность графа не сюръективного отображения состоит в том, что найдется $y_0 \in Y$, который не является конечным элементом стрелки с началом в элементе множества X.

Отображение $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $f_1 = \{\langle x, y \rangle \mid y = -0{,}5x + 1\}$, ? не ? сюръективно, в чем не составляет труда убедиться, вычислив по x соответствующее значение y (рис. 39). ◆

Сюръективно и отображение

$$f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ где } f_2 = \{\langle x, y \rangle \mid y = x^3\}. \qquad ◆$$

Его график на рис. 40.

Отображение

$$f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ где } f_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{R} \wedge y = \sin x\}$$

? не ? сюръективно (рис. 41). ◆

4.

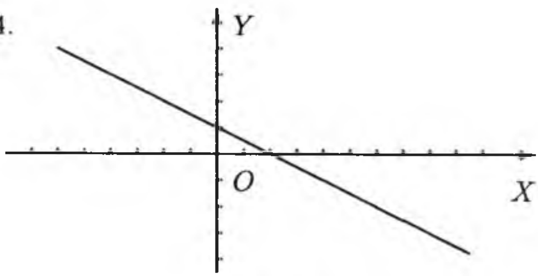


Рис. 39

5.

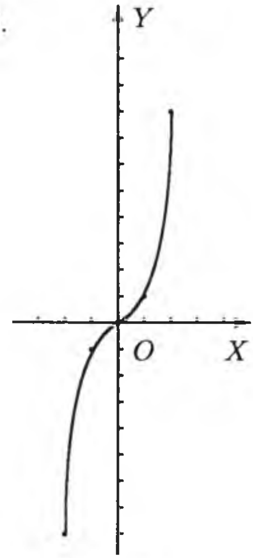


Рис. 40

6.

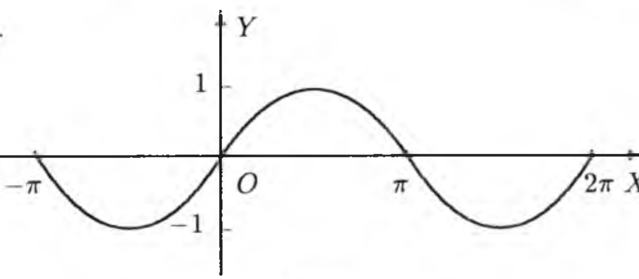


Рис. 41

Сюръективно ли и почему отображение: ◆

$$f_4 : \mathbf{R} \to [-1,\ 1], \text{ где } f_4 = \{\langle x,\ y\rangle \mid \{x,\ y\} \subset \mathbf{R} \wedge y = \sin x\}?$$

Замечание 9.1. Сложение и умножение действительных чисел (см. примеры 5.5, 7.1):

$$[+] = \{\langle\langle x,\ y\rangle, z\rangle \Rightarrow \mid \{x,\ y,\ z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = x + y\} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3,$$

и

$$[\cdot] = \{\langle\langle x,\ y\rangle,\ z\rangle \Rightarrow \mid \{x,\ y,\ z\} \subset \mathbf{R} \wedge z = xy\} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3,$$

как отображения сюръективны: ♦

$$\forall z\in \mathbf{R}\ \exists\langle\langle ?,\ ?\rangle,\ z\rangle\in|\cdot|\wedge\exists\langle\langle ?,\ ?\rangle,\ z\rangle\in[\cdot].$$

Теорема 9.1. *Если отображения $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$ сюръективны, то $g\circ f: X\to Z$ сюръективно.*

Эта теорема может быть сформулирована и иначе: композиция сюръективных отображений есть сюръективное отображение.

Доказательство. Очевидно, следует проверить выполнимость всех трех условий (9.4). Но $g\circ f: X\to Z$ (по теореме 8.?), что означает выполнение первого и последнего из этих условий: т. е., что $g\circ f$ — отображение и $\mathrm{Dom}\, g\circ f = X$, следовательно, остается проверить только то, что $\mathrm{Im}\, g\circ f = Z$ или (9.2): $(\forall z\in Z\ \exists\ ?\in ?|\langle ?,\ z\rangle\in g\circ f)$. ♦

Из сюръективности отображений f и g следует

$$\left.\begin{aligned} &g - \mathrm{sur}\Rightarrow(\forall\ z\in Z\ \exists\ y\in Y|\langle y,\ z\rangle\in g)\\ &f - \mathrm{sur}\Rightarrow(\forall\ y\in Y\ \exists\ x\in X|\langle x,\ y\rangle\in f)\end{aligned}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\langle x,\ z\rangle\in g\circ f.$$

Таким образом, для произвольного $z\in Z$ указан элемент $\langle x,\ z\rangle\in g\circ f\Rightarrow g\circ f - \mathrm{sur}$. ■

Следствие 9.1. *Множество* ***SMap***(X, X) *сюръективных отображений X в X замкнуто относительно их композиции.*

Это означает, что композиция сюръективных отображений множества в себя есть также сюръективное отображение его в себя. ♦

Задача 9.1.1. Для обратимого отображения $f\in$ ***SMap***$(X,\ Y)$ сюръективно ли отображение f^{-1}?

Указание. Приведите несколько примеров отображений сюръективных (определение 9.1) и обратимых (определение 8.3, утверждение 8.1, следствие 8.2), рассмотрите их графы или графики. ♦

$$\left.\begin{aligned} &f - \text{обратимое отображение}\overset{?}{\Rightarrow}f^{-1}\in \boldsymbol{Map}(?,\ ?)\\ &\mathrm{Dom}\, f^{-1}\overset{?}{=}Y\\ &\mathrm{Im}\, f^{-1}\overset{?}{=}X\end{aligned}\right\}\Rightarrow f^{-1}\overset{?}{\in}\boldsymbol{SMap}(Y,\ X).$$

Следующий вид бинарных отношений — инъективные, название происходит от французского слова injection — вложение, «in» означает «в».

Определение 9.2. ***Бинарное отношение*** *$f\subset X\times Y$ называется* ***инъективным,*** *если разным элементам из $\mathrm{Dom}\, f$ сопоставляет разные элементы множества $\mathrm{Im}\, f$.*

Символическая запись требований этого определения:

$$\begin{array}{l} 1.\ \operatorname{Dom} f \subset X. \\ 2.\ \operatorname{Im} f \subset Y. \\ \text{in: } 3.\ \forall \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2. \end{array} \tag{9.5}$$

Очевидно, бинарное отношение на множествах X и Y не инъективно, если нарушено последнее условие и

$$3''.\ \exists \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{array} \right\} \wedge x_1 \neq x_2. \tag{9.6}$$

Если в условии инъективности (9.5) бинарного отношения f поменять местами элементы каждого из кортежей:

$$\forall \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle y,\ x_1\rangle \in f^{-1} \\ \langle y,\ x_2\rangle \in f^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2,$$

то получим не что иное, как условие (7.1) единственности в отношений f^{-1} кортежа с первым элементом y — произвольным из $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$, что дает следующее.

Утверждение 9.1. *Если f — инъективное бинарное отношение, то f^{-1} является отображением.*

Естественно назвать инъективным отображение, которое, как бинарное отношение, инъективно, и можно сказать, что ***отображение*** f: $X \to Y$ ***инъективно****, если все разные (неравные) элементы множества X имеют разные образы.*

Обозначение такого отображения: f — in, а множества всех инъективных отображений X в Y — ***IMap*** $(X,\ Y)$.

Совокупность всех условий того, что бинарное отношение f является инъективным отображением X в Y:

$$\begin{array}{l} 1.\ \operatorname{Dom} f = X. \\ 2.\ \operatorname{Im} f \subset Y. \\ \text{in: } 3.\ \forall \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2. \\ 4.\ \forall \{y_1,\ y_2\} \subset Y \left| \begin{array}{l} \langle x,\ y_1\rangle \in f \\ \langle x,\ y_2\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2. \end{array} \tag{9.7}$$

Условие инъективности отображения f: $X \to Y$, по существу, означает, что разные элементы из X не могут иметь один и тот же образ, т. е. всякое значение $f(x)$ принимает только один раз, или любой элемент из $\operatorname{Im} f$ должен иметь только **единственный прообраз**, это позволяет переформулировать утверждение 8.1.

1.

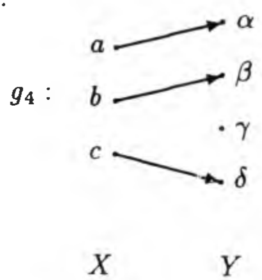


Рис. 42

2.

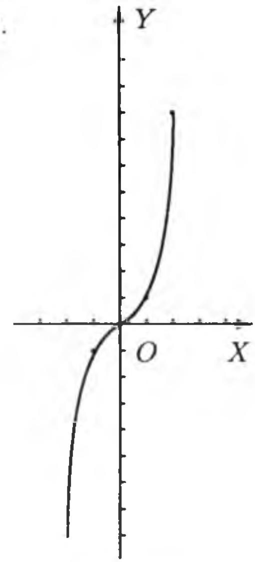


Рис. 43

Утверждение 9.2. *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно инъективно.*

Отсюда, в частности, следует такой важный факт, что всякое инъективное отображение обратимо.

Пример 9.2. Инъективные отображения (рис. 42 и 43):

1. $\operatorname{Im} g_4 = \{\alpha, \beta, \delta\} \subset Y$ и каждый из них имеет единственный прообраз.

2. Сюръективное отображение предыдущего примера 9.1 — f_2: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $f_2 = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^3)$ инъективно.

Доказывая в задаче 8.1.1 обратимость этого отображения, мы установили его монотонность (каждое значение x^3 принимает только один раз), что и означает инъективность f_2, как отображения. Это вполне наглядно на графике функции $y = x^3$:

Неинъективные отображения (рис. 44 и 45):

3. $g_5:\{a, b, c\} \to \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, так как найдутся два кортежа из g_5 $\langle ?, \alpha\rangle \neq \langle ?, \alpha\rangle$. ◆

4. Отображение, приведенное в задаче 8.1.1

$$f_5\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ где } f_5 = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^2\}.$$

Достаточно заметить, что $\langle 2, 4\rangle \in f_5$ и $\langle -2, 4\rangle \in f_5$, но $2 \neq -2$, т. е. выполняется условие (9.6).

3.

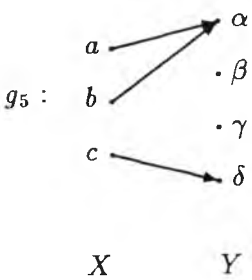


Рис. 44

4.

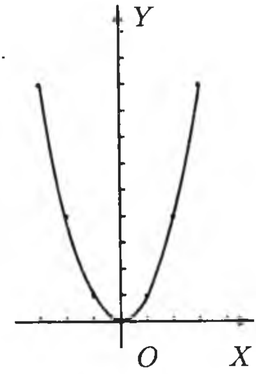


Рис. 45

Предыдущие примеры позволяют сделать заключение.

Вывод. Чтобы установить неинъективность отображения, достаточно найти таких два элемента, чтобы их образы совпадали.

Особенностью графа инъективного отображения f множества X, состоящего из конечного числа элементов, в множество Y с конечным числом элементов является то, что каждый элемент множества $\operatorname{Im} f$ является концом только одной стрелки графа.

А особенность графа не инъективного отображения состоит в том, что найдется $y_0 \in \operatorname{Im} f$, в котором заканчиваются по крайней мере две стрелки графа отображения f.

Замечание 9.2. Сложение действительных чисел (пример 5.5), как отображение $[+|]: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$? не ? инъективно.

Например,

$$\{\langle 1,\ 1\rangle,\ \langle ?,\ 3\rangle\} \subset \mathbf{R}^2 \left| \begin{matrix} \langle\langle 1,\ 1\rangle,\ 2\rangle \in [+|] \\ \langle\langle ?,\ 3\rangle,\ 2\rangle \in [+|] \end{matrix} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle 1,\ 1\rangle \neq \langle ?,\ 3\rangle.$$

Аналогично устанавливается неинъективность отображения умножения $[\cdot|]: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. ♦

Следующие теоремы дают представление о некоторых свойствах инъективных отображений.

Теорема 9.2. *Если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ инъективны, то $g \circ f: X \to Z$ инъективно.*

Иначе говоря, композиция инъективных отображений есть инъективное отображение.

Для доказательства надо проверить выполнение отображением $g \circ f$ всех условий (9.7). По теореме 8.1 $g \circ f: X \to Z$, (отображение X в Z), это означает, что остается убедиться в соблюдении для него только условия 3. инъективности (9.7.):

$$\text{in:}\quad \forall \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{matrix} \langle x_1,\ z\rangle \in g \circ f \\ \langle x_2,\ z\rangle \in g \circ f \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

В силу инъективности f и g имеем

$$f - \text{in} \Rightarrow \left(\forall \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{matrix} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \right) \qquad (9.f)$$

и

$$g - \text{in} \Rightarrow \left(\forall \{y_1,\ y_2\} \subset Y \left| \begin{matrix} \langle y_1,\ z\rangle \in g \\ \langle y_2,\ z\rangle \in g \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2 \right). \qquad (9.g)$$

Теперь возьмем $\{x_1,\ x_2\} \subset X$ и соответствующие кортежи

$$\left. \begin{matrix} \langle x_1,\ z\rangle \in g \circ f \overset{?}{\Rightarrow} (\exists y_1 \in Y | (\langle x_1,\ y_1\rangle \in f \wedge \langle y_1,\ z\rangle \in g)) \\ \xrightarrow{(9.g)} \quad \Vert \qquad\qquad \\ \langle x_2,\ z\rangle \in g \circ f \overset{?}{\Rightarrow} (\exists y_2 \in Y | (\langle x_2,\ y_2\rangle \in f \wedge \langle y_2,\ z\rangle \in g)) \end{matrix} \right| \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \left. \begin{matrix} (\exists y \in Y | (\langle x_1,\ y\rangle \in f \wedge \langle y,\ z\rangle \in g)) \\ \Vert^{?} \\ (\exists y \in Y | (\langle x_2,\ y\rangle \in f \wedge \langle y,\ z\rangle \in g)) \end{matrix} \right| \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Что и требовалось доказать, так как это означает единственность в отображении $g \circ f$ кортежа с произвольным вторым элементом из $\operatorname{Im} g \circ f$. ■

Следствие 9.2. Множество $\boldsymbol{IMap}(X,\ X)$ инъективных отображений X в X замкнуто относительно их композиции.

Задача 9.1.3. Если $f \in \boldsymbol{IMap}(X,\ Y)$, то f — обратимо (утв. 9.2). Является ли отображение f^{-1} инъективным?

Указание. См. утверждения 9.2, 5.1, следствия 8.2, 8.3. ♦

Теорема 9.3. Если отображение $f\colon X \to Y$ инъективно, то $f^{-1} \circ f = id_X$ и $f \circ f^{-1} = id_{\operatorname{Im} f}$.

Задача 9.1.2. Докажите теорему 9.3.

Указание. См. следствие 8.4, утверждение 9.2.

Доказательство. f — инъективно $\overset{?}{\Rightarrow} f$ — обратимо и, значит ($f^{-1} \circ f = id_X \wedge f \circ f^{-1} = id_{\operatorname{Im} f}$ (почему? ♦)

§ 10. БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В математике среди основных проблем встречаются так называемые задачи классификации, в которых требуется выделить объекты (математические структуры), обладающие в каком-то смысле одинаковыми свойствами, в частности, одинаковым количеством элементов. Когда элементов в множествах конечное число, это можно сделать просто, пересчитав их элементы и сравнив результаты. Однако, если элементов сравниваемых двух множеств бесконечно много (например, натуральных и целых чисел, или точек прямой и отрезка), то их пересчет уже невозможен и требуется иной способ сравнения. В качестве такого способа сравнения множеств предлагается выяснить существует или нет так называемое биективное отображение, или биекция, одного из множеств в другое. При этом будет очевидно, что, если два множества с конечным числом элементов имеют их одинаковое количество, то такое отображение существует. Слово bijection можно перевести как «двойное наложение». Наряду с термином биективное встречается термин взаимнооднозначное, что близко к переводу с латинского слова bijecion (bi — двойной, jacio — бросаю).

Определение 10.1. *Отображение $f\colon X \to Y$ называется* ***биективным****, если оно инъективно и сюръективно.*

Обозначение: f — bi. Множество всех биективных отображений X в Y иногда обозначается ***BMap***$(X,\ Y)$.

Объединяя условия сюръективности (9.3) и инъективности (9.6), получим символическую запись требований биективности отображения $f\colon X \to Y$.

$$\begin{array}{rl}
 & 1.\ \mathrm{Dom}\, f = X. \\
\mathrm{sur:} & 2.\ \mathrm{Im}\, f = Y. \\
\mathrm{in:} & 3.\ \forall\, \{x_1,\ x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x_1,\ y\rangle \in f \\ \langle x_2,\ y\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2. \\
 & 4.\ \forall\, \{y_1,\ y_2\} \subset Y \left| \begin{array}{l} \langle x,\ y_1\rangle \in f \\ \langle x,\ y_2\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2.
\end{array} \qquad (10.1)$$

Очевидно вытекающее из определений сюръективности и инъективности отображения простое, но важное и утверждение.

Утверждение 10.1. *Отображение $f\colon X \to Y$ биективно тогда и только тогда, когда* ***всякий элемент*** *множества Y имеет* ***единственный прообраз.***

Оно позволяет довольно легко среди отображений примеров 9.1 и 9.2 указать биективные отображения:
g_1 — bi, f_1 — bi, f_2 — bi. ♦

Сформулируйте отличительные характеристики графа биективного отображения множества, состоящего из конечного числа элементов, в множество с конечным числом элементов, объединяя свойства графов сюръективного и инъективного отображений таких множеств. ♦

Замечание 10.1. Примером простейшего биективного отображения является тождественное: $i_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$.

Задача 10.1.1. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$. Определите, существуют ли сюръективные отображения $A \to B$? Инъективные отображения $A \to B$? Биективные? Почему? Постарайтесь подсчитать число различных сюръективных, инъективных и биективных отображений $A \to B$, если такие имеются.

Ответьте на те же вопросы для отображений $B \to A$ тех же самых множеств.

Указание. См. задачу 7.2.2. так как существует всего 8 отображений $A \to B$ и 9 отображений $B \to A$, то можно просто построить их графы и выбрать из них обладающие требуемыми свойствами (см. выводы в § 9).

Однако постарайтесь, не строя графы, ответить на вопрос о существовании биективных отображений $A \to B$ или $B \to A$ (см. утверждение 10.1).

Задача 10.1.2. $A = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$. При каких m и n существуют сюръективные отображения $A \to B$? Инъективные отображения $A \to B$? Биективные? Почему?

Указание. См. утверждение 10.1, выводы в § 9, задачу 7.2.2.

Теоремы 9.1 и 9.2, характеризуя композиции сюръективных и инъективных отображений, в совокупности дают следующие утверждения.

Теорема 10.1. *Если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ биективны, то отображение $g \circ f: X \to Z$ тоже биективно.*

Следствие 10.1. *Множество всех биективных отображений множества в себя замкнуто относительно операции их композиции.*

Теорема 10.2. *Если отображение $f: X \to Y$ биективно, то $f^{-1}: Y \to X$ биективно.*

Задача 10.2.2. Докажите теорему 10.2.

Доказательство. Надо установить выполнимость всех условий (10.1) биективного отображения для отношения f^{-1}.

Указание. См. утверждение 9.1, 9.2, следствие 8.2. Выпишите свойства отображения f и «оберните» их, т. е. посмотрите, какие свойства они определяют у отображения f^{-1} и почему.

для отображения f		для отношения f^{-1}	
1. $\mathrm{Dom}\, f = X$	$\overset{?}{\Longrightarrow}$	$X = \mathrm{Im}\, f^{-1}$	2.
2. $\mathrm{Im}\, f = Y$	$\overset{?}{\Longrightarrow}$	$Y = \mathrm{Dom}\, f^{-1}$	1.
3. f — in $\overset{?}{\Rightarrow} f$ — обратимо	$\overset{?}{\Longrightarrow}$	$f^{-1}: ? \to ?$	4.
4. f — отображение	$\overset{?}{\Longrightarrow}$	f^{-1} — in.	3.

Таким образом, для бинарного отношения f^{-1} выполнены все условия (10.1), и f^{-1} — биективное отображение. ■

Следствие 10.2. *$f^{-1}\circ f=i_X$ и $f\circ f^{-1}=i_Y$ для биективного отображения $f:X\to Y$.* (по теоремам 9.?, 10.?). ♦

§ 11. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ БИЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ниже мы рассмотрим несколько важных примеров и приемов доказательств биективности отображений и связанные с этим понятия.

Пример 11.1. Выше в примере 4.3 было введено отношение $p\subset \mathbf{\Pi}\times\mathbf{R}^2$, а в примере 7.2 мы показали, что p является отображением $p:\mathbf{\Pi}\to\mathbf{R}^2$, сопоставляющим точке плоскости ее аффинные координаты относительно некоторой фиксированной системы координат, т. е. $p(M(x,y))=\langle x, y\rangle$. Теперь покажем, что это отображение биективно, т. е. выполнение условий сюръективности и инъективности (второго и третьего в (10.1)).

Для простоты изображения будем считать, что система координат прямоугольная декартова, хотя это и не влияет на общность рассуждений.

Доказательство.

1. Чтобы установить сюръективность отображения p, возьмем произвольную упорядоченную пару чисел $\langle x, y\rangle\in\mathbf{R}^2$, построим на координатных осях точки M_x и M_y так, чтобы $|OM_x|=|x|$, причем, $M_x\in[OX')$, если $x\geqslant 0$, и $M_x\in[OX'')$, если $x<0$, так же по y построим точку M_y (рис. 46).

Напоминание. $[OX')$ — луч с начальной точкой O в направлении точки X'. (OX') — прямая, проходящая через точки O и X'.

Проведем прямую $m_x|(m_x\ni M_y\wedge m_x\|(OX))$, аналогично — прямую $m_y\|(OY)$, их точка пересечения — $m_x\cap m_y=M$. По по-

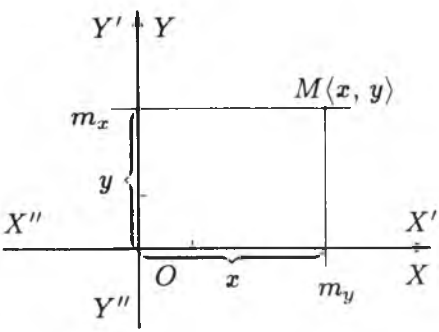


Рис. 46

строению такая точка определяется кортежем $\langle x, y\rangle$, и значит, имеет координаты (x, y), что по определению бинарного отображения p означает $p(M)=\langle x, y\rangle$. Т. е. для произвольной упорядоченной пары чисел $\langle x, y\rangle\in\mathbf{R}^2$ нашлась точка плоскости M такая, что $\langle M, \langle x, y\rangle\rangle\in p$, что означает сюръективность отображения p, или $\operatorname{Im} p=\mathbf{R}^2$.

2. Для доказательства инъективности отображения p отметим, что, если $M^1\neq M^2$, то хотя бы одна пара прямых различна: или $m_x^1\neq m_x^2$ или $m_y^1\neq m_y^2$. Пусть для определенности $m_y^1\neq m_y^2 \overset{?}{\Rightarrow} x_1\neq x_2 \overset{?}{\Rightarrow} \langle x_1, y_1\rangle\neq\langle x_2, y_2\rangle$ (рис. 47).

Случай $m_x^1\neq m_x^2$ аналогичен.

Таким образом, доказана биективность отображения, сопоставляющего точке плоскости ее координаты. □

Эти примеры важны тем, что отождествление биективным отображением точек плоскости и кортежей их координат является обоснованием геометрических интерпретаций различных уравнений и неравенств с двумя переменными.

Совершенно ясно, что аналогичная конструкция может быть проведена для точек пространства и кортежей трех координат.

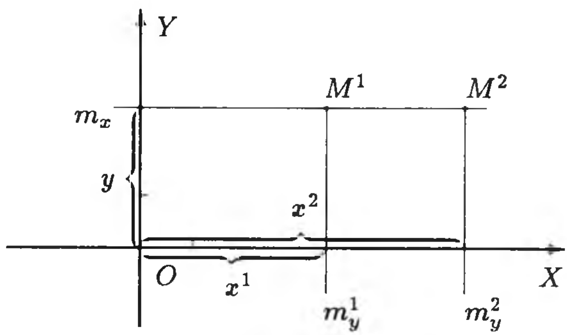


Рис. 47

Пример 11.2. Биективно отображение $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ такое, что

$$f(\langle x, y\rangle)=\langle x+1, y-2\rangle.$$

Докажем, что:

1. f — сюръективно: Пусть кортеж $\langle x', y'\rangle\in\mathbf{R}^2$ произволен. Надо выяснить, найдется ли элемент $\langle x, y\rangle\in\mathbf{R}^2$ такой, что $f(\langle x, y\rangle)=\langle x', y'\rangle$. Если такой кортеж $\langle x, y\rangle$ существует, то в силу определения $f(\langle x, y\rangle)=\langle x+1, y-2\rangle$, а так как f — отображение и кортеж $\langle\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle\rangle\in(\mathbf{R}^2)^2$ должен быть единственным, то обязательно $\langle x', y'\rangle=\langle x+1, y-2\rangle$.

Из этого равенства следует:

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'+2 \end{cases}$$

Действительно, $f(\langle x-1,\ y+2\rangle) = ?$
таким образом, для произвольной пары $\langle x',\ y'\rangle \in \mathbf{R}^2$ указан кортеж $\langle x,\ y\rangle = \langle x'-1,\ y'+2\rangle \in \mathbf{R}^2$ такой, что $f(\langle x,\ y\rangle) = \langle x',\ y'\rangle$ значит, всякий элемент $\langle x',\ y'\rangle \in \mathbf{R}^2$ имеет прообраз, и отображение f сюръективно.

2. Отображение f инъективно. **(Обратите внимание на прием доказательства: инъективность часто доказывается «рассуждениями от противного»).**

Предположим, что отображение не инъективно, и найдутся $\langle x_1,\ y_1\rangle \neq \langle x_2,\ y_2\rangle$ такие, что $f(\langle x_1,\ y_1\rangle) = f(\langle x_2,\ y_2\rangle)$. По определению отображения f:

$$\left.\begin{array}{l} f(\langle x_1,\ y_1\rangle) = \langle x_1+1,\ y_1-2\rangle \\ \Vert \\ f(\langle x_2,\ y_2\rangle) = \langle x_2+1,\ y_2-2\rangle \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1+1 = x_2+1 \\ y_1-2 = y_2-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \langle x_1,\ y_1\rangle = \langle x_2,\ y_2\rangle.$$

Отсюда следует отсутствие неравных кортежей, образы которых при действии f совпадали бы, т. е. инъективность f.

Следовательно, отображение f биективно. ■

Для биективных отображений множества в себя существует специальный термин:

Определение 11.1. *Биективное отображение множества X в себя называется **преобразованием множества** X. Множество всех преобразований некоторого множества называется **группой преобразований** этого **множества**.*

Обозначение $\mathscr{P}(X)$.

Иногда группу преобразований множества называют его ***симметрической группой*** и используют обозначение $S(X)$.

Таким образом, в предыдущем примере речь шла о преобразовании множества $\mathbf{R}^2$.

Если требуется установить, является ли какое-либо отношение f преобразованием множества X, следует проверять выполнимость всех требований (10.1) при условии, что рассматриваются элементы одного множества X, т. е.:

$$\begin{array}{ll} & 1.\ \mathrm{Dom}\, f = X. \\ \mathrm{sur}: & 2.\ \mathrm{Im}\, f = X. \\ \mathrm{in}: & 3.\ \forall \{x_1, x_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x_1, y\rangle \in f \\ \langle x_2, y\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2. \\ & 4.\ \forall \{y_1, y_2\} \subset X \left| \begin{array}{l} \langle x, y_1\rangle \in f \\ \langle x, y_2\rangle \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2. \end{array} \qquad (11.1)$$

З а д а н и е 11.1. Докажите, что если на плоскости $\mathbf{П}$ задана некоторая аффинная система кооординат, то отображение $g: \mathbf{П} \to \mathbf{П}$ такое, что $g(M(x, y)) = M'(x+1, y-2)$ есть преобразование множества точек $\mathbf{П}$.

Указание. Сравните с примером 11.2. ◆

Теоремы 10.2 и 10.1 (и следствие 10.1) в случае преобразований множеств удобно объединить в одну теорему.

Т е о р е м а 11.1. *Инверсия любого преобразования множества X и композиция его преобразований есть преобразование X.*

Можно сказать иначе: группа преобразований любого множества замкнута относительно композиции и инверсии бинарных отношений, учитывая еще замечание 10.1, это можно записать «формулой»:

$$\forall \{f, g\} \subset \mathscr{P}(X) \Rightarrow (g \circ f \in \mathscr{P}(X) \wedge f^{-1} \in \mathscr{P}(X) \wedge i_X \in \mathscr{P}(X)). \quad (11.2)$$

З а д а ч а 11.1.1. Докажите, что если на плоскости $\mathbf{П}$ задана некоторая прямоугольная декартова (или аффинная) система, то бинарное отношение $h \subset \mathbf{П}^2$, где

$$h = \{\langle M(x, y), M'(x', y')\rangle \mid \langle x', y'\rangle = \langle x+y-1, x-y-4\rangle\}$$

есть преобразование этой плоскости.

Указание. См. примеры 11.1 и 11.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. $\mathrm{Dom}\, h \stackrel{?}{=} \mathbf{П}$.
2. h — sur. **Указание.** См. пример 11.2. п. 1. ◆
3. h — in. **Указание.** См. пример 11.2. п. 2. ◆
4. h — отображение, так как по всяким x', y' однозначно находится $\langle x+y-1, x-y-4\rangle$. ◆

Частным случаем преобразований являются подстановки, а именно:

О п р е д е л е н и е 11.2. *Преобразование множества $P(n)$, состоящего из конечного числа (n) элементов, называется* ***подстановкой****. Множество всех подстановок такого множества называется* ***симметрической группой*** *n*-***ого порядка.***

Она обозначается: S_n.

Подстановки используются, например, при вычислении определителей матриц, на их свойствах основан обширный и глубокий раздел физики — кристаллография, а в математике — теория дискретных групп. Интересно, что симметрические группы имеют непосредственное отношение к построениям мозаик на плоскости и известным головоломкам: «кубику Рубика» и «игре 15».

Теорема 11.1 для множества подстановок читается следующим образом.

Теорема 11.2. Симметрическая группа $\mathscr{S}_n$ замкнута относительно композиции и инверсии отношений.

Т. е. инверсия любой подстановки, композиция подстановок множества $P(n)$ и его тождественное отображение есть подстановки множества $P(n)$.

Со свойством биективности отображения связано понятие равномощности множеств.

Определение 11.3. ***Множество** X называется **равномощным множеству** Y (или называют X и Y **одинаковой мощности**), если существует биективное отображение множества X в множество Y.*

Замечание 11.1. Можно утверждать, что всякое множество равномощно самому себе. (Замечание 10.?). ♦

Если множество X равномощно множеству Y, то Y равномощно X (теорема 10.?). ♦

Если множество X равномощно множеству Y, а множество Y равномощно множеству Z, то X равномощно Z (теорема 10.?). ♦

Тем самым, по существу, мы уже описали отдельные свойства некоторого бинарного отношения:

$$\mathscr{E} = \{\langle X,\ Y\rangle \mid \exists\, f\colon X \to Y \wedge f - \mathrm{bi}\},$$

(где X и Y — произвольные множества).

Если множество состоит из конечного числа элементов, то сравнить их, т. е. установить, существует ли биективное отображение одного в другое, не составляет большого труда (см. задачи 10.1.1 и 10.1.2), однако, для множеств, число элементов которых бесконечно, задача отыскания такого отображения непроста, даже в очевидных случаях.

Рассмотрим примеры.

Пример 11.3. Казалось бы ответ на вопрос, каких чисел больше натуральных или четных положительных, очевиден: всякое четное положительное число — есть число натуральное, $2\mathbf{N} \subset \mathbf{N}$, т. е. четных натуральных чисел «меньше» чем натуральных. Однако, эти множества $\mathbf{N}$ и $2\mathbf{N}$ равномощны.

Доказательство.

○ Прежде всего определим бинарное отношение на множествах $\mathbf{N}$ и $2\mathbf{N}$:

$$f = \{\langle n,\ m\rangle \mid m = 2n\} \subset \mathbf{N} \times 2\mathbf{N}.$$

Проверяем выполнимость условий (10.1) биективности отображения:

1. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{N}$, так как $\forall n \in \mathbf{N}\, \exists \langle n,\ ?\rangle \in f$.

sur: 2. $\mathrm{Im}\, f = 2\mathbf{N}$, так как $\forall m \in 2\mathbf{N}\, \exists \langle ?,\ m\rangle \in f$.

in: 3. $\forall \{n_1,\ n_2\} \subset \mathbf{N} \left| \begin{array}{l} \langle n_1,\ m\rangle \in f \Rightarrow m = 2n_1 \\ \langle n_2,\ m\rangle \in f \Rightarrow m = 2n_2 \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 = n_2.$

4. $\forall \{m_1,\ m_2\} \subset 2\mathbf{N} \left| \begin{array}{l} \langle n,\ m_1\rangle \in f \Rightarrow m_1 = ? \\ \langle n,\ m_2\rangle \in f \Rightarrow m_2 = ? \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 = m_2.$

Тем самым доказана равномощность, и в этом смысле «равное количество» элементов множеств $\mathbf{N}$ и $2\mathbf{N}$.

Задача 11.1.2. Докажите, что множества всех целых $\mathbf{Z}$ и натуральных чисел $\mathbf{N}$ равномощны.

Доказательство.

Указание. Рассмотрите такое бинарное отношение на множествах $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{N}$:

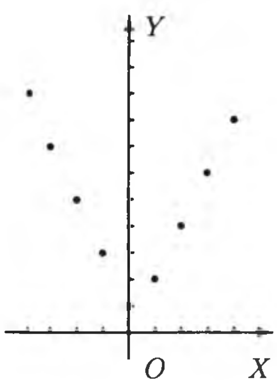
$$g = \{\langle z,\ n\rangle \mid ((n = 2z \text{ при } z > 0) \wedge (n = -2z + 1 \text{ при } z \leqslant 0)\} \qquad (11.g)$$

и проверьте для него выполнимость условий (10.1).

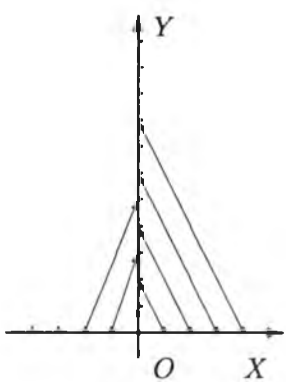
Чтобы получить представление о свойствах этого отношения, полезно изучить его график и граф (рис. 48).

1. $\mathrm{Dom}\, g = \mathbf{Z} \Leftarrow (\forall z \in \mathbf{Z}\, \exists \langle z,\ ?\rangle \in g)$. ♦

2. g — sur: $\mathrm{Im}\, g \stackrel{?}{=} \mathbf{N}$.



график



граф

Рис. 48

Если $n \in \mathbf{N}$ и четно, т. е. $n = 2k$, то найдется $\langle ?, 2k \rangle \in g$. Если $n \in \mathbf{N}$ и нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то возьмем $-k \in \mathbf{Z}$, тогда

$$\langle -k,\ 2k+1 \rangle = \langle -k,\ -(-2k)+1 \rangle \in g. \qquad \blacklozenge$$

3. g — in: См. граф. ♦
4. g — отображение ♦

Задача 11.2.1. Докажите, что равномощны множества точек любых двух отрезков.

Напоминание. $[AB]$ — обозначение отрезка AB, $]AB[$ — обозначение интервала AB (отрезка без точек-концов).

1°. Если отрезки равной длины, то их равномощность очевидна. Попробуйте построить (геометрически) простейшие биективные отображения (они помогут увидеть построения в общем случае), если (рис. 49—51):

1) отрезки принадлежат параллельным прямым ♦
2) отрезки принадлежат одной прямой ♦
3) отрезки принадлежат непараллельным прямым. ♦

2°. Пусть отрезки разной длины (рис. 52, 53).

Указание. Сначала рассмотрите отрезки, принадлежащие разным прямым (непараллельным, параллельным), потом — одной.

1) Отрезки не принадлежат одной прямой, зададим отношение

$$p = \{\langle M,\ M' \rangle \mid M' = (OM) \cap [C'D']\} \subset [AB] \times [C'D'].$$

Проверьте для него сначала выполнимость условий (10.1.1) и (10.1.4):

1. (10.1.1): $\mathrm{Dom}\, p \overset{?}{=} [AB]$. Для любой ли точки M отрезка $[AB]$ найдется $M' = (OM) \cap [C'D']$ и почему? ♦

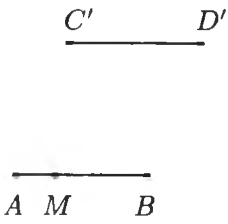


Рис. 49

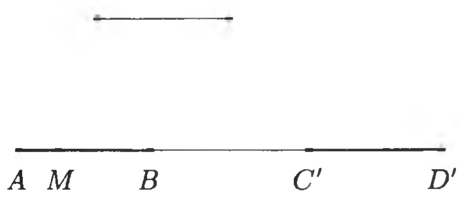


Рис. 50

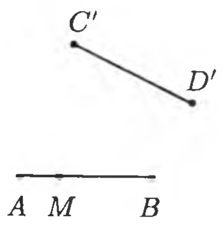


Рис. 51

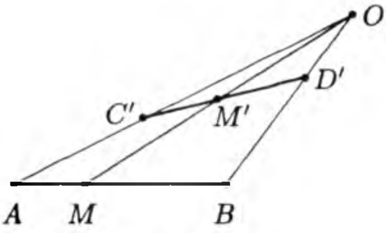


Рис. 52

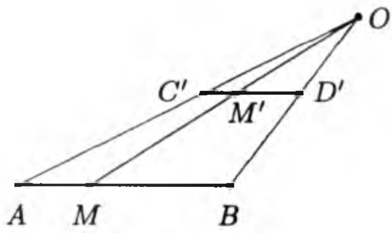


Рис. 53

2. (10.1.4) Является ли p — отображением? Т. е. однозначно ли точкой $M \in [AB]$ определяется кортеж $\langle M, M' \rangle \in p$? (Точка $M' \in [C'D']$?) ♦

Выполнение этих условий означает, что $p:[AB] \to [C'D']$.

Докажите, что отображение p сюръективно и инъективно. Для этого проверьте выполнимость второго и третьего из условий (10.1):

3. p — sur (10.1.2): Почему $\forall M' \in [C'D']$ найдется $M \in [AB]$ такая, что $(OM) \cap [C'D'] \neq \varnothing$ и $(OM) \cap [C'D'] = M'$? ($M \overset{?}{=} (OM') \cap \cap [AB] \neq \varnothing$). ♦

4. p — in (10.1.3): Предположим, что точки $M_1 \neq M_2$, но

$$\{M_1, M_2\} \subset [AB] \left| \begin{matrix} \langle M_1, M' \rangle \in p \Rightarrow M' = (OM_1) \cap [C'D'] \\ \langle M_2, M' \rangle \in p \Rightarrow M' = (OM_2) \cap [C'D'] \end{matrix} \right\} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ точки M_1, M_2, M', O принадлежат одной прямой $\overset{?}{\Rightarrow}$

$$\overset{?}{\Rightarrow} M_1 = M_2.$$ ♦

В совокупности п. п. 1—4 означают, что p — биективное отображение, а значит, отрезки $[AB]$ и $[C'D']$ равномощны. □

Доказательство равномощности $[AB]$ и $[C'D']$ проведено на чертеже для непараллельных отрезков. Если $[AB] \| [C'D']$, отображение p и построение, и доказательство аналогичны. Сделайте чертеж. ♦

2) Если отрезки $[AB]$ и $[C'D']$ принадлежат одной прямой, то можно свести решение задачи к комбинации предыдущих случаев, точнее, композиции некоторых из предыдущих отображений. Постарайтесь построить два таких отображения и укажите их композицию (рис. 54). ♦

Таким образом, может быть установлено, что любые два отрезка равномощны, что означает, как это ни кажется странным на первый взгляд, что отрезки $[AB]$ и $[C'D']$ равномощны, т. е. «имеют одинаковое количество точек», и в случае, когда $[AB] \subset [C'D']$. Попробуйте сделать соответствующие построения (рис. 55). ♦

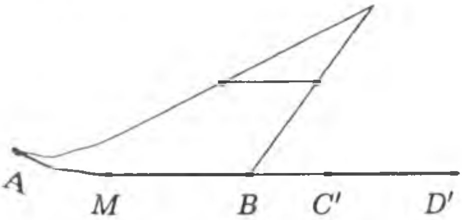


Рис. 54

Рис. 55

Предложенное «геометрическое» доказательство равномощности отрезков не единственно, но довольно наглядно. Попробуйте придумать другое (может быть алгебраическое?) доказательство их равномощности.

Не составляет особого труда увидеть, что равномощны не только любые два отрезка, но и любые два интервала, так как отображение $p|_{]AB[} :]AB[\to]C'D'[$ также биективно. ♦

Задача 11.2.2. Докажите, что равномощны множества точек полуокружности S' и ее диаметра $]CD[$ (общие, диаметрально противоположные точки выколоты).

Отображение $q: S' \to]CD[$ задается сопоставлением точке $M \in S'$ ее ортогональной проекции на $]CD[$, т. е. основания перпендикуляра, проведенного к $]CD[$ через точку M (рис. 56). Докажите, что такое отображение сюръективно и инъективно.

1. q — sur (10.1.2): $\operatorname{Im} q \overset{?}{=}]CD[$. ♦
2. q — in (10.1.3): ♦

$$\{M_1, M_2\} \subset S' \left| \begin{array}{l} \langle M_1, M' \rangle \in q \\ \langle M_2, M' \rangle \in q \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} M_1 = M_2.$$

Это в совокупности означает биективность отображения q и равномощность множеств точек полуокружности S' и ее диаметра $]CD[$.

Задача 11.1.3. Докажите, что равномощны множества точек прямой и касающейся ее полуокружности, задав отображение $s: l \to S' | s: M \to M' = (OM) \cap S'$ и доказав его биективность (рис. 57).

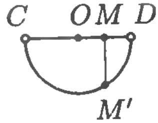


Рис. 56

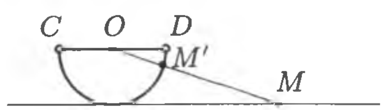


Рис. 57

1. s — sur (10.1.2): $\operatorname{Im} s \overset{?}{\Rightarrow} |CD|$.
2. s — in (10.1.3.):

$$\{M_1, M_2\} \subset l \left| \begin{array}{l} \langle M_1, M' \rangle \in s \\ \langle M_2, M' \rangle \in s \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} M_1 = M_2.$$

Задача 11.2.3. Докажите, что равномощны множества точек прямой и любого ее интервала.

Указание. Надо определить (придумать) некоторое отображение и доказать его биективность (10.1). Его определить, вообще говоря, можно многими способами, но одно из них можно построить вполне наглядно, используя и результаты предыдущих задач 11.2.2 и 11.1.3 (см. еще теоремы 10.1, 9.1, 9.2).

§ 12*. КОНЕЧНЫЕ И СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие равномощности множеств и его свойства (опр. 11.3, замечание 11.1) позволяют выделять классы равномощных множеств или множеств *с равными кардинальными числами* (это эквивалентный термин используется наряду с понятием равномощности).

Конечно, интересно знать, как много существует неравномощных множеств и иметь в некотором смысле «эталонные множества», чтобы сравнивая с ними другие, легче было устанавливать равномощность множеств или ее отсутствие. В качестве таких эталонов естественно рассматривать, например, отрезки натурального ряда или множество всех натуральных чисел. Поэтому среди множеств прежде всего различают конечные и бесконечные, счетные и несчетные.

Определение 12.1. ***Множество****, равномощное с отрезком натурального ряда (т. е. подмножеством натуральных чисел, не превосходящих некоторое число n) называется* ***конечным****. Пустое множество также принято считать конечным. В противном случае говорят о* ***бесконечном множестве****.*

Конечное множество, состоящее из n элементов, обычно обозначают $P(n)$.

Утверждение 12.1. *Множества $P(m)$ и $P(n)$ не равномощны, если $n \neq m$.*

Задача 12.1.1. Докажите утверждение 12.1.

Указание. См. задачи 10.1.1 и 10.1.2, рассмотрите случаи: 1). $m > n$, 2). $m < n$. — Подумайте, в чем препятствие биективности отображения $P(m) \to P(n)$ для таких m и n?

Таким образом, конечных, но неравномощных множеств, очевидно, бесконечно много, можно сказать, что их различных видов, или, точнее, классов, столько же, сколько натуральных чисел. Каждому такому классу конечных множеств сопоставляется одинаковое для всех его представителей число элементов, т. е. ***кардинальное число***. Для множеств $P(n)$ это n, в таком случае говорят о множестве мощности n. Это позволяет «пересчитать» все классы конечных, но неравномощных множеств, очевидно, что их столько же, сколько натуральных чисел.

Определение 12.2. *Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется* ***счетно бесконечным***.

Мощность множества всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ (и, соответственно, всех ему равномощных) имеет специальное обозначение: $\aleph_0$ — читается «алеф-ноль» ($\aleph$ — буква алфавита иврит).

Известно, что число различных типов бесконечных множеств не только бесконечно, но даже несчетно.

Определение 12.3. *Конечные и счетно бесконечные множества объединяются названием* ***счетные множества***. *Все остальные множества называются* ***несчетными***.

В силу задачи 11.1.2 и примера 11.3 множества всех целых чисел $\mathbf{Z}$ и всех четных натуральных чисел $2\mathbf{N}$ счетные, точнее — счетно бесконечные.

Пример 12.1. Несчетным является множество точек интервала. Так как все интервалы равномощны (см. задачу 11.2.1), то достаточно доказать несчетность одного интервала числовой прямой, например, $]0, 1[$.

Задача, которую мы будем решать, по своей сути довольно трудна: надо показать, что **не существует** биективного отображения $\mathbf{N} \to]0, 1[$.

Доказательство. 0. Все действительные числа от 0 до 1 будем записывать в виде бесконечных десятичных дробей, но некоторые из них имеют не одно такое представление (например, $1 = 0{,}99999... = 9/10 + 9/100 + 9/1000 + ...$): всякую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной с периодом 9, поэтому, чтобы устранить неоднозначность, их будем рассматривать именно в такой записи.

1. Предположим, что множество точек интервала $]0, 1[$ счетно, т. е. всех их можно занумеровать: $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$. Каждое такое число — бесконечная десятичная дробь: $x_n = 0{,}a_n^1 a_n^2 a_n^3 \ldots$.

2. Образуем десятичную дробь x, отличную от всех чисел этого множества: $x = 0{,}b^1 b^2 b^3 \ldots$, выбирая числа b^i ($i \in \mathbf{N}$), отличные от «диагональных» a_i^i:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0{,}a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots\ , \\ x_2 = 0{,}a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = 0{,}a_n^1 a_n^2 a_n^3 \ldots\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

но так, чтобы $b^i \neq 0$ и $b^i \neq 9$ (т. е. $x \neq 0$ и $x \neq 0{,}999... = 1$). Ясно, что такой выбор возможен.

3. Очевидно, что полученный таким образом $x \in]0, 1[$.

4. Если наше предположение о счетности дробей промежутка $]0, 1[$ верно, то $\exists m \in N | x = x_m$, это немедленно влечет равенство b^m некоторому «диагональному элементу»: $b^m = a_m^m$, что противоречит выбору числа x. Следовательно, десятичная дробь x, определенная выше, не входит в счетное множество $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$, но $x \in]0, 1[$, а это и означает, что все числа интервала $]0, 1[$ занумеровать нельзя, т. е. не существует биективного отображения $\mathbf{N}$ в $]0, 1[$, и множество точек такого интервала несчетно. ■

Выше мы привели знаменитое доказательство Г. Кантора, который сообщил его почти сто лет назад в 1891 году на съезде естествоиспытателей в Галле.

Так как естественным образом отождествляются множество действительных чисел (числовая прямая) и множество точек прямой, множество точек интервала единичной длины и числовой промежуток $]0, 1[$, а задачей 11.2.3 указано, что множества точек прямой и ее любого интервала равномощны, (т. е. существует биективное отображение $]0, 1[\to \mathbf{R}$), это позволяет утверждать, что множества всех действительных чисел и всех точек прямой несчетны, как равномощные интервалу $]0, 1[$ (см. замечание 11.1).

Мощность множества действительных чисел (и всех ему равномощных) обозначается $\mathbf{C}$ *и носит название мощности* ***континуума***.

(Continuum — латинское слово, оно означает непрерывность, неразрывное, сплошное).

Однако, как мы уже отмечали, этими тремя, хотя и важными примерами множеств: $P(n)$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, не исчерпываются конечные, счетные и несчетные множества. Следующие свойства помогут в определении равномощности множеств и построении других примеров равномощных или неравномощных множеств.

Теорема 12.1. *Любое бесконечное множество содержит счетное (счетно бесконечное) подмножество.*

Доказательство. Пусть M — некоторое бесконечное множество. Так как $M \neq \varnothing$, то найдется элемент $a_1 \in M$. Разность множеств (см. определение 1.7) — множество $M \backslash \{a_1\} \neq \varnothing$ и бесконечно, поскольку в противном случае M оказалось бы конечным множеством. Выберем $a_2 \in M \backslash \{a_1\}$. Из соображений, аналогичных предыдущим, множество

$$(M \backslash \{a_1\}) \backslash \{a_2\} = M \backslash \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$$

и бесконечно, а указанный процесс повторяем сколь угодно. Полученное таким образом множество по самому способу построения, очевидно, счетно, непусто и $M' = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset M$. ■

Теорема 12.2. *Любое подмножество счетного множества счетно.*

Теорема 12.3. *Объединение всякого конечного и счетного множеств счетно.*

Задача 12.1.2. Докажите теорему 12.3.

Указание. В качестве счетного множества можно брать множество $\mathbf{N}$, затем рассмотрите $P(2)\cup\mathbf{N}$, где $P(2)=\{a^1, a^2\}$, постарайтесь на этом примере найти идею доказательства для произвольного $P(n)$.

Теорема 12.4. *Объединение счетного множества счетных множеств счетно.*

Задача 12.1.3. Докажите теорему 12.4.

Указание. Докажите его сначала для случая объединения хотя бы двух счетных (счетно бесконечных) множеств — как в этом случае можно «занумеровать» элементы объединения этих множеств? Постарайтесь на этом примере найти идею доказательства общего случая.

Утверждение 12.2. *Множество $\mathbf{N}^2$ счетно.*

Задача 12.2.2. Докажите утверждение 12.2.

Указание. Биективное отображение $\mathbf{N}\to\mathbf{N}^2$ можно построить явно, но интереснее воспользоваться теоремой 12.4 — такое доказательство совсем просто.

Следствие 12.1. *Множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

Действительно, любое положительное рациональное число представимо в виде несократимой положительной дроби, следовательно, существует биективное отображение множества $\mathbf{Q}_+$ всех положительных рациональных чисел в множество P' — кортежей $\langle p, q\rangle$ всех натуральных взаимно простых чисел (не имеющих общих делителей). $\mathrm{P}'\subset\mathbf{N}^2$, отсюда (по утверждению 12.2 и теореме 12.?) следует счетность P', а значит и равномощного ему множества всех положительных рациональных чисел $\mathbf{Q}_+$. Множество $\mathbf{Q}_-$ всех отрицательных рациональных чисел также счетно. ♦

Тогда по теореме 12.4 множество всех рациональных чисел $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_-\cup\{0\}\cup\mathbf{Q}_+$ счетно, как объединение счетного (конечного) числа множеств. ■

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Высшее назначение математики — находить скрытый порядок в мире хаоса, который нас окружает.

Н. Винер. «Я — математик»

Знакомясь с историей основных понятий математики, хотя бы таких, как теория множеств и отображений, мы видим, что она совсем непроста и даже драматична, а метод дедуктивных рассуждений — основа математических доказательств, приводит к следствиям из очевидных утверждений, которые иногда кажутся противоречащими интуиции и здравому смыслу. Из известной аксиомы Цермелло (Пусть дано множество $\mathcal{M}$, состоящее из попарно непересекающихся множеств M_α, тогда существует множество M, каждый элемент m_α которого принадлежит некоторому M_α, причем так, что $M \cap M_\alpha = m_\alpha$.) вытекает удивительная возможность разбиения шара на конечное число частей, из которых движениями в пространстве (т. е. сохраняя расстояния) можно составить два таких же шара.

Иногда такие «противоречия» говорят о несовершенстве дедуктивного метода или системы аксиом, но зачастую открывают совершенно неочевидные, но истинно глубинные и глобальные закономерности.

К таким кажущимся противоречиям относится равномощность множеств точек прямой и ее любого интервала. Посмотрим на эту проблему с другой стороны. Понятно, что точек, как прямой, так и плоскости бесконечно много, но где больше? После того, как мы установили биективность отображения прямой в интервал, поспешного ответа, видимо, стоит остеречься. Прежде всего, очевидно, что способом, аналогичным доказательству равномощности прямой и интервала, можно показать равномощность множеств точек плоскости и квадрата без ограничивающих его отрезков. Это сведет задачу сравнения мощностей прямой и плоскости к сравнению равномощных им интервала и квадрата. Приведем рассуждения Кантора.

Множество точек квадрата естественным образом отождествимо с множеством кортежей $\langle x, y \rangle$ с бесконечными десятичными дробями вида $0,a_1a_2a_3...$, которые мы предполагаем записанными в бесконечном виде (см. пример 12.1, т. е. не принимается запись дробей с конечным числом значащих цифр). Идея Кантора заключается в том, чтобы слить эти дроби в одну десятичную дробь, по которой однозначно восстанавливались бы x и y (in), и которая принимала бы все положительные значения, не превосходящие 1 (sur), по одному разу (отображение), когда точка

$\langle x, y\rangle$ пробегает по всему квадрату (Dom). Тем самым было бы получено биективное отображение квадрата на единичный отрезок.

Казалось бы, такое соответствие просто установить, положив $f(\langle 0{,}a_1a_2a_3\ldots,\ 0{,}b_1b_2b_3\ldots\rangle)=0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$. (Отметим, что отношение

$$F=\{\langle\langle 0{,}a_1a_2a_3\ldots,\ 0{,}b_1b_2b_3\ldots\rangle,\ 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ .\rangle\},$$

очевидно есть отображение, так как кортежем $\langle 0{,}a_1a_2a_3\ldots,\ 0{,}b_1b_2b_3\ldots\rangle$ однозначно определяется число $0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ \ldots$). И по дроби $0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ \ldots$, отделяя числа на четных и нечетных местах после запятой, можно восстановить $x=0{,}a_1a_2a_3\ldots$ и $y=0{,}b_1b_2b_3\ldots$ однозначно, что и означает инъективность отображения: кортеж $\langle\langle x,\ y\rangle,\ 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots.\rangle\in F$ с произвольным фиксированным $0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots.$ единствен.

Однако оказывается, что определенное так отображение не сюръективно, потому что образом элемента $\langle x,y\rangle$ хотя и является бесконечная десятичная дробь, не превосходящая 1, но существуют бесконечные десятичные дроби, (например, вида $0{,}c_1c_20c_40c_6\ldots$), которые получаются только из конечных дробей. Для однозначности представления чисел в десятичной записи такое представление мы исключили из рассмотрения (так при $z=0{,}c_1c_20c_40c_6\ldots$ получим $x=0{,}c_100\ldots$ — с конечным числом ненулевых значащих цифр после запятой, а $y=0{,}c_2c_4c_6\ldots$). Обойти это противоречие можно, взяв за a_1, a_2, $a_3\ldots$, b_1, b_2, $b_3\ldots$ не отдельные цифры, а, как назвал их Кантор, «молекулы десятичной дроби», соединяя в одно целое любую ненулевую значащую цифру с предшествующим нулем. Например, если $z=0{,}3208007000302405\ldots$, то $c_1=3$, $c_2=2$, $c_3=08$, $c_4=007$, $c_5=0003$, $c_6=2$, $c_7=4$, $c_8=05$, ... Несколько изменим правило: пусть теперь a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 и т. д. обозначают не числа, стоящие, соответственно, на нечетных и четных местах после запятой, а такие «молекулы». Тогда любому $\langle x,\ y\rangle$ однозначно соответствует бесконечная дробь z, которая, в свою очередь, однозначно определяет и x и y, распадаясь на две дроби с бесконечным числом «молекул», т. е. бесконечные десятичные дроби. Такое отображение инъективно, т. е. по x и y число z получается однозначно, и всякое $z\in]0,\ 1[$ может возникнуть только однажды.

Это биективное отображение и устанавливает равномощность квадрата и интервала, что в конечном счете приводит к утверждению, что плоскость и прямая имеют одинаковую мощность континуум, или равномощность множеств $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}$.

Обобщение этого доказательства на произвольную степень $\mathbf{R}^n$ вполне очевидно. Г. Кантор в течение трех лет с 1874 года пытался доказать невозможность биективного соответствия между множествами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ при $n>1$, пока он к своему удивлению не построил его. «Я это вижу, но не верю в это»,— писал он Дедекинду...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—624 с.
3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1986.—336 с.
4. *Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1974.—352 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Бурбаки Н.* Теория множеств.— М.: Мир, 1965.—456 с.
6. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.—368 с.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа: Учеб. для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.—736 с.
8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.—496 с.
9. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.—432 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 9. Инъективные и сюръективные отображения

[1] — стр. 59—63.
[2] — стр. 19.
[3] — стр. 112.
[4] — стр. 72.
[8] — стр. 41.

§ 10. Биективные отображения

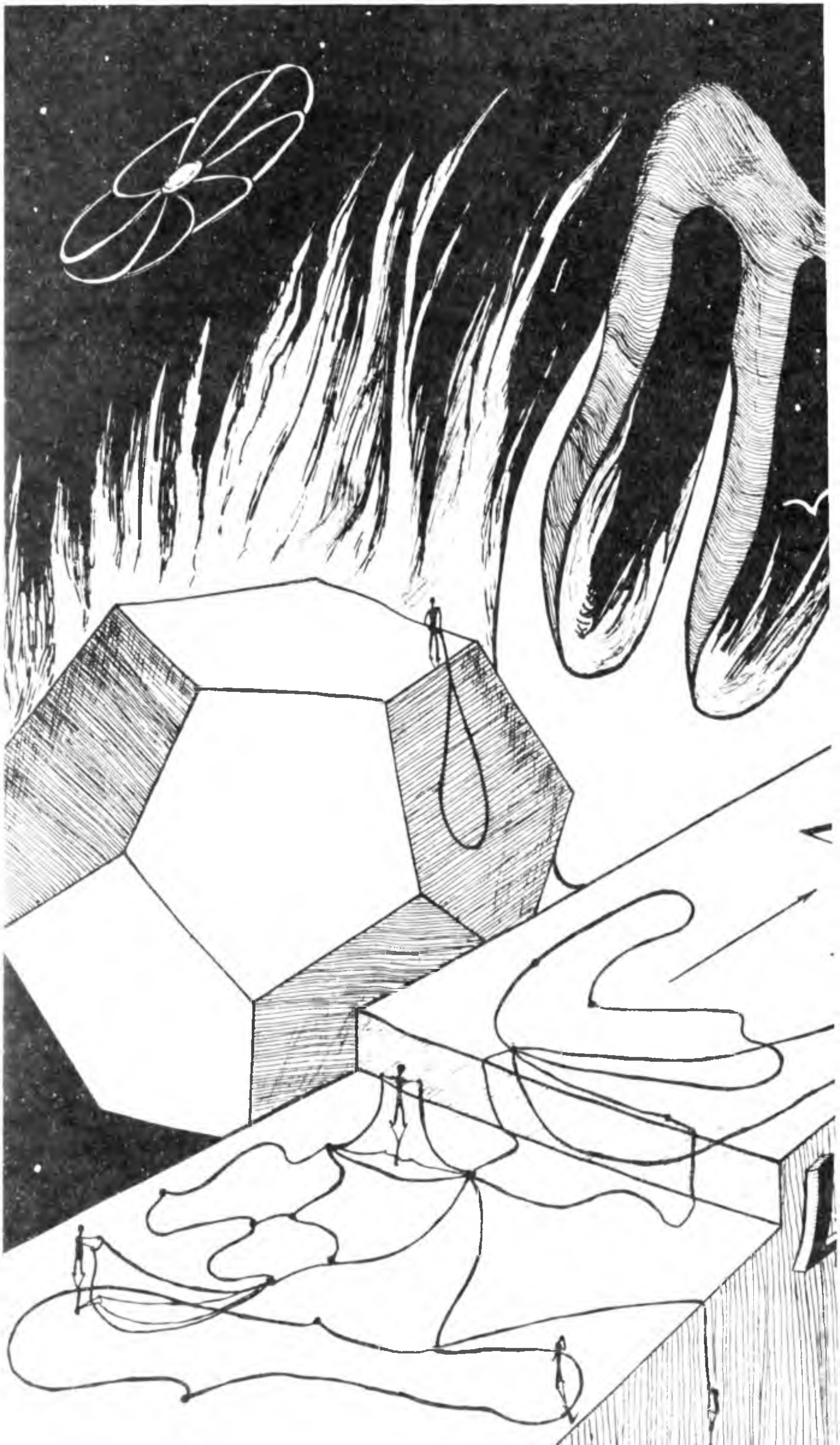
[1] — стр. 59—60.
[3] — стр. 112—113.
[6] — стр. 12—13.

§ 11. Некоторые примеры биективных отображений

[3] — стр. 112—113.
[4] — стр. 72—73.
[6] — стр. 12—13.
[9] — стр. 355—357

§ 12*. Конечные и счетные множества

[2] — стр. 24—26.
[6] — стр. 14, 18—22,50
[7] — стр. 64—68.
[9] — стр. 362—369.



