

22 25  
5-24  
В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

# ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Часть I

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

# ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Часть I

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов  
по машиностроительным и приборостроительным  
специальностям в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений*

Москва  
Издательство  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
1994

В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ  
ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Часть I

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов  
по машиностроительным и приборостроительным  
специальностям в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений*

Москва  
Издательство  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
1994

ББК 22.23

С24

УДК 534(075)

Рецензенты: кафедра «Сопротивление материалов» Челябинского государственного технического университета; докт. техн. наук, проф. *Б. Г. Кеглин* — кафедра «Динамика и прочность машин» Брянского института транспортного машиностроения

С24

**Светлицкий В. А.**

Задачи и примеры по теории колебаний: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ, 1994. Ч. I. 308 с., ил.

ISBN № 5-7038-0893-6

Приведены задачи и упражнения по всем основным разделам курса «Теория колебаний», относящиеся к системам с конечным числом степеней свободы. Сформулированы задачи, связанные с определением частот и форм колебаний систем с конечным числом степеней свободы: анализом установившихся и неустановившихся режимов колебаний; анализом нелинейных колебаний; определением вероятностных характеристик решений при действии случайных сил; анализом устойчивости параметрических колебаний. Как правило, предложенные в сборнике задачи связаны с конкретными механическими системами, которые могут быть использованы и для курсовых работ по теории колебаний. Учитывая интересы студентов, занимающихся самостоятельным изучением теории колебаний, для большинства задач даны подробные решения или алгоритмы решения.

Для студентов и аспирантов технических вузов и университетов. Может быть полезен преподавателям технических вузов, а также инженерам, использующим теорию колебаний в практической работе. Ил. 305

Библиогр. 11 назв.

По вопросам приобретения книги обращаться по телефону 263-60-45.



ISBN 5-7038-0893-6

ББК 22.23

С  $\frac{1603030000-31}{095(2)-94}$  2-93

© В. А. Светлицкий, 1994

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Теория колебаний» широко распространен в высших технических учебных заведениях, а для ряда специальностей он относится к числу основных дисциплин фундаментальной профилирующей подготовки, поэтому предлагаемый сборник задач окажет большую помощь студентам при изучении этой дисциплины, будет способствовать развитию навыков решения прикладных задач с использованием ЭВМ.

Основная особенность сборника — его прикладная направленность. Он содержит задачи по всем основным разделам теории колебаний, включая также разделы, вошедшие в учебные курсы теории колебаний только в последнее время — параметрические колебания, случайные колебания, устойчивость колебаний. По сравнению со «Сборником задач по теории колебаний», вышедшим в 1979 г. [1], в данном издании частично переработаны многие разделы и изъяты задачи, не имеющие отношения к механическим системам. Основная цель сборника — помочь изучающим теорию колебаний глубже овладеть теорией и освоить методы решения прикладных задач. Поэтому в сборнике практически для всех задач даны решения.

Автор с благодарностью примет отзывы, замечания и предложения читателей, которые можно присылать по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A$	— амплитуда колебаний;
$C$	— электрическая емкость, конденсатор;
$C_i$	— коэффициенты;
$c$	— жесткость, коэффициент жесткости;
$D$	— дисперсия;
$E$	— модуль упругости первого рода;
$F$	— площадь поперечного сечения;
$F_0$	— амплитуда возмущающей силы;
$F(t)$	— возмущающая сила;
$G$	— модуль упругости второго рода;
$J$	— полярный момент инерции массы;
$I$	— сила тока;
$J_x; J_y;$ $J_p; J_k$	— геометрические характеристики поперечного сечения стержня;
$I_0$	— функция Бесселя нулевого порядка первого рода;
$Y_0$	— функция Бесселя нулевого порядка второго рода;
$K$	— корреляционная функция;
$k$	— коэффициент жесткости упругого основания;
$L$	— индуктивность;
$l$	— длина;
$M$	— момент силы;
$m$	— масса;
$P$	— сила;
$p_i$	— собственная частота колебаний;
$Q$	— сила; обобщенная сила;
$q$	— обобщенная координата;
$R$	— диссипативная функция Релея; электрическое сопротивление;
$S$	— спектральная плотность;
$T$	— кинетическая энергия; период колебаний;
$t$	— время;
$U$	— напряжение электрического тока;
$v$	— скорость
$W$	— передаточная функция;
$w$	— линейное ускорение;
$X, Y, Z$	— перемещения в направлениях координатных осей $x, y, z$ ;
$Y_{(s)}$	— отображение по Лапласу оригинала;
$\alpha$	— коэффициент вязкого трения;

- $\delta$  — логарифмический декремент затухания;
- $\delta_{ij}$  — перемещение точки в направлении  $i$  от действия силы по направлению  $j$ ;
- $\mu$  — малый параметр; динамический коэффициент вязкости;
- $\Pi$  — потенциальная энергия;
- $\rho$  — плотность материала;
- $\sigma$  — нормальное напряжение; среднеквадратичное отклонение;
- $\tau$  — время; касательное напряжение;
- $\varphi$  — угловое перемещение;
- $\Omega$  — угловая скорость;
- $\omega_0$  — частота свободных затухающих колебаний.

# ЗАДАЧИ

## Глава 1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### § 1. Свободные колебания

1. Для систем, изображенных на рис. 1, определить частоты собственных изгибных колебаний.

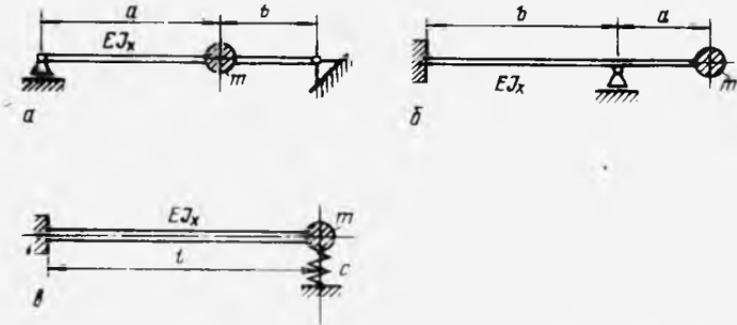


Рис. 1

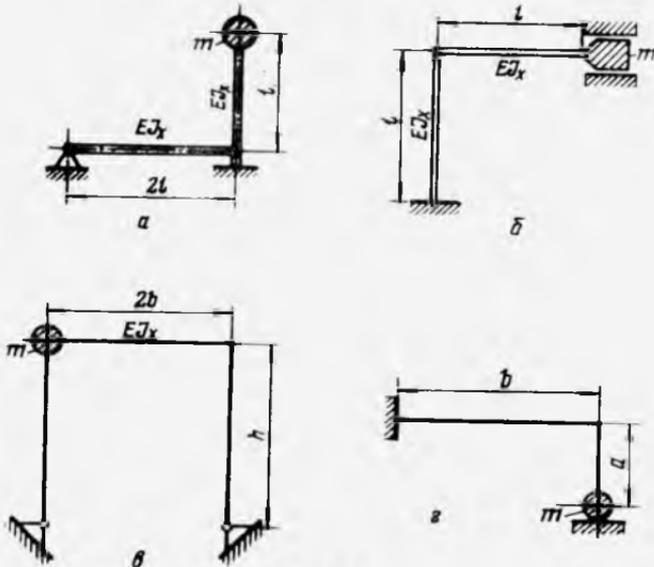


Рис. 2

2. Для систем с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$  (рис. 2), используя метод сил, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний и определить частоты собственных колебаний. При составлении уравнений движения принять, что масса системы по сравнению с массой груза мала; массу груза считать точечной.

3. Для систем, изображенных на рис. 3, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний, используя метод сил и считая массы  $m$  точечными. Определить частоты собственных колебаний.

4. Для систем, изображенных на рис. 4, составить дифференциальные уравнения малых крутильных колебаний маховичка, имеющего момент инерции массы  $J$ , и определить частоты собственных колебаний. Считать, что в схемах  $г$  и  $д$  подшипник длинный, т. е. угол поворота при изгибе равен нулю, а  $GJ_k = 0,8 J_x$ .

5. Чувствительный элемент (датчик давления) (рис. 5) предназначен для регулировки давления жидкости или пара в некотором объеме. При изменении давления поршень массой  $m_1$  смещается и через шток приводит в движение исполнительный

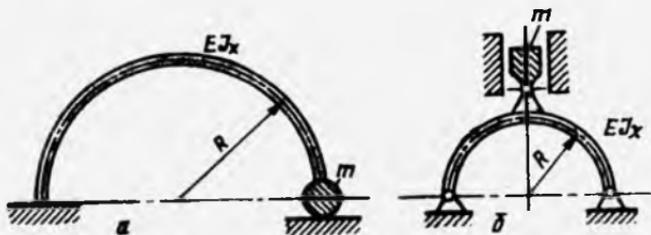


Рис. 3

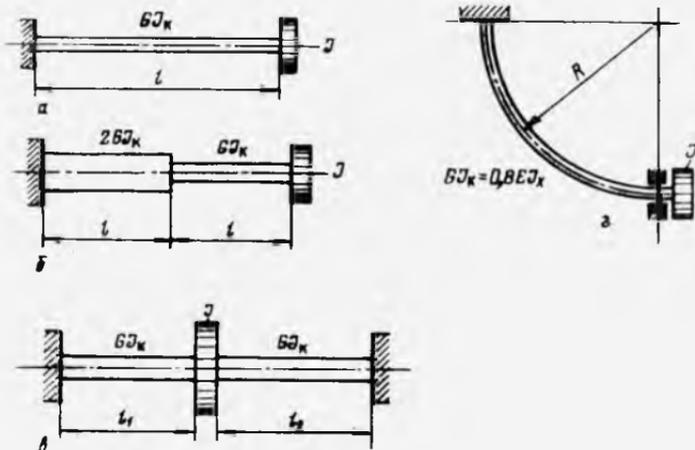


Рис. 4

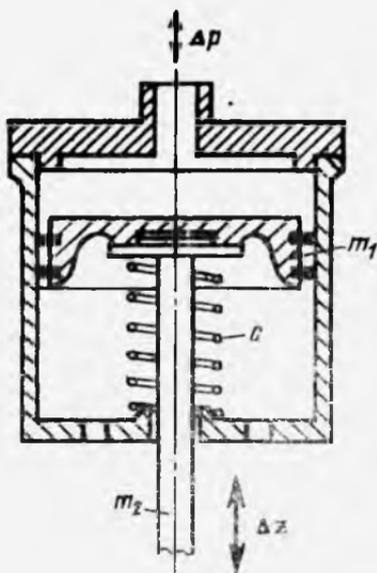


Рис. 5

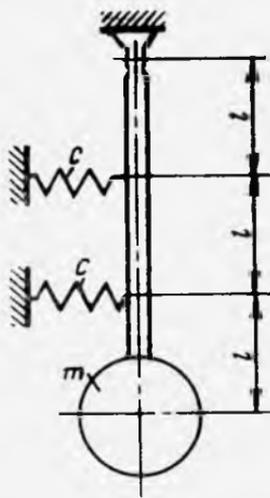


Рис. 6

орган. Приведенная масса штока и остальных движущихся элементов прибора равна  $m_2$ . Определить частоту собственных колебаний датчика давления (поршня), считая, что трение уплотнительных колец о цилиндр весьма мало.

6. Груз массой  $m$  закреплен на абсолютно жестком невесомом стержне длиной  $3l$ , связанном двумя одинаковыми пружинами жесткостью  $c$  каждая (рис. 6). Определить частоту малых собственных колебаний маятника.

7. Решить задачу 6 при горизонтальном положении стержня.

8. Зубчатое колесо 1 (рис. 7) массой  $m_1$  с жестко скрепленным с ним водилом 2 массой  $m_2$  лежит на зубчатой рейке 3. К свободному концу водила прикреплены без натяга пружины 4 жесткостью  $c$  каждая. Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы; определить частоту собственных колебаний.

9. Тяжелый цилиндр массой  $m = Q/g$ , радиусом  $r$  (рис. 8) лежит на вогнутой поверхности, имеющей радиус кривизны  $R$ . К верхней точке цилиндра прикреплены пружины-растяжки жесткостью  $c$  каждая. Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний цилиндра, считая, что проскальзывание цилиндра по поверхности отсутствует. Исследовать влияние радиуса кривизны поверхности  $R$  на частоту собственных колебаний цилиндра и, в частности, определить ее, когда поверхность является плоскостью ( $R = \infty$ ).

10. Определить частоту собственных колебаний вертикально установленного маятника массой  $m$  (стержень считать абсолютно жестким) (рис. 9). Жесткость пружин равна  $c$ .

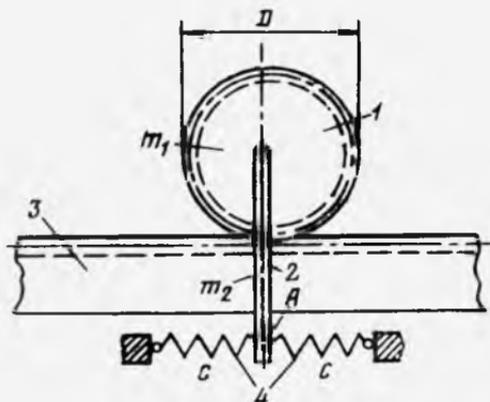


Рис. 7

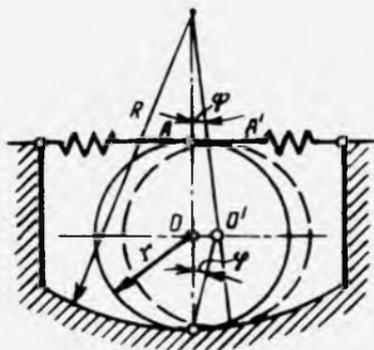


Рис. 8

11. Определить частоту малых собственных колебаний диска индукционного гальванометра (рис. 10), представляющего собой стальной диск толщиной  $h=2$  мм, диаметром  $d=50$  мм. Жесткость пружины при кручении  $c=M/\varphi=0,488$  Н·м.

12. Стержень АВ жесткостью на кручение  $c$  на одном конце имеет цилиндрический шарнир А, а на другом — диск радиусом  $R$  и массой  $m$  (рис. 11). Система укреплена на плоскости, наклоненной к горизонту на угол  $\alpha$ . Считая, что диск может совершать колебательные движения качения без проскальзывания, составить дифференциальное уравнение его малых свободных колебаний. Исследовать зависимость частоты собственных колебаний и их устойчивость от угла наклона  $\alpha$  плоскости.

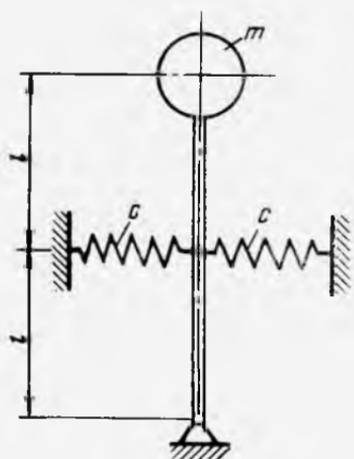


Рис. 9

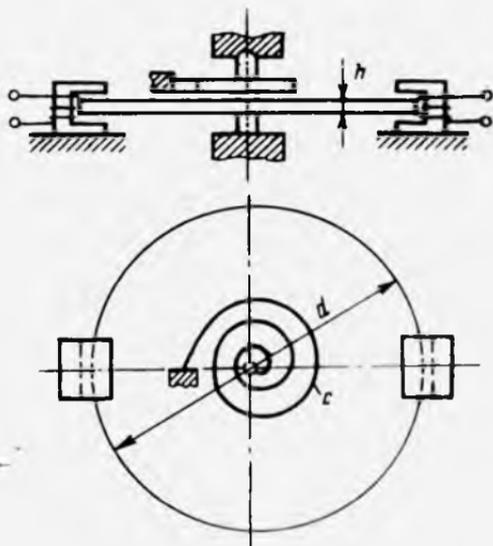


Рис. 10

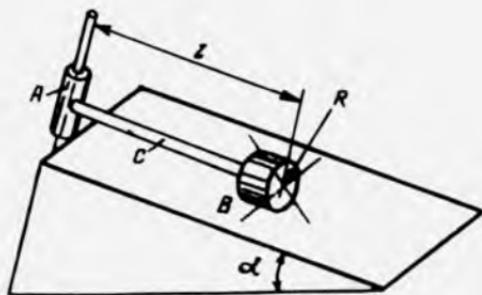


Рис. 11

13. Чувствительный элемент уровня (датчик уровня) (рис. 12) состоит из поплавка диаметром  $d$  и массой  $m_1$ , погруженного в жидкость; системы рычагов, пружины жесткостью  $c$  и противовеса массой  $m_2$ . При изменении уровня жидкости  $H_0$  избыточная выталкивающая сила перемещает поплавок, что передается через систему рычагов регистрирующему или исполнительному механизму. Считая, что плотность жидкости равна  $\rho$ , составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний поплавка и определить частоту его собственных колебаний, пренебрегая инерцией жидкости.

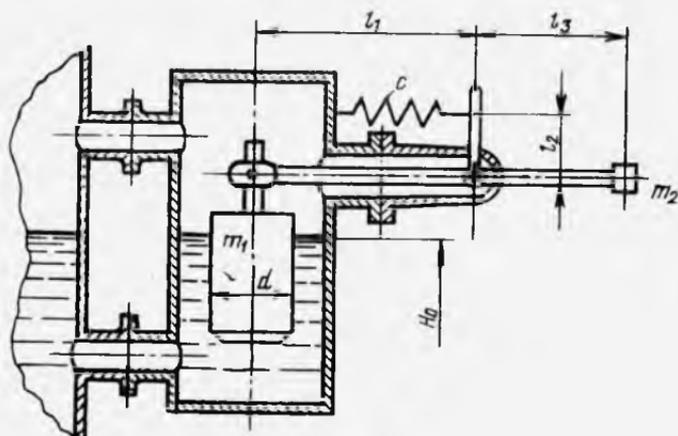


Рис. 12

14. Диск массой  $m$  с моментом инерции массы  $J_0$  насажен на ступицу радиусом  $r$  (рис. 13). Ступица диска опирается на криволинейную круговую направляющую радиусом  $R$ . Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска, считая, что при его движении проскальзывание между ступицей и направляющей отсутствует. Дифференциальное уравнение движения получить двумя методами: по методу Лагранжа и по методу Даламбера.

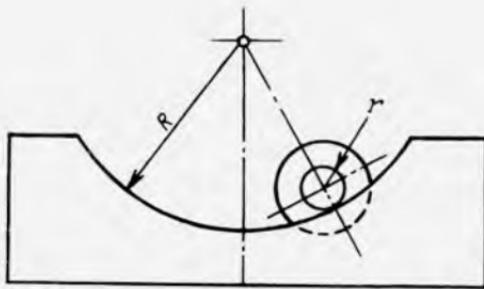


Рис. 13

15. На шероховатой наклонной поверхности (рис. 14) установлена тележка массой  $m$ , удерживаемая пружиной жесткостью  $c$ . Считая, что каждая из двух колесных пар тележки имеет момент инерции массы  $J$ , радиус колес  $R$ , а движение происходит без проскальзывания колес по поверхности, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний тележки.

16. Балка массой  $m=Q/g$  (рис. 15) лежит на цилиндре радиусом  $R$ . Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний балки относительно положения равновесия. Определить частоту собственных колебаний балки и амплитуду  $\varphi_{0 \max}$ , при которой возможны колебания, приняв коэффициент трения скольжения равным  $\mu$ .

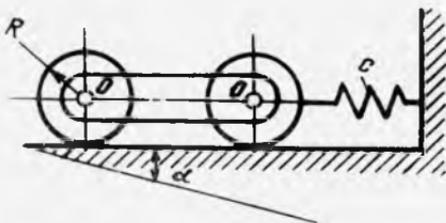


Рис. 14

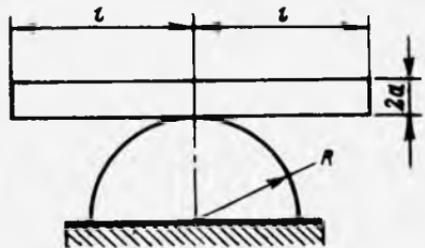


Рис. 15

17. Кольцо, имеющее радиус внутренней поверхности  $R$ , надето на вал диаметром  $2r$  (рис. 16). Определить частоту собственных колебаний кольца, считая известными его массу  $m$  и момент инерции массы относительно центра тяжести  $J$ .

18. Для гашения колебаний маятника (рис. 17), вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , можно применить маятниковый демпфер, представляющий собой специальной формы груз массой  $m=Q/g$ , помещенный во внутреннюю полость маятника. Контактная поверхность груза имеет радиус кривизны  $R_2$ , поверхность маятника  $R_1$  ( $R_1 < R_2$ ).

Найти частоту собственных колебаний груза при остановленном маятнике ( $\omega=0$ ) (сила тяжести направлена по оси  $y$ ), а также частоту собственных колебаний груза при  $\omega=\text{const}$  (пренебрегая силой тяжести).

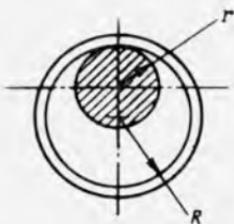


Рис. 16

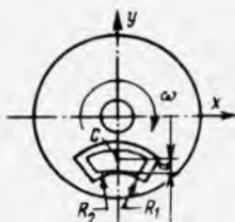


Рис. 17

При решении задачи принять, что  $R_2 - R_1 = \Delta R$  — малая величина; расстояние от точки контакта груза с маховиком до центра тяжести груза равно  $a$ ; момент инерции массы груза относительно оси, проходящей через центр тяжести груза, равен  $J_c$ , а расстояние от оси вращения маховика до центра тяжести груза равно  $r$ .

19. Массивный диск радиусом  $R$  вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . На ободе диска шарнирно закреплен стержень, имеющий длину  $l$  и массу  $m$  на свободном конце (рис. 18). Считая массу стержня малой по сравнению с массой  $m$ , определить частоту собственных колебаний груза в поле центробежных сил.

20. Груз массой  $m$  укреплен на гибкой стальной стойке прямоугольного поперечного сечения жесткостью  $c_1 = FJ_x$ , поддерживаемой двумя пружинами жесткостью  $c_2$  каждая (рис. 19). Определить частоту малых собственных колебаний груза, считая массу стойки и пружин по сравнению с массой груза. Влиянием силы тяжести груза на изгиб стойки пренебречь.

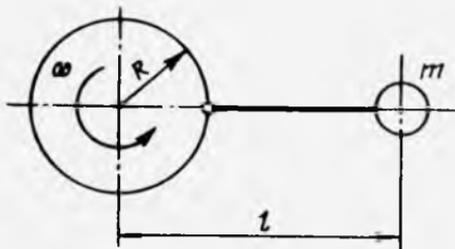


Рис. 18

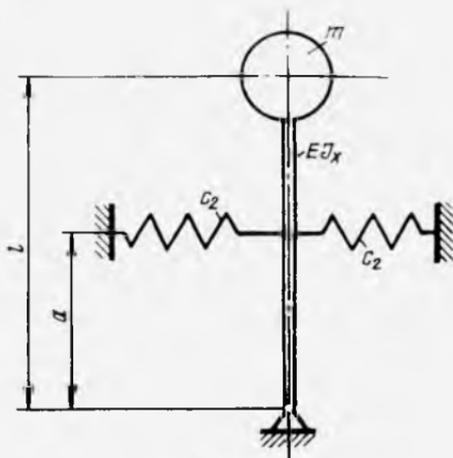


Рис. 19

21. Для гашения крутильных колебаний на маховиках иногда устанавливают дополнительные массы, представляющие собой маятники в поле центробежных сил. Определить частоту собственных колебаний центробежного маятника (рис. 20), счи-

тая, что угловая скорость диска  $\omega$ , расстояние от оси вращения диска до точки подвеса маятника  $r$ , момент инерции массы маятника относительно точки подвеса  $J_B$ , масса маятника  $m$ .

22. На ободе массивного диска радиусом  $R$  жестко закреплена гибкий стержень длиной  $l$ , несущий на свободном конце массу  $m$ . Диск равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 21). Полагая жесткость стержня при изгибе равной  $EJ_x$  и

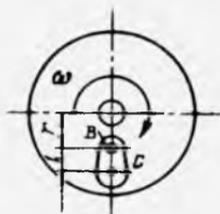


Рис. 20

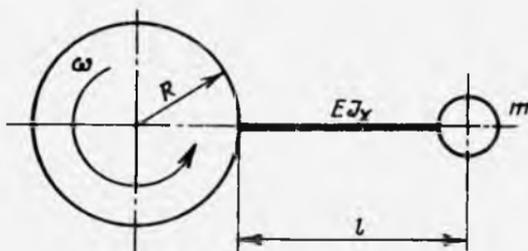


Рис. 21

пренебрегая массой стержня по сравнению с массой груза, определить частоту собственных колебаний груза в поле центробежных сил.

23. Получить приближенное выражение для частоты колебаний массы  $m$  (см. задачу 22), воспользовавшись выражением для прогибов при продольно-поперечном изгибе в виде

$$y_0 = y / (1 + N/P_3),$$

где  $N$  — осевая растягивающая сила;  $P_3 = \pi^2 EJ_x / 4l^2$  — критическая сила;  $y$  — прогиб от действия поперечной нагрузки. Построить графики зависимости безразмерной частоты колебаний  $p/p_0$  в зависимости от  $\alpha l$  для точного (см. задачу 22) и приближенного решения при  $R=l$ .

24. Стержень  $AB$  (рис. 22) жесткостью  $EJ_x$  закреплен на конце жесткого рычага  $BC$ , вращающегося равномерно с угло-

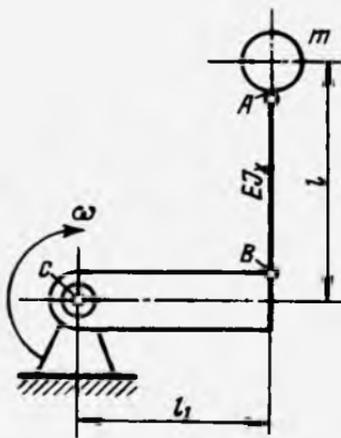


Рис. 22

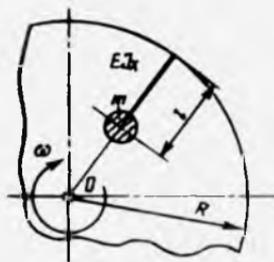


Рис. 23

вой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости. Определить частоту собственных колебаний точечной массы  $m$ , закрепленной в точке  $A$  стержня (массой стержня пренебречь), считая, что масса  $m$  колеблется в плоскости вращения.

25. На ободе тяжелого диска радиусом  $R$  (рис. 23) закреплен стержень длиной  $l$ , жесткостью  $EJ_x$ , несущий на конце массу  $m$ . Определить частоту собственных колебаний груза при равномерном вращении диска. Полагая  $R > l$ , определить критическое значение угловой скорости диска  $\omega$ , при которой частота собственных колебаний груза равна нулю. При решении задачи массой стержня пренебречь.

26. На массивном диске, вращающемся с угловой скоростью  $\omega$ , закреплен стержень длиной  $l$ , жесткостью  $EJ_x$  (см. рис. 23). На свободном конце стержень несет массу  $m$ , центр  $O$  которой совпадает с центром вращения диска. Определить частоту собственных колебаний груза, пренебрегая массой стержня.

27. Груз массой  $m$  укреплен на тонкой абсолютно гибкой нерастяжимой нити длиной  $2l$ . С помощью пружины в нити создается натяжение  $T_0$  (рис. 24). Считая, что натяжение в обоих участках нити одинаково и постоянно, определить частоту малых собственных колебаний груза.

28. Точечная масса  $m$  закреплена на струне длиной  $l$ , имеющей предварительное натяжение  $T_0$  (рис. 25). Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний массы. Построить график зависимости частоты собственных колебаний от координаты положения массы  $x_0$ . Изменением натяжения струны в процессе колебаний и влиянием силы тяжести пренебречь.

29. Груз массой  $m$  укреплен на конце упругого растяжимого безынерционного троса, намотанного на барабан (рис. 26).

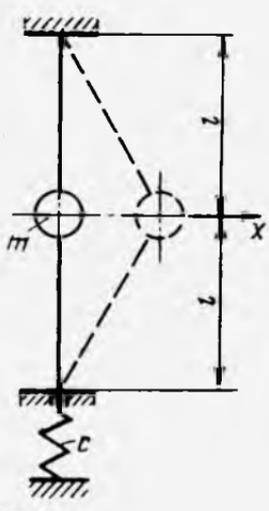


Рис. 24

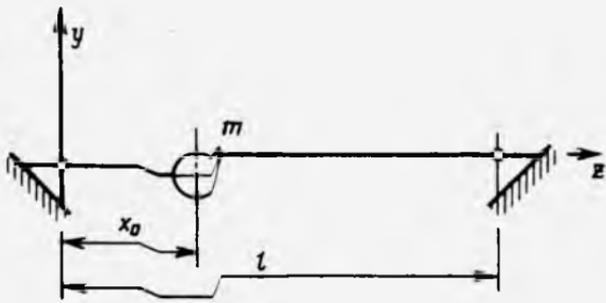


Рис. 25

Составить дифференциальное уравнение малых свободных продольных колебаний груза при равномерном вращении барабана с угловой скоростью  $\omega$ . Диаметр барабана  $2r$ , площадь поперечного сечения троса  $F$ , модуль упругости материала троса  $E$ . Определить моменты времени, в которые груз проходит через положение равновесия, считая, что в начальный момент времени  $t_0$  длина размотанной части троса равна  $l_0$ , полная скорость движения  $v = \omega R + \Delta x_0$ , а  $\Delta x_0 = 0$  ( $\Delta x_0$  — динамическое удлинение троса).

Получить решение для частного случая  $\omega = \text{const}$ , приняв  $m = 100$  кг,  $E = 10$  ГПа,  $F = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>,  $v = \omega R = 1$  м/с,  $t_0 = 1$  с,  $l_0 = 1$  м.

30. Груз, имеющий массу  $m$ , укреплен на конце абсолютно гибкого нерастяжимого безынерционного троса, намотанного на

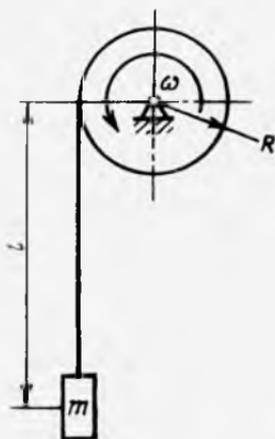


Рис. 26

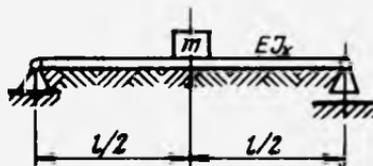


Рис. 27



Рис. 28

барабан. Составить дифференциальное уравнение малых свободных поперечных колебаний груза при равномерном вращении барабана с угловой скоростью  $\omega$  (см. рис. 26). Получить зависимость амплитуды свободных колебаний от длины свободного участка троса  $l$  и угловой скорости барабана  $\omega$ . Рассмотреть два случая: а) подъем груза с некоторой начальной длиной троса  $l_0$ ; б) опускание груза. Принять следующие условия: при  $t = t_0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  ( $\varphi$  — угол отклонения троса от вертикали).

31. Стальная безынерционная балка длиной  $l$ , имеющая изгибную жесткость  $EI_x$ , лежит на упругом безынерционном основании с коэффициентом постели  $k$  (рис. 27). Посредине балки закреплена точечная масса  $m$ . Определить частоту собственных колебаний системы, если сечение балки представляет собой прямоугольник с основанием 6 см и высотой 1 см; длина балки  $l = 2$  м; коэффициент постели  $k = 4$  кН/м<sup>2</sup>; масса  $m = 100$  кг.

32. На стальной балке длиной  $l = 1$  м, имеющей поперечное сечение  $b \times h = 6 \times 1$  см<sup>2</sup>, закреплена масса  $m = 20$  кг (рис. 28).

Балка зашкреплена одним концом и лежит на упругом основании, коэффициент постели которого  $k = 4 \text{ кН/м}^2$ . Пренебрегая инерцией поворота массы, т. е. рассматривая ее как точечную, определить частоту собственных колебаний. Массой балки и инерционностью упругого основания пренебречь.

33. Стальная балка длиной  $2l = 200 \text{ см}$ , имеющая поперечное сечение  $b \times h = 6 \times 2 \text{ см}^2$ , торцевые сечения балки жестко закреплены (рис. 29). Балка лежит на упругом основании, коэффициент постели которого  $k = 2,5 \text{ кН/м}^2$ , и нагружена по середине массой  $m = 50 \text{ кг}$ . Определить частоту собственных ко-

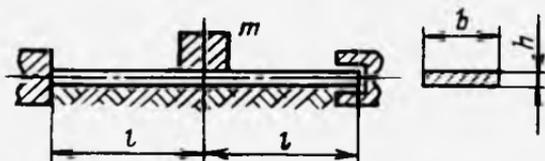


Рис. 29

лебаний массы  $m$ , пренебрегая силой тяжести балки и инерционностью основания.

34. Используя метод Релея, определить частоту собственных колебаний системы (рис. 30) с учетом массы балки. Сосредоточенную массу  $m$  считать точечной, т. е. ее моментом инерции

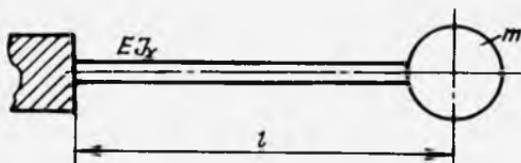


Рис. 30

пренебречь. Изгибная жесткость балки  $EJ_x$ ; масса единицы длины балки  $m_0$ .

35. Используя метод Релея, определить низшую частоту собственных колебаний массы  $m$ , закрепленной посередине балки, имеющей изгибную жесткость  $EJ_x$  и массу единицы длины балки  $m_0$  (рис. 31).

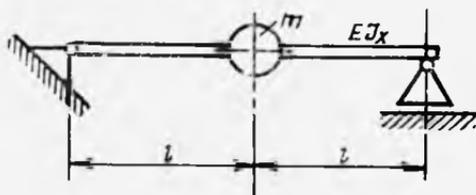


Рис. 31

36. Для схем, изображенных на рис. 32, определить по методу Релея частоты собственных колебаний, считая массы  $m$  точечными, а массу единицы длины стержней равной  $m_1$ .

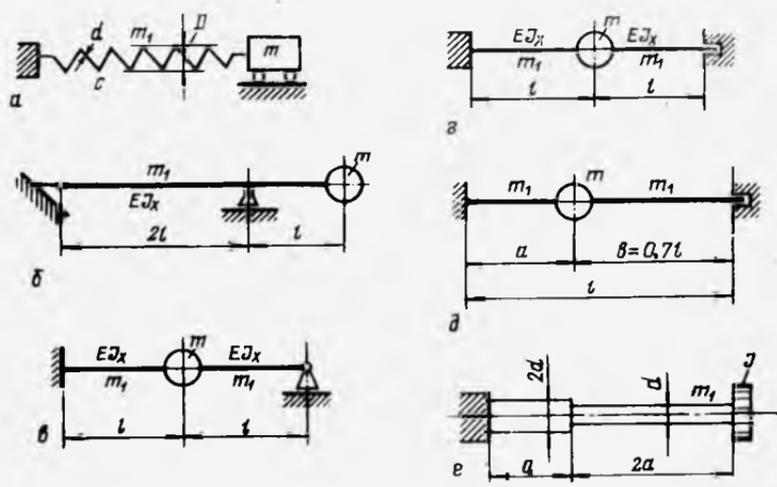


Рис. 32

§ 2. Свободные колебания систем с учетом сил сопротивления

37. Определить зависимость частоты собственных крутильных колебаний вала смесителя от вязкости среды, а также время, в течение которого амплитуда колебаний вала смесителя уменьшится в 10 раз после мгновенной остановки мотора, если скорость равномерного вращения перед остановкой равна  $\Omega$  (рис. 33). При решении задачи принять, что масса вала мала по сравнению с массой лопастей. Момент инерции массы лопа-

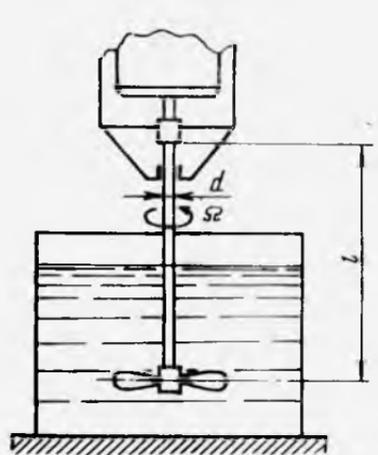


Рис. 33

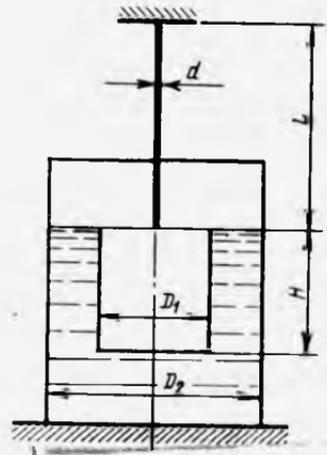


Рис. 34

стей  $J=0,5$  кг·м<sup>2</sup>. Диаметр вала  $d=0,005$  м, длина вала  $l=0,5$  м. Коэффициент момента вязкого сопротивления движению лопастей  $\alpha=1,2$  Н·м·с.

38. Для определения коэффициента вязкости масла  $\nu$  можно использовать установку, показанную на рис. 34. Здесь массивный стальной цилиндр высотой  $H$  и диаметром  $D_1$  подвешен на тонкой проволоке диаметром  $d$  и длиной  $L$  в стакане диаметром  $D$ . В стакан заливается масло и цилиндр приводится в колебательное вращательное движение. Считая, что момент сопротивления движению можно вычислить по формуле  $M = \pi H D_1^3 \omega \rho \nu / 4 (D_2 - D_1)$  (где  $\omega = \dot{\varphi}$  — угловая скорость,  $\rho$  — плотность масла), определить кинематическую вязкость  $\nu$  солярового масла, имеющего удельный вес  $\gamma=9$  кН/м<sup>3</sup>, если при

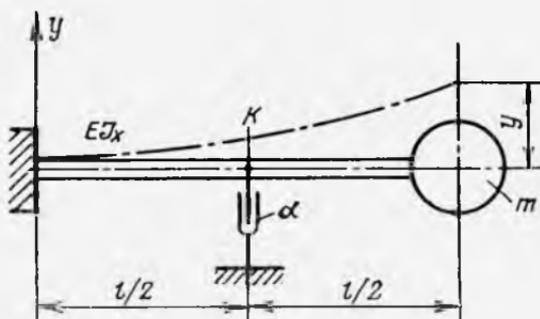


Рис. 35

проведении испытания в приборе, размеры которого  $D_1=0,1$  м,  $D_2=0,12$  м,  $H=0,2$  м,  $d=0,001$  м,  $l=0,5$  м, период свободных колебаний был равен  $\tau_0=6,5$  с. (Жидкость считать безынерционной).

39. Для системы, изображенной на рис. 35, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний массы  $m$ , считая, что сила сопротивления демпфера прямо пропорциональна скорости движения ( $F_{ay}$ ).

40. Безударная муфта сцепления (рис. 36) служит для смягчения влияния резких колебаний скорости ведущего вала на ведомый. Муфта представляет собой стальной диск 1, свободно укрепленный на валу 3. Передача усилия от вала к диску осуществляется через пружину 2. Считая, что сопротивление между валом и диском вязкое, определить коэффициент  $\alpha$  момента вязкого сопротивления движению в паре диск—вал, если известно, что логарифмический декремент свободных колебаний диска  $\delta=1,5$ , диаметр диска  $D=0,1$  м, толщина  $H=20$  мм, диаметр пружины  $D_1=30$  мм, диаметр проволоки  $d_1=3$  мм, число витков пружины  $i=9$  м, модуль упругости материала пружины  $G=80$  ГПа, плотность стали  $\rho=8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

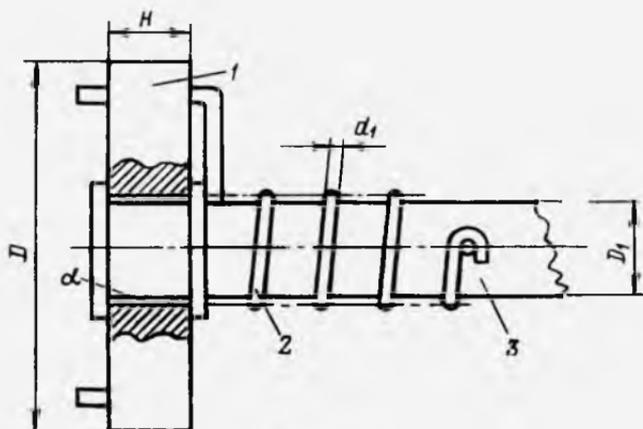


Рис. 36

41. На абсолютно жестком стержне длиной  $2l$  подвешен груз массой  $m$  (рис. 37). К середине стержня прикреплены две упругие растяжки-пружины жесткостью  $c$  каждая. Груз помещен в сосуд, заполненный вязкой жидкостью. В процессе малых свободных колебаний груза жидкость оказывает демпфирующее влияние на систему. Определить коэффициент вязкого

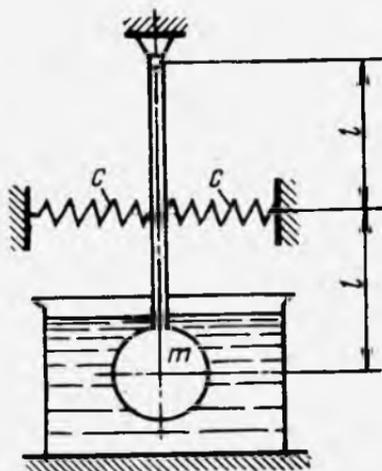


Рис. 37

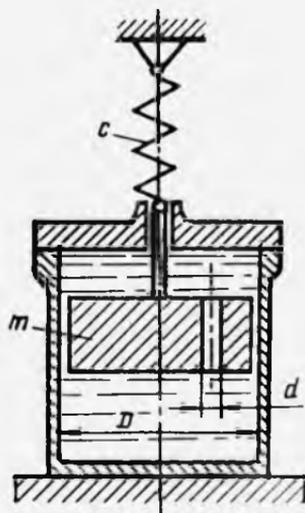


Рис. 38

сопротивления движению системы, если период затухающих колебаний системы  $\tau_0 = 1,0$  с при следующих параметрах системы: масса груза  $m = 1$  кг, длина стержня  $2l = 0,3$  м, диаметр пружины  $D = 20$  м, диаметр проволоки пружины  $d = 2$  м, модуль упругости материала пружины  $G = 80$  ГПа, число витков каждой пружины  $i = 6$ .