Лекция 4

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ФАКТОР-МНОЖЕСТВО

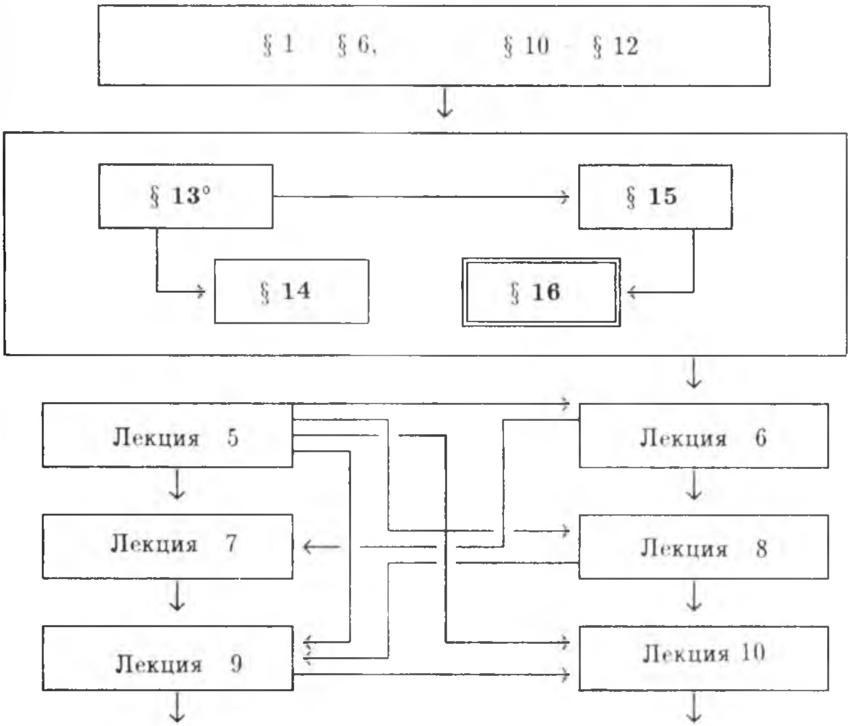
БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ
ФАКТОР-МНОЖЕСТВО

§ 13°. Виды бинарных отношений на множестве.
§ 14. Отношения порядка на множестве.
§ 15. Отношения эквивалентности на множестве.
§ 16. Классы эквивалентности. Фактор-множество.

Основные понятия: рефлексивность, симметричность, транзитивность отношений, классы и отношения эквивалентности, упорядоченные множества, фактор-множество, свободный вектор, сравнение целых чисел, равносоставленность и равновеликость фигур.

Необходимые сведения: множества, операции на множествах, бинарное отношение, композиция бинарных отношений, инверсия бинарного отношения, конечное множество, граф бинарного отношения на конечном множестве, направленный отрезок, сонаправленные лучи, декартов квадрат множества, диагональ декартова квадрата множества, равномощные множества, подобные треугольники, равновеликие фигуры.

Рекомендации: если пособие используется в лекционной работе, то до лекции рекомендуется предварительное знакомство студента с содержанием § 13° (самостоятельно или на практическом занятии).



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства.
Лекция 6 — Подстановки. Группы.
Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 13°. ВИДЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ

В § 5 было введено понятие бинарного отношения на двух множествах, объектом изучения в этой лекции будут бинарные отношения на множестве.

Определение 13.0. *Любое бинарное отношение $F \subset A^2$ называют* ***бинарным отношением на множестве.***

В этом случае $\mathrm{Dom}\, F \subset A$, $\mathrm{Im}\, F \subset A$, а *множество* $\mathrm{Dom}\, F \bigcup \mathrm{Im}\, F$ *называют* ***областью бинарного отношения*** F.

Обозначение области отношения: $D(F)$ или, если понятно о каком отношении идет речь — D.

Как правило, употребляется выражение: ***бинарное отношение на множестве*** D, подразумевая, что $D = D(F) \subset A$ и $F \subset D^2(F)$, различие между множествами $D(F)$ и A, если оно существенно, обычно видно из контекста.

В математике часто используются специальные виды отношений: эквивалентности и порядка. Каждое из них определяется через некоторые свойства, изучение их — наша ближайшая задача.

Определение 13.1. ***Бинарное отношение*** *F на множестве D называется* ***рефлексивным на*** *D, если для любого $x \in D = \mathrm{Dom}\, F \bigcup \mathrm{Im}\, F$ кортеж $\langle x, x\rangle \in F$, в этом случае говорят, что каждый $x \in D$ находится к самому себе в данном отношении.*

Символическая запись этого определения:

$$F \text{ — рефлексивно} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in D \Rightarrow \langle x, x\rangle \in F). \tag{13.1}$$

Несложно видеть, что из определения немедленно следует, что бинарное отношение F^{-1} рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивна его инверсия F^{-1}. ♦

Отношение $S = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, очевидно, рефлексивно, так как

$$D(S) = ?, \text{ и } S \supset \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}.$$

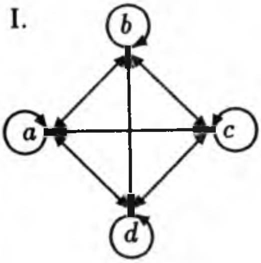
Не рефлексивно бинарное отношение

$L = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \text{ — люди } \wedge \text{ «человек } x \text{ выше человека } y\text{»}\}$. ♦

Задание 13.1. По графам бинарных отношений на конечных множествах определим, какие из них рефлексивны. (Выделите свойство). ♦

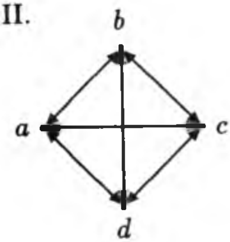
Когда мы познакомимся с другими видами бинарных отношений на множестве, то будем учиться определять, каковы

I.



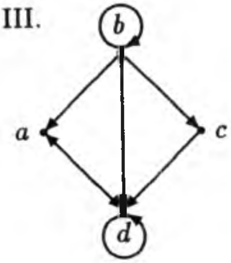
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

II.



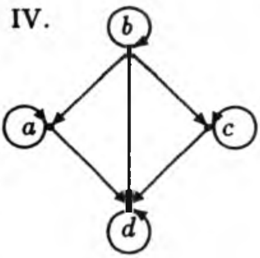
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

III.



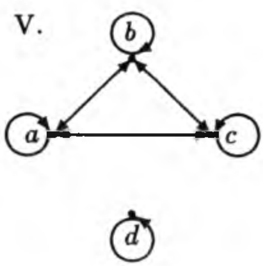
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

IV.



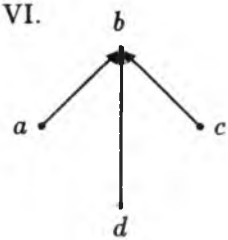
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

V.



рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

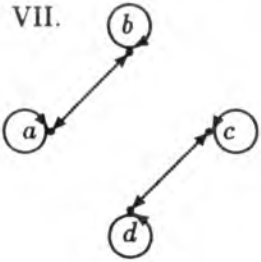
VI.



рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

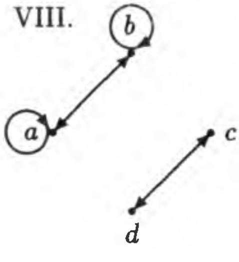
Рис. 58

VII.



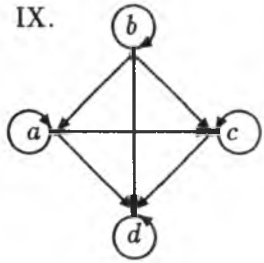
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

VIII.



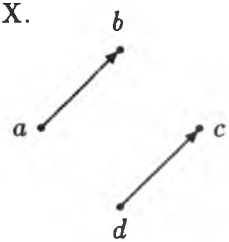
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

IX.



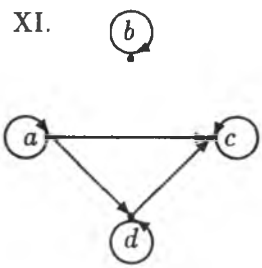
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

X.



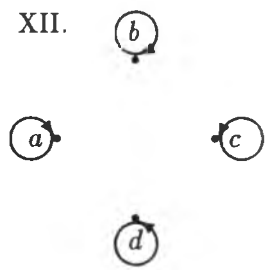
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

XI.



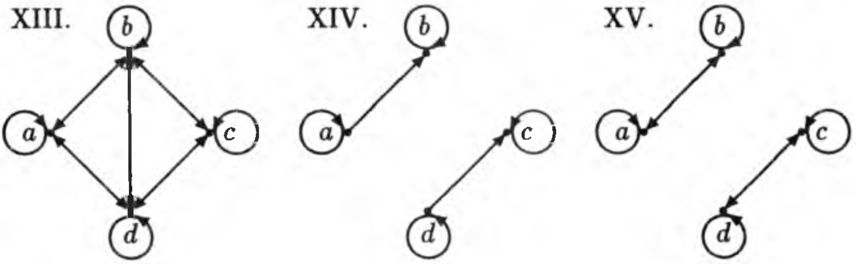
рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

XII.



рефлексивно
антирефлексивно
симметрично
антисимметрично
транзитивно
связанно

Рис. 59



XIII	XIV	XV
рефлексивно	рефлексивно	рефлексивно
антирефлексивно	антирефлексивно	антирефлексивно
симметрично	симметрично	симметрично
антисимметрично	антисимметрично	антисимметрично
транзитивно	транзитивно	транзитивно
связанно	связанно	связанно

Рис. 60

их признаки для конечных множеств, по этим же графам (рис. 58—60).

Особенностью графа рефлексивного бинарного отношения на конечном множестве является то, что в каждой его точке имеется петля. ♦

Бинарное отношение не рефлексивно на конечном множестве, если в его графе хотя бы одна точка не имеет петли. ♦

Рассмотрим более интересные примеры бинарных отношений на конечных и бесконечных множествах. При изучении других свойств отношений мы будем возвращаться к этим примерам, как и к примерам задания 13.1, выясняя дополнительно их новые свойства.

Пример 13.1. Определим, обладают ли свойством рефлексивности отношения:

1) $P_1=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset A=\{1, 2\}\wedge x\geqslant 2(y-1)\}$.

Все кортежи P_1 можно выписать $P_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, $D(P_1)=\{1, 2\}$. Следовательно отношение рефлексивно на $D(P_1)$.

Отношение $\left\{\begin{array}{l}\textit{рефлексивно}, \text{ антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{array}\right.$

2) $P_2=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{Z}\wedge x\geqslant 2(y-1)\}$.

$D(P_2)\stackrel{?}{=}\mathbf{Z}$. Это отношение нерефлексивно на Z. ♦

Указание. Сравните с бинарным отношением P_1, найдется ли такой $x\in\mathbf{Z}$, чтобы $x<2(x-1)$?

$$\text{Отношение}\begin{cases}\phantom{\textit{рефлексивно},}\ \text{антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

3) $P_3=\{\langle x,\ y\rangle \mid \{x,\ y\}\subset \mathbf{R} \wedge x\geqslant y\}$.
$D(P_3)=\mathbf{R}$, отношение рефлексивно на $\mathbf{R}$, так как $x\geqslant x$ для любого действительного числа x.

$$\text{Отношение}\begin{cases}\textit{рефлексивно},\ \text{антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

4) $P_4=\{\langle m,\ n\rangle \mid \{m,\ n\}\subset \mathbf{N} \wedge\ m \text{ делит } n\}$.
«m делит n» означает, что существует целое число k такое, что $n=km$. Область этого бинарного отношения равна $\mathbf{N}$, так как всякое натуральное число m — делитель какого-либо кратного ему натурального числа, например m, $2m$ и т. д.

Это отношение рефлексивно, так как $\forall m\in \mathbf{N} \Rightarrow m=1m$.

$$\text{Отношение}\begin{cases}\textit{рефлексивно},\ \text{антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

5) Отношение равенства треугольников на множестве всех треугольников Δ:

$$P_5=\{\langle \triangle ABC,\ \triangle A'B'C'\rangle \mid \{\triangle ABC,\ \triangle A'B'C'\}\subset \Delta \wedge$$
$$\wedge\ \triangle ABC=\triangle A'B'C'\}$$

рефлексивно. ◆

$$\text{Отношение}\begin{cases}\textit{рефлексивно},\ \text{антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

6) Отношение параллельности на множестве всех прямых (плоскости):

$$P_6=\{\langle a,\ b\rangle \mid \{a,\ b\}\subset \mathscr{L} \wedge a\parallel b\}$$

? не ? рефлексивно на $\mathscr{L}$. ◆

$$\text{Отношение}\begin{cases}\text{рефлексивно, антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

7) Отношение перпендикулярности прямых:

$$P_7=\{\langle a,\ b\rangle \mid \{a,\ b\}\subset \mathscr{L} \wedge a\perp b\}$$

нерефлексивно на $\mathscr{L}$. ◆

$$\text{Отношение}\begin{cases}\phantom{\textit{рефлексивно},}\ \text{антирефлексивно,}\\ \text{симметрично, антисимметрично,}\\ \text{транзитивно, связанно.}\end{cases}$$

8) Отношение включения на множестве подмножеств некоторого множества U:

$$P_8 = \{\langle A, B\rangle \mid \{A, B\} \subset U \wedge A \subset B\}.$$

$D(P_8) = U$, отношение ? не ? рефлексивно на U. ◆

Отношение $\begin{cases} \text{рефлексивно, антирефлексивно,} \\ \text{симметрично, антисимметрично,} \\ \text{транзитивно, связанно.} \end{cases}$

9) Отношение равномощности на множестве подмножеств некоторого множества U:

$$P_9 = \{\langle A, B\rangle \mid \{A, B\} \subset U \wedge A \text{ равномощно } B\}.$$

$D(P_9) = U$, отношение рефлексивно на U, так как всякое множество равномощно себе самому. (замечание 11.?) ◆

Отношение $\begin{cases} \textit{рефлексивно}, \text{ антирефлексивно,} \\ \text{симметрично, антисимметрично,} \\ \text{транзитивно, связанно.} \end{cases}$

В школьном курсе геометрии встречались понятия сонаправленности и противоположной направленности лучей. Они определяют два отношения на множестве лучей.

Напоминание. Луч $[AB)$ называется сонаправленным с лучом $[CD)$, если $(AB) \parallel (CD)$ и $[AB)$ и $[CD)$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AC), проходящей через их начальные точки, при условии, что $(AB) \neq (CD)$, а в случае $(AB) = (CD)$ требуется, чтобы $[AB) \subset [CD)$ или $[CD) \subset [AB)$. Если лучи параллельны, но не обладают этими свойствами, их называют противоположно направленными (рис. 61).

Обозначения. $[AB) \upuparrows [CD)$ для сонаправленных лучей и, соответственно, $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$ — для противоположно направленных.

10) Отношение сонаправленности на множестве всех лучей:

$$P_{10} = \{\langle [AB), [CD)\rangle \mid \{[AB), [CD)\} \subset \mathscr{L}' \wedge [AB) \upuparrows [CD)\},$$

очевидно, рефлексивно. ◆

Отношение $\begin{cases} \textit{рефлексивно}, \text{ антирефлексивно,} \\ \text{симметрично, антисимметрично,} \\ \text{транзитивно, связанно.} \end{cases}$

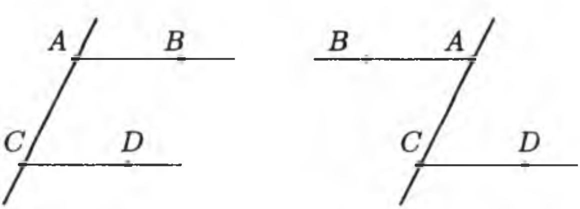


Рис. 61

11) А отношение противоположной направленности

$$P_{11}=\{\langle [AB),\ [CD)\rangle \mid \{[AB),\ [CD)\}\subset \mathscr{L}' \wedge [AB)\uparrow\downarrow[CD)\},$$

нерефлексивно на $\mathscr{L}'$. ◆

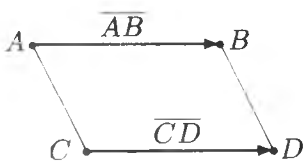
Отношение { антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно, связанно.

12) Важный пример рефлексивного отношения — отношение эквиполентности на множестве всех направленных отрезков. (См. определение 4.2).

Определение 13.2. ***Направленный отрезок*** $\overline{AB}$ ***называется эквиполентным направленному отрезку*** $\overline{CD}$, *если соответствующие лучи* ($[AB)$ *и* $[CD)$) *сонаправлены, а длины этих отрезков равны.*

Обозначается эквиполентность направленных отрезков знаком ω: $\overline{AB}\omega\overline{CD}$.

Укажите на чертежах эквиполентные направленные отрезки (рис. 62):



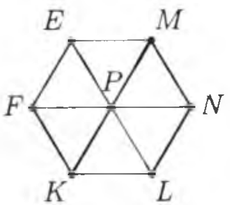


Рис. 62

Бинарное отношение на множестве всех направленных отрезков:

$$P_{12}=\{\langle \overline{AB},\ \overline{CD}\rangle \mid \{\overline{AB},\ \overline{CD}\}\subset \mathscr{O} \wedge \overline{AB}\omega\overline{CD}\}$$

рефлексивно.

Отношение { *рефлексивно*, антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно, связанно.

Признак рефлексивности бинарного отношения следующий.

Утверждение 13.1. *Бинарное отношение F рефлексивно на множестве D тогда и только тогда, когда $d_D \subset F$. (d_D — диагональ множества D).*

Действительно,

$$F \text{ рефлексивно на } D \overset{?}{\Leftrightarrow} (\forall x \in D \Rightarrow \langle x, x\rangle \in F) \xleftrightarrow[\text{опр. 1. 3}]{\text{опр. 3. 3}} d_D \subset F.$$

■

Определение 13.3. ***Бинарное отношение** F на множестве D называется **антирефлексивным на** D, если $\langle x, x\rangle \notin F$ для каждого $x \in D$.*

Символическая запись этого определения:

$$F \text{ — антирефлексивно} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in D \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin F). \qquad (13.2)$$

Также очевидно, что бинарные отношения F и F^{-1} могут быть антирефлексивны только одновременно, так как $\langle x, x\rangle \in F$ тогда и только тогда, когда $\langle x, x\rangle \in F^{-1}$. (См. определение 5.7). ♦

Задание 13.2. Определите, какие из графов задания 13.1 задают антирефлексивные отношения?

Укажите, какие из бинарных отношений примера 13.1 антирефлексивны, умейте обосновывать свой выбор.

Особенностью графа антирефлексивного бинарного отношения на конечном множестве является то, что ни в одной из его точек нет петель, так как это означало бы наличие в $D(F)$ элемента x такого, что $\langle x, x\rangle \in F$ — что противоречит определению антирефлексивности.

Бинарное отношение на конечном множестве не антирефлексивно, если его граф имеет хотя бы одну петлю. ♦

Признак антирефлексивности произвольного бинарного отношения можно сформулировать следующим образом:

Утверждение 13.2. *Бинарное отношение F антирефлексивно на множестве D тогда и только тогда, когда $d_D \cap F = \varnothing$.*

Задача 13.1.2. Докажите утверждение 13.2.

Доказательство.

F антирефлексивно на $D \overset{?}{\Leftrightarrow} (\forall x \in D \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin F) \overset{?}{\Leftrightarrow} d_D \cap F = \varnothing$, (где $d_D = ?$). ■

Задача 13.1.1. Установите, рефлексивно или антирефлексивно бинарное отношение:

$$F_1 = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{N} \wedge x + y = 2\}.$$

Объясните ответ.

Указание. Можно ли утверждать, что $x+x=2$ для любого натурального числа x? Можно ли утверждать, что не существует натуральных чисел таких, чтобы $x+x=2$?

Следующее свойство бинарных отношений на множестве — симметричность.

Определение 13.4. ***Бинарное отношение*** *F на множестве D называется* ***симметричным на*** *D, если для всех $\{x, y\} \subset D$ из того, что $\langle x, y\rangle \in F$, следует, что $\langle y, x\rangle \in F$.*

Символическая запись:

$$F \text{ — симметрично} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((\forall \{x, y\} \subset D \mid \langle x, y\rangle \in F) \Rightarrow (\langle y, x\rangle \in F)). \tag{13.3}$$

Как и в случае рефлексивности и антирефлексивности, свойство симметричности бинарного отношения F наследуется отношением F^{-1}. ♦

Более того, очевидно утверждение.

Утверждение 13.3. *Бинарное отношение F симметрично на множестве D тогда и только тогда, когда $F = F^{-1}$.*

Следствие 13.1. $\operatorname{Dom} F = \operatorname{Im} F$ *для симметричного бинарного отношения F*, так как $\operatorname{Dom} F \overset{?}{=} \operatorname{Im} F^{-1} \overset{?}{=} \operatorname{Im} F$.

Задача 13.2.2. Верно ли обратное: если $\operatorname{Dom} F = \operatorname{Im} F$, то бинарное отношение F — симметрично?

Указание. Приведите примеры бинарных отношений хотя бы на конечных множествах.

Задание 13.3. Определите, какие из отношений задания 13.1 симметричны?

Укажите, какие из бинарных отношений примера 13.1 симметричны, умейте обосновывать свой выбор. Запишите объяснения для одного (любого) из отношений.

Выполнение этого задания позволяет сделать вывод, что особенностью графа симметричного бинарного отношения на конечном множестве является то, что все его стрелки «двойные» (в этом случае говорят о неориентируемости всех ребер графа). ♦

Бинарное отношение на конечном множестве не симметрично, если его граф имеет хотя бы одно ориентированное ребро.

Определение 13.5. ***Бинарное отношение*** *F на множестве D называется* ***антисимметричным на*** *D, если для всех $\{x, y\} \subset D$ таких, что $\langle x, y\rangle \in F$ и $\langle y, x\rangle \in F$ следует, что $x = y$.*

Символическая запись определения:

$$F \text{ — антисимметрично} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow ((\forall \{x, y\} \subset D \mid (\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle y, x\rangle \in F)) \Rightarrow (x = y)). \tag{13.4}$$

Наследуется ли инверсией антисимметричность бинарного отношения F? ♦

Задание 13.4. Определите, какие из отношений задания 13.1 антисимметричны.

Укажите, какие из бинарных отношений примера 13.1 антисимметричны, умейте обосновывать свой выбор.

Можно заметить, что особенностью графа антисимметричного отношения на конечном множестве является то, что все его ребра ориентированы (но граф может иметь петли). ◆

Бинарное отношение на конечном множестве не антисимметрично, если его граф имеет хотя бы одно неориентированное ребро (двойную стрелку). ◆

Признаком антисимметричности бинарного отношения является следующее утверждение.

Утверждение 13.4. *Бинарное отношение F на множестве D антисимметрично тогда и только тогда, когда $F \cap F^{-1} \subset d_D$.*

Задача 13.3.2. Докажите утверждение 13.4.

Доказательство. Рассмотрим

$$F \cap F^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, y\rangle \in F^{-1}\} \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in F \wedge \langle y, x\rangle \in F\}.$$

F — антисимметрично на $D \overset{?}{\Leftrightarrow} F \cap F^{-1} = \{\langle x, x\rangle \in F\}$, но последнее множество по определению содержится в диагонали $d_D = ?$. ■

Можно заметить, что предыдущим признаком легко доказывается антисимметричность F^{-1}:

$$F \text{ — антисимметрично} \overset{?}{\Leftrightarrow} F \cap F^{-1} \subset d_D \overset{?}{\Leftrightarrow} F^{-1} \cap F \subset d_D \overset{?}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{?}{\Leftrightarrow} F^{-1} \cap (F^{-1})^{-1} \subset d_D \overset{?}{\Leftrightarrow} F^{-1} \text{ — антисимметрично.}$$

Т. е. бинарное отношение F антисимметрично тогда и только тогда, когда антисимметрично F^{-1}.

Задача 13.2.1. Определите, обладает ли свойством симметричности или антисимметричности бинарное отношение задачи 13.1.1 $F_1 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge x + y = 2\}$.

Указание. Можно ли утверждать, что если $x + y = 2$, то и $y + x = 2$? Можно ли утверждать, что из того, что $x + y = 2$ и $y + x = 2$, следует, что $x = y$?

Задача 13.1.3. Найдите бинарное отношение, которое симметрично и антисимметрично.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{—} \overset{(13.?)}{\Longrightarrow} ((\forall \{x, y\} \in D \mid \langle x, y\rangle \in F) \Rightarrow \langle ?, ?\rangle \in F^{-1}) \\ F \text{—} \overset{(13.?)}{\Longrightarrow} ((\forall \{x, y\} \in D \mid (\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle y, x\rangle \in F)) \Rightarrow x = y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = ?.$$ ■

Определение 13.6. ***Бинарное отношение*** *F на множестве D называется* ***транзитивным на*** *D, если для всех $\{x, y, z\}\subset D$ таких, что из $\langle x, y\rangle\in F$ и $\langle y, z\rangle\in F$ следует, что $\langle x, z\rangle\in F$.*

Соответствующая символическая запись определения:

$$F \text{ — транзитивно} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\left(\forall\{x, y, z\}\subset D \,\middle|\, \left.\begin{matrix}\langle x, y\rangle\in F\\ \langle y, z\rangle\in F\end{matrix}\right\}\Rightarrow\langle x, z\rangle\in F\right). \qquad (13.5)$$

В определении транзитивности бинарного отношения есть некоторое сходство с операцией композиции отношений. Это не случайно: признак транзитивности бинарного отношения следующий.

Утверждение 13.5. *Отношение F на множестве D транзитивно тогда и только тогда, когда $F\circ F\subset F$.*

Доказательство. Напомним, что

$$F\circ F \overset{\text{опр. 6.1}}{=\!=\!=} \{\langle x, z\rangle \mid \exists y | (\langle x, y\rangle\in F \wedge \langle y, z\rangle\in F)\}.$$

В то время как

$$F\circ F\subset F \overset{?}{\Leftrightarrow} ((\forall\langle x, z\rangle\in F\circ F)\Rightarrow\langle x, z\rangle\in F)\overset{?}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow}\left(\forall\{x, y, z\}\subset D \,\middle|\, \left.\begin{matrix}\langle x, y\rangle\in F\\ \langle y, z\rangle\in F\end{matrix}\right\}\Rightarrow\langle x, z\rangle\in F\right)\overset{(13.5)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{(13.5)}{\Longleftrightarrow} F \text{ — транзитивно.} \qquad \blacksquare$$

Отсюда, в частности, транзитивно любое бинарное отношение $F\subset d_D$, так как $F\circ F\overset{?}{=}\varnothing\overset{?}{\subset}F$. ◆

Из этого утверждения также следует, что отношение F^{-1} на множестве D транзитивно тогда и только тогда, когда F транзитивно, так как если $F\circ F\subset F$, то $F^{-1}\circ F^{-1}\overset{?}{=}(F\circ F)^{-1}\overset{?}{\subset}F^{-1}$ и обратно. ◆

Задание 13.5. Определите, какие из отношений задания 13.1 транзитивны?

Укажите, какие из бинарных отношений примера 13.1 транзитивны, умейте обосновывать свой выбор.

Особенностью графа транзитивного отношения на конечном множестве является то, что в нем либо отсутствуют «треугольники», либо все они «замкнуты» (рис. 63). ◆

Бинарное отношение на конечном множестве не транзитивно, если его граф имеет хотя бы один «незамкнутый треугольник, так как это равносильно тому, что, например: $\langle a', b'\rangle\in F$ и $\langle b', c'\rangle\in F$, но $\langle a', c'\rangle\notin F$, что нарушает требование транзитивности (13.5).

транзитивно нетранзитивно

Рис. 63

Задача 13.3.1. Определите, транзитивны ли бинарные отношения F_2 и P_8 (пример 13.1):

$$F_2 = \{\langle X, Y\rangle \mid \{X, Y\} \subset \mathrm{U} \wedge X \cap Y = \varnothing\}.$$

$$\forall \{X, Y, Z\} \subset \mathrm{U} \left| \begin{array}{l} \langle X, Y\rangle \in F_2 \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing \\ \langle Y, Z\rangle \in F_2 \Leftrightarrow Y \cap Z = \varnothing \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle X, Z\rangle \notin F_2.$$

Что означает $\overline{\underline{?\ \text{не}\ ?}}$ транзитивность F_2.

$$P_8 = \{\langle X, Y\rangle \mid \{X, Y\} \subset \mathrm{U} \wedge X \subset Y\}.$$

$$\forall \{X, Y, Z\} \subset \mathrm{U} \left| \begin{array}{l} \langle X, Y\rangle \in F_2 \Leftrightarrow X \subset Y \\ \langle Y, Z\rangle \in F_2 \Leftrightarrow Y \subset Z \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle X, Z\rangle \in P_8.$$

Что означает $\overline{?\ \text{не}\ ?}$ транзитивность P_8.

Определение 13.7. ***Бинарное отношение*** *F на множестве D называется* ***связанным на*** *D, если любых два различных элемента из D находятся в данном отношении F. В противном случае говорят о* ***несвязанном на D бинарном отношении.***

Символическая запись этих определений:

$$F \text{ — связанно} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}((\forall\{x, y\} \subset D \mid x \neq y) \Rightarrow (\langle x, y\rangle \in F \vee \langle y, x\rangle \in F)). \quad (13.6)$$

$$F \text{ — несвязанно} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}((\exists\{x, y\} \subset D \mid x \neq y) \Rightarrow (\langle x, y\rangle \notin F \wedge \langle y, x\rangle \notin F)). \quad (13.7)$$

В силу симметричности самих определений (они по существу не изменятся, если поменять местами x и y) достаточно очевидно, что бинарное отношение F связанно или несвязанно тогда и только тогда, когда связанно или, соответственно, несвязанно F^{-1}.

Признаком связанности бинарного отношения является следующее утверждение.

Утверждение 13.6. *Бинарное отношение F на множестве D связанно тогда и только тогда, когда* $(D\times D)\backslash d_D \subset F\cup F^{-1}$.

Задание 13.6. Определите, какие из отношений задания 13.1 связанны.

Особенностью графа связанного бинарного отношения на конечном множестве является то, что любые две его вершины соединены ребром, соответственно, несвязанность проявляется на графе в том, что найдутся хотя бы две его вершины, не соединенные ребром. ♦

Рассматривая свойства бинарных отношений, мы всякий раз, устанавливая их признаки, решали и такой вопрос: в каком случае то или иное свойство сохраняется за инверсией отношения с данным свойством. Резюмируем результаты:

Утверждение 13.7. *Бинарное отношение F^{-1} рефлексивно, антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно связанно или несвязанно тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает отношение F.*

§ 14. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВЕ

Различные способы упорядочения множеств встречаются достаточно часто, и не только в математике: например, построение по росту, лексикографический порядок словарей и т. д., такие способы можно разделить на определенные группы по их общим свойствам.

Вводя новые определения в этом параграфе, будем среди бинарных отношений задания 13.1 и примера 13.1 указывать отношения с соответствующими характеристиками.

Определение 14.1. *Бинарное отношение F на множестве D называется* ***отношением порядка*** *или* ***порядком на*** *D, если оно транзитивно и антисимметрично. В таком случае* ***множество*** *с заданным на нем порядком называют* ***упорядоченным***.

Его обозначение: $\langle D, F\rangle$.

Полезно запомнить формулу:

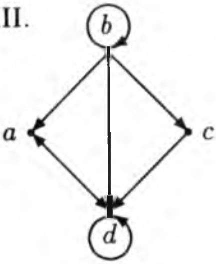
$$\textbf{порядок} = \textbf{антисимметричность} + \textbf{транзитивность}, \qquad (14.1)$$

и совокупность этих требований (13.4, 13.5):

1. $((\forall\{x, y\}\subset D|(\langle x, y\rangle\in F \wedge \langle y, x\rangle \in F)) \Rightarrow x=y)$ — — антисимметричность,

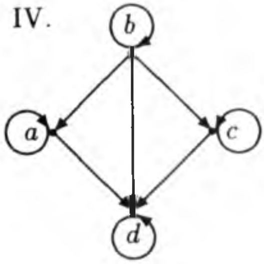
2. $\left(\forall\{x, y, z\}\subset D\,\middle|\, \begin{matrix}\langle x, y\rangle\in F\\ \langle y, z\rangle\in F\end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle x, z\rangle\in F\Big)$ — транзитивность.

III.



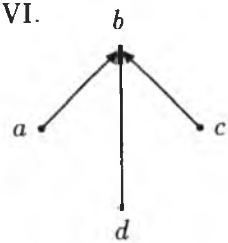
нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

IV.



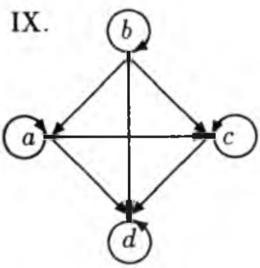
нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

VI.



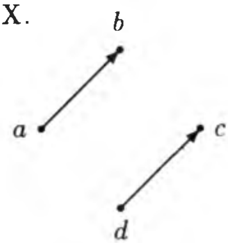
нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

IX.



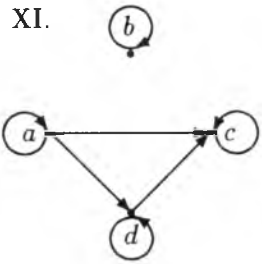
нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

X.



нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

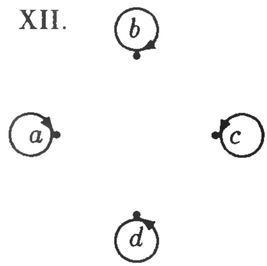
XI.



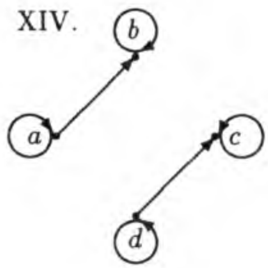
нестрогий
строгий
линейный
частичный
полный

Рис. 64

XII.



XIV.



нестрогий	**нестрогий**
строгий	**строгий**
линейный	**линейный**
частичный	**частичный**
полный	**полный**

Рис. 65

З а д а н и е 14.1: Восемь бинарных отношений задания 13.1 — являются отношениями порядка, убедитесь в этом. Позднее мы укажем тип порядка каждого из них. Их графы на рисунках 64 и 65.

Принимая во внимание установленные признаки антисимметричности и транзитивности отношений на конечных множествах, можем отметить, что особенностями графа отношения порядка на таком множестве являются ориентированность графа (отсутствие двойных стрелок) и замкнутость всех «треугольников», если они имеются.

Из утверждения 13.7 (о наследовании бинарным отношением F^{-1} свойств F) вытекает

У т в е р ж д е н и е 14.1. *Бинарное отношение F^{-1} есть отношение порядка тогда и только тогда, когда F — тоже отношение порядка.*

О п р е д е л е н и е 14.2. *Отношение порядка на множестве D называется* ***отношением нестрогого порядка*** *или* ***нестрогим****, если оно рефлексивно.*

Таким образом.

нестрогий порядок =

= **порядок** + ***рефлексивность*** = (14.2′)

= **антисимметричность** + **транзитивность** + ***рефлексивность*,**

1. $((\forall\{x,\ y\}\subset D|(\langle x,\ y\rangle\in F\wedge\langle y,\ x\rangle\in F))\Rightarrow x=y)$ —

— антисимметричность,

(14.2)

2. $\left(\forall\{x, y, z\}\subset D \left| \begin{matrix} \langle x, y\rangle\in F \\ \langle y, z\rangle\in F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle x, z\rangle\in F\right)$ — транзитивность,

3. $(\forall x\in D\Rightarrow \langle x, x\rangle\in F)$ — *рефлексивность.*

Определение 14.3. *Отношение порядка на множестве X называется* ***отношением строгого порядка*** *или* ***строгим****, если оно антирефлексивно.*

Из этого следует, что

$$\begin{gathered}\textbf{строгий порядок} = \\ = \textbf{порядок} + \textbf{\textit{антирефлексивность}} = \\ = \textbf{антисимметричность} + \textbf{транзитивность} + \textbf{\textit{антирефлексивность}},\end{gathered} \tag{14,3}$$

а символическая запись этих требований (13.2, 13.4, 13.5):

1. $((\forall\{x, y\}\subset D|(\langle x, y\rangle\in F\wedge\langle y, x\rangle\in F))\Rightarrow x=y)$ — — антисимметричность,

2. $\left(\forall\{x, y, z\}\subset D \left| \begin{matrix} \langle x, y\rangle\in F \\ \langle y, z\rangle\in F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle x, z\rangle\in F\right)$ — транзитивность,

3. $(\forall x\in D\Rightarrow \langle x, x\rangle\notin F)$ — *антирефлексивность.*

Утверждения 13.7 и 14.1 позволяют отметить, что бинарное отношение F^{-1} есть строгий или нестрогий порядок тогда и только тогда, когда соответствующим порядком обладает отношение F. Несложно доказать следующее.

Утверждение 14.2. *Если F — отношение порядка на некотором множестве D, то любое его сужение $F|_{D'}$ на непустое подмножество есть также отношение порядка, причем $F|_{D'}$ так же строго или нестрого, как и бинарное отношение F.*

Обратное, вообще говоря, неверно: если $F|_{D'}$ — порядок, то F может им не быть на множестве $D\supset D'$. ♦

Задача 14.1.1. Укажите, какие из отношений порядка задания 14.1 есть отношения нестрогого порядка. Найдите среди них отношения строгого порядка.

Особенностями графа бинарного отношения нестрогого порядка на конечном множестве являются его ориентированность, замкнутость всех его треугольников и наличие петли в каждой его вершине.

А особенности графа строгого бинарного отношения — его ориентированность, замкнутость всех его треугольников и отсутствие петель в его вершинах.

В курсе алгебры и геометрии мы довольно часто встречаемся с отношениями порядка, приведем некоторые из них, наиболее употребляемые.

Основные примеры отношений порядка

Задание 14.2. Объясните в каждом примере, какой порядок (строгий или нестрогий) задает бинарное отношение. (Позднее мы определим другие характеристики этих порядков).

1) Отношения $<$ и $>$ на множествах действительных $\mathbf{R}$ и натуральных чисел $\mathbf{N}$:

$$O_1=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge x<y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{строгий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

$$O_2=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge x>y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{строгий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

$$O_3=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{N}\wedge x<y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{строгий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

$$O_4=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{N}\wedge x>y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{строгий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

Все эти порядки строгие, так как по свойствам действительных чисел не найдется среди них такого x, чтобы $x<x$ или $x>x$ — эти отношения антирефлексивны.

2) Следующие порядки $\leqslant$ и $\geqslant$ на множествах $\mathbf{R}$ и $\mathbf{N}$, как рефлексивные,— нестрогие.

$$O_5=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge x\leqslant y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{нестрогий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный.

$$O_6=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{R}\wedge x\geqslant y\}=P_3.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{нестрогий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

$$O_7=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{N}\wedge x\leqslant y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{нестрогий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный.

$$O_8=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{N}\wedge x\geqslant y\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{нестрогий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный.

3) Отношение включения на множестве всех подмножеств некоторого множества U — нестрогий порядок.

$$O_9=\{\langle A, B\rangle \mid \{A, B\}\subset U\wedge A\subset B\}.$$

Порядок $\begin{cases} \textit{нестрогий}, \\ \text{линейный, частичный,} \end{cases}$ полный

Задача 14.1.2. Является ли отношение делимости порядком на множестве натуральных чисел **N**? Строгим или нестрогим?

$$O_{10}=\{\langle m,\ n\rangle \mid \{m,\ n\}\subset \mathbf{N} \wedge (\exists k\in \mathbf{N} \mid n=km)\}=P_4.$$

Порядок $\left\{\begin{array}{l}\text{нестрогий, строгий,}\\ \text{линейный, частичный,}\end{array}\right.$ полный.

Указание. См. задания 13.1, 13.4, 13.5: P_4 — антисимметрично, транзитивно и рефлексивно.

Является ли отношение делимости порядком на множестве целых чисел **Z**?

$$O_{11}=\{\langle m,\ n\rangle \mid \{m,\ n\}\subset \mathbf{Z} \wedge (\exists k\in \mathbf{Z} \mid n=km)\}.$$

Порядок $\left\{\begin{array}{l}\text{нестрогий, строгий,}\\ \text{линейный, частичный,}\end{array}\right.$ полный.

Среди отношений порядка выделяется еще так называемый линейный порядок, который также может быть строгим или нестрогим.

Определение 14.4. *Отношение порядка на множестве D называется* ***отношением линейного порядка*** *или* ***линейным порядком,*** *если оно связанно на D, а множество D в этом случае называется* ***линейно упорядоченным множеством с порядком*** *R.*

В противном случае говорят о ***частичном порядке*** *или* ***частично упорядоченном множестве.***

Таким образом,

$$\begin{gathered}\textbf{линейный порядок} = \\ = \textbf{порядок} + \textbf{\textit{связанность}} = \\ = \textbf{антисимметричность} + \textbf{транзитивность} + \textbf{\textit{связанность}},\end{gathered} \tag{14.4}$$

что означает совокупность условий:

1. $((\forall \{x,\ y\}\subset D \mid (\langle x,\ y\rangle \in F \wedge \langle y,\ x\rangle \in F)) \Rightarrow x=y)$ —
— антисимметричность,

2. $\left(\forall \{x,\ y,\ z\}\subset D \;\middle|\; \left.\begin{array}{l}\langle x,\ y\rangle \in F\\ \langle y,\ z\rangle \in F\end{array}\right\} \Rightarrow \langle x,\ z\rangle \in F\right)$ —
— транзитивность,

3. $((\forall \{x,\ y\}\subset D \mid x\neq y) \Rightarrow (\langle x,\ y\rangle \in F \vee \langle y,\ x\rangle \in F))$ —
— *связанность,*

а

$$\begin{gathered}\textbf{частичный порядок} = \\ = \textbf{порядок} + \textbf{\textit{несвязанность}} = \\ = \textbf{антисимметричность} + \textbf{транзитивность} + \textbf{\textit{несвязанность}},\end{gathered} \tag{14.4}$$

или

1. $((\forall\{x,\ y\}\subset D\,|\,(\langle x,\ y\rangle\in F\wedge\langle y,\ x\rangle\in F))\Rightarrow x=y)$ —
— антисимметричность,

2. $$\left(\forall\{x,\ y,\ z\}\subset D\,\middle|\,\begin{matrix}\langle x,\ y\rangle\in F\\ \langle y,\ z\rangle\in F\end{matrix}\right\}\Rightarrow\langle x,\ z\rangle\in F\Big)$$ —
— транзитивность,

3. $((\exists\{x,\ y\}\subset D\,|\,x\neq y)\Rightarrow(\langle x,\ y\rangle\notin F\wedge\langle y,\ x\rangle\notin F))$ —
— *несвязанность*.

Задание 14.3. Определите и выделите, какие из отношений порядка задания 14.1 есть отношения линейного порядка, а какие — частичного?

Соответственно графическим признакам антисимметричности, транзитивности и связанности или несвязанности бинарных отношений на конечных множествах могут быть сформулированы признаки линейного и частичного порядков. Так для линейного порядка требуются ориентированность графа, замкнутость всех его «треугольников», если такие имеются, и связанность всех его вершин ребрами. ◆

Опишите особенности графа отношения частичного порядка на конечном множестве. ◆

Аналогично утверждению 14.1, имеем

Утверждение 14.3. *Бинарное отношение F^{-1} есть отношение порядка: строгого, нестрогого, линейного или частичного тогда и только тогда, когда отношение F — также порядок, соответственно: строгий, нестрогий, линейный или частичный.*

Если множество упорядоченно каким-либо отношением, то можно говорить о наибольшем и наименьшем элементе относительно этого порядка:

Определение 14.5. *Если $\langle D,\ F\rangle$ — упорядоченное множество, то элемент $a\in D$ называется* ***наименьшим*** *(или* ***наибольшим****)* ***в*** *D, если $\langle a,\ x\rangle\in F$ (или $\langle x,\ a\rangle\in F$) для любого элемента $x\in D$, отличного от a.*

Из определения следует, что на упорядоченном множестве может быть не более одного наименьшего и не более одного наибольшего элемента.

Очевидно, 1 — наименьший элемент для отношения линейного порядка:

$$O_3=\{\langle x,\ y\rangle\,|\,\{x,\ y\}\subset\mathbf{N}\wedge x<y\},$$

а отношение

$$O_1=\{\langle x,\ y\rangle\,|\,\{x,\ y\}\subset\mathbf{R}\wedge x<y\}$$

не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Задание 14.4. Укажите наибольшие и наименьшие элементы вполне упорядоченных множеств задания 14.2, если такие элементы существуют:

$$O_8=\{\langle x,\ y\rangle|\{x,\ y\}\subset \mathbf{N}\wedge x\geqslant y\}. \qquad \blacklozenge$$

$$O_9=\{\langle A,\ B\rangle|\{A,\ B\}\subset \mathbf{U}\wedge A\subset B\}. \qquad \blacklozenge$$

Определение 14.6. *Если каждое непустое подмножество линейно упорядоченного множества $\langle D,\ F\rangle$ имеет наименьший элемент, то такое* ***множество*** D *называется* ***вполне упорядоченным****, а его* ***порядок — полным***.

Определение 14.7. *Частично упорядоченное множество $\langle D,\ F\rangle$ называется* ***направленным вверх (вниз)****, если для всякой пары элементов $\{x,\ y\}\subset D$ найдется хотя бы один элемент $a\in D$ такой, что $\langle x,\ a\rangle\in F$ и $\langle y,\ a\rangle\in F$ (соответственно, $\langle a,\ x\rangle\in F$ и $\langle a,\ y\rangle\in F$). В этом случае порядок F называется* ***направленным***.

Так множество натуральных чисел $\langle \mathbf{N},\ O_7\rangle$ вполне упорядочено, а вещественная прямая с естественным порядком $\langle \mathbf{R},\ O_1\rangle$ (или $\langle \mathbf{R},\ O_5\rangle$) и ее отрезок $I=[0,\ 1]$ с естественным порядком $O_1|_I$ (или $O_5|_I$), (а значит, и любой ее отрезок с таким порядком) не является вполне упорядоченным множеством, (например, в подмножестве $M=\{1/n|n\in \mathbf{N}\}\subset[0,\ 1]$ не существует наименьшего элемента).

Несложно установить, что не является полным и порядок:

$$O_9=\{\langle A,\ B\rangle|\{A,\ B\}\subset \mathrm{U}\neq\varnothing\wedge A\subset B\}. \qquad \blacklozenge$$

Задание 14.5. Определите, имеются ли среди отношений задания 14.1 отношения полного порядка.

Задача 14.2.2. Определите, найдутся ли среди отношений $O_1 - O_{10}$ задания 14.1 и задачи 14.2.1 отношения полного порядка.

Можно показать, что любое подмножество вполне упорядоченного множества также вполне упорядочено (относительно сужения отношения порядка на это подмножество).

Однако, интереснее следующее утверждение.

Теорема (Цермелло) 14.1. *Всякое непустое подмножество можно вполне упорядочить.*

Т. е. на непустом множестве всегда можно установить отношение порядка, превращающее его во вполне упорядоченное множество.

Задача 14.1.3. Определите, сколькими способами можно вполне упорядочить множество, состоящее из двух элементов? трех? четырех? из n элементов? (рис. 66).

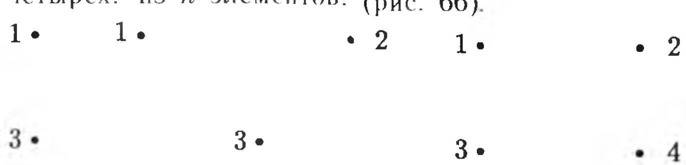


Рис. 66

Задача 14.2.3. Придумайте какой-либо линейный порядок на множестве $\mathbf{N}^2$. Единствен ли такой линейный порядок? Постарайтесь задать его так, чтобы множество $\mathbf{N}^2$ стало вполне упорядоченным.

Указание. Множество $\mathbf{N}^2 \subset \mathbf{R}^2$ может быть изображено на координатной плоскости узлами целочисленной решетки первой координатной четверти. Придумайте «способ ее прохода», обеспечивающий выполнение определения линейного порядка, полного порядка.

§ 15. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ

Важным видом бинарного отношения является отношение эквивалентности (позднелатинское «aequivalens», от aequus — равный и valeo — имею значение, цену, может быть переведено как равнозначный, равноценный). Отношения эквивалентности позволяют ввести на множествах элементов новые, более сложные математические структуры: классы эквивалентности и фактор-множества, при этом оказывается, что все они обладают многими общими свойствами и признаками, несмотря на существенно разную природу составляющих их объектов.

Определение 15.1. *Бинарное отношение F на множестве D называется* ***отношением эквивалентности на*** *D (или* ***эквивалентностью на*** *D), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Обозначается эквивалентность так: $\sim$, или $\cong$, или Ω.

Эти условия можно записать «формулой»:

$$\begin{gathered}\textbf{эквивалентность} = \\ = \textbf{рефлексивность} + \textbf{симметричность} + \textbf{транзитивность},\end{gathered} \tag{15.1}$$

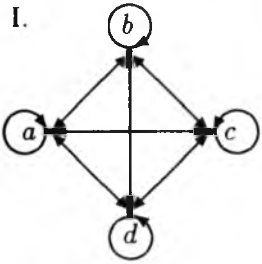
а совокупность всех условий (13.1, 13.3, 13.5):

1. $(\forall x \subset D \Rightarrow \langle x,\ x\rangle \in F)$ — рефлексивность,
2. $((\forall\{x,\ y\} \subset D \mid \langle x,\ y\rangle \in F) \Rightarrow \langle y,\ x\rangle \in F)$ — симметричность,
3. $\left(\forall\{x,\ y,\ z\} \subset D \,\middle|\, \begin{matrix}\langle x,\ y\rangle \in F \\ \langle y,\ z\rangle \in F\end{matrix}\right\} \Rightarrow \langle x,\ z\rangle \in F\Bigg)$ — транзитивность.

Замечание 15.1. $\operatorname{Dom} F = \operatorname{Im} F$ для всякого отношения эквивалентности F, так как F симметрично. (См. следствие 13.1).

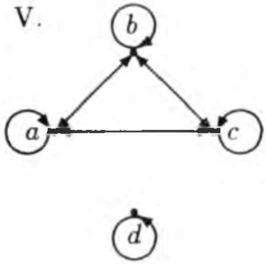
Кроме того, оказывается, что традиционное определение отношения эквивалентности на множестве D переопределено: требования симметричности и транзитивности бинарного отношения обеспечивают его рефлексивность. И признаком того, что бинарное отношение является отношением эквивалентности, можно считать следующее утверждение.

I.



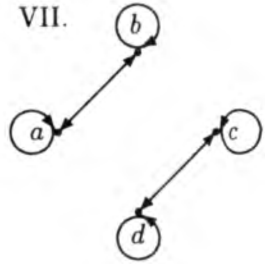
? не ?эквивалентность

V.



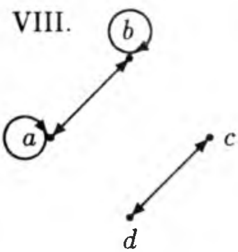
? не ?эквивалентность

VII.



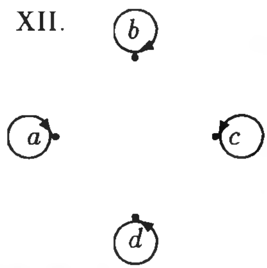
? не ?эквивалентность

VIII.



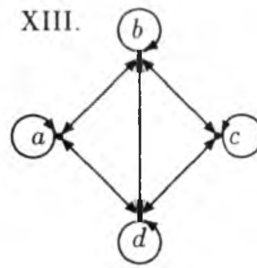
? не ?эквивалентность

XII.



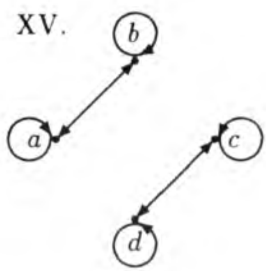
? не ?эквивалентность

XIII.



? не ?эквивалентность

XV.



? не ?эквивалентность

Рис. 67

Утверждение 15.1. *Если F — симметричное и транзитивное бинарное отношение на множестве D, то F — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Установим, что рефлексивность бинарного отношения следует из его одновременной симметричности и транзитивности. Возьмем произвольную пару из F, она либо вида $\langle x, x\rangle$, либо $\langle x, y\rangle$, где $x \neq y$. Если $x \neq y$, то

$$\langle x, y\rangle \in F \overset{?}{\Rightarrow} \langle y, x\rangle \in F.$$

$$\{x, y\} \subset D \left| \begin{array}{l} \langle x, y\rangle \in F \\ \langle y, x\rangle \in F \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle x, x\rangle \in F,$$

что и означает рефлексивность F. ■

Следствие 15.1. *F^{-1} — отношение эквивалентности на некотором множестве D тогда и только тогда, когда F является отношением эквивалентности на D.*

Задача 15.1.**2**. Докажите следствие 15.1.

Указание. См. утверждения 13.7, 15.1.

Для построения примеров отношений эквивалентности полезно знать

Утверждение 15.2. *Пересечение любой совокупности отношений эквивалентности есть отношение эквивалентности.*

Задание 15. 1. Исключив из бинарных отношений задания 13.1 отношения, не обладающие свойством симметрии, (см. задание 14.1) имеем семь графов, среди них найдем те, которые задают отношения эквивалентности. (рис. 67).

Принимая во внимание установленные раньше признаки рефлексивности, симметричности и транзитивности бинарных отношений на конечных множествах, можем отметить, что особенностями графа отношения эквивалентности на таком множестве являются: наличие в каждой его вершине петли, неориентированность всех его ребер, замкнутость всех имеющихся треугольников.

Задача 15.2.**2**. Определите, сколько всего отношений эквивалентности можно задать на множестве, состоящем из четырех элементов. (рис. 68).

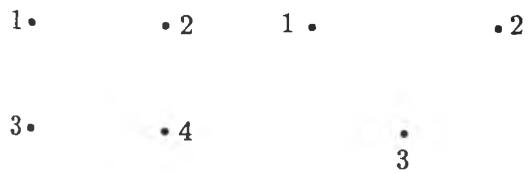


Рис. 68

Задача 15.1.1. Задайте все отношения эквивалентности на множестве $X=\{1, 2, 3\}$ и нарисуйте их графы. Сколько их на множестве X? (рис. 68).

Полезно знать некоторые примеры.

Основные примеры отношений эквивалентности

15.1. Отношение эквивалентности на множестве всех направленных отрезков (определение 13.2, пример 13.1):

$$R_1=\{\langle\overline{AB}, \overline{CD}\rangle \mid \{\overline{AB}, \overline{CD}\}\subset \mathscr{A} \wedge AB\omega CD\}=P_{12}$$

15.2. Отношение параллельности на множестве всех прямых $\mathscr{L}$ (пример 13.1):

$$R_2=\{\langle a, b\rangle \mid \{a, b\}\subset \mathscr{L} \wedge a\,\|\,b\}=P_6.$$

15.3. Отношение параллельности на множестве всех плоскостей $\mathscr{P}$:

$$R_3=\{\langle \Pi_\alpha, \Pi_\beta\rangle \mid \{\Pi_\alpha, \Pi_\beta\}\subset \mathscr{P} \wedge \Pi_\alpha \,\|\, \Pi_\beta\}.$$

15.4. Отношение сравнения по модулю m на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$:

$$R_4(m)=\{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\}\subset \mathbf{Z} \wedge (y-x) \text{ делится на } m\}.$$

Это означает, что $R_4(m)$ состоит из всех кортежей $\langle x, y\rangle$ таких, что найдется $k\in\mathbf{Z}$, что $y-x=km$, где m — натуральное число.

Для таких отношений приняты специальные термины:

Определение 15.2. *Говорят, что число x* ***сравнимо с*** *y* ***по модулю*** *m или x* ***является вычетом*** *y* ***по модулю*** *m, если $\langle x, y\rangle\in R_4(m)$.*

Обозначение: $x\equiv y \pmod m$.

Теория сравнений, которая изучает их свойства, составляет один из разделов современной алгебры.

Бинарное отношение $R_4(m)$ симметрично, так как, если $y-x=km$, то $x-y=(-k)m$. Это означает, что не только $\langle x, y\rangle\in R_4(m)$, но и $\langle y, x\rangle\in R_4(m)$.

Отношение транзитивно, так как, если $y-x=km$ (что означает $x\equiv y \pmod m$) и $z-y=lm$ (что означает $y\equiv z \pmod m$), где $\{k, l\}\subset\mathbf{Z}$, то $z-x\overset{?}{=}(k+l)m$ и $\langle x, z\rangle\in R_4(m)$.

По утверждению 15.1 $R_4(m)$ является отношением эквивалентности.

15.5. Отношение равенства на множестве всех треугольников Δ (пример 13.1):

$$R_5=\{\langle \triangle ABC, \triangle A'B'C'\rangle \mid \{\triangle ABC, \triangle A'B'C'\}\subset \Delta \wedge \triangle ABC=\triangle A'B'C'\}=P_5$$

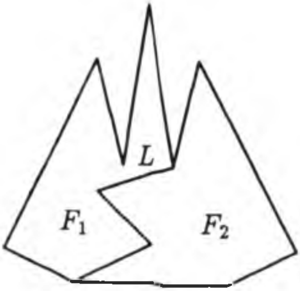


Рис. 69

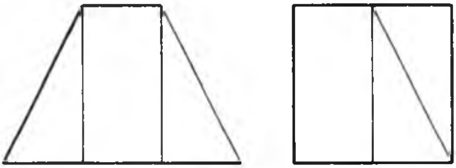


Рис. 70

15.6. Отношение подобия на множестве всех треугольников —

$$R_6=\{\langle\triangle ABC,\ \triangle A'B'C'\rangle|\{\triangle ABC,\ \triangle A'B'C'\}\subset\Delta\wedge \wedge\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'\}.$$

15.7. Отношение равномощности на некотором множестве (определение 11.3, замечание 11.1, пример 13.1):

$$R_7=\{\langle A,\ B\rangle|\{A,\ B\}\subset U\wedge A \text{ равномощно } B\}=P_9.$$

15.8. Отношение равновеликости на множестве всех плоских фигур $\mathcal{F}$

Определение 15.3. ***Фигура*** *F называется* ***равновеликой фигуре*** *G, если площадь F равна площади G.*

$$R_8=\{\langle F,\ G\rangle|\{F,\ G\}\subset\mathcal{F}\wedge F \text{ равновелика } G\}.$$

15.9. В элементарной геометрии встречается отношение равносоставленности многоугольников. Для определения его введем вспомогательное понятие разложения или разбиения фигуры (не обязательно многоугольника):

Определение 15.4′. *Говорят, что* ***фигура*** *F* ***разбита на фигуры*** F_1 ***и*** F_2, *если* $F=F_1\cup F_2$ *и* $F_1\cap F_2=L$, *а L — ломаная.*

Обозначается разложение фигуры F на фигуры F_1 и F_2 так: $F=F_1+F_2$ (рис. 69).

Определение 15.4. ***Многоугольник*** *F называется* ***равносоставленным с многоугольником*** *G, если они разложены на одинаковое число равных многоугольников.*

$$R_9=\{\langle M_\alpha,\ M_\beta\rangle|\{M_\alpha,\ M_\beta\}\subset M\wedge M_\alpha \text{ равносоставлена с } M_\beta\}.$$

Пример равносоставленных многоугольников на рисунке 70: Очевидно, что если фигуры равносоставлены, то они равновелики — доказательство этого утверждения, очевидно, не составляет труда. Однако, доказательство обратного утверждения, которое известно как **теорема Бойяи — Гервина**, довольно сложно и требует привлечения достаточно серьезного математического аппарата. Даже содержание этого утверждения совсем неочевидно. Оно было доказано только в первой половине XIX в. венгерским и немецким математиками Ф. Бойяи (Bolyai Farkas, 1775—1856) и П. Гервином (Gerwin P., XIX в.) независимо друг от друга.

Утверждение 15.3. *Если многоугольники равновелики, то они равносоставлены.*

§ 16. КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ФАКТОР-МНОЖЕСТВО

Определение 16.1. ***Классом эквивалентности элемента*** *$a \in D$ относительно отношения эквивалентности R на множестве D называется множество всех элементов $y \in D$, таких, что $\langle a, y\rangle \in R$, т. е. находящихся с a в данном отношении.*

Любой элемент класса эквивалентности называется его ***представителем***.