42. Гидравлический демпфер (катаракт) (рис. 38) представляет собой поршень массой  $m$ , движущийся в жидкости. Исследовать движение поршня, считая, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) поршень отклонен от положения равновесия на  $y_0=5$  мм. Определить время, в течение которого отклонение поршня от положения равновесия уменьшится в два раза, если жесткость пружины  $c=3$  кН/м, диаметр цилиндра  $D=0,1$  м, диаметр отверстий  $d=10$  мм, число отверстий  $z=25$ , масса поршня  $m=2,73$  кг, высота поршня  $H=50$  мм, динамический коэффициент вязкости жидкости  $\mu=6 \cdot 10^{-2}$  Па·с.

43. Прибор представляет собой груз массой  $m$ , укрепленный на двух пружинах жесткостью  $c$  каждая. Груз находится в трубке, заполненной жидкостью. Сопротивление движению груза может изменяться в зависимости от величины зазора между грузом и стенками трубки и в зависимости от вязкости жидкости (рис. 39). Считая, что сопротивление движению груза прямо пропорционально скорости движения, т. е.  $\alpha x$ , требуется:

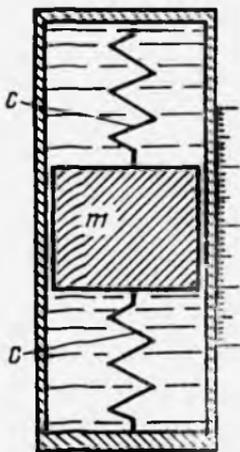


Рис. 39

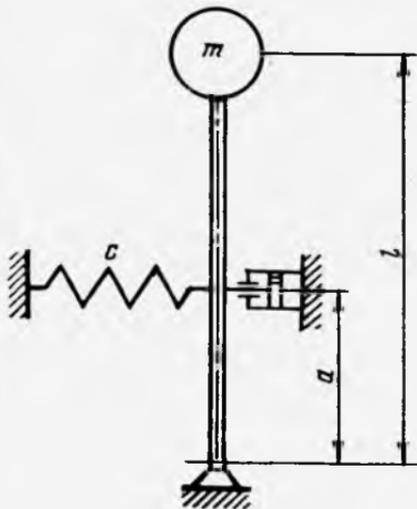


Рис. 40

а) составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний груза;

б) определить время, в течение которого амплитуда свободных колебаний уменьшится в 100 раз, приняв, что при  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $\dot{x}=\dot{x}_0$ .

При решении задачи считать  $m=50$  кг,  $c=1$  кН/м,  $\alpha=500$  Н·с·м<sup>-1</sup>.

44. Груз массой  $m$  укреплен на абсолютно жестком безынерционном стержне длиной  $l$  (рис. 40), который удерживается в равновесии пружиной и демпфером. Последний имеет линейную характеристику трения  $f=\alpha x$ . Определить частоту собственных колебаний системы и логарифмический декремент затухания колебаний, если  $m=1$  кг,  $l=0,5$  м,  $a=0,2$  м, диаметр пружины  $D=$

$\approx 50$  мм, диаметр проволоки пружины  $d=5$  мм, число витков  $i=5$ , модуль упругости  $G=80$  ГПа, коэффициент вязкого сопротивления движению демпфера  $\alpha=3 \cdot 10^2$  Н·с·м $^{-1}$ .

45. Для измерения малых разностей давления газов (или малых колебаний давления) применяют жидкостной  $U$ -образный манометр с наклонной трубкой (тягомер Креля) (рис. 41). Определить частоту малых собственных колебаний жидкости, заполняющей трубку тягомера, считая, что ее плотность равна  $\rho$ ; сила сопротивления движению жидкости по трубке  $F=\alpha x$ , где  $x$  — отклонение уровня жидкости от положения равновесия.

46. В начальный момент времени масса  $m$  (рис. 42, а) отклонена от положения равновесия на расстояние  $x_0$  и отпущена без начальной скорости. При скольжении по поверхности между

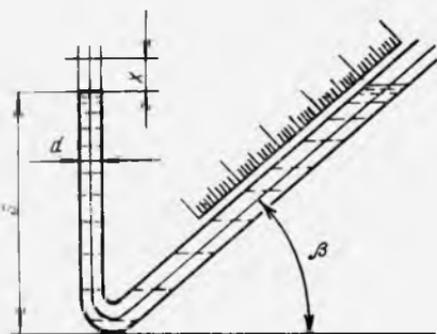


Рис. 41

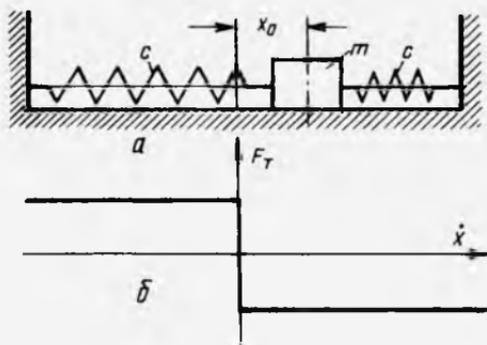


Рис. 42

массой  $m$  и поверхностью возникает сила трения, которую можно рассматривать как силу «сухого» (кулонова) трения. Зависимость силы кулонова трения  $F_T$  от скорости движения  $\dot{x}$  массы  $m$  показана на рис. 42, б. Установить закон движения массы  $m$ .

47. Диск 1 насажен на вал 2 и удерживается от вращения пружиной 3, закрепленной одним концом на диске, а другим — на опоре (рис. 43). Считая, что система диск—вал—пружина имеет момент инерции массы  $J$ , а зазор между диском и поверх-

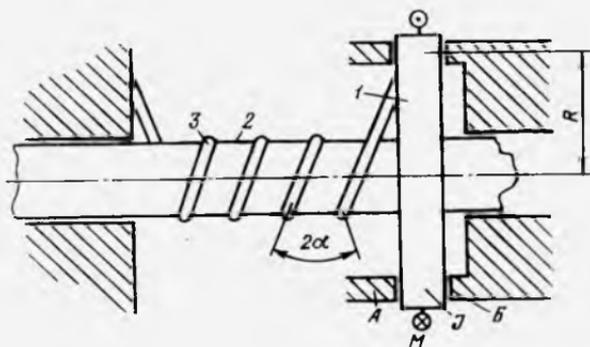


Рис. 43

ностями кулонова трения  $A$  и  $B$  весьма мал, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний диска, приняв, что при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Выяснить характер движения и закон изменения амплитуды в зависимости от числа периодов колебаний, приняв, что восстанавливающий момент упругости пружины больше момента трения. Определить период колебаний.

**Указание.** При повороте диска на угол  $\varphi$  длина пружины изменяется и диск прижимается к одной из поверхностей трения  $A$  или  $B$ . Сила кулонова трения пропорциональна силе прижатия диска к поверхности трения.

48. Используя метод фазовой плоскости, исследовать свободные колебания системы, изображенной на рис. 43 (см. условия задачи 47).

49. Для механической колебательной системы, состоящей из груза массой  $m$ , подвешенного на пружине жесткостью  $c$ , составить электрические аналоговые цепи.

50. Поршень масляного демпфера, имеющий массу  $m$ , подвешен на пружине жесткостью  $c$  (см. рис. 38). Составить электрическую аналоговую цепь малых свободных колебаний системы.

### § 3. Вынужденные колебания

51. На рис. 44 приведена схема вибрографа — прибора для регистрации колебаний. На жесткой станине  $1$  прибора закреплена катушка  $2$ , сердечником которой является магнит  $3$ , подвешенный на пружине  $4$ . При движении магнита внутри катушки в ней возникает электрический ток, который подается на регистрирующий прибор. Считая, что магнит  $3$  имеет массу  $m$ , а пружина  $4$  — жесткость  $c$ , составить дифференциальное уравнение движения магнита и определить, при каком условии иска-

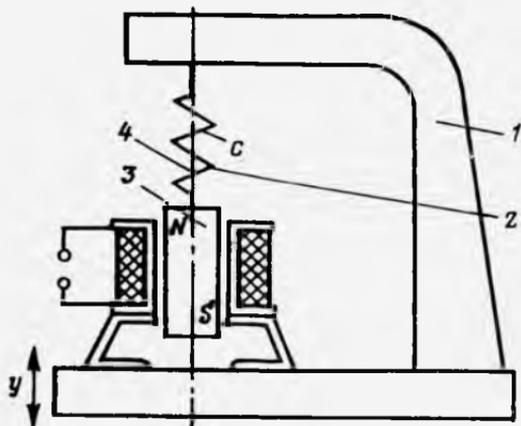


Рис. 44

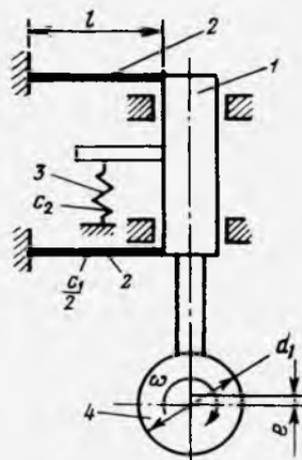


Рис. 45

жения записи колебаний будут минимальными (прибор записывает вертикальные колебания основания, происходящие по закону  $y = y_0 \sin \omega t$ ).

52. Безрычажный датчик контроля биения поверхности (рис. 45) состоит из измерительного стержня 1 массой  $m$ , укрепленного на двух плоских пружинах 2. Винтовая цилиндрическая пружина 3 служит для прижатия измерительного стержня к контролируемой детали. Если контролируемая деталь 4 имеет биение поверхности относительно линии центров (величина биения определяется эксцентриситетом  $e$ ), то при вращении детали, угловая скорость которой  $\omega$ , измерительный стержень получает вертикальные перемещения.

Считая, что при отсутствии эксцентриситета ( $e=0$ ) усилие прижатия измерительного стержня к детали равно  $R_0$ , и пренебрегая массой упругих элементов, определить предельную угловую скорость детали  $\omega_*$  из условия непрерывности контакта при контроле детали, имеющей эксцентриситет  $e$ . Чему равно измерительное усилие прибора (усилие, с которым измерительный стержень прижимается к детали) при  $\omega=0, 1\omega_*$ ?

При расчете принять:  $m=0,05$  кг,  $r_0=5$  Н,  $d_1=50$  мм,  $e=0,1$  мм. Плоские пружины имеют длину  $l=30$  мм и поперечное сечение  $b \times h = 5 \times 0,5$  мм. Диаметр винтовой пружины  $D=5$  мм, диаметр проволоки  $d=1$  мм, число витков  $i=20$ . Материал пружин — сталь,  $E=200$  ГПа,  $G=80$  ГПа.

53. На рис. 46 показан стержень, торцевое сечение которого принудительно поворачивается ( $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos \omega t$ ). Такое возбуж-



Рис. 46

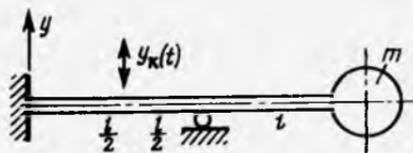


Рис. 47

дение колебаний называется кинематическим. Считая, что имеют место установившиеся колебания, определить максимальное нормальное напряжение в заделке.

54. Сечение стержня  $k$  (рис. 47) имеет заданное вертикальное перемещение  $y_k(t) = y_0 \cos \omega t$ . Считая, что имеют место установившиеся колебания, определить реакцию в шарнире.

55. Рычажный электроконтактный датчик (профилометр) (рис. 48), предназначенный для автоматического контроля волнистости поверхности, состоит из измерительного стержня 1, контактирующего с контролируемой поверхностью, и рычага 3, увеличивающего перемещение измерительного стержня  $L/l$  раз. Измерительный стержень прижимается к контролируемой поверхности пружиной 2, имеющей жесткость  $c_1$ . Рычаг 3 укреплен на полупружинном шарнире 5, имеющем угловую жест-

кость  $c_1$ . При выходе детали из поля допуска происходит замыкание одного из контактов 4, т. е. поступает сигнал на отбраковку. Производительность контроля пропорциональна скорости  $v$  перемещения детали относительно датчика. Однако скорость не может быть как угодно велика, так как при больших скоростях возможно нарушение контакта в точке  $B_1$ .

При массе измерительного стержня 1, равной  $m$ , и моменте инерции  $J$  массы рычага 3 относительно шарнира 0, пренебрегая силами трения, определить предельную скорость движения детали  $v$ , если уравнение ее поверхности имеет вид  $x = a \sin 2\pi z / A$

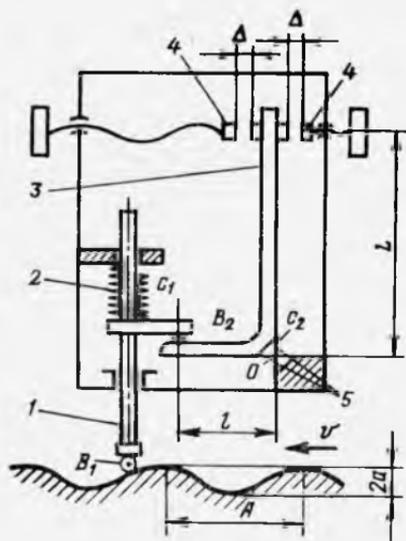


Рис. 48

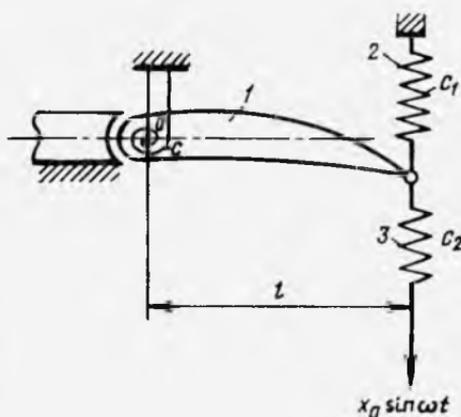


Рис. 49

$/A$  (где  $A$  — длина волны неровности). Учесть, что при установке измерительного стержня на контролируемую поверхность пружина 2 имеет предварительный натяг  $x_0$ , а пружины шарнира 5 — натяг  $\varphi_0$ .

56. В механизме профилометра (см. рис. 48) при достаточно большой скорости движения контролируемой поверхности относительно прибора возможно нарушение контакта между измерительным стержнем 1 и рычагом 3 в точке  $B_2$ . Считая, что профиль поверхности представляет собой синусоиду в виде  $x = a \sin 2\pi z / A$ , определить условие нарушения контакта в точке  $B_2$ . Момент инерции массы рычага равен  $J$ , угловая жесткость пружины шарнира 5 равна  $c_2$ . Пружины имеют предварительный натяг  $\varphi_0 = M_0 / c_2$ , где  $M_0$  — упругий момент в пружине 5 после установки прибора.

57. На рис. 49 приведена схема триммера 1 руля высоты самолета. Величина момента инерции  $J$  массы триммера относительно точки подвеса  $O$  известна, но определить жесткость

проводки управления статическим путем практически невозможно. Поэтому частоту собственных колебаний триммера определяют по резонансной частоте колебаний системы. В экспериментальной установке к триммеру прикрепляют дополнительные пружины 2 и 3. Определить частоту собственных колебаний триммера, если резонансная частота системы равна  $\omega_k$ .

58. Для уменьшения влияния колебаний основания на работу приборов применяется пассивная виброизоляция — подвеска (установка) прибора на мягких податливых амортизаторах. Для схем, изображенных на рис. 50, определить динамический

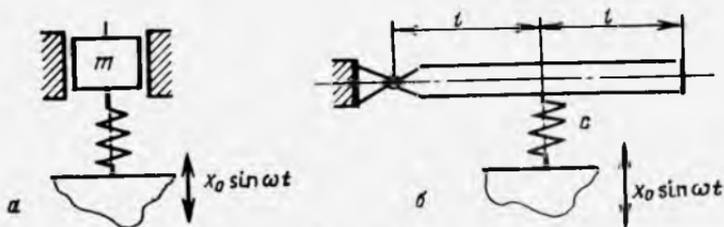


Рис. 50

коэффициент (отношение амплитуды колебаний массы  $m$  к амплитуде колебаний основания  $x_0$ ).

59. При работе однофазного электродвигателя развивается переменный крутящий момент  $M = M_0 + M_1 \sin \omega t$ . В этом случае в качестве виброизоляции применяют специальную подвеску (рис. 51), выполненную таким образом, что наклонные участ-

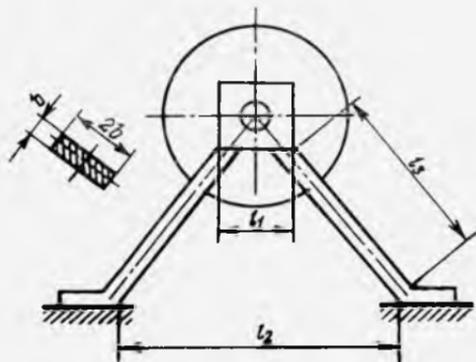


Рис. 51

ки стальных полос пересекаются в центре подшипника. Такая опора оказывается весьма жесткой в вертикальном и горизонтальном направлениях, что необходимо для обеспечения нормальной работы зубчатого колеса, закрепленного на валу двигателя, и достаточно податливой при повороте двигателя в плоскости чертежа.

Определить необходимые размеры поперечного сечения  $b \times 2b$  полос опор из условия, что динамический коэффициент передачи момента на основании не должен превышать  $1/15$ ,  $l_3=100$  мм,  $l_2=1600$  мм,  $l_1=50$  мм, момент инерции массы двигателя  $J=20$  кг·м<sup>2</sup>. Определить также коэффициент запаса выносливости при  $M_0=50$  Н·м,  $M_1=30$  Н·м,  $\sigma_b=1$  ГПа,  $\omega=105$  с<sup>-1</sup>,  $\sigma_{-1}=0,4$  ГПа.

60. Для уменьшения воздействия сил инерции, возникающих в машине (двигателе) из-за неуравновешенности вращающихся масс, на основании используются различные системы виброизоляции, например упругие подвески или опоры. Для схем, изображенных на рис. 52, определить динамический коэф-

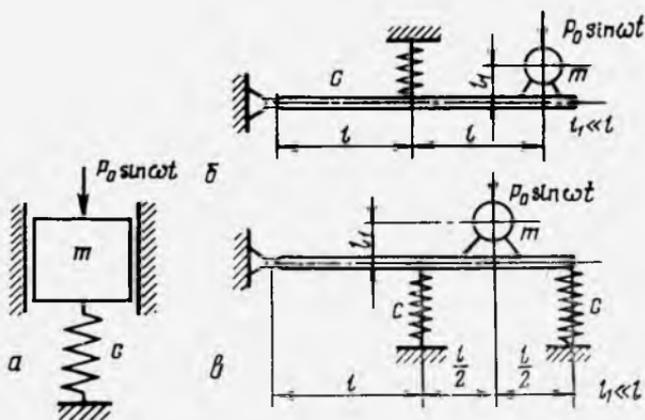


Рис. 52

фициент передачи силы на основании в местах прикрепления упругих опор жесткостью  $c$ . Балки, на которых установлены двигатели, считать абсолютно жесткими.

61. Масса  $m$  (рис. 53) подвешена на пружине жесткостью  $c=7,2$  кН/м. Верхний конец пружины связан с кривошипно-ползунным механизмом и может совершать возвратно-поступательное движение, описываемое уравнением  $x=x_0 \sin \omega t$ , где амплитуда  $x_0=15,5$  мм, а угловая скорость кривошипа  $\omega$  равна частоте свободных незатухающих колебаний массы  $m$ . Считая, что коэффициент силы вязкого сопротивления демпфера  $\alpha=27$  Н·с/м, а масса  $m=9,1$  кг, определить максимальную силу, растягивающую пружину, и коэффициент запаса усталостной прочности пружины, считая, что ее диаметр  $D=50$  мм, диаметр проволоки  $d=5$  мм. Пружина изготовлена из стали, имеющей следующие механические характеристики:  $\tau_b=850$  МПа,  $\tau_r=600$  МПа,  $\tau_{-1}=300$  МПа.

62. Масса  $m$  (рис. 54) установлена на двух пружинах жесткостью  $c$  каждая и связана с кривошипно-ползунным механизмом через демпфер, коэффициент силы вязкого сопротивления

которого равен  $\alpha$ . Составить дифференциальное уравнение движения массы  $m$ . Определить напряжения, возникающие в пружине, приняв диаметр пружины равным  $D$ , а диаметр проволоки пружины равным  $d$ , для случая, когда угловая скорость кривошипа  $\omega$  равна частоте незатухающих колебаний массы  $m$  на пружинах жесткостью  $c$ .