Обозначается класс эквивалентности элемента a по отношению эквивалентности R: $a/_R$.

$$a/_R \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in D \mid \langle a, y\rangle \in R\}. \qquad (16.1)$$

Пример 16.1. В задании 15.1 мы определили, какие из отношений заданий § 13 являются отношениями эквивалентности. Теперь найдем классы эквивалентности некоторых из них.

$$R_V = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, d\rangle\}$$

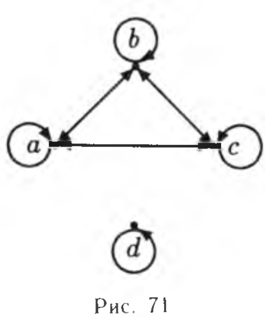


Рис. 71

Чтобы найти $a/_R$ — класс эквивалентности элемента a, по определению, следует выбрать все кортежи с элементом a на первом месте, входящие в R_V. Тогда

$$a/_{R_V}=\{y\in\{a,\ b,\ c,\ d\}\mid\langle a,\ y\rangle\in R_V\}=\{a,\ b,\ c\}.$$

Далее:

$$b/_{R_V}=\{y\in\{a,\ b,\ c,\ d\}\mid\langle b,\ y\rangle\in R_V\}=\{?,\ ?,\ ?\}.$$

$$c/_{R_V}=\{y\in\{a,\ b,\ c,\ d\}\mid\langle c,\ y\rangle\in R_V\}=\{a,\ b,\ c\}.$$

$$d/_{R_V}=\{y\in\{a,\ b,\ c,\ d\}\mid\langle d,\ y\rangle\in R_V\}=\{d\}.$$

Следовательно, бинарное отношение R_V имеет два различных класса эквивалентности.

$$R_I=\{\langle a,\ a\rangle,\ \langle a,\ b\rangle,\ \langle a,\ c\rangle,\ \langle a,\ d\rangle,\ \langle b,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle,\ \langle b,\ c\rangle,\ \langle b,\ d\rangle,\ \langle c,\ c\rangle,\ \langle c,\ a\rangle,\ \langle c,\ b\rangle,\ \langle c,\ d\rangle,\ \langle d,\ d\rangle,\ \langle d,\ a\rangle,\ \langle d,\ b\rangle,\ \langle d,\ c\rangle\}.$$

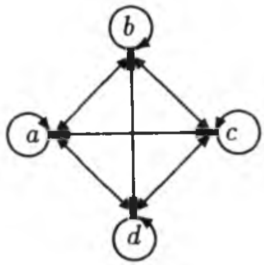


Рис. 72

В этом случае, очевидно,

$$a/_{R_I}=\{y\in\{a,\ b,\ c,\ d\}\mid\langle a,\ y\rangle\in R_I\}=$$
$$=\{a,\ b,\ c,\ d\}=b/_{R_I}=c/_{R_I}=d/_{R_I}.$$

Значит, отношение R_I имеет всего один класс эквивалентности.

$$R_{XII}=\{\langle a,\ a\rangle,\ \langle b,\ b\rangle,\ \langle c,\ c\rangle,\ \langle d,\ d\rangle\}.$$

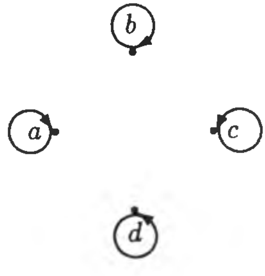


Рис. 73

В этом случае — четыре класса эквивалентности:

$$a/_{R_{\text{XII}}}=\{a\},\ b/_{R_{\text{XII}}}=\{b\},\ c/_{R_{\text{XII}}}=\{c\},\ d/_{R_{\text{XII}}}=\{d\}.$$

Пример 16.2. Найдем классы эквивалентности некоторых отношений на бесконечных множествах (примеры § 15).

1) Отношение сравнения по модулю 3:

$$R_4(3)=\{\langle x,\ y\rangle\,|\,\{x,\ y\}\subset \mathbf{Z}\wedge(x-y)\text{ делится на }3\}.$$

Класс эквивалентности 0 состоит из таких целых чисел y, что $(y-0)$, делится на 3, т. е. найдется $k\in\mathbf{Z}$ такой, что $y=k\ 3$:

$0/_{R_4(3)}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,y=3k\}=\{...\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ ...\}.$

Далее

$1/_{R_4(3)}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,\langle 1,\ y\rangle\in R_4(3)\}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,(y-1)\text{ делится на }3\}\overset{?}{=}$
$\overset{?}{=}\{y\in\mathbf{Z}\,|\,y=1+3k\}\overset{?}{=}\{\ ...\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ ...\ \}.$

$2/_{R_4(3)}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,\langle 2,\ y\rangle\in R_4(3)\}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,(y-2)\text{ делится на }3\}=$
$=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,y=2+3k\}=\{\ ...\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ ...\ \}.$

$3/_{R_4(3)}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,\langle 3,\ y\rangle\in R_4(3)\}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,(y-3)\text{ делится на }3\}=$
$=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,y=3+3k\}\overset{?}{=}0/_{R_4(3)}.$

$4/_{R_4(3)}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,\langle 4,\ y\rangle\in R_4(3)\}=\{y\in\mathbf{Z}\,|\,(y-4)\text{ делится на }3\}\overset{?}{=}?$

Дальнейшие вычисления и сравнения классов эквивалентности приводят к равенствам:

$$0/_{R_4(3)}=3/_{R_4(3)}=6/_{R_4(3)}=...=(3k)/_{R_4(3)},$$
$$1/_{R_4(3)}=4/_{R_4(3)}=7/_{R_4(3)}=...=(1+3k)/_{R_4(3)},$$
$$2/_{R_4(3)}=5/_{R_4(3)}=8/_{R_4(3)}=...=(2+3k)/_{R_4(3)}.$$

Таким образом, существуют всего три различных класса эквивалентности отношения $R_4(3)$ сравнения по модулю 3.

Обобщение этого результата на сравнения по произвольному натуральному числу m очевидно: всего m различных классов эквивалентности имеет отношение сравнения по модулю m.

Для классов эквивалентности примеров 15.1 — 15.4 приняты специальные названия. Так для сравнений предыдущего примера:

Определение 16.2. *Класс эквивалентности целого числа по отношению сравнения по модулю m называется* ***классом вычетов по модулю*** m.

Обозначение: $a\,(\mathrm{mod}\ m)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}a/_{R_4(m)}$.

$$a\,(\mathrm{mod}\ m)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\{y\in\mathbf{Z}\,|\,y=a+mk\wedge k\in\mathbf{Z}\}.$$

Могут ли два класса вычетов по модулю m иметь общие элементы?

Если это имеет место и $a\,(\mathrm{mod}\ m)\cap b\,(\mathrm{mod}\ m)\neq\varnothing$, то найдется $y\in a\,(\mathrm{mod}\ m)\cap b\,(\mathrm{mod}\ m)$ и

$$\left.\begin{array}{l} y\in a\,(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow y=a+km \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Vert \\ y\in b\,(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow y=b+lm \end{array}\right\}\Rightarrow b\overset{?}{=}a+sm\overset{?}{\Rightarrow} b\in a\,(\mathrm{mod}\ m).$$

Тогда произвольный $x\in b\,(\mathrm{mod}\ m)$ представим в виде:

$$x\overset{?}{=}b+pm\overset{?}{=}(a+sm)+pm\in a\,(\mathrm{mod}\ m).$$

В силу произвольности x получим, что $b\,(\mathrm{mod}\ m)\subset a\,(\mathrm{mod}\ m)$. Аналогично, $a\,(\mathrm{mod}\ m)\subset b\,(\mathrm{mod}\ m)$.

Откуда $a\,(\mathrm{mod}\ m)=b\,(\mathrm{mod}\ m)$ — два различных класса вычетов по модулю m совпадают, если у них есть хотя бы один общий элемент.

Определение 16.3. *Класс эквивалентности прямой по отношению параллельности на множестве всех прямых называется* ***пучком параллельных прямых****, а класс эквивалентности плоскости по отношению параллельности на множестве всех плоскостей —* ***пучком параллельных плоскостей****.*

Обозначения:

$$S_{\mathscr{L}}(l_0)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}l_0/_{R_2},\ \text{и}\ S_{\mathscr{L}}(l_0)=\{l\in\mathscr{L}\,|\,l\parallel l_0\}.$$

и, соответственно:

$$S_{\mathscr{P}}(\Pi_0)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\Pi_0/_{R_3},\ \text{и}\ S_{\mathscr{P}}(\Pi_0)=\{\Pi\in\mathscr{P}\,|\,\Pi\parallel\Pi_0\}.$$

Для отношения 15.1 эквиполентности на множестве всех направленных отрезков:

Определение 16.4. *Класс эквивалентности направленного отрезка по отношению эквиполентности на множестве всех направленных отрезков $\mathscr{C}$ называется* ***свободным вектором****.*

Обозначения: $\overrightarrow{AB}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\overline{AB}/_{R_1}$, и $\overline{AB}\in\overrightarrow{AB}$, а также $\overline{AB}\in\vec{\boldsymbol{a}}$.

$$\overrightarrow{AB}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\{\overline{CD}\subset\mathscr{C}\,|\,\overline{CD}\,\omega\,\overline{AB}\}.$$

Задание 16.1. Определим, в каком случае два свободных вектора имеют общий направленный отрезок?

Пусть $\overline{CD}\in\overrightarrow{AB}\cap\overrightarrow{EF}$ — есть ли у них еще общие элементы?

Возьмем $\overline{PQ} \in \overrightarrow{EF}$.

$$1.\quad \left.\begin{array}{l} \overline{PQ}\omega\overline{EF} \\ \overline{CD}\omega\overline{EF} \overset{?}{\Rightarrow} \overline{EF}\omega\overline{CD} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \overline{PQ}\omega\overline{CD}.$$

$$2.\quad \left.\begin{array}{r} \overline{PQ}\omega\overline{CD} \\ \overrightarrow{AB} \ni \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD}\omega\overline{AB} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \overline{PQ}\omega\overline{AB} \overset{?}{\Rightarrow} \overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{AB}.$$

Аналогично $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{EF}$. Это влечет совпадение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Тем самым доказано свойство.

Утверждение 16.1. *Если два свободных вектора имеют общий направленный отрезок, то они совпадают (равны).*

При изучении классов вычетов и свободных векторов можно было заметить их общие свойства: любые два класса эквивалентности, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают, и всякий класс эквивалентности элемента содержит этот элемент.

Посмотрим, насколько общи эти результаты.

Свойства классов эквивалентности

Теорема 16.1. *Класс эквивалентности элемента a содержит элемент a,* т. е. $a/_R \ni a$.

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} a/_R = \{x \mid \langle a, x\rangle \in R\} \\ a \in D(R) \overset{?}{\Rightarrow} \langle a, a\rangle \in R \end{array}\right\} \Rightarrow a/_R \ni a. \qquad \blacksquare$$

Лемма 16.1. *Если R — отношение эквивалентности на множестве D, то $D = \bigcup\limits_{a\in D} a/_R$.*

Задача 16.1.1. Докажите лемму 16.1.

Доказательство проводится методом двойного включения:

$$D = \bigcup_{a\in D} a/_R \Leftrightarrow \Big(\bigcup_{a\in D} a/_R \subset D \wedge D \subset \bigcup_{a\in D} a/_R\Big).$$

1. $\forall x \in \bigcup\limits_{a\in D} a/_R \overset{?}{\Rightarrow} x \in a/_R$ при некотором $a \in D \overset{?}{\Rightarrow} x \in D \overset{?}{\Rightarrow}$ $\overset{?}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{a\in D} a/_R \subset D.$

2. $y \in D = D(R) \xrightarrow{\text{замечание 15.1}} y \in \operatorname{Im} R \overset{?}{\Rightarrow} (\exists \langle a, y \rangle \in R) \overset{?}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow y \in a/_R$ при некотором $a \in D \overset{?}{\Rightarrow} D \subset \bigcup\limits_{a \in D} a/_R$.

3. Тогда $D = \bigcup\limits_{a \in D} a/_R$. ■

Лемма 16.2. *Для отношения эквивалентности R на произвольном множестве D классы $a/_R = b/_R$ тогда и только тогда, когда $\langle a, b \rangle \in R$.*

Задача 16.1.2. Докажите лемму 16.2.

Доказательства требуют два утверждения:

1. Если $\langle a, b \rangle \in R$, то $a/_R = b/_R$, и 2. Если $a/_R = b/_R$, то $\langle a, b \rangle \in R$.

1. $\langle a, b \rangle \in R \overset{?}{\Rightarrow} a/_R = b/_R$.

$$\left.\begin{matrix} \langle a, b \rangle \in R \overset{?}{\Rightarrow} \langle b, a \rangle \in R \\ x \overset{?}{\in} a/_R \Rightarrow \langle a, x \rangle \in R \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle b, x \rangle \in R \overset{?}{\Rightarrow} x \in b/_R \overset{?}{\Rightarrow} a/_R \subset b/_R.$$

Доказательство $b/_R \subset a/_R$ аналогично, откуда по принципу двойного включения следует совпадение $a/_R = b/_R$.

2. $a/_R = b/_R \overset{?}{\Rightarrow} \langle a, b \rangle \in R$.

$$a/_R = b/_R \overset{?}{\Rightarrow} b \overset{?}{\Rightarrow} \langle a, b \rangle \in R.$$ ■

Теорема 16.2. *Если R — отношение эквивалентности на некотором множестве D, то любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство в общем виде будет повторять идеи доказательств подобных утверждений в задании 16.1 и примере 16.1.

Доказательство. Естественно полагать, что два класса эквивалентности, как множества, могут: 1. не пересекаться, 2. совпадать, 3. не совпадая, иметь общие элементы. Суть доказательства теоремы в том, чтобы показать, что последнее исключается. Рассмотрим эти возможности.

Случаи 1. $a/_R \cap b/_R = \varnothing$ и 2. $a/_R = b/_R$ удовлетворяют теореме.

3. Пусть $a/_R \cap b/_R \neq \varnothing$, но $a/_R \neq b/_R$, это означает, что найдется $y \in a/_R \cap b/_R$. Тогда

$$\left.\begin{matrix} y \in a/_R \Rightarrow \langle a, y \rangle \in R \\ y \in b/_R \Rightarrow \langle b, y \rangle \in R \overset{?}{\Leftrightarrow} \langle y, b \rangle \in R \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle a, b \rangle \in R \xrightarrow{\text{лемма 16.2}}$$
$$\xrightarrow{\text{ч.16.2}} a/_R = b/_R.$$

И установлено, что если два класса эквивалентности имеют хотя бы один общий элемент, то они совпадают. ■

Чтобы представить себе, каково множество классов эквивалентности (или «сколько» таких классов), удобно выбрать по одному элементу из каждого такого множества:

Определение 16.5. ***Полной системой представителей классов эквивалентности*** *(по данному отношению эквивалентности) называется множество представителей всех таких классов, по одному из каждого класса.*

Пример 16.3. Найдем полные системы представителей некоторых отношений эквивалентности на конечных и бесконечных множествах.

1. Отношение R_V задания 13.1 (см. пример 16.1 и рис. 74):

$$R_V = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, d\rangle\}$$

с классами эквивалентности:

$$a/_{R_V} = b/_{R_V} = c/_{R_V} = \{a, b\ c\} \text{ и } d/_{R_V} = \{d\}.$$

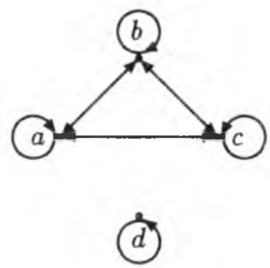


Рис. 74

Полную систему представителей классов эквивалентности по отношению R_V составляют элементы $\{a, d\}$, но в ее качестве можно брать и другие множества, например: $\{b, d\}$ или $\{c, d\}$.

Понятно, что любая полная система представителей R_V состоит из двух элементов.

2. Отношение сравнения примера 15.1 (см. пример 16.2):

$$R_4(3) = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{Z} \wedge (x - y) \text{ делится на } 3\}$$

с классами эквивалентности:

$$0/_{R_4(3)} = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 3k\},\ 1/_{R_4(3)} = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 1 + 3k\},$$

$$2/_{R_4(3)} = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 2 + 3k\}.$$

Его полную систему представителей могут составлять: $\{0, 1, 2\}$ или $\{3, 1, 2\}$ или $\{-3, 4, 5\}$ и т. д. Но всякая полная система представителей этого отношения состоит из трех элементов.

В общем случае полная система представителей классов вычетов по модулю m обозначается $\mathbf{Z}_m$, и обычно полагают

$$Z_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ m-1\}.$$

3. Отношение эквиполентности примера 15.1 (см. определения 13.2, 16.4):

$$R_1 = \{\langle \overline{AB},\ \overline{CD}\rangle \mid \{\overline{AB},\ \overline{CD}\} \subset \mathscr{C} \wedge \overline{AB}\omega\overline{CD}\}$$

с классами эквивалентности — свободными векторами:

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} \subset \mathscr{C} \mid \overline{AB}\omega\overline{CD}\}.$$

Его систему полных представителей удобно представлять как множество всех направленных отрезков, отложенных от одной точки:

$$\{\overline{AX} \mid \text{точка } A \text{ фиксирована} \wedge X \text{ — любая точка плоскости}\}.$$

4. Для отношений параллельности на множестве всех прямых и плоскостей (примеры 15.2, 15.3 и определение 16.3):

$$R_2 = \{\langle a,\ b\rangle \mid \{a,\ b\} \subset \mathscr{L} \wedge a \parallel b\}$$
$$R_3 = \{\langle \Pi_\alpha,\ \Pi_\beta\rangle \mid \{\Pi_\alpha,\ \Pi_\beta\} \subset \mathscr{P} \wedge \Pi_\alpha \parallel \Pi_\beta\}.$$

Полные системы представителей удобно интерпретировать как множества всех прямых, или, соответственно, плоскостей, проходящих через одну точку, в этом случае говорят о пучке пересекающихся прямых или плоскостей:

Определение 16.6. ***Пучком пересекающихся прямых*** *называется множество всех прямых, проходящих через одну точку —* ***центр пучка пересекающихся прямых,*** *а* ***пучком пересекающихся плоскостей*** *называется множество всех плоскостей, проходящих через одну точку —* ***центр пучка пересекающихся плоскостей***.

Обозначение пучка пересекающихся прямых — $S_{\mathscr{L}}(O)$,

$$S_{\mathscr{L}}(O) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{l \in \mathscr{L} \mid l \ni O\},$$

а пучка пересекающихся плоскостей — $S_{\mathscr{P}}(O)$,

$$S_{\mathscr{P}}(O) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\Pi \in \mathscr{P} \mid \Pi \ni O\}.$$

Можно заметить, что количество элементов полной системы представителей отношения эквивалентности равно числу его классов эквивалентности в случае конечных множеств, в общем случае (например, если множество бесконечно) множество — система представителей и множество классов эквивалентности отношения равномощны. Таким образом, естественно заняться изучением новых структур — множеств классов эквивалентности или полных систем их представителей.

Определение 16.7. ***Фактор-множеством множества*** D ***по отношению эквивалентности*** R *называется множество всех его классов эквивалентности.*

Фактор-множество множества D по отношению R обозначается так: $D/_R$.

$$D/_R \stackrel{\text{def}}{=} \{a/_R \mid a \in D\}.$$

Элементом фактор-множества, т. е. его точкой, является другое множество — класс эквивалентности.

Так элементами фактор-множества множества всех направленных отрезков $\mathscr{O}$ по отношению эквивалентности R_1 (см. выше пример 16.3, п. 3) являются свободные векторы (определение 16.4). Это фактор-множество имеет специальное название — ***векторное пространство свободных векторов***, и обозначение — $\mathscr{V}$.

Причем, если необходимо подчеркнуть, что рассматриваются только направленные отрезки, принадлежащие (параллельные) плоскости, то фактор-множество по отношению R_1 будет обозначаться $\mathscr{K}^2$ и называться ***векторной плоскостью свободных векторов***. Если же существенно, что отношение эквивалентности рассматривается на множестве **всех** направленных отрезков пространства, то для фактор-множества будет использовано обозначение $\mathscr{V}^3$.

Выделение в множестве $\langle D, R\rangle$ классов эквивалентности по отношению R разбивает его на непересекающиеся подмножества. Более строго:

Определение 16.8. ***Разбиением множества*** X *называется некоторое множество его подмножеств*

$$S = \{X_\alpha \mid X_\alpha \subset X \wedge \alpha \in \mathscr{A}\}$$

таких, что выполняются требования (аксиомы):

P1. $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha = X$.

P2. $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$, если $\alpha \neq \beta$.

Иногда определение разбиения пополняется аксиомой

P3. $X_\alpha \neq \varnothing$, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$.

мы в этом случае будем говорить о ***разбиении*** X ***на непустые подмножества.***

Здесь $\mathscr{A}$ — некоторое множество индексов, которое может быть конечным, бесконечным и даже несчетным.

Теорема 16.3. *Если R — отношение эквивалентности на множестве X ($X \neq \varnothing$), то $X/_R$ есть разбиение X.*

Доказательство. В качестве множества подмножеств возьмем фактор-множество $X/_R=\{a/_R|a\in X\}$ и покажем выполнимость аксиом разбиения, основываясь на установленных выше свойствах классов эквивалентности.

P1. $\bigcup_{a\in X} a/_R = X$ по лемме 16.?.

P2. Если $a/_R \neq b/_R$, то по теореме 16.? $a/_R \cap b/_R = \varnothing$.

P3. $a/_R \neq \varnothing$, так как всякий $a/_R \ni a$ по теореме 16.?. ■

Оказывается, что имеет место и обратное:

Теорема 16.4. *Каково бы ни было разбиение множества, существует отношение эквивалентности такое, что его классами эквивалентности являются подмножества разбиения.*

Задача 16.1.3. Докажите теорему 16.4.

Для доказательства введем на множестве X с заданным разбиением $S=\{X_\alpha|X_\alpha\subset X \wedge \alpha\in\mathscr{A}\}$ бинарное отношение следующим образом:

$R_S=\{\langle x, y\rangle|\{x, y\}\subset X \wedge \{x, y\}\subset X_\alpha$ для некоторого $\alpha\in\mathscr{A}\}$.

Будем говорить, что такое *отношение* R_S ***соответствует разбиению*** S *множества* X.

Покажем, что бинарное отношение R_S, соответствующее разбиению S непустого множества X, является отношением эквивалентности на X, причем $X/_{R_S}$ совпадает с разбиением S.

1. R_S — рефлексивно: $\langle x, x\rangle \overset{?}{\in} R_S$. ♦

2. R_S — симметрично: $\langle x, y\rangle\in R_S \overset{?}{\Rightarrow} \langle y, x\rangle\in R_S$. ♦

3. R_S — транзитивно:

$$\left.\begin{array}{l}\langle x, y\rangle\in R_S \overset{?}{\Leftrightarrow} \{x, y\}\subset X_\alpha \Rightarrow X_\alpha\ni y\\ \langle y, z\rangle\in R_S \overset{?}{\Leftrightarrow} \{y, z\}\subset X_\beta \Rightarrow X_\beta\ni y\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} X_\alpha=X_\beta \overset{?}{\Rightarrow} \{x, z\}\subset X_\alpha \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \langle x, z\rangle\in R_S.$$ ■

Задача 16.2.2 — 16.2.3. Рассмотрим бинарное отношение:

$\mathscr{F}_X=\{\langle R, S\rangle|S$ — разбиение множества $X\wedge$
R — соответствующее разбиению S отношение эквивалентности$\}$.

Является ли это бинарное отношение сюръективным? инъективным? отображением?

1. sur: по теореме 16.4 для любого разбиения S множества X существует отношение эквивалентности, соответствующее S.

2. in: $R_1, R_2\left|\begin{array}{l}\langle R_1, S\rangle\in\mathscr{F}_X\\ \langle R_2, S\rangle\in\mathscr{F}_X\end{array}\right\}\Rightarrow R_1\overset{?}{=}R_2$. ♦

3. отображение: $S_1, S_2\left|\begin{array}{l}\langle R, S_1\rangle\in\mathscr{F}_X\\ \langle R, S_2\rangle\in\mathscr{F}_X\end{array}\right\}\Rightarrow S_1\overset{?}{\neq}S_2$. ♦

Указание. Подумайте, не может ли оказаться так, что отношению эквивалентности соответствуют два различных разбиения множества X. По какой причине это может быть?

Ответьте на те же вопросы (сюръективность? инъективность? отображение?) для бинарного отношения

$$\mathcal{T}_X = \{\langle R,\ S\rangle \mid S \text{ — разбиение на непустые подмножества } X \wedge R \text{ — соответствующее разбиению отношение эквивалентности}\}.$$

Теорема 16.5. *Каждому отношению эквивалентности на непустые множества X соответствует одно и только одно его разбиение на непустые подмножества.*

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Вселенная, насколько она нам известна, устроена так, что истинное в каком-либо одном случае истинно и во всех случаях некоторого описания, трудность состоит лишь в том, чтобы найти такое описание.
>
> *Джон С. Миль.* «Система логики»

Понятие бинарного отношения (или соотношения, соответствия) сформировалось в математике к концу XIX — началу XX веков, когда длительная дискуссия по поводу определения числовой функции, данного Дирихле, привела к попыткам его уточнения и обобщениям разного рода. В результате этого, как мы уже знаем, получили право на существование понятие отображения или функции с произвольными (не обязательно числовыми), областями определений и значений. Несколько большей абстракции потребовало понятие бинарного и, вообще, n-арного отношения, которые можно представить себе, как следующий этап обобщения понятия функции (отображения) при отказе от требования единственности кортежа с данным первым элементом.

Но суть этого шага в математике — не в беспредметном обобщательстве. Удивительным оказалось то, что специальные виды различных бинарных отношений, обладающих довольно простыми свойствами (например: рефлексивность, симметричность и транзитивность) помогли увидеть общность фактов различных математических теорий. Это мы могли заметить уже на примерах простейших множеств (свободные векторы, равномощные множества), геометрических фигур (равновеликие, равносоставленные), теории чисел (вычеты) и т. д. Понятно, что этими примерами отношения эквивалентности далеко не исчерпываются.

Более того, почти в каждой новой структуре наряду с понятием изоморфизма (от греческого: ισοζ — равный, μορφη — вид) эквивалентность будет играть важнейшую роль, проверяя насколько содержательна и богата та или иная математическая структура.

Собственно порядок и эквивалентность — столь естественные понятия, что, кажется, ими могли бы владеть еще математики эллинистического периода, однако, термин эквивалентность был введен только к концу XVIII века, а в современном смысле им, видимо, впервые начал пользоваться Лагранж в работах по теории квадратичных форм и Гаусс в трактате «Teoria metus» («Теория движения небесных тел») в самом начале XIX века.

Что касается отношения порядка, то его аксиоматику еще около 1690 г. рассматривал Лейбниц. Спустя почти столетие внимание Г. Кантора привлекли линейно упорядоченные множества, и им в 1883 г. была доказана упоминавшаяся теорема о том, что любое непустое множество может быть вполне упорядочено. Термин «частичный порядок» ввел в 1914 г. известный немецкий математик Ф. Хаусдорф (Hausdorff Felix, 1868—1942 в своем труде «Grundrüge der Mengenlerhe» («Основы теории множеств»), а позднее в работах по функциональному анализу американский и английский математики Э. Мур (Moore Eliakim Hastings, 1862—1932) и Г. Смит (Smith Henry, 1826—1883) изучая вопросы сходимости, ввели так называемые направленные множества, которые могут не иметь наименьшего или наибольшего элемента, но обладать нижней или верхней гранью. Историки математики отмечают в этой области работы и русского математика С. О. Шатуновского (1859—1929), занимавшегося в начале нашего века вопросами обоснования математики и разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Определение математики, как науки, дать весьма сложно и, наверняка, любое такое определение будет неполно. Крупнейший русский математик нашего времени А. Н. Колмогоров (1903—1987) писал, что математика «имеет дело с некоторыми множествами объектов, связанных между собой определенными отношениями. Все формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом, не затрагивающих конкретной природы объектов и отношений. Теория применима к любой системе объектов с отношениями, удовлетворяющими положенной в ее основу системе аксиом».

Из его рассуждений вытекает, что математическая теория, применимая к какой-либо системе объектов, применима и к любой аналогичной, т. е. «изоморфной» ей системе. И именно понятие и характеристики отношений эквивалентности мы будем использовать, отвечая на вопросы: как много существует систем объектов, к которым применима та или иная теория (в математике в таких случаях говорят от моделях теории),— т. е. сколько классов эквивалентности по отношению изоморфизма на множестве всех моделей данной математической структуры, и какова его полная система представителей. А из этого естественно вытекает задача отыскания эталонных в каком-либо смысле моделей тех или иных структур.

Все это в конечном счете позволяет выработать категорийный подход к математике и математическим теориям, понимание того, что ее законы носят глубокий характер, умение видеть в частных примерах общие закономерности и свойства математических структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 624 с.
3. *Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П.* Геометрия, ч. II—М.: Просвещение, 1975.— 388 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

4. *Бурбаки Н.* Теория множеств.— М.: Мир, 1965.— 456 с.
5. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
6. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 368 с.
7. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 13°. Виды бинарных отношений на множестве

[1] — стр. 65—70.
[5] — стр. 288.

§ 14. Отношения порядка на множестве

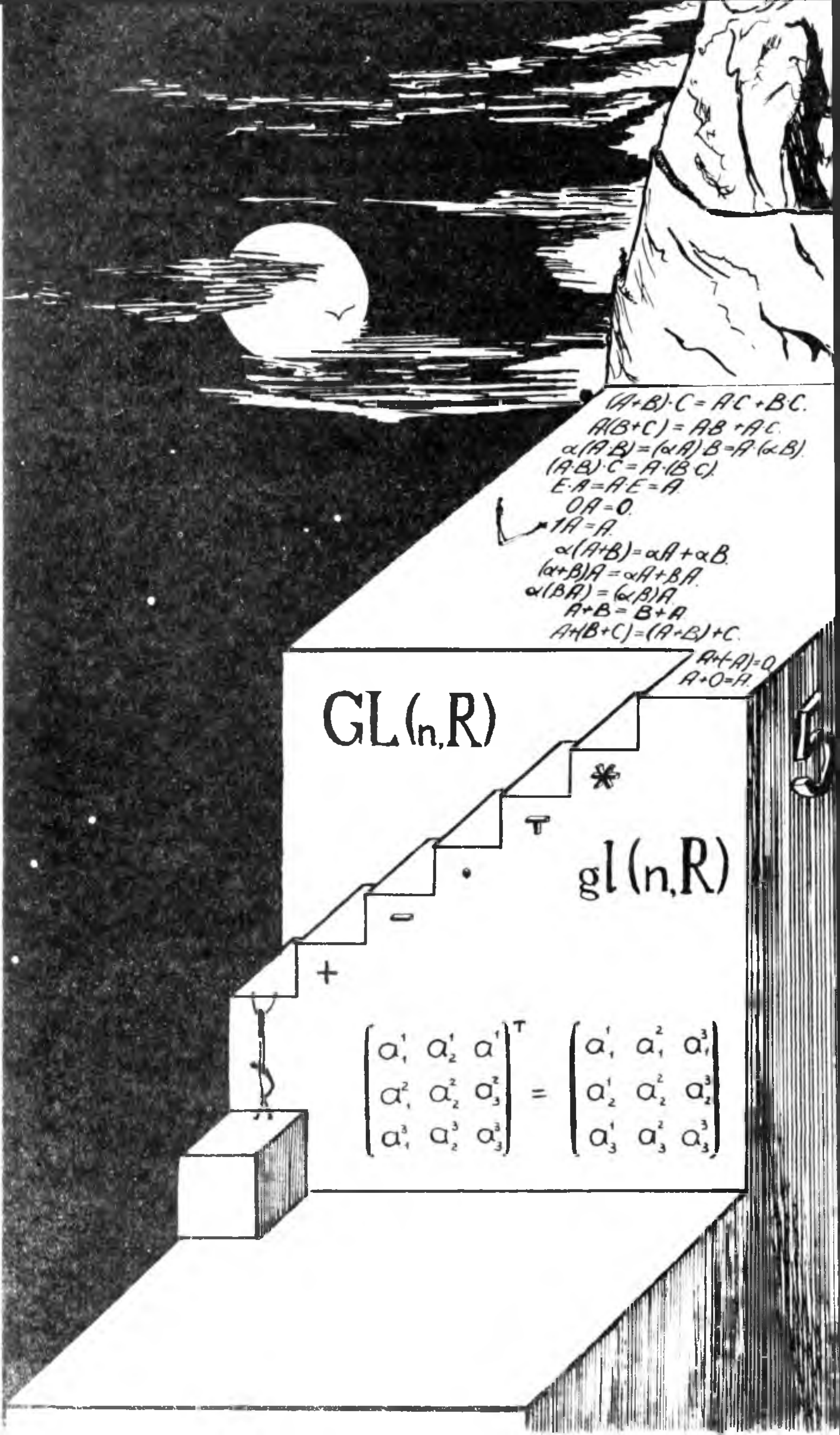
[1] — стр. 71—73.
[4] — стр. 137—138, стр. 142—145.
[5] — стр. 289—290.
[6] — стр. 23—25.
[7] — стр. 49—51.

§ 15. Отношения эквивалентности на множестве

[1] — стр. 67—68.
[2] — стр. 26.
[4] — стр. 125—126.
[5] — стр. 288—289.
[6] — стр. 16.

§ 16. Классы эквивалентности. Фактор-множество

[1] — стр. 68—69.
[2] — стр. 26—27.
[3] — стр. 220—221.
[4] — стр. 126—127.
[5] — стр. 289—290.
[6] — стр. 16—18.
[7] — стр. 49—51.


(A+B)·C = A·C + B·C.
A(B+C) = AB + A·C.
α(A·B) = (αA)·B = A·(αB).
(A·B)·C = A·(B·C).
E·A = A·E = A.
0A = 0.
1A = A.
α(A+B) = αA + αB.
(α+β)A = αA + βA.
α(βA) = (αβ)A.
A+B = B+A.
A+(B+C) = (A+B)+C.
A+(−A) = 0.
A+0 = A.
GL(n,R)
*
T
·
gl(n,R)
−
+
$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{pmatrix}$
5

Лекция 5

МАТРИЦЫ ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ И СВОЙСТВА

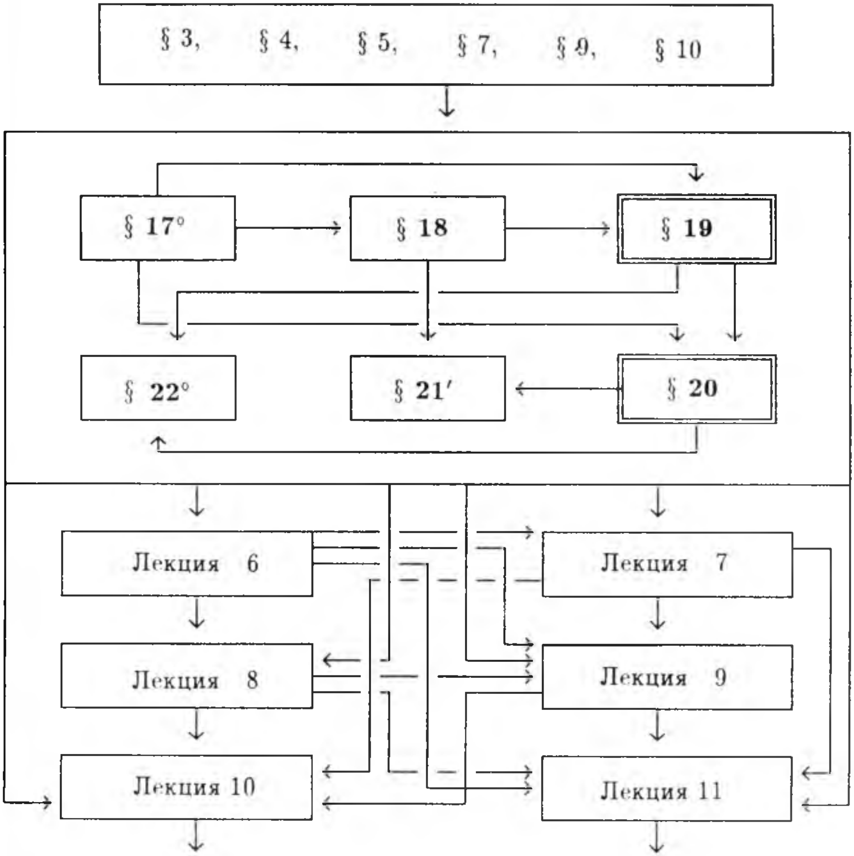
МАТРИЦЫ

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ И СВОЙСТВА

Основные понятия: виды матриц: симметрическая, кососимметрическая, транспонированная, диагональная, скалярная, единичная, ступенчатая, треугольная; действия с матрицами: сложение и умножение на число, умножение и обращение матриц; матрица, противоположная данной, перестановочные и обратимые матрицы; полная линейная алгебра и полная линейная группа; матрицы системы линейных уравнений: основная и расширенная.

Необходимые сведения: матрица, декартово произведение множеств, декартов квадрат множества, кортеж, равенство кортежей, отношение, отображение, виды отображений: инъективные, сюръективные, биективные; действительные числа (**R**) и их свойства, система линейных уравнений, решение системы линейных уравнений.

Рекомендации: если использовать пособие в лекционной работе, то целесообразно предварительное знакомство студента с содержанием (определениями) § 17°, для самостоятельного изучения рекомендуется § 22°, а примеры § 21′ — для обсуждения на практических занятиях.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы.
Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 17°. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ

Понятие матрицы было введено в § 4:

Определение 4.1. ***Матрицей*** (вещественной) ***порядка*** *m* ***на*** *n называется любой элемент декартовой степени множества действительных чисел $(\mathbf{R}^n)^m$.*

Напоминание. Матрицу порядка m на n представляем как числовую таблицу из m строк и n столбцов, а множество всех таких матриц обозначается $\boldsymbol{M}(m\times n,\ \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{M}(m\times n)$.

Матрица $A\in\boldsymbol{M}(m\times n,\ \mathbf{R})$ в общем виде записывается так:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & .. & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & .. & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & .. & a_n^m \end{pmatrix}=\|a_j^i\|\overset{\text{или}}{=}\|(A)_j^i\|.$$

Вверху номер строки, внизу — номер столбца.

где $i=1,\ 2,\ldots m,\ j=1,\ 2,\ldots n.$

Обозначение: запись $i=1,\ 2,\ldots m$ означает i принимает все целые значения от 1 до m.

Элементы a_i^i матрицы $A=\|a_j^i\|$ называют ***диагональными*** *(точнее — элементами* ***главной диагонали****).*

i-ую строку матрицы A будем обозначать A^i, а ее j***—ый столбец*** — A_j:

$$A^i\overset{\text{def}}{=}(a_1^ia_2^i\ldots a_n^i),\qquad A_j\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \\ \ldots \\ a_j^m \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A со строками $\{A^i\}$ или столбцами $\{A_j\}$ иногда будем пользоваться обозначениями: $A=\|A^i\|=\|A_j\|$.

Так как матрицы — суть элементы некоторой декартовой степени множества действительных чисел, то естественно считать матрицы равными, как кортежи, откуда другими словами:

две матрицы равны *тогда и только тогда, когда равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.*

$$A=B\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}((\{A,\ B\}\in\boldsymbol{M}(m\times n,\ \mathbf{R}))\wedge(a_j^i=b_j^i\ \forall\ \langle i,\ j\rangle\in\{1,\ 2,\ 3\ldots m\}\times\{1,\ 2,\ 3\ldots n\})).\tag{17.1}$$

Определим несколько операций и специальных видов матриц, которые используются наиболее часто:

Определение 17.2. ***Матрицу*** $B=\|b_k^s\|\in\boldsymbol{M}(n\times m,\ \mathbf{R})$ называют ***транспонированной к матрице*** $A=\|a_j^i\|\in\mathbf{M}(m\times n,\ \mathbf{R})$, *если элементы $b_j^i=a_i^j$ для всех $1\leqslant i\leqslant m$ и $1\leqslant j\leqslant n$.*

Обозначение: $B=A^{\mathrm{T}}$.

Краткая запись этого определения:

$$B \overset{\text{def}}{=} A^{\text{т}} \Leftrightarrow (b^i_j = a^j_i \forall \langle i,\ j \rangle \in \{1,\ 2,\ 3 \ldots m\} \times \{1,\ 2,\ 3 \ldots n\}). \quad (17.2)$$

Операция получения по заданной матрице ее транспонированной называется ***транспонированием матрицы***. Транспонируем матрицу A:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. столбцы матрицы A являются строками матрицы $A^{\text{т}}$.

Определение 17.3. ***Матрицу*** $B = \|b^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n,\ \mathbf{R})$ *называют* ***противоположной матрице*** $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n,\ \mathbf{R})$ *(того же порядка), если элементы* $b^i_j = -a^i_j$ *для всех индексов* $(1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n)$.

Обозначение: $B = -A$. (17.3)

$$B = -A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (b^i_j = -a^i_j \ \forall \langle i,\ j \rangle \in \{1,\ 2,\ 3 \ldots m\} \times \{1,\ 2,\ 3 \ldots n\}).$$

Определение 17.4. ***Матрицу*** *называют* ***нулевой***, *если все ее элементы равны* 0.

Обозначение такой матрицы: O.

Определение 17.5. ***Матрицу*** *называют* ***треугольной*** *(верхней треугольной), если* $a^i_j = 0$ *при* $i > j$, т. е. *все ее элементы ниже диагонали равны* 0.

$$A \text{ — **треугольная** } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a^i_j = 0 \ \forall i > j). \quad (17.4)$$

Естественно ***строку или столбец матрицы*** называть ***нулевыми***, если все их элементы — нули.

Определение 17.6. ***Матрица*** *называется* ***ступенчатой,*** *если во всех ее строках нижние индексы первых (слева) ненулевых элементов* $a^i_{j_i}$ *возрастают:* $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Из определения следует, что ступенчатая матрица треугольна, причем ее нулевые строки (если они есть) расположены ниже всех ее ненулевых строк.

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Определение 17.7. ***Матрицу*** *называют* ***квадратной порядка n,*** *если число строк матрицы равно числу ее столбцов, т. е. матрицу вида* $\boldsymbol{M}(n \times n,\ \mathbf{R})$.

Обычно множество всех вещественных квадратных матриц порядка n обозначается $\boldsymbol{M}(n,\ \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{M}(n)$.

Среди квадратных матриц выделим еще несколько специальных видов:

Определение 17.8. ***Квадратную матрицу порядка*** n $A=\|a^i_j\|$ *называют* ***симметрической,*** *если* $a^i_j=a^j_i$ — *для всех индексов* $1\leqslant i,\ j\leqslant n$.

Обозначение: $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ для всех i и j целых от 1 до n.

В этом случае говорят, что элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

Обозначение множества всех симметрических матриц порядка n: $\boldsymbol{S}(n,\ \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{S}(n)$.

$$A \text{ — \textbf{симметрическая} } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a^i_j=a^j_i\ \forall\ \{i,\ j\}\subset\{1, 2, 3 \dots n\}). \qquad (17.5)$$

Определение 17.9. ***Квадратную матрицу*** *порядка* n $A=\|a^i_j\|$ *называют* ***кососимметрической,*** *если* $a^i_j=-a^j_i$ *для всех индексов* $1\leqslant i,\ j\leqslant n$.

$$A \text{ — \textbf{кососимметрическая} } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a^i_j=-a^j_i\ \forall\ \{i,\ j\}\subset\{1, 2, 3 \dots n\}). \qquad (17.6)$$

Очевидно, диагональные элементы кососимметрической матрицы всегда нулевые.

Несложно доказать утверждение.

Утверждение 17.1. *Матрица A симметрична тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}}=A$, и кососимметрична тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}}=-A$.*

Определение 17.10. *Матрицу, у которой все элементы, кроме, быть может, диагональных, нулевые, называют* ***диагональной матрицей****. Если все диагональные элементы такой матрицы равны между собой, то ее называют* ***скалярной матрицей****, а если они к тому же равны 1, то матрица называется* ***единичной.***

Обозначение единичной матрицы: $E=\|\delta^i_j\|$, где δ^i_j — так называемый символ Кронекера:

$$\delta^i_j=\begin{cases} 1, \text{ если } i=j \\ 0, \text{ если } i\neq j. \end{cases} \qquad (17.7)$$

Скалярная матрица с использованием символов Кронекера может быть записана в виде $\|\lambda\delta^i_j\|$, а диагональная — $\|\lambda^j\delta^i_j\|$.

Матрицу, у которой один элемент равен 1, а все остальные — нулевые, принято обозначать E^i_j, если единица стоит в i-ой строке и j—ом столбце.

Замечание 17.1. Полезно знать некоторые соотношения для символов Кронекера, так

$$\delta^i_j\delta^s_t=\begin{cases} 0, \text{ если } i\neq j \text{ или } s\neq t, \\ 1, \text{ если } i=j \text{ и } s=t \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\delta^i_k\delta^k_j=\delta^i_j.$$

Задача 17.1.1. Определите типы матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ V=(-8),\ W=(1\ \ -2\ \ 1).$$

§ 18. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ (СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО)

На множестве всех матриц одного порядка довольно естественным образом вводятся операции сложения и умножения матрицы на число. Позднее мы увидим, что такая «естественность» не только не случайна, но связана с подобными же действиями на специальных отображениях — линейных.

Определение 18.1. ***Суммой двух матриц одного порядка*** $A=\|a^i_j\|$ и $B=\|b^i_j\|$ *называется матрица того же порядка вида* $\|a^i_j+b^i_j\|$.

Обозначение: $A+B$.

$$A+B\overset{\text{def}}{=}\|a^i_j+b^i_j\| \qquad (18.1)$$

или

$$(A+B)^i_j\overset{\text{def}}{=}a^i_j+b^i_j. \qquad (18.1')$$

Т. е. при сложении двух матриц одного порядка складываются их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Задание 18.1. Сложите матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = ?.$$

Заметим, что для матриц: нулевой $O \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ и произвольной того же порядка $A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ выполняются равенства:

$$A + O = A \text{ и } O + A = A.$$

Сложение матриц определяет некоторое отношение, которое мы будем обозначать:

$$|+|_{(m,n)} = \{\langle\langle A,\ B\rangle,\ A+B\rangle\} \subset \boldsymbol{M}^2(m \times n) \times \boldsymbol{M}(m \times n),$$

оно является отображением:

$$\boldsymbol{M}(m \times n) \times \boldsymbol{M}(m \times n) \to \boldsymbol{M}(m \times n),$$

так как по элементам матриц $A = \|a_j^i\|$ и $B = \|b_j^i\|$ одного порядка однозначно находятся числа $a_j^i + b_j^i$, как суммы действительных чисел (см. пр. 7.1), а значит, и матрица $A + B = \|a_j^i + b_j^i\|$. Тем самым обеспечивается (см. опр. 7.1) единственность кортежа $\langle\langle A,\ B\rangle,\ C\rangle \subset |+|_{(m,\ n)}$ длины 2 с элементом $\langle A,\ B\rangle$ на первом месте. Причем, так как суммой любых двух матриц одного порядка является матрица того же порядка, то $\mathrm{Dom}\,|+|_{(m,\ n)} = \boldsymbol{M}(m \times n)$ и $\mathrm{Im}\,|+|_{(m,\ n)} \subset \boldsymbol{M}(m \times n)$.

Сюръективно ли это отображение? (См. определение 9.1, замечание 9.1), т. е. можно ли утверждать, что для любого $A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ найдутся $\langle ?,\ ?\rangle \in \boldsymbol{M}(m \times n) \times \boldsymbol{M}^2(m \times n)$ такие, что $? + ? = A$? ♦

Это означает сюръективность отображения $|+|_{(m,\ n)}$.

$|+|_{(m,\ n)}$ неинъективно (см. определение 9.2, замечание 9.2), так как можно указать $\{\langle ?,\ ?\rangle,\ \langle A,\ ?\rangle\} \subset \boldsymbol{M}(m \times n)$ такие, что $\langle ?,\ ?\rangle \neq \langle A,\ ?\rangle$, но $? + ? = A$ и $A + ? = A$.

Таким образом, можно считать доказанным следующее.

Утверждение 18.1. *Операция сложения матриц одного порядка есть отображение* $|+|_{(m,\ n)}: \boldsymbol{M}^2(m \times n) \to \boldsymbol{M}(m \times n)$, *сюръективное, но неинъективное.*

Определение 18.2. ***Произведением скаляра*** *(числа* $\alpha \in \mathbf{R}$*)* ***на матрицу*** $A = \|a_j^i\|$ *называется матрица того же порядка вида:* $\|\alpha a_j^i\|$, т. е. при умножении числа на матрицу на это число умножается ее любой элемент.

Обозначение: $\alpha \cdot A$ или αA.

$$\alpha \cdot A \overset{\text{def}}{=} \|\alpha a_j^i\| \tag{18.2}$$

или

$$(\alpha\cdot A)^{i}_{j} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \alpha a^{i}_{j}. \qquad (18.2')$$

Очевидно, что для любого $A\in \boldsymbol{M}\ (m\times n)$ выполняются равенства:
$1\cdot A=A$, $(-1)\cdot A=-A$, а $0\cdot A=O$, и аналогично сложению матриц произведение числа (скаляра) на матрицу определяет отношение:

$$|\cdot|_{(m,\ n)}=\{\langle\langle\alpha,\ A\rangle,\ \alpha\cdot A\rangle\}\subset(\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(m\times n))\times\boldsymbol{M}(m\times n),$$

которое является отображением, и аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение. ◆

Утверждение 18.2. *Операция умножения скаляра на матрицу есть отображение* $|\cdot|_{(m,\ n)}\colon \mathbf{R}\times\boldsymbol{M}\,(m\times n)\to\boldsymbol{M}\,(m\times n)$, *сюръективное, но неинъективное.*

Задача 18.1.1. 1. Докажите сюръективность отображения $[\cdot]_{(m,\ n)}$ (см. определение 9.1, замечание 9.1).

Указание. Для произвольной матрицы $A\in\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ укажите число и матрицу так, чтобы $?\cdot?=A$, это означает сюръективность отображения $|\cdot|_{(m,\ n)}$.

2. Приведите пример хотя бы двух кортежей $\langle\alpha,\ A\rangle\neq\langle\beta,\ B\rangle$ таких, что $\alpha A=\beta B$ (см. определение 9.2). Это означает, что отображение $[\cdot]_{(m,\ n)}$ — не инъективно.

Так как сложение матриц и умножение скаляра на матрицу определяется через сложение и умножение действительных чисел, то многие их свойства похожи.

Основные свойства операций над матрицами (сложения и умножения скаляра на матрицу)

18.1. $A+B=B+A$, $\forall\,\{A,\ B)\subset\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — коммутативность сложения матриц.

18.2. $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall\,\{A,\ B,\ C\}\subset\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — ассоциативность сложения матриц.

18.3. $A+O=O+A=A$, $\forall A\in\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — наличие нейтрального элемента по сложению матриц.

18.4. $A+(-A)=(-A)+A=O$, $\quad\forall A\in\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — наличие противоположной для произвольной матрицы.

18.5. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\beta)\cdot A$, $\forall\ \langle\alpha,\ \beta,\ A\rangle\in\mathbf{R}^2\times\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — ассоциативность умножения скаляров на матрицу.

18.6. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$, $\ \forall\ \langle\alpha,\ \beta,\ A\rangle\in\mathbf{R}^2\times\boldsymbol{M}\,(m\times n)$ — дистрибутивность сложения скаляров относительно умножения на матрицу.

18.7. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$, $\ \forall\ \langle\alpha,\ A,\ B\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}^2\,(m\times n)$ — дистрибутивность сложения матриц относительно умножения скаляра на матрицу.

18.8. $1\cdot A=A$, $\ \forall A\in\boldsymbol{M}\,(m\times n)$.

18.9 $0 \cdot A = O, \ \forall A \in \mathbf{M}(m \times n)$.

В качестве примера доказательства свойств приведем следующее.

Доказательство свойства 18.7. Пусть матрица $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ и $B = \|b^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, требуется установить равенство матриц: $\alpha \cdot (A + B)$ и $\alpha \cdot A + \alpha \cdot B$. Так как, очевидно, они одного порядка, то остается доказать (см. (17.1)) равенство их соответствующих элементов.

1. Матрица $\alpha \cdot (A + B) \stackrel{(18.2)}{=\!=} \|\alpha\,(A + B)^i_j\| \stackrel{(18.1')}{=\!=} \|\alpha\,(a^i_j + b^i_j)\| \stackrel{?}{=}$

$$\stackrel{?}{=} \|\alpha a^i_j + \alpha b^i_j\|.$$

Т. е. элемент, стоящий на пересечении i—ой строки и j-ого столбца матрицы $\alpha \cdot (A + B)$, равен $\alpha a^i_j + \alpha b^i_j$.

2. Запишем сумму матриц через общий вид элементов матриц-слагаемых

$$\alpha \cdot A + \alpha \cdot B = \|(\alpha \cdot A)^i_j\| + \|(\alpha \cdot B)^i_j\| \stackrel{(18.2)}{=\!=} \|\alpha a^i_j\| + \|\alpha b^i_j\| \stackrel{(18.1')}{=\!=}$$

$$\stackrel{(18.1')}{=\!=} \|\alpha a^i_j + \alpha b^i_j\|.$$

Таким образом, элемент матрицы $\alpha \cdot A + \alpha \cdot B$, стоящий на пересечении i—ой строки и j-ого столбца, тоже равен $\alpha a^i_j + \alpha b^i_j$, что и означает равенство матриц $\alpha \cdot (A + B)$ и $\alpha \cdot A + \alpha \cdot B$. ■

Сумму матриц $A + (-B)$ будем обозначать $A - B$ и называть ***разностью матриц*** *A и B.*

$$A - B \stackrel{\text{def}}{=} A + (-B). \tag{18.3}$$

Можно сказать, что матрица $X = A - B$ является решением матричного уравнения: $X + B = A$ (и $B + X = A$). Действительно, заменяя X на $A - B \stackrel{\text{def}}{=} A + (-B)$, получим:

$$X + B = (A - B) + B \stackrel{\text{def}}{=} (A + (-B)) + B \stackrel{\text{св. } 18.?}{=\!=\!=}$$

$$\stackrel{\text{св. } 18.?}{=\!=\!=} A + ((-B) + B) \stackrel{\text{св. } 18.?}{=\!=\!=} A + ? \stackrel{\text{св. } 18.?}{=\!=\!=} A. \quad ■$$

Свойства транспонирования матриц

18.10. $(A + B)^{\text{т}} = A^{\text{т}} + B^{\text{т}} \quad \forall \{A, B\} \subset \mathbf{M}(m \times n)$.

18.11. $(\alpha \cdot A)^{\text{т}} = \alpha \cdot A^{\text{т}}, \quad \forall \langle \alpha, A \rangle \in \mathbf{R} \times \boldsymbol{M}(m \times n)$.

18.12. $(A^{\text{т}})^{\text{т}} = A, \quad \forall A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$.

18.13. $(-A)^{\text{т}} = -A^{\text{т}}. \quad \forall A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$.

18.14. $E^{\text{т}} = E$, E — единичная матрица $E \in \boldsymbol{M}(n \times n)$.

Списком свойств 18.1 — 18.14, конечно, не исчерпываются все свойства матриц.

Задача 18.2.1. Определите, какие из следующих равенств верны для любых матриц A и B (одного порядка) и любых дей ствительных α? 1. $(A+B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{=} B^{\mathrm{т}}+A^{\mathrm{т}}$. 2. $\alpha\cdot A \overset{?}{\neq} (\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}$.

1. $(A+B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{=} B^{\mathrm{т}}+A^{\mathrm{т}} \quad \forall\{A, B\}\subset \boldsymbol{M}(m\times n)$.

$$(A+B)^{\mathrm{т}} \xlongequal{\text{св. 18.?}} ? \xlongequal{\text{св. 18.?}} B^{\mathrm{т}}+A^{\mathrm{т}}.$$

Значит $(A+B)^{\mathrm{т}}=B^{\mathrm{т}}+A^{\mathrm{т}}$ с любыми $\{A, B\}\subset \boldsymbol{M}(m\times n)$.

2. $\alpha\cdot A \overset{?}{\neq} (\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}} \ \forall\langle\alpha, A\rangle \in \mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(m\times n)$.

Равенство матриц $(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}$ и $\alpha\cdot A$, по определению, требует прежде всего равенства их порядков. Если $A\in\boldsymbol{M}(m\times n)$, то $\alpha\cdot A\in\boldsymbol{M}(m\times n)$, а $(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}} \overset{?}{\in} \boldsymbol{M}(?\times ?)$. Следовательно, равенство $(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}=\alpha\cdot A$ не имеет смысла, если $m\neq n$.

Пусть $A=\|a^i_j\|\in\boldsymbol{M}(n)$.

$\alpha\cdot A=\|(\alpha\cdot A)^i_j\| \xlongequal{\text{опр. 18.?}} \|\alpha a^i_j\|$.

$(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}=B=\|b^i_j\| \mid b^i_j=(\alpha\cdot A)^j_i=?\Rightarrow(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}=\|?\|$.

$\alpha\cdot A=(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}$ тогда и только тогда, когда $\alpha a^i_j=?$, откуда $a^i_j=?$. Это условие означает симметричность матрицы. Следовательно, $\alpha\cdot A=(\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}$ имеет место только при условии, что матрица A квадратная и симметрическая.

Задача 18.1.2. Определите, какие из следующих равенств верны для любых матриц A и B (одного порядка) и любых действительных α и β? 1. $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{=} \beta\cdot B^{\mathrm{т}}+\alpha\cdot A^{\mathrm{т}}$.

2. $(A-B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{\neq} A^{\mathrm{т}}-B$.

1. $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{=} \beta\cdot B^{\mathrm{т}}+\alpha\cdot A^{\mathrm{т}} \quad \forall\langle\alpha, \beta, A, B\rangle\in\mathbf{R}^2\times\boldsymbol{M}^2(m\times n)$.

$(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^{\mathrm{т}} \xlongequal{(18.?)} (\alpha\cdot A)^{\mathrm{т}}+(\beta\cdot B)^{\mathrm{т}} \xlongequal{(18.?)} ?$.

Значит, $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^{\mathrm{т}}=\beta\cdot B^{\mathrm{т}}+\alpha\cdot A^{\mathrm{т}}$ при любых $\langle\alpha, \beta, A, B\rangle$.

2. $(A-B)^{\mathrm{т}} \overset{?}{\neq} A^{\mathrm{т}}-B \ \forall\{A, B\}\subset\boldsymbol{M}(m\times n)$.

Если $A\in\boldsymbol{M}(m\times n)$, то $A^{\mathrm{т}}\in\boldsymbol{M}(?\times ?)$. $A^{\mathrm{т}}-B$ — ? ◆

Задача 18.2.2. Докажите, что для любой квадратной матрицы A матрица $A+A^{\mathrm{т}}$ симметрическая.

Доказательство. Если $A\in\boldsymbol{M}(n)$, то $A^{\mathrm{т}}\in\boldsymbol{M}(n)$, их сумма определена, причем $A+A^{\mathrm{т}}\in\boldsymbol{M}(n)$ и $(A+A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} \overset{?}{\in} \boldsymbol{M}(n)$. Тогда

$$A=\|a^i_j\|\in\boldsymbol{M}(n) \xrightarrow{\text{опр. 17.2}} \boldsymbol{M}(n)\ni A^{\mathrm{т}}=B=\|b^i_j\| \mid b^i_j=a^j_i.$$

Сравним элементы матриц:

$$\left.\begin{array}{l} A+A^{\mathrm{т}}=C=\|c^i_j\| \mid c^i_j=a^i_j+b^i_j=a^i_j+a^?_? \\ (A+A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}=C^{\mathrm{т}}=D=\|d^i_j\| \mid d^i_j=c^j_i=a^?_?+a^?_? \end{array}\right\} \Rightarrow c^i_j \overset{?}{=} d^i_j \Rightarrow$$

$$A+A^{\mathrm{т}}=(A+A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}} \xrightarrow{\text{утв. 18.1}} A \text{ — симметрическая.}$$

Задача 18.1.3. Докажите, что любую квадратную матрицу можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, причем такое представление единственно.

Указание. См. задачу 18.2.2. Является ли матрица $A - A^{\mathsf{T}}$ симметрической? кососимметрической?

§ 19. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ (УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ)

Казалось бы, по аналогии с суммой можно определить произведение матриц, перемножая их соответствующие элементы, однако, оказывается, что такое умножение не имеет приложений в алгебре и геометрии, в то время как определение, которое будет дано ниже, имеет содержательное истолкование и приложение в далеких, на первый взгляд, разделах математики, механики и физики.

Прежде чем определить произведение матриц в общем виде, нам потребуется ввести, как принято перемножать матрицу-строку на матрицу-столбец.

Определение 19.1. ***Произведением матрицы-строки*** $A^i = \|a^i_k\| \in \boldsymbol{M}(1 \times n)$ ***на матрицу-столбец*** $B_j = \|b^k_j\| \in \boldsymbol{M}(n \times 1)$ *называется число, равное*

$$a^i_1 b^1_j + a^i_2 b^2_j + a^i_3 b^3_j ... + a^i_n b^n_j = \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j = a^i_k b^k_j = c^i_j. \qquad (19.1)$$

Произведение матрицы-строки на матрицу-столбец обозначается: $A^i \cdot B_j$.

$a^k_j b^i_k$ — обозначение суммирования по k в так называемой тензорной символике.

Формулу (19.1) произведения строки на столбец можно и удобно представлять еще и так:

$$A^i \cdot B_j = (a^i_1\ a^i_2\ a^i_3\ ...\ a^i_n) \cdot \begin{pmatrix} b^1_j \\ b^2_j \\ b^3_j \\ \vdots \\ b^n_j \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j = a^i_k b^k_j. \qquad (19.1')$$

Определение 19.2. ***Произведением матрицы*** $A = \|a^i_k\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ ***на матрицу*** $B = \|b^k_j\| \in \boldsymbol{M}(n \times p)$ *называется матрица порядка* $m \times p$ *вида* $\|A^i B_j\|$, *где* A^i — *строки матрицы* A, B_j — *столбцы матрицы* B.

Обозначается произведение матриц A *и* B: $A \cdot B$ *или* AB.

$$A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \|A^i \cdot B_j\|. \qquad (19.2)$$

Если для элемента матрицы $A \cdot B$ использовать обозначение $(A \cdot B)^i_j$, то в соответствии с определением его можно задавать формулой:

$$(A \cdot B)^i_j \overset{\text{def}}{=\!=} A^i \cdot B_j \overset{(19.1)}{=\!=\!=} a^i_k b^k_j. \qquad (19.2')$$

Аналогично утверждениям 18.1 и 18.2 можно доказать следующее.

Утверждение 19.1. *Отношение*

$[\cdot]_{(m,\ n,\ p)} = \{\langle\langle A,\ B\rangle,\ A \cdot B\rangle\} \subset (\boldsymbol{M}(m \times n) \times \boldsymbol{M}(n \times p)) \times \boldsymbol{M}(m \times p)$, *есть сюръективное, но не инъективное отображение:*

$$\boldsymbol{M}(m \times n) \times \boldsymbol{M}(m \times n) \to \boldsymbol{M}(m \times n),$$

Найдите произведения матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} = ?$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = ?$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

Из этих примеров видно, что для того, чтобы были определены произведения двух матриц, как в одном порядке $(A \cdot B)$ так и в другом $(B \cdot A)$, должны быть: $A \in \boldsymbol{M}(m \times ?)$ и $B \in \boldsymbol{M}(? \times ?)$.