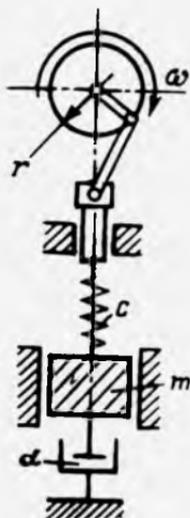


Рис. 53

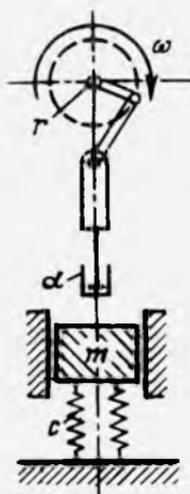


Рис. 54

63. На массу  $m$  (рис. 55), связанную с упором пружиной, имеющей жесткость  $c$ , и демпфером, коэффициент вязкого трения которого  $\alpha$ , действует периодически изменяющаяся сила  $F = F_0 \sin \omega t$ . Определить частоту собственных колебаний массы  $m$  и те значения частоты возмущающей силы  $\omega$ , при которых максимальная сила, действующая на пружину, равна амплитуде возмущающей силы.

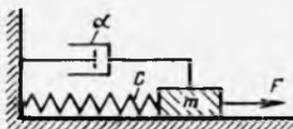


Рис. 55

64. Мотор массой  $m_1$  жестко укреплен на станине, имеющей массу  $m_2$  (рис. 56). Между станиной и основанием имеется слой смазки; станина укреплена на основании с помощью двух пружин. Ротор мотора имеет массу  $m_0$ , центр которой смещен относительно оси вращения на величину  $e$ . Общая жесткость пружин равна  $c$ . Определить коэффициент вязкого трения смазки, при котором рассеиваемая энергия (работа сил трения) будет наибольшей при равномерном вращении ротора с угловой скоростью  $\omega$ .

65. Для системы, изображенной на рис. 56, построить график изменения амплитуды силы, действующей на пружины при установившихся колебаниях, в зависимости от частоты возмущающей силы.

66. На двух стальных балках установлен двигатель, имеющий несбалансированную массу (рис. 57). Для уменьшения амплитуды колебаний, возникающих при работе двигателя, в систему введен демпфер вязкого трения. Считая, что масса двигателя  $m=50$  кг,  $\omega=63$  с<sup>-1</sup>, а амплитуда возмущающей си-

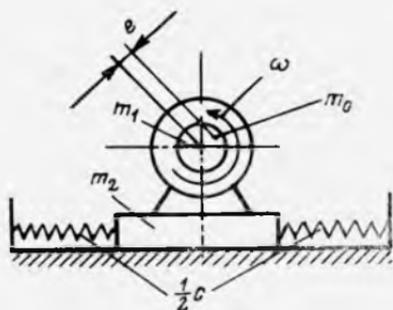


Рис. 56

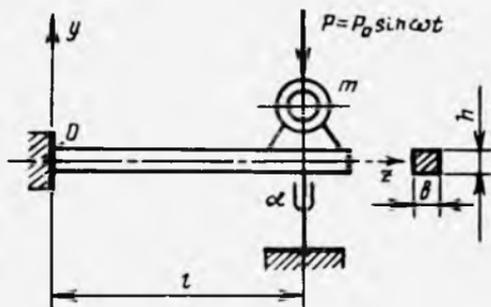


Рис. 57

лы при этом  $P_0=2000$  Н, подобрать характеристику  $\alpha$  демпфера таким образом, чтобы коэффициент запаса усталостной прочности балки равнялся  $n_\sigma=2$ . Балка имеет квадратное поперечное сечение  $b \times h=500 \times 500$  мм и изготовлена из стали Ст3 со следующими механическими характеристиками:  $\alpha_T=220$  МПа,  $\sigma_B=400$  МПа,  $\sigma_{-1}=180$  МПа. Длина балки  $l=1$  м. Влиянием концентрации напряжений в заделке, а также влиянием абсолютных размеров и обработки на прочность балки пренебречь.

67. Для виброизоляции машин и приборов в упругую подвеску вводит диссипативные элементы — демпферы вязкого трения. Определить динамический коэффициент для схемы, изображенной на рис. 58. Принять для расчета следующие данные:  $m=100$  кг,  $\omega=100$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha=6 \cdot 10^3$  Н·с·м<sup>-1</sup>,  $l=1$  м,  $EJ_x=20$  кН/м.

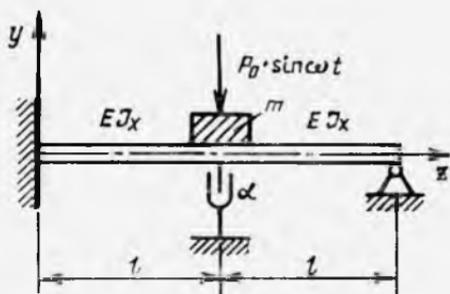


Рис. 58

68. Для регистрации колебательных процессов при наличии различных случайных возмущений (толчки, удары) применяются низкочастотные вибрографы, имеющие для гашения возникающих колебаний демпферы вязкого трения. Принципиальная схема такого прибора приведена на рис. 59. Здесь движение массы  $m$ , подвешенной на пружине жесткостью  $c$ , демпфируется силой движения груза, т. е.  $\alpha y$ , где  $y$  — смещение массы относительно основания. Найти смещение, которое фиксирует

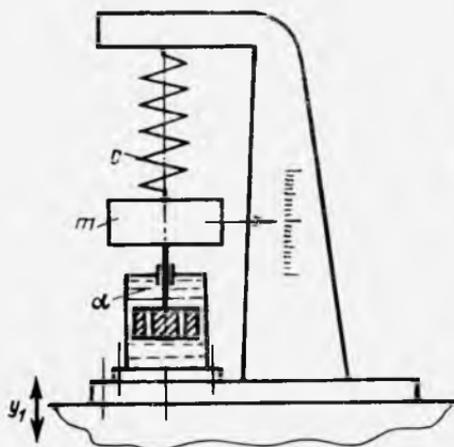


Рис. 59

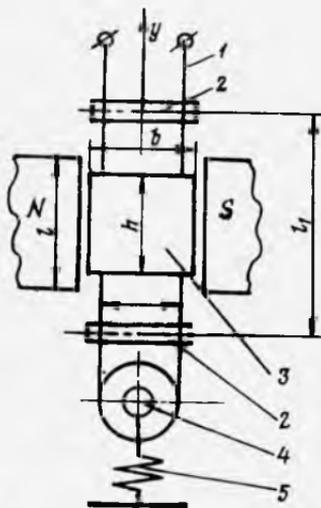


Рис. 60

прибор как функцию времени, если его основание движется по закону  $y_1 = y_0(\sin \omega t + 2 \sin 10 \omega t)$ . При решении задачи принять, что  $p_0^2 = c/m = 0,01 \omega^2$  и  $n = \alpha/2m = 0,02 \omega$ .

69. Для записи вибрационных процессов используют магнитоэлектрические осциллографы с петлевыми вибраторами (шлейфами), представляющими собой тонкую ленту 1 (петлю) из немагнитного материала (обычно из бронзы), натянутую между полюсами постоянного магнита. Петля опирается на две ножевые опоры (призмы) 2; в центре ее наклеено зеркальце 3 (рис. 60). Натяжение в ленточках петли создается с помощью пружины 5, оттягивающей натяжной ролик 4. При протекании тока по петле ее ветви в результате взаимодействия с магнитным полем смещаются в разные стороны, и зеркальце поворачивается на угол, пропорциональный току. В связи с требованиями повышенной точности измерения при расчете вибраторов необходимо учитывать момент сопротивления движению ( $M = \alpha \varphi$ ).

Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний зеркальца петлевого вибратора, считая, что при протекании тока  $i$  по одной ленточке на нее действует сила  $F = Bli$  ( $B$  — индукция магнитного поля,  $l$  — длина ленточки в преде-

лах магнитного поля). Определить частоту собственных колебаний системы. Натяжение в ветвях петли постоянно и равно  $Q$ , масса зеркала  $m_3$ , расстояние между опорами ленточки  $l_1$ .

70. На рис. 61 приведена схема рамочного вибратора (шлейфа) осциллографа. В отличие от петлевого вибратора рамочный имеет чувствительный элемент, выполненный в виде рамки  $1$  из нескольких витков проволоки, помещенной в поле постоянного магнита. Чувствительность такого прибора выше, чем петлевого, так как в магнитном поле расположено больше линий тока. Регистрация колебаний рамки (рамка поворачивает-

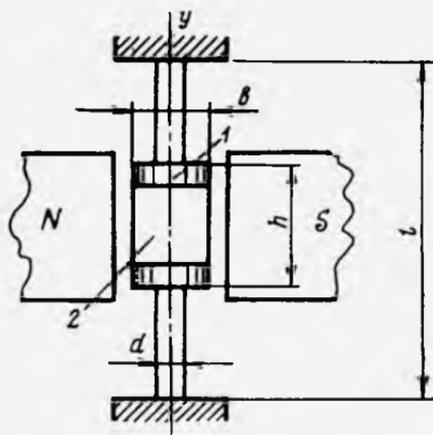


Рис. 61

ся на угол  $\varphi$ ) при пропускании через нее тока осуществляется лучом света, отражаемого от зеркала  $2$ , укрепленного на рамке. Растяжки, удерживающие рамку и зеркальце, изготовлены в виде сплошной ленты или стержня круглого поперечного сечения.

Считая момент инерции  $J$  зеркала и рамки относительно вертикальной оси равным  $J=1,02 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>, определить частоту собственных колебаний прибора. Рамка подвешена на сплошной струне из бронзы ( $d=0,2$  мм,  $G=40$  ГПа) длиной  $l=30$  мм. Исследовать зависимость движения зеркала от величины коэффициента вязкого трения  $\alpha$  (считая момент сопротивления равным  $\alpha\dot{\varphi}$ ) при подаче в систему тока  $i$ , создающего внезапно приложенный вращающий момент  $M=M_0=\text{const}$ . Момент  $M_0$  пропорционален току  $i$ , т. е.  $M_0=\gamma i$ . Рассмотреть следующие случаи демпфирования: 1)  $\alpha=0$ ; 2)  $\alpha=0,6 \sqrt{c/J}$  кн ( $c$  — крутильная жесткость стержня).

71. Для исследования крутильных колебаний вращающихся валов применяют специальные приборы — торсиографы (рис. 62). В торсиографе системы Гейгера массивный диск (маховая масса)  $2$  с помощью спиральной пружины  $1$  закреплен

внутри легкого шкива 3, который жестко связан с валиком 4, вращающимся в подшипниках 5. Шкив 3 с помощью легкого ремня соединяется с валом, движение которого исследуется. Таким образом, вращение шкива 3 с достаточной точностью повторяет вращение исследуемого вала. При равномерном вращении вала маховик 2 также движется равномерно. При изменении угловой скорости вала шкив 3 также изменяет свою скорость, а маховик 2, обладающий значительной инерционностью, продолжает вращаться равномерно. Разность движений маховика и шкива фиксируется специальным механическим устройством (на схеме не показано). Стальной маховик имеет форму

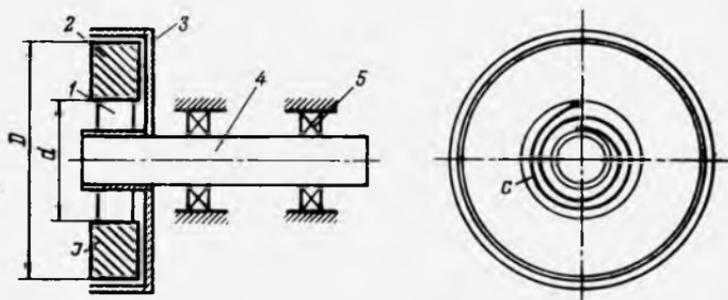


Рис. 62

кольца, размеры которого  $d=50$  мм,  $D=100$  мм,  $b=50$  мм, и укреплен на пружине с угловой жесткостью  $c=146$  Н·м.

Составить дифференциальное уравнение относительных колебаний маховика при вращении шкива с угловой скоростью  $\omega = \omega_0 + \omega_1 \cos kt$ . Учесть, что в системе имеется демпфирование, причем демпфирующий момент пропорционален относительной угловой скорости маховика и диска. Коэффициент момента вязкого сопротивления  $\alpha = 0,73$  Н·м·с. Определить сдвиг фаз колебаний маховика и диска, а также логарифмический декремент затухания колебаний прибора при  $k=50$  с<sup>-1</sup>.

72. Для уплотнения бетона, уложенного в основания фундаментов сооружений, применяют специальные приспособления — вибраторы. Вибратор (рис. 63, а) состоит из тяжелой рамы массой  $m$ , на которой смонтированы два диска массами  $m_1$  каждый. Диски вращаются в вертикальной плоскости в

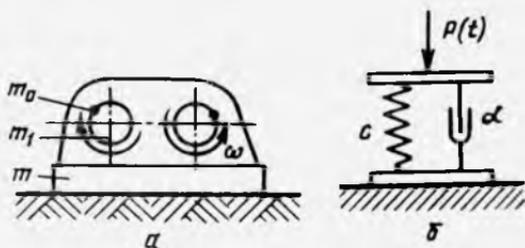


Рис. 63

противоположных направлениях с угловой скоростью  $\omega$ . На дисках закреплены грузы массой  $m_0$  с эксцентриситетом  $e$  относительно оси вращения. В конце процесса уплотнения свойства бетонного основания можно приблизительно описать реологической моделью, представленной на рис. 63, б.

Составить дифференциальное уравнение установившихся колебаний корпуса вибратора. Определить амплитуду колебаний, считая, что в процессе работы корпус вибратора не открывается от уплотняемой массы.

73. В бесконтактном датчике мембранного типа (рис. 64) замеряется изменение давления в трубопроводе, зависящее от величины зазора между наконечником 2 и деталью 1. Регистрация давления производится путем измерения прогибов мембраны 3 с помощью специального индикатора 4, имеющего подвижный стержень 5.

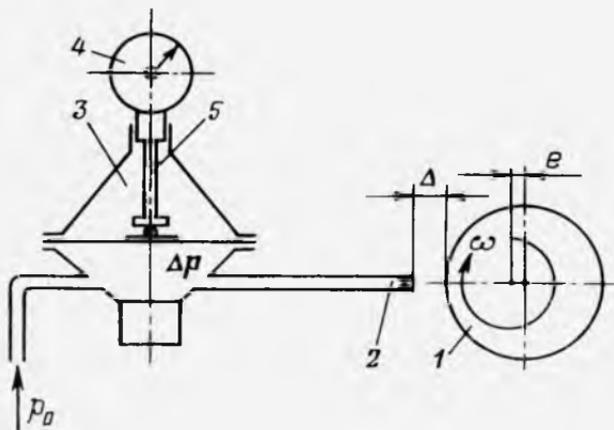


Рис. 64

раны 3 с помощью специального индикатора 4, имеющего подвижный стержень 5.

Считая, что давление на мембрану  $p$  изменяется пропорционально изменению зазора  $\Delta$ , т. е., полагая, что

$$\Delta p/p_0 = (p/\Delta) A \sin \omega t,$$

(где  $p_0$  — номинальное значение давления в камере прибора;  $e$  — амплитудная величина изменения зазора  $\Delta$  в процессе контроля детали;  $\omega$  — угловая скорость детали;  $A$  — безразмерный коэффициент), построить зависимость показания датчика от угловой скорости детали, т. е. амплитудно-частотную характеристику прибора, если масса стержня 5 равна  $m$ , жесткость пружины индикатора, связанного со стержнем, равна  $c$ , а коэффициент вязкого сопротивления, возникающего при движении стержня, равен  $\alpha$ .

При расчете принять:  $m=0,05$  кг;  $c=2 \cdot 10^3$  Н/м;  $p_0=2 \times 10^5$  Па;  $\Delta=1$  мм;  $e=0,1$  мм; площадь мембраны  $F=300$  мм<sup>2</sup>;  $A=0,5$ ;  $\beta=1$ , а коэффициент демпфирования, полученный на

основании анализа свободных колебаний прибора,  $\alpha = 10 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ . Массой мембраны пренебречь.

**Указание.** При изменении давления на  $\Delta p$  на стержень действует сила со стороны мембраны, равная  $\Delta p = \beta F \Delta p$ , где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств мембраны,  $F$  — площадь мембраны.

**74.** В качестве мультипликатора (увеличителя) в бесконтактных измерительных приборах часто используют гофрированные цилиндры — сильфоны. Незначительное изменение внутреннего давления в сильфоне вызывает относительно большое изменение его длины. На рис. 65 приведена схема сильфонного датчика для автоматического контроля овальности деталей.

В корпусе 1 прибора на плоских пружинах 2 жесткостью  $c_1$  подвешен цилиндр 4 массой  $m$ . Цилиндр 4 жестко соединен с сильфоном 5, имеющим жесткость  $c_2$ . Давление в сильфоне связано с давлением в трубопроводе 6, равным  $p_0$ . Усилие предварительного натяга  $\delta_0$  и регулировка прибора осуществ-

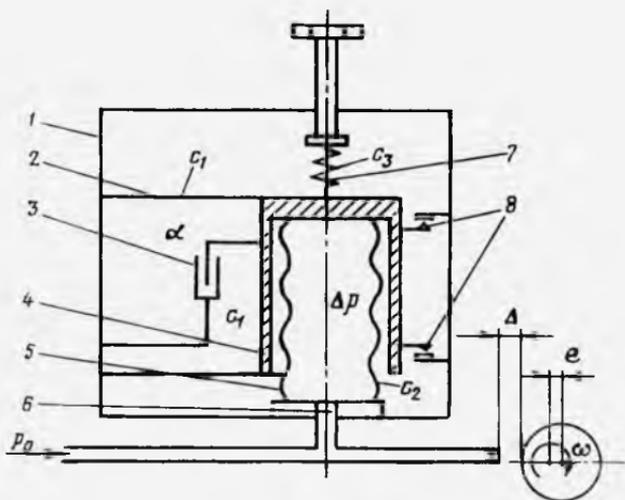


Рис. 65

ляется пружиной 7 жесткостью  $c_3$ . При выходе контролируемого размера из поля допуска происходит замыкание одного из контактов 8 и дается сигнал на отбраковку.

Для уменьшения времени затухания колебаний прибора при подаче детали на контроль в измерительную систему введен демпфер вязкого трения 3, сила демпфирования которого пропорциональна скорости перемещения:  $F_T = \alpha x$ .

Считая, что изменение давления в сильфоне пропорционально изменению зазора между измерительным наконечником и деталью  $\Delta p/p_0 = (e/\Delta) A \cdot \sin \omega t$ , где  $e$  — амплитуда отклонения

от цилиндрической формы,  $\Delta$  — зазор между деталью и нако-  
нечником,  $\omega$  — угловая скорость детали,  $A$  — коэффициент,  
построить амплитудно-частотную характеристику прибора. Оп-  
ределить диапазон угловых скоростей  $\omega$ , в котором динамиче-  
ская погрешность измерения не превышает  $\pm 10\%$  измеряемой  
величины (т. е. такой диапазон  $\omega$ , в котором амплитуда коле-  
баний массы  $M$  отличается от статического отклонения не более  
чем на  $10\%$ ).

Данные для расчета:  $m=0,1$  кг;  $c_1=20$  Н/см;  $c_2=5$  Н/см;  
 $c_3=10$  Н/см;  $p_0=3 \cdot 10^5$  Па;  $\Delta=1$  мм;  $A=1,0$ ; эффективная пло-  
щадь сильфона  $F=400$  м<sup>2</sup>. Коэффициент силы вязкого трения,  
определенный по осциллограмме свободных затухающих коле-  
баний, равен  $a=7,5$  Н·с·м<sup>-1</sup>.

75. Прицеп массой  $m$  движется по неровной дороге с посто-  
янной скоростью  $v$  (рис. 66, а). Считая, что точка крепления  
прицепа к автомобилю (точка  $O$ ) не имеет вертикальных пе-  
ремещений, определить скорость установившегося движения систе-  
мы, при которой амплитуда колебаний достигает максималь-

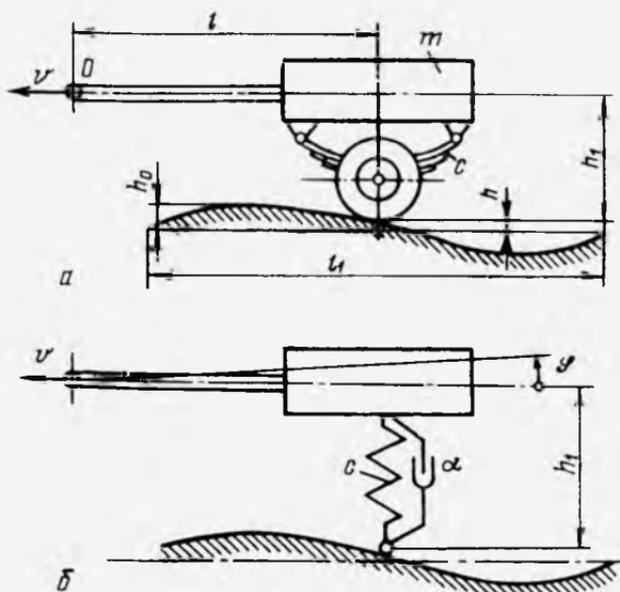


Рис. 66

ной величины. При решении считать, что жесткость шин  
весьма велика по сравнению с жесткостью рессор  $c$ . Профиль  
неровностей дороги можно описать уравнением  $h =$   
относительно точки  $O$  равен  $J_0$ . Считать, что в рессорах возни-  
кает вязкое трение с коэффициентом трения  $\alpha$ . Массой колес  
прицепа по сравнению с массой  $m$  можно пренебречь.