Задание 19.1. Пусть $\langle A,\ B\rangle \in \boldsymbol{M}(m \times n) \times \boldsymbol{M}(n \times m)$, т. е. их произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены. Для всех ли таких матриц $A \cdot B \overset{?}{=} B \cdot A$? ◆

Если ответ отрицателен, постарайтесь найти примеры хотя бы двух матриц, для которых это условие выполняется. ◆

Предыдущее показывает, что вопрос о равенстве произведений двух матриц $A \cdot B = B \cdot A$ имеет смысл только тогда, когда они одного порядка и квадратные. Однако, и в этом случае, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Отсюда явствует, что ***произведение матриц некоммутативно***, или не обладает свойством коммутативности.

Свойства умножения матриц

Укажите, при каких условиях определены обе части формул

19.1. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$,
$\forall\ \langle\alpha, A, B\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(?\times p)$ — ассоциативность умножения матриц относительно умножения скаляра на матрицу.

19.2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
$\forall\ \langle A, B, C\rangle\in\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}^2(?\times p)$ — дистрибутивность сложения матриц относительно умножения матриц **слева.**

19.3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
$\forall\ \langle A, B, C\rangle\in\boldsymbol{M}^2(m\times n)\times\boldsymbol{M}(?\times p)$ — дистрибутивность сложения матриц относительно умножения матриц **справа**.

19.4. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
$\forall\ \langle A, B, C\rangle\in\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(n\times p)\times\boldsymbol{M}(p\times q)$ — ассоциативность умножения матриц.

19.5. $A\cdot E=E\cdot A=A$
$\forall\ \langle A, E\rangle\in\boldsymbol{M}(n\times n)$, ($E$ — единичная матрица) — наличие нейтрального элемента (по умножению матриц).

19.6. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$ $\qquad\forall\ \langle A, B\rangle\in\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(n\times ?)$.

Доказательство свойства 19.2.

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$\forall\ \langle A=\|a^i_k\|,\ B=\|b^k_j\|,\ C=\|c^k_j\|\rangle\in\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}^2(n\times p).$$

Как известно, матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, следовательно надо установить равенства:

$$(A\cdot(B+C))^i_j \text{ и } (A\cdot B+A\cdot C)^i_j$$

$$\text{при всех } \langle i, j\rangle\in\{1, 2, 3\ldots m\}\times\{1, 2, 3\ldots p\}.$$

1. Рассмотрим левую часть равенства:

$$A\cdot(B+C)=\|(A\cdot(B+C))^i_j\|\ \underset{(19.2')}{\overset{\text{опр. 19.2}}{=\!=\!=}}\|A^i\cdot(B+C)_j\|\ \underset{(18.1')}{\overset{\text{опр. 18.1}}{=\!=\!=}}$$
$$=\|A^i\cdot(B_j+C_j)\|\ \underset{(19.1')}{\overset{\text{опр. 19.1}}{=\!=\!=}}\|a^i_k(b^k_j+c^k_j)\|\overset{?}{=}\|a^i_kb^k_j+a^i_kc^i_j\|.$$

(всюду по k суммирование, см. опр. 19.1, 19.2).

2. Преобразования в его правой части в соответствии с указанными в ней действиями дают:

$$A\cdot B+A\cdot C=\|(A\cdot B+A\cdot C)^i_j\|\ \underset{(18.1')}{\overset{\text{опр. 18.1}}{=\!=\!=}}\ \|(A\cdot B)^i_j\|+\|(A\cdot C)^i_j\|\ \underset{(19.2')}{\overset{\text{опр. 19.2}}{=\!=\!=}}$$
$$=\|A^i\cdot B_j\|+\|A^i\cdot C_j\|\overset{(19.1')}{=\!=\!=}\|a^i_k\,b^k_j\|+\|a^i_kc^k_j\|\ \underset{(18.2')}{\overset{\text{опр. 18.?}}{=\!=\!=}}\|a^i_kb^k_j+a^i_kc^k_j\|.$$

Сравнив результаты, убедимся в равенстве при всех $\langle i, j\rangle\in\{1, 2, 3\ldots m\}\times\{1, 2, 3\ldots p\}$ элементов $(A\cdot(B+C))^i_j$ и $(A\cdot B+A\cdot C)^i_j$ матриц $A\cdot(B+C)$ и $A\cdot B+A\cdot C$, а значит, и их равенстве, что и завершает доказательство свойства. ■

Задача 19.1.1. Докажите свойство 19.1.

Доказательство свойства 19.1: $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$ $\forall\ \langle \alpha,\ A,\ B\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(n\times p)$.

Указание. Доказательство можно провести для матриц общего вида, но конкретной размерности, например, $\boldsymbol{M}(2)$:

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} e & f\\ g & k\end{pmatrix}.$$

$$(\alpha\cdot A)\cdot B=\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} e & f\\ g & k\end{pmatrix}=?.\ A\cdot(\alpha\cdot B)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\left(\alpha\begin{pmatrix} e & f\\ g & k\end{pmatrix}\right)=?.$$

Тем самым свойство 19.1 будет доказано для случая $\forall\ \langle\alpha,\ A,\ B\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(2)^2$. Постарайтесь доказать его по аналогии с доказательством свойства 19.2 для произвольных $\langle\alpha,\ A,\ B\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(n\times p)$.

Задача 19.1.3. Докажите свойство 19.6.

Доказательство свойства 19.6. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$ $\forall\ \langle A=\|a^i_k\|,\ B=\|b^k_j\|\rangle\in\boldsymbol{M}(m\times n)\times\boldsymbol{M}(n\times p)$.

Так как $A\cdot B\in\boldsymbol{M}(m\times p)$, то $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{M}(p\times m)$, как и $B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}\overset{?}{\in}\boldsymbol{M}(p\times m)$. Поэтому для доказательства свойства 19.6 остается установить равенство элементов $((A\cdot B)^{\mathrm{T}})^i_j$ и $(B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}})^i_j$ при всех $\langle i,\ j\rangle\in\{1,\ 2,\ 3\ldots m\}\times\{1,\ 2,\ 3\ldots p\}$.

1. Рассмотрим левую часть 19.6, произведение матриц $A\cdot B$:

$$\left.\begin{aligned} A=\|a^i_k\|\in\boldsymbol{M}(m\times n)\\ B=\|b^k_j\|\in\boldsymbol{M}(n\times p)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\cdot B=\|(A\cdot B)^i_j\|\overset{?}{=}\|a^i_kb^k_j\|.$$

Транспонируем матрицу $A\cdot B=C=\|c^i_j\|\,|\,c^i_j=a^i_kb^k_j$, (см. определения 17.2, 19.1, 19.2, по k суммирование)

$$(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=D=\|d^j_i\|\,|\,d\boxed{{}^j_i}=c^?_?=a^i_kb^k_j.\qquad(19.*)$$

2. Транспонируя матрицы A и B и вводя для удобства промежуточные обозначения, получим:

$$A=\|a^i_k\|\in\boldsymbol{M}(m\times n)\overset{(17.2)}{=\!=}A^{\mathrm{T}}=F=\|f^k_i\|\,|\,f^k_i=a^i_k,$$

$$B=\|b^k_j\|\in\boldsymbol{M}(n\times p)\overset{(17.2)}{=\!=}B^{\mathrm{T}}=G=\|g^j_k\|\,|\,g^j_k=b^k_j.$$

Откуда

$$B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}=G\cdot F=L=\|l^j_i\|\,|\,l\boxed{{}^j_i}=g^j_kf^k_i=b^?_?a^?_?\overset{?}{=}a^i_kb^k_j.\qquad(19.**)$$

3. Сравнив выражения (19.*) и (19.**), получим, что $d^j_i=l^j_i$ при всех $\langle i,\ j\rangle\in\{1,\ 2,\ 3\ldots m\}\times\{1,\ 2,\ 3\ldots n\}$, что означает равенство матриц D и L, а в конечном счете $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$ ■

Для множества всех квадратных матриц одного порядка $\boldsymbol{M}(n,\ \mathbf{R})$ с операциями сложения, умножения на действительные числа и умножения матриц принято специальное название — ***полная линейная алгебра*** *или* ***матричная алгебра.***

Ее обозначение: $\boldsymbol{gl}(n, \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{gl}(n)$.

Из предыдущего следует, что для всех таких матриц определены сложение, умножение, умножение скаляра на матрицу.

Основные свойства полной линейной алгебры

Для всех матриц $\{A, B, C\} \subset \boldsymbol{gl}(n, \mathbf{R})$, единичной матрицы $E \in \boldsymbol{gl}(n, \mathbf{R})$, нулевой матрицы $O \in \boldsymbol{gl}(n, \mathbf{R})$ и любых $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$:

gl. 1. $A + O = A$.
gl. 2. $A + (-A) = 0$.
gl. 3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
gl. 4. $A + B = B + A$.
gl. 5. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$.
gl. 6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
gl. 7. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
gl. 8. $1 \cdot A = A$.
gl. 9. $0 \cdot A = O$.
gl. 10. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
gl. 11. $E \cdot A = A \cdot E = A$.
gl. 12. $O \cdot A = A \cdot O = O$.
gl. 13. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.
gl. 14. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
gl. 15. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Оказывается, единичная матрица занимает в матричной алгебре совершенно уникальное место: никакая другая не может удовлетворять условию gl.11.

Утверждение 19.2. *Если $A \cdot X = A$ или $X \cdot A = A$ для любой матрицы $A \in \boldsymbol{gl}(n)$,* то $X = E \in \boldsymbol{gl}(n)$.

Доказательство. Докажем первое предложение:

$$(X \mid (\forall A \in \boldsymbol{gl}(n) \wedge A \cdot X = A)) \Rightarrow X = E.$$

Для этого заметим, что по условию утверждения $E \cdot X = E$ (если взять $A = E$). С другой стороны $E \cdot X \overset{?}{=} X$. Так как произведение матриц определено однозначно ($[\cdot]_{(n, n, n)}$ — отображение, по утверждению 19.1), $X = E$.

Второе предложение утверждения доказывается аналогично. ■

Еще более очевидно свойство gl.12: $O \cdot A = A \cdot O = O$ для всех $A \in \boldsymbol{gl}(n)$.

Задача 19.2.1. Какие из матричных тождеств справедливы для всех квадратных матриц одного порядка?

$$1.\ (A + B)^2 \overset{?}{\neq} A^2 + 2A \cdot B + B^2. \quad 2.\ (A + B) \cdot (A - B) \overset{?}{\neq} A^2 - B^2.$$

1. Преобразуем выражение: $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = ?$.

Заменяя этим разложением левую часть выражения, придем к $A\cdot B=?$, это означает, что для всех $\{A,\ B\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$ равенство 1 неверно.

2. Аналогично для $(A+B)\cdot(A-B)\overset{?}{\neq}A^2-B^2$.
$(A+B)\cdot(A-B)=?$.

Следовательно, для всех матриц $\{A,\ B\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$ такое равенство ? не ? верно.

Задача 19.1.2. Найдите A^n с произвольным натуральным n, если $\alpha\in\mathbf{R}$, а $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Указание. Решение задачи проводится методом математической индукции. Чтобы высказать гипотезу, надо найти произведения:

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?,$$

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?.$$

Это позволяет предположить, что $A^k=\begin{pmatrix}1 & ?\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ для всех $k\leqslant n$, тогда $A^{n+1}=A^n\cdot A\ \overset{\text{по предположению индукции}}{=\!=\!=\!=\!=}\ \begin{pmatrix}1 & ?\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?$.

Это означает выполнение требований метода математической индукции.

Формула $A^k=\begin{pmatrix}1 & ?\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ верна при любом $k\in\mathbf{N}$.

Определение 19.3. ***Коммутатором** квадратных матриц одного порядка A и B называется матрица, равная $A\cdot B-B\cdot A$.*

Обозначается коммутатор матриц A и B: $[A,\ B]\overset{\text{def}}{=}A\cdot B-B\cdot A$.

Задача 19.2.3. Какие из свойств умножения матриц наследуются коммутатором? (Т. е. будут иметь место, если в свойствах 19.1—19.6 операцию умножения заменить на коммутатор $\forall\ \langle\alpha,\ A,\ B,\ C\rangle\in\mathbf{R}\times(\boldsymbol{gl}(n))^3$.

1. $\alpha[A,\ B]\overset{?}{=}[\alpha A,\ B]=[A,\ \alpha B]$.
2. $[A,\ (B+C)]\overset{?}{=}[A,\ B]+[A,\ C]$.
3. $[(A+B),\ C]\overset{?}{=}[A,\ C]+[B,\ C]$.
4. $[A,\ [B,\ C]]\neq[[A,\ B],\ C]$.
5. $[A,\ E]=[E,\ A]\neq A$, (E — единичная матрица $\boldsymbol{gl}(n)$).
6. $[A,\ B]^{\mathrm{T}}=[B^{\mathrm{T}},\ A^{\mathrm{T}}]$.

§ 20. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ И ОБРАТИМЫЕ МАТРИЦЫ

Выше мы установили, что произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены одновременно, когда эти матрицы — квадратные и одного порядка: $\{A, B\} \subset \boldsymbol{gl}(n)$, но, как мы заметили в § 19, они, вообще говоря, не коммутируют: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Вместе с тем этот случай, хотя и довольно редкий, представляет интерес.

Определение 20.1. ***Квадратные матрицы*** *A и B одного порядка называются* ***перестановочными*** или ***коммутирующими***, *если* $A \cdot B = B \cdot A$.

Очевидно, что если матрица A перестановочна с матрицей B, то и B перестановочна с A, $((A \cdot B = B \cdot A) \Rightarrow (B \cdot A = A \cdot B))$, что означает симметричность на множестве всех перестановочных матриц отношения:

$$\boldsymbol{C}_{(n)} = \{\langle A, B\rangle \mid \{A, B\} \subset \boldsymbol{gl}(n) \wedge A \cdot B = B \cdot A\}$$

$\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{C}_{(n)} \subset \boldsymbol{gl}(n)$. Изучая свойства этого отношения, естественно поставить вопрос $\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{C}_{(n)} \overset{?}{=} \boldsymbol{gl}(n)$? Для всякой ли матрицы найдется перестановочная с ней? (См. gl. 1— gl. 15). Из этого будет следовать, что $\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{C}_{(n)} = \boldsymbol{gl}(n)$.

Можно заметить, что не только единичная, но и всякая скалярная матрица перестановочна с любой матрицей того же порядка, так как

$$(\lambda \cdot E) \cdot A \overset{\text{gl. ?}}{=\!=\!=} \lambda \cdot (E \cdot A) \overset{\text{gl. 11}}{=\!=\!=} \lambda \cdot (? \cdot ?) \overset{\text{gl. ?}}{=\!=\!=} ? \cdot (? \cdot ?).$$

В частности, перестановочны две любые скалярные матрицы, и доказано следующее.

Утверждение 20.1. *Всякая квадратная матрица имеет перестановочную с ней, а скалярные матрицы перестановочны со всеми матрицами того же порядка.*

Задача 20.1.2. Определите, замкнуто ли относительно сложения и умножений множество всех матриц, перестановочных с матрицей A (т. е. перестановочны ли с данной матрицей произведение скаляра на матрицу, сумма и произведение матриц перестановочных с A).

Доказательство. Обозначим множество всех перестановочных с матрицей $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ матриц

$$\boldsymbol{C}(A) = \{X \in \boldsymbol{gl}(n) \mid A \cdot X = X \cdot A\} \tag{20.c}$$

Возьмем произвольные матрицы $\{B, C\} \subset \boldsymbol{C}(A)$.

1. $A \cdot (\alpha B) \overset{?}{=} \alpha (A \cdot B) \overset{?}{=} \alpha (B \cdot A) \overset{?}{=} (\alpha B) \cdot A$.

Что означает перестановочность α B с матрицей A.

2. $A\cdot(B+C)\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}?\overset{?}{=}B\cdot A+C\cdot A\overset{\text{gl.?}}{=\!=}?$.

Следовательно, матрица $(B+C)$? не ? перестановочна с A.

3. $A\cdot(B\cdot C)\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}(A\cdot B)\cdot C\overset{(20.\,c)}{=\!=}(?\cdot?)\cdot C\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}?\cdot(?\cdot C)\overset{?}{=}(B\cdot C)\cdot A$.

Значит, $(B\cdot C)$ и A ? не ? перестановочны и, таким образом, множество матриц $\boldsymbol{C}(A)$? не ? замкнуто относительно основных матричных операций.

Следующие вопросы: как много для данной матрицы перестановочных с ней и можно ли их все отыскать? Рассмотрим решение этой задачи на примере.

Пример 20.1. Найдем матрицу, перестановочную с

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{gl}(2),\text{ т. е. } X\in\boldsymbol{gl}(2)\mid A\cdot X=X\cdot A.$$

Пусть $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$ — искомая матрица, тогда условие перестановочности влечет матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix},$$

так как равенство двух матриц означает равенство их соответствующих элементов, то будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases}3x+2z=3x+1y,\\3y+2u=2x+1y,\\1x+1z=3z+1u,\\1y+1u=2z+1u,\end{cases}$$

решая ее, получим $x=2z+u$ и $y=2z$, что означает перестановочность с A всех матриц вида:

$$\begin{pmatrix}2z+u&2z\\z&u\end{pmatrix},$$

где z и u — произвольные действительные числа.

Придавая значения z и u, будем получать матрицы, перестановочные с A, например:

$$\langle z,\ u\rangle=\langle 1,\ 0\rangle:\begin{pmatrix}2&2\\1&0\end{pmatrix},\qquad \langle z,\ u\rangle=\langle 0,\ 1\rangle:\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\langle z,\ u\rangle=\langle 1,\ 1\rangle:\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix},\qquad \langle z,\ u\rangle=\langle -1,\ 1\rangle:\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix},$$

и т. д. Т. е. перестановочны с данной матрицей не только скалярные.

З а д а ч а 20.1.1. Является ли отношение $\boldsymbol{C}_{(n)} \subset \boldsymbol{gl}(n) \times \boldsymbol{gl}(n)$ отображением?

Указание. См. определение 7.1, пример 20.1.

$$\left.\begin{array}{l} \langle A,\ B_1\rangle \in C_{(n)} \\ \langle A,\ B_2\rangle \in C_{(n)} \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 \overset{?}{=} B_2 \Rightarrow \boldsymbol{C}_{(n)} - \overline{\underline{\text{? не ?}}}\ \text{отображение.}$$

З а д а ч а 20.1.3. Докажите, что если матрица диагональна, причем все ее диагональные элементы различны, то всякая перестановочная с ней матрица тоже диагональна.

Указания. 1. Если A и B — диагональные (не обязательно скалярные), например,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

то $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Пусть A — диагональна, $A = \|\lambda^i \delta^i_j\|$, а B имеет хотя бы один недиагональный элемент, тогда, например:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = ?,$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = ?.$$

Какое условие на элементы матрицы B влечет равенство $A \cdot B = B \cdot A$? ◆

Мы видели, что даже в довольно простом случае матриц второго порядка (пример 20.1) задача определения матрицы, перестановочной с данной, свелась к решению системы линейных уравнений с четырьмя переменными. Поэтому закономерны задачи, как найти более простые способы определения матриц, перестановочных с данной или выделить такие матрицы, чтобы перестановочные с ними можно было бы найти менее сложными вычислениями. Частично на последний вопрос ответ уже дан: скалярная матрица перестановочна с любой матрицей того же порядка. Но пример 20.1 показывает, что скалярными могут не исчерпываться все матрицы, перестановочные с данной.

Усилим требование перестановочности.

Определение 20.2. *Квадратная матрица A называется* ***обратимой****, если существует перестановочная с ней матрица B такая, что их произведения равны единичной матрице:*

$$A \cdot B = B \cdot A = E. \tag{20.1}$$

В этом случае матрицу B называют ***обратной к*** *A.*

Подмножество в $\boldsymbol{gl}(n)$ всех обратимых матриц называется ***полной линейной группой****.*

Обозначение полной линейной группы: $\boldsymbol{GL}(n, \mathbf{R})$ или $\boldsymbol{GL}(n)$.

Очевидна

Лемма 20.1. $\boldsymbol{Gl}(n) \neq \varnothing$ и $\boldsymbol{GL}(n) \ni E$.

Так $E \cdot E = E \cdot E = E$. (См. gl.1 — gl.15).

Определение 20.2 задает новое бинарное отношение:

$$[\ ^{-1}]_{(n)} = \{\langle A,\ B\rangle \mid \{A,\ B\} \subset \boldsymbol{gl}(n) \wedge A \cdot B = B \cdot A = E\} \subset C_{(n)}.$$

Исследуем его свойства (подобно свойствам отношения $C_{(n)}$).

1. $[\ ^{-1}]_{(n)}$, очевидно, тоже симметрично.

Это позволяет при выполнении условия (20.1) для двух матриц называть их ***взаимно обратными.***

Симметричность $[\ ^{-1}]_{(n)}$ позволяет утверждать, что

2. $\mathrm{Dom}[\ ^{-1}]_{(n)} = \mathrm{Im}[\ ^{-1}]_{(n)} = \boldsymbol{GL}(n) \subset \boldsymbol{gl}(n)$, т. е. бинарное отношение $[\ ^{-1}]_{(n)}$ на множестве $\boldsymbol{GL}(n)$ — сюръективно, (см. определение 9.1).

3. Инъективно ли оно? (См. определение 9.2).

Допустим, что найдутся две матрицы A_1 и A_2, перестановочные с B:

$$\langle A_1,\ B\rangle \in [\ ^{-1}]_{(n)} \overset{(20.1)}{\Longrightarrow} A_1 \cdot B = B \cdot A_1 = E, \tag{20.*}$$

$$\langle A_2,\ B\rangle \in [\ ^{-1}]_{(n)} \overset{(20.1)}{\Longrightarrow} A_2 \cdot B = B \cdot A_2 = E. \tag{20.**}$$

Рассмотрим произведение:

$$\left.\begin{array}{l} (A_1 \cdot B) \cdot A_2 \overset{(20.*)}{=\!=} (?) \cdot A_2 \overset{\text{gl. ?}}{=\!=} ? \\ \text{gl. } 10 \| \\ A_1 \cdot (B \cdot A_2) \overset{(20.**)}{=\!=} A_1 \cdot (?) \overset{\text{gl. ?}}{=\!=} ? \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = A_2.$$

Следовательно, бинарное отношение $[\ ^{-1}]_{(n)}$ — инъективно.

4. Из инъективности бинарного отношения $[\ ^{-1}]_{(n)}$ в силу его симметичности следует, что оно является отображением (утв. 9.1): $[\ ^{-1}]_{(n)}$: $\boldsymbol{GL}(n) \to \boldsymbol{GL}(n)$. ■

Эти результаты объединим в теорему.

Теорема 20.1. *Бинарное отношение*

$$[\ ^{-1}]_{(n)} = \{\langle A,\ B\rangle \mid \{A,\ B\} \subset \boldsymbol{gl}(n) \wedge A \cdot B = B \cdot A = E\}$$

симметрично и является биективным отображением

$$[\ ^{-1}]_{(n)} : \boldsymbol{GL}(n) \to \boldsymbol{GL}(n).$$

Следствие 20.1. *Любая обратимая матрица имеет единственную обратную к ней матрицу.*

Матрица, обратная к A, обозначается A^{-1}.

Следствие 20.2. *Для обратимой матрицы A обратима матрица A^{-1}.*

(Так как, если $\langle A,\ A^{-1}\rangle \in [\ ^{-1}]_{(n)} \overset{?}{\Rightarrow} \langle A^{-1},\ A\rangle \in [\ ^{-1}]_{(n)}$).

Другими словами: множество матриц $\boldsymbol{GL}(n)$ замкнуто относительно операции обращения матрицы.

Следствие 20.3. $(A^{-1})^{-1} = A$ *для всякой обратимой матрицы A.*

(Так как второй элемент кортежа отображения определяется однозначно, а значит, $A = (A^{-1})^{-1}$).

Замечание 20.1. Понятие обратимой матрицы несколько переопределено: достаточно одного из требований: $A \cdot B = E$ или $B \cdot A = E$, а другое из него следует.

Например, пусть выполняется только одно условие: существует для $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ матрица $B \in \boldsymbol{gl}(n)$ такая, что $A \cdot B = E$, тогда рассмотрим произведения:

$$\left.\begin{array}{l} (A \cdot B) \cdot A = E \cdot A \overset{\text{gl. 11}}{=\!=\!=} A \\ \text{gl. ?}\,\| \\ A \cdot (B \cdot A) \overset{\text{des } B \cdot A = X}{=\!=\!=\!=\!=} A \cdot X \end{array}\right| \Rightarrow A \cdot X = A \xRightarrow{\text{утв. 19.?}} X = E.$$

Обозначение. $\overset{\text{des}}{=\!=}$ обозначим, от английского “to designate” — обозначать.

Заменяя по обозначению X на $B \cdot A$, имеем $B \cdot A = E$. Аналогично можно показать: $B \cdot A = E \Rightarrow A \cdot B = E$.

Так что можно давать и такое определение обратимости матрицы:

Определение 20.2′. *Матрица $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ называется* ***обратимой****, если существует матрица B такая, что*

$$A \cdot B = E \text{ или } B \cdot A = E. \qquad (20.2)$$

Теперь попробуем решить вопрос — насколько содержательно понятие $\boldsymbol{GL}(n)$, найдутся ли еще в $\boldsymbol{gl}(n)$ обратимые матрицы кроме E, затем всякая ли квадратная матрица обратима, т. е. $\{E\} \overset{?}{\neq} \boldsymbol{GL}(n) \overset{?}{\neq} \boldsymbol{gl}(n)$.

Постараемся ответ на первый вопрос извлечь из результата примера 20.1.

Пример 20.2. Был найден общий вид матриц, перестановочных с матрицей $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$, а именно: $X=\begin{pmatrix}2z+u&2z\\z&u\end{pmatrix}\Big|\{z,u\}\in\mathbf{R}$. Определим, есть ли среди них обратные A, т. е. такие, что $X\cdot A=E$ (по определению 20.2 достаточно проверки только этого условия).

$$\begin{pmatrix}2z+u&2z\\z&u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}8z+3u&6z+2u\\3z+u&2z+u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{cases}8z+3u=1,\\6z+2u=0,\\3z+u=0,\\2z+u=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3,\\z=-1,\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{GL}(n)\neq\{E\}$.

Чтобы ответить на вопрос, совпадают ли $\boldsymbol{GL}(n)$ и $\boldsymbol{gl}(n)$, выясним, обратима ли, например, матрица

$$E_1^1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{gl}(2)?$$

Предположим, что E_1^1 обратима, т. е. существует такая матрица B, что $E_1^1\cdot B=E$.

Пусть $B=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$, тогда условие обратимости дает матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

а оно в свою очередь — систему уравнений:

$$\begin{cases}x=\ ?\ ,\\y=\ ?\ ,\\0=\ ?\ ,\\0=\ ?\ ,\end{cases}$$

которая, очевидно, не имеет решений, значит, матрица E_1^1 — необратима.

Отсюда следует, что и $\boldsymbol{GL}(n)\subset\boldsymbol{gl}(n)$, т. е. не всякая квадратная матрица обратима.

Задание 20.1. Теперь естественно постараться узнать, обратимы ли для обратимой матрицы A

1. ей противоположная — $(-A)$?
2. ее транспонированная — A^{T}?

Для обратимых матриц A и B обратимы ли

3. их сумма или разность: $A \pm B$?
4. их произведение: $A \cdot B$?

Выясним последнее: пусть A и B обратимы, т. е.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{20.a}$$

и

$$B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = E. \tag{20.в}$$

Удобнее воспользоваться определением 20.2, рассмотрим произведение:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) \overset{\text{gl. 10.}}{=\!=\!=} A \cdot (B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})) \overset{?}{=} A \cdot ((? \cdot ?) \cdot A^{-1}) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} A \cdot (E \cdot A^{-1}) \overset{?}{=} A \cdot A^{-1} = E,$$

что и означает обратимость $A \cdot B$. Более того, мы доказали, что обратной к $A \cdot B$ является матрица $B^{-1} \cdot A^{-1}$, тогда в силу единственности обратной матрицы (сл. 20.1) можно считать доказанным следующее.

Утверждение 20.2. *Если матрицы A и B обратимы, то их произведение обратимо и*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{20.3}$$

Это свойство может быть сформулировано иначе: множество матриц $\boldsymbol{GL}(n)$ замкнуто относительно операции умножения матриц.

Постарайтесь ответить на остальные вопросы (1—3) задания 20.1, сначала проверив, если необходимо, свои предположения на примерах. ♦

Например, $\{A,\ B\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Утверждение 20.3. *Если матрица A обратима, то ее транспонированная и противоположная ей матрицы обратимы и*

$$(-A)^{-1} = -A^{-1},\ (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{20.4}$$

Задача 20.2.3. Докажите утверждение 20.3.

Доказательство.

Пусть $A \in \boldsymbol{GL}(n) \overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists A^{-1} \in \boldsymbol{GL}(n) \mid A \cdot A^{-1} = E)$.

1. $(-A)^{-1} \overset{?}{=} -A^{-1}$.

$$E \overset{\text{def}}{=\!=} A \cdot A^{-1} \overset{\text{gl. ?}}{=\!=\!=} 1\,(A \cdot A^{-1}) = ((-1)(-1))\,(A \cdot A^{-1}) \overset{?}{=} (-A) \cdot (-A^{-1}).$$

Т. е. $(-A) \cdot (-A^{-1}) = E$.

В силу единственности обратной матрицы это означает, что $(-A)^{-1} = -A^{-1}$.

2. $(A^{\mathrm{T}})^{-1} \stackrel{?}{=} (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Транспонируем обе части равенства $E = A^{-1} \cdot A$:

$$E^{\mathrm{T}} = (A^{-1} \cdot A)^{\mathrm{T}} \stackrel{?}{=} A^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Откуда $E \stackrel{?}{=} A^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}}$, а так как обратная матрица единственна, то $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. ◆

Следствие 20.4. *Если матрица A — обратимая и симметрическая (кососимметрическая), то A^{-1} — тоже симметрическая (кососимметрическая).*

Задача 20.2.1. Докажите следствие 20.4.

Доказательство.

$$A \in \boldsymbol{GL}(n) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} (\exists A^{-1} \in \boldsymbol{GL}(n) \mid A \cdot A^{-1} = E).$$

1. A — симметрическая $\xLeftrightarrow{\text{утв. 17.1}} A^{\mathrm{T}} = A$.

$(A^{-1})^{\mathrm{T}} \stackrel{?}{=} (A^{\mathrm{T}})^{-1} \stackrel{?}{=} A^{-1} \xLeftrightarrow{\text{утв. 17.1}} A$ — симметрическая.

2. Случай кососимметрической матрицы A доказывается аналогично. ◆

В § 19 мы приводили основные свойства полной линейной алгебры, полезно выделить их для полной линейной группы.

Основные свойства полной линейной группы

Укажите утверждения, являющиеся обоснованием свойств:

GL. 1. $\forall \{A, B\} \subset \boldsymbol{GL}(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} A \cdot B \in \boldsymbol{GL}(n)$.

GL. 2. $\forall A \in \boldsymbol{GL}(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1} \in \boldsymbol{GL}(n)$. $(\mid A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E)$.

GL. 3. $E \in \boldsymbol{GL}(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} (\mid A \cdot E = E \cdot A = A \quad \forall A \in \boldsymbol{GL}(n))$.

GL. 4. $\forall \{A, B, C\} \subset \boldsymbol{GL}(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Говорят, что полная линейная группа $\boldsymbol{GL}(n)$ ***замкнута относительно операций умножения и обращения элементов***.

Свойства полной линейной группы являются фундаментальными во всем курсе алгебры и геометрии. А именно: *В аффинной и евклидовой геометрии* при изучении *преобразований плоскости и пространства, в теории кривых и поверхностей второго порядка, квадратичных форм и квадрик; в дифференциальной геометрии* при изучении *кривых и поверхностей в пространстве;* в геометрии *проективного пространства и многомерной геометрии; в* таких разделах *алгебры*, как *теория групп, теория линейных операторов и теория многочленов.* Современная вычислительная математика, физика и кристаллография также не обходятся без использования полной линейной группы.

Замечание 20.2. Интересно, что если матрица A обратима, то легко разрешимы относительно X матричные уравнения

$$A\cdot X=B \text{ и } X\cdot A=B. \tag{20.5}$$

Определение 20.3. ***Решением матричного уравнения*** (вида $A\cdot X=B$ или $X\cdot A=B$) *называется матрица, при подстановке которой вместо X получается матричное тождество.*

Чтобы найти решение уравнения (20.5), домножим обе его части **слева** на матрицу A^{-1}:

$$A\cdot X=B.$$

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)\overset{?}{=}A^{-1}\cdot B,$$

(так как произведение матриц определено однозначно). Тогда

$$A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot(A\cdot X)\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}(A^{-1}\cdot A)\cdot X\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}E\cdot X\overset{\text{gl. ?}}{=\!=}X.$$

Т. е. $X=A^{-1}\cdot B$.

Несложно убедиться в том, что такая матрица — решение матричного уравнения (20.5), так как

$$A\cdot X=A\cdot(A^{-1}\cdot B)=(A\cdot A^{-1})\cdot B=E\cdot B=B.$$

Аналогично можно получить решение уравнения $X\cdot A=B$.

Таким образом, при решении подобных матричных уравнений важно знать, обратима ли матрица A, и в случае ее обратимости решением матричного уравнения $A\cdot X=B$ является

$$X=A^{-1}\cdot B, \tag{20.6}$$

а уравнения $X\cdot A=B$ — соответственно, матрица

$$X=B\cdot A^{-1}. \tag{20.7}$$

В силу единственности обратной матрицы A^{-1} (сл. 20.1) и того факта, что произведение матриц определено однозначно (утверждение 19.1), решения (20.6) и (20.7) уравнений $A\cdot X=B$ и, соответственно, $X\cdot A=B$ единственны.

Пример 20.3. Решим уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

Матрица $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$ обратима (см. пример 20.2), тогда

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=?.$$

Задача 20.2.2. Найдите матрицу X, удовлетворяющую уравнению: $X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$.

Указание. Подумайте, можно ли вычислять ответ по формуле $X=B\cdot A^{-1}$, обратима ли матрица $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$? Если нет, подумайте, как все же можно отыскать матрицу X, удовлетворяющую этому уравнению.

Задача 20.3.1. Докажите, что если матрица диагональна и все ее диагональные элементы ненулевые, то она обратима.

Указание. Пусть $\lambda_i\neq 0$ при $i\in\{1, 2 \ldots n\}$ и

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

постарайтесь угадать матрицу B такую, что

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}? & ? & ? & \ldots & ?\\ ? & ? & ? & \ldots & ?\\ ? & ? & ? & \ldots & ?\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ ? & ? & ? & \ldots & ?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

§ 21′. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

В предыдущем параграфе мы поставили задачу: как находить все матрицы, перестановочные с данной, но она оказалась с довольно сложными вычислениями даже в случае матриц второго порядка, поэтому мы ее несколько сузили, потребовав не просто перестановочности матриц, а выполнимости более сильного условия обратимости. Именно в этом случае может быть дано не очень сложное правило нахождения обратной матрицы по данной обратимой. Но прежде чем говорить об общем правиле, рассмотрим пример.

Пример 21.1. Пусть дана некоторая квадратная матрица A и известно, что она обратима. Как найти обратную ей матрицу?

В силу замечания 20.1 достаточно найти матрицу X такую, что $A\cdot X=E$.

Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1\\ x_1^2 & x_2^2\end{pmatrix}$,

где x_j^i — неизвестные действительные числа, $\{i, j\}\subset\{1, 2\}$ и имеем:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1\\ x_1^2 & x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Для удобства записи соответствующей системы уравнений обозначим элементы матрицы X:

$$x_1^1=x,\ x_2^1=y,\ x_1^2=z,\ x_2^2=u.$$

Тогда перемножая матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2z=1, \\ y+2u=0, \\ 3x+5z=0, \\ 3y+5u=1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=?, \\ y=?, \\ z=?, \\ u=?, \end{array} \right.$$

откуда $A^{-1}=?$.

Сделайте проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача определения обратной матрицы к данной, как и перестановочной с ней (см. § 20), сводится к решению системы линейных уравнений (первой степени), а вопрос обратимости матрицы — к проблеме существования решения такой системы. Методы решения подобных систем и еще более сложных мы будем изучать и узнаем не только то, что система линейных уравнений может не иметь решений, может иметь их бесконечно много или иметь единственное решение, как в этом примере, но и критерии этих случаев.

Пока же будем пользоваться таким ***алгоритмом*** (правилом) ***для вычисления обратной к обратимой матрице*** любого порядка: $A=\|a^i_j\| \in \boldsymbol{GL}(n, \mathbf{R})$.

1. *Выпишем матрицу порядка* $n \times 2n$ вида:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \ldots & a^1_n & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \ldots & a^2_n & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots & & & & \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_3 & \ldots & a^n_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right)$$

Справа от данной матрицы приписываем единичную матрицу того же порядка

2. *Складываем и вычитаем строки такой матрицы, домножая их при этом*, если необходимо, *на подходящее число так, чтобы привести матрицу к ступенчатому виду* (сверху вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} * & * & * & \ldots & * & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * & * & * & \ldots & * \\ \cdots & & & & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * & * & * & * & \ldots & * \end{array} \right)$$

$*$ обозначены элементы, которые получены в результате преобразования строк матрицы.

3. Аналогично, складывая, вычитая, домножив на подходящий множитель строки матрицы, *приводим ее левый квадрат к*

диагональному виду (снизу вверх):

$$\uparrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & * & \dots & * \end{array}\right)$$

$*$ обозначены элементы, которые получены в результате преобразования строк матрицы.

4. Делим каждую из строк матрицы на ее диагональный (обязательно ненулевой!) элемент, *получим в левом квадрате единичную матрицу*:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & * & \dots & * \end{array}\right)$$

$*$ обозначены элементы, которые получены в результате деления строк на диагональные элементы.

5. *В правом квадрате — матрица, обратная данной,* (записанной первоначально в левом квадрате).

Обоснование этому правилу мы дадим позднее при изучении решений и свойств систем линейных уравнений.

Найдем матрицу, обратную матрице примера 21.1, применяя описанный алгоритм.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)-3(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)+2(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{-1(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение. $\overset{(2)-3(1)}{\sim}$ — действия со строками: от второй отнять первую, умноженную на 3.

Задание 21.1. Попробуйте, применяя алгоритм, найти матрицу, обратную данной. Возможно ли это?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim ?$$

Попробуйте найти матрицу, обратную A, исходя из определения 20.2 матрицы, обратной данной. Какая получится система уравнений? Есть ли у нее решение?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 22°. МАТРИЧНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Заметим, что система из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + \ldots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + a_3^m x^3 + \ldots + x_n^m x^n = b^m, \end{cases} \tag{22.1}$$

может очевидным образом быть представлена (записана) в виде матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \text{ или } A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

где $A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ — называется ***основной матрицей системы линейных уравнений*** (22.1), а матрица

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array}\right)$$

имеет название ***расширенной матрицы системы линейных уравнений*** (22.1).

Таким образом, система уравнений (22.1) имеет краткую и удобную матричную запись:

$$A \cdot X = B, \tag{22.2'}$$

где $A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, $X = \|x^j\| \in \boldsymbol{M}(n \times 1)$, $B = \|b^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times 1)$ и B-столбец свободных членов.

Определение 22.1. ***Решением системы линейных уравнений*** *называется кортеж чисел* $\langle x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n \rangle$, *подстановка которых вместо переменных* $\langle x^1, x^2, \ldots x^n \rangle$ *в уравнения системы превращает их в числовые тождества.*

Так что всякое решение матричного уравнения (22.2) определяет числовой кортеж, являющийся решением линейной системы уравнений (22.1) и наоборот.

В том случае, когда $m=n$, т. е. A — **квадратная**, и **обратима**, задача решения уравнения (22.2), а значит и системы уравнений (22.1), может быть сведена к вычислению матриц A^{-1} и $A^{-1}\cdot B$, так как (см. замечание 20.2, (20.6))

$$X=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \qquad (22.3)$$

Причем в случае обратимой матрицы A матрица X, а значит, и решение системы уравнений (22.1) единственны.

Замечание 22.1. Можно заметить, что в § 21 п. 1. матрицей

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \qquad (22.X)$$

компактно записана система из n^2 уравнений, которая получится приравниванием соответствующих элементов матриц $A\cdot X=E$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

соответствуют матрицы (основная|расширенная):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & 0 \end{array}\right), \qquad (22.X_1)$$

затем

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

с соответствующими матрицами:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & 0 \end{array}\right), \tag{22.X_2}$$

и т. д. до последней:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

с матрицами:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & 1 \end{array}\right), \tag{22.X_n}$$

Из этого видно, что система n^2 уравнений с n^2 неизвестными состоит из n систем уравнений, каждая из которых от n (своих, не встречающихся в остальных системах) переменных и имеет n уравнений. Причем все эти n систем имеют одинаковые основные матрицы и различаются только столбцами свободных членов. Это и позволяет компактно и удобно для преобразований объединить матрицы этих n систем в одну матрицу (22.X). Преобразование ее строк (по алгоритму § 21) и есть преобразование коэффициентов n^2 уравнений.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Математика — это большой город, чьи предместья не перестают разрастаться, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как ... старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие и удобные.
>
> *Н. Бурбаки.* «История математики»

Мы видели, как довольно естественно с системой линейных уравнений соотносится матричное уравнение и две матрицы: основная и расширенная. При решении такой системы ее уравнения преобразуют, чтобы их упростить: умножают на подходящие числа, проводят замену уравнений системы на сумму или разность его с другими и т. д.— по существу все эти операции проделываются с соответствующими коэффициентами уравнений системы — элементами строк ее расширенной матрицы. Так что выделение таблицы коэффициентов системы линейных уравнений и замена действий с ее уравнениями на те же самые действия со строками ее расширенной матрицы оказалось удобным и привело еще в XVII веке к понятию матрицы. (Немецкое — Matrize — от латинского слова matrix, что означает — источник, начало).

Попытки ответить на вопросы, как по матрице системы линейных уравнений узнать, когда система имеет решения, а когда они отсутствуют, и в первом случае — сколько их, привели к важному понятию в теории матриц определителя или детерминанта. Оно по своим идеям восходит к немецким математикам Г. Лейбницу, К. Ф. Гауссу (Gauss Carl Friedrich, 1777—1855) и Г. Крамеру (Cramer Gabriel, 1704—1725). Другое важное понятие — ранг матрицы, было введено немецким математиком Г. Фробениусом (Frobenius Ferdinand Georg, 1849—1917), который внес вклад в эту теорию и разработал ее приложения в механике.

Хотя еще с середины XVII века матрицы использовались Лейбницем, только ко второй половине XIX века матрицы, независимо от систем уравнений, стали объектом самостоятельных исследований и, видимо, прежде всех — в работах ирландского математика У. Р. Гамильтона (Hamilton William Rowan, 1805—1865), затем — английских: А. Кэли (Cayley Artur, 1821—1895) и Дж. Сильвестра (Silvester James Josef, 1814—1897).

Дело в том, что операции над матрицами (сложение, умножение матриц и умножение скаляра на матрицу) возникли как технический аппарат при решении задачи весьма далекой от проблем теории линейных уравнений — придании геометрического истолкования некоторым обобщениям чисел — кватернионам, которые были открыты Гамильтоном в 1843 году и составляли интерес для многих математиков середины XIX века.

Основные идеи матричной алгебры были сформулированы Кэли в 1858 году в работе "A Memoir on the Theory of Matrices" («Мемуар по теории матриц»). Он развил некое исчисление, вводя числа специального вида, которые охватывали, как частный случай, известные к тому времени действительные и комплексные числа и кватернионы. В основе его теории лежали именно такие действия с матрицами, что аналогами их были действия с уже изучавшимися в то время математиками и механиками линейными отображениями векторных пространств. Так странное на первый взгляд правило умножения матриц соответствует композиции таких отображений. Интересно знать, что именно Кэли ввел одно из современных обозначений матрицы — две вертикальные черты: $\|a^i_j\|$.

Позднее глубокие результаты в теории матриц были получены К. Вейерштрассом (Weierstraβ Karl Theodor Wilhelm, 1815–1897), Г. Фробениусом — немецкими математиками, и французом — Э. Жорданом (Jordan Marie Emanuel Camille, 1838–1922), они стали классическими в теории матриц и носят их имена.

Можно сказать, что в современной математике нет, пожалуй, почти ни одного серьезного раздела, в котором в той или иной степени не использовались бы достижения теории матриц. При этом именно в силу поразительной универсальности матричного аппарата, результаты отдельной задачи, исследования, зачастую принимают общий и более глубокий характер, связывающий между собой, казалось бы, довольно далекие проблемы. К примерам подобного можно отнести и такие вопросы настоящего курса, как закон инерции квадратичных форм и проблемы приведения линейного оператора к каноническому виду, законы изменения координат точек при аффинных преобразованиях и движениях плоскости и пространства, проективных преобразованиях проективных пространств и многое другое.

Без матричной техники немыслимы и многие разделы современной физики, механики и оптики, квантовой механики, еще отметим, что координатное (матричное) пространство будет основным в моделировании систем аксиом различных геометрий, с которыми предстоит знакомство в настоящем курсе — геометрий, кажущихся сначала фантастическими, но тем не менее реальными и даже реализованными не только в умозрительной математике, но и в ее приложениях в физике, теории относительности и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
2. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.— 432 с.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-маг. лит., 1977.— 496 с.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.— 576 с.
7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—416 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 17°. Понятие матрицы. Виды матриц

[1] — стр. 210.
[4] — стр. 142—145.
[5] — стр. 25.
[6] — стр. 13—15, 24.

§ 18. Действия с матрицами. Сложение и умножение на скаляр

[1] — стр. 210—212.
[2] — стр. 317—318.
[3] — стр. 102—105.
[4] — стр. 143—144.
[5] — стр. 84—85.
[6] — стр. 15—17.
[7] — стр. 61.

§ 19. Действия с матрицами. Умножение матриц

[1] — стр. 211—214.
[2] — стр. 317—318.
[3] — стр. 89—93.
[4] — стр. 145—146, 183—185.
[5] — стр. 82—84.
[6] — стр. 17—18.
[7] — стр. 61—64.

§ 20. Перестановочные и обратимые матрицы

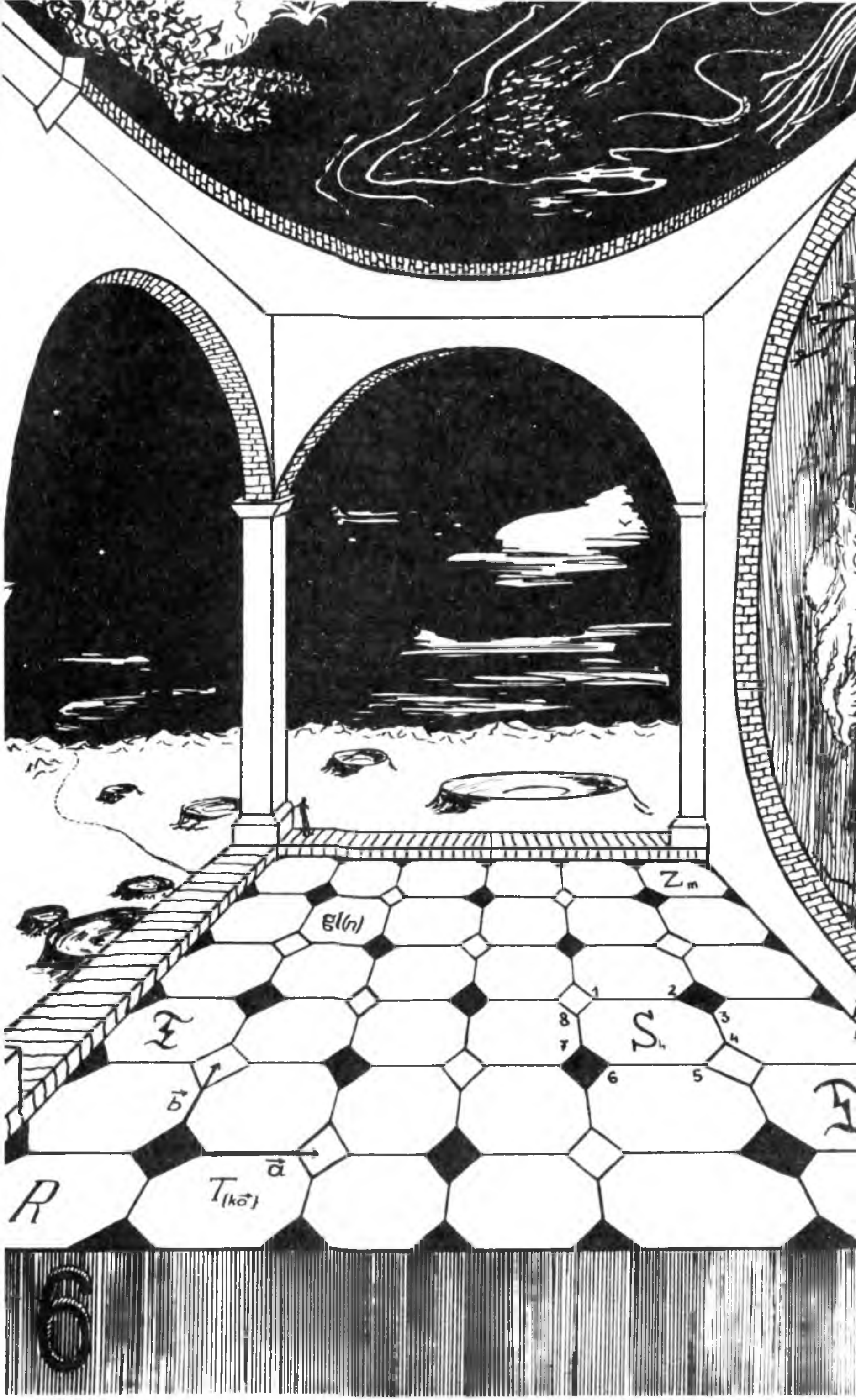
[1] — стр. 215—221.
[2] — стр. 320.
[4] — стр. 187—189.
[5] — стр. 85—86.
[6] — стр. 18, 26.

§ 21'. Вычисление обратной матрицы

[1] — стр. 218—221.
[4] — стр. 188—189.
[7] — стр. 26—27.

§ 22°. Матричная форма системы линейных уравнений.

[1] — стр. 220.
[3] — стр. 100.
[5] — стр. 24—25.


Z m
gl(n)
1
2
8
3
S 4
4
7
6
5
b
a
R
T (ko)
6

Лекция 6

ПОДСТАНОВКИ
ГРУППЫ

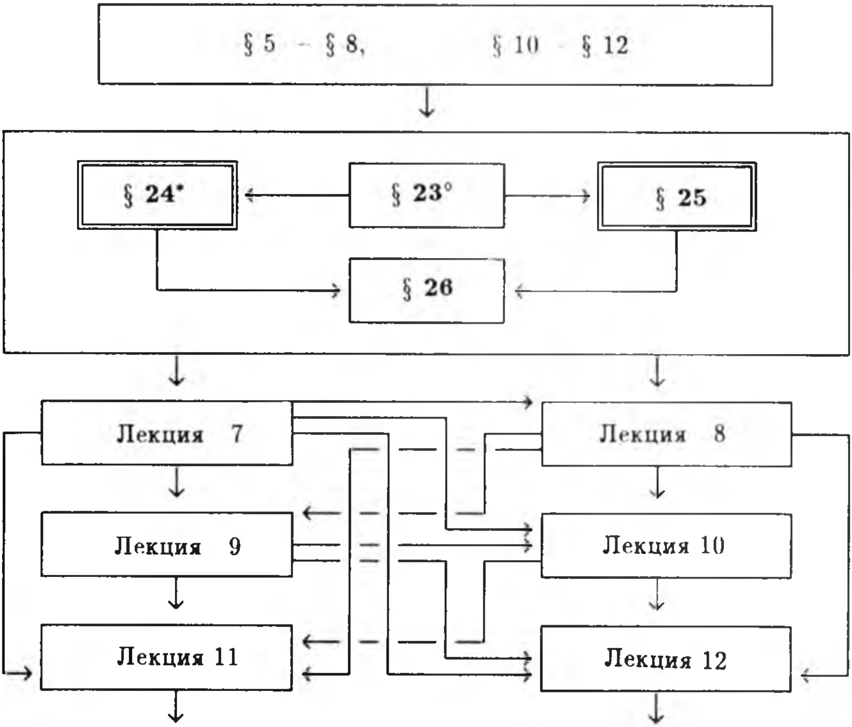
ПОДСТАНОВКИ
ГРУППЫ

§ 23°. Подстановки. Операции на подстановках.
§ 24*. Группы. Основные свойства.
§ 25. Четность и знак подстановки.
§ 26. Определитель матрицы.

Основные понятия: подстановка, перестановка, операции на подстановках: произведение (композиция) подстановок, инверсия подстановки; тождественная подстановка; группа, подгруппа, нейтральный элемент, обратный (противоположный) элемент, мультипликативная группа, аддитивная группа, четность подстановки, знак подстановки, транспозиция; определитель матрицы.

Необходимые сведения: конечное множество $P(n)$, бинарное отношение, граф бинарного отношения, отображение, образ и прообраз элемента, композиция и инверсия отображений, свойства композиции и инверсии отображений, тождественное отображение, преобразование, симметрическая группа порядка n, факториал — $n!$, поворот плоскости, параллельный перенос плоскости.

Рекомендации: если использовать пособие в лекционной работе, то полезно предварительное самостоятельное знакомство студента с содержанием (определениями) § 23°, материал § 24* может быть опущен при чтении лекции и оставлен для самостоятельного ознакомления с основными понятиями, более глубокое изучение темы «группы» планируется позже.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители.
Лекция 8 — Векторные пространства.
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 23°. ПОДСТАНОВКИ. ОПЕРАЦИИ НА ПОДСТАНОВКАХ

Мы упоминали, что одной из важных характеристик квадратной матрицы является ее определитель, но прежде, чем вводить его для матриц произвольного порядка, потребуется знакомство с отдельными результатами теории подстановок, которая представляет собой самостоятельный раздел математики, а в нашем курсе на свойствах подстановок основаны некоторые понятия и доказательства свойств определителей матриц.

Напомним, что через $P(n)$ обозначается ***конечное множество***, состоящее **из n элементов** (опр. 12.1), для удобства будем считать, что $P(n)=\{1, 2, 3, \ldots\}$. Напомним также понятие.

Определение 11.2. ***Подстановкой*** *или* ***перестановкой из n элементов*** *называется любое преобразование множества $P(n)$.*

Множество всех подстановок из n элементов называется ***симметрической группой n-ого порядка*** *и обозначается S_n*

Напомним: преобразование множества это биективное отображение его на себя (см. определения 11.1, 10.1, 9.1, 9.2).

Подстановки будем обозначать греческими буквами, например: $\tau: P(n) \to P(n)$.

Пример подстановки из пяти элементов: $\varphi: P(5) \to P(5)$:

$$\varphi=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 4\rangle\}.$$

Графы этого отображения на рис. 75.

Это отношение $\varphi=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$ можно изобразить иначе, выписывая кортежи столбцами:

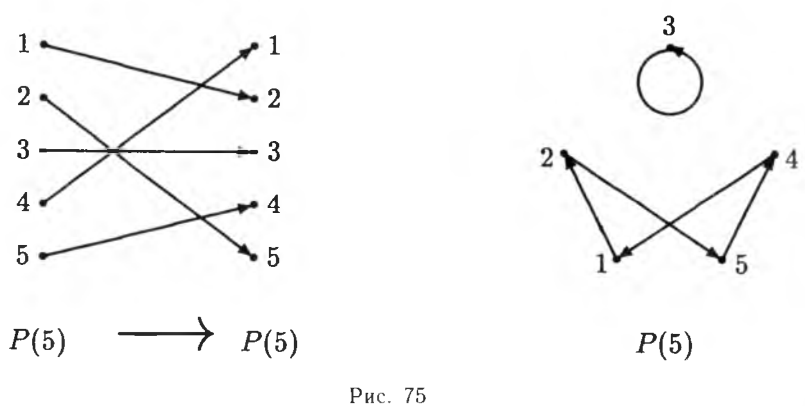


Рис. 75

$$\varphi=\begin{Bmatrix}\widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{4} & \widehat{5}\\ \underset{\smile}{2} & \underset{\smile}{5} & \underset{\smile}{3} & \underset{\smile}{1} & \underset{\smile}{4}\end{Bmatrix}, \quad \begin{array}{c}\text{опуская знаки}\\ \text{упорядоченных}\\ \text{пар, получим:}\end{array} \quad \varphi=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4\end{Bmatrix},$$

последнюю запись обычно называют ***подстановкой***, если же указана только строка образов элементов $P(n)$, например:

$$\varphi=\langle 2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4\rangle \text{ или } \varphi=(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4),$$

то чаще говорят о ***перестановке из*** n (в нашем случае — пяти) ***элементов***. Оба термина и формы записи равнозначны и равноправно употребимы, мы же, как правило, будем отдавать предпочтение первой из них из соображений ее большей наглядности:

$$\tau=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n\\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \ldots & \tau(n)\end{Bmatrix}.$$

Часто пользуются обозначением подстановки в виде двустрочной матрицы:

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n\\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix}.$$

По теореме 11.2 симметрическая группа S_n замкнута относительно операций композиции и инверсии, это означает, что ***композиция подстановок***, как композиция биективных отображений (см. определения 8.2, 6.1), есть подстановка, и ***инверсия подстановки***, как инверсия биективного (обратимого) отображения (см. опр. 8.3, опр. 5.7, утв. 8.1), есть тоже подстановка.

Полезно уметь находить по данным подстановкам их композиции и инверсии. Рассмотрим примеры таких вычислений.

Пример 23.1. Пусть $\varphi=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4\end{Bmatrix}$.

Записав подстановку φ как бинарное отношение

$$\varphi=\{\langle 1,\ 2\rangle,\ \langle 2,\ 5\rangle,\ \langle 3,\ 3\rangle,\ \langle 4,\ 1\rangle,\ \langle 5,\ 4\rangle\},$$

несложно получить ее инверсию:

$$\varphi^{-1}=\{\langle 2,\ 1\rangle,\ \langle 5,\ 2\rangle,\ \langle 3,\ 3\rangle,\ \langle 1,\ 4\rangle,\ \langle 4,\ 5\rangle\},$$

записав φ^{-1} в виде двустрочной матрицы, получим:

$$\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\widehat{2} & \widehat{5} & \widehat{3} & \widehat{1} & \widehat{4}\\ \underset{\smile}{1} & \underset{\smile}{2} & \underset{\smile}{3} & \underset{\smile}{4} & \underset{\smile}{5}\end{pmatrix} = \left|\begin{array}{l}\text{упорядочим по}\\ \text{элементам первой}\\ \text{строки}\end{array}\right| = \begin{pmatrix}\widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{4} & \widehat{5}\\ \underset{\smile}{4} & \underset{\smile}{1} & \underset{\smile}{3} & \underset{\smile}{5} & \underset{\smile}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{и запишем в}\\ \text{стандартном}\\ \text{виде}\end{array}\right| = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Это позволяет сформулировать простое правило:

Чтобы получить подстановку обратную данной, надо поменять местами ее строки, а затем упорядочить по элементам первой строки.

Пример 23.2. Найдем композицию подстановок $\psi\circ\varphi$, если

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\end{pmatrix},\quad \text{а } \psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}.$$

$$\psi\circ\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\end{pmatrix}=?.$$

Композиция подстановок (как отображений или бинарных отношений) наглядно представляется на графах (см. рис. 76):

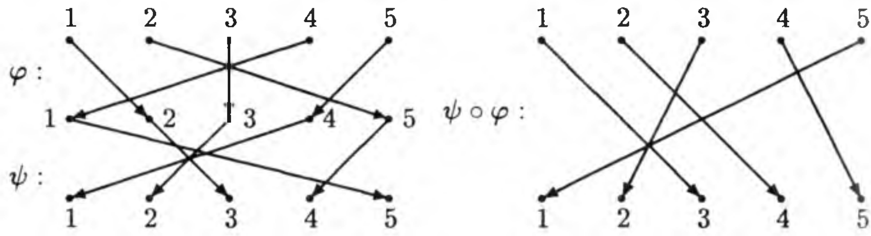


Рис. 76

Откуда с очевидностью следует, что

$$\psi\circ\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&2&5&1\end{pmatrix}.$$

Эту подстановку можно получить, выписывая вспомогательную матрицу, где первые две строки — подстановка φ (первая из выполняемых), а последняя, третья строка заполняется образами соответствующих элементов второй строки при действии отображением ψ:

$$\begin{aligned}&\psi(2)=\psi(\varphi(1))=3\overset{\text{def}}{=\!=}(\psi\circ\varphi)(1),\\&\psi(5)=\psi(\varphi(2))=4\overset{\text{def}}{=\!=}(\psi\circ\varphi)(2),\\&\psi(3)=?,\ \psi(4)=?,\ \psi(5)=?.\end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\\3&4&?&?&?\end{bmatrix}.$$

Откуда:

$$\psi\circ\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&2&5&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\\3&4&?&?&?\end{bmatrix}$$

Сформулируем удобное правило вычисления композиции подстановок.

Чтобы найти композицию дух подстановок $\psi\circ\varphi$, надо выписать вспомогательную матрицу, первые две строки которой есть подстановка φ, а последняя, третья строка составлена из образов элементов второй строки при действии подстановкой ψ.

Найдем композицию тех же подстановок, но в другом порядке:

$$\varphi\circ\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&1&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&?&?&?\end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&?&?&4\\4&3&?&?&?\end{bmatrix}$$

Из этих примеров легко увидеть следующее.

Вывод. $\psi\circ\varphi\overset{?}{\neq}\varphi\circ\psi$, т. е. композиция подстановок ? не ? коммутативна.

Композиция n раз подстановки φ на себя естественно называть ее ***n*-ой степенью подстановки** и обозначать φ^n.

Задача 23.1.1. Найдите степени и композиции подстановок:

$$\psi^2=\psi\circ\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\?&?&?&?&?\end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\\?&?&?&?&?\end{bmatrix}$$

$$\chi\circ\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\?&?&?&?\end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\\?&?&?&?\end{bmatrix}$$

$$\alpha\circ\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=?.$$ ♦

Последний пример подчеркивает, что имеет смысл произведение подстановок только одного и того же конечного множества.

Замечание 23.1. Естественно, тождественная подстановка имеет вид:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n\\1&2&3&4&\dots&n\end{pmatrix}.$$

Ее инверсия $\varepsilon^{-1}=\varepsilon$, и кроме того для любой подстановки $\tau\in S_n$ того же порядка $\tau\circ\varepsilon=\tau$ и $\varepsilon\circ\tau=\tau$.

Не составит большого труда убедиться в том, что для любой подстановки $\tau\in S_n$.

$$\tau^{-1}\circ\tau=\varepsilon=\tau\circ\tau^{-1}.$$

В силу уже упомянутой замкнутости $\mathscr{S}_n$ относительно композиции и инверсии, можно сказать, что композиция и инверсия подстановок являются отображениями:

$$P(n)\times P(n)\to P(n) \text{ и } P(n)\to P(n),$$

которые будем обозначать $[\circ]$ и, соответственно — $[^{-1}]$, где

$$[\circ]\colon\langle\varphi,\ \psi\rangle\to\psi\circ\varphi, \text{ а } [^{-1}]\colon\varphi\to\varphi^{-1}.$$

Отметим те свойства симметрической группы, которые уже были установлены при знакомстве со свойствами биективных отображений и бинарных отношений.

Задание 23.1. Укажите обоснования свойств:

Основные свойства симметрической группы

P.0: $\forall\{\varphi,\ \psi\}\subset S_n\Rightarrow\psi\circ\varphi\in S_n$.
P.1: $\forall\varphi\in S_n\Rightarrow\varphi^{-1}\in S_n$.
P.2: $\varepsilon\in S_n$. (ε — тождественная подстановка) — по теореме 11.?.

P.3: $\forall\varphi\in S_n\overset{?}{\Rightarrow}\varphi\circ\varepsilon=\varepsilon\circ\varphi=\varphi$. — по замечанию 23.1.

P.4: $\forall\varphi\in S_n\overset{?}{\Rightarrow}\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=\varepsilon$. — по следствию 10.?.

P.5: $\forall\varphi\in S_n\overset{?}{\Rightarrow}(\varphi^{-1})^{-1}=\varphi$. — по следствию 8.?.

P.6: $\forall\{\varphi,\ \psi\}\subset S_n\overset{?}{\Rightarrow}(\psi\circ\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$. — по теореме 8.?.

P.7: $\forall\{\varphi,\ \psi,\ \chi\}\in S_n\overset{?}{\Rightarrow}\chi\circ(\psi\circ\varphi)=(\chi\circ\psi)\circ\varphi$. — по теореме 8.?.

P.8: $\forall\{\varphi,\ \psi\}\subset S_n\overset{?}{\Rightarrow}\varphi\circ\psi\neq\psi\circ\varphi$. — по примеру ?.?.

Пример 23.3. «В подстановках» можно решать уравнения. Сделаем это в общем виде: определим, как находятся подстановки χ и ξ такие, что

$$\chi\circ\alpha=\beta \tag{23.*}$$
$$\alpha\circ\xi=\beta. \tag{23.**}$$

Решить такое уравнение — значит найти подстановку χ, удовлетворяющую (23.*) или, ξ — соответственно, (23.**).

Всякая подстановка обратима (свойство P.?), ее инверсия единственна и результат композиции однозначен, поэтому эти задачи решаются довольно просто, причем, решение как (23.*) так и (23.**) единственны:

1. Для уравнения $\chi\circ\alpha=\beta$:

$$\left.\begin{array}{l} (\chi\circ\alpha)\circ\alpha^{-1}\overset{?}{=}\beta\circ\alpha^{-1} \\ \text{P.?}\ \Big\| \\ \chi\circ(\alpha\circ\alpha^{-1})\overset{\text{P.?}}{=\!=}\chi\circ\varepsilon\overset{\text{P.?}}{=\!=}\chi \end{array}\right\} \Rightarrow \chi=\beta\circ\alpha^{-1}. \qquad (23.*')$$

2. Аналогично показывается, что решением уравнения (23.**) является подстановка

$$\xi=\alpha^{-1}\circ\beta. \qquad (23.**')$$

Задача 23.2.1. Решите относительно ξ уравнение в подстановках $\alpha\circ\xi\circ\beta=\varphi$, если

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&4&5\end{pmatrix},\quad \varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&3&6&4&2\end{pmatrix}.$$

Указание. Уравнение $\alpha\circ\xi\circ\beta=\varphi$ можно свести к предыдущим, если ввести обозначение $\chi=\xi\circ\beta$, и решить сначала уравнение $\alpha\circ\chi=\varphi$ относительно χ.

$$\chi=\alpha^{-1}\circ\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix}^{-1}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&3&6&4&2\end{pmatrix}=?,$$

а затем уравнение $\chi=\xi\circ\beta$ решить относительно ξ (при найденном χ).

Сделайте проверку $\alpha\circ\xi\circ\beta\overset{?}{=}\varphi$.

Как следствие примера 23.3 можно получить в общем виде решение уравнения в подстановках

$$\alpha\circ\xi\circ\beta=\varphi \qquad (23.***)$$

как

$$\xi=\alpha^{-1}\circ\varphi\circ\beta^{-1}. \qquad (23.***')$$

Задача 23.1.2. Найдите φ^{150}, если

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&6&9&7&1&10&8&2\end{pmatrix}.$$

Указание. Найдите сначала $\varphi^2=\varphi\circ\varphi$, затем $\varphi^3=\varphi^2\circ\varphi$ и т. д., постарайтесь установить закономерность, используйте свойства P.1 — P.8 симметрической группы S_{10}.

Задача 23.1.3. Найдите φ^{100}, если

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&1&7&10&2&6&9&8\end{pmatrix}.$$

Указание. См. указание к задаче 23.1.2.

Представляет интерес вопрос — сколько всего существует подстановок из элементов конечного множества. Рассмотрим сначала задачу для малых значений n.

Задание 23.2. Определим, сколько существует подстановок из двух элементов? из трех? Для этого постараемся выписать их все:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ ? & ? & ?\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ ? & ? & ?\end{pmatrix}$$

Сколько существует различных подстановок из 4-х элементов? из 5-ти? из n элементов? ♦

Предыдущие рассуждения и вычисления позволяют высказать предположение

Теорема 23.1. *Существует ровно $n!$ различных перестановок множества, состоящего из n элементов.*

Доказательство. Пусть $P(n)=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, тогда произвольная перестановка $\varphi=\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle\in S_n$ получается заполнением n мест

			...			

числами $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, каждое из которых берется только один раз, в силу того, что $\varphi: P(n)\mapsto P(n)$ и биективно. Очевидно, подсчитав сколькими способами можно заполнить эту таблицу, мы найдем число всех перестановок (и подстановок!) из n элементов.

Первое — число k_1 — любое из $P(n)$, поэтому первую клетку можно заполнить n способами.

k_1	?	?	...	?	?	?

Для заполнения второго места можно использовать любое из оставшихся $n-1$ чисел: $P(n)\backslash\{k_1\}$. Таким образом, заполнить две клетки таблицы, т. е. два места в перестановке,

k_1	k_2	?	...	?	?	?

можно $n(n-1)$ способами, так как каждое из выбранных $n-1$ способом число k_2 может сочетаться с любым выбранным ранее n способами числом k_1.

Для заполнения третьего места будем использовать одно из оставшихся $n-2$ чисел $P(n)\backslash\{k_1, k_2\}$, а всего способов выбора трех чисел из $P(n)$ — ?.

Отсюда ясен общий принцип подсчета числа возможных перестановок из n элементов. Из него следует, что на $n-1$-м шаге неиспользованными остались числа: $P(n)\setminus\{k_1, k_2, k_3, ..., k_{n-2}\}$ — их всего два, значит, кортеж

k_1	k_2	k_3	...	k_{n-2}	k_{n-1}	?

может быть получен $n(n-1)(n-2)...2$ способами. На последнее место может быть поставлено только одно неиспользованное еще число. Таким образом, таких кортежей длины n, что каждое число из $P(n)$ употребляется в его записи только один раз, т. е. перестановок, всего $n(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot2\cdot1=n!$

А так как подстановки и перестановки — две формы записи одного и того же бинарного отношения, то число всех подстановок из n элементов (или элементов симметрической группы n-ого порядка) тоже равно $n!$. ■

Следующие понятия и утверждения будут полезны при определении четности подстановок и доказательствах в последующем некоторых свойств определителей, часть из них приводится без доказательств:

Лемма 23.1. $(\forall\tau\in S_n\wedge\tau\neq\varepsilon)\ \exists\, i\in P(n)|\tau(i)<i$.
Т. е. если подстановка τ не тождественна, то найдется элемент i такой, что $\tau(i)<i$.

Доказательство. Допустим, что $\tau(i)\geqslant i$ для любого $i\in P(n)$, в частности, $\tau(n)\geqslant n$. Но $\operatorname{Im}\tau\overset{?}{=}P(n)$, значит, $\tau(n)=n$. Аналогично получим, что $\tau(n-1)=?$, и т. д. Окончательно: $\tau=\varepsilon$, что противоречит условию леммы. ■

Определение 23.1. ***Транспозицией*** *называется подстановка вида:*

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \boxed{i} & i+1 & \dots & j-1 & \boxed{j} & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \boxed{j} & i+1 & \dots & j-1 & \boxed{i} & j+1 & \dots & n \end{Bmatrix}.$$

Обозначение транспозиции: τ_{ij}.

Транспозиция τ_{ij} отличается от тождественной подстановки элементами, стоящими на i-ом и j-ом местах и несложно видеть, что $\tau_{ij}=\tau_{ji}$.

Замечание 23.2. $\tau_{ij}\circ\tau_{ji}=\tau_{ij}^2=\varepsilon\ \forall\{\tau_{ij},\ \tau\}\subset S_n$. ♦

Замечание 23.3. Если две подстановки τ и τ' отличаются только порядком двух элементов второй строки, то найдется транспозиция τ_{ij} такая, что $\tau\circ\tau_{ij}=\tau'$.

Если $\tau'=\tau\circ\tau_{ij}$, то иногда говорят, что ***подстановка** τ' **получена*** из τ ***транспозицией*** (элементов i и j).

Утверждение 23.1. *Бинарное отношение:*

$$|_{ij}|_{S_n}=\{\langle\tau,\ \tau\circ\tau_{ij}\rangle\,|\,\tau\in S_n\wedge\{i,\ j\}\subset P(n)\}\ —$$

есть биективное отображение $S_n\to S_n$.

Другими словами: домножив все $n!$ элементов симметрической группы S_n на некоторую фиксированную транспозицию (впрочем, это верно и в отношении любой фиксированной подстановки из S_n), получим $n!$ различных подстановок.

Следствие 23.1. *Если* $\tau\in S_n$ *и, меняясь, принимает все возможные значения в* S_n, *то* $\tau'=\tau\circ\tau_{ij}\in S_n$ *также пройдет все элементы* S_n.

Утверждение 23.2. $|^{-1}|_{S_n}=\{\langle\tau,\ \tau^{-1}\rangle\,|\,\tau\in S_n\}$ *есть биективное отображение* $S_n\to S_n$.

Следствие 23.2. *Если* $\tau\in S_n$ *и, меняясь, принимает все возможные значения из* S_n, *то* $\tau^{-1}\in S_n$ *также пройдет все элементы* S_n.

§ 24*. ГРУППЫ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Термин «группа» мы уже использовали, но в сочетании с другими словами: симметрическая группа, группа подстановок, группа преобразований множества. Собственно понятие «группа» имеет в математике самостоятельное значение и место.

Определение 24.1. *Непустое множество G с заданным отображением $*:G\times G\to G$ называется **группой**, если*

G.1: $\exists e\in G\,|\,*(\langle a,\ e\rangle)=a\ \ \forall a\in G$.

G.2: $\forall a\in G\ \exists a'\in G\,|\,*(\langle a,\ a'\rangle)=e$.

G.3: $\forall\{a,\ b,\ c\}\subset G\Rightarrow *(\langle *(\langle a,b\rangle),c\rangle)=*(\langle a,*(\langle b,\ c\rangle)\rangle)$.

Обозначается группа: $\langle G,\ *\rangle$.

Разъяснение. Запись $*(\langle a,\ b\rangle)$ или $f(\langle a,\ b\rangle)$ неудобна, обычно пишется $a*b$, т. е. $a*b\overset{\text{def}}{=\!=}*(\langle a,\ b\rangle)$ (по определению). Часто для обозначения отображения $*$ (его называют ***групповой операцией***) используются знаки $\cdot$ или $+$, или вообще знак опускается: ab, тогда аксиоматика группы проще в написании:

G.1′: $\exists e\in G\,|\,ae=a\ \ \forall a\in G$.

G.2′: $\forall a\in G\ \exists\ a'\in G\,|\,aa'=e$.

G.3′: $\forall\{a,\ b,\ c\}\subset G\Rightarrow(ab)c=a(bc)'$.

Аксиома G.1 называется ***аксиомой нейтрального элемента*** (*правого*, поскольку e — правый сомножитель), а элемент e, удовлетворяющий G.1 — ***нейтральным элементом*** (*правым* относительно операции $*$).

Аксиома G.2 называется ***аксиомой обратного элемента***, а элемент a' — ***обратным*** к a *(правым)*.

Если групповая операция обозначена $*$, то обратный элемент, как правило, обозначают a^{-1}, а нейтральный элемент называют ***единицей группы*** и говорят о ***мультипликативной группе***. ("to multiplicate" по-английски означает умножать). Если же групповая операция обозначена $+$, то обратный элемент обычно обозначают $-a$, нейтральный 0, называют ***нулем группы*** и говорят об ***аддитивной группе***. (Соответственно, "to add" — переводится с английского, как складывать, прибавлять).

Аксиому G.3 называют ***аксиомой ассоциативности*** групповой операции.

Задание 24.1. Среди следующих примеров (из лекций 1—5) укажите группы, проверьте, почему то или иное множество относительно указанной операции является или не является группой, выполняются ли аксиомы G.1′ — G.3′:

1. $\langle \mathbf{R},\ +\rangle$ — группа.
2. $\langle \mathbf{R},\ \cdot\rangle$ — не является группой. Не выполняется аксиома G.2: $0\cdot ? \neq 1$. ◆
3. $\langle \mathbf{R}\backslash\{0\},\ +\rangle$ — не является группой. Не выполняется аксиома G.1: отсутствует элемент такой, чтобы $a+?=a$. ◆
4. $\langle \mathbf{R}^{+},\ \cdot\rangle$ — группа. $\{e=1,\ a'={}^{1}/a\}$. ◆
5. $\langle \mathbf{Z},\ +\rangle$ — группа. $\{e=?,\ a'=?\}$. ◆
6. $\langle \mathbf{Z}\backslash\{0\},\ \cdot\rangle$ — не является группой. $e=1$, но не выполняется аксиома G.2: отсутствует элемент такой, чтобы $a\cdot ?=1$. ◆
7. $\langle \mathscr{P}(X),\circ\rangle$ — группа, $\{e=?,\ a'=?\}$. (лекция 3). ◆
8. $\langle S_n,\ \circ\rangle$ — группа. $\{e=?,\ a'=?\}$. (лекции 3, 6). ◆
9. $\langle M(m\times n),\ +\rangle$ — группа. $\{e=O,\ A'=-A\}$. (лекция 5). ◆
10. $\langle GL(n),\ +\rangle$ — не является группой. Сумма двух обратимых матриц может быть необратима, например: $\langle A,\ -A\rangle \in \boldsymbol{GL}^2(n)$, но $A+(-A)=O\notin \boldsymbol{GL}^2(n)$, т. е. $[+]$ не является отображением $\boldsymbol{GL}^2(n)\to \boldsymbol{GL}^2(n)$. (лекция 5). ◆
11. $\langle \boldsymbol{GL}(n),\ \cdot\rangle$ — группа. $\{e=?,\ a'=?\}$. (лекция 5). ◆
12. $\langle \boldsymbol{gl}(n),\ +\rangle$ — группа. $\{e=?,\ a'=?\}$. (лекция 5). ◆
13. $\langle \boldsymbol{gl}(n),\ \cdot\rangle$ — ? не ?группа. (лекция 5). ◆
14. $\langle U,\ \bigcup\rangle$ — не группа. Не выполняется аксиома G.?′. (лекция 1). ◆
15. $\langle U,\ \bigcap\rangle$ — не группа. Не выполняется аксиома G.?′. (лекция 1). ◆
16. $\langle U,\ \backslash\rangle$ — ? не ?группа. (лекция 1). ◆
17. $\langle \mathbf{Z}_m,\ +\rangle$ — группа. $\{e=?,\ a'=?\}$. (лекция 4). ◆
18. $\langle \mathbf{Z}_m,\ \cdot\rangle$ — ? не ?группа. (лекция 4). ◆

Многие из этих примеров групп, например: $\langle \mathscr{P}(X),\ \circ\rangle$, $\langle S_n,\ \circ\rangle$, $\langle \mathbf{GL}(n),\ \cdot\rangle$, $\langle \mathbf{gl}(n),\ +\rangle$, $\langle \mathbf{Z}_m,\ +\rangle$ и другие, их свойства представляют самостоятельный интерес, они даже играли определенную историческую роль в развитии математики, их изучение будет составлять содержание некоторых разделов нашего курса.

Определение 24.3. *Группа $\langle G, \cdot\rangle$ называется **коммутативной** или **абелевой**, если $(\forall\{a, b\}\subset G)\Rightarrow(ab=ba)$.*

Часто обозначения аддитивной группы ($+$, $-a$ и 0) используются именно для абелевых групп.

Так группы $\langle \mathbf{R}, +\rangle$, $\langle \mathbf{R}\backslash\{0\}, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{gl}(n), +\rangle$ — абелевы, а $\langle GL(n), \cdot\rangle$ некоммутативна.

Определение 24.4. *Группа G называется **конечной**, если G конечное множество, в противном случае G — **бесконечная группа**.*

В предыдущем задании группа $\langle \mathbf{Z}_m, +\rangle$ конечная абелева, примером конечной группы является и симметрическая группа n-ого порядка $\langle \mathscr{T}_n, \cdot\rangle$.

Группы образуют и некоторые из преобразований плоскости (см. определение 11.1, лекция 3) относительно их композиции (их последовательного выполнения, см. определения 8.2 и 6.1).

Пример 24.1. Множество $\mathscr{R}_C$ поворотов вокруг фиксированной точки C плоскости $\mathbf{\Pi}$ образует группу относительно операции их композиции, она называется ***группой вращений плоскости***.

Определение 24.5. ***Поворотом плоскости вокруг ее точки C на угол $\alpha\in\mathbf{R}$*** *называется такое отображение плоскости в себя, при котором каждой ее точке $M\in\mathbf{\Pi}$ сопоставляется точка $M'\in\mathbf{\Pi}$ такая, что*

$$|CM'|=|CM| \text{ и } \widehat{MCM'}=\alpha.$$

Поворот плоскости вокруг ее точки C на угол α обозначается R_C^α, а множество всех поворотов плоскости вокруг нее $\mathscr{R}_C$.

Для любой точки $M\in\mathbf{\Pi}$ по определению (рис. 77)

$$R_C^\alpha(M)\overset{\text{def}}{=\!=}M' \mid |CM'|=|CM|\wedge\widehat{MCM'}=\alpha.$$

Согласно определению композиции отображений

$$(R_C^\beta\circ R_C^\alpha)(M)=R_C^\beta(R_C^\alpha(M))\overset{?}{=}R_C^{\beta+\alpha}(M)$$

для любой точки $M\in\mathbf{\Pi}$, и любых $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$ значит, $R_C^\beta\circ R_C^\alpha\overset{?}{=}R_C^{\beta+\alpha}$ и $\circ: \mathscr{R}_C\times\mathscr{R}_C\to\mathscr{R}_C$. (рис. 78).

Очевидно, что $R_C^0(M)\overset{?}{=}\varepsilon$, где ε — тождественное отображение плоскости на себя (см. определение 6.2, замечание 8.1). Так

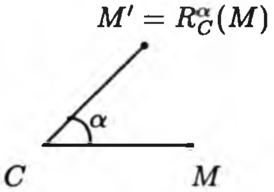


Рис. 77

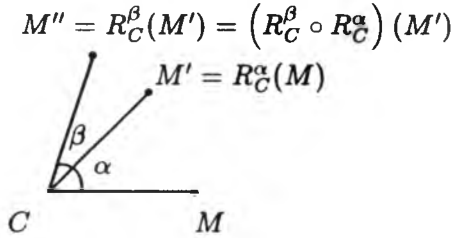


Рис. 78

как для произвольного $\alpha \in \mathbf{R}$ и любой точки плоскости M

$$(R_C^\alpha \circ \varepsilon)(M) \overset{?}{=} R_C^\alpha(M), \text{ и, значит, } R_C^\alpha \circ R_C^0 \overset{?}{=} R_C^\alpha,$$

то для множества R_C выполняется первая из аксиом группы: нейтральным элементом относительно операции $\circ$ является тождественное преобразование плоскости, которое можно рассматривать как поворот плоскости вокруг ее точки C на нулевой угол.

Помимо этого $R_C^\alpha \circ R_C^{?} = R_C^0$, что означает, что $(R_C^\alpha)^{-1} = R_C^{?} \in \mathscr{R}_C$ для всякого $\alpha \in \mathbf{R}$. ◆

Причем операция композиции поворотов обладает свойством ассоциативности:

$$R_C^\gamma \circ (R_C^\beta \circ R_C^\alpha) \overset{?}{=} (R_C^\gamma \circ R_C^\beta) \circ R_C^\alpha \qquad ◆$$

для всех α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$.

Таким образом, для множества всех поворотов плоскости вокруг ее точки C и операции композиции $\circ$ выполняются все аксиомы G.1 — G.3, следовательно, $\langle \mathscr{R}_C, \circ \rangle$ — группа.

Несложно заметить, что композиция поворотов коммутативна, т. е. для любых действительных чисел α и β имеет место $R_C^\beta \circ R_C^\alpha = R_C^\alpha \circ R_C^\beta$, так как $R_C^{\beta+\alpha} \overset{?}{=} R_C^{\alpha+\beta}$.

Таким образом, $\langle \mathscr{R}_C, \circ \rangle$ — пример коммутативной группы.

Пример 24.2. Множество $\mathscr{T}$ параллельных переносов плоскости $\mathbf{\Pi}$ образует группу относительно операции их композиции (***группу параллельных переносов плоскости***).

Напомним определение параллельного переноса плоскости на свободный вектор $\vec{a}$.

Определение 24.6. ***Параллельным переносом плоскости на вектор*** $\vec{a} \in \mathscr{V}^2$ *называется такое ее отображение в себя, при котором каждой точке* $M \in \mathbf{\Pi}$ *сопоставляется точка* $M' \in \mathbf{\Pi}$ *такая, что* $\overline{MM'} \in \vec{a}$.

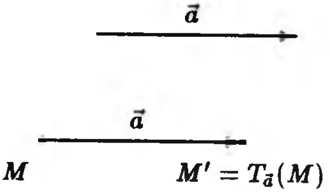


Рис. 79

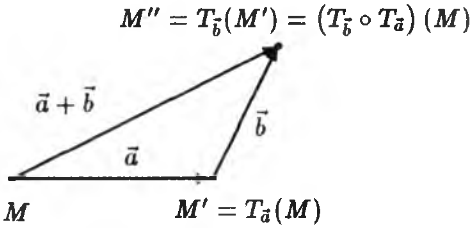


Рис. 80

Параллельный перенос плоскости на свободный вектор $\vec{a}$ обозначается $T_{\vec{a}}$, а множество всех ее параллельных переносов — $\mathcal{T}$.

Таким образом, по определению для любой точки $M \in \mathbf{\Pi}$:

$$T_{\vec{a}}(M) \overset{\text{def}}{=\!=} M' \mid \overline{MM'} \in \vec{a}.$$

Согласно определению композиции отображений для любых векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ имеет место:

$$(T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}})(M) \overset{?}{=} T_{\vec{b}+\vec{a}}(M) \overset{?}{=} T_{\vec{b}}(T_{\vec{a}}(M))$$

для любой точки M плоскости $\mathbf{\Pi}$, значит, $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{b}+\vec{a}}$ и $\circ : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$.

Очевидно, что $T_{\vec{a}} \circ \varepsilon = T_{\vec{a}}$ для всех свободных векторов $\vec{a} \in \mathcal{V}^2$ и тождественное отображение плоскости в себя можно представить, как $\varepsilon \overset{?}{=} T_{\vec{0}} \in \mathcal{T}$, так что нейтральным элементом относительно операции композиции $\circ$ в множестве $\mathcal{T}$ параллельных переносов плоскости является ее параллельный перенос на нулевой свободный вектор.

Помимо этого $T_{\vec{a}} \circ T_{-\vec{a}} = T_{\vec{0}} = \varepsilon$, что означает, что $(T_{\vec{a}})^{-1} = T_{-\vec{a}} \in \mathcal{T}$. Можно показать, что операция композиции параллельных переносов ассоциативна:

$$T_{\vec{a}} \circ (T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{c}}) \overset{?}{=} (T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}) \circ T_{\vec{c}},$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathcal{V}^2$.

Значит, для множества $\mathcal{T}$ параллельных переносов плоскости и операции композиции $\circ$ выполняются все аксиомы группы G.1 — G.3, и следовательно, $\langle \mathcal{T}, \circ \rangle$ — пример группы.

Композиция параллельных переносов также коммутативна: $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} \overset{?}{=} T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}$ для любых свободных векторов $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathcal{V}^2$, и имеем еще один пример коммутативной группы — $\mathcal{T}$.

Основные свойства группы

В дальнейшем a, b, a', e, x, y и т. д.— элементы группы G, т. е. на G задана операция, удовлетворяющая аксиомам G.1′—G.3′. При этом, естественно, хотелось бы знать ответы на вопросы: единствен ли нейтральный элемент группы, противоположный к данному, можно ли сокращать коэффициенты в обеих частях равенств в группах, как это делается в числовых равенствах и т. д. Аксиомы группы G.1′ непосредственно этого не утверждают.

Чтобы ответить на подобные вопросы, введем отношение:

$$[']=\{\langle a,\ a'\rangle \mid aa'=e\}\subset G^2$$

и исследуем его свойства.

Утверждение 24.1. *Бинарное отношение* $[']$ *симметрично и является отображением.*

(Сравните с утверждением 19.1).

Доказательство.

1. Симметричность $[']$ означает (см. определение 13.4), что из $\langle a,\ a'\rangle\in[']$ следует $\langle a',\ a\rangle\in[']$.

Пусть $\{a,\ a'\}\subset G$, такие, что $aa'=e$. Рассмотрим

$$a'a \overset{G.1'}{=\!=} (a'a)\,e=\underbrace{be \overset{G.2'}{=\!=} b\,(a'\,(a')') \overset{G.3'}{=\!=} (ba')}_{\text{des: } a'a=b}(a')'=((a'a)a')\,(a')' \overset{G.3'}{=\!=}$$

$$=(a'\,(aa'))\,(a')' \overset{G.?'}{=\!=} (a'e)\,(a')'=a'\,(a')' \overset{G.2'}{=\!=} e.$$

Таким образом для любого $a\in G$ из $aa'=e$ следует $a'a=e$, $[']$ — симметрично.

2. $[']$ — отображение (см. определение 7.1), если кортеж $\langle a,\ a'\rangle$ с данным a в $[']$ единствен.

Допустим, что для некоторого $a\in G$ найдутся $\langle a,\ a'\rangle\in[']$ и $\langle a,\ a''\rangle\in[']$. Рассмотрим

$$\left.\begin{array}{l}(a'a)\,a'' \overset{\text{п.1}}{=\!=} e\,a'' \overset{\text{п.1}}{=\!=} (a''a)\,a'' \overset{?}{=} a''(aa'') \overset{?}{=} a''e \overset{G.?'}{=\!=} \\ \quad\big\| \ G.?' \\ a'\,(aa'') \overset{?}{=} a'\ e \overset{?}{=} a'\end{array}\right| \Rightarrow a'=a''.$$

Следовательно, $\forall a\in G\Rightarrow\langle a,\ a'\rangle\in[']$ единствен. ■

Из этого утверждения сразу же следуют ответы на многие из поставленных выше вопросов.

Свойство 24.1. *В группе G для любого элемента существует обратный.*

Разъяснение. Аксиома G.2′ определяет существование для всякого $a\in G$ правого обратного элемента, а свойством утвержда ется, что всякий правый обратный в силу симметричности $[\,'\,]$ есть и левый обратный элемент, тем самым его название — обратный, становится обоснованным.

Свойство 24.2. *Для любого элемента группы его противоположный элемент единствен.* (Сравните со следствием 20.1).

Свойство 24.3. *В группе G определен нейтральный элемент.*

Разъяснение. Аналогично предыдущему свойству утверждается, что правый нейтральный элемент является и левым.

Доказательство. Надо показать, что из $ae=a$ для любого $a\in G$ следует $ea=a$.

Рассмотрим $ea \overset{G.?'}{=} (aa')\,a \overset{G.?'}{=} a\,(a'a) \overset{\text{св. 24.1}}{=\!=\!=} ae \overset{G.?'}{=} a$ ■

Свойство 24.4. $\forall a\in G \Rightarrow (a')'=a$. (Сравните со следствием 20.2).

Задача 24.1.2. Докажите свойство 24.4.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \langle a,\ a'\rangle \in [\,'\,] \xRightarrow{\text{св. 24.1}} \langle a',\ a\rangle \in [\,'\,] \\ \xRightarrow{G.2'} \langle a',\ (a')'\rangle \in [\,'\,] \end{array}\right| \overset{?}{\Rightarrow} a=(a')'.$$
■

Свойство 24.5. $(\forall\{a,\ b\}\subset G\,|\,ab=e)\Rightarrow(b=a'\wedge a=b')$.

Т. е. если в группе $ab=e$, то элементы a и b взаимно обратны. ♦

Свойство 24.6. *В группе G нейтральный элемент единствен.*

Другими словами: если $a\bar e=a$ или $\bar e a=a$ для $\{a,\ \bar e\}\subset G$, то $\bar e=e$. (Сравните с утверждением 19.2).

Задача 24.1.1. Докажите свойство 24.6.

Доказательство. Допустим, найдется элемент $\bar e\in G$ такой, что $a\bar e=a$ для любого $a\in G$.

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} e\bar e \xlongequal[\text{по предположению}]{\text{при } a=\bar e} e \\ e\bar e \overset{?}{=\!=\!=} \bar e \end{array}\right| \Rightarrow e=\bar e.$$
■

Свойство 24.7. Для любых $\{a,\ b\}\subset G$ *существует единственный x такой, что $ax=b$ и единственный y такой, что $ya=b$*

Это свойство означает, что в группах разрешимы, причем однозначно, уравнения $ax=b$ и $ya=b$. (Сравните с замечанием § 20.2)

Задача 24.1.3. Докажите свойство 24.7.

Доказательство. Рассмотрим случай уравнения $ax=b$

0. Обе части этого уравнения домножим слева на a':

$$\left.\begin{array}{l} a'(ax)=a'b. \\ \Big\| \mathrm{G.?'} \\ (a'a)\,x \overset{\text{св. 24.?}}{=\!=\!=} ex \overset{\text{св. 24.?}}{=\!=\!=} x. \end{array}\right\} \Rightarrow x=a'b.$$

1. $x=a'b$ удовлетворяет уравнению $ax=b$ действительно,

$$a(a'b) \overset{\mathrm{G.?'}}{=\!=} (aa')\,b \overset{\mathrm{G.?'}}{=\!=} eb \overset{\text{св. 24.3}}{=\!=\!=} b.$$

2. Допустим, что найдется еще $\tilde{x}\,|\,a\tilde{x}=b$, тогда

$$\tilde{x} \overset{\text{св. 24.?}}{=\!=\!=} e\tilde{x} \overset{\text{св. 24.?}}{=\!=\!=} (a'a)\,\tilde{x} \overset{\mathrm{G.?'}}{=\!=} a'(a\tilde{x}) \overset{?}{=} a'? \overset{?}{=} x.$$

3. Аналогично доказывается, что $y=ba'$ является решением уравнения $ya=b$, причем единственным. □

Если сравнить доказательство свойства 24.7 с задачами разрешимости в матрицах уравнений вида $A\cdot X=B$, $X\cdot A=B$ (замечание 20.2) или в подстановках: $\chi\circ\alpha=\beta$, $\alpha\circ\xi=\beta$ (пример 23.3), то можно увидеть, что в том и другом случаях речь шла о решениях соответствующих уравнений в группах: полной линейной группе (обратимых матриц $\langle \boldsymbol{GL}(n,\,\mathbf{R}),\ \cdot\rangle$ с операцией умножения матриц) или в симметрической группе n-ого порядка ($\langle \mathscr{S}_n,\ \circ\rangle$ — с групповой операцией — композицией подстановок). Именно поэтому рассуждения и доказательства в этих случаях были так похожи.

Свойство 24.8. *Для любых* $\{a,\ b,\ c\}\subset G$ *из* $ac=bc$ *следует* $a=b$, *а из* $ca=cb$ *следует* $a=b$.

Последнее свойство позволяет «производить сокращения» в уравнениях и равенствах в группах.

Может получиться так, что сужение групповой $*$ операции группы G на ее подмножество $H\neq\varnothing$ удовлетворяет аксиоматике группы, тогда $\langle H,\ *|_H\rangle$ — группа, причем ее структура в определенном смысле наследуется от $\langle G,\ *\rangle$, в таком случае говорят о подгруппе группы G.

Определение 24.7. ***Подгруппой*** *группы* $\langle G,\ *\rangle$ *называется любое ее непустое подмножество* H *такое, что*

SG.1: $\forall\{a,\ b\}\subset H \Rightarrow a*b\in H$.

SG.2: $\forall a\in H \Rightarrow a'\in H$.

(где a' — противоположный к a элемент в группе G).

В этом случае говорят, что подмножество $H\subset G$ замкнуто относительно групповых операций G.

Обозначается подгруппа: $H\subset\langle G,\ *\rangle$ или $\langle G,\ *\rangle\supset H$.

Разъяснение. Аксиома SG.1 означает, что $*|_H: H \times H \to H$. Аксиомы SG.1 и SG.2 обеспечивают выполнимость аксиомы группы G.2′ для элементов из H. Тогда $a*a'=e \in H$ и выполнима аксиома G.1 для H. Аксиома группы G.3′ выполнима, конечно, и для любых элементов из $H \subset G$. ♦

Тем самым получено утверждение.

Утверждение 24.2: *Подгруппа H группы $\langle G, *\rangle$ есть группа $\langle H, *|_H\rangle$.*

Очевидно следующее.

Утверждение 24.2′. *$\langle G, *\rangle$ и $\langle \{e\}, *|_{\{e\}}\rangle$ — подгруппы группы $\langle G, *\rangle$.*

Определение 24.5. *Подгруппы $\langle G, *\rangle$ и $\langle \{e\}, *|_{(e)}\rangle$ — группы $\langle G, *\rangle$ называются* ***несобственными подгруппам*** *группы $\langle G, *\rangle$, остальные подгруппы (если они имеются) —* ***собственные***.

Задание 24.2. Найдите все подгруппы группы

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}.$$

Утверждение 24.3. *Бинарное отношение*

$$\mathcal{G}=\{\langle G, H\rangle \mid H \text{ — подгруппа группы } G\}$$

рефлексивно и транзитивно на множестве всех групп.

Отсюда, в частности, следует, что всякая подгруппа подгруппы H является подгруппой группы G.

Следствие 24.1. *Отношение $\mathcal{G}$ есть отношение линейного порядка на множестве всех подгрупп группы $\langle G, *\rangle$, причем, $\langle \{e\}, *|_{\{e\}}\rangle$ — наименьший элемент, $\langle G, *\rangle$ — наибольший.*

§ 25. ЧЕТНОСТЬ И ЗНАК ПОДСТАНОВКИ

Определение 25.1. ***Пара неравных элементов*** *$\{i, j\} \subset P(n)$ относительно подстановки $\tau \in S_n$ называется* ***правильной***, *если значение отношения: $\frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}>0$, в противном случае говорят о* ***неправильной паре элементов*** *или их* ***инверсии.***

Подстановка *называется* ***четной***, *если число всех ее неправильных пар (инверсий) четно, в противном случае подстановка называется* ***нечетной***.

Пара элементов $\{i, j\}$ рассматривается **неупорядоченная**. Конечно, тождественная подстановка всегда четна.

Пример 25.1. Найдем все правильные и неправильные пары элементов относительно подстановки $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. Множество $P(3)$ содержит только три пары неравных элементов: $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ из них:

1. $\{1, 2\}$: $\dfrac{1-2}{\tau(1)-\tau(2)}=\dfrac{1-2}{1-3}>0$, что означает правильность пары $\{1, 2\}$ относительно подстановки τ.

2. Аналогично, пара $\{1, 3\}$ — правильная относительно τ.

3. $\{2, 3\}$: $\dfrac{2-3}{\tau(2)-\tau(3)}=\dfrac{2-3}{3-2}<0$, это означает, что $\{2, 3\}$ — неправильная пара (инверсия) относительно τ.

Таким образом, подстановка $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ — нечетная, так как у нее одна (нечетное число) неправильная пара.

Задача 25.1.1. Определите четность каждой из подстановок множества $P(3)=\{1, 2, 3\}$, в какой из них число инверсий наибольшее? наименьшее? Сколько всего четных подстановок и сколько нечетных?

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}.$$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\varepsilon$ — четная, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ — нечетная (из предыдущего примера).

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ — $\overline{\underline{\text{? не ?}}}$четная, число инверсий — ?

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ — $\overline{\underline{\text{? не ?}}}$четная, число инверсий — ?

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ — $\overline{\underline{\text{? не ?}}}$четная, число инверсий — ?

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ — четная, число инверсий — 2.

Задача 25.1.2. Укажите подстановку из трех элементов с точно одной инверсией.

Указание. Постарайтесь найти такую подстановку не «перебором», а определив прежде всего подстановку с наименьшим числом инверсий, затем попробуйте установить, как меняется число инверсий при перемене мест ее элементов.

Сколько в S_3 подстановок с одной инверсией?

Задача 25.1.3. Придумайте подстановку из четырех элементов точно с тремя инверсиями.

Указание. Можно выписать все 4! подстановок из четырех элементов и, определив в каждой из них число неправильных пар, найти нужные.— Это верный, но слишком долгий путь решения. Подумайте, какова подстановка с наибольшим числом неправильных пар, затем — как их число можно уменьшать.

Сколько существует всего подстановок с тремя инверсиями в S_4?

Утверждение 25.1. *Любая транспозиция есть нечетная подстановка.*

Доказательство. Определяя число инверсий в транспозиции

$$\tau_{ij}=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \boxed{i} & i+1 & \dots & j-1 & \boxed{j} & j+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \boxed{j} & i+1 & \dots & j-1 & \boxed{i} & j+1 & \dots & n\end{Bmatrix}\in S_n$$

заметим, что неправильными могут быть только пары, содержащие хотя бы один из элементов $\{i, j\}$. ♦

Без ограничения общности можем считать $i<j$. Тогда

1. Определим, сколько неправильных пар вида $\{s, i\}$:

$$\frac{s-i}{\tau_{ij}(s)-\tau_{ij}(i)}=\frac{s-i}{s-j}=\frac{i-s}{j-s}\begin{cases}>0, \text{ если } s<i<j \text{ или } s>j>i.\\ <0, \text{ если } i<s<j.\end{cases}\tag{25.*}$$

Следовательно, неправильных пар вида $\{s, i\}$ столько же, сколько целых чисел между i и j, всего $(j-i-1)$.

2. Определим, сколько неправильных пар вида $\{s, j\}$: сравнивая дроби $\frac{s-j}{\tau_{ij}(s)-\tau_{ij}(j)}=\frac{s-j}{s-i}=\frac{j-s}{i-s}$ и (25.*), видим, что они взаимообратны и неправильных пар вида $\{s, j\}$ столько же: $(j-i-1)$.

3. Пара $\{i, j\}$, очевидно, неправильная:

$$\frac{i-j}{\tau_{ij}(i)-\tau_{ij}(j)}=\frac{i-j}{j-i}=-1.$$

4. Общее число неправильных пар, таким образом, $2(j-i-1)+1$ — нечетно и любая транспозиция — нечетная подстановка. ■

Подстановке в зависимости от ее четности приписывается определенное число

Определение 25.2. *Каждой подстановке сопоставляется число: $+1$, если подстановка четная, и -1, если она нечетна, это число называется* ***знаком подстановки***.

Знак подстановки τ обозначается $\operatorname{sign}\tau$.

sign от латинского слова signum, которое означает знак и читается «сигнум».

Утверждение 25.1 теперь может быть переформулировано так: для любой транспозиции $\operatorname{sign}\tau_{ij} = -1$.

Так как число неправильных пар одной подстановки не может быть одновременно четным и нечетным, то имеем $\operatorname{sign}: S_n \to \{-1, 1\}$ с $\operatorname{Dom}\operatorname{sign} = S_n$ и $\operatorname{Im}\operatorname{sign} = \{-1, 1\}$.

Для сравнения напомним известное определение 25.3 ***знака числа***, его график и свойства: для любого $x \in \mathbf{R}$ (см. рис. 81)

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

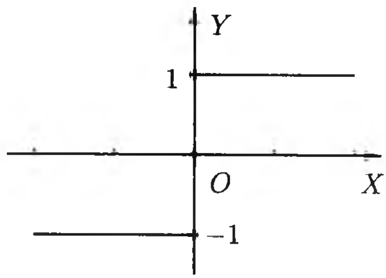


Рис. 81

$$\operatorname{sign}\frac{a}{b} = \operatorname{sign}(ab) = \operatorname{sign} a \operatorname{sign} b \ \forall \{a, b\} \subset \mathbf{R}^1. \qquad (25.1)$$

Введем обозначение произведения всех заданных действительных чисел a_i при i, принимающем все целые значения от 1 до n: $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Уметь определять знак подстановки и ее четность будет нужно при вычислениях определителей матриц, однако, непосредственное вычисление числа инверсий (неправильных пар) хотя и несложно, но довольно громоздко даже для подстановок из трех элементов (для $\forall \tau \in S_4$ надо перебрать уже 6 пар), поэтому желательно установить свойства знака подстановки, которые позволили бы, по крайней мере, уменьшить объем таких вычислений.

Свойства знака подстановки

Теорема 25.1. $$\operatorname{sign}\tau = \operatorname{sign}\left(\prod_{(i,\, j) \in P(n)} \frac{i-j}{\tau(i) - \tau(j)}\right) \forall \tau \in S_n. \qquad (25.2)$$

Эта теорема позволяет, не подсчитывая числа инверсий подстановки, свести задачу определения ее четности к определению знака произведения дробей.

Так для подстановки $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ примера 25.1

$$\operatorname{sign}\tau=\operatorname{sign}\left(\frac{1-2}{1-3}\,\frac{1-3}{1-2}\,\frac{2-3}{3-2}\right)=$$
$$=\operatorname{sign}\left(\frac{-1}{-2}\cdot\frac{-2}{-1}\cdot\frac{-1}{1}\right)=\operatorname{sign}(-1)=-1.$$

Доказательство. Если подстановка τ — четная, то по определению 25.2 знака подстановки: $\operatorname{sign}\tau=+1$. С другой стороны, по тому же определению — число ее инверсий четно, что означает, что в правой части формулы (25.2) четное число отрицательных дробей, и в произведении имеем положительное число, по определению 25.3 его знак $+1$. Тем самым в случае четной подстановки справедливость формулы (25.2) доказана.

Если же подстановка τ — нечетная, то по определению, число $\operatorname{sign}\tau=-1$, и число ее инверсий нечетно, что в произведении (25.2) дает отрицательное число, а его знак -1. Таким образом теорема доказана и в случае нечетной подстановки.

Значит, для любой подстановки ее знак совпадает со знаком указанного произведения. ■

Следствие 25.1. $\operatorname{sign}\varepsilon=+1$ *(т. е. тождественная подстановка всегда четна).*

Следующая теорема позволит по характеру четности сомножителей определять знак (четность) их произведения (композиции), не подсчитывая непосредственно число его инверсий.

Теорема 25.2. *Для любых подстановок* $\{\varphi,\psi\}\subset S_n$:

$$\operatorname{sign}(\psi\circ\varphi)=\operatorname{sign}\psi\cdot\operatorname{sign}\varphi. \tag{25.3}$$

Доказательство. Пусть подстановки

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\\varphi(1)&\varphi(2)&\varphi(3)&&\varphi(n)\end{pmatrix},$$
$$\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\\psi(1)&\psi(2)&\psi(3)&&\psi(n)\end{pmatrix}\text{—}$$

произвольные из $\mathscr{S}_n$. Тогда:

$$\psi\circ\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\\psi(1)&\psi(2)&\psi(3)&&\psi(n)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\\varphi(1)&\varphi(2)&\varphi(3)&&\varphi(n)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\\psi(\varphi(1))&\psi(\varphi(2))&\psi(\varphi(3))&&\psi(\varphi(n))\end{pmatrix}.$$

Найдем теперь знак $\psi\circ\varphi$, используя результат теоремы 25.1:

$$\operatorname{sign}(\psi\circ\varphi)\overset{\text{теор. 25.1}}{=\!=\!=}\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{i-j}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)=$$

$$=\operatorname{sign}\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\left(\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\varphi(i)-\varphi(j)}\cdot\frac{i-j}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)=$$

∀ сомножитель домножаем на 1

$$=\operatorname{sign}\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\left(\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\cdot\frac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}\right)=$$

переставим соседние множители

$$=\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\left(\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)\left(\frac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}\right)\right)=$$

(Так как в произведении сомножителей конечное число, их можно переставить, при этом значение произведения не изменится).

$$=\operatorname{sign}\left(\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)\cdot\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}\right)\right)=$$

$$\stackrel{?}{=}\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}\right)=$$

$$\overset{\text{теор. 25.1}}{=\!=\!=}\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)\cdot\operatorname{sign}\varphi.$$

Обозначим $\varphi(i)=i'$, $\varphi(j)=j'$. $\{i',\,j'\}\subset\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Dom}\psi=P(n)$ в силу биективности φ, как отображения, поэтому $\{i',\,j'\}\subset P(n)$ и «пробегают» все множество $P(n)$ при i, j, принимающих всевозможные значения в $P(n)$. Это позволяет продолжить преобразование предыдущего выражения следующим образом:

$$\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i,\,j\}\in P(n)}\frac{\varphi(i)-\varphi(j)}{\psi(\varphi(i))-\psi(\varphi(j))}\right)\cdot\operatorname{sign}\varphi=$$

$$=\operatorname{sign}\left(\prod_{\{i',\,j'\}\in P(n)}\frac{i'-j'}{\psi(i')-\psi(j')}\right)\cdot\operatorname{sign}\varphi=\overset{\text{теор. 25.1}}{=\!=\!=}\operatorname{sign}\psi\cdot\operatorname{sign}\varphi.\ \blacksquare$$

С л е д с т в и е 25.2. $\operatorname{sign}(\tau^{-1})=\operatorname{sign}\tau\ \ \forall\tau\subset S_n$.

З а д а ч а 25.2.1. Докажите следствие 25.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\tau\circ\tau^{-1}\stackrel{?}{=}\varepsilon$ для любой подстановки $\tau\in S_n$.

$$\operatorname{sign}\tau\ \operatorname{sign}\tau^{-1}\stackrel{?}{=}\operatorname{sign}(\tau\circ\tau^{-1})\stackrel{?}{=}\operatorname{sign}\varepsilon\stackrel{?}{=}1.$$

Отсюда $\operatorname{sign}(\tau^{-1})=(\operatorname{sign}\tau)^{-1}\stackrel{?}{=}\operatorname{sign}\tau$. $\blacksquare$

Очевидно и следующее.

Следствие 25.3. $\operatorname{sign}(\tau\circ\tau_{ij}) = -\operatorname{sign}\tau$,

так как $\operatorname{sign}(\tau\circ\tau_{ij}) \xlongequal{\text{теор. 25.2}} \operatorname{sign}\tau\cdot\operatorname{sign}\tau_{ij} = \operatorname{sign}\tau(-1) = -\operatorname{sign}\tau$. ■

Следствие 25.4. *Число всех четных подстановок из n элементов равно числу всех нечетных подстановок из n элементов и равно $n!/2$.*

Задача 25.2.2. Докажите следствие 25.4.

Указание. Пусть всего k четных подстановок из n элементов, а нечетных — l, причем $k\neq l$, допустим $k>l$. Подумайте, как использовать следствие 25.3, чтобы установить равенство k и l.

Задача 25.2.3. Можно ли для произвольных натуральных чисел k и n указать перестановку множества $P(n)$ точно с k инверсиями? Для каких k и n это возможно?

Задача 25.3.2. Определите, каково наибольшее возможное число неправильных пар в подстановке из n элементов? Укажите такую подстановку.

Указание. Можно воспользоваться следствием 25.3. Как будет изменяться число неправильных пар, если тождественную подстановку последовательно домножать на транспозиции? Как таким образом получить подстановку с наибольшим числом неправильных пар?

Задача 25.3.3. Докажите, что множество всех четных подстановок из n элементов S_n^+ — собственная подгруппа симметрической группы S_n.

Указание. Проверьте выполнимость всех аксиом SG.1 — SG.2 определения 24.4 подгруппы для элементов S_n^+.

Образует ли подгруппу в S_n множество всех нечетных подстановок S_n^- ?

§ 26. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Как мы уже упоминали, важной характеристикой квадратной матрицы является ее определитель — это число, сопоставляемое матрице по определенному правилу.

Определение 26.1. ***Определителем матрицы*** $A=\|a_j^i\|\in \boldsymbol{M}(n)$ *называется* ***число***, *равное*

$$\sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)}\, a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)}.$$

Суммирование по всем подстановкам из n элементов.

Определитель матрицы A обозначается: $\det A$, $|A|$ или $|a_j^i|$, иногда в записи определителя будем использовать обозначения строк и столбцов матрицы A: $|A^i|$ и $|A_j|$.

$$\det A = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)}\, a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)} \tag{26.1}$$

det — сокращение от латинского «determinant — определитель.

Разъяснения. 1. Суммирование берется по всем подстановкам из n элементов,— это означает, что, в соответствии теоремой 23.1, правая часть формулы (26.1) содержит $n!$ слагаемых.

2. $a^1_{\tau(1)}\, a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)}$, где $\tau \in S_n$ — это означает, что каждое из слагаемых правой части (26.1) есть (с точностью до знака) произведение n элементов квадратной матрицы $\|a^i_j\|$, взятых по одному из каждой строки ($\langle 1, 2, 3, \dots n \rangle$ — верхние индексы) и по одному из каждого столбца ($\langle \tau(1), \tau(2) \dots \tau(n) \rangle$ — нижние индексы).

3. Каждое из произведений $a^1_{\tau(1)}\, a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)}$ входит в сумму (26.1), как слагаемое, с таким знаком, каков знак соответствующей подстановки индексов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & & \tau(n) \end{pmatrix},$$

Задание 26.1. Определим, какие из следующих произведений могут входить, как слагаемые, в определитель матрицы $\|a^i_j\| \in \boldsymbol{M}(4)$ и с какими знаками.

1. ? $a^1_1 a^2_2 a^3_3 a^4_4$.

Для решения задачи рассмотрим индексы сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это тождественная подстановка. $\operatorname{sign} \varepsilon = ?$, следовательно, в разложении определителя произведение $a^1_1 a^2_2 a^3_3 a^4_4$ входит со знаком $+$.

2. ? $a^1_2 a^3_3 a^2_2 a^4_4$.

Индексы сомножителей:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$$

подстановку не составляют, поэтому произведение $a^1_2 a^3_3 a^2_2 a^4_4$ не входит в разложение какого бы то ни было определителя. ◆

3. ? $a^1_3 a^3_4 a^2_2 a^4_1$.

Индексы сомножителей:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

образуют подстановку, упорядочив их по верхней строке, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим ее знак: $\operatorname{sign}\tau = ?$, следовательно, произведение $a^1_3 a^2_2 a^3_4 a^4_1$ входит в разложение определителя со знаком ?.

Так как формулой (25.1) по матрице ее определитель находится однозначно, то можно говорить об отображении $\det : \boldsymbol{M}(n) \to \mathbf{R}$ или форме на множестве квадратных матриц. Несложно показать, что это отображение не инъективно, но сюръективно. ◆

Пример 26.1. Вычислим определитель матрицы второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}.$$

Для этого

1. Выпишем все подстановки из двух элементов:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Определим знак каждой из них.

Так как $\tau_1 = \varepsilon$, а ε — четная подстановка, то

$$\operatorname{sign}\tau_1 = \operatorname{sign}\varepsilon = +1.$$

Так как $\tau_2 = \tau_{12}$, а τ_{12}, как транспозиция, нечетная, то

$$\operatorname{sign}\tau_2 = \operatorname{sign}\tau_{12} = -1.$$

3. Применим формулу (26.1):

$$\det A = \operatorname{sign}\tau_1 \cdot a^1_1 a^2_2 + \operatorname{sign}\tau_2 \cdot a^1_2 a^2_1 = +a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1.$$

Окончательно:

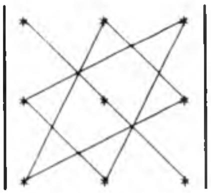
$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1. \tag{26.2}$$

Аналогично получается формула для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_2 a^2_1 a^3_3 - a^1_1 a^2_3 a^3_2. \tag{26.3}$$

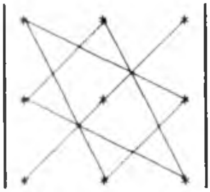
Для запоминания этой часто употребляемой формулы удобно так называемое правило Сарруса: в таблице элементов матрицы выделяются две «звездочки треугольников» (см. рис. 82).

Часто для краткости говорят просто об определителях второго, третьего и т. д. порядка.



$+$

произведения со знаком плюс



$-$

произведения со знаком минус

Рис. 82

Определение 26.2. ***Матрицу*** *называют* ***невырожденной***, *если ее определитель отличен от 0, в противном случае матрица называется* ***вырожденной.***

Задание 26.2. Найдите среди матриц вырожденные:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&0&1\\1&2&3\\3&-4&-5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},$$
$$D=\begin{pmatrix}5&0&1\\0&2&3\\0&-4&-5\end{pmatrix}.$$

$\det A=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=-2$. Значит, A невырождена.

$$\det B=\begin{vmatrix}5&0&1\\1&2&3\\3&-4&-5\end{vmatrix}.=5\cdot2\cdot(-5)+0\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot(-4)-$$

$-1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot(-5)-5\cdot3\cdot(-4)=0$. Следовательно, B вырождена.

$$\det C=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=?,\ \det D=\begin{vmatrix}5&0&1\\0&2&3\\0&-4&-5\end{vmatrix}=?.$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Математики — вроде французов, когда говоришь с ними, они переводят твои слова на свой язык и сразу получается что-то совсем другое.

В. Гете

В самом начале XVII века немецкий математик П. Роте (Rote Peter, 1580—1611) сформулировал утверждение, которое на протяжении почти двух веков занимало умы, пожалуй, всех выдающихся математиков, получив название «основной теоремы алгебры»: любое алгебраическое уравнение степени n с действительными коэффициентами имеет ровно n корней (среди них могут быть и совпадающие и комплексные). Честь закрытия этой проблемы принадлежит Гауссу.

Интересно, что попытки решить эту задачу и смежные с ней вопросы привели к рождению нового и очень мощного направления в математике — теории групп, которая нашла совершенно непредсказуемые при ее рождении приложения не только во многих разделах математики, но и физики, механики, кристаллографии, химии, даже в живописи и архитектуре.

Среди великих, интересовавшихся «основной теоремой алгебры», был французский математик Ж. П. Лагранж. Математикам того времени казалось, что получение формул для вычисления корней алгебраического уравнения произвольной степени, подобных тем, которые были известны еще арабскому математику средневековья аль Бируни (Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед, 973—$\approx$1048) (для квадратных уравнений) и были открыты для уравнений третьей степени, как считают, итальянцем Дж. Кардано (Cardano Girolamo, 1501—1576) — один из возможных путей решения проблемы. Причем они пытались получить формулы, выражающие корни уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ (a_i\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N})$$

через его коэффициенты посредством арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и извлечения корней — эта задача получила название «разрешимости в радикалах» алгебраического уравнения.

Ситуация представлялась вполне разрешимой, тем более, что были найдены и формулы для уравнений четвертой степени общего вида. Однако, аналогичные формулы для корней уравнений пятой степени получить никак не удавалось.

Наконец, в 1770 году Лагранж опубликовал свой трактат «Reflexions sur la resolution algebrique des equations» («Раз-мышления об алгебраическом решении уравнений»), в нём он изложил свои соображения, почему те методы, которые позволили решать уравнения степени не выше четвертой, нерезультативны для более высоких степеней: разрешимость в радикалах неожиданным образом оказалась связанной со структурой подстановок из соответствующего степени числа букв — символов (двух, трех и т. д.). Причем некоторые свойства S_n при $n \leqslant 4$ и $n > 4$ существенно различны. Так впервые подстановки привлекли внимание математиков. Дальнейшее развитие идеи зависимости задачи разрешимости в радикалах алгебраического уравнения и свойств подстановок привели Лагранжа и другого известного французского математика А. Вандермонда (Vandermonde Alexander Theophill, 1735—1796) к необходимости исследовать рациональные функции от корней алгебраических уравнений и их изменения при перестановках этих корней.

Позднее итальянский математик П. Руффини (Ruffini Paolo, 1765—1822), доказывая неразрешимость в радикалах уравнений пятой степени общего вида, использовал замкнутость множества подстановок из пяти элементов относительно умножения (композиции) и описал все подгруппы S_5. В 1824 году молодой норвежец Н. Абель (Abel Niels Henric, 1806—1829), основываясь на глубоких связях корней алгебраических уравнений и симметрических групп, доказал неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений общего вида степени выше четвертой, а юный француз Э. Галуа (Galois Evarist, 1811—1832) установил критерий их разрешимости.

Его работы не просто опирались на свойства симметрической группы (собственно термин «группа» (le group) ввел в математику Галуа, хотя строгого ее определения он не дал),— результаты, которые 21-летний математик изложил в письме к своему другу накануне его трагически закончившейся дуэли, содержали основы теории групп. В сжатых заметках Галуа оказались гармонично связанными строгой логикой новой теории и исторические задачи вроде удвоения куба и трисекции угла и разрешимость в радикалах алгебраических уравнений третьей и, вообще, любой степени. Но потребовалось почти 14 лет, чтобы его работы были обнаружены Ж. Лиувиллем, поняты им и напечатаны. А значение его работ во всей полноте было осознано математиками еще позже: благодаря изложению его методов и исследованиям его результатов другим французским математиком К. Жорданом (Jordan Marie Camile, 1838—1922), опубликовавшим их в 1870 году в «Traité des substitutions et de équation algébriques» («Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях»), и появившимся к тому времени в той же области математики, которая теперь называется теорией групп, работам члена Парижской Академии Наук О. Коши (Cauchy Augustin Louis, 1789—1857).

Он установил и доказал много интересных теорем о свойствах симметрической группы S_n. Сейчас идеи Галуа признаны одними из самых выдающихся достижений математики XIX века, он опередил свое время почти на полстолетия.

Позднее применение групповых методов в геометрии немецким математиком А. Мебиусом (Möbius August Ferdinand, 1790—1868) и англичанином А. Кэли привели другого выдающегося немецкого математика Ф. Клейна (Klein Christian Felix, 1849—1925) к идее классификации геометрий на групповой основе: каждая из геометрий определяется некоторой группой преобразований и ее инвариантами. «Эрлангенская программа», сформулированная им на математическом конгрессе в 1872 году, определяет направления геометрических исследований до настоящего времени.

Покажем один простой, но изящный пример приложения теории групп (точнее — теории подстановок) в геометрии. Так известно, какими движениями (перемещениями) правильный треугольник отображается в себя: осевыми симметриями относительно биссектрис его внутренних углов и поворотами вокруг его центра на 0, $2\pi/3$ и $4\pi/3$. Несложно проверить, что эти шесть самосовмещений образуют конечную группу. Однако, они могут быть заданы иначе: если занумеровать вершины треугольника цифрами 1, 2, 3, то повороту на угол $2\pi/3$ соответствует подстановка вершин $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, на $4\pi/3$ — $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, на 0 — тождественая, аналогично подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ соответствуют осевым симметриям. Таким образом, можно сказать, что группой самосовмещений правильного треугольника является симметрическая группа третьего порядка S_3, или что правильный треугольник представляет собой инвариант (не меняющийся объект, от английского — invariant — неизменный) группы S_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.— 432 с.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.— 400 с.
7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.— 416 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 23°. Подстановки. Операции на подстановках

[1] — стр. 221—222.
[2] — стр. 327—328.
[3] — стр. 28—35.
[5] — стр. 146—151.
[7] — стр. 67—87.