Указание. При решении задачи прицеп можно представить схемой, как показано на рис. 66, б, причем  $h$  значительно меньше  $l$  (т. е. поворот на угол  $\varphi$  приводит только к вертикальному смещению точки  $A$ ).

76. К системе, изображенной на рис. 43, приложен внешний возмущающий крутящий момент, изменяющийся во времени по закону  $M_0 \sin \omega t$ . Составить систему дифференциальных уравнений, определяющую установившееся периодическое движение диска.

Указание. Рассмотреть полупериод  $T/2 = \pi/\Delta$  колебаний диска, состоящий из двух участков движения (см. решение задачи 47). Стыкуя эти участки, получить уравнение для определения параметров установившихся колебаний.

77. Считая, что на систему, изображенную на рис. 43, действует периодически изменяющийся крутящий момент  $M(t) = M_0 \sin \omega t$ , определить амплитуду установившихся колебаний и возмущающей силы.

Указание. При решении задачи заменить кулоново трение вязким, используя условия равенства рассеиваемой энергии за период установившихся колебаний.

78. Решить задачу 47, считая, что на систему действует возмущающий момент  $M = M_0 + M_1 \sin \omega t$ , а на диск дополнительно к кулонову трению с коэффициентом трения  $\mu$  действует момент сопротивления, пропорциональный угловой скорости диска и равный  $\alpha\varphi$ . Вычислить амплитуду установившихся колебаний и фазовый угол. При решении воспользоваться указанием к задаче 77.

79. На массу  $m$  действует возмущающая сила, изменяющаяся по закону  $P(t) = P_0 |\sin \omega t|$  (рис. 67). Составить уравнение вынужденных колебаний груза и определить, при какой частоте  $\omega$  возмущающей силы при установившихся колебаниях происходит резонанс (силами сопротивления пренебречь).

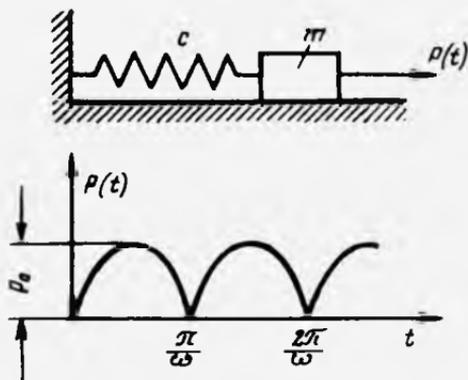


Рис. 67

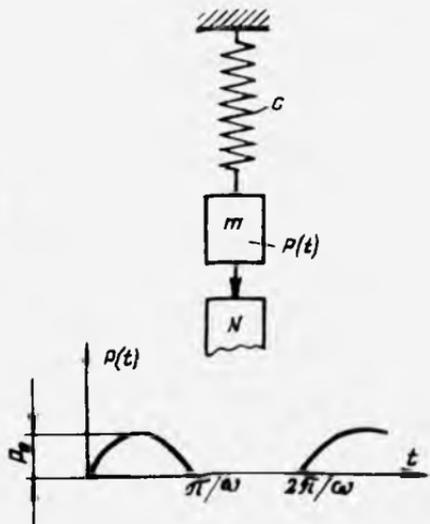


Рис. 68

80. На груз массой  $m$ , подвешенный на пружине жесткостью  $c$ , действует сила притяжения  $P(t)$  электромагнита (рис. 68). Силу притяжения массы  $m$  магнитом можно приближенно представить в виде

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \sin \omega t & \text{при } 2n\pi \leq \omega t \leq (2n+1)\pi \\ 0 & \text{при } (2n+1)\pi \leq \omega t \leq 2(n+1)\pi. \end{cases}$$

Составить уравнение вынужденных колебаний груза относительно положения равновесия (силами сопротивления пренебречь).

81. Исследовать движение массы  $m$ , закрепленной на конце консольной балки длиной  $l$ , при действии на массу единичного импульса силы ( $\int_{0+\delta t} P(t) dt = 1$ ) (рис. 69). Массой балки по сравнению с массой груза и затуханием при колебаниях пренебречь.

82. Исследовать движение массы  $m$  (см. рис. 69) при действии на нее внезапно приложенной силы  $Q$ , т. е. считая, что  $P(t) = Q = \text{const}$  (рис. 70).

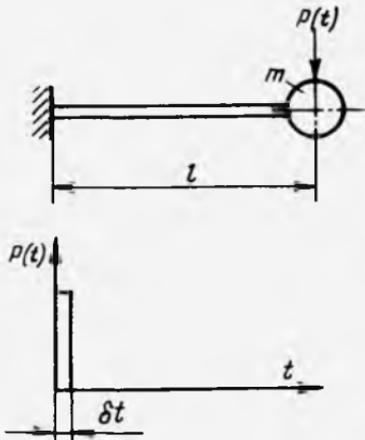


Рис. 69

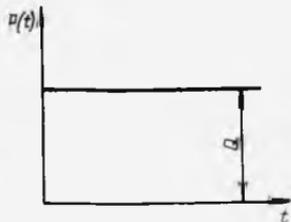


Рис. 70

83. Исследовать движение массы  $m$ , закрепленной на конце консольного стержня (см. рис. 69), при действии на нее силы  $P(t)$ , изменяющейся по законам, изображенным на рис. 71.

84. Исследовать движение массы (см. рис. 69) при действии на нее линейно возрастающей нагрузке  $P(t) = at$ . Считать, что при  $t=0$   $y = \dot{y} = 0$ .

85. На массу  $m$  (рис. 72, а) действуют периодические (период равен  $T$ ) единичные импульсы силы  $P(t)$  (рис. 72, б) одного знака. Исследовать вынужденные колебания массы и найти амплитуды ее отклонения от положения равновесия, а также скорости при этом периодическом движении. Жесткость пружины равна  $c$  ( $c/m = p_0^2$ ); трением между массой и направляющей пренебречь.

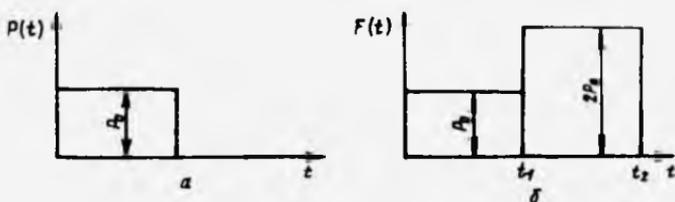


Рис. 71

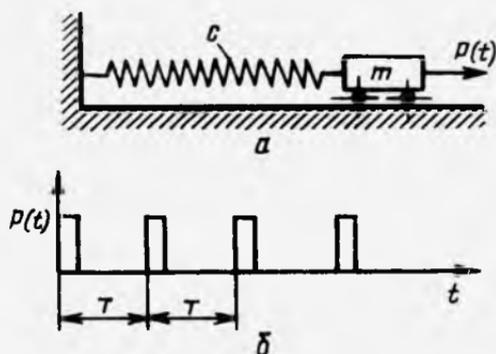


Рис. 72

86. В задаче 85 исследовать вынужденные колебания массы  $m$  при действии на нее периодической импульсной нагрузки переменного знака (рис. 73).

87. Исследовать вынужденные колебания массы  $m$  (см. рис. 72, а) при действии на нее периодических импульсов одного знака конечной продолжительности  $t_1$  и высоты  $h$  (рис. 74).

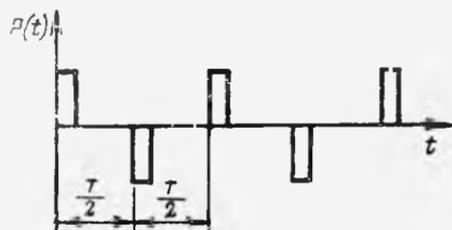


Рис. 73



Рис. 74

88. В задаче 85 найти периодический установившийся режим движения массы  $m$  с учетом силы трения ( $F_{\text{тр}} = ay$ ) (см. рис. 72, а).

#### § 4. Критические состояния и устойчивость колебаний

89. Скорость движения жидкости по различным трубопроводам влияет на частоту их собственных колебаний. Скорость протекания, при которой частота колебаний системы равна ну-

лю, является критической. Для системы, изображенной на рис. 75, составить дифференциальное уравнение малых свободных угловых колебаний, считая, что скорость протекающей жидкости  $v_0$  постоянна. Определить значение скорости протекания  $v_*$ , при котором движение трубки будет апериодическим. Масса трубки  $m_0$ , ее длина  $l$ , площадь сечения отверстия  $F_0$ , плотность жидкости  $\rho$ . Трубка может свободно вращаться относительно шарнира  $A$ .

90. На тонкостенной горизонтальной шарнирно опертой безынерционной трубе укреплен деталь массой (рис. 76). Через трубу протекает идеальная несжимаемая жидкость со скоростью  $v$ . Средний диаметр трубы  $d$ , толщина стенки  $\delta$ , модуль

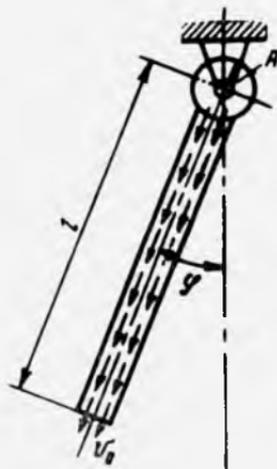


Рис. 75

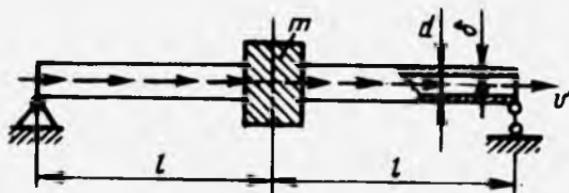


Рис. 76

упругости материала трубы  $E$ , момент инерции сечения трубы  $J_x$ .

Определить скорость  $v_*$  протекания жидкости по трубе, при которой частота свободных колебаний системы равна нулю. Начальным прогибом, связанным с действием силы тяжести системы, а также силами инерции переносного движения жидкости при колебаниях (в том числе и силой Кориолиса) пренебречь.

91. Диск разбрызгивателя, имеющий  $n$  радиальных отверстий (рис. 77), укреплен на полом валу, имеющем жесткость при кручении  $c$ . Скорость истечения жидкости из отверстий диска  $v_0$ , момент инерции массы диска  $J$ .

Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний диска относительно стационарного равномерного вращения, происходящего с угловой скоростью  $\omega$  (с учетом влияния протекающей жидкости). Жидкость считать идеальной и несжимаемой.

Определить частоту собственных колебаний диска и скорость  $v_*$ , при которой частота становится равной нулю.

92. Решить задачу 90 (см. рис. 76) считая, что масса  $m$  подкреплена дополнительно пружиной, имеющей жесткость  $c$ .

93. На гибкий стальной вал (рис. 78) диаметром  $d=5$  мм, длиной  $2l=0,5$  м насажен диск диаметром  $D=100$  мм и толщиной  $h=10$  мм. Центр тяжести диска  $O_1$  расположен на расстоянии  $e=1$  мм от оси симметрии вала  $O$ .

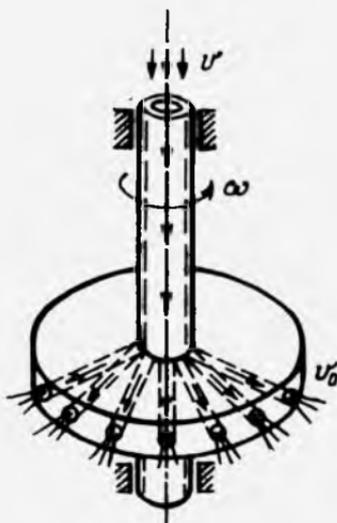


Рис. 77

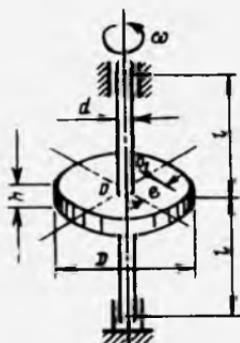


Рис. 78

Получить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний диска в векторной форме при постоянной угловой скорости вала, ограничившись только поступательным движением диска. Массой вала по сравнению с массой диска пренебречь. Определить критическую угловую скорость вала  $\omega_c$  и наибольшие напряжения в нем при  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ .

Указание. Под критической угловой скоростью понимается скорость, при которой амплитуда колебаний может быть бесконечно большой.

94. Вращающийся консольный вал (рис. 79) длиной  $l$ , жесткостью  $EJ_x$  имеет на свободном конце точечную массу  $m$ . Пренебрегая силами сопротивления и массой вала, определить критическую угловую скорость вала.

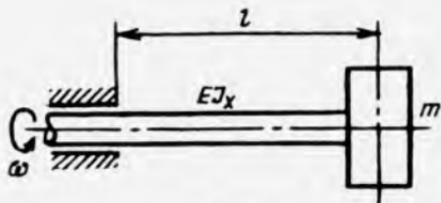


Рис. 79

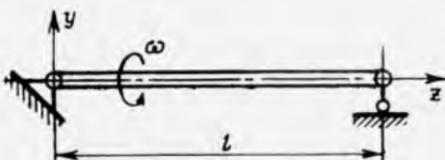


Рис. 80

95. Гибкий вал постоянного поперечного сечения, закрепленный концами в коротких подшипниках, можно рассматривать как шарнирно опертую балку длиной  $l$  и изгибной жесткостью  $EJ_x$  (рис. 80). Определить критическую угловую скорость вала, при которой прямолинейная форма становится неустойчивой.

96. Определить критическую угловую скорость гибких валов постоянного поперечного сечения, при которой прямолинейная форма становится неустойчивой, для случаев закрепления концов, изображенных на рис. 81.

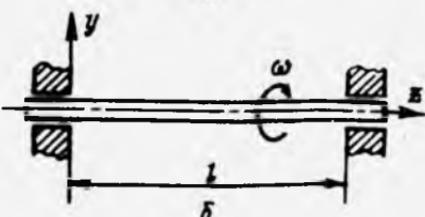
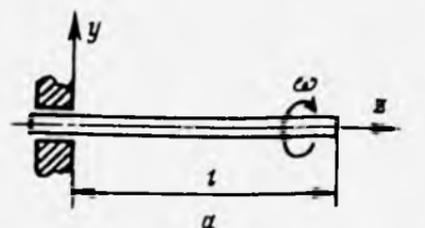


Рис. 81

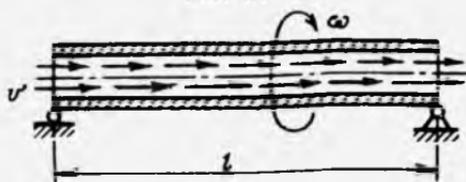


Рис. 82

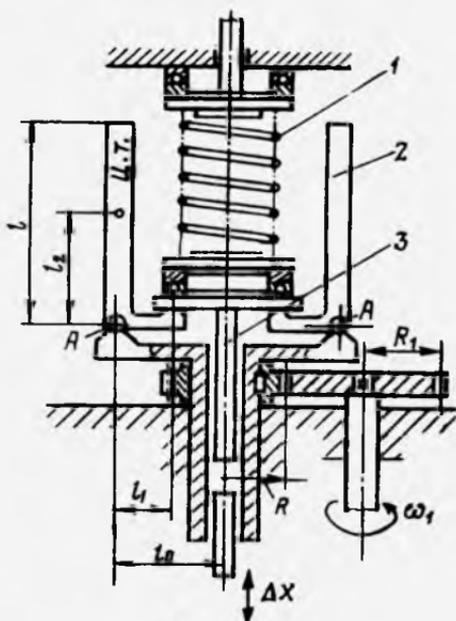


Рис. 83

97. Определить критическую угловую скорость полого вала с учетом движущейся по нему идеальной несжимаемой жидкости (рис. 82). Масса жидкости, приходящаяся на единицу длины трубы  $m_1$ , масса единицы длины трубы  $m_0$ , скорость движения жидкости в трубе  $v = \text{const}$ , изгибная жесткость вала  $EJ_x$ . Кориолисовыми силами инерции жидкости пренебречь.

98. Чувствительный элемент прибора (рис. 83) состоит из пружины 1 жесткостью  $c$ , рычагов 2 массой  $m$ , шарнирно закрепленных в точках  $A$ , и свободно движущегося штока 3 массой  $m_2$ . При стационарном режиме работы ( $\omega_1 = \text{const}$ ) момент силы инерции рычагов уравнивается моментами сил тяжести штока и сжатия пружины. Определить частоту собственных колебаний штока и критическую угловую скорость.

99. Определить частоту собственных колебаний масс регулятора Уатта (рис. 84) при вращении его с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При выводе дифференциального уравнения малых свободных колебаний системы пренебречь влиянием вертикального смещения масс  $m_1$  на величину кинетической и потенциальной энергий системы, а также массой стержней по сравнению с массами  $m_1$  и массой втулки  $m_2$ . Жесткость пружины сжатия равна  $c$ . Втулка, которая передает вращение массам  $m_1$ , может смещаться в вертикальном направлении.

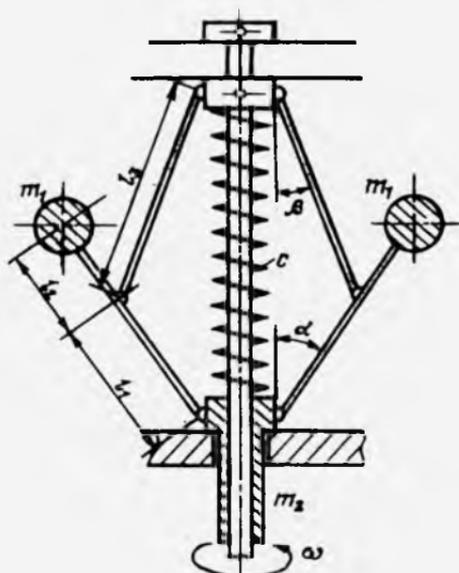


Рис. 84

100. Решить задачу 8, предполагая, что водило в положении равновесия направлено вертикально вверх, а пружины прикреплены к водилу с некоторым предварительным натягом  $\delta$  (см. рис. 7). Определить критическую длину водила  $l_c$ , т. е. такую длину, при которой частота малых свободных колебаний равна нулю.

101. Однородный стержень постоянного поперечного сечения, имеющий массу  $m$  и длину  $l$ , прикреплен шарнирно (рис. 85) к оси, вращающейся равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . Исследовать малые свободные колебания стержня относительно положения статического и динамического равновесий (на рис. 85 угол  $\alpha$  характеризует состояние динамического равновесия). Определить, при какой угловой скорости  $\omega$ , состояние равновесия неустойчиво.

102. Невесомый жесткий стержень длиной  $l$  с массой  $m$ , укрепленной на его конце (рис. 86), шарнирно прикреплен к вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  втулке. Определить критическое значение угловой скорости  $\omega_c$ , при которой вертикальное положение стержня становится неустойчивым.

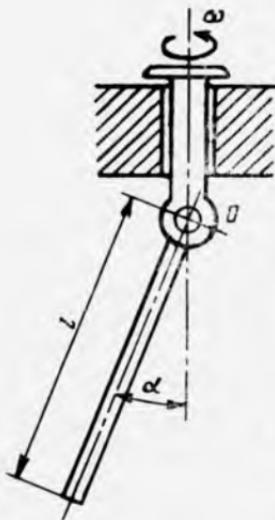


Рис. 85

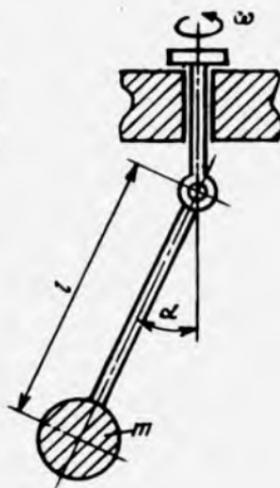


Рис. 86

Найти частоту малых свободных колебаний массы относительно вертикального положения равновесия (при  $\omega < \omega_*$ ) и частоту ее колебаний относительно положения динамического равновесия (при  $\omega > \omega_*$ ).

103. Массивный диск (рис. 87) вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . В прорезь диска вставлен груз массой  $m$ , удерживаемый двумя одинаковыми пружинами. Каждая пружина имеет жесткость  $c$  и вставлена с предварительным натягом  $\delta_0$ .

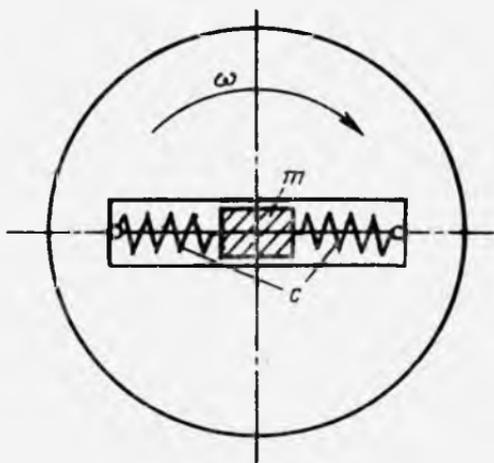


Рис. 87

Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний груза. Определить критическую угловую скорость диска  $\omega_*$  (скорость, при которой положение груза в центре диска оказывается неустойчивым).

104. Жесткая рама вращается в горизонтальной плоскости, с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 88). По радиальному пазу рамы может скользить груз, имеющий массу  $m$ , удерживаемую пружиной жесткостью  $c$ . Используя метод Лагранжа, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний груза относительно положения его динамического равновесия, при котором масса  $m$  находится на расстоянии  $x_0$  от

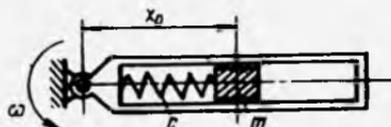


Рис. 88

оси вращения. Определить частоту собственных колебаний груза и критическую угловую скорость рамы.

105. Тонкая, абсолютно жесткая пластинка толщиной  $\delta$  закреплена на круглом стержне диаметром  $d$  и жесткостью  $\nu$  и обдувается воздушным потоком, имеющим скорость  $v$  (рис. 89).

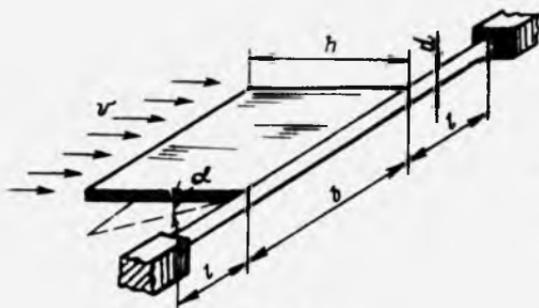


Рис. 89

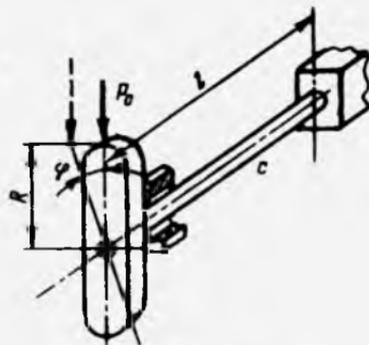


Рис. 90

Считая, что подъемная сила, возникающая при отклонении пластинки на малый угол  $\alpha$ , приложена на расстоянии  $h/4$  от свободного края пластины и определяется выражением

$$Y = \pi \rho v^2 S \alpha$$

(где  $\rho$  — плотность воздуха;  $S$  — площадь поверхности пластинки;  $\alpha$  — угол атаки), исследовать зависимость частоты собственных колебаний пластинки от скорости потока и определить критическую скорость дивергенции пластинки. Силой лобового сопротивления пренебречь.

Указание. Под критической скоростью дивергенции пластинки понимается скорость, при которой появляется еще одна форма равновесия при  $\alpha \neq 0$ .

106. На упругом валике длиной  $l$ , имеющем жесткость на кручение  $c$ , закреплен массивный рычаг, момент инерции массы которого относительно оси валика равен  $J$  (рис. 90). К рычагу приложена сила  $P_0$ , линия действия которой проходит через ось валика. Считая, что при повороте рычага линия действия силы перемещается параллельно своему начальному положению, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы. Определить частоту собственных колебаний и критическую силу  $F_c$ . — такое значение силы, при котором частота колебаний становится равной нулю.

107. Груз массой  $m$  укреплен с помощью упругих растяжек длиной  $l$  в постоянном однородном магнитном поле (рис. 91).

Определить частоту собственных колебаний груза, считая, что в процессе колебаний натяжение растяжек  $T_0$  не меняется. Сила притяжения массы магнитом прямо пропорциональна квадрату расстояния до магнита:  $F_{1,2} = k[\Phi_0^2 / (a_1 + x)^2]$ . Опреде-

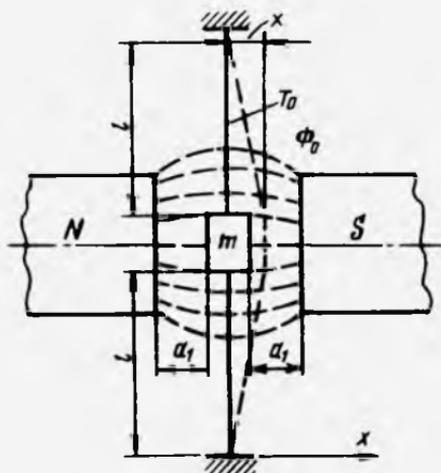


Рис. 91

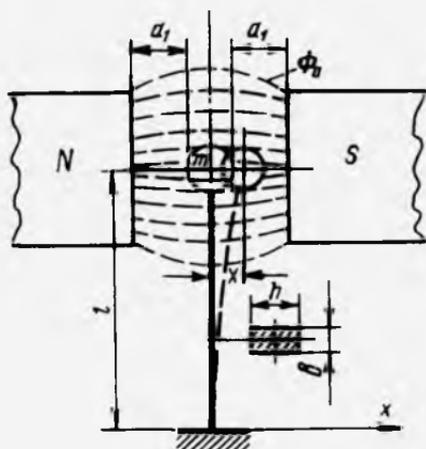


Рис. 92

лить также зависимость критического значения  $\Phi_0$  от натяжения  $T_0$ , считая критическим такое значение, при котором частота собственных колебаний груза равна нулю.

108. Груз массой  $m$  (рис. 92), укрепленный на конце длинного упругого стержня, помещен в постоянное однородное магнитное поле с магнитным потоком  $\Phi_0$ . Считая, что при малых отклонениях груза от положения равновесия сила со стороны магнитного поля пропорциональна смещению  $x$  (см. задачу 107), определить частоту собственных колебаний груза и критическое значение напряженности магнитного поля. Влиянием массы стержня пренебречь.

109. На шарнирно закрепленной невесомой балке укреплен точечная масса  $m$  (рис. 93). По балке с постоянной скоростью  $v$  движется сосредоточенная сила  $R_0$ . Определить (приблизительно) закон изменения вертикального смещения мас-

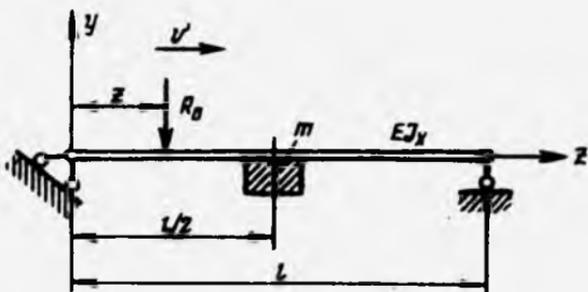


Рис. 93

сы  $m$  и установить, имеется ли критическая скорость  $v$  движения силы  $R_0$ , при которой амплитуда колебаний массы  $m$  безгранично возрастает.

### § 5. Параметрические колебания

110. Маятник (рис. 94) представляет собой груз массой  $m$ , закрепленный на невесомом стержне длиной  $l$ . Верхняя точка подвеса маятника совершает периодическое движение по закону  $y_1 = y_0 \sin \omega t$ . Исследовать устойчивость малых колебаний маятника при  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  $m = 1 \text{ кг}$ ,  $y_0 = 10 \text{ мм}$ .

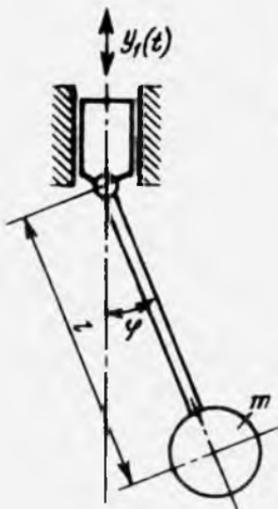


Рис. 94

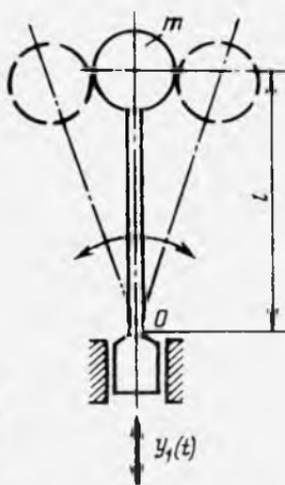


Рис. 95

111. На рис. 95 изображена схема астатического маятника. При движении точки закрепления  $O$  маятника с некоторой частотой  $\omega$  вертикальное положение груза является устойчивым. Определить наименьшую частоту  $\omega_{\min}$ , при которой система устойчива, если движение точки  $O$  совершается по закону  $y_1 = y_0 \sin \omega t$ ,  $l = 0,2 \text{ м}$ ;  $y_0 = 5 \text{ мм}$ .

112. Стальной абсолютно жесткий стержень постоянного поперечного сечения длиной  $l=0,12$  м, массой  $m=0,2$  кг шарнирно закреплен нижним концом на плите, совершающей колебания с амплитудой  $y_0=10$  мм (рис. 96). Считая движение опоры гармоническим ( $y_1=y_0 \sin \omega t$ ), определить, при какой наименьшей частоте  $\omega_{\min}$  вертикальное положение стержня становится устойчивым.

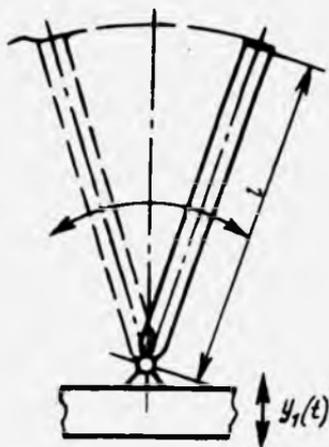


Рис. 96

113. Тонкая прямоугольная стальная пластинка размерами  $b \times l \times \delta$  помещена в воздушном потоке (рис. 97). Один край пластинки закреплен шарнирно, а другой имеет упругое закреп-



Рис. 97

ление с общей жесткостью  $c$ . Скорость течения потока изменяется по закону  $v+v_0+v_1 \sin \omega t$ .

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний пластинки и исследовать их устойчивость, считая, что  $v_0 \gg v_1$ . Точка приложения подъемной силы находится на расстоянии  $l/4$  от передней кромки пластинки. Числовые данные для решения задачи:  $l=b=0,2$  м;  $\delta=5$  мм;  $\rho=0,125$  кг/м<sup>3</sup>;  $c=2,5$  кН/м;  $\omega \approx 100$  с<sup>-1</sup>;  $v_0=30$  м/с;  $V_1=5 \dots 10$  м/с амплитудное значение скорости.

Указание. При составлении уравнения малых колебаний можно считать, что подъемная сила

$$Y=0,5c_v E \rho v_2,$$

где  $c_v=2\pi\alpha$  — коэффициент подъемной силы;  $E=bl$  — площадь пластинки;  $\rho$  — плотность воздуха;  $v$  — скорость потока;  $\alpha$  — угол атаки.

114. Упругий стержень длиной  $2l$  с шарнирно закрепленными концами подвергается воздействию осевой периодически изменяющейся силы  $P=P_0+P_1 \sin \omega t$  (рис. 98).

Составить дифференциальное уравнение движения массы  $m$ , закрепленной на стержне, при его малых поперечных колебаниях. Массой стержня по сравнению с массой груза пренебречь. Исследовать устойчивость малых колебаний системы, если длина стержня  $2l=2$  м, момент инерции площади поперечного сечения  $J_x=10^{-9}$  м<sup>4</sup>, модуль упругости материала  $E=200$  ГПа,  $m \approx 5$  кг,  $P_0=50$  Н,  $P_1=20$  Н,  $\omega=10$  с<sup>-1</sup>.

115. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний массы  $m$ , закрепленной на стойке длиной  $2l$  (рис. 99), при действии на стойку периодически изменяющейся осевой силы



Рис. 98

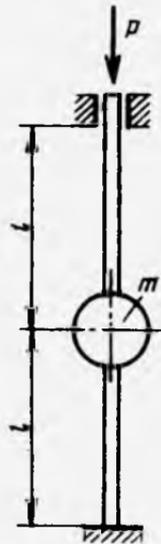


Рис. 99

$P = P_0 + P \sin \omega t$ . Исследовать устойчивость малых колебаний, считая:  $l = 1$  м,  $J = 10^{-9}$  м<sup>4</sup>,  $E = 200$  ГПа,  $m = 5,2$  кг,  $P_0 = 50$  Н,  $P_1 = 20$  Н,  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup>.

116. Масса  $m$  подвешена на двух струнах-растяжках длиной каждая (рис. 100). Исследовать устойчивость малых вертикальных колебаний груза при изменении усилия натяжения по зако-

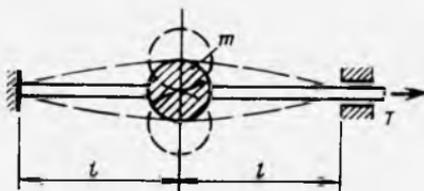


Рис. 100

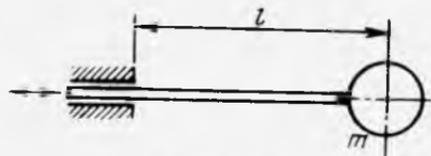


Рис. 101

ну  $T = T_0 + T_1 \sin \omega t$ . Массой струн и их растяжимостью при решении задачи пренебречь. Принять  $T_0 = 20$  Н,  $T_1 = 10$  Н,  $\omega = 25$  с<sup>-1</sup>,  $m = 0,25$  кг,  $l = 0,2$  м.

117. Стальная балка длиной  $l$  имеет на свободном конце точечную массу  $m$  (рис. 101). Исследовать устойчивость малых вертикальных колебаний массы  $m$ , если длина балки изменяется по закону  $l = l_0 - l_1 \sin \omega t$ . При решении задачи массой балки по сравнению с массой  $m$  пренебречь. Принять  $l_0 = 1$  м,  $l_1 = 0,2$  м,  $m = 2$  кг,  $\omega = 20$  с<sup>-1</sup>,  $I_x = 8,3 \cdot 10^{-10}$  м<sup>4</sup>,  $E = 200$  ГПа.

118. Масса  $m$  подвешена на абсолютно гибкой нерастяжимой нити таким образом, что длина свободного участка нити равна  $l_0$  (рис. 102). Составить дифференциальное уравнение малых

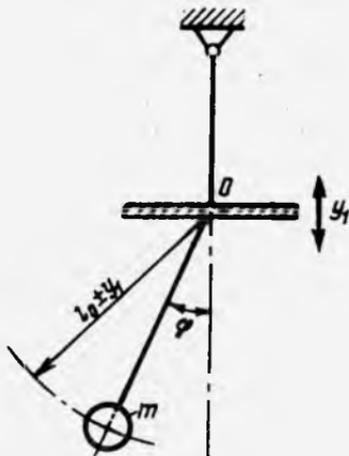


Рис. 102

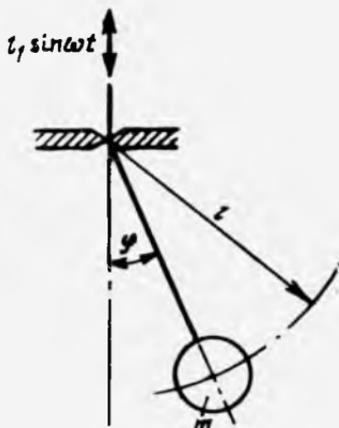


Рис. 103

колебаний груза, если точка  $O$  (отверстие, из которого выходит нить) перемещается относительно своего среднего положения по закону  $y_1 = y_0 \sin \omega t$ .

Дифференциальное уравнение колебаний получить двумя методами: 1) используя теорему об изменении момента количества движения; 2) используя принцип Даламбера.

119. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний маятника с периодически изменяющейся длиной нити (рис. 103). В произвольный момент времени длина нити маятника равна  $l = l_0 + l_1 \sin \omega t$ .

120. В тяжелой раме массой  $m_1$ , подвешенной шарнирно в точке  $O$ , установлен кривошипно-ползунный механизм, приводящий в движение массу  $m$  (рис. 104). При работе системы положение ее центра тяжести меняется вследствие изменения положения массы  $m$ .

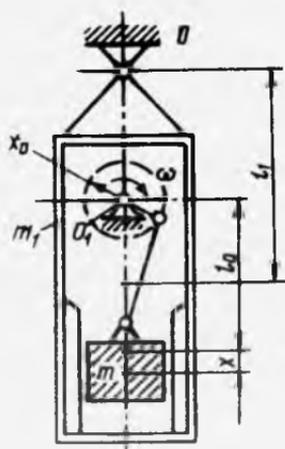


Рис. 104

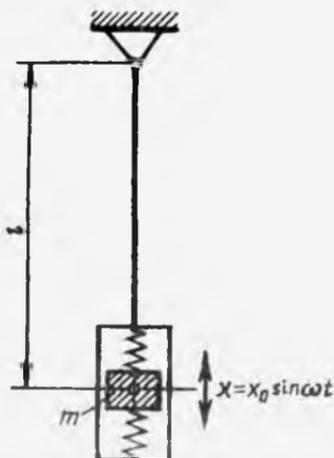


Рис. 105

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы, считая, что расстояние от точки подвеса до центра тяжести рамы  $l_1$ , а при горизонтальном положении кривошипа расстояние от точки  $O_1$  до центра массы  $m$  равно  $l_0$ ; момент инерции массы рамы относительно точки подвеса  $J_1$ , угловая скорость кривошипа  $\omega$ , плечо кривошипа  $x_0$ . Массами ползуна и кривошипа по сравнению с массой  $m$  пренебречь.

121. Масса  $m$ , укрепленная на маятнике, принудительно перемещается относительно его оси по закону  $x = x \sin \omega t$  (рис. 105). Составить дифференциальное уравнение малых колебаний маятника, пренебрегая массой стержня и рамы по сравнению с массой груза.

122. На вагонетке массой  $m$  (рис. 106) закреплен растяжимый трос, конец которого жестко связан в точке  $A$  со шкивом радиусом  $R$ . В состоянии равновесия (при  $x=0$ ) длина троса равна  $l_0$ , а натяжение в нем  $T_0$ . Расстояние от рельса до блока  $l_{01} \approx l_0$ . Составить дифференциальное уравнение малых горизонтальных колебаний вагонетки, если шкив совершает движение

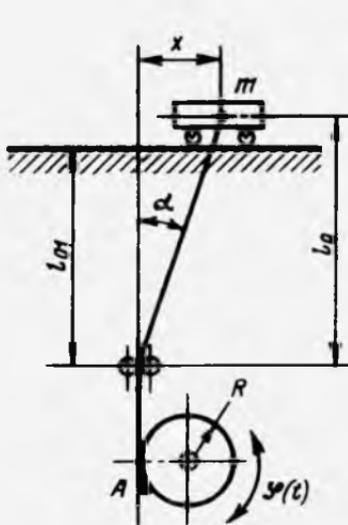


Рис. 106

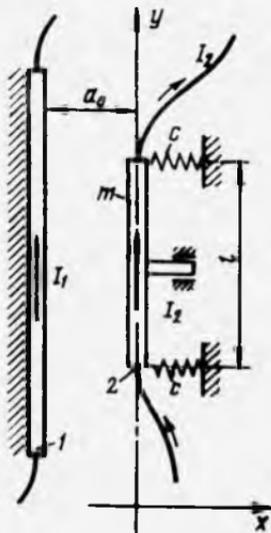


Рис. 107

ние по закону  $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ , а вагонетка в начальный момент времени получает отклонение, равное  $x_0$ . Исследовать устойчивость малых колебаний вагонетки, если  $T_0 = 10^3$  Н,  $m = 500$  кг,  $l_0 = 1$  м,  $\varphi_0 = 0,1$  рад,  $l_{01} = 0,7$  м, площадь поперечного сечения троса  $F = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $R = 0,1$  м,  $\omega = 10$  с<sup>-1</sup>, модуль упругости троса  $E = 200$  ГПа. Трением в системе пренебречь.

123. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний массы  $m$ , закрепленной на конце упругого стержня (см. рис. 92), в магнитном поле с переменным магнитным потоком  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \sin \omega t$ . Амплитудное значение магнитного потока  $\Phi_1$

считать малым, т. е. слагаемыми, содержащими  $\Phi_1^2$ , можно пренебречь.

Исследовать устойчивость малых колебаний массы, считая  $m=500$  кг,  $l=0,21$  м. Изгибная жесткость стержня  $EJ_x=2 \cdot 10^3$  Н·м<sup>2</sup>;  $\omega=200$  с<sup>-1</sup>;  $a_1=10$  мм;  $(k/a_1^3)\Phi_0^2=10$  Н;  $(k\Phi_0/a_1^3)\Phi_1=1$  Н.

124. В магнитном поле, создаваемом постоянным током  $I_1$ , протекающим по бесконечно длинному жесткому проводнику 1, помещена шина 2 массой  $m$  (рис. 107). По шине 2 пропускается ток  $I_2=I_{20}+I_{21} \sin \omega t$ . Взаимодействие двух магнитных полей создает силу притяжения шины 2 к проводнику 1, равную  $F=2\mu I_1 I_2/a_1$ , где  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $a_1$  — расстояние между проводниками в произвольный момент времени.

Составить дифференциальное уравнение поступательного движения шины 2, считая, что жесткость каждой из удерживающих ее пружин равна  $c$ , расстояние между проводником и шиной в состоянии покоя (при  $I_2=I_{20}$ ) равно  $a_0$ .

125. Полагая, что сила  $P$ , приложенная к рычагу, изменяется по закону  $P=P_0+P_1 \sin \omega t$  (см. задачу 106, рис. 90), исследовать устойчивость малых колебаний системы. Принять  $c=80$  Н·м,  $P_0=100$  Н,  $F_1=40$  Н,  $R=0,2$  м,  $\Delta=10$  с<sup>-1</sup>,  $J=0,4$  кг·м<sup>2</sup>.