§ 24*. Группы. Основные свойства

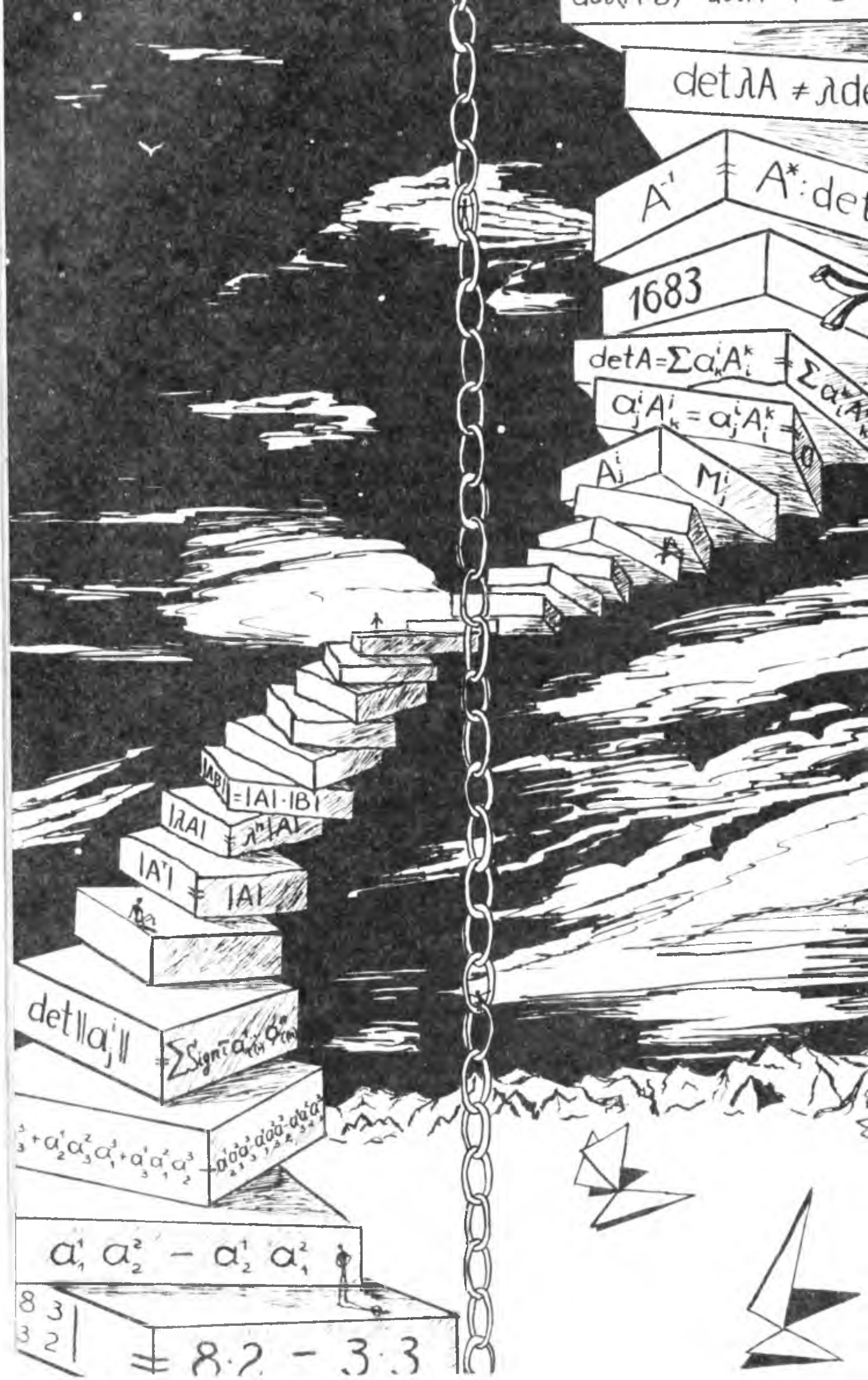
[1] — стр. 94—98, 100—102.
[3] — стр. 392—399.
[4] — стр. 140—141.
[5] — стр. 139—142.

§ 25. Четность и знак подстановки

[1] — стр. 223—225.
[2] — стр. 329—331.
[5] — стр. 151—154.
[7] — стр. 88—90.

§ 26. Определитель матрицы

[1] — стр. 226—227.
[2] — стр. 52—56, 331—332.
[3] — стр. 37—38.
[4] — стр. 148—150.
[5] — стр. 104—106.
[6] — стр. 30—33.
[7] — стр. 81—86.



$\det\lambda A \neq \lambda de$
$A^{-1} = A^{*}:det$
1683
$\det A = \sum a^i_k A^k_i$
$a^i_j A^i_k = a^i_j A^k_i = 0$
A^i_j
M^i_j
$|AB| = |A|\cdot|B|$
$|\lambda A| = \lambda^n |A|$
$|A^t| = |A|$
$\det\|a^i_j\|$
$a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$
$= 8\cdot 2 - 3\cdot 3$

Лекция 7

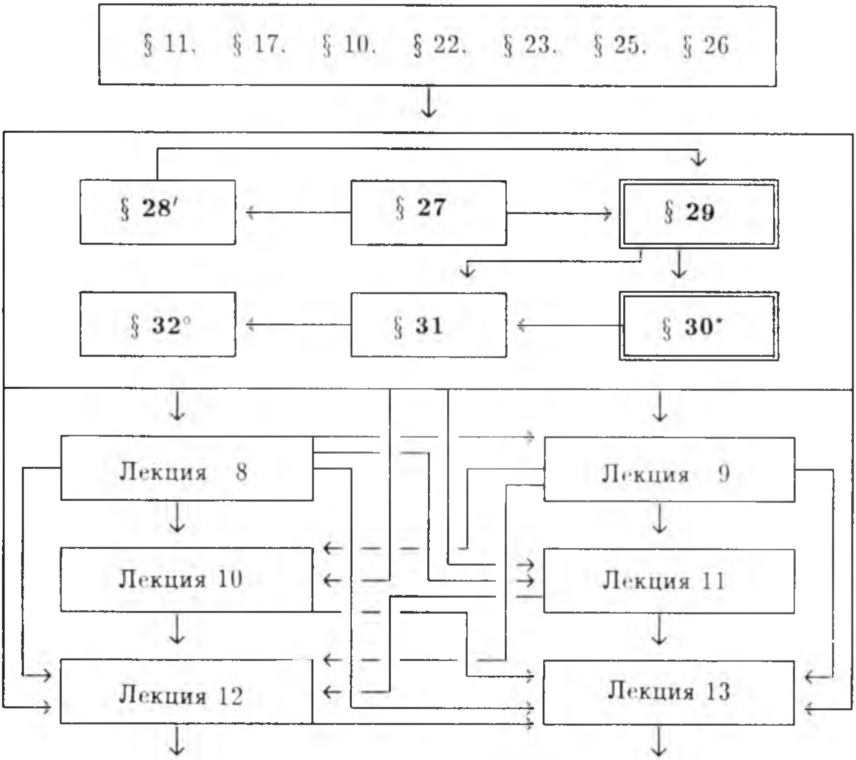
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные понятия: основые свойства определителей, дополнительный минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы, теорема о разложении определителя по строке (столбцу), теорема об определителе произведения матриц; теорема об обратной матрице, правило Крамера решения систем линейных уравнений.

Необходимые сведения: матрица, определитель, подстановка, перестановка, свойства подстановок, знак подстановки, транспозиция; матрица, виды квадратных матриц: треугольная, диагональная, обратимая и обратная, вырожденная матрица, сумма и произведение матриц, транспонирование матрицы; факториал — $n!$, система линейных уравнений, решение системы линейных уравнений, матричная форма системы линейных уравнений.

Рекомендации: если пособие используется в учебной работе, то § 28′ и § 32° рекомендуются для практических занятий или самостоятельной работы.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства.

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 27. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Очевидно, что нахождение определителей даже третьего порядка в соответствии с их определением требует довольно объемных вычислений, поэтому хотелось бы выделить случаи, когда они могут быть упрощены, и, если возможно,— установить правила, которые позволили бы свести вычисления сложных определителей к более простым, значения которых легко находятся.

Задание 27.1. Найдем определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = ?, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Если при вычислениях первых трех определителей можно воспользоваться формулами (26.2) и (26.3), то для последнего — приходится обращаться к общему определению 26.1. Однако результаты позволяют высказать предположение.

Свойство 27.1. *Если матрица имеет нулевыми строку или столбец, то ее определитель равен* 0.

Действительно, в каждом слагаемом формулы (26.1) в качестве сомножителя присутствует элемент из каждой строки (столбца) и, в частности, 0 из нулевой строки (столбца). ■

Мы уже видели, что

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ а } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы установить еще одно свойство определителей, вычислим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ? \text{ и } \det A^{\mathrm{T}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = ?$$

Свойство 27.2. *Для любого* $A \in \boldsymbol{gl}(n)$

$$\det A^{\mathrm{T}} \stackrel{?}{=} \det A \qquad (27.1)$$

Доказательство. Пусть $A=\|a^i_j\|$, $B=\|b^i_j\|$ такие, что $A^\tau=B \xLeftrightarrow{\text{опр. } 17.2} b^i_j=a^j_i\ \forall\{i,\ j\}\subset\{1,\ 2\ \dots\ n\}$.

Вычислим

$$\det A^\tau=\det\|b^i_j\| \overset{\text{опр. } 26.1}{=\!=\!=} \sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\,b^1_{\tau(1)}b^2_{\tau(2)}\dots b^n_{\tau(n)}=$$

Заменим b^i_j на a^j_i:

$$\overset{\downarrow}{=}\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\,a_1^{\tau(1)}a_2^{\tau(2)}\dots a_n^{\tau(n)}.$$

Упорядочим в каждом слагаемом сомножители по верхним индексам.

Сравните:

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n)\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \tau^{-1}(1) & \tau^{-1}(2) & \dots & \tau^{-1}(n)\end{pmatrix}=\tau^{-1}.$$

Тогда

$$\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\,a_1^{\tau(1)}a_2^{\tau(2)}\dots a_n^{\tau(n)}=$$

$$=\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\,a^1_{\tau^{-1}(1)}a^2_{\tau^{-1}(2)}\dots a^n_{\tau^{-1}(n)} \overset{\text{сл. } 25.?}{=\!=\!=}$$

$$=\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau^{-1})\,a^1_{\tau^{-1}(1)}a^2_{\tau^{-1}(2)}\dots a^n_{\tau^{-1}(n)}.$$

Введя замену $\varphi=\tau^{-1}$, на основании следствия 23.2 суммирование по τ можно заменить суммированием по $\varphi=\tau^{-1}$, тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\sum_{\varphi\in S_n}(\operatorname{sign}\varphi)\,a^1_{\varphi(1)}a^2_{\varphi(2)}\dots a^n_{\varphi(n)}\overset{?}{=}\det A. \qquad \blacksquare$$

Следствие 27.1. *Всякое общее свойство, доказанное для строк определителя, истинно и для его столбцов, и наоборот.* Так как транспонированием матрицы, которое сохраняет определитель, одна из этих задач сводима к другой.

Свойство 27.3. *Общий множитель всех элементов строки (столбца) матрицы можно вынести за знак определителя матрицы.*

Задача 27.1.1. Докажите свойство 27.3.

Доказательство. Пусть $\{A,\ B\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$.

1. $A=\|A^i\|$ и $B=\|B^i\|$ отличаются одной строкой,

$$B^i=\left\{\begin{array}{ll} A^i & \text{при } i\neq k\Leftrightarrow(b^i_s=a^i_s \mid i\neq k)\\ \lambda A^k & \text{при } i=k\Leftrightarrow b^k_s=\lambda a^k_s\end{array}\right\}. \qquad (27.*)$$

$\{i,\ k,\ s\}\subset\{1,\ 2\ \dots\ n\}$, причем k фиксировано.

Тогда в разложении

$$\det B \overset{\text{опр. 26.1}}{=\!=\!=} \sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\, b^1_{\tau(1)}\ \dots\ b^1_{\tau(k-1)}\ \boxed{b^k_{\tau(k)}}\ b^1_{\tau(k+1)}\ \dots\ b^n_{\tau(n)} =$$

заменим элементы матрицы B на соответствующие элементы матрицы A:

$$\overset{(27.*)}{=\!=\!=} \sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)}\ \dots\ a^1_{\tau(k-1)}\ \boxed{\ ?\ }\ a^1_{\tau(k+1)}\ \dots\ a^n_{\tau(n)} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} ? \sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)}\ \dots\ a^n_{\tau(n)} \overset{?}{=} \lambda \det A.$$

2. Если $A=\|A_i\|$ и $B=\|B_i\|$ отличаются одним столбцом:

$$B_i'=\left\{\begin{array}{ll} A_i & \text{при } i\neq k\Leftrightarrow(b^s_i=a^s_i \mid i\neq k)\\ \lambda A_k & \text{при } i=k\Leftrightarrow b^s_k=\lambda a^s_k\end{array}\right\}. \qquad (27.**)$$

$\{i,\ k,\ s\}\subset\{1,\ 2\ \dots\ n\}$.

Тогда $\det B \overset{\text{св. 27.?}}{=\!=\!=} \det B^{\text{т}} \overset{?}{=} \lambda \det A^{\text{т}} \overset{?}{=} \lambda \det A$. ■

Следствие 27.2. *Для любого* $A\in \boldsymbol{gl}(n)$

$$\det\lambda A=\lambda^n \det A \qquad (27.2)$$

Свойство 27.4. *При перестановке двух строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный при неизменной абсолютной величине.*

Задача 27.1.3. Докажите свойство 27.4.

Доказательство. Пусть $\{A,\ B\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$.

1. $A=\|A^i\|$ и $B=\|B^i\|$ отличаются перестановкой двух строк, т. е.

$$B^k=\left\{\begin{array}{l} A^k \text{ при } k\notin\{i,\ j\} \Longleftrightarrow (b^k_s=a^k_s \mid i\neq j)\\ \left.\begin{array}{l} A^j \text{ при } k=j\\ A^i \text{ при } k=i\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} B^i=A^j\\ B^j=A^i\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Leftrightarrow\ b^i_s=a^j_s\\ \Leftrightarrow\ b^j_s=a^i_s\end{array}\end{array}\right.$$

$\{i,\ j,\ k,\ s\}\subset\{1,\ 2,\ \dots\ n\}$, причем, i и j фиксированы, а k и s принимают все целые значения от 1 до n.

Напомним, что

$$\det A \overset{(26.1)}{=\!=} \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{a^i_{\tau(i)}} \ldots \boxed{a^j_{\tau(j)}} \ldots a^n_{\tau(n)} \qquad (27,\#)$$

с подстановками индексов в каждом сомножителе вида:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \boxed{\begin{matrix} i \\ \tau(i)\end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} j \\ \tau(j)\end{matrix}} & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & & \ldots & & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix} \in S_n.$$

В разложении определителя матрицы B

$$\det B \overset{(26.1)}{=\!=} \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, b^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{b^i_{\tau(i)}} \ldots \boxed{b^j_{\tau(j)}} \ldots b^n_{\tau(n)} =$$

заменим все элементы матрицы B на соответетствующие элементы матрицы A:

$$= \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{a^j_{\tau(i)}} \ldots \boxed{a^i_{\tau(j)}} \ldots a^n_{\tau(n)} =$$

упорядочим сомножители во всех слагаемых по верхним индексам:

$$= \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{a^i_{\tau(j)}} \ldots \boxed{a^j_{\tau(i)}} \ldots a^n_{\tau(n)}.$$

В каждом слагаемом — произведения элементов матрицы A, индексы которых образуют подстановки вида:

$$\tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \boxed{\begin{matrix} i \\ \tau(j)\end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} j \\ \tau(i)\end{matrix}} & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & & \ldots & & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \boxed{\begin{matrix} i \\ \tau(i)\end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} j \\ \tau(j)\end{matrix}} & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & & \ldots & & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \boxed{\begin{matrix} i \\ j\end{matrix}} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} j \\ i\end{matrix}} & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & & \ldots & & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix} = \tau\circ\tau_{ij},$$

т. е.

$$\det B = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{a^i_{\tau(j)}} \ldots \boxed{a^j_{\tau(i)}} \ldots a^n_{\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau'(1)} \ldots \boxed{a^i_{\tau'(i)}} \ldots \boxed{a^j_{\tau'(j)}} \ldots a^n_{\tau'(n)}, \qquad (27,\#\#)$$

где $\tau' = \tau\circ\tau_{ij}$ и $\tau \overset{?}{=} \tau'\circ(\tau_{ij})^{-1} \overset{?}{=} \tau'\circ\tau_{ij}$.

Суммирование по τ можем заменить суммированием по τ', при этом по следствию 23.1 τ' также будет пробегать все значения S_n, но при этом $\operatorname{sign}\tau \overset{?}{=} -\operatorname{sign}\tau'$.

Т. е. каждое из слагаемых в разложении (27.# #) определителя матрицы B

$$\operatorname{sign}\tau\, a^1_{\tau'(1)} \ldots a^i_{\tau'(i)} \ldots a^j_{\tau'(j)} \ldots a^n_{\tau'(n)}$$

отличается только знаком от соответствующего слагаемого

$$\operatorname{sign}\tau\, a^1_{\tau(1)} \ldots a^i_{\tau(i)} \ldots a^j_{\tau(j)} \ldots a^n_{\tau(n)}$$

в разложении (27.#) определителя матрицы A.

Это означает, что

$$\det B = \sum_{\tau\in S_n} (-\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \ldots \boxed{a^i_{\tau(i)}} \ldots \boxed{a^j_{\tau(j)}} \ldots a^n_{\tau(n)} \overset{?}{=} -\det A$$

2. Если $A = \|A_i\|$ и $B = \|B_i\|$ различаются перестановкой двух столбцов, т. е.

$$B_k = \left\{\begin{array}{l} A_k \text{ при } k \notin \{i, j\} \\ A_j \text{ при } k = j \\ A_i \text{ при } k = i \end{array}\right\}, \ \{i, j, k\} \subset \{1, 2 \ldots n\},$$

то $\det B \overset{?}{=} \det B^{\mathrm{T}} \overset{?}{=} -\det A^{\mathrm{T}} \overset{?}{=} -\det A$. ■

Следствие 27.3. *Если матрица* $A \in \mathbf{gl}(n)$ *имеет две строки (столбца) равными, то* $\det A \overset{?}{=} 0$. ◆

Следствие 27.4. *Если матрица* $A \in \mathbf{gl}(n)$ *имеет две строки (столбца) пропорциональными, то* $\det A \overset{?}{=} 0$. ◆

Свойство 27.5. *Если матрицы* $\{A, B, C\} \subset \mathbf{gl}(n)$ *отличаются только одной* k*-ой строкой (или столбцом), причем* $C^k = A^k + B^k$ *(или* $C_k = A_k + B_k$*), то*

$$\det C = \det A + \det B. \tag{27.3}$$

Задача 27.1.2. Докажите свойство 27.5.

Доказательство. Пусть $\{A, B, C\} \subset \mathbf{gl}(n)$

1. $A = \|A^i\|$, $B = \|B^i\|$, $C = \|C^i\|$ отличаются одной строкой, т. е.

$$\left\{\begin{array}{ll} A^i = B^i = C^i \text{ при } i \neq k & \Leftrightarrow (a^i_j = b^i_j = c^i_j \mid i \neq j) \\ C^k = A^k + B^k & \Leftrightarrow c^k_j = a^k_j + b^k_j \end{array}\right\}, \qquad (27.\#\overset{\#}{}\#)$$

$\{i, j, k\} \subset 1, 2 \ldots n\}$, где k фиксировано.

Выпишем разложения определителей всех трех матриц: A, B, C и заменим их элементы в соответствии с условием (27.#$\overset{\#}{}$#):

$$\det A = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \dots \boxed{a^k_{\tau(k)}} \dots a^n_{\tau(n)} \overset{(27.\#\overset{\#}{\#})}{=\!=\!=} $$

$$= \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{a^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)}, \qquad (27.a)$$

$$\det B = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, b^1_{\tau(1)} \dots \boxed{b^k_{\tau(k)}} \dots b^n_{\tau(n)} \overset{(27.\#\overset{\#}{\#})}{=\!=\!=} $$

$$= \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{b^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)}, \qquad (27.b)$$

$$\det C = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{c^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)} \overset{(27.\#\overset{\#}{\#})}{=\!=\!=} $$

$$= \sum_{\tau\in S} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{(a^k_{\tau(k)} + b^k_{\tau(k)})} \dots c^n_{\tau(n)} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{\tau\in S} (\operatorname{sign}\tau) \left(c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{a^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)} + c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{b^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)}\right) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{a^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)} +$$

$$+ \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, c^1_{\tau(1)} \dots \boxed{b^k_{\tau(k)}} \dots c^n_{\tau(n)}.$$

Вернемся к обозначениям элементов матриц $A = \|a^i_j\|$ и $B = \|b^i_j\|$, тогда

$$\det C \overset{?}{=} \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau(1)} \dots \boxed{a^k_{\tau(k)}} \dots a^n_{\tau(n)} +$$

$$+ \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, b^1_{\tau(1)} \dots \boxed{b^k_{\tau(k)}} \dots b^n_{\tau(n)} \overset{(27.a),(27.b)}{=\!=\!=\!=\!=} \det A + \det B.$$

2. Если же матрицы отличаются столбцом: $A_k = B_k + C_k$, то $\det C \overset{?}{=} \det C^{\mathsf{T}} = \det (A+B)^{\mathsf{T}} \overset{?}{=} \det A^{\mathsf{T}} + \det B^{\mathsf{T}} \overset{?}{=} \det A + \det B$. ■

Следствие 27.5. *Если матрица $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ имеет строку (столбец), равную сумме двух других его строк (столбцов) (т. е. $A^k = A^i + A^j$ или $A_k = A_i + A_j$ при некоторых $\{i, j, k\} \subset P(n)$), то ее определитель равен нулю.*

Например, $\det A = |a_i^s| = |A^s| =$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ \boxed{A^i + A^j} \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{св. } 27.5}{=\!=\!=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ \boxed{A^i} \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ \boxed{A^j} \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \overset{\text{сл. } 27.3}{=\!=\!=} 0 + 0 = 0,$$

как определители, имеющие по две равных строки.

Доказательство для случая столбцов аналогично. □

Последние свойства и их следствия можно обобщить, введя новое понятие:

Определение 27.1. ***Линейной комбинацией строк*** $\{A^k\}$ *матрицы* $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ *называется выражение вида* $\alpha_k A^k = \sum \alpha_k A^k$, *где* $\alpha_k \in \mathbf{R}$, *и соответственно,* $\alpha^k A_k = \sum \alpha^k A_k$ — ***линейная комбинация столбцов*** $\{A_k\}$ *матрицы* A *с коэффициентами* $\alpha^k \in \mathbf{R}$, $k \in \{1, 2, \dots n\}$.

Если хотя бы одна строка (или столбец) матрицы является линейной комбинацией остальных ее строк (столбцов), то говорят, что ***строки (столбцы) матрицы линейно зависимы****.*

Тогда следствия 27.3—27.5 объединяются в одно свойство.

Свойство 27.6. *Если строки или столбцы матрицы линейно зависимы, то она вырождена.*

Следствие 27.6. *Определитель матрицы не изменится, если одну из его строк (столбцов) заменить на ее сумму с другой строкой (столбцом).*

Задача 27.2.1. Докажите следствие 27.6.

Доказательство. $A = \|A^i\| = \|A_i\| \in \boldsymbol{gl}(n)$.

1. Пусть матрица A' такова, что

$$(A')^i = \begin{cases} A^i & \text{при } i \neq k \\ A^k + A^j & \text{при } i = k \end{cases}, \quad \{i, j, k\} \subset \{1, 2 \dots n\},$$

т. е. ее некоторая (k-ая) строка равна сумме определенных строк матрицы A: k-ой и j-ой.

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k + A^j} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \overset{\text{св. 27.?}}{=\!=\!=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^j} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \overset{?}{=}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + 0 = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^k \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = |A^i| = \det A.$$

2. Случай столбцов рассматривается аналогично. □

Следствие 27.7. *Определитель матрицы не изменится, если одну из его строк (столбцов) заменить на ее сумму с другой строкой (столбцом), помноженной на некоторое число.*

Доказательство. $A = \|A^i\| = \|A_i\| \in \boldsymbol{gl}(n)$.

1. Пусть матрица A' такова, что

$$(A')^i = \left\{ \begin{matrix} A^i & \text{при } i \neq k \\ A^k + \lambda A^j & \text{при } i = k \end{matrix} \right\}, \ \{i, j, k\} \subset \{1, 2, \dots n\},$$

т. е. ее k-ая строка равна сумме k-ой строки матрицы A с произведением числа λ на ее j-ую строку.

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k + \lambda A^j} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \xlongequal{\text{св. 27.?}} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{\lambda A^j} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^j} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \xlongequal{\text{сл. 27.?}} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \lambda\ 0 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ \boxed{A^k} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = |A^i| = \det A.$$

2. В случае столбцов доказательство можно провести аналогично или свести к предыдущему транспонированием матрицы. □

Очевидно и (см. следствия 27.6, 27.7)

Следствие 27.8. *Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо ее строке (столбцу) прибавить любую линейную комбинацию других ее строк (столбцов).*

Определение 27.2. *Говорят, что матрица B получена из матрицы A **элементарными преобразованиями**, если эти матрицы отличаются только одной строкой (или столбцом), причем эта строка B^k (столбец B_k) такова, что*

$$B^k = a^k + \lambda_i A^i \text{ или } B_k = A_k + \lambda^i A_i,\ i \neq k$$

(по i суммирование от 1 до n, если $\{A, B\} \in \mathbf{gl}(n)$).

Так что следствие 27.8 можно переформулировать иначе.

Следствие 27.8′. *Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не меняют ее определителя.*

Чтобы установить еще один легко вычисляемый вид определителей, рассмотрим пример.

Пример 27.1. Найдем определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 46 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = ?,\quad \begin{vmatrix} 5 & 46 & 11 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = ?,\quad \begin{vmatrix} 5 & 46 & 11 & 64 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = ?.$$

Их вычисления позволяют высказать предположение:

Свойство 27.7. *Определитель треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.*

Доказательство. Пусть $A = \| a^i_j \| \in \mathbf{gl}(n) \mid a^i_j = 0$ при $i > j$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \dots & a^1_n \\ 0 & a^2_2 & a^2_3 & \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . & 0\ a^n_n \end{vmatrix} \overset{(26.1)}{=\!=}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sign} \tau)\, a^1_{\tau(1)} a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)} \overset{?}{=}$$

$$= a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n + \sum_{(\tau \in S_n,\ \tau \neq e)} (\operatorname{sign} \tau)\, a^1_{\tau(1)} a^2_{\tau(2)} \dots a^n_{\tau(n)} = \qquad (27.\tau)$$

$$= a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n + 0 = a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n.$$

Поскольку по лемме 23.1 всякая нетождественная подстановка $\tau \in S_n$ имеет хотя бы один элемент $i \in P(n)$ такой, что

$\tau(i)<i$, то значит, слагаемые в разложении (27.τ) с нетождественными подстановками индексов содержат хотя бы один сомножитель $a^{i}_{\tau(i)}=0$, как элемент треугольной матрицы, стоящий ниже ее главной диагонали, и значит, равны 0. ■

Следствие 27.9. *Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, а единичной — единице.*

Из свойств определителей вытекает тактика действий при вычислениях сложных определителей любого (достаточно высокого) порядка — приведение его матрицы к треугольному (ступенчатому) виду ее элементарными преобразованиями.

§ 28. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПРИВЕДЕНИЕМ ЕГО МАТРИЦЫ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

Продемонстрируем на примере, как применяя свойства определителей, вычислять их сведением к более простым: треугольным, с нулевой или пропорциональными строками (столбцами). Привести матрицу определителя к треугольному виду означает, заменяя последовательно ее строки (или столбцы) на их линейные комбинации с другими строками (столбцами), т. е. не меняя ее определителя (следствия 27.6—27.8), получить элементы, стоящие ниже диагонали, равными 0. Матрица к такому виду, конечно, приводится не единственным способом, однако, значение самого определителя не зависит от этого способа.

Пример 28.1. Вычислим определитель:

5

$$\begin{vmatrix} 5 & 25 & 0 & 5 \\ 1 & -12 & 30 & 3 \\ 7 & 15 & 240 & 9 \\ 3 & -3 & 12 & 5 \end{vmatrix} =$$

6

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -12 & 30 & 3 \\ 7 & 15 & 240 & 9 \\ 3 & -3 & 12 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -12 & 5 & 1 \\ 7 & 15 & 40 & 9 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

вынесли за знак определителя общий множитель строки, столбца

св. 27.3

$$\xlongequal{(2)-(1)} 30 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\1&-12&5&3\\7&15&40&9\\3&-3&2&5\end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\7&15&40&9\\3&-3&2&5\end{vmatrix} =$$

из второй строки вычли первую строку

сл. 27.7

$$\xlongequal{(3)-7(1)} 30 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-20&40&2\\3&-3&2&5\end{vmatrix} \xlongequal{(4)-3(1)} 30 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-20&40&2\\0&-18&2&2\end{vmatrix} =$$

сложение строки определителя с его другой строкой, домноженной на некоторое число, определитель не меняет

сл. 27.7

Таким образом получили нулевыми элементы первого столбца, стоящие ниже диагонали.

Упростим определитель, заметив, что из его последних строк можно вынести за знак определителя по множителю:

$$= 30 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-20&40&2\\0&-18&2&2\end{vmatrix} \xlongequal[\substack{2\\2}]{\text{св. } 27.3} 2\cdot 2\cdot 30 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-10&20&1\\0&-9&1&1\end{vmatrix} =$$

$$= 120 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-10&20&1\\0&-9&1&1\end{vmatrix} =$$

Теперь можем преобразовать к треугольному виду матрицу третьего порядка, (стоящую в правом нижнем углу), приводя элементы следующего (второго) столбца, стоящие ниже диагонали, к нулевым значениям. В этом случае удобнее преобразовывать столбцы:

$$= 120 \begin{vmatrix}1&5&0&1\\0&-17&5&2\\0&-10&20&1\\0&-9&1&1\end{vmatrix} \xlongequal[\text{св. } 27.7]{[2]+9[4]} 120 \begin{vmatrix}1&14&0&1\\0&1&5&2\\0&-1&20&1\\0&0&1&1\end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)+(2)}{=\!=\!=} 120 \begin{vmatrix} 1 & 14 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 25 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Обозначения. $\overset{(4)-3(1)}{=\!=\!=\!=}$ — запись преобразований строк определителя, а $\overset{|2|+9|4|}{=\!=\!=\!=}$ — преобразований столбцов определителя.

Остается преобразовывать матрицу второго порядка, стоящую в правом нижнем углу, получив последний элемент, стоящий ниже диагонали, равным 0.

$$= 120 \begin{vmatrix} 1 & 14 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 25 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{|3|-|4|}{=\!=\!=} 120 \begin{vmatrix} 1 & 14 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{св. 27.?}}{=\!=\!=\!=} 120 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 1 = 2640.$$

Замечание 28.1. Очевидно, что поступая аналогично, мы матрицу любого определителя сможем привести к треугольному виду. Если она невырождена, то все ее диагональные элементы ненулевые, а если вырождена, то по крайней мере ее последний диагональный элемент равен 0.

При этом выделяются два вида преобразований строк и столбцов матрицы:

Определение 28.1. *Если в матрице строка (столбец) заменяются на ее произведение на ненулевой скаляр λ, то говорят об* ***элементарном преобразовании матрицы первого рода,*** *если же строка (столбец) заменяются на ее сумму с другой ее строкой (столбцом), домноженной на некоторый скаляр, то говорят об* ***элементарном преобразовании матрицы второго рода. Преобразование матрицы****, полученное последовательным выполнением некоторого числа элементарных преобразований первого и второго рода строк (столбцов) называют* ***элементарными.***

По свойству 27.3 при элементарном преобразовании первого рода определитель домножается на скаляр λ, а по следствию 27.7 элементарное преобразование матрицы второго рода сохраняет определитель.

Элементарным преобразованием матрицы является, в частности, и перемена местами двух ее строк (столбцов), при этом очевидно, что в силу свойства 27.4 определитель не изменится по абсолютной величине, но изменит знак на противоположный.

Задание 28.1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 25 & 0 & 5 \\ 1 & -12 & 30 & 4 \\ 7 & 15 & 240 & 19 \\ 4 & 3 & 30 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

§ 29. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МИНОР И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Еще один удобный способ нахождения определителей состоит в понижении порядков определителей, которые непосредственно вычисляются. Например, вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению нескольких определителей второго, а чтобы этим методом найти определитель четвертого порядка, потребуется вычислять определители третьего и т. д. Иногда таким способом, его называют рекуррентным, вводится само понятие определителя («recurrentis» (лат.) — возвращающийся).

Чтобы изложить этот метод вычислений, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Определение 29.1. ***Минором матрицы*** $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, ***порядка*** k $(1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\})$ *называется всякий определитель матрицы порядка k, полученной из матрицы A вычеркиванием произвольных $m-k$ строк и $n-k$ столбцов.*

Обозначение такого минора: $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, где $i_1, i_2, \ldots i_k$ — номера строк минора в матрице A, а $j_1, j_2, \ldots j_k$ — номера его столбцов.

Определение 29.2. ***Главным минором k-го порядка матрицы*** *A называется его минор вида $A^{12\ldots k}_{12\ldots k}$, где $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$.*

Такой минор состоит из первых k строк и k столбцов матрицы.

Пример 29.1. Миноры второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{23}_{35} = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -62.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{12}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -? \text{ — главный минор второго порядка}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{23}_{23} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 25.$$

Примеры миноров третьего порядка той же матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{123}_{234} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{123}_{235} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = ?.$$

Определение 29.3. ***Дополнительным минором элемента*** a^i_j *квадратной матрицы* $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{gl}(n)$ *называется минор порядка* $n-1$, *полученный вычеркиванием* i-ой строки и j-го столбца матрицы A.

Обозначается дополнительный минор к элементу a^i_j так: M^j_i.

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_j & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_j & \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a^i_1 & a^i_2 & \dots & a^i_j & \dots & a^i_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_j & \dots & a^n_n \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & \dots & a^n_n \end{vmatrix} = M^j_i.$$

Обратите внимание: элемент обозначен $a\boxed{\substack{i \\ j}}$, а его дополнительный минор $M\boxed{\substack{j \\ i}}$.

Определение 29.4. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a^i_j *называется число* $(-1)^{i+j} M^j_i$.

Обозначается алгебраическое дополнение элемента a^i_j так: $A^j_i = (-1)^{i+j} M^j_i$.

Пример 29.2.1. Вычислим дополнительные миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$M^1_1 = ?, \quad A^1_1 = ?, \quad M^2_1 = -5, \quad A^2_1 = 5,$$
$$M^1_2 = ?, \quad A^1_2 = ?, \quad M^2_2 = 1, \quad A^2_2 = 1.$$

2. Вычислим выражения:

$a_1^1A_1^1+a_2^1A_1^2=1\cdot3+2\cdot5=13$, $\quad a_2^1A_1^2+a_2^2A_2^2=2\cdot5+3\cdot1=13$,

$a_1^2A_2^1+a_2^2A_2^2=?$, $\quad a_1^1A_2^1+a_2^1A_2^2=1\cdot2+2\cdot(-1)=0$,

$a_1^1A_1^1+a_1^2A_2^1=?$, $\quad a_1^2A_1^1+a_2^2A_1^2=-5\cdot3+3\cdot5=0$,

$a_1^1A_1^2+a_1^2A_2^2=1\cdot?+(-5)\cdot?=?$

$a_2^1A_1^1+a_2^2A_2^1=2\cdot3+3\cdot(-2)=0.$

3. $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\-5&3\end{vmatrix}=1\cdot3-2\cdot(-5)=13.$

Задача 29.1.1. Для матрицы $\begin{pmatrix}1&2&2\\-5&3&3\\1&0&4\end{pmatrix}$.

1. Вычислите дополнительные миноры и алгебраические дополнения элементов:

$M_1^1=?$, $\quad M_1^2=?$, $\quad M_1^3=?$, $\quad A_1^1=?$, $\quad A_1^2=?$, $\quad A_1^3=?$,
$M_2^1=?$, $\quad M_2^2=?$, $\quad M_2^3=-2$, $\quad A_2^1=?$, $\quad A_2^2=?$, $\quad A_2^3=2$,
$M_3^1=0$, $\quad M_3^2=13$, $\quad M_2^3=13$. $\quad A_3^1=0$, $\quad A_3^2=-13$, $\quad A_3^3=13$.

2. Вычислите значения выражений:

$$a_1^1A_1^1+a_2^1A_1^2+a_3^1A_1^3=?,$$
$$a_1^2A_2^1+a_2^2A_2^2+a_3^2A_2^3=?,$$
$$a_1^1A_1^1+a_1^2A_2^1+a_1^3A_3^1=?.$$

3. Вычислите определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&2\\-5&3&3\\1&0&4\end{vmatrix}=?.$$

Предыдущие вычисления позволяют заметить удивительную особенность: в одних комбинациях элементов и алгебраических дополнений получали определитель матрицы, в других — 0. Эти закономерности в общем случае и составляют содержание теорем о разложении и ложном разложении.

Теореме о разложении определителя предпошлем лемму.

Лемма 29.1. *Если все элементы последней строки (столбца) определителя матрицы A, кроме, быть может, последнего, равны* 0, *то* $\det A=a_n^nM_n^n=a_n^nA_n^n$.

Задача 29.1.2. Докажите лемму 29.1.

Доказательство. Пусть все элементы последней строки равны 0, кроме a_n^n.

$$\det A=\det\|a_j^i\|\xlongequal{\text{опр. 26.1}}\sum_{\tau\in S_n}(\operatorname{sign}\tau)\,a^1_{\tau(1)}a^2_{\tau(2)}\,\ldots\,a^n_{\tau(n)}.$$

Разобьем слагаемые на две группы: в первую отнесем все те из них, которые имеют подстановки индексов вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \ldots & \tau(n-1) & n \end{pmatrix},$$

т. е. такие, что $\tau(n)=n$, а во вторую — все остальные. Тогда

$$\det A \overset{?}{=} \sum_{\tau\in S_{n-1}} (\operatorname{sign}\tau)\, a^1_{\tau'(1)} a^2_{\tau'(2)} \ldots a^n_{\tau'(n-1)} a^n_n + 0 \overset{?}{=}$$

(здесь τ' — подстановка множества $P(n-1)=\{1, 2, \ldots n-1\}$)

$$\overset{?}{=} \left(\sum_{\tau\in S_{n-1}} (\operatorname{sign}\tau')\, a^1_{\tau'(1)} a^2_{\tau'(2)} \ldots a^n_{\tau'(n-1)} \right) a^n_n \overset{?}{=} M^n_n a^n_n \overset{?}{=} A^n_n a^n_n.$$

Для столбца доказательство аналогично. ■

Следствие 29.1. *Если все элементы какой-либо строки A^i или столбца A_j матрицы A равны нулю, кроме, быть может, a^i_j, то* $\det A = a^i_j A^j_i = (-1)^{i+j} a^i_j M^j_i$.

Доказательство. 1. Рассмотрим «случай строки». Пусть $A=|A^s| \in \boldsymbol{gl}(n)$ и строка A^i имеет только один ненулевой элемент a^i_j.

Чтобы можно было воспользоваться предыдущей леммой, надо преобразовать $\det A = |a^s_k|$ к виду:

$$\left|\begin{array}{c:c} * & * \\ \hdashline 0\ 0\ \ldots\ 0 & a^i_j \end{array}\right|,$$

т. е. «передвинуть» строку A_i и столбец A_j на последние места.

$$\det A = |A| = \left|\begin{array}{ccc:c:cc} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_j & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_j & \ldots & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a^{i-1}_1 & a^{i-1}_2 & \ldots & a^{i-1}_j & \ldots & a^{i-1}_n \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots 0 & a^i_j & 0 \ldots & 0 \\ \hdashline a^{i+1}_1 & a^{i+1}_2 & \ldots & a^{i+1}_j & \ldots & a^{i+1}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_j & \ldots & a^n_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A^1 \\ A^2 \\ \ldots \\ A^{i-1} \\ \hdashline \boxed{A^i} \\ \hdashline A^{i+1} \\ \ldots \\ A^n \end{array}\right|.$$

? ? ?

Если переставить сразу строки A^i и A^n, то порядок строк после этого будет существенно отличен от их порядка в миноре

M^i_j. Поэтому будем перестановки делать последовательно: A^i с A^{i+1}, затем с A^{i+2} и т. д. По окончанию всех таких перестановок получим тот же порядок строк, что в миноре M^i_j. Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ \boxed{A^i} \\ A^{i+1} \\ \vdots \\ A^{n-1} \\ A^n \end{vmatrix} \overset{\text{св. 27.4}}{=\!=}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ A^{i+1} \\ \boxed{A^i} \\ \vdots \\ A^{n-1} \\ A^n \end{vmatrix} \overset{?}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ A^{i+1} \\ A^{i+2} \\ \boxed{A^i} \\ \vdots \\ A^n \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_j^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_j^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_j^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n \\ 0 & 0 & \dots 0 & \underbrace{a_j^i}_{?} & 0 \dots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{со столбцами матрицы}]{\text{поступим аналогично}}$$

$$\overset{?}{=}(-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & \dots & a_n^1 & a_j^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & \dots & a_n^2 & a_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & \dots & a_n^{i-1} & a_j^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & \dots & a_n^{i+1} & a_j^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & \dots & a_n^n & a_j^n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_j^i \end{vmatrix} =$$

$$\overset{?}{=}(-1)^{(n-i)+(n-j)}a_j^i\,\tilde{M}_n^n \overset{?}{=} a_j^i\,(-1)^{i+j}M_i^j = a_j^i\,A_i^j.$$

(здесь $\tilde{M}_n^n$ — дополнительный минор последнего элемента последней строки, полученной в результате преобразований матрицы).

2. «Случай столбца» сводится к предыдущему транспонированием матрицы. □

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы лекции:

Теорема 29.1 (о разложении). *Определитель матрицы равен сумме произведений всех элементов любой ее строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_i^k A_k^i = \sum_{i=1}^{n} a_k^i A_i^k \tag{29.1}$$

для любых $\langle A,\ k\rangle \in \boldsymbol{gl}(n) \times P(n)$.

В тензорной символике условие (29.1) записывается короче:

$$\det A = a_i^k A_k^i = a_k^i A_i^k$$

Доказательство проведем для разложения по строке, для случая столбца оно аналогично.

1. Строку A^k матрицы $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ представим суммой строк вида:

$$A^k = (a_1^k\ \ a_2^k \dots a_n^k) = (a_1^k\ \ 0 \dots 0) + (0\ \ a_2^k \dots 0) + \dots + (0\ \ 0..0\ \ a_n^k).$$

2. $\det A$ по свойству 27.? представим в виде суммы определителей:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_j^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_j^k & \dots & a_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \dots a_j^1 \dots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_j^2 \dots a_n^2 \\ \dots & \dots \\ a_1^k & 0 \dots 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n \dots a_j^n \dots a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \dots a_j^1 \dots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_j^2 \dots a_n^2 \\ \dots & \dots \\ 0 & a_2^k \ 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n \dots a_j^n \dots a_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \dots a_j^1 \dots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_j^2 \dots a_n^2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \dots a_n^k \\ \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n \dots a_j^n \dots a_n^n \end{vmatrix}.$$

3. Каждое из слагаемых предыдущей суммы — определитель, равный согласно следствию 29.1 произведению ненулевого элемента его соответствующей (выделенной) строки на его алгебраическое дополнение, следовательно:

$$\det A = a_1^k A_k^1 + a_2^k A_k^2 + \dots + a_n^k A_k^n$$

для любого $k \in \{1, 2, \dots n\}$.

4. При аналогичном разложении по столбцу получим:

$$\det A = a_k^1 A_1^k + a_k^2 A_2^k + \dots + a_k^n A_n^k. \quad \blacksquare$$

Задание 29.1. Вычислите определитель, разлагая его по строке или столбцу, подумайте, какую строку или столбец для такого разложения удобнее взять?

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Замечание 29.1*. Теорема 29.1 — частный случай теоремы *Лапласа о разложении определителя*, для ее формулировки потребуется понятие дополнительного минора к минору матрицы и его алгебраического дополнения:

Определение 29.5. ***Дополнительным минором минора*** $A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ *порядка k квадратной матрицы $A = \|a_j^i\| \in$* $\boldsymbol{gl}(n)$ *называется минор порядка $n-k$, полученный вычеркиванием из матрицы строк и столбцов минора $A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$.*

Обозначается дополнительный минор следующим образом: $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$

Если дополнительный к минору $A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ минор домножить на $(-1)^{i_1+j_1+i_2+j_2+\dots+i_k+j_k}$, то будем иметь ***алгебраическое дополнение к минору*** $A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$.

Обозначается алгебраическое дополнение минора: $\tilde{A}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$.

Таким образом,

$$\tilde{A}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i_1+j_1+i_2+j_2+\dots+i_k+j_k} M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$$

Теорема 29.2 (Лапласа).

$$\det A = \sum A_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} \tilde{A}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}, \tag{29.2}$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$, а суммирование ведется по всем кортежам $\langle i_1, i_2, \dots i_k \rangle$ длины k с фиксированным кортежем номеров столбцов: $\langle j_1, j_2, \dots j_k \rangle$, или по всем кортежам $\langle j_1, j_2, \dots j_k \rangle$ с фиксированным кортежем номеров строк: $\langle i_1, i_2, \dots i_k \rangle$. Причем их элементы упорядочены по возрастанию.

Доказательство этой теоремы довольно сложно и объемно, поэтому в настоящем курсе оно не приводится.

Так, раскладывая определитель четвертого порядка «по вертикали» по минорам второго порядка, мы должны фиксировать два столбца, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dot{2} & 3 & \dot{4} \\ 5 & \dot{6} & 7 & \dot{8} \\ 0 & \dot{0} & 1 & \dot{0} \\ 3 & \dot{4} & 5 & \dot{6} \end{vmatrix}, \text{ затем, вычеркнув их: } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix},$$

составить все возможные миноры второго порядка:

$$A_{24}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{24}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{24}^{14} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{24}^{23} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{24}^{24} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{24}^{34} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Затем надо составить все их дополнительные миноры, для этого вычеркиваем поочередно по две строки в вычеркнутых столбцах.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \dot{6} & \dot{8} \\ \dot{0} & \dot{0} \\ \dot{4} & \dot{6} \end{vmatrix}$$

и вычисляем определители:

$$M_{12}^{24} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13}^{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 4, \quad M_{14}^{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{23}^{24} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{24}^{24} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{34}^{24} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8.$$

Находим алгебраические дополнения, домножая на -1 в соответствующей степени:

$$\tilde{A}^{24}_{12} = (-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -0 = 0,$$

$$\tilde{A}^{24}_{13} = (-1)^{2+4+1+3}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\tilde{A}^{24}_{14} = (-1)^{2+4+1+4}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -0 = 0.$$

$$\tilde{A}^{24}_{23} = (-1)^{2+4+2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\tilde{A}^{24}_{24} = (-1)^{2+4+2+4}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{A}^{24}_{34} = (-1)^{2+4+3+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8,$$

Теперь согласно теореме Лапласа можно записать:

$$\det A = A^{12}_{24}\tilde{A}^{24}_{12} + A^{13}_{24}\tilde{A}^{24}_{13} + A^{14}_{24}\tilde{A}^{24}_{14} + A^{23}_{24}\tilde{A}^{24}_{23} + A^{24}_{24}\tilde{A}^{24}_{24} + A^{34}_{24}\tilde{A}^{24}_{34} =$$
$$= (-8)\cdot 0 + 1\cdot 4 + (-4)\cdot 0 + 5\cdot 4 + 4\cdot 0 + (-3)\cdot 8 = 0.$$

Несложно, вычислив этот определитель другим способом, например, разложением по третьей строке или приведением его матрицы к треугольному виду, убедиться в его равенстве 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисления определителей общего вида довольно сложны, такие разложения с применением формулы (29.2) (теоремы Лапласа) полезнее применять в тех случаях, когда определитель имеет много нулей, например, целый блок, и они удобно расположены.

С л е д с т в и е 29.2. Если матрица C такова, что:

$$C = \begin{array}{|c|c|} \hline A & * \\ \hline O & B \\ \hline \end{array},$$

где $A \in \boldsymbol{gl}(m)$, $B \in \boldsymbol{gl}(n)$, $C \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, то $\det C = \det A \cdot \det B$.

Т е о р е м а 29.3 (о ложном разложении).

$$\sum_{i=1}^{n} a^j_i A^i_k = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a^i_j A^k_i = 0 \tag{29.3}$$

при любых $\{j, k\} \subset P(n)$ *для* $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{gl}(n)$.

Т. е. сумма произведений всех элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Аналогично теореме 29.1 в тензорной символике ее условия выражаются так

$$a_i^j A_k^i = 0 \quad \text{и} \quad a_j^i A_i^k = 0 \tag{29.4}$$

Доказательство. 1. Для матрицы $A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{gl}(n)$ рассмотрим выражение:

$$a_i^j A_k^i = a_1^j A_k^1 + a_2^j A_k^2 + \ldots + a_n^j A_k^n.$$

Оно похоже на разложение определителя по k-ой строке, если предположить, что в нем k-ая строка A^k заменена на A^j, но по следствию 27.3 такой определитель нулевой, как имеющий две равные строки. Действительно:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_1^j & a_2^j & a_3^j & \ldots & a_n^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & a_3^{k-1} & \ldots & a_n^{k-1} \\ a_1^j & a_2^j & a_3^j & \ldots & a_n^j \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & a_3^{k+1} & \ldots & a_n^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^{k-1} \\ \boxed{A^j} \\ \cdots\cdots \\ A^{k+1} \\ \vdots \\ A^n \end{vmatrix} =$$

$$= a_i^j A_k^i = a_1^j A_k^1 + a_2^j A_k^2 + \ldots + a_n^j A_k^n.$$

2. Случай разложения по столбцу:

$$a_j^i A_i^k = a_j^1 A_1^k + a_j^2 A_2^k + \ldots + a_j^n A_n^k = 0$$

доказывается аналогично или транспонированием матрицы сводится к предыдущему. ■

§ 30*. ТЕОРЕМА ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Еще один способ вычисления определителей основан на нахождении определителя произведения матриц по определителям сомножителей. Рассуждения будут опираться на факт, отмеченный в § 28 (замечание 28.1), что любая матрица элементарными преобразованиями приводима к треугольному виду.

Напомним, что через E_j^i обозначается матрица со всеми нулевыми элементами, кроме стоящего на пересечении i-ой строки и j-ого столбца, равного 1.

Полезно еще заметить, что $E^i_j\cdot E^k_s=\delta^k_j E^i_s$ (где δ^k_j — символ Кронекера, значение которого 1 при $k=j$ и 0 при $k\neq j$), т. е. $E^i_j\cdot E^j_s=E^i_s$, но $E^i_j\cdot E^k_s=0$ при $k\neq j$, в частности,

$$E^k_k\cdot E^k_k=E^k_k,\ \text{но}\ E^i_i\cdot E^j_j=0\ \text{при}\ i\neq j. \tag{30.*}$$

Определение 30.1. ***Элементарными*** *называют квадратные* ***матрицы*** *вида* $E+\lambda E^i_j$ с $\lambda\in\mathbf{R}$. *При* $i=j$ *элементарную матрицу называют* ***элементарной матрицей первого рода****, а при* $i\neq j$ — ***второго***.

первого рода

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & k & & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k, \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\|$$

$$E+(\mu-1)\,E^k_k,\ \mu\neq 0,\ i\neq j,$$

второго рода

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & j & & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0\\
0 & 1 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & .. & 1 & .. & 0 & \lambda & 0 & .. & 0 & 0\\
0 & 0 & .. & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0\\
0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i, \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\|$$

$$E+\lambda E^i_j,$$

Очевидно, что элементарные матрицы невырождены и

$$\det\left(E+(\mu-1)\,E^k_k\right)\overset{?}{=}\mu,\ \mu\neq 0,$$

а

$$\det\left(E+\lambda E^i_j\right)\overset{?}{=}1,\ \text{при}\ i\neq j. \tag{30.**}$$

Можно убедиться и в том, что такие матрицы обратимы и

$$\begin{aligned}
&(E+(\mu-1)\,E^k_k)^{-1}=E+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)E^k_k && \text{при}\ \mu\neq 0,\\
&(E+\lambda E^i_j)^{-1}=E-\lambda E^i_j && \text{при}\ i\neq j.
\end{aligned}$$

Задача 30.1.1. Проверьте предыдущие равенства, используя свойства операций в матричной алгебре $\boldsymbol{gl}(n)$ и свойства определителей.

$$(E+(\mu-1)\,E^k_k)\cdot\left(E+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)E^k_k\right)=?\qquad (E+\lambda E^i_j)\cdot(E-\lambda E^i_j)=?$$

$$\det\left(E+(\mu-1)\,E^k_k\right)=?\qquad \det\left(E+\lambda E^i_j\right)=?.$$

Для элементарных матриц и преобразований матриц имеют место леммы, отмечающие их связь:

Лемма 30.1. *Элементарное преобразование матрицы первого рода — умножение ее k-ой строки (столбца) на число* λ *равносильно умножению на эту матрицу слева (справа) матрицы вида* $E+(\lambda-1)\,E^k_k$.

Причем, это утверждение верно, вообще говоря, не только для квадратных матриц: если $A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, то ее преобразования первого рода для строк обеспечиваются домножением слева на A квадратной матрицы $E + (\lambda - 1)\,E_k^k \in \boldsymbol{M}(m)$, а столбцов — домножением справа на A квадратной матрицы того же вида, но порядка n.

В справедливости этой леммы можно убедиться непосредственным вычислением произведений матриц: $(E + (\lambda - 1)\,E_k^k) \cdot A$ и $A \cdot (E + (\lambda - 1)\,E_k^k)$.

Следствие 30.1. *Для* $\{(E + (\lambda - 1)\,E_k^k),\ A\} \subset \boldsymbol{gl}(n)$ и $\lambda \neq 0$ $\det((E + (\lambda - 1)\,E_k^k) \cdot A) \overset{?}{=} \lambda \det A \overset{?}{=} \det(A \cdot (E + (\lambda - 1)\,E_k^k))$. ◆

Лемма 30.2. *Элементарное преобразование матрицы второго рода — сложение ее i-ой строки (i-ого столбца) с j-ой строкой (j-ым столбцом), умноженной на число λ, равносильно умножению на эту матрицу слева (справа) элементарной матрицы второго рода:* $E + \lambda E_j^i$.

Это утверждение тоже верно не только для квадратных матриц: если $A \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, то ее преобразование второго рода обеспечивается домножением слева на A квадратной матрицы $E + \lambda E_j^i \in \boldsymbol{M}(m)$ при изменении строк, а столбцов — домножением справа на A квадратной матрицы $E + \lambda E_j^i \in \boldsymbol{M}(n)$.

Задача 30.1.2. Докажите лемму 30.2 для $A \in \boldsymbol{gl}(n)$.

Доказательство. Пусть $\{(E + \lambda E_j^i),\ A\} \subset \boldsymbol{gl}(n)$ и $i \neq j$.
1. Произведение **слева** элементарной матрицы на данную:
$(E + \lambda E_j^i) \cdot A = E \cdot A + \lambda E_j^i \cdot A =$

$$= A + \lambda \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ ... & & .. & .. & .. & ... & & .. & ... & \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & \lambda & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ ... & & .. & .. & .. & ... & & .. & ... & \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots & a_n^2 \\ .. & .. & \ldots & .. & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^i & a_2^i & \ldots & a_k^i & \ldots & a_n^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & \ldots & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots & a_n^2 \\ .. & .. & \ldots & .. & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^i & a_2^i & \ldots & a_k^i & \ldots & a_n^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & \ldots & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. & .. & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^j & a_2^j & \ldots & a_k^j & \ldots & a_n^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & .. & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = ?. \quad - ?$$

2. А произведение **справа** элементарной матрицы на матрицу A:

$$A\cdot(E+\lambda A_i^j)=A\cdot E+A\cdot\lambda E_i^j=A+A\cdot\lambda E_i^j$$

можно свести к предыдущему, если заметить, что матрица $(A\cdot\lambda E_j^i)^{\mathsf{T}}=\lambda E_i^j A$. ■

Следствие 30.2. *Для* $\{(E+\lambda E_j^i),\ A\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$ *при* $i\neq j$

$$\det((E+\lambda E_j^i)\cdot A)\overset{?}{=}\det A\overset{?}{=}\det(A\cdot(E+\lambda E_i^j)).$$ ◆

Замечание 30.1. Несложно показать, что элементарное преобразование матрицы — перестановка двух строк (столбцов) также представимо в виде нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований первого и второго рода. А именно: перестановку i-й и j-й строк матрицы A можно осуществить следующим образом: прибавим к j-й строке i-ю строку (элементарное преобразование второго рода: домножение слева $E+E_j^i$ на матрицу A), затем вычтем из i-й строки новой матрицы ее j-ю строку (домножение слева матрицы $E-E_i^j$ на предыдущее произведение), в полученной матрице прибавим к j-й строке i-ю (домножение слева матрицы $E+E_j^i$), сменим знак в i-ой строке последней матрицы (элементарное преобразование первого рода: домножение на матрицу $E-2E_i^i$).

Таким образом получено, что перестановка двух строк матрицы (i-й и j-й) равносильна домножению на нее слева произведения матриц:

$$(E-2E_i^i)(E+E_j^i)(E-E_i^j)(E+E_j^i)=E-E_i^i-E_j^j+E_j^i+E_i^j=$$

$$=\begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{cccccccccccc} &&&&i&&&j&&&&\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1&0&\dots&0&0&0&0&0&0&\dots&0&0\\
0&1&\dots&0&0&0&0&0&0&\dots&0&0\\
\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot\\
0&0&\dots&1&0&0&0&0&0&\dots&0&0\\
0&0&\dots&0&0&0&0&1&0&\dots&0&0\\
0&0&\dots&0&0&1&0&0&0&\dots&0&0\\
\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot\\
0&0&\dots&0&0&0&1&0&0&\dots&0&0\\
0&0&\dots&0&1&0&0&0&0&\dots&0&0\\
0&0&\dots&0&0&0&0&0&1&\dots&0&0\\
\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot\\
0&0&\dots&0&0&0&0&0&0&\dots&1&0\\
0&0&\dots&0&0&0&0&0&0&\dots&0&1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ j\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Несложно убедиться, что эта матрица невырождена. ◆

Если полученную матрицу умножить справа на произвольную матрицу A, то поменяются местами ее i-й и j-й столбцы.

Основной теореме этого параграфа предпошлем еще два утверждения, которые приводятся без доказательств:

Утверждение 30.1. *Если строки (столбцы) квадратной матрицы не являются линейно зависимыми, то она представима в виде произведения элементарных матриц.*

Утверждение 30.2. *Если строки (столбцы) квадратной матрицы линейно зависимы, то она элементарными преобразованиями (домножением на элементарные матрицы) сводима к матрице с нулевой строкой (столбцом).*

Задача 30.2.2. Представьте в виде произведения элементарных матриц матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Единственно ли такое разложение?

Указание: см. леммы 30.1 и 30.2.

Теорема 30.1. *Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей.*

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B \tag{30.1}$$

Доказательство. Пусть $\{A, B\}\subset \boldsymbol{gl}(n)$. Рассмотрим сначала несколько частных случаев, выбирая левый множитель (матрицу A) специального вида.

1. Пусть матрица A первого рода: $A=E+(\lambda_k-1)E_k^k$ $\lambda_k\neq 0$, $B=\|b_j^i\|$.

$$\det A \overset{(30.**)}{=\!=\!=} \lambda_k\neq 0,$$

в то же время

$$\det(A\cdot B) \overset{\text{сл.}30.?}{=\!=\!=} \lambda_k \det B \overset{?}{=} \det A \det B.$$

2. Пусть левый множитель — матрица второго рода: $A=E+\lambda E_j^i$, $i\neq j$, $B=\|b_j^i\|$. Тогда

$$\det(A\cdot B) \overset{\text{сл.}30.?}{=\!=\!=} \det B=1\det B\overset{?}{=}\det A\det B.$$

Таким образом, для левого сомножителя в виде элементарной матрицы любого рода теорема доказана и можем перейти к более сложным случаям.

3. Пусть строки матрицы А не являются линейно зависимыми, тогда по утверждению 30.1.

$$A=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p,$$

где матрицы A_k — элементарные. Заменим матрицу A ее разложением в произведение элементарных:

$$\det(A\cdot B)=\det((A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p)\cdot B)\xlongequal{A'\overset{\text{des}}{=\!=}A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_p}$$

$$=\det((A_1\cdot A')\cdot B)\overset{?}{=}\det(A_1\cdot(A'\cdot B))\overset{?}{=}\det A_1\det(A'\cdot B)=$$

$$\xlongequal{A'\overset{\text{des}}{=\!=}A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_p}\det A_1\det((A_2\cdot A_2\cdot\ldots A_p)\cdot B)\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\det A_1\det A_2\det((A_3\cdot\ldots\cdot A_p)\cdot B).$$

Повторяя этот процесс, «отщипывая» за каждый шаг по сомножителю, в конце концов (после p шагов) получим, что $\det(A\cdot B)=\det A_1\det A_2\ldots\det A_{p-2}\det A_{p-1}\det A_p\det B$.

Теперь воспользуемся доказанным в п. п. 1 и 2 утверждением теоремы для случаев левых множителей — элементарных матриц, применяя ее к матрицам A_{p-1}, A_{p-2}, ... A_2, A_1.

$$\det A_1\det A_2\ldots\det A_{p-2}\det A_{p-1}\det A_p\det B=$$

$$=\det A_1\det A_2\ldots\det A_{p-2}(\det A_{p-1}\det A_p)\det B\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\det A_1\det A_2\ldots\det A_{p-2}\det(A_{p-1}\cdot A_p)\det B\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\det A_1\det A_2\ldots(\det A_{p-2}\det(A_{p-1}\cdot A_p))\det B\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\det A_1\det A_2\ldots(\det(A_{p-2}\cdot A_{p-1}\cdot A_p))\det B.$$

Повторяя этот процесс, и теперь каждым шагом присоединяя по сомножителю, получим по окончанию, что

$$\det(A\cdot B)=\det(A_1A_2\ldots A_{p-1}A_p)\det B\overset{?}{=}\det A\det B.$$

Теперь теорема доказана и для случая произвольной матрицы A, строки которой не являются линейно зависимыми.