126. Вывести дифференциальное уравнение малых колебаний массы  $m$  (см. рис. 25), движущейся с постоянной скоростью  $u$  по абсолютно гибкой струне. Натяжение струны  $T_0$  считать постоянным.

127. На абсолютно гибкой нити длиной  $l$  подвешен маятник (рис. 108). Считая, что усилие натяжения нити  $T=T_0=\text{const}$ , исследовать устойчивость малых колебаний маятника. Статический прогиб нити в точке подвеса маятника равен  $y_{ст}$ , длина маятника  $l_1$ , масса  $m$ . Принять, что при  $t=0$  точка подвеса маятника имеет вертикальное смещение  $y_{00}$ , а ее скорость  $y_{00}'=0$ .

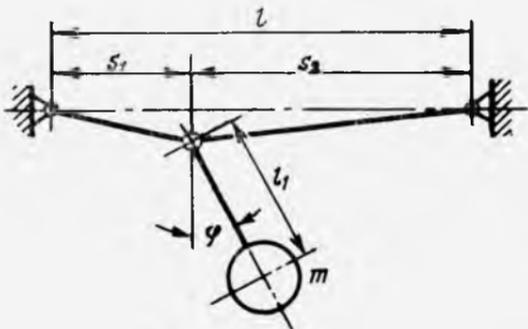


Рис. 108

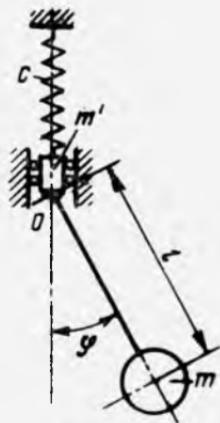


Рис. 109

маятник отклонен на произвольный угол  $\varphi$ . Рассмотреть два случая:

1) координата точки подвеса  $s_1=0,3$  л, начальное натяжение  $T_0=40$  Н, длина маятника  $l_1=0,3$  л, масса маятника  $m=0,1$  кг,  $y_{00}=0,1$  л;

2)  $T_0=10$  Н,  $l_1=0,1$  л (остальные параметры те же, что и в варианте 1).

**128.** Масса  $m$  укреплена на невесомом стержне длиной  $l$  (рис. 109). Верхний конец стержня (точка подвеса маятника) соединен с пружиной, имеющей жесткость  $c$ . Считая, что точка подвеса маятника  $O$  может совершать только вертикальные колебания, и пренебрегая массой ползуна  $m'$  по сравнению с массой  $m$ , исследовать устойчивость малых угловых колебаний маятника для двух случаев начальных условий:

1) при  $t=0$  точка подвеса маятника имеет смещение относительно положения равновесия  $y_0=40$  мм, а ее скорость  $y_0=0$ .

2) при  $t=0$  отклонение точки подвеса маятника от положения равновесия  $y_0=0$ ,  $y_0=0,1$  м/с,  $m=0,2$  кг,  $c=1$  кН/м,  $l=80$  мм.

## § 6. Случайные колебания

**129.** Решить задачу о движении прицепа по дороге с неровностями (см. задачу 75, рис. 66), считая, что неровности имеют случайный характер. При решении считать, что в результате статистических исследований получена спектральная плотность воздействия дороги на систему  $S_h(\omega)$  в зависимости от скорости движения  $v$  в предположении, что колебания системы можно рассматривать как случайный стационарный процесс

$$S_h(\omega) = av / [(\omega^2 + bv^2) 2\pi],$$

где  $v$  — скорость движения, м/с.

Определить среднеквадратичное отклонение  $\sigma_\varphi$  угла колебаний  $\varphi$  в зависимости от скорости  $v$  движения прицепа. Построить график  $\sigma_\varphi(v)$  при следующих значениях параметров системы:  $J_0=5 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup>;  $c=2 \cdot 10^5$  Н/м;  $l=2,5$  м;  $\alpha=10^5$  Н·с·м<sup>-1</sup>;  $a=1000$  мм<sup>2</sup>/м;  $b=2,5 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>.

Примечание. Значения интегралов, получающихся при решении задачи, даны в приложении 2.

**130.** Построить график изменения среднеквадратичного отклонения угла  $\varphi$  колебаний прицепа (см. задачу 129) в зависимости от жесткости рессоры  $c$  при скорости движения прицепа  $v=10$  м/с. Числовые данные аналогичны данным, приведенным в задаче 129.

**131.** Определить среднеквадратичное отклонение  $\sigma_\dot{\varphi}$  угловой скорости  $\dot{\varphi}$  колебаний прицепа при движении его по дороге с неровностями (см. задачу 75), если спектральная плотность воздействия дороги на прицеп

$$S_h(\omega) = 10 v / [(25 v^2 + \omega^2) 2\pi].$$

Числовые значения параметров системы принять такими же, как в задаче 129.

132. На точечную массу  $m$ , закрепленную на невесомой упругой балке длиной  $2l$  (рис. 110), действует случайная возмущающая сила  $f$ . Демпфирование колебаний осуществляется демпфером вязкого трения с коэффициентом трения  $\alpha$ . Спектральная плотность случайного возмущения  $f$  определяется выражением

$$S_f(\omega) = \beta_1 / 2\pi (\beta_2^2 + \omega^2).$$

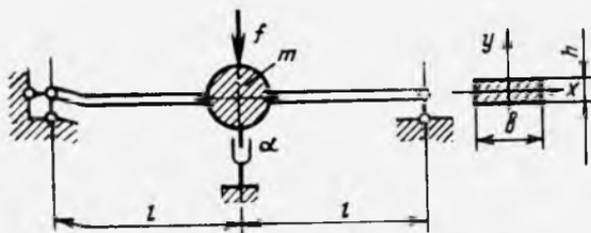


Рис. 110

Определить среднеквадратичное отклонение ускорения перемещения массы  $\ddot{y}$  при следующих параметрах системы:  $m = 10$  кг;  $l = 0,5$  м;  $E = 200$  ГПа;  $\alpha = 2000$  Н·с·м<sup>-1</sup>;  $\beta_1 = 10^5$  Н<sup>2</sup>/с;  $\beta_2 = 100$  с<sup>-1</sup>;  $b = 20$  мм;  $h = 50$  мм.

133. Определить среднеквадратичное отклонение реакций балки (см. рис. 110) и наибольшее нормальное напряжение при колебаниях массы  $m$  под действием случайной возмущающей силы  $f$ . Спектральная плотность стационарного случайного возмущения  $f$  равна  $S_f(\omega) = \beta_1 / 2\pi (\beta_2^2 + \omega^2)$  (числовые данные аналогичны данным задачи 132).

134. В установившемся режиме работы угловая скорость двигателя равна  $\Omega$  (рис. 111, а). При этом момент двигателя  $M_d$  уравнивается моментом сопротивления  $M_c$ .

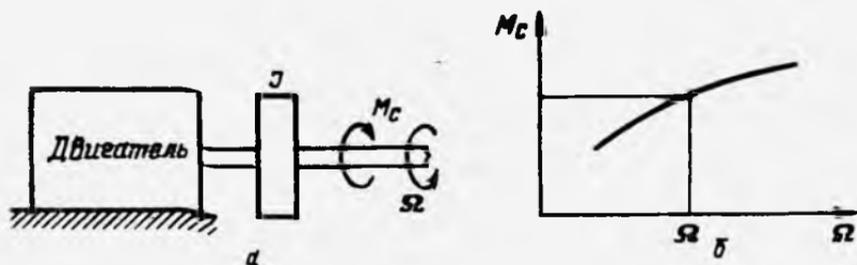


Рис. 111

Считая, что момент сопротивления  $M_c$  зависит от угловой скорости  $\Omega$  (рис. 111, б), определить дисперсию отклонения угловой скорости от номинального значения  $\Omega_0$  при действии на систему дополнительного стационарного случайного момента сопротивления  $\Delta M$ , математическое ожидание которого  $m_{\Delta M}$  и

корреляционная функция  $K_{\Delta M \tau} = D e^{-\alpha(\tau)}$  известны. При решении задачи считать, что приведенный момент инерции системы равен  $J$ , а изменением момента двигателя  $M_d$  при малых отклонениях угловой скорости можно пренебречь.

135. В задаче 69 рассмотрены колебания петлевого вибратора магнитоэлектрического осциллографа (см. рис. 60). В реальных условиях протекающий ток имеет случайную составляющую, т. е. он равен  $i = i_0 + \Delta i$ , где  $i_0$  — среднее (расчетное) значение протекающего тока,  $\Delta i$  — случайная составляющая тока. Источником появления случайной составляющей тока может служить, например, беспорядочное тепловое движение электронов в проводниках электрической цепи. Если ограничиться рассмотрением моментов времени работы осциллографа в моменты времени, достаточно удаленные от начала работы, когда все переходные процессы в системе можно считать законченными, то колебания зеркала, вызванные случайной составляющей тока, можно рассматривать как стационарные колебания.

Считая, что воздействие случайной составляющей тока  $\Delta i$  на систему можно рассматривать как «белый шум» с известной постоянной спектральной плотностью  $S_{\Delta i}(\omega) = \bar{N}$ , найти среднеквадратичное отклонение показаний осциллографа  $\sigma_c$ .

136. На консольной балке двутаврового поперечного сечения установлен электродвигатель массой  $m$  (рис. 112). Гашение колебаний осуществляется демпфером вязкого трения, имеющим коэффициент трения  $\alpha$ . Пренебрегая массой балки и рассмат-

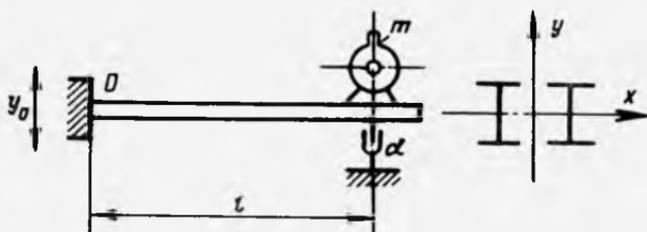


Рис. 112

ривая двигатель как точечную массу, определить максимальные нормальные напряжения, возникающие в балке при случайных вертикальных смещениях заделки (точка  $O$ ). Случайное вертикальное смещение точки  $O$  ( $y_0$ ) можно рассматривать как стационарную случайную функцию с известной спектральной плотностью  $S_{y_0}(\omega)$ , равной

$$S_{y_0}(\omega) = 20 / [(10^2 + \omega^2) 2\pi].$$

Провести числовое решение задачи при следующих значениях параметров системы:  $E = 200$  ГПа;  $m = 300$  кг;  $\alpha = 5 \cdot 10^4$  Н·с·м<sup>-1</sup>;  $l = 2$  м; сечение балки — двутавр № 10 ( $J_x = 1,98 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup>;  $W_x = 3,97 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>).

137. Определить среднеквадратичное отклонение  $\sigma_y$  массы  $m$  (рис. 113) и дисперсию  $D_M$  изгибающего момента в заделке при действии на систему случайного стационарного возмущения  $P(t)$ , спектральная плотность которого

$$S_P(\omega) = a / [(b^2 + \omega^2) 2\pi].$$

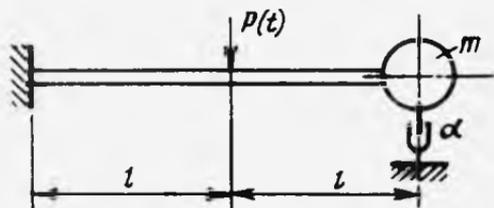


Рис. 113

138. На консольной балке жесткостью  $EJ$  закреплен мотор массой  $m$  (см. рис. 112). Колебания системы, вызываемые кинематическим возбуждением — вертикальным перемещением заделки — гасятся демпфером жидкого трения, имеющим коэффициент трения  $\alpha$ . Кинематическое возбуждение происходит по закону

$$y_0 = y_{01} \sin \omega t + \Delta y_0(t),$$

где  $y_{01}$  — амплитуда систематического смещения;  $\Delta y_0(t)$  — случайная стационарная составляющая смещения, имеющая спектральную плотность  $S_{\Delta y_0} = \alpha_1 / [(\beta^2 + \omega^2) 2\pi]$ .

Определить среднеквадратичное отклонение разности между случайной составляющей смещения массы  $m$  ( $\Delta y$ ) и случайным смещением заделки  $\Delta y_0$ .

139. Для замера давления жидкости или пара используется прибор, схематично показанный на рис. 5. Давление  $\Delta p$ , действующее на поршень, площадь которого  $F$ , имеет наряду с систематической составляющей  $\Delta p_0$  случайную составляющую  $\Delta p_1$  с известной спектральной плотностью  $S_{\Delta p_1} = \alpha_1 / [(\beta^2 + \omega^2) 2\pi]$ . При движении поршня между поршнем и цилиндром возникает сила трения, пропорциональная скорости движения  $\Delta z$  с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ .

Определить среднеквадратичную погрешность показания прибора, считая, что его случайное отклонение  $\Delta z_1$  можно рассматривать как случайную стационарную функцию.

140. В общем случае действия сил поршень прибора для замера давления (см. рис. 5) может иметь случайное перемещение, вызванное действием двух случайных возмущений: составляющей случайного давления  $\Delta p_1$  (см. задачу 138) и случайным колебанием основания, к которому прикреплен цилиндр (вертикальное случайное смещение  $\Delta z_0$ ). Случайное вертикальное смещение цилиндра эквивалентно кинематическому возмущению системы. Спектральные плотности случайного давления  $\Delta p_1$  и случайного смещения  $\Delta z_0$  соответственно равны

$$S_{\Delta p_1} = \alpha_1 / [(\beta_1^2 + \omega^2) 2\pi] \quad \text{и} \quad S_{\Delta z_0} = \alpha_2 / [(\beta_2^2 + \omega^2) 2\pi].$$

Считая, что при движении поршня на него действует сила сопротивления, равная  $\alpha \Delta z$ , и полагая, что корреляция между случайными возмущениями отсутствует, определить среднеквадратичное отклонение  $\sigma_{\Delta z_1}$  погрешности показания прибора ( $\Delta z_1$  — случайная составляющая смещения штока).

141. На поршень измерительного прибора (см. рис. 5) действует случайное давление  $\Delta p_1$  в виде «белого шума» со спектральной плотностью  $S_{\Delta p_1} = N$ . Прибор прикреплен к основанию, которое совершает случайные вертикальные колебания  $\Delta z_0$ , спектральная плотность которых  $S_{\Delta z_0} = \alpha_2 / [(\beta_2^2 + \omega^2) 2\pi]$ . Под действием случайных возмущений  $\Delta p_1$  и  $\Delta z_0$  шток получает случайное смещение  $\Delta z_1$ , что вызывает погрешность показаний прибора.

Считая, что корреляция между  $\Delta p_1$  и  $\Delta z_0$  отсутствует, определить оптимальное значение жесткости пружины  $c$ , при котором среднеквадратичная ошибка измерения становится минимальной.

142. Масса  $m$  подвешена на пружине жесткостью  $c$  и связана с демпфером вязкого трения, коэффициент трения которого  $\alpha$  (рис. 114). Точка крепления пружины совершает случайные

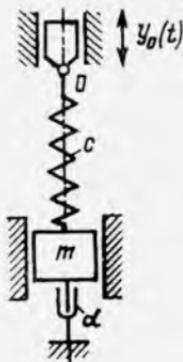


Рис. 114

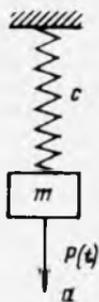
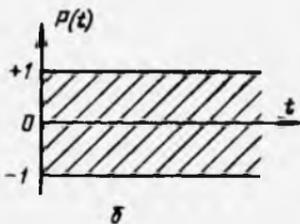


Рис. 115



стационарные вертикальные колебания  $y_0$ . Корреляционная функция случайного смещения  $y_0$  известна  $K_{y_0}(\tau) = D_{y_0} e^{-\alpha |\tau|}$ . Определить среднеквадратичное отклонение ускорения массы  $m$ .

143. На массу  $m = 100$  кг (рис. 115), подвешенную на конце пружины жесткостью  $c = 400$  Н/м, действует случайная возмущающая сила, ограниченная по модулю. Значения этой силы  $p(t)$  заданы полем допуска, внутри которого они могут изменяться во времени произвольным образом.

Установить наилучший возможный закон изменения силы  $P(t)$ , при котором в момент времени  $t_h = 2$  с смещение массы становится максимальным. Определить максимальное смещение груза. Полученное смещение сравнить со смещением от действия внезапно приложенной постоянной силы, равной максимальной

но возможному значению  $P(t)$ . Принять, что при  $t=0$  смещение массы относительно положения статического равновесия и ее скорость равны нулю.

144. Масса  $m$  находится под действием силы  $P(t)$ , сообщаемой ей в момент времени  $t_h=2$  с наибольшее возможное смещение (см. задачу 143). Определить скорость массы  $m$ .

145. Масса  $m=100$  кг закреплена на горизонтальной плоскости с помощью пружины жесткостью  $c=400$  Н/м (рис. 116, а).

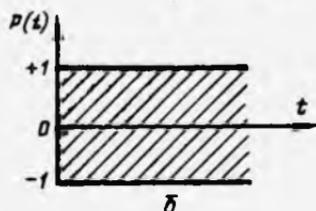
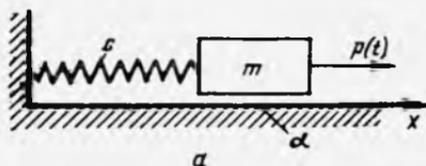


Рис. 116

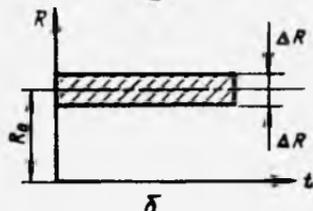
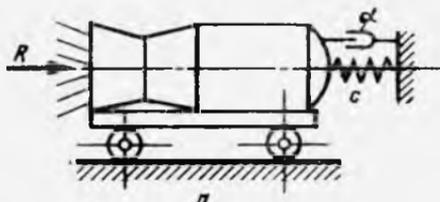


Рис. 117

Между грузом и основанием при движении груза действует сила трения, пропорциональная скорости движения груза ( $F_T=\alpha x$ ;  $\alpha=400$  Н·с·м<sup>-1</sup>).

Установить закон изменения возмущающей силы  $F(t)$ , действующей на массу и заданной полем допуска (см. рис. 116, б), при котором смещение массы в моменте времени  $t_k=2$  с становится наибольшим (при нулевых начальных условиях).

146. Для определения тяги реактивного двигателя его устанавливают на стенде, состоящем из тележки и силоизмерителя — динамометра (рис. 117, а). В связи с неравномерностью горения заряда и его неоднородностью тяга  $R$  в процессе работы двигателя может изменяться произвольным случайным образом в пределах  $R=R_0\pm\Delta R$  (рис. 117, б).

Определить максимально возможную погрешность показаний динамометра в момент окончания работы двигателя при следующих параметрах системы: суммарная масса системы  $m=1000$  кг, время работы двигателя  $t_k=0,5$  с, жесткость динамометра  $c=900$  кН/м, коэффициент силы вязкого сопротивления  $\alpha=4\cdot 10^4$  Н·с·м<sup>-1</sup>, номинальное значение тяги  $R_0=2\cdot 10^5$  Н, разброс тяги  $\Delta R=\pm 0,05 R_0$ . Изменением массы системы в связи с выгоранием заряда пренебречь.

147. Погрешность  $\Delta$  прибора, замеряющего параметры колебательного процесса какой-либо системы, линейно зависит от

дополнительного смещения и скорости системы (вызванных действием на систему случайной возмущающей силы  $P(t)$ ):

$$\Delta = a_1 x + a_2 \dot{x},$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные коэффициенты, а  $x$  удовлетворяет уравнению вида  $m\ddot{x} + cx = P(t)$ . Случайная возмущающая сила  $P(t)$  задана полем возможных значений (см. рис. 115, б) с границами, равными  $\pm 1$  Н.

Определить максимально возможное значение ошибки измерения  $\Delta$  в момент  $t_k = 0,5$  с, если  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ,  $m = 1$  кг,  $c = 0,16$  кН/м,  $a_1 = 1,73 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_2 = 8 \cdot 10^{-3}$  с.

148. Динамически устойчивое движение ракеты может сопровождаться ее малыми колебаниями на траектории полета, которые **вызываются** в первую очередь разбросом тяги двигателя, линейным и угловым эксцентриситетами тяги и др. Дифференциальное уравнение малых угловых колебаний ракеты (рис. 118, а) по углу тангажа имеет вид

$$I_0 \ddot{\varphi} + a\varphi = M_b,$$

где  $J_0$  — момент инерции ракеты относительно оси, проходящей через центр тяжести  $O$ ;  $M_b$  — случайный возмущающий момент (вызываемый, в частности, газодинамическими эксцентриситетами тяги), величина которого известна в виде поля допуска (рис. 118, б), имеющего границы  $\pm b$ ;  $a\varphi$  — восстанавливающий момент.

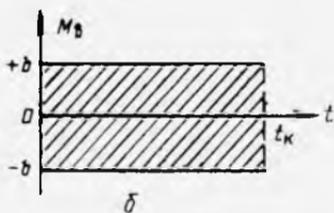
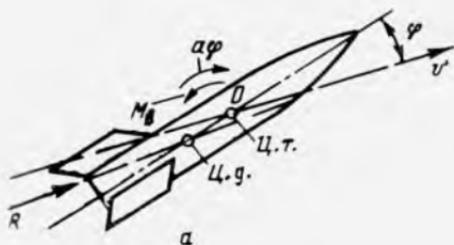


Рис. 118

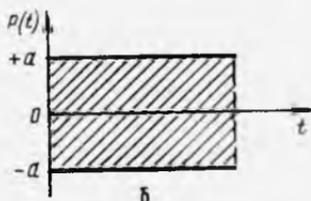
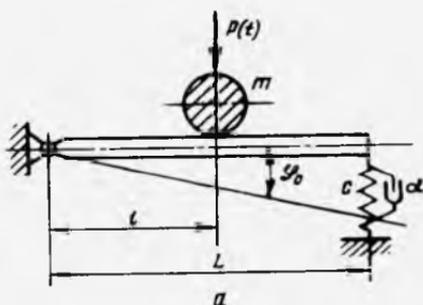


Рис. 119

Определить область возможных значений угла отклонения ракеты от курса  $\varphi$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}$  [область на фазовой

плоскости ( $\varphi_{O\Phi}$ ) в момент времени  $t_k=5$  с. При решении задачи считать, что при  $t=0$   $\varphi(0)=\dot{\varphi}(0)=0$ ;  $J_0=10^4$  кг·м<sup>2</sup>;  $a=1,6 \times 10^4$  Н·м/рад,  $|b|=2$  МН/м.

149. В задаче 135 была определена среднеквадратичная ошибка показания осциллографа (см. рис. 60) (среднеквадратичное отклонение угла поворота зеркала) в предположении, что изменение угла  $\Delta\varphi$  во времени можно рассматривать как случайный процесс. Это предположение справедливо только в случае, когда время затухания переходных процессов мало по сравнению со временем наблюдения и случайный ток  $\Delta i$  является стационарной случайной функцией.

При малом затухании (малом коэффициенте  $n$ ) время переходных процессов может быть одного порядка со временем наблюдения, а ток  $\Delta i$  не является стационарной случайной функцией. Тогда теорией стационарных случайных процессов пользоваться нельзя. Для исследования малых колебаний зеркала методами теории нестационарных случайных процессов требуется дополнительная информация о случайном токе  $\Delta i$ , получить которую весьма трудоемко (необходимо знать математическое ожидание и автокорреляционную функцию во времени).

Определить максимально возможную ошибку показаний осциллографа при нестационарном случайном токе  $\Delta i$ , если известно только поле возможных значений  $\Delta i$  с границами  $\pm a$ , где  $|a|=|\Delta i_{\max}|=\beta i_0$  (например,  $|\Delta i_{\max}|=0,05 i_0$ ).

150. Масса  $m$  закреплена на абсолютно жесткой балке, имеющей момент инерции массы относительно левой опоры  $I_0$  (рис. 119, а). Правая опора балки представляет собой пружину жесткостью  $c$  с демпфером вязкого трения (коэффициент трения  $\alpha$ ). На массу  $m$  действует случайная возмущающая сила  $P(t)$ , заданная полем допуска (рис. 119, б).

Определить максимально возможное значение динамической реакции, возникающей между массой  $m$  и балкой. Установить, как изменяется динамическая реакция с уменьшением коэффициента силы вязкого сопротивления  $\alpha$ . При решении задачи считать начальные условия нулевыми.

151. Как изменится выражение для динамической реакции  $N_{\max}$  (при малом  $\alpha$ ) в задаче 150, если возмущающая сила  $P(t)$ , действующая на массу  $m$ , изменяется во времени по закону  $P(t)=a\sin\omega t$  (где  $\omega=p_0$ ), т. е. имеет место случай обычного резонанса.

152. Решить задачу 150 о движении балки под действием случайного, ограниченного по модулю возмущения (см. рис. 119), считая, что в начальный момент времени  $t=0$  балка имеет угловую скорость  $\varphi_0$ , а ее смещение  $\varphi_0=0$ . Определить закон изменения во времени возмущающей силы  $P(t)$ , при котором в момент времени  $t_k=2\pi/p_0$  (где  $p_0$  — частота свободных незатухающих колебаний системы) угловая скорость  $\varphi(t_k)$  достигает экстремального значения. Считать, что демпфирование колебаний отсутствует ( $\alpha=0$ ).

## § 7. Нелинейные колебания

153. Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний системы, состоящей из двух дисков массами  $m_1$  и  $m_2$  (диаметрами  $D_1$  и  $D_2$  соответственно), связанных жестким стержнем длиной  $l$  (рис. 120). Верхний диск может перекатываться по опорной плоскости без проскальзывания. Массой соединительного стержня пренебречь.

154. Жесткий брус постоянного поперечного сечения длиной  $2l$  и массой  $m$  шарнирно укреплен в точке  $A$  и поддерживается двумя пружинами жесткостью  $c$  каждая (рис. 121). Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний бруса, считая зависимость силы сопротивления пружины от удлинения линейной, и определить частоту собственных колебаний бруса.

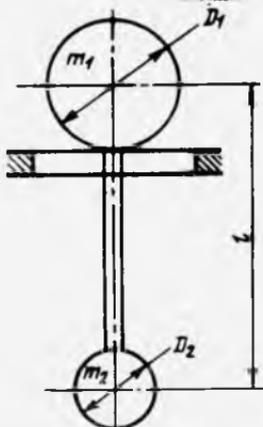


Рис. 120

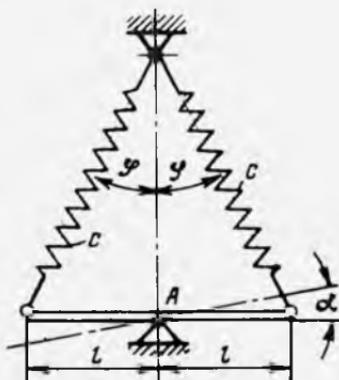


Рис. 121

155. Жесткий брус длиной  $2l$  постоянного поперечного сечения массой  $m$  подвешен за верхний конец и поддерживается

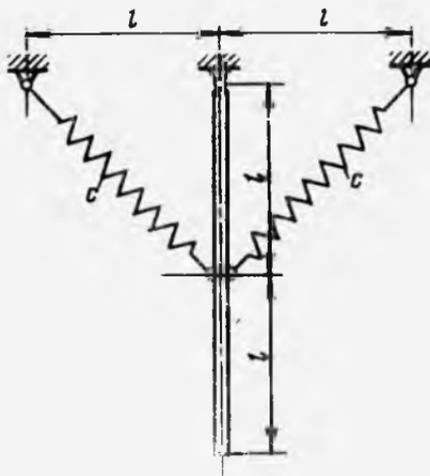


Рис. 122

двумя пружинами жесткостью  $s$  каждая (рис. 122). Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний и определить частоту собственных колебаний бруса.

156. Масса  $m$  может свободно (без трения) перемещаться вдоль направляющих (рис. 123). По обеим сторонам груза установлены две одинаковые пружины жесткостью  $s$  каждая. Между упорами и пружинами имеется зазор  $\Delta$ . Найти частоту колебаний системы в зависимости от амплитуды  $x_0$ .

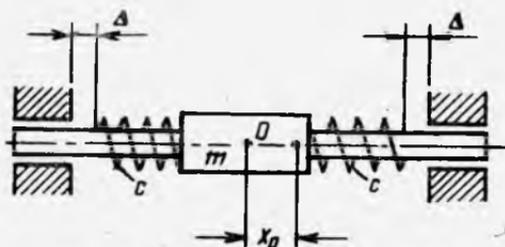


Рис. 123

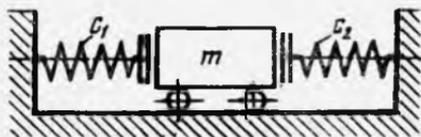


Рис. 124

157. Решить задачу 156, считая жесткости пружин различными ( $s_1$  и  $s_2$ ).

158. Масса  $m$  (рис. 124) может свободно (без трения) перемещаться по плоскости, контактируя попеременно с одной или другой пружиной. Пружины не прикреплены к грузу и в положении равновесия (при отсутствии зазора между пружиной и грузом) не напряжены. Жесткости пружин различны и равны  $s_1$  и  $s_2$ . Определить частоту колебаний системы.

159. Для уменьшения влияния вибраций на работу приборов последние устанавливают на амортизаторах, собственная частота которых значительно меньше частоты возбуждения. При этом желательно, чтобы отношение частоты вибраций к частоте малых свободных колебаний для всех объектов амортизации было постоянным вне зависимости от их массы. Определить характеристику такого равночастотного амортизатора (зависимость перемещения от силы), если известно, что при силе  $P=P_0$  перемещение объекта равно  $x_0$ .

160. Считая, что правый конец нити закреплен (см. рис. 100), а начальное натяжение равно  $T_0$ , получить уравнение вертикальных колебаний массы  $m$  с учетом изменения натяжения в нитях, вызванного смещением массы. Решение изобразить на фазовой плоскости. Принять, что при  $t=0$   $\dot{x}=0$ ,  $x=x_0$ .

161. К массе  $m$  прикреплены свободно (без предварительного натяга) пружины длиной  $l_0$  и жесткостью  $s$  каждая (рис. 125). Считая, что масса перемещается по плоскости с пренебрежимо малым трением, установить зависимость между частотой и амплитудой свободных колебаний массы, если в начальный момент времени ( $t=0$ ) масса отклонена от положения равновесия на величину  $x_0$ .

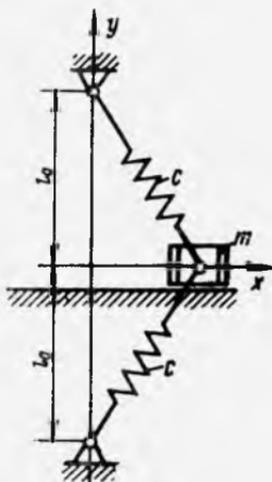


Рис. 125

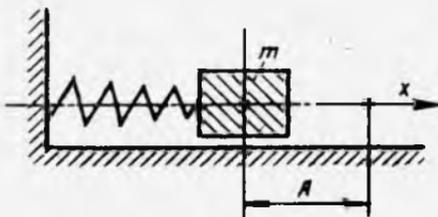


Рис. 126

162. Установить зависимость между частотой свободных колебаний и скоростью движения груза (см. задачу 161, рис. 125), если в начальный момент времени массе  $m$  сообщена скорость  $\dot{x}_0$  (отклонение от положения равновесия  $x_0=0$ ).

163. Используя фазовую плоскость, построить решение задачи о колебаниях массы (см. рис. 125), считая, что трение между опорой и массой отсутствует, а натяжение в пружине при равновесии массы равно  $T_0$  (пружины имеют предварительное натяжение).

Исходные данные для расчета следующие: при  $t=0$   $\dot{x}_0=0$ ,  $x_0=10$  мм;  $l=50$  мм;  $c=500$  Н/м;  $m=0,1$  кг;  $T_0=1$  Н.

164. Построить траекторию движения массы (см. рис. 125) на фазовой плоскости, считая, что между массой и направляющей возникает кулоново трение, а пружины имеют предварительное натяжение, равное  $T_0$ . При решении задачи принять, что сила сухого трения  $F=F=2,5 \cdot 10^{-2}$  Н;  $T_0=1$  Н;  $m=0,1$  кг;  $c=500$  Н/м;  $l_0=50$  мм. Начальные условия: при  $t=0$   $\dot{x}_0=0$ ,  $x_0=10$  мм.

165. Масса  $m$  закреплена на нелинейном упругом элементе, имеющем характеристику  $F=sx+c_1x^3$  (рис. 126). Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний массы  $m$  (пренебрегая трением) и установить зависимость между частотой колебаний и амплитудой, считая, что в начальный момент времени отклонение массы от положения равновесия равно  $A$ , а скорость движения равна нулю.

Исходные данные для расчета:  $A=1$  с/м;  $c=100$  Н/м;  $c_1=50$  Н/м,  $m=100$  кг.

Указание. При решении задачи воспользоваться методом Ляпунова — Линстедта, ограничившись первым приближением.

166. Решить задачу 165, воспользовавшись методом линеаризации, т. е. заменяя нелинейную характеристику пружины линейной из условия минимума квадратичного отклонения линейной характеристики от нелинейной.

167. Получить зависимость частоты колебаний массы (см. задачу 165) от амплитуды, используя метод Галеркина.

168. Используя метод линеаризации по минимуму квадратичного отклонения, определить частоту колебаний массы  $m$  (см. задачу 156), считая, что амплитуда колебаний равна  $A$ .

169. Масса  $m$  (см. рис. 125) укреплена двумя пружинами-растяжками, имеющими начальное натяжение  $T_0$ . Считая, что колебания массы происходят без трения ее о поверхность, определить такое значение начального отклонения  $x_0$ , при котором частота колебаний массы равна  $5 \text{ с}^{-1}$ . Задачу решить методом малого параметра (методом Ляпунова—Линдстедта), ограничившись первым приближением. Принять, что  $m=10 \text{ кг}$ ;  $l_0=0,5 \text{ м}$ ;  $T_0=50 \text{ Н}$ ;  $c=2 \text{ кН/м}$ .

170. Исследовать движение массы  $m$  в магнитном поле  $\Phi_0$  (см. рис. 92), если в начальный момент времени ( $t=0$ ) масса отклонена от положения равновесия на величину  $x_0$ . При выводе дифференциального уравнения движения массы учесть первый нелинейный член силы притяжения.

Определить критическое значение начального отклонения  $x_0$  и построить график зависимости  $x_0$  ( $\Phi_0$ ). Установить область значений  $x_0$  и  $\Phi_0$ , при которых колебания массы устойчивы.

171. Определить частоту колебаний шины  $B$  (см. рис. 107 к к задаче 124) при протекании по проводнику и шине постоянных токов  $I_1$  и  $I_2$  одного направления, считая, что при  $t=0$   $x=x_0$ ,  $\dot{x}=0$ , а расстояние между шиной и проводником в положении равновесия равно  $a_0$ . Силу взаимодействия между проводником и шиной при отклонении последней от положения равновесия [ $F=2\mu I_1 I_2 l / (a_0+x)$ ] представить в виде ряда, ограничившись разложением его до членов  $x^3$  включительно. Решение задачи провести методом малого параметра (методом Ляпунова—Линдстедта), взяв в качестве малого параметра  $\mu_1=x_0/a_0$ .

172. Решить задачу 170 в предположении, что точки  $I_1$  и  $I_2$  в проводнике и шине имеют противоположные направления.

173. Определить частоту свободных колебаний шины  $B$  (см. рис. 107) при протекании по ней и по проводнику  $A$  постоянных токов  $I_1$  и  $I_2$  одного направления, считая, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) отклонение шины от положения равновесия равно нулю, скорость движения равна  $x_0$ , расстояние между проводником и шиной в положении равновесия равно  $a_0$ , а сила их взаимного притяжения при отклонении от положения равновесия  $F=2\mu I_1 I_2 l / (a_0+x)$ . Решение получить, используя метод малого параметра и ограничиваясь при разложении силы  $F$  в ряд членами не выше  $x^3$ .

174. Известно уравнение свободных колебаний математического маятника

$$\ddot{\varphi} + (g+l) \sin \varphi = 0,$$

где  $l$  — длина маятника.

Найти частоту его свободных колебаний, ограничиваясь двумя первыми членами разложения  $\sin \varphi$  в ряд. Принять, что в начальный момент времени маятник отклонен на угол  $\varphi_0$ . При решении задачи применить метод малого параметра и метод прямой линеаризации и сравнить полученные результаты.

175. Определить частоту колебаний рычага (см. рис. 90) при действии на него постоянной силы  $P_0$ . Момент инерции массы  $J$  рычага равен  $J$ , а жесткость вала —  $c$ .

Считать, что колебания рычага достаточно велики, поэтому при разложении в ряд считать  $\sin \varphi = \varphi - \varphi^3/6$ . Принять, что в начальный момент времени угол поворота рычага  $\varphi(0) = 0$ , а его угловая скорость  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ . При решении задачи использовать метод малого параметра и метод Галеркина; полученные решения сравнить.

176. Тяжелый рычаг массой  $m$  жестко закреплен на валу длиной  $l$  и жесткостью  $c$  (рис. 127). Один конец вала защем-

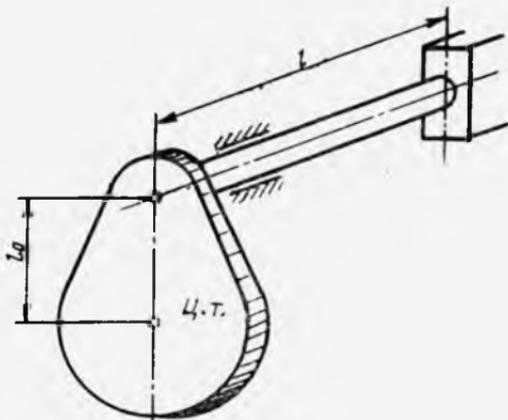


Рис. 127

лен, а другой проходит через подшипник. При колебании рычага в подшипнике возникает момент силы трения, пропорциональный квадрату угловой скорости  $\dot{\varphi}$  вала ( $M_{тр} = k\dot{\varphi}^2$ ).

Считая, что момент инерции массы рычага относительно оси вала равен  $J$ , а расстояние от оси вращения до центра тяжести рычага равно  $l_0$ , установить зависимость между частотой колебаний рычага и начальным его отклонением от положения равновесия на первом и втором полупериодах колебаний, а также значения амплитуд в конце полупериодов (приближенные), используя метод малого параметра, т. е. полагая  $\alpha = k/J$  малым

177. Масса  $m$  закреплена на конце нелинейного упругого элемента (пружины) (рис. 128). Установить зависимость между амплитудой вынужденных колебаний массы и амплитудой гармонической возмущающей силы  $P = P_0 \sin \omega t$ , считая, что характеристика пружины имеет вид  $T = cx + c_1 x^3$ , а трение отсутствует. Вычислить амплитуду колебаний, если  $P_0 = 20$  Н,  $\omega = 10$  с<sup>-1</sup>,  $m = 10$  кг,  $c = 1,5$  кН/м,  $c_1 = 2$  МН/м<sup>3</sup>.

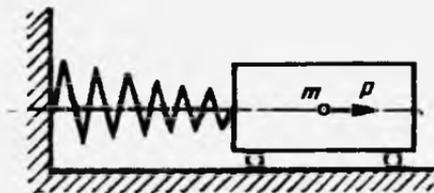


Рис. 128

178. Для системы, изображенной на рис. 128, определить, при каком значении частоты возмущающей силы  $\omega_*$  возможно существование двух режимов установившихся колебаний. Вычислить амплитуду колебаний на этих режимах (исходные данные см. в задаче 176).

179. Получить приближенное (по методу Дuffинга) решение уравнения вынужденных колебаний массы  $m$  (см. задачу 177), считая, что в начальный момент времени масса  $m$  имеет максимальное отклонение  $x_0$  от положения равновесия. Числовые данные те же, что и в задаче 177.

180. Решить задачу 177 в предположении, что при движении массы  $m$  возникает сопротивление, пропорциональное скорости движения, т. е.  $F_T = \alpha v$ , где  $\alpha = 1000$  Н·с·м<sup>-1</sup>.

181. При решении задач о колебаниях системы с кулоновым трением обычно принимается, что сила трения не зависит от скорости. Однако более точные исследования показывают, что это не всегда отражает физическую сторону явления и может вызвать качественное искажение результатов решения.

На рис. 129, а изображен так называемый маятник Фроуда. Масса  $m$  укреплена на конце рычага длиной  $l$ . Точка подвеса маятника представляет собой втулку, надетую на вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вал. Между втулкой и валом возникают вязкое (момент сил вязкого трения  $M_v = a\dot{\varphi}$ , где  $\dot{\varphi}$  — угловая скорость маятника) и сухое трение с нелинейной характеристикой, изображенной на рис. 129, б; величина момента сил сухого трения равна  $M_c = M(\Omega - \dot{\varphi})$ .

Ограничиваясь при разложении  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  в ряд слагаемыми, содержащими  $\dot{\varphi}$  до третьей степени включительно, получить дифференциальное уравнение свободных колебаний маятника. Исследовать устойчивость малых колебаний (ограничиваясь только линейным членом разложения момента трения). При решении считать, что нормальная угловая скорость вала  $\Omega$  соответствует точке перегиба на графике (см. рис. 129, б).

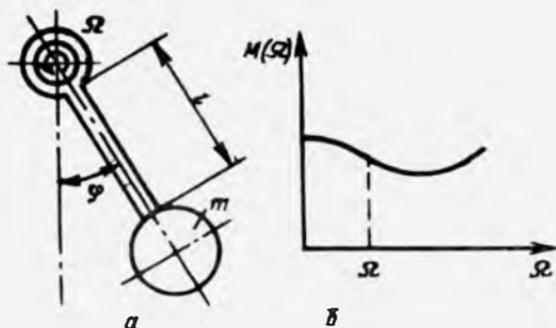


Рис. 129

182. Тормозное устройство состоит из кольцевой колодки 1, надетой на вал 2, вращающийся с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 130, а). Тормозная колодка удерживается от вращения с помощью рычага и пружины общей жесткостью  $c$ . Между валом и тормозом возникает сухое трение, величина которого зависит от скорости вращения вала (рис. 130, б).

Исследовать устойчивость малых угловых колебаний тормозной колодки относительно стационарного вращения вала. При решении ограничиться линейным членом разложения момента трения в ряд.