4. Пусть строки матрицы $A\in\boldsymbol{gl}(n)$ линейно зависимы, по свойству 27.6 она вырождена, т. е. $\det A=0$, поэтому в этом случае доказательство соотношения (30.1)

$$\det(A\cdot B)=\det A\det B$$

сведется к доказательству того, что $\det(A\cdot B)=0$. ♦

Согласно утверждению 30.2 найдутся элементарные матрицы $\{A_1, A_2, \ldots A_p\}\subset\boldsymbol{gl}(n)$ и матрица $C\in\boldsymbol{gl}(n)$ с нулевой строкой (а значит, $\det C\overset{?}{=}0$) такие, что

$$A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p\cdot A=C. \qquad (30.{}^{*}_{**})$$

Заметим, что, если обе части этого равенства домножить справа на матрицу B, то получим

$$\begin{gathered}(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p\cdot A)\cdot B=C\cdot B,\\ \|{?}\\ (A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_p)\cdot(A\cdot B)=C\cdot B.\end{gathered}$$

При этом $\det((A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_p) \cdot (A \cdot B)) = \det(C \cdot B) \overset{?}{=} 0$. В свою очередь

$$\det((A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_p) \cdot (A \cdot B)) \overset{?}{=} \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_p \det(A \cdot B).$$

Следовательно,

$$\det A_1 \det A_2 \ldots \det A_p \det(A \cdot B) = 0.$$

Откуда $\det(A \cdot B) \overset{?}{=} 0$ и теорема доказана и для случая левого множителя — матрицы A с линейно зависимыми строками.

5. Случаи матрицы A с линейно независимыми или зависимыми столбцами можно рассмотреть аналогично. Ниже мы докажем, что линейная независимость или зависимость строк влечет линейную независимость или, соответственно, зависимость столбцов и наоборот. Это позволяет утверждать, что по существу п.п. 1—4 составляют полное доказательство теоремы об определителе произведения двух матриц. ■

§ 31. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ

Первыми интересными приложениями теоремы об определителе произведения матриц являются признаки невырожденности матриц.

Утверждение 31.1. *Если квадратная матрица обратима, то она невырождена.*

Доказательство. Пусть матрица A обратима, т. е. существует матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = E$,

$$\left.\det E \begin{array}{l} \xlongequal{\text{теор. 30.1}} \det A \det A^{-1} \\ \overset{?}{=\!=\!=} \quad 1 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \det A \neq 0,$$

и значит, A — невырождена. ■

Отсюда очевидно

Следствие 31.1. *Если матрица $A \in \boldsymbol{gl}(n)$ обратима, то*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \tag{31.1}$$

Таким образом, основная теорема § 30 позволяет установить необходимое условие обратимости матрицы (утв. 31.1), но с ее же помощью устанавливается, что то же самое условие, т. е. невырожденность матрицы, является и достаточным. Наряду с этим теорема об определителе произведения матриц позволяет указать новый способ вычисления обратной матрицы.

Определение 31.1. ***Присоединенной к невырожденной матрице*** $A=\|a_j^i\|\in \boldsymbol{gl}(n)$ *называется* ***матрица****, составленная из алгебраических дополнений ее элементов.*

Обозначение присоединенной к A матрицы: $A^*=\|A_j^i\|$ (см. определение 29.4).

Задание 31.1. Вычислите матрицу, присоединенную к матрице A задания 29.1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A=13$, т. е. матрица A — невырождена. Напомним (см. пр. 29.2), что:

$$A_1^1=\ \ 3,\qquad A_1^2=5,$$
$$A_2^1=-2,\qquad A_2^2=1.$$

Тогда

$$A^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнение матриц A и A^* позволяет сформулировать простое правило: чтобы получить матрицу, присоединенную к данной, каждый ее элемент следует заменить на его алгебраическое дополнение, а затем матрицу транспонировать. (Так как, если $A=\|a_j^i\|\in\boldsymbol{gl}(n)$, то алгебраическое дополнение элемента $\boxed{a_j^i}$ обозначается $\boxed{A_i^j}$, но $A^*=\|\boxed{A_j^i}\|$).

Вычислим произведение:

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\ ?\ =\det A\cdot E.$$

Это позволяет высказать предположение, что $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$.

Теперь рассмотрим общий случай:

$$A\cdot\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{\det A}(A\cdot A^*)=$$

$$=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \ldots & A_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ A_1^n & A_2^n & A_3^n & \ldots & A_n^n \end{pmatrix}\stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=}\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_i^1A_1^i & a_i^1A_2^i & \ldots & a_i^1A_n^i \\ a_i^2A_1^i & a_i^2A_2^i & \ldots & a_i^2A_n^i \\ . & . & \ldots & . \\ a_i^nA_1^i & a_i^nA_2^i & \ldots & a_i^nA_n^i \end{pmatrix}=$$

(в каждом элементе матрицы по i суммирование от 1 до n)

$$\stackrel{?}{=}\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=E.$$

Значит,

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det A}A^*\right)=E,$$

т. е. матрица A обратима и тем самым доказано

Утверждение 31.2. *Если матрица A невырождена, то она обратима и*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^* \qquad (31.2)$$

Объединяя утверждения 31.1 и 31.2, имеем

Теорему 31.1. *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.*

Таким образом, можно сказать, что мы доказали совпадение (равенство) множеств матриц: обратимых (с характеристическим свойством — определением 20.2: для матрицы A найдется матрица B такая, что $A\cdot B=B\cdot A=E$) и невырожденных (с характеристическим свойством — определением 26.2: $\det A\neq 0$).

Из доказательства утверждения 31.2 следует

Правило вычисления обратной матрицы

1. Убедимся, что матрица обратима, для этого вычислим ее определитель ($\det A\neq 0$).
2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A.
3. Составим присоединенную матрицу $A^*=\|A_j^i\|$.
4. Выпишем $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$.

Задание 31.1. Найдите матрицу, обратную к данной матрице, используя присоединенную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -5 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Сделайте проверку.

§ 32.° ПРАВИЛО КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы уже отмечали в § 22, что систему m линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде, причем в случае равенства числа переменных числу уравнений системы и обратимости (теперь мы можем говорить — невырожденности) ее основной матрицы, такая система:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 + \ldots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 + \ldots + a_n^2x^n = b^2, \\ \ldots \\ a_1^nx^1 + a_2^nx^2 + a_3^nx^3 + \ldots + a_n^nx^n = b^n, \end{cases} \tag{32.1}$$

с матричной записью:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}, \text{ или } A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix},$$

или

$$A \cdot X = B,$$

где через X и B обозначены столбец переменных и, соответственно, столбец свободных членов системы уравнений (32.1), имеет в качестве решения кортеж $\langle x^1, x^2, \ldots x^n \rangle$ такой, что

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Выражение матрицы, обратной к матрице A, через присоединенную к A позволяет указать еще один способ решения такой системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \overset{\text{теор. 31.1.}}{=\!=\!=} \frac{1}{\det A} A^* \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \ldots & A_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ A_1^n & A_2^n & A_3^n & \ldots & A_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_1^1b^1+A_2^1b^2+A_3^1b^3+\ldots+A_n^1b^n \\ A_1^2b^1+A_2^2b^2+A_3^2b^3+\ldots+A_n^2b^n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ldots \quad\quad \vdots \\ A_1^nb^1+A_2^nb^2+A_3^nb^3+\ldots+A_n^nb^n \end{pmatrix}.$$

Обозначив $A(k)=A_1^kb^1+A_2^kb^2+A_3^kb^3+\ldots+A_n^kb^n=A_i^kb^i$ (по i суммирование) $k=1,\ 2,\ \ldots\ n$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A(1) \\ A(2) \\ \vdots \\ A(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(1)/\det A \\ A(2)/\det A \\ \vdots \\ A(n)/\det A \end{pmatrix}.$$

Или

$$\begin{cases} x^1=A(1)/\det A, \\ x^2=A(2)/\det A, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ x^n=A(n)/\det A. \end{cases} \tag{32.2}$$

Причем в силу однозначности матричных операций обращения и умножения кортеж решений $\langle x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n\rangle$ единствен.

Замечание 33.1. Можно заметить, что $A(k)=A_i^kb^i$ представим, как разложение согласно теореме 29.1 по k-ому столбцу определителя матрицы, полученной из матрицы A заменой ее k-ого столбца на столбец B свободных членов, например:

$$A(1)=A_i^1b^i=A_1^1b^1+A_2^1b^2+A_3^1b^3+\ldots+A_n^1b^n=$$

$$=\begin{pmatrix} b^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_n^1 \\ b^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & . & . & \ldots & . \\ b^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, установлена и доказана

Теорема 32.1. *Если невырождена основная матрица системы n линейных уравнений с n переменными:*

$$\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+a_3^1x^3+\ldots+a_n^1x^n=b^1, \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+a_3^2x^3+\ldots+a_n^2x^n=b^2, \\ \ldots \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+a_3^nx^3+\ldots+a_n^nx^n=b^n, \end{cases}$$

то она имеет единственное решение: $\langle x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n\rangle$ *с* $x^k=\frac{A(k)}{\det A}$, *где* $A(k)=A_i^kb^i$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Вытекающий отсюда способ решения систем линейных уравнений носит название ***правила Крамера***.

Задание 32.1. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x^1-2x^2+2x^3=0, \\ -5x^1+3x^2+3x^3=5, \\ x^1 \qquad\quad +4x^3=1. \end{cases}$$

Решение системы линейных уравнений ***методом (по правилу) Крамера*** заключается в выполнении следующего алгоритма:

1. Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

2. Проверим невырожденность основной матрицы системы **(правило Крамера применимо только для систем с невырожденной основной матрицей)**:

$\det A=52$ (см. задание 31.1).

3. Найдем $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, заменяя на столбец свободных членов сначала первый столбец основной матрицы, потом второй и третий:

$$A(1)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=?,$$

$$A(2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=?,$$

$$A(3)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=23.$$

4. Найдем решение системы $x^i = \dfrac{A\,(i)}{\det A}$, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$:

$$\begin{cases} x^1 = A\,(1)/\det A = ?/52, \\ x^2 = A\,(2)/\det A = ?/52, \\ x^3 = A\,(3)/\det A = 23/52. \end{cases}$$

Сделайте проверку.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Число, место и комбинация — три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи.
>
> *Дж. Сильвестр*

Термин «определитель» (перевод с латинского слова «determinant») в современном его значении ввел в 1815 г. О. Коши, хотя как математический инструмент исследования систем линейных уравнений определитель был открыт еще Г. Лейбницем, который в 1693 г. получил с его помощью формулы решения систем линейных уравнений с невырожденной основной матрицей. Спустя почти три четверти века его результаты повторил швейцарский математик Г. Крамер, и они вошли в историю под названием «правила Крамера» решения систем линейных уравнений. Универсальность этих идей Лейбница и Крамера подтверждается тем, что спустя 20 лет после Крамера независимо от предшественников те же формулы получил Ж. Л. Лагранж. Примерно в то же самое время идея определителя возникла в работах французского математика Э. Безу (Bezout Etienne, 1730—1783) при решении чисто геометрической задачи (отыскание плоской кривой, проходящей через заданные точки). Но еще интереснее то, что, как утверждают историки науки, задолго до Безу, Крамера, Лагранжа, Гаусса и даже Лейбница, по крайней мере еще в 1683-м году в Японии определители использовал Сени Коба, математик, чьи труды до недавнего времени были совершенно неизвестны в Европе.

Первое систематическое и обширное изложение теории определителей дал А. Вандермонд в 1772 г., ему же принадлежит ряд самостоятельных исследований и интересных результатов в этой области, а определитель вида $|(a_i)^{i-1}|$ вошел в историю математики под названием «определитель Вандермонда». Следует отметить, что фундаментальные работы 1812-го года еще двух французских математиков О. Коши и Ж. Бине (Binet Jacques

Philippe Marie, 1786—1856) сыграли немаловажную роль в этой теории и привлекли к ней внимание многих европейских ученых XIX века, в частности А. Кэли и немецкого математика К. Г. Якоби (Jacobi Carl Gustav, 1804—1851). Собственно, только после работ Кэли определители, так же как и матрицы, стали самостоятельным объектом интереса математиков, ему же принадлежит одно из современных обозначений определителей: $|a_j^i|$. Якоби ввел так называемые функциональные определители (с элементами — переменными величинами (функциями)), указал на их связь с заменой переменных в кратных интегралах и с решениями дифференциальных уравнений в частных производных. Его статьи «De formatione et proprieatibus determinantum» («О построении и свойствах определителей») и «De determinantabus functionalibus» («О функциональных определителях»), опубликованные в 1841 г., сделали теорию определителей общим достоянием математики. Английский ученый Дж. Сильвестр в его честь назвал якобианом дифференцируемой функции f функциональный определитель $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right|$. Не менее знаменит и другой функциональный определитель, составляемый из производных n функций — вронскиан: $|(f_j(x))^{(i-1)}|$, изучением и приложениями которого впервые занялся польский математик Ю. Вронский (Wronski Józef Maria, 1776—1853).

Исторический обзор был бы неполон без упоминания работ в этой области французского ученого (математика, механика, физика и астронома) П. С. Лапласа (Laplace Pierre Simon, 1749—1827), его знаменитая теорема о разложении определителя в сумму произведений элементов и их алгебраических дополнений дает возможность индуктивного (рекуррентного) построения определителей.

Укажем еще, что теория определителей сама послужила основой и дала жизнь новому и сложному разделу современной геометрии — теории инвариантов. Любопытны приложения определителей в аналитической геометрии даже в ее начальных разделах: во-первых, функциональными определителями второго и третьего порядков могут быть заданы прямая и плоскость относительно соответствующих аффинных систем координат. А числовые определители тех же порядков имеют изящную геометрическую интерпретацию: так, оказывается, модуль определителя $\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$ в прямоугольной декартовой системе координат равен площади параллелограмма, построенного на представителях свободных векторов $\boldsymbol{a}(a^1, a^1)$ и $\boldsymbol{b}(b^2, b^2)$, а модуль аналогичного определителя третьего порядка может быть истолкован как объем параллелепипеда, построенного на трех векторах: $\vec{a}(a^1, a^1, a^1)$, $\vec{b}(b^2, b^2, b^2)$, $\vec{c}(c^3, c^3, c^3)$ в трехмерном евклидовом пространстве. А в многомерных евклидовых пространствах с определителем, составленным из скалярных произведений базисных векторов, связано понятие объема многомерного параллелепипеда. Он назван определителем Грама в честь датского математика И. Грама (Gram Jorgen Pedersen, 1850—1916), занимавшегося исследованиями таких пространств.

В терминах определителей выражаются векторное и смешанное произведения векторов, которые имеют много содержательных приложений в механике и физике. И можно сказать, что теория определителей, как и теория матриц, является удивительно универсальным аппаратом математики и ее приложений, связывая их общими идеями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.— 432 с.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.— 400 с.
7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.— 416 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 27. Свойства определителей

[1] — стр. 227—231.
[2] — стр. 332—336.
[3] — стр. 38—43.
[4] — стр. 150—157, 159—161.
[5] — стр. 106—114.
[6] — стр. 34—41.
[7] — стр. 90—96.

§ 28'. Вычисление определителя приведением его матрицы к треугольному виду

[2] — стр. 57—60.
[4] — стр. 157—158.

§ 29. Дополнительный минор и алгебраическое дополнение

[1] — стр. 232—236.
[2] — стр. 336—338.
[3] — стр. 43—48.
[4] — стр. 157.
[5] — стр. 115—118.
[6] — стр. 41—43.
[7] — стр. 96—100.

§ 30*. Теорема об определителе произведения матриц

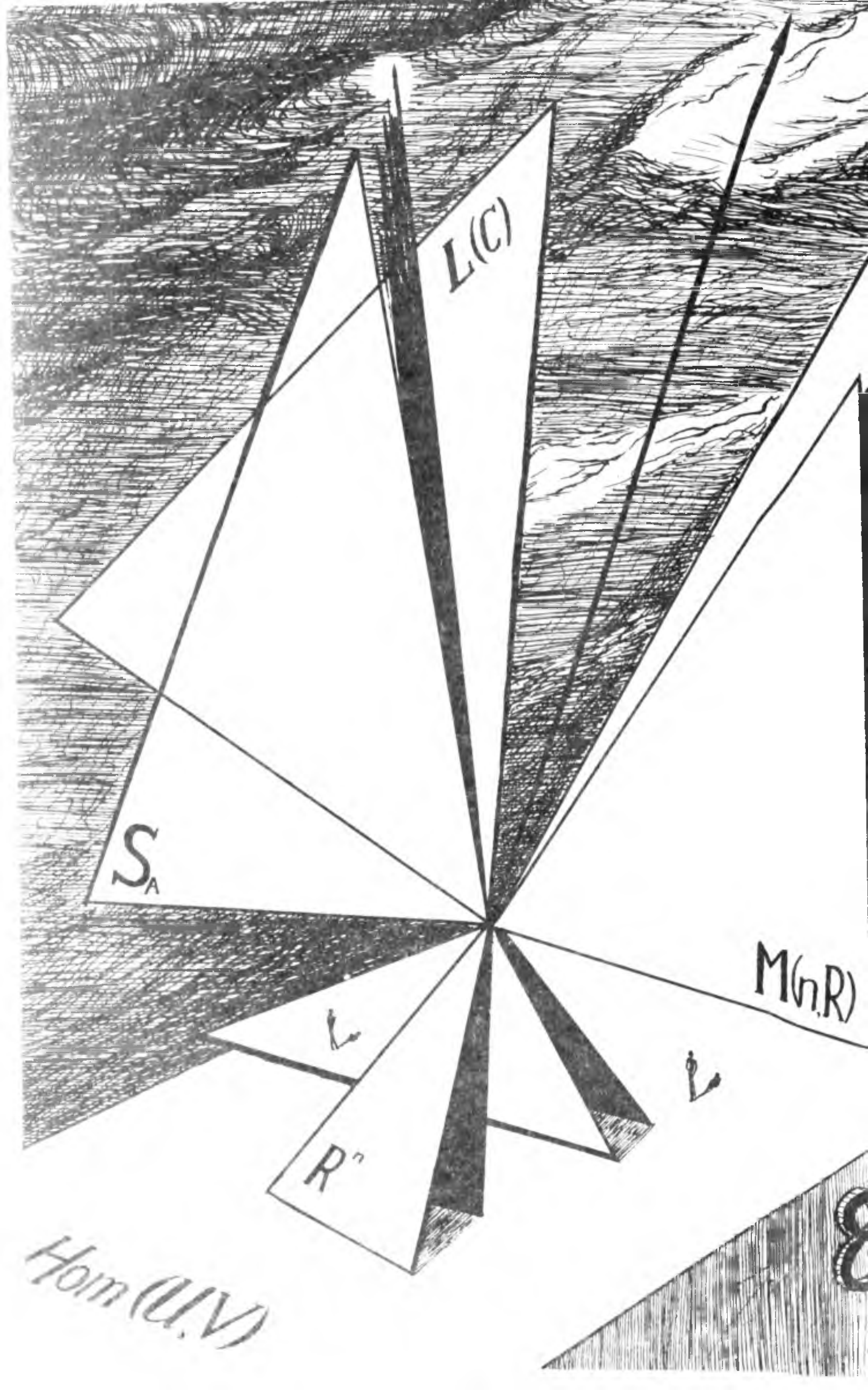
[1] — стр. 236—238.
[2] — стр. 338—339.
[4] — стр. 189—190.
[5] — стр. 120—123
[6] — стр. 45—47.

§ 31. Условия обратимости матрицы

[1] — стр. 238, 240—241.
[4] — стр. 158—189.
[5] — стр. 125—127.
[6] — стр. 47—49.

§ 32°. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

[1] — стр. 241—243.
[2] — стр. 52.
[3] — стр. 53—57, 99—100.
[4] — стр. 161—166.
[5] — стр. 128.



L(C)
S_A
M(n,R)
R^n
Hom(U,V)

Лекция 8

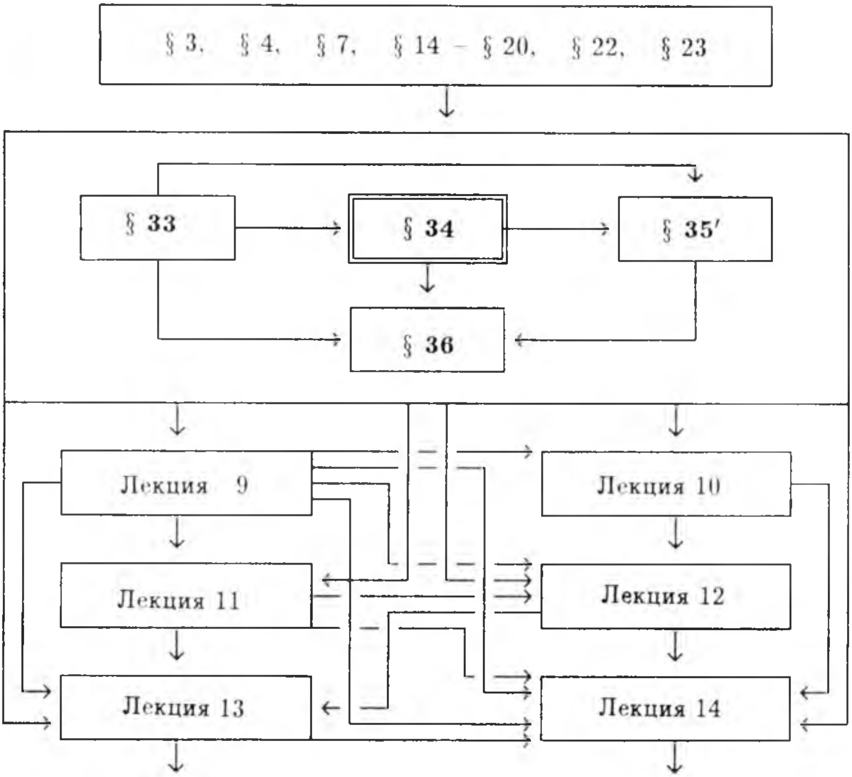
ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: векторное пространство, вектор, нулевой вектор; вектор, противоположный данному, матричное векторное пространство, координатное векторное пространство, векторное пространство свободных векторов, сумма свободных векторов, сонаправленные и противоположно направленные свободные векторы, произведение скаляра на свободный вектор, подпространство векторного пространства, линейная комбинация векторов, линейная оболочка системы векторов.

Необходимые сведения: декартово произведение множеств, декартов квадрат множества, отображение, матрицы, симметрические и кососимметрические матрицы, свойства операций над матрицами, $\boldsymbol{M}(m\times n)$, $\boldsymbol{GL}(n)$, $\boldsymbol{gl}(n)$, многочлен, функция (одной или нескольких переменных), форма, функционал, система линейных уравнений, решение системы линейных уравнений, отношение порядка на множестве, симметрическая группа, направленный отрезок, эквиполентность направленных отрезков, свободный вектор, виды свободных векторов: нулевой и противоположный данному, сонаправленные и противоположно направленные лучи, свойства бинарных отношений на множестве.

Рекомендации: если пособие использовать в учебной работе, то § 35′ может быть предоставлен для самостоятельного изучения или обсуждений на практических занятиях.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1—§ 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6—§ 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9—§ 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор множество. (§ 13—§ 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17—§ 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23—§ 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27—§ 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33—§ 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 33. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Понятие векторного пространства одно из основных в геометрии и алгебре, в частности — в линейной алгебре. Слово вектор латинского происхождения (vector) и означает «несущий».

Определение 33.1. *Пусть заданы непустое множество V, элементы которого обозначены:* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, *множество действительных чисел* $\mathbf{R}$, *которые обозначены:* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *и два отображения:*

$$[+]: V\times V\to V, \text{ так что } [+](\langle\vec{a}, \vec{b},\rangle) \overset{\text{des}}{=\!=} \vec{a}+\vec{b}\in V,$$

$$[\cdot]: \mathbf{R}\times V\to V, \text{ так что } [\cdot](\langle\alpha, \vec{a},\rangle) \overset{\text{des}}{=\!=} \alpha\cdot\vec{a}\in V,$$

причем требуется выполнение аксиом:

$$\mathbf{V.1}: \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \forall \{\vec{a}, \vec{b}\}\subset V.$$

$$\mathbf{V.2}: (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \forall \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\subset V.$$

$$\mathbf{V.3}: \exists\, \vec{0}\in V\,|\,\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}, \qquad \forall\vec{a}\in V.$$

$$\mathbf{V.4}: \forall\vec{a}\in V\ \exists\,(-\vec{a})\in V\,|\,\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

$$\mathbf{V.5}: 1\cdot\vec{a}=\vec{a} \qquad \forall\vec{a}\in V.$$

$$\mathbf{V.6}: \alpha\cdot(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\cdot\vec{a} \qquad \forall\ \langle\alpha, \beta, \vec{a}\rangle\in \mathbf{R}^2\times V.$$

$$\mathbf{V.7}: (\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a} \qquad \forall\ \langle\alpha, \beta, \vec{a}\rangle\in \mathbf{R}^2\times V.$$

$$\mathbf{V.8}: \alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b} \qquad \forall\ \langle\alpha, \vec{a}, \vec{b}\rangle\in \mathbf{R}\times V^2.$$

В этом случае говорят, что на множестве V задана ***структура векторного*** *или* ***линейного пространства*** *(над полем действительных чисел), множество V называют* ***векторным*** *или* ***линейным пространством****, или* ***линеалом****, а его элементы —* ***векторами****, отображения: $[+]$ —* ***сложением векторов****, $[\cdot]$ —* ***умножением скаляра*** *(числа)* ***на вектор****, условия V.1— V.4 —* ***аксиомами сложения векторов****, V.5— V.8.* ***аксиомами умножения скаляра на вектор****.*

Векторное пространство называют ***векторным пространством над полем действительных чисел***, если в его определении, как выше, $\{\alpha, \beta,\}\subset\mathbf{R}$. В дальнейшем будут рассматриваться векторные пространства и над другими числовыми полями, в частности, *над полем комплексных чисел*.

Обозначение векторного пространства: $\langle V, +, \cdot\rangle$. Однако, если речь идет об одном векторном пространстве, то операции обычно не указываются и пишут и говорят: векторное пространство V. Иногда элементы векторного пространства обозначают чертой вверху: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, или полужирными буквами: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и т. д.

Замечание. Если рассматривается несколько векторных пространств, то обычно для их операций используются различные обозначения, например: $\langle V, +, \cdot\rangle$ и $\langle U, \oplus, \odot\rangle$.

Разъяснения. Чтобы говорить о структуре векторного пространства на **непустом** множестве V, прежде всего должны быть заданы два отображения: $[+]: V\times V\to V$ и $[\cdot]: \mathbf{R}\times V\to V$, так что

$$[+](\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle)\overset{\text{des}}{=}\vec{a}+\vec{b}\in V,\ \text{а}\ [\cdot](\langle\alpha, \vec{a}\rangle)\overset{\text{des}}{=}\alpha\cdot\vec{a}\in V,$$

причем из последнего следует, что $\alpha\cdot\vec{a}\in V$ при **любом** $\alpha\in\mathbf{R}$.

Тогда первая аксиома означает совпадение образов кортежей $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ и $\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$ при отображении $[+]$, т. е.

$$[+](\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle)=[+](\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle),$$

(что, кстати, влечет неинъективность отображения $[+]$).

Аналогичное истолкование имеют и остальные аксиомы. Тем самым $[+]: V\times V\to V$ и $[\cdot]: \mathbf{R}\times V\to V$ уже не произвольные отображения, поскольку V.1 — V.8 накладывают специальные условия на образы элементов $V\times V$ и $\mathbf{R}\times V$. Чтобы они имели не слишком громоздкую запись, вроде:

$$\text{V.2: } [+](\langle[+](\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle), \vec{c}\rangle)=[+](\langle\vec{a}, [+](\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle)\rangle),$$

приняты специальные обозначения образов соответствующих кортежей: $\vec{a}+\vec{b}\in V$ и $\alpha\cdot\vec{a}\in V$ при отображении $[+]$ и, соответственно, $[\cdot]$.

Из аксиомы V.1 следует неинъективность отображения: $[+]: V\times V\to V$, а из аксиомы V.3 его сюръективность.

Аналогично и отображение: $[\cdot]: \mathbf{R}\times V\to V$ не инъективно (V.?), но сюръективно (V.?). ◆

Задание 33.1. Определите, какие из изученных структур и операций удовлетворяют аксиомам V.1 — V.8. Т. е. приведите примеры векторных пространств:

$$\langle\mathbf{R}^n, +, \cdot\rangle,\ \langle\boldsymbol{M}(m\times n), +, \cdot\rangle,\ \langle\boldsymbol{gl}(n), +, \cdot\rangle,\ \langle\boldsymbol{GL}(n), +, \cdot\rangle.$$

(Здесь $[\cdot]$ — умножение действительного числа на матрицу.) ◆

Векторные пространства обладают многими интересными свойствами, вытекающими из аксиом V.1 — V.8.

Основные свойства векторного пространства

Для любых $\langle \alpha, \beta, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle \in \mathbf{R}^2 \times V^3$ имеют место:

Свойство 33.1. $\vec{a}=\vec{b} \xRightarrow{\forall \vec{c}\in V} \vec{c}+\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$.

Действительно, если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\forall\, \vec{c}\in V$ кортежи $\langle \vec{c}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{b}\rangle$, а так как $[+]$ — отображение (см. определение 7.?), то

$$\begin{array}{ccc} [+](\langle \vec{c}, \vec{a}\rangle) & = & [+](\langle \vec{c}, \vec{b}\rangle) \\ \Big\| \text{des} & & \text{des} \Big\| \\ \vec{c}+\vec{a} & & \vec{c}+\vec{b} \end{array}$$

и значит, $\vec{c}+\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$. ■

Следствие 33.1. $\vec{a}=\vec{b} \xRightarrow[\text{V.?}]{\forall \vec{c}\in V} \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}$.

Аналогично предыдущему свойству и следствию могут быть доказаны

Свойство 33.2. $\alpha=\beta \xRightarrow{\forall \vec{a}\in V} \alpha\cdot\vec{a}=\beta\cdot\vec{a}$.

$\vec{a}=\vec{b} \xRightarrow{\forall\, a\in \mathbf{R}} a\cdot\vec{a}=a\cdot\vec{b}$.

Свойство 33.3. $\forall\, \vec{a}\in V \Longrightarrow \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Последнее позволяет элемент $\vec{0}$, определяемый аксиомой V.3, называть ***нейтральным*** (по существу, аксиома V.3. определяет только *правый* ***нейтральный***).

Свойство 33.4. *В векторном пространстве нейтральный элемент единствен.*

Доказательство. Допустим, что найдется вектор $\vec{0}'\in V$ такой, что $\vec{0}'\neq\vec{0}$, но $\forall\, \vec{a}\in V$ имеет место $\vec{a}+\vec{0}'=\vec{a}$.

$$\begin{array}{l} \xlongequal{\text{по предложению}} \vec{0}' \\ \vec{0}+\vec{0}' \\ \xlongequal[\text{св. 33.3}]{} \vec{0} \end{array}$$

Откуда $\vec{0}'=\vec{0}$. Значит, предположение о существовании по крайней мере двух элементов, удовлетворяющих аксиоме V.3, не верно и $\vec{0}$, удовлетворяющий этой аксиоме, единствен. ■

Следствие 33.2. *Если $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}$ для некоторого $\vec{a}\in V$, то $\vec{b}=\vec{0}$.*

Доказательство. Пусть $\vec{c}\in V$ и произволен, тогда произволен и $\vec{d}\overset{\text{des}}{=}\vec{c}+\vec{a}\in V$. Заметим, что

$$\begin{array}{c}(\vec{c}+\vec{a})+\vec{b}\overset{\text{des}}{=}\vec{d}+\vec{b}\\ \text{V.?}\big\|\\ \vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\overset{?}{=}\vec{c}+\vec{a}\overset{?}{=}\vec{d}\end{array}$$

Отсюда $\vec{d}+\vec{b}=\vec{d}$ уже для любого вектора $\vec{d}$, т. е. $\vec{b}$ — нейтральный элемент, по предыдущему свойству он единствен в векторном пространстве, т. е. $\vec{b}=\vec{0}$. ■

Следствие 33.3 (правило сокращения). *Если в векторном пространстве имеет место хотя бы одно из равенств*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{c} \quad \text{или} \quad \vec{b}+\vec{a}=\vec{c}+\vec{a},$$

то $\vec{b}=\vec{c}$.

Очевидно свойство.

Свойство 33.5: $\forall\,\vec{a}\in V\Rightarrow(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

Оно позволяет элемент $(-\vec{a})$, определяемый аксиомой V.4, называть ***противоположным*** $\vec{a}$, в то время как аксиома V.4. определяет *правый* ***противоположный*** элемент.

Свойство 33.6. *В векторном пространстве противоположный элемент к любому его элементу единствен.*

Задача 33.1.2. Докажите свойство 33.6.

Доказательство. Допустим, что для $\vec{a}\in V$ найдется кроме вектора $\vec{a}$, удовлетворяющего аксиоме V.4, вектор $\vec{a}'\in V$ такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{c}((-\vec{a})+\vec{a})+\vec{a}'\overset{?}{=}\vec{0}+\vec{a}'\overset{?}{=}\vec{a}'\\ \text{V.?.}\big\|\\ (-\vec{a})+(a+a')\overset{?}{=}(-\vec{a})+\vec{0}\overset{?}{=}-\vec{a}\end{array}\right|\Rightarrow(-\vec{a})=\vec{a}'$$

Следовательно, предположение о существовании по крайней мере двух элементов, удовлетворяющих аксиоме V.4 неверно, что и доказывает свойство, поскольку по аксиоме такой элемент существует. ■

Для любых элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторного пространства V сумму $\vec{b}+(-\vec{a})$ принято называть **разностью элементов $\vec{b}$** *и $\vec{a}$ и обозначать:*

$$\vec{b}-\vec{a} \overset{\text{def}}{\underset{\text{des}}{=}} \vec{b}+(-\vec{a}),$$

по самому определению разность обладает всеми свойствами операции сложения векторов.

Несложно проверить, что имеет место

Свойство 33.7. $\forall \{\vec{a}, \vec{b}\} \in V$ *решением уравнений* $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ *и* $\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}$ *является вектор* $\vec{b}-\vec{a}$. ◆

Замечание 33.1. Внимательный читатель может заметить, что аксиомы сложения векторного пространства:

определено отображение $\{+\}: V\times V\to V$ такое, что

V.1: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $\qquad \forall \{\vec{a}, \vec{b}\}\subset V.$

V.2: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\qquad \forall \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\subset V.$

V.3: $\exists\, \vec{0}\in V \mid \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ $\qquad \forall\, \vec{a}\in V.$

V.4: $\forall\, \vec{a}\in V\ \exists\,(-\vec{a})\in V \mid \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

есть ни что иное, как аксиомы структуры коммутативной группы на множестве V. Поэтому формулировки (да и доказательства) предыдущих свойств по существу аналогичны свойствам, указанным в § 24*, посвященному группам. Однако, выше были приведены самостоятельные доказательства свойств векторного пространства на основе аксиоматики именно векторного пространства, поскольку обстоятельное изучение групп еще предстоит, а материал § 24* был дан для любознательного читателя в информативном порядке.

Свойство 33.8. $\forall\, \vec{a}\in V \Rightarrow 0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Доказательство. Заметим, что по аксиоме V.7

$$0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{a}=(0+0)\cdot\vec{a}\overset{?}{=}0\cdot\vec{a},$$

а по свойству 33.2 из этого следует, что $0\cdot\vec{a}$ — нейтральный, т. е. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Следствие 33.4. $\forall\, \vec{a}\in V\Rightarrow(-1)\cdot\vec{a}=(-\vec{a})$.

Задача 33.1.1. Докажите следствие 33.4.

Доказательство.

$$\vec{a}+(-1)\cdot\vec{a}\overset{?}{=}1\vec{a}+(-1)\vec{a}\overset{?}{=}(1-1)\cdot\vec{a}\overset{?}{=}\vec{0}.$$

Откуда и из единственности противоположного элемента следует, что $(-1)\cdot\vec{a}=(-\vec{a})$. ■

Аналогично предыдущему свойству можно доказать свойство.

Свойство 33.9. $\forall\alpha\in\mathbf{R}\Rightarrow\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

Свойство 33.10. $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow\alpha=0\vee\vec{a}=\vec{0}$.

Доказательство. 1. Если $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}$ и $\alpha=0$, то утверждение очевидно.

2. Пусть $\alpha\neq 0$, домножим обе части равенства $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}$ на α^{-1}, тогда

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{-1}(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha^{-1}\cdot\vec{0}\overset{\text{св. }33.8}{=\!=\!=}\vec{0}\\ \quad\text{V.?}\,\Big\| \\ (\alpha^{-1}\alpha)\cdot\vec{a}\overset{?}{=}1\cdot\vec{a}\overset{\text{V.?}}{=\!=}\vec{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}.$$ ■

Следствие 33.5. $(\forall\,\vec{a}\in V\,|\,\vec{a}\neq\vec{0})\overset{\alpha\neq\beta}{=\!=\!\Rightarrow}\alpha\cdot\vec{a}\neq\beta\cdot\vec{a}$.

Допустим, что $\alpha\cdot\vec{a}=\beta\cdot\vec{a}$, тогда $\alpha\cdot\vec{a}-\beta\cdot\vec{a}=\vec{0}$ и, значит, $(\alpha-\beta)\cdot\vec{a}=\vec{0}$, это влечет $(\alpha-\beta)=0$ (по свойству 33.10, так как $\vec{a}\neq\vec{0}$) или $\alpha=\beta$, что противоречит условию. ■

Этими свойствами будем пользоваться, решая задачи, изучая более сложные свойства векторов и векторного пространства.

§ 34. ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Поскольку векторное пространство определяется двумя множествами $V\neq\varnothing$ и $\mathbf{R}$, двумя отображениями: $|+|: V\times V\to V$ и $[\cdot]: \mathbf{R}\times V\to V$ и соответствующими аксиомами, то определяя его структуру на каком-либо непустом множестве, прежде всего следует задавать отображения $|+|$ и $[\cdot]$, а затем выяснять выполнимы или нет для таких отображений аксиомы V.1— V.8.

Пример 34.1. На множестве действительных чисел $\mathbf{R}$ с обычными операциями сложения и умножения, очевидно, выполняются все аксиомы V.1 — V.8. Тем самым $\langle\mathbf{R}, +, \cdot\rangle$ — векторное пространство, оно представляет пример так называемого ***одномерного векторного пространства***.

Пример 34.2. Несложно убедиться в том, что на множестве, состоящем из одного элемента, например, $\{\vec{0}\}$, можно определить структуру векторного пространства, задав отображения:

$$|+|:\{\vec{0}\}\times\{\vec{0}\}\to\{\vec{0}\}\,|\,|+|(\langle\vec{0},\ \vec{0}\rangle)\overset{\text{def}}{=\!=}\vec{0}\in\{\vec{0}\},$$

$$[\cdot]:\mathbf{R}\times\{\vec{0}\}\to\{\vec{0}\}\,|\,\forall\lambda\in\mathbf{R}\Rightarrow[\cdot](\langle\lambda,\ \vec{0}\rangle)\overset{\text{def}}{=\!=}\vec{0}\in\{\vec{0}\}.$$

или, что то же самое, задав операции:

$$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \text{ и } \lambda\cdot\vec{0}=\vec{0} \quad \forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

Такое векторное пространство — пример ***нульмерного векторного пространства.***

Задача 34.1.3. Можно ли задать структуру векторного пространства на множестве, состоящем из двух элементов? Из трех элементов?

Указание. Если $V=\{\vec{a},\ \vec{b}\,|\,\vec{a}\neq\vec{b}\}$ — векторное пространство, то по аксиоме V.3 один из элементов должен быть нейтральным, пусть $\vec{a}=\vec{0}$, тогда $\vec{b}\neq\vec{0}$. См. следствие 33.5.

Пример 34.3. ***Матричное векторное пространство*** с обычными операциями сложения матриц и умножения скаляра на матрицу $\langle \boldsymbol{M}(m\times n),\ +,\ \cdot\rangle$ и, в частности, $\langle \boldsymbol{gl}(n),\ +,\ \cdot\rangle$ (см. задание 33.1).

Пример 34.4. ***Координатное векторное пространство.***

Определение 34.1. ***Координатным*** *(или* ***арифметическим****)* ***векторным пространством*** *(n-мерным) называется векторное пространство матриц — строк $\langle \boldsymbol{M}(1\times n),\ +,\ \cdot\rangle$ или матриц — столбцов $\langle \boldsymbol{M}(n\times 1),\ +,\ \cdot\rangle$. Первое из них называется* ***векторным пространством столбцов****.*

Обозначение этих пространств: $\langle \boldsymbol{M}(1\times n),\ +,\ \cdot\rangle$ или, соответственно, $\langle \boldsymbol{M}(n\times 1),\ +,\ \cdot\rangle$. Иногда такие пространства обозначают $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{K}^n$.

Напомним операции в координатных пространствах:
В $\langle M(1\times n),\ +,\ \cdot\rangle$ для любых

$$\langle\lambda,\ (a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n),\ (b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n)\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}^2(1\times n)$$

определены:

$$(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n)+(b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n)=(a_1+b_1,\ \dots\ a_n+b_n),$$
$$\lambda\cdot(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n)=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \dots\ \lambda a_n).$$

В $\langle \boldsymbol{M}(n\times 1),\ +,\ \cdot\rangle$ для всевозможных

$$\left\langle\lambda,\ \begin{pmatrix} a^1\\ a^2\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix}\right\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}^2(n\times 1)$$

определены сумма и произведение скаляра на вектор:

$$\begin{pmatrix} a^1\\ a^2\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^1+b^1\\ a^2+b^2\\ \vdots\quad\ \vdots\\ a^n+b^n\end{pmatrix} \text{ и } \lambda\cdot\begin{pmatrix} a^1\\ a^2\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a^1\\ \lambda a^2\\ \vdots\\ \lambda a^n\end{pmatrix}.$$

Пример 34.5. Множество решений системы линейных однородных уравнений (см. лекция 5, § 22).

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 + \ \dots \ + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 + \ \dots \ + a_n^2x^n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_1^nx^1 + a_2^nx^2 + a_3^nx^3 + \ \dots \ + a_n^nx^n = 0, \end{cases} \tag{34.a}$$

также есть векторное пространство относительно операций:

$$\langle x_0^1,\ x_0^2,\ \dots\ x_0^n\rangle + \langle y_0^1,\ y_0^2,\ \dots\ y_0^n\rangle = \langle x_0^1 + y_0^1,\ x_0^2 + y_0^2,\ \dots\ x_0^n + y_0^n\rangle \text{ и}$$

$$\lambda \cdot \langle x_0^1,\ x_0^2,\ \dots\ x_0^n\rangle = \langle \lambda\, x_0^1,\ \lambda\, x_0^2,\ \dots\ \lambda\, x_0^n\rangle.$$

В этом несложно убедиться, если воспользоваться замечаниями § 22 о том, что всякому решению такой системы уравнений соответствует решение матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34.a'}$$

(или $A \cdot X = O$ с матрицей $A = \|a_j^i\|$) и наоборот: каждому решению последнего — единственным образом сопоставимо решение системы линейных однородных уравнений с основной матрицей $\|a_j^i\|$. ◆

Пример 34.6. ***Векторное пространство полиномов (многочленов)*** *от n переменных с вещественными коэффициентами* и обычными операциями сложения и умножения числа на многочлен: $\langle \mathscr{P}[x^1,\ x^2,\ \dots\ x^n], \boxed{+}, \boxed{\cdot}\rangle$.

Рассмотрим более простой случай многочленов одной переменной: $\langle \mathscr{P}[x], \boxed{+}, \boxed{\cdot}\rangle$, и введем некоторые вполне естественные соглашения:

1. Будем считать, что все многочлены имеют стандартную запись по возрастанию степеней:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots \ + a_nx^n,$$

где $n \in \mathbf{N}$ и $\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n\rangle \in \mathbf{R}^{n+1}$.

2. Будем полагать, что если рассматриваются два многочлена в стандартной записи, то они имеют «одинаковую длину» — этого всегда можно добиться, дополняя один из них, если это необходимо, слагаемыми с нулевыми коэффициентами, например:

$$f(x) = 1 + 2x - 4x^2 + 6x^3 \text{ и } g(x) = 0 + 3x + 0x^2 + 0x^3.$$

3. Два многочлена считаются равными тогда и только тогда, когда равны все их коэффициенты на соответствующих местах: пусть

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_nx^n,$$
$$g=b_0+b_1x+b_2x^2+\ \ldots\ +b_nx^n,$$

с $\langle\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n\rangle,\ \langle b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n\rangle\rangle\in\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}^{n+1}$.

По определению

$$f=g\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n\rangle=\langle b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n\rangle \tag{34.1}$$

Сумма любых двух многочленов определяется, как новый многочлен $f\boxed{+}g$ следующим образом:

$$(f\boxed{+}g)=$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\,x+(a_2+b_2)\,x^2+\ \ldots\ +(a_n+b_n)x^n, \tag{34.2}$$

а произведение числа $\lambda\in\mathbf{R}$ на произвольный многочлен f задается многочленом $\lambda\boxed{\cdot}f\in\mathscr{P}[x]$ так, что

$$(\lambda\boxed{\cdot}f)=\lambda a_0+\lambda a_1x+\lambda a_2x^2+\ \ldots\ +\lambda a_nx^n. \tag{34.3}$$

Пример 34.7. Векторное пространство полиномов (многочленов) от одной переменной с вещественными коэффициентами вида:

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_kx^k,$$

(где $\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n\rangle\in\mathbf{R}^{k+1}$) и обычными операциями сложения и умножения числа на многочлен: $\langle\mathscr{P}^k[x],\boxed{+},\boxed{\cdot}\rangle$.

Такое пространство называется ***векторным пространством полиномов от одной переменной степени не выше*** k.

Аналогично определяется ***векторное пространство полиномов от*** n ***переменных степени не выше*** k:
$\langle\mathscr{P}^k[x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n],\boxed{+},\boxed{\cdot}\rangle$.

Задача 34.1.1. Убедитесь в выполнимости аксиом векторного пространства для $\langle\mathscr{P}^2[x],\boxed{+},\boxed{\cdot}\rangle$.

$$\mathscr{P}^2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2\}.$$

Пример 34.8. ***Множество всех числовых функций*** одной переменной $\mathscr{F}[D]$ с общей областью определения D и операциями:

$$\boxed{+}:\langle f,\ g\rangle\to f\boxed{+}g\overset{\text{def}}{=\!=}\{\langle x,\ f(x)+g(x)\rangle\ \forall x\in D\}$$

и

$$[\cdot]: \langle \alpha, f \rangle \to \alpha [\cdot] f \overset{\text{def}}{=\!=} \{\langle x, \alpha f(x) \rangle \, \forall x \in D\}$$

$\forall \langle \alpha, f, g \rangle \in \mathbf{R} \times \mathscr{F}^2[D]$.

Здесь используем для операций в $\mathscr{F}[D]$ обозначения $[+]$ и $[\cdot]$, чтобы отличить их от операций сложения и умножения действительных чисел.

Очевидно, что $[+]$ и $[\cdot]$ — отображения, что позволяет указывать для произвольного $x \in D$

$$(f[+]g)(x) \overset{\text{def}}{=\!=} f(x) + g(x) \text{ и } (\alpha [\cdot] f)(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha \cdot f(x) \qquad (34.F)$$

Заметим, что при доказательстве выполнимости аксиом векторного пространства для $\langle \mathscr{F}[D], [+], [\cdot] \rangle$ потребуется устанавливать **равенство отображений** (определение 8.1), а так как $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ для всех $\{f, g\} \subset \mathscr{F}[D]$, то будет подлежать проверке только последнее из условий (8.1):

$$f = g \xLeftrightarrow{\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g} (\forall x \in D \Rightarrow f(x) = g(x)).$$

Итак,

V.1: $f[+]g \overset{?}{=} g[+]f \qquad \forall \{f, g\} \subset \mathscr{F}[D]$,

$$\Updownarrow$$

$f(x) + g(x) \overset{?}{=} g(x) + f(x) \qquad \forall x \in D,$ ◆

что означает выполнимость аксиомы V.1 для $\langle \mathscr{F}[D], [+], [\cdot] \rangle$.

Аналогично,

V.2: $(f[+]g)[+]h = f[+](g[+]h) \qquad \forall \{f, g, h\} \subset \mathscr{F}[D]$.

V.3: В качестве нейтрального элемента естественно взять нулевое отображение: ◆

$$\theta = \{\langle x, 0 \rangle \, \forall x \in D\} \in \mathscr{F}[D],$$

поскольку $f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$ для $\forall \langle x, f \rangle \in D \cdot \mathscr{F}[D]$, а значит, $f[+]\theta = f$.

V.4: Построенное по произвольному $f \in \mathscr{F}[D]$ отображение

$$(-f) = \{\langle x, -f(x) \rangle \, \forall x \in D(x)\} \in \mathscr{F}[D],$$

очевидно, удовлетворяет условию: ◆

$$f[+](-f) = \theta$$

и значит, является противоположным к f.

V.5: $1[\cdot]f \overset{?}{=} f \qquad \forall f \in \mathscr{F}[D]$.

$$\Uparrow$$

$$(1[\cdot]f)(x) \overset{?}{=} 1f(x) = f(x) \qquad \forall x \in D,$$

что означает выполнимость аксиомы для $\langle \mathscr{F}[D], [+], [\cdot] \rangle$.

V.8: $\alpha[\cdot](f[+]g) \overset{?}{=} \alpha[\cdot]f[+]\alpha[\cdot]g \quad \forall \langle \alpha, f, g \rangle \in \mathbf{R} \times \mathscr{F}^2[D]$.

Выполнимость этой аксиомы будет следовать из соблюдения для любого $x \in D$, произвольных числовых функций f и g и числа α равенства:

$$(\alpha[\cdot](f[+]g))(x) \overset{?}{=} (\alpha[\cdot]f[+]\alpha[\cdot]g)(x).$$

Отметим, что

$$(\alpha[\cdot](f[+]g))(x) \ \frac{(34.F)}{\operatorname{def}[\cdot]}\ \alpha((f[+]g)(x)) \overset{?}{=} \alpha(f(x)) + \alpha(g(x)),$$

$$((\alpha[\cdot]f)[+](\alpha[\cdot]g))(x) \overset{?}{=} (\alpha[\cdot]f)(x) + (\alpha[\cdot]g)(x) \overset{?}{=} \alpha f(x) + \alpha\, g(x)$$

которые равны по закону дистрибутивности действительных чисел: $\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$.

Таким образом, аксиома V.8 (дистрибутивность умножения скаляров относительно сложения числовых функций) также имеет место.

Аналогично проверяется выполнимость остальных аксиом V.6 и V.7: ◆

V.6: $\alpha[\cdot](\beta[\cdot]f) \overset{?}{=} (\alpha\beta)[\cdot]f \qquad \forall \langle \alpha, \beta, f \rangle \in \mathbf{R}^2 \times \mathscr{F}[D]$.

V.7: $(\alpha+\beta)[\cdot]f \overset{?}{=} \alpha[\cdot]f[+]\beta[\cdot]f \quad \forall \langle \alpha, \beta, f \rangle \in \mathbf{R}^2 \times \mathscr{F}[D]$.

Подобным естественным образом определяется структура векторного пространства для функций нескольких переменных и даже на множестве функционалов на непустом множестве.

О следующих примерах векторных пространств речь ниже пойдет особо, поскольку их структура достаточно богата и представляет самостоятельный интерес.

Пример 34.9. ***Векторное пространство свободных векторов***.

Пример 34.10. ***Пространство линейных отображений векторного пространства***.

Пример 34.11. ***Двойственное пространство***.

Задача 34.1.2. Определите, является ли векторным пространством полная линейная группа $\boldsymbol{GL}(n)$ относительно операций сложения матриц и умножения скаляра на матрицу? относительно операций умножения матриц и умножения скаляра на матрицу?

§ 35′. ПРОСТРАНСТВО СВОБОДНЫХ ВЕКТОРОВ

Векторное пространство свободных векторов — очень важный пример, во-первых, потому что исторически математика прежде всего имела дело именно со свободными векторами и, можно сказать, что обобщение их основных свойств в конце концов легло в основу определения (аксиоматики) векторного пространства. Во-вторых, пространство свободных векторов дает наглядное представление о многих свойствах векторных пространств потому, что свободный вектор легко представить себе направленным отрезком. Эта ***модель*** векторного пространства удобна, чтобы развивая интуицию, учиться решать задачи в векторных пространствах, тем более, что школьные курсы математики знакомят именно с такими примерами векторов. А пространство свободных векторов, как пример, еще важно для иллюстрации некоторых алгебраических и геометрических понятий. Это мы увидим в дальнейшем, говоря о геометрическом смысле коллинеарности и компланарности векторов, а также произведений векторов: векторного, скалярного и смешанного.

Для множества всех свободных векторов будем использовать обозначение $\mathscr{V}$.

Напоминание:

Определение 4.2. *Элемент декартова квадрата множества всех точек плоскости (пространства), т. е. упорядоченную пару точек плоскости (пространства) принято называть* ***направленным отрезком***.

Если две такие упорядоченные пары отличаются только порядком элементов (точек), то их называют ***противоположно направленными отрезками****, а если первый и второй элементы упорядоченной пары совпадают, то такие направленные отрезки называют* ***нулевыми***.

Определение 16.4. *Класс эквивалентности направленного отрезка по отношению эквиполентности на множестве всех направленных отрезков называется* ***свободным вектором***.

Класс эквивалентности нулевого направленного отрезка называется ***нулевым свободным вектором.*** Он обозначается $\vec{0}$.

Прежде чем обсуждать операции сложения и умножения скаляра на вектор на множестве $\mathscr{V}$, укажем критерий, по которому определяется принадлежность двух направленных отрезков одному классу эквивалентности — свободному вектору.

Лемма 35.1. *$\overline{AB}\,\omega\,\overline{CD}$ тогда и только тогда, когда середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают.*

В частности, если известно, что $(AB)\neq(CD)$, то признак мо-

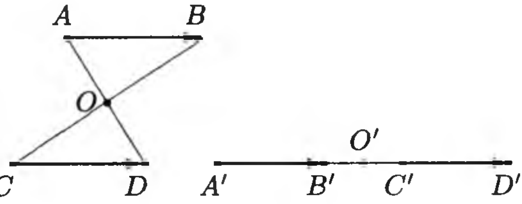


Рис. 83

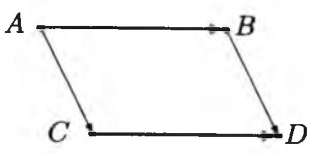


Рис. 84

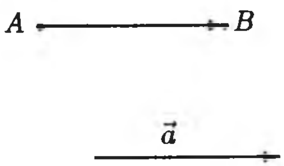


Рис. 85

жет быть сформулирован даже проще: $(\overline{AB}\omega\overline{CD}) \Leftrightarrow ABDC$ — параллелограмм (рис. 83, 84).

Лемма 35.2. *$\overline{AB}\omega\overline{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overline{AC}\omega\overline{BD}$.*

Лемма (об откладывании) 35.3. *Для любой точки A и свободного вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ существует единственный направленный отрезок $\overline{AB} \in \vec{\boldsymbol{a}}$* (рис. 85).

Если обозначить через $\mathscr{P}$ — множество точек пространства, то условия предыдущей леммы можно записать формулой:

$$(\forall \langle A, \vec{\boldsymbol{a}} \rangle \in \mathscr{P} \times \mathscr{V}) \Rightarrow (\exists\, \overline{AB} \in \vec{\boldsymbol{a}}, \text{ причем единственный}).$$

Доказательство этих лемм не составляет большого труда. Остановимся на последнем, так как, по существу, лемма об откладывании устанавливает биективное отображение множества свободных векторов $\mathscr{V}$ в множество $\mathscr{P}$ точек пространства. (См. лекция 4, пример 16.3(3)).

Доказательство леммы 35.3.

0. Определим бинарное отношение на $\mathscr{K} \times \mathscr{P}$.

1) Если $\overline{CD} \in \vec{\boldsymbol{a}}$ и фиксирована произвольная точка $A \in P$, то найдется прямая, обозначим ее a, такая, что $a \ni A$ и $a \| (CD)$.

2) Точка A разбивает прямую a на два луча: сонаправленный с $[CD)$ и противоположно направленный.

3) На сонаправленном с $[CD)$ луче отложим отрезок $[AX]$ такой, чтобы $|AX| = |CD|$.

4) $\overline{AX}\omega\overline{CD}$. ♦

Так построен $\overline{AX}\in\vec{a}$ и, таким образом, имеем бинарное отношение, при котором каждому свободному вектору сопоставляется конец направленного отрезка — его представителя, откладываемого от данной точки A:

$$VP=\{\langle\vec{a},\ X\rangle\mid\overline{AX}\in\vec{a}\}\subset\mathscr{V}\times\mathscr{P}.$$

1. $\mathrm{Dom}\,VP=\mathscr{V}$, так как указанную выше конструкцию можно провести для любого свободного вектора $\vec{a}$.

2. VP — отображение.

Предположим, что найдутся $\{\langle\vec{a},\ X\rangle,\ \langle\vec{a},\ X'\rangle\}\subset VP$ такие, что $\{\overline{AX},\ \overline{AX'}\}\subset\vec{a}$, но $\langle\vec{a},\ X\rangle\neq\langle\vec{a},\ X'\rangle$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AX'}\in\vec{a}\\ \overline{AX}\in\vec{a}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{AA}\,\omega\,\overline{XX'}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{XX'}\text{ — нулевой}\Leftrightarrow X=X'.$$

Но это и означает совпадение направленных отрезков $\overline{AX'}=\overline{AX}$. ■

3. in: допустим, найдутся такие $\{\langle\vec{a},\ X\rangle,\ \langle\vec{a}',\ X\rangle\}\subset VP$, что $\langle\vec{a},\ X\rangle\neq\langle\vec{a}',\ X\rangle$. Тогда по определению бинарного отношения VP

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AX}\in\vec{a}'\\ \overline{AX}\in\vec{a}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\vec{a}=\vec{a}',$$

откуда следует $\langle\vec{a},\ X\rangle=\langle\vec{a}',\ X\rangle$.

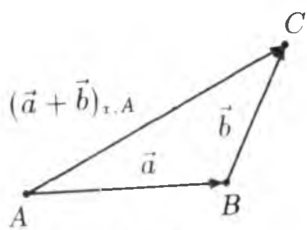


Рис. 86

4. sur: для любой точки $X\in P$ возьмем направленный отрезок $\overline{AX}$ и его класс эквивалентности $\vec{a}$. По определению пространства свободных векторов $\vec{a}\in\mathscr{V}$. ■

В школьных курсах математики вводились «сложение векторов» и «умножение числа на вектор». Эти понятия мы будем обсуждать для свободных векторов, чтобы увидеть корректность этих определений и то, как на множестве V они определяют структуру векторного пространства.

Определение 35.1. *Пусть* $\{\vec{a},\ \vec{b}\}\subset\mathscr{V}$, $\overline{AB}\in\vec{a}$, $\overline{BC}\in\vec{b}$. ***Суммой свободных векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***по правилу треугольника*** *называется свободный вектор с представителем* $\overline{AC}$ *такой, что* $[AC]$ *— сторона треугольника, построенного на отрезках* $[AB]$ *и* $[BC]$ (рис. 86).

Обозначение такой суммы: $(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т.}A}$.

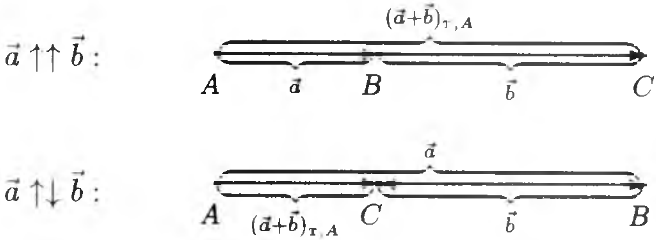


Рис. 87

Определение 35.2. ***Свободные векторы*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются* ***параллельными****, если они имеют представителей, принадлежащих параллельным прямым.*

Обозначение параллельных свободных векторов: $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Сложение параллельных свободных векторов требует дополнительных разъяснений, так как в этом случае треугольники представляются «сжатыми» до отрезков (рис. 87).

Это определение суммы свободных векторов зависит не только от способа (построение по правилу треугольника), но и от выбора начальной точки, поэтому естествен вопрос — каков результат построений при ее изменении? Т. е. при откладывании свободных векторов от различных точек получим ли эквиполентные направленные отрезки (представители одного и того же свободного вектора)? — Только в этом случае сопоставление двум свободным векторам их суммы по правилу треугольника есть отображение $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$.

Постановка задачи. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}\}\subset\mathscr{V}$, $\overline{AB}\in\vec{a}$, $\overline{CD}\in\vec{b}$. Построим по правилу треугольника представители сумм векторов в различных точках: $\overline{A'D'}\in(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т}, A'}$ и $\overline{A''D''}\in(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т}, A''}$ и сравним их (рис. 88).

Заметим, что

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'B'}\ \omega\ \overline{A''B''}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{A'A''}\ \omega\ \overline{B'B''}\\ \overline{B'D'}\ \omega\ \overline{B''D''}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{B'B''}\ \omega\ \overline{D'D''}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{A'A''}\ \omega\ \overline{D'D''}\overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\overline{A'D''}\ \omega\ \overline{A''D''}\overset{?}{\Rightarrow}\overline{A'D''}\in(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т}, A''}.$$

По утверждению 16.1 из этого следует, что свободные векторы $(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т}, A'}$ и $(\vec{a}+\vec{b})_{\text{т}, A''}$ совпадают, как имеющие общий направленный отрезок $\overline{A'D''}$. ■

Тем самым доказано утверждение.

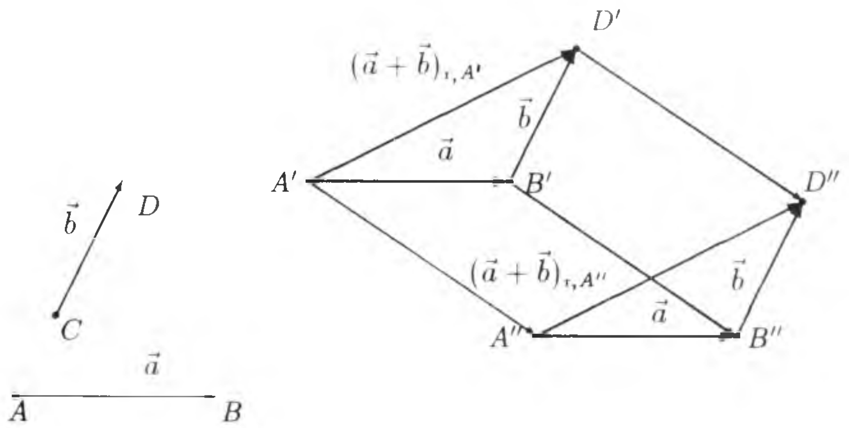


Рис. 88

Утверждение 35.1 (первая теорема корректности). *Определение суммы свободных векторов по правилу треугольника не зависит от выбора точки.*

Оно позволяет в обозначении суммы свободных векторов по правилу треугольника опускать индекс — точку: $(\vec{a}+\vec{b})_т$ и утверждать, что отношение

$$(+)_т=\{\langle\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle,\ (\vec{a}+\vec{b})_т\rangle\}\subset\mathscr{V}^2\times\mathscr{V}$$

есть отображение $(+)_т:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$, поскольку $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle$ сопоставляется единственный вектор $(\vec{a}+\vec{b})_т$.

Следующий способ сложения свободных векторов также известен по школьному курсу, его обычно применяют в случаях непараллельности свободных векторов-слагаемых.

Определение 35.3. *Пусть $\{\vec{a},\ \vec{b}\}\subset V$, $\overline{AB}\in\vec{a}$, $\overline{AD}\in\vec{b}$.* ***Суммой свободных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма*** *называется свободный вектор с представителем $\overline{AC}$ таким, что $|AC|$ — диагональ параллелограмма, построенного на отрезках $|AB|$ и $|AD|$.*

Обозначается сумма свободных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма так: $(\vec{a}+\vec{b})_{п,\,A}$. В случае параллельности векторов-слагаемых при указанных геометрических построениях параллелограмм вырож-

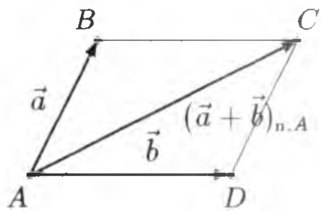


Рис. 89

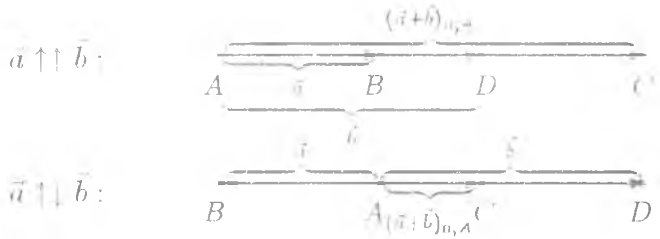


Рис. 90

дается и результат их сложения может быть изображен на рис. 90.

Утверждение 35.2 (вторая теорема корректности). *Сложения двух свободных векторов по правилу параллелограмма и по правилу треугольника дают один и тот же свободный вектор.*

Точнее: $\forall \{\vec a, \vec b\} \subset \mathscr{V} \Rightarrow (\vec a + \vec b)_т = (\vec a + \vec b)_{т,\,A} = (\vec a + \vec b)_{п,\,A}$.

Доказательство. В случае непараллельных свободных векторов очевидно: отложим от одной точки их представители (рис. 91)

$$\{\vec a, \vec b\} \subset \mathscr{V} \mid (\overline{AB} \in \vec a \wedge \overline{AD} \in \vec b) \mid (\overline{AB} \nparallel \overline{AD}).$$

По определению 35.3 $\overline{AC} \in (\vec a + \vec b)_{п,\,A}$, а так как $\overline{BC}\ \omega\ \overline{AD}$, то по определению 35.1 $\overline{AC} \in (\vec a + \vec b)_т$. Следовательно, $(\vec a + \vec b)_{п,\,A}$ и $(\vec a + \vec b)_т$ совпадают, как два класса эквивалентности (свободных вектора) с общим представителем. □

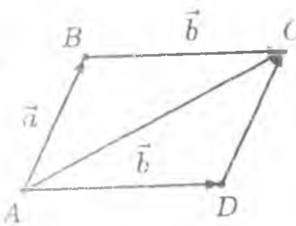


Рис. 91

Так как сумма свободных векторов по правилу треугольника не зависит от начальной точки, то и сумма свободных векторов по правилу параллелограмма не зависит от выбора начальной точки построения. А равенство отношений

$$(+)_т = \{\langle\langle \vec a, \vec b\rangle, (\vec a + \vec b)_т\rangle\} \text{ и } (+)_п = \{\langle\langle \vec a, \vec b\rangle, (\vec a + \vec b)_п\rangle\}$$

позволяет в дальнейшем пользоваться наиболее удобной для каждой задачи формой их сложения и говорить просто о ***сумме свободных векторов***, которую будем обозначать: $\vec a + \vec b$, и если потребуется, об отображении $(+): \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$.

Свойства суммы свободных векторов

По существу, эти свойства составляют доказательства выполнимости первых четырех аксиом векторного пространства для множества $\mathscr{V}$ и отображения $(+)$.

Свойство 35.1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \forall\{\vec{a}, \vec{b}\}\subset\mathscr{V}$.

Доказательство очевидно для случая непараллельных свободных векторов, если заметить, что (рис. 92):

$$\overline{AC}\in(\vec{a}+\vec{b}) \text{ и } \overline{AC}\in(\vec{b}+\vec{a})$$

Свойство 35.2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad \forall\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\subset\mathscr{V}$.

В доказательстве удобнее использовать сложение свободных векторов по правилу треугольника (рис. 93), так как один и тот же направленный отрезок $\overline{AD}\in(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и в то же время $\overline{AD}\in(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. ■

Сложением свободных векторов по правилу треугольника доказываются и следующие два свойства.

Свойство 35.3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \quad \forall\,\vec{a}\in\mathscr{V}$ ♦

Свойство 35.4. $\forall\,\vec{a}\in\mathscr{V} \Rightarrow \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. ♦

Свойства 35.1—35.4 означают, что сложением свободных векторов по правилу параллелограмма на множестве $\mathscr{V}$ задана структура коммутативной группы.

Обсуждению произведения скаляра на свободный вектор предпошлем несколько определений:

Определение 35.4. ***Свободные векторы*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются* ***сонаправленными****, если сонаправлены лучи* $[AB)$ и $[CD)$ *их представителей* $\overline{AB}\in\vec{a}$ *и* $\overline{CD}\in\vec{b}$, *и* ***противоположно направленными****, если такие лучи направлены противоположно.*

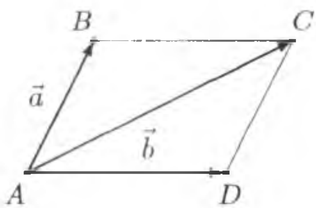


Рис. 92

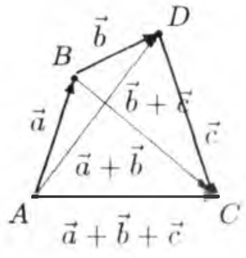


Рис. 93

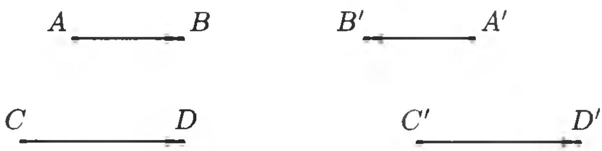


Рис. 94

Их обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и, соответственно, $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ (рис. 94).

Нулевой свободный вектор считается сонаправленным и противоположно направленным любому свободному вектору.

Отметим, что отношение сонаправленности на множестве всех лучей, а значит, и на множестве всех свободных векторов $\mathscr{V}$ транзитивны, а противоположной направленности не обладает свойством транзитивности.

Определение 35.5. ***Модулем** или **длиной свободного вектора** называется длина его любого представителя.*

Обозначается модуль **свободного вектора** $\vec{a}$: $|\vec{a}|$.

Это определение корректно, так как все представители одного свободного вектора имеют по определению равные длины, и позволяет сформулировать довольно очевидный признак:

Лемма 35.4. *Два свободных вектора равны тогда и только тогда, когда они сонаправлены и их длины равны.*

Определение 35.6. ***Произведением скаляра (числа)** α **на свободный вектор** $\vec{a}$ называется свободный вектор $\vec{b}$ такой, что*

$$|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}| \wedge (\alpha > 0 \Rightarrow \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}) \wedge (\alpha < 0 \Rightarrow \vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}) \wedge (\alpha = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0})$$

Обозначается произведение скаляра α на свободный вектор $\vec{a}$: $\alpha\vec{a}$.

Прилагательное скалярный происходит от латинского слова scalaris — ступенчатый, оно обычно применяется к величине, каждое значение которой может быть выражено только одним числом (в отличие от вектора, матрицы и т. д.).

По самому определению произведение скаляра на свободный вектор не зависит от точки (сравните с утверждениями 35.1 и 35.2) и им вводится отношение $(\cdot) = \{\langle\langle\alpha, \vec{a}\rangle, \alpha\vec{a}\rangle\} \subset (\mathbf{R}\times\mathscr{V})\times\mathscr{V}$, которое является отображением $(\cdot)\colon \mathbf{R}\times\mathscr{V} \to \mathscr{V}$.

Свойства произведения скаляра на свободный вектор

Они подтверждают выполнимость аксиом V.5 — V.8 векторного пространства.

Свойство 35.5. $1\vec{a}=\vec{a} \quad \forall\, \vec{a}\in\mathscr{V}$.

Свойство 35.6. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a} \quad \forall\,\langle\alpha,\ \beta,\ \vec{a}\rangle\in\mathsf{R}^2\times\mathscr{V}$.

Доказательство. Поскольку из определения следует, что $0\vec{a}=\vec{0}$ и в случае хотя бы одного нулевого множителя свойство выполняется тривиально, то рассмотрим случай $\alpha\beta\neq 0$.

Чтобы было можно воспользоваться признаком равенства свободных векторов (л. 35.4), надо установить равенство модулей и сонаправленность $(\alpha\beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$.

1. $|\alpha(\beta\vec{a})|\overset{?}{=}|\alpha|\,|\beta\vec{a}|\overset{?}{=}|\alpha|\,|\beta|\,|\vec{a}|\overset{?}{=}|(\alpha\beta)|\,|\vec{a}|\overset{?}{=}|(\alpha\beta)\vec{a}|$.

2. Сравнивая с 0 коэффициенты, выделим четыре случая:

$$1).\ \alpha>0\wedge\beta>0,\qquad 2).\ \alpha<0\wedge\beta<0,$$

$$3).\ \alpha<0\wedge\beta>0,\qquad 4).\ \alpha>0\wedge\beta<0,$$

и проведем доказательство для последнего из них:

Если $\alpha>0\wedge\beta<0$, то $\alpha\beta<0$ и $(\alpha\beta\,\vec{a})\downarrow\uparrow\vec{a}$. ■

$$\left.\begin{array}{l}\alpha>0\overset{?}{\Rightarrow}\alpha(\beta\,\vec{a})\uparrow\uparrow\beta\,\vec{a}\\ \beta<0\overset{?}{\Rightarrow}(\beta\,\vec{a})\downarrow\uparrow\vec{a}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}(\alpha\beta)\,\vec{a}\downarrow\uparrow\alpha(\beta\vec{a}).$$

Т. е. свободные векторы $\alpha(\beta\vec{a})$ и $(\alpha\beta)\vec{a}$ равны по модулю и сонаправлены, что по признаку — лемме 35.4 означает их совпадение.

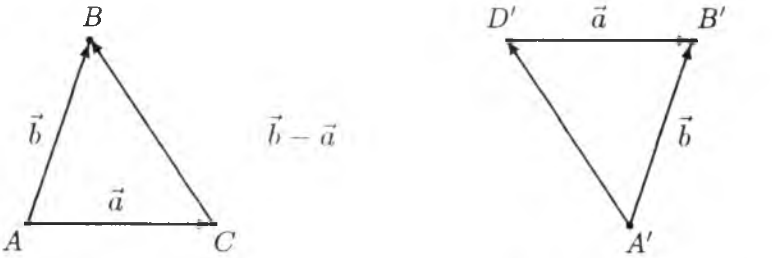
В каждом из оставшихся случаев 1). — 3). рассуждения аналогичны. □

Следующие свойства приводим без доказательств, которые основаны на том же признаке равенства (лемме 35.4) свободных векторов.

Свойство 35.7. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \quad \forall\,\langle\alpha,\ \beta,\ \vec{a}\rangle\in\mathsf{R}^2\times\mathscr{V}$.

Свойство 35.8. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \quad \forall\,\langle\alpha,\ \vec{a},\ \vec{b}\rangle\in\mathsf{R}\times\mathscr{V}^2$.

Таким образом, множество $\mathscr{V}$ с операциями сложения свободных векторов (опр. 35.1, или 35.2) и умножения скаляра на свободный вектор (опр. 35.4) имеет ***структуру векторного пространства***, или ***является моделью векторного пространства***.



$\vec b - \vec a = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$
$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$\vec b - \vec a = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{D'B'} =$
$= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'D'}$

Рис. 95

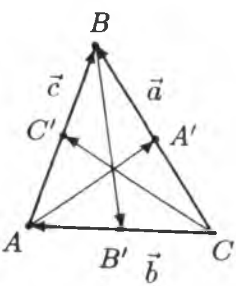


Рис. 96

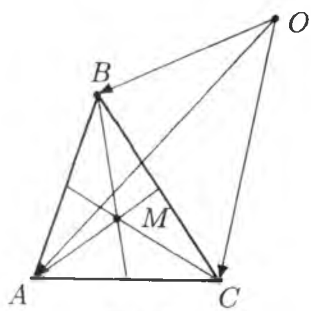


Рис. 97

Замечание 35.1. Для любых векторов $\vec{\boldsymbol a}$ и $\vec{\boldsymbol b}$ определяется разность векторов (см. § 33): $\vec{\boldsymbol b} - \vec{\boldsymbol a} \overset{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol b} + (-\vec{\boldsymbol a})$. Построить представитель такой разности свободных векторов не составляет труда, если использовать «правило треугольника» (рис. 95).

Пример 35.1. Легко видеть, что в произвольном треугольнике ABC сумма векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \overset{?}{=} \vec{\boldsymbol 0}$. Если ввести обозначения: $\vec{\boldsymbol a} \ni \overline{AB}$, $\vec{\boldsymbol b} \ni \overline{BC}$, $\vec{\boldsymbol c} \ni \overline{CA}$, то последнее можно записать в форме:

$$\vec{\boldsymbol a} + \vec{\boldsymbol b} + \vec{\boldsymbol c} = \vec{\boldsymbol 0}. \qquad (35.abc)$$

Также равна нулевому вектору и сумма векторов — «медиан»: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{\boldsymbol 0}$, где A' — середина отрезка BC, B' — середина отрезка AC и C' — середина отрезка AB (рис. 96). Чтобы убедиться в последнем, заметим, что

$$\overrightarrow{AA'} \overset{?}{=} (\vec{\boldsymbol a} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol b}),\ \overrightarrow{BB'} \overset{?}{=} (\vec{\boldsymbol b} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol c}),\ \overrightarrow{CC'} \overset{?}{=} (\vec{\boldsymbol c} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol a}),$$

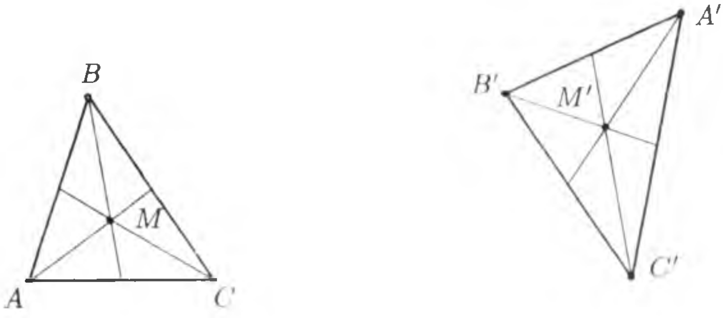


Рис. 98

откуда

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\vec a+\frac{1}{2}\vec b)+(\vec b+\frac{1}{2}\vec c)+(\vec c+\frac{1}{2}\vec a)\overset{?}{=}(\vec a+\vec b+\vec c)+$$
$$+(\frac{1}{2}\vec b+\frac{1}{2}\vec c+\frac{1}{2}\vec a)\xlongequal{(35.\ abc)}\frac{3}{2}(\vec a+\vec b+\vec c)=\vec 0.$$

Задача 35.1.1. Докажите, что при произвольном положении точки O относительно треугольника ABC имеет место равенство:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

(рис. 97).

Указание. $\overrightarrow{OM}\overset{?}{=}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{OM}\overset{?}{=}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OM}\overset{?}{=}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$. См. также пример 35.1 и задачу 35.1.1.

Задача 35.1.2. Докажите, что при произвольном положении треугольников ABC и $A'B'C'$ имеет место равенство:

$$\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}),$$

где M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а M' — точка пересечения медиан $\triangle A'B'C'$ (рис. 98).

Указание. См. пример 35.1 и задачу 35.1.2.

Задача 35.1.3. $ABCD$ — параллелограмм, выразите вектор, коллинеарный биссектрисе $\angle BAD$, через векторы $\vec a$ и $\vec b$, где $\vec a\ni\overline{AB}$, $\vec b\ni\overline{AD}$ (рис. 99).

Указание. Вспомните, в каком четырехугольнике диагональ является в то же время биссектрисой одного из его внутренних углов.

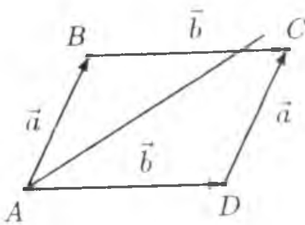


Рис. 99

§ 36. ПОДПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 36.1. ***Подпространством векторного пространства*** *$\langle V, +, \cdot\rangle$ называется его непустое подмножество V', если $\forall\langle \alpha, \vec{a}, \vec{b}\rangle \in \mathbf{R}\times V'^2$ выполняются условия:*

SS.1: $\vec{a}+\vec{b}\in V'$.

SS.2: $\alpha\cdot\vec{a}\in V'$.

Подпространство V' также называют ***векторным подпространством*** *или* ***линейным подпространством*** *векторного пространства. Условия SS.1 и SS.2 означают* ***замкнутость*** *V'* ***относительно операций векторного пространства*** *$+$ и $\cdot$.*

Теорема 36.1. *Всякое подпространство векторного пространства есть векторное пространство.*

Доказательство. В векторном пространстве V определены отображения — операции:

$$|+|: V\times V\to V \text{ и } |\cdot|: \mathbf{R}\times V\to V.$$

Тогда сужения этих отображений:

$$|+||_{V'\times V'}: V'\times V'\to V \text{ и } |\cdot||_{\mathbf{R}\times V'}: \mathbf{R}\times V'\to V$$

согласно утверждению 7.2 есть отображения. Определение подпространства, по существу, означает, что

$$\mathrm{Im}+|_{V'\times V'} \overset{?}{\subset} V' \text{ и } \mathrm{Im}|\cdot||_{\mathbf{R}\times V'} \overset{?}{\subset} V',$$

откуда следует, что

$$|+||_{V'\times V'}: V'\times V'\to V'$$
$$\text{и } |\cdot||_{\mathbf{R}\times V'}: \mathbf{R}\times V'\to V'.$$

Все аксиомы векторного пространства V.1— V.8 выполняются с очевидностью для

$$\forall\langle \alpha, \beta, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle \in$$
$$\in \mathbf{R}^2\times(V')^3\subset \mathbf{R}^2\times V^3.$$ ♦ ■

Когда говорят о подпространстве векторного пространства, то из контекста обычно ясно, о сужении каких операций идет речь и, как правило, нет необходимости в дополнительном указании операций на $V'\subset V$.

Наглядно суть условий SS.1 и SS.2 можно выразить схемой (рис. 100).

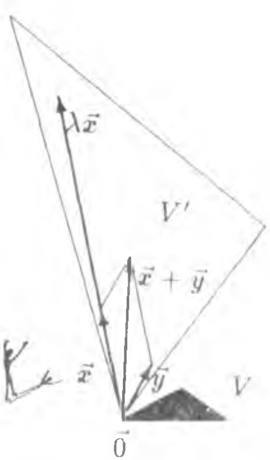


Рис. 100

Замечание 36.1. Несложно показать, что два условия, характеризующих подпространство: SS.1 и SS.2, можно заменить одним, потребовав для любого кортежа $\langle\alpha, \beta, \vec{a}, \vec{b}\rangle \in \mathbf{R}^2 \times V'^2$ выполнимости условия:

SS: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V'$. ♦

Примеры подпространств векторных пространств

Пример 36.1. $\forall V \ni \dot{0} \Rightarrow \{\dot{0}\}$ — подпространство V (см. пример 34.2) в этом случае говорят о ***нульмерном векторном подпространстве*** V или его ***тривиальном подпространстве***.

Тривиальный — от латинского слова trivialis, что означает — лишенный оригинальности, избитый, заурядный.

Так же очевидно, что векторное пространство является своим подпространством, его и нульмерное векторное подпространство иногда называют ***несобственными подпространствами***.

Пример 36.2. $\{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ для любого ненулевого $\vec{a} \in V$ есть подпространство V. Подпространства такого вида (при различных $\vec{a} \in V$) называют ***одномерными векторными подпространствами*** V.

Из предыдущего следует, что любое векторное пространство, содержащее более одного элемента, обязательно имеет и одномерное подпространство. ♦

Задание 36.1. Приведите примеры подпространств векторного пространства $\boldsymbol{M}(m \times n)$.

Задача 36.1.1. Определите, являются ли подпространством в $\langle \boldsymbol{gl}(n), +, \cdot\rangle$ множества

1. скалярных матриц?
2. симметрических матриц?
3. кососимметрических матриц?
4. невырожденных матриц?

Пример 36.3. В векторном пространстве числовых функций одной переменной $\mathscr{F}[\mathbf{R}]$ подпространство — множество всех многочленов: $\mathscr{P}[x]$.

Пример 36.4. В векторном пространстве числовых функций (функционалов) $\mathscr{F}[D]$ (на некотором множестве D) образуют подпространство множество всех функций, равных 0 в одних и тех же точках (для простоты можем рассматривать функции одной переменной на отрезке или числовой прямой), так как это множество замкнуто относительно операций на $\mathscr{F}[D]$ (сумма двух числовых функций $f[+]g$ и произведение числа на функцию

$\alpha|\cdot|f$ обращаются в 0 по крайней мере в тех же точках, в которых равны 0 и f и g одновременно).

Пример 36.5. В векторном пространстве функций $\mathcal{F}[D]$ (можем считать $D=[a, b]\in\mathbf{R}$) множество всех функций, ограниченных некоторой константой, т. е.

$$\{f\in\mathcal{F}[D]\,|\,f(x)\leqslant c_0\ \ \forall x\in D\},$$

подпространство не образуют, так как; например, если $f_0(x)=c_0$, и значит, f_0 ограничено константой c_0, то $2f_0$ уже не будет удовлетворять этому условию.

Слово константа происходит от латинского «constans», что означает постоянный, неизменный.

Пример 36.6. В векторном пространстве многочленов $\mathcal{P}[x]$ подпространством является $\mathcal{P}^k[x]$ — пространство всех многочленов степени, не превышающей k, а множество тех из них, коэффициенты которых положительны (или неотрицательны), подпространство не образуют. ◆

Задание 36.2. Приведите свой пример подпространства векторного пространства $\mathcal{P}[x]$.

Пример 36.7. В векторном пространстве функций $\mathcal{F}[a, b]$, определенных на отрезке, образуют подпространства множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$: $\mathcal{C}^0[a, b]$, множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций: $\mathcal{C}^1[a, b]$, и, вообще, все функции дифференцируемые на $[a, b]$: $\mathcal{D}[a, b]$. Причем,

$$\mathcal{F}[a, b]\supset\mathcal{D}[a, b]\supset\mathcal{C}^0[a, b]\supset\mathcal{C}^1[a, b],$$

как векторные подпространства.

Пример 36.8. В векторном пространстве функций, определенных на всей вещественной прямой — $\mathcal{F}[\mathbf{R}]$ образуют подпространство множество ***тригонометрических полиномов*** — функций, представимых в виде:

$$\begin{gathered}a_0+a_1\sin x+b_1\cos x+\\+a_2\sin 2x+b_2\cos 2x+\ldots+a_k\sin kx+b_k\cos kx\end{gathered}\tag{36.t}$$

при всех возможных $k\in\mathbf{N}$. Такое подпространство обозначается $\mathcal{T}[\mathbf{R}]$ или $\mathcal{T}$.

В $\mathcal{T}$ в свою очередь векторное подпространство образуют ***тригонометрические полиномы порядка n*** — все такие функции, для которых в представлении (36.t) число $k\leqslant n$, причем $n\in\mathbf{N}$, фиксировано. Это подпространство обозначается $\mathcal{T}^n$. Очевидно, что

$$\mathcal{T}^n\subset\mathcal{T}\subset C[\mathbf{R}]\subset C^0[\mathbf{R}]\subset\mathcal{D}[\mathbf{R}]\subset\mathcal{F}[\mathbf{R}].$$

Несложно показать, что бинарное отношение:
$SS = \{\langle X, Y\rangle \mid \{X, Y\} \subset V \wedge X$ — подпространство $Y\} \subset V \times V$ — антисимметрично и транзитивно, т. е. имеет место утверждение

Утверждение 36.1. *Бинарное отношение «быть подпространством» на множестве всех подпространств векторного пространства есть отношение порядка.*

Задание 36.3. Определите, каким порядком на V: строгим или нестрогим является отношение SS? (См. лекция 4, § 14). Имеет ли порядок $\langle V, SS\rangle$ наибольший или наименьший элементы? ♦

Пример 36.9. — Утверждение 36.2. *Множество всех решений линейной однородной системы уравнений с n переменными S_A есть подпространство координатного пространства $\mathbf{R}^n$.*

Напоминание. Согласно § 22 (см. также пример 34.5), систему m линейных однородных уравнений с n переменными:

$$\left|\begin{array}{l} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 + \ \dots\ + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 + \ \dots\ + a_n^2x^n = 0, \\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + a_3^mx^3 + \ \dots\ + a_n^mx^n = 0, \end{array}\right. \qquad (34.\mathrm{a})$$

можно записать в матричном виде: $A \cdot X = O$, (34.a′)

где $$A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n),\ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(n \times 1),\ O \in \boldsymbol{M}(m \times 1).$$

Доказательство заключается в проверке выполнимости условий SS.1 и SS.2.

1) SS.1. $\forall \{X, Y\} \subset S_A \overset{?}{\Rightarrow} X + Y \in S_A$, т. е. является ли сумма двух решений линейной однородной системы уравнений ее решением? Или $A \cdot (X + Y) \overset{?}{=} O$, если $A \cdot X = O$ и $A \cdot Y = O$.

Очевидно, $A \cdot (X + Y) \overset{?}{=} A \cdot X + A \cdot Y \overset{?}{=} O + O = O$.

2) SS.2. $\forall \langle \alpha, X\rangle \in \mathbf{R} \times S_A \overset{?}{\Rightarrow} \alpha \cdot X \in S_A$,
т. е. является ли произведение скаляра на решение (34.a′) ее решением? Или

$$A \cdot (\alpha X) \overset{?}{=} O,\ \text{если}\ A \cdot X = O.$$

$$A \cdot (\alpha X) \overset{?}{=} \alpha (A \cdot X) \overset{?}{=} \alpha O = O.$$

Следовательно, сумма двух любых решений линейных однородных уравнений и произведение любого числа на такое ее решение являются решениями этой системы уравнений. ■

Иначе говоря, множество S_A замкнуто относительно сложения кортежей и умножения скаляра на кортеж и, значит, является подпространством координатного пространства $\mathbf{R}^n$. (Сравните с примером 34.5).

Оказывается, имеет место и обратное:

Утверждение 36.3. *Любое подпространство координатного пространства может быть задано некоторой системой линейных однородных уравнений.*

Задача 36.1.2. Установите, является ли подпространством в $\mathbf{R}^n$ множество решений $S_{A|B}$ системы m линейных неоднородных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 + \ \dots \ + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 + \ \dots \ + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + a_3^mx^3 + \ \dots \ + a_n^mx^n = b^m, \end{cases}$$

где $\langle b^1, b^2, \dots b^m\rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0\rangle$.

Указание. Согласно § 22, эту систему можно записать в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n),\ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(n \times 1),\ B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(m \times 1).$$

Доказательство заключается в проверке выполнимости условий SS.1 и SS.2:

1) SS.1: $\forall \{X, Y\} \subset S_{A|B} \overset{?}{\Rightarrow} X + Y \in S_{A|B}$, т. е. $A \cdot (X+Y) \overset{?}{\neq} B$, если $A \cdot X = B$ и $A \cdot Y = B$?

$$A \cdot (X+Y) \overset{?}{=} A \cdot X + A \cdot Y = ?.$$

2) SS.2: $\forall \langle \alpha, X\rangle \in \mathbf{R} \times S_{A|B} \overset{?}{\nRightarrow} \alpha \cdot X \in S_{A|B}$, т. е. $A \cdot (\alpha X) \overset{?}{\neq} B$, если $A \cdot X = B$?

$$A \cdot (\alpha X) \overset{?}{=} \alpha (A \cdot X) = ?.$$

Следовательно, множество $S_{A|B}$ не является векторным подпространством $\mathbf{R}^n$.

Пример 36.10. В координатном векторном пространстве подпространством является множество всех кортежей с фиксированными местами элементов, равных 0.

Например, подпространство в $\boldsymbol{M}(5 \times 1)$ множество

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \\ x^4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \qquad (36.\mathrm{v}')$$

Задача 36.2.1. 1. Докажите, что подмножество

$$V'' = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} \middle| \langle x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5 \rangle \in \mathbf{R}^5 \wedge x^1 + x^2 + x^3 = 0 \right\} \quad (36.\mathrm{v}'')$$

координатного векторного пространства $\boldsymbol{M}(5 \times 1)$ есть его подпространство.

Доказательство заключается в проверке выполнимости условий SS.1 и SS.2.

$$1).\ \mathrm{SS.1:}\ \forall \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \\ b^5 \end{pmatrix} \right\} \subset V'' \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \\ b^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 + b^1 \\ a^2 + b^2 \\ a^3 + b^3 \\ a^4 + b^4 \\ a^5 + b^5 \end{pmatrix} \in V''?$$

(проверяется условие (36.v″), но уже для вектора $\vec{a} + \vec{b}$).

$$(a^1 + b^1) + (a^2 + b^2) + (a^3 + b^3) \overset{?}{=} 0.$$

$$2).\ \mathrm{SS.2:}\ \forall \left\langle \alpha,\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathbf{R} \times V'' \overset{?}{\Rightarrow} \alpha \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a^1 \\ \alpha a^2 \\ \alpha a^3 \\ \alpha a^4 \\ \alpha a^5 \end{pmatrix} \in V''?$$

(проверяется условие (36.v″), для вектора $\alpha \cdot \vec{a}$).

$$(\alpha a^1) + (\alpha a^2) + (\alpha a^3) \overset{?}{=} 0.$$

Следовательно, V'' — подпространство векторного пространства $\boldsymbol{M}(5 \times 1)$.

2. Определите, является ли множество $V' \cap V'' \subset \boldsymbol{M}(5 \times 1)$, где $V' \subset \boldsymbol{M}(5 \times 1)$ (см. пример. 36.9), его векторным подпространством?

Указание. Прежде всего выделите все условия, которым должен удовлетворять вектор, принадлежащий $V' \cap V'' \subset \boldsymbol{M}(5 \times 1)$, (см. пример 36.9, задача 36.2.1).

В общем случае имеет место:

Утверждение 36.4. *Пересечение любого множества подпространств векторного пространства есть его подпространство.*

Задача 36.1.3. Является ли объединение подпространств V' (примера 36.9) и V'' (задачи 36.2.1) векторного пространства $\boldsymbol{M}(5\times 1)$ его подпространством?

Вообще говоря, несложно показать, что объединение двух произвольных подпространств векторного пространства не является его подпространством за исключением случаев их вложения ($V'\subset V''\Rightarrow V'\cup V''=V''$), однако, по объединению даже произвольных подпространств векторного пространства можно построить минимальное подпространство этого векторного пространства, содержащее их объединение. Для этого потребуется ввести дополнительно некоторые новые понятия.

Определение 36.2. ***Линейной комбинацией векторов*** *$\langle\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{a}}_k\rangle\subset V$ с коэффициентами $\langle\alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k\rangle\in\mathbf{R}^k$ называется вектор $\vec{\boldsymbol{v}}=\alpha^1\vec{\boldsymbol{a}}_1+\alpha^2\vec{\boldsymbol{a}}_2+\dots+\alpha^k\vec{\boldsymbol{a}}_k\in V$.*

В таком случае говорят, что ***вектор $\vec{\boldsymbol{v}}$ линейно выражен*** через $\langle\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{a}}_k\rangle\subset V$ с коэффициентами $\langle\alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k\rangle$.

В частности, ***линейная комбинация*** *векторов называется* ***тривиальной***, *если все ее коэффициенты нулевые, в противном случае она называется* ***нетривиальной*** *линейной комбинацией.*

Определение 36.3. ***Линейной оболочкой непустого подмножества*** *V' векторного пространства V называется множество всех возможных линейных комбинаций векторов из V'.*

Обозначается линейная оболочка множества V': $L(V')$.

Примеры 36.11. линейных оболочек в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(3\times 1)$:

1) $B=\{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3\}\subset\boldsymbol{M}(3\times 1)$, где

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{e}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{e}}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$L(B)=\{x^1\vec{\boldsymbol{e}}_1+x^2\vec{\boldsymbol{e}}_2+x^3\vec{\boldsymbol{e}}_3\}=\left\{x^1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x^3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\right\}=\boldsymbol{M}(3\times 1).$$

В этом случае оказалось, что линейная оболочка $L(B)$ совпадает с $\boldsymbol{M}(3\times 1)$.

2) $A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}\subset \boldsymbol{M}(3\times 1)$, где

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$L(A)=\{x^1\vec{a}_1+x^2\vec{a}_2+x^3\vec{a}_3\}=\left\{x^1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+x^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x^3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}2x^1\\x^2+x^3\\x^3\end{pmatrix}\right\}\subset \boldsymbol{M}(3\times 1).$$

Совпадают ли в этом случае $L(A)$ и $\boldsymbol{M}(3\times 1)$? ◆

3) $C=\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}\subset \boldsymbol{M}(3\times 1)$, где $\vec{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$L(C)=\{x^1\vec{c}_1+x^2\vec{c}_2\}=\left\{x^1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\0\end{pmatrix}\right\}\subset \boldsymbol{M}(3\times 1).$$

Заметим, что во всех предыдущих примерах линейная оболочка подмножества векторного пространства есть линейное подпространство $\boldsymbol{M}(3\times 1)$. Это обобщается в теорему.

Теорема 36.2. *Линейная оболочка всякого непустого множества $L(V')$ есть подпространство векторного пространства $V\supset V'\neq\varnothing$, более того — это наименьшее подпространство векторного пространства V, содержащее это множество V'.*

Задача 36.1.3. Докажите теорему 36.2.

Доказательство. 1. Проверим выполнимость условий SS.1 и SS.2 для произвольных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}\}\subset V'$ и любого $\lambda\in\mathbf{R}$.

SS.1: $\forall\{\vec{a}, \vec{b}\}\subset L(V') \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\in L(V')$.

SS.2: $\forall\langle\lambda, \vec{a}\rangle\in \mathbf{R}\times L(V') \Rightarrow \lambda\vec{a}\in L(V')$.

2. $L(V')$ — наименьшее подпространство векторного пространства V, содержащее подмножество V'.

Указание. Предположим, что найдется подпространство $V''\subset V$ такое, что $V'\subset V''\subset L(V')$, но $V''\neq L(V')$, что означает наличие вектора $\vec{c}\in L(V')$, т. е. $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ для некоторых векторов $\{\vec{a}, \vec{b}\}\subset V'$, причем $\vec{c}\notin V''$.

Определение 36.4. ***Суммой подпространств*** *V' и V'' векторного пространства V называется линейная оболочка множества $V'\cup V''$.*

Обозначается сумма подпространств: $V'+V''\overset{\text{def}}{=\!=}L(V'\cup V'')$.

Если $V'\cap V''=\{\vec{0}\}$, то ***сумму подпространств*** *$V'+V''$ называют* ***прямой***.

Ее обозначение $V' \oplus V''$.

Следствие 36.1. Согласно теореме 36.2 *сумма подпространств векторного пространства есть подпространство этого векторного пространства.*

Определение 36.5. *Если векторное пространство разложено в прямую сумму подпространств: $V = V' \oplus V''$, то V'' называют* ***дополнительным подпространством*** *или* ***дополнением*** V'.

Это понятие, очевидно, симметрично: если V'' — подпространство, дополнительное к V' в векторном пространстве V, то V' — дополнительно к V''.

Можно доказать следующее утверждение:

Утверждение 36.5. *Для любого подпространства V' векторного пространства V существует подпространство, дополнительное ему в V.*

Однако, дополнительное подпространство подпространства $V' \subset V$ определено, вообще говоря, неоднозначно.

Пример 36.11. В примере 36.10 показано, что $\boldsymbol{M}(3 \times 1) = L(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$, где $\vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{M}(3 \times 1) = L(\vec{\boldsymbol{e}}_1) \oplus L(\vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$.

В то же время $\boldsymbol{M}(3 \times 1) = L(\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3)$, где $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, и $\boldsymbol{M}(3 \times 1) = L(\vec{\boldsymbol{a}}_1) \oplus L(\vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3)$. ♦

Утверждение 36.6. *Векторное пространство $V = V' \oplus V''$, тогда и только тогда, когда любой его вектор $\vec{\boldsymbol{x}} \in V$ однозначно разлагается в сумму: $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}' + \vec{\boldsymbol{x}}''$ так, что $\vec{\boldsymbol{x}}' \in V'$, а $\vec{\boldsymbol{x}}'' \in V''$.*

Доказательство.

1. Пусть $V = V' \oplus V''$, но найдется в V вектор, представляемый в виде сумм: $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}' + \vec{\boldsymbol{x}}''$ и $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}' + \vec{\boldsymbol{y}}''$ таких, что $\{\vec{\boldsymbol{x}}', \vec{\boldsymbol{y}}'\} \subset V'$, $\{\vec{\boldsymbol{x}}'', \vec{\boldsymbol{y}}''\} \subset V''$, но $\langle \vec{\boldsymbol{x}}', \vec{\boldsymbol{x}}'' \rangle \neq \langle \vec{\boldsymbol{y}}', \vec{\boldsymbol{y}}'' \rangle$.

Тогда $\vec{\boldsymbol{x}}' + \vec{\boldsymbol{x}}'' = \vec{\boldsymbol{y}}' + \vec{\boldsymbol{y}}''$, откуда

$$\underset{V'}{\underset{\Cap}{\vec{\boldsymbol{x}}' - \vec{\boldsymbol{y}}'}} = \underset{V''}{\underset{\Cap}{-\vec{\boldsymbol{x}}'' + \vec{\boldsymbol{y}}''}}.$$

Но согласно определению, $V' \cap V'' = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$, значит

$$\vec{\boldsymbol{x}}' - \vec{\boldsymbol{y}}' = \vec{\boldsymbol{0}} \text{ и } -\vec{\boldsymbol{x}}'' + \vec{\boldsymbol{y}}'' = \vec{\boldsymbol{0}},$$

что влечет $\langle\vec{x}', \vec{x}''\rangle = \langle\vec{y}', \vec{y}''\rangle$. Следовательно, предположение о неоднозначности подобного разложения какого-либо вектора неверно.

2. Если же $V' \cap V'' \neq \{\vec{0}\}$, то найдется ненулевой вектор $\vec{a} \in V' \cap V''$. Тогда любой вектор $\vec{x}$ из V, помимо разложения $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ с $\vec{x}' \in V'$ и $\vec{x}'' \in V''$, можно представить в виде суммы: $\vec{x} = (\vec{x}' + \vec{a}) + (\vec{x}'' - \vec{a})$, с $(\vec{x}' + \vec{a}) \in V'$ и $(\vec{x}'' - \vec{a}) \in V''$. Это противоречит условию однозначности разложения произвольного вектора из V в сумму векторов, принадлежащих подпространствам V' и V''. ■

Полезно обратить внимание на два частных случая линейных оболочек систем с одинаковым числом векторов.

Утверждение 36.7. *Если V — векторное пространство, а множества векторов $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\} \subset V$ и $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n\} \subset V$ таковы, что*

$$\vec{a}_i = \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_i \text{ при } i \neq j \\ \lambda \vec{b}_j \text{ при } i = j \text{ и } \lambda \neq 0 \end{array} \right\}$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots n\}$, то линейные оболочки A и B совпадают: $L(A) = L(B)$.

Утверждение 36.8. *Если V — векторное пространство, а множества векторов $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\} \subset V$ и $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n\} \subset V$ таковы, что*

$$\vec{a}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{b}_i & \text{при } i \neq k \\ \vec{b}_k + \vec{b}_j & \text{при } i = k \end{array} \right\} \qquad (36.*)$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots n\}$, то их линейные оболочки совпадают: $L(A) = L(B)$.

Задача 36.2.2. Докажите утверждение 36.8.

Доказательство естественно проводить методом двойного включения.

1) $L(A) \overset{?}{\subset} L(B)$.

Возьмем произвольный $\vec{x} \in L(A)$, это означает, что $\vec{x} =$

$$= x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2 + \ldots + x^{k-1}\vec{a}_{k-1} + \boxed{x^k\vec{a}_k} + x^{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + x^n\vec{a}_n \overset{(36.*)}{=\!=}$$

$$= x^1\vec{b}_1 + \ldots + x^{k-1}\vec{b}_{k-1} + \boxed{x^k(\vec{b}_k + \vec{b}_j)} + x^{k+1}\vec{b}_{k+1} + \ldots + x^n\vec{b}_n \overset{?}{\in} L(B).$$

В силу произвольности $\vec{x} \in L(A)$ следует $L(A) \subset L(B)$.

2) Аналогично $L(B) \subset L(A)$.

По принципу двойного включения это обеспечивает

$$L(A) = L(B).$$ ■

Из предыдущих утверждений вытекает обобщение.

Следствие 36.2. *Если V — векторное пространство, а множества векторов $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\} \subset V$ и $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n\} \subset V$ таковы, что*

$$\vec{a}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{b}_i & \text{при } i \neq k \\ \vec{b}_k + \lambda \vec{b}_j & \text{при } i = k \end{array} \right\}$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots n\}$, то их линейные оболочки совпадают: $L(A) = L(B)$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Господь Бог — искусный математик и физик. Задача науки состоит в том, чтобы раскрыть блистательный замысел творца.
>
> *М. Клайн.* «Математика — утрата определенности»

Многие историки науки считают «родителями векторного пространства» ирландского ученого XIX в. У. Гамильтона, о вкладе которого в математику мы уже упоминали, говоря об истории открытия матричного исчисления, а также его немецких коллег и современников Г. Грассмана (Grassman Herman Gunter, 1809—1887) и А. Мебиуса (Möbius August Ferdinand, 1790—1868). Даже сам термин «вектор» ввел также Гамильтон около 1845 г. (по другим источникам — в 1864 г.).

Между тем историю векторного исчисления, как историю и корни всякой крупной математической теории, можно проследить задолго до его выделения в самостоятельный раздел математики. Так еще у Архимеда (Αρχιμηδηζ, ≈287—212 г. г. до н. э.) в его всем известном со школы законе присутствует величина, характеризующаяся не только численным значением, но и направлением. Более того: векторный характер сил, скоростей и перемещений в пространстве был знаком многим ученым Античного времени, а «правило параллелограмма» сложения векторов было известно еще в IV в. до Р. Х. математикам школы Аристотеля. По существу, в таком же эмпирическом смысле векторами пользовались выдающиеся ученые XVI—XVII в. в. Г. Галилей (Galilei Galileo, 1564—1642), И. Ньютон и другие их совре менники. Вектор обычно изображался отрезком с указанным на нем направлением, т. е. направленным отрезком.

В середине XVI в. были открыты, и в конце концов все же заслужили признание мнимые числа благодаря работам итальянского математика Дж. Кардано (Cardano Girolomo, 1501—1576), а затем комплексные — его соотечественника Р. Бомбелли (Bombelli Raffael, 1530—1572). Оказалось удивительно удачным изображение их векторами (направленными отрезками), отложенными от начала некоторой прямоугольной декартовой системы координат на плоскости, в том смысле, что таким же образом довольно естественно изображались результаты основных операций с такими числами: их суммы (по «правилу параллелограмма») и произведения. Этим же геометрическим представлением суммы комплексных чисел пользовался Гаусс. Но такая их интерпретация окончательно утвердилась в математике со второй половины XVIII столетия только после исследований датского ученого К. Весселя (Wessel Caspar, 1745—1818) и швейцарца Ж. Аргана (Argand Jean Robert, 1765—1822), в результате которых многим стало ясно, что структура векторов и их приложений гораздо богаче и разнообразнее, чем предполагалось ранее. Прежняя механистическая концепция вектора перестала удовлетворять науку. А последовавшие работы Гаусса (1831 г.) по геометрии комплексных чисел позволили итальянскому математику Дж. Беллавитису (Bellavitis Jinsto, 1803—1880) в 1854 г., развив идеи эквиполентности, подготовить основание для того, чтобы математика смогла перейти от свободных (геометрических) векторов к абстрактному векторному пространству.

Параллельно с исследованиями комплексных чисел в работах многих математиков XVII—XVIII в. в., занимавшихся геометрическими проблемами, можно увидеть нарастание потребности в неком геометрическом исчислении, подобном численному (исчислению действительных чисел), но связанному с пространственной системой координат. Его в какой-то мере пытался создать еще Лейбниц, продумывая свою «универсальную арифметику», но несмотря на гениальность и необычайную широту интересов, сделать это ему не удалось. Однако уже к концу XVIII в. отдельные идеи векторного исчисления, которое и стало тем исчислением, что искали геометры, смог сформулировать французский ученый (математик и физик) Л. Карно (Carnot Lasar, 1753—1823). А в 30-х годах XIX в. у Гамильтона и Грассмана в работах по теории комплексных чисел и кватернионов эти идеи были сформулированы уже совершенно прозрачно, хотя, по существу, что удивительно, они имели дело только с некоторыми примерами тех конечномерных векторных пространств, которые теперь бы мы назвали — координатными (арифметическими). Но последователи разыскали и рассмотрели в работах этих ученых то, что каждый из них уже вполне четко понимал и представлял структуру абстрактного векторного пространства. Во всяком случае около 1846 г. и Кэли и Грассман уже достаточно непринужденно пользовались его свойствами, причем, как отмечает Н. Бурбаки в «Elements d'histoir des mathématique» («Очерки по истории математики»): «не прибегая ни к какому метафизическому понятию». А Грассман, опубликовав в 1844 г. свое «Die Lineale Ausdehnungslehre» («Учение о линейном продолжении»), заложил основы не только многомерной евклидовой геометрии, но и тех мощных разделов математики, которые теперь носят названия векторного и тензорного исчислений. Однако, они получили свое современное оформление только к рубежу XIX и XX столетий благодаря усилиям американского математика Д. Гиббса (Gibbs Josiah Willard, 1838—1903), английского — О. Хевисайда (Heaviside Oliver, 1850—1925) и итальянца Дж. Пеано (Peano Guiseppe, 1858—1932). Последний, оценив открытие Грассмана, дал в статье, опубликованной в 1888 г. в Турине: «Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazione della logica deduitto» («Геометрическое исчисление «Учения о продолжении Грассмана», построенное логически дедуктивно») аксиоматическое определение векторного пространства над полем действительных чисел.

Так называемые функциональные векторные пространства привлекли внимание математиков уже в начале нашего века после инновационных результатов в этой области итальянца С. Пинкерля (Pinkerle Salvator, 1853—1936) и немецкого математика О. Теплица (Teoplitz Otto, 1881—1940), который известен своими работами по теории матриц и, в частности, тем, что придумал удачную общую модель векторного пространства — координатное векторное пространство. Полезно еще отметить, что именно Хевисайд ввел в 1891 г. одно из закрепившихся в научной литературе обозначений вектора: $\boldsymbol{a}$ (полужирными латинскими буквами), автором двух других общепринятых ныне обозначений векторов: $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{a}}$ был Ж. Арган, а $\overrightarrow{AB}$ для обозначения свободного вектора предложил А. Мебиус. Термин «скалярный» в современном смысле впервые употребил У. Гамильтон в 1843 г.

Любопытен тот факт, что один из «отцов векторного исчисления» Г. Грассман более века назад предложил рассматривать цветовые ощущения (разложение любого цвета на красный, синий и желтый), как векторы некоторого трехмерного «цветового пространства», что и составляет основу современного учения о цвете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
2. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.—480 с.
3. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—512 с.
4. *Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П.* Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1974.—352 с.
5. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.*, Геометрия. ч. 1.— М.: Просвещение, 1986.—336 с.
6. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.—336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—416 с.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.
9. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—304 с.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.—496 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 33. Понятие векторного пространства

[1] — стр. 245—247.
[2] — стр. 294—296.
[3] — стр. 330—332.
[6] — стр. 196—199.
[7] — стр. 15, 19—22.
[9] — стр. 7—8.

§ 34. Примеры векторных пространств

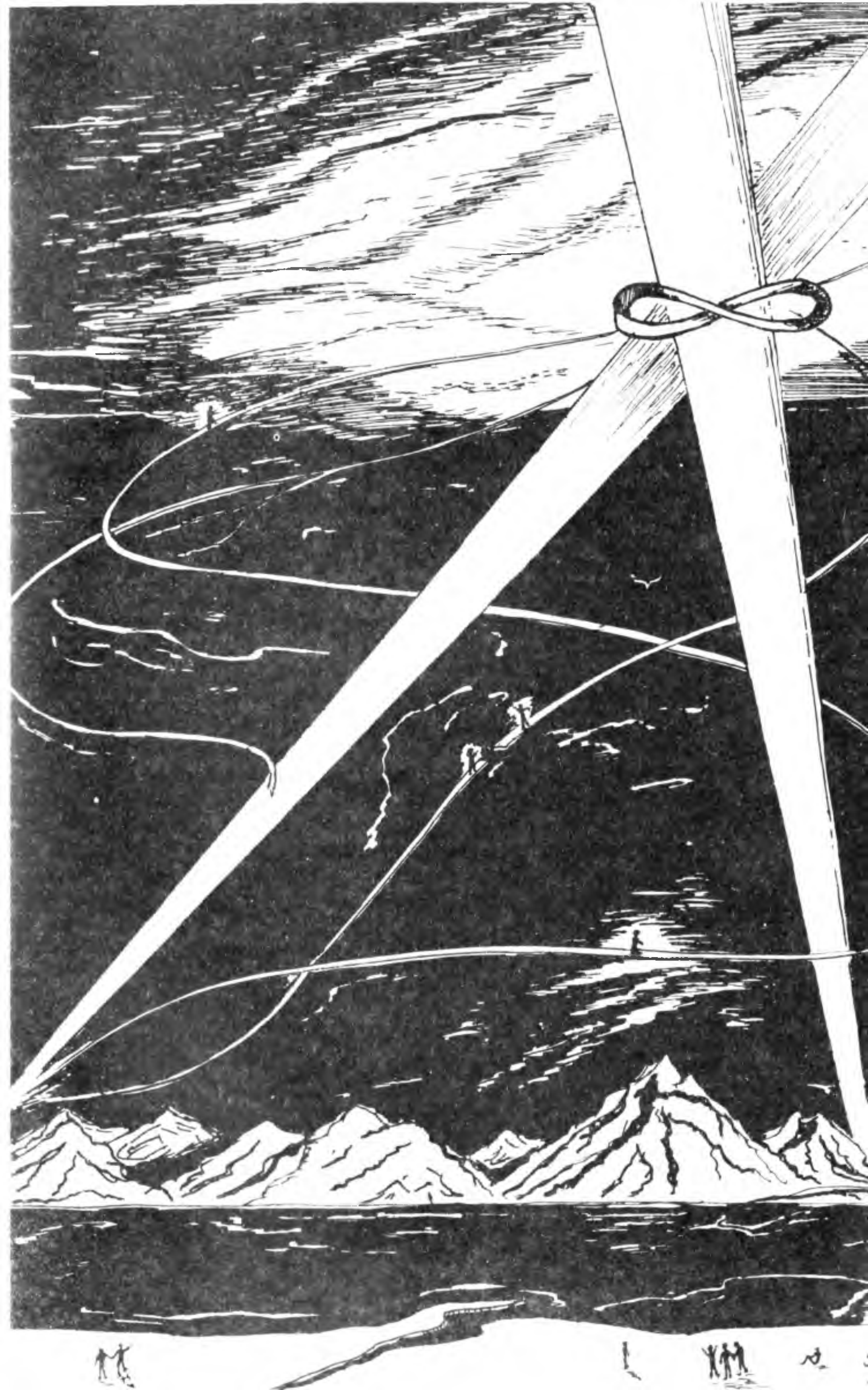
[2] — ср. 10—12, 295—296
[6] — стр. 202.
[7] — стр. 16—17.
[9] — стр. 8—9.

§ 35′. Пространство свободных векторов

[2] — стр. 9—12, 288—294.
[3] — стр. 9—13.
[4] — стр. 10—19.
[5] — стр. 11—16.
[6] — стр. 5—13.
[7] — стр. 11—16.

§ 36. Подпространства векторных пространств

[1] — стр. 250—254.
[2] — стр. 295—296, 301—304.
[3] — стр. 339—340.
[6] — стр. 205—210.
[8] — стр. 9—12.
[10] — стр. 65—67.



Я не имею притязаний давать людям истину, но надеюсь: может быть, кто-либо вместе со мной пожелает искать истины.

Д. С. Мережковский

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

§ 1

1.1: 1). $\max(A \cup B) = n(A) + n(B)$, 2). $\max(A \cap B) = \min\{n(A), n(B)\}$,
3). $\min(A \cup B) = \max\{n(A), n(B)\}$, 4). $\min(A \cap B) = 0$.
1.2: 2^3, 2^4. 1.3: 2^n.

§ 2

2.1: 1). $B \setminus C \neq C \cap B'$. 2). $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.
3.1: Да: если $B \subset A$, то $A \setminus B \cup B = A$.
2.2: 1). $B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup (B \cap A)$. 2). $(A \setminus B) \cup B = A$.
3.3: $A \subset B \subset C$. 2.3: $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$.

§ 3

1.1: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = p \cdot q$.
2.1: $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$.
3.1: $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
1.2: 1). $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$.
2). $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2.2: $n(A \times (B \times C)) = n((A \times B) \times C) = n(A \times B \times C) =$
$= n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = p \cdot q \cdot z$.
1.3: $A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

§ 4

1.1: $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$ — квадрат, / $\mathrm{I} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times \mathrm{I}$ — полосы (бесконечные)
1.2: $S^1 \times \mathbf{R}$ — цилиндр (поверхность), $D^2 \times \mathbf{R}$ — цилиндр.
1.3: $S^1 \times S^1$ — тор (поверхность), $D^2 \times S^1$, $S^1 \times D^2$ — тор.
2.3: I^3 — куб (параллелепипед), I^4 — четырехмерный куб.
$\mathrm{I}^3 \times \mathbf{R}$ — кубическая полоса в четырехмерном пространстве. $(S^1)^2 \times$ [illegible] торический цилиндр в четырехмерном пространстве.

§ 5

1.2: $\mathrm{Dom}\, W = \mathbf{Z} \setminus 0$, $\mathrm{Im}\, W = \mathbf{Z}$. $P^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{Z} \wedge x = ky\}$
1.3: $\mathrm{Dom}\, V = \mathbf{N}$, $\mathrm{Im}\, V = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $V^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{N} \wedge 2x \geq 3y$
2.3: $\mathrm{Dom}\, F = \mathrm{Im} F = \mathscr{B}$.

§ 6

1.3: $V^2 = \{\langle x, y \rangle \mid \{x, y\} \subset \mathbf{N} \wedge 9x \leqslant 4y\}$, $V \circ V^{-1} = (\mathbf{N} \setminus \{1\})^2$, [illegible]

§ 7

1.2: Нет. 2.2: $26=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2$, $6!$, $2^3=8$.
1.3: Если $x\neq y$, то $f(x)\neq f(y)$. 2.3: p^q.

§ 8

1.1: f_1 — обратимо, f_2 — необратимо.
2.1: $f_1^{-1}=\{\langle x,\ y\rangle \mid \{x,\ y\}\subset \mathbf{R}\wedge x=y^3\}$.

§ 9

1.1: Да. 1.3: Да.

§ 10

1.1: $A\to B$: да, нет, нет, 6, 0, 0; $B\to A$: нет, да, нет, 0, 3, 0.
1.2: $m\geqslant n$, $m\leqslant n$, $m=n$.

§ 13

1.1: F_1 не рефлексивно, не антирефлексивно.
2.1: F_2 симметрично, не антисимметрично.
3.1: F_2 не транзитивно, P_8 транзитивно. 2.2: Нет.

§ 14

1.1: строгий: VI, X; нестрогий: IV, IX, XI, XII, XIV.
1.2: O_{10} — нестрогий порядок; O_{11} — не является порядком.
2.2: Q_3, Q_7, Q_9, Q_{10}. 1.3: $2!2^2$, $3!2^3$, $4!2^4$, $n!2^n$.

§ 15

1.1: $5=1+3+1$. 2.2: $15=1+4+3+6+1$.

§ 16

2.2—2.3: F_X — не инъективно, F'_X — инъективно.

§ 18

2.1: $(A+B)^T=B^T+A^T$; 2. $(\alpha A)^T\neq\alpha A$;
1.2: 1. $(\alpha A+\beta B)^T=\beta B^T+\alpha A^T$; 2. $(A-B)^T\neq A^T-B$.
1.3: $A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$.

§ 19

2.1: 1. $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$; 2. $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.
1.2: $A^n=\begin{pmatrix}1 & \alpha n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
2.3: 1. $\alpha[A,\ B]=[A,\ \alpha B]$; 2. $[A,\ (B+C)]=[A,\ B]+[A,\ C]$;
3. $[(A+B),\ C]=[A,\ C]+[B,\ C]$; 4. $[A,\ [B,\ C]]\neq[[A,\ B],\ C]$;
5. $[A,\ E]=[E,\ A]\neq A$. 6. $[A,\ B]^T=[B^T,A^T]$.

§ 20

1.1: Нет. 1.2: $\mathscr{C}(A)$ замкнуто относительно сложения и умножений.
2.2: $X=\begin{pmatrix}x & 1-x\\ z & 1-z\end{pmatrix}$, $\{x,\ z\}\subset\mathbf{R}$.

§ 23

1.1: 1). $\psi^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$. 2). $\chi\circ\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$.
3). $\alpha\circ\beta$ — не определена.
2.1: $\xi^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&6&1&3&5\end{pmatrix}$. 1.2: $\varphi^{150}=\varepsilon$. 1.3: $\varphi^{100}=\varphi$.

§ 25

1.1: Наибольшее число инверсий — 3 в подстановке
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, наименьшее — 0 в подстановке ε, 3, 3.

1.2: Две подстановки: $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. 3.2: $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.3: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, 6. 2.2: Можно при $k\leqslant n(n-1)/2$.

§ 29

1.1: 1).
$$\begin{array}{llllll} M_1^1=12, & M_1^2=-23, & M_1^3=-3, & A_1^1=12, & A_1^2=23, & A_1^3=-3,\\ M_2^1=8, & M_2^2=2, & M_2^3=-2, & A_2^1=-8, & A_2^2=2, & A_2^3=2,\\ M_3^1=0, & M_3^2=13, & M_3^3=13, & A_3^1=0, & A_3^2=-13, & A_3^3=13. \end{array}$$

2). $a_k^i A_j^k=a_i^k A_k^j=52$. 3). $\det A=52$.

§ 30

2.2: $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

§ 34

2.2: $\langle \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{n}), +, \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{n}), \circ, \cdot\rangle$ векторными пространствами не являются. 1.3: Нет.

§ 35

1.3: $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$.

§ 36

1.1: 1. Да. 2. Да. 3. Да. 4. Нет. 1.2: Нет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 5

МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ И СВОЙСТВА

Лекция 6

ПОДСТАНОВКИ. ГРУППЫ

Лекция 7

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 8

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебное издание

Петрова Вера Тимофеевна

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Часть 1

Зав. редакцией *Т. А. Савчук*
Редактор *Ю. К. Филиппова*
Технический редактор *Н. П. Торчигина*
Корректор *Т. А. Казанская*

Лицензия ЛР № 064380 от 4.01.96. Сдано в набор 24.06.97.
Подписано в печать 20.05.98. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,5. Тираж 10 000 экз. Заказ № 523.

«Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС»,
117571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет,
тел. 437-99-98, 430-04-92, 437-25-52, тел/факс 932-56-19.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Вера Тимофеевна Петрова – кандидат физико-математических наук, доцент, автор более пятидесяти научных работ.

Учебник написан на основе ее опыта преподавания в Рязанском государственном педагогическом университете и Московском физико-техническом институте. Работа над учебником была поддержана грантом Государственной научной программы «Развитие образования в России».

В учебнике изложение ведется на трех уровнях глубины и сложности. Построение и стиль учебника стимулируют активное усвоение его материала. Лекции дополнены историческими справками.

ISBN 5-691-00238-4(1)

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС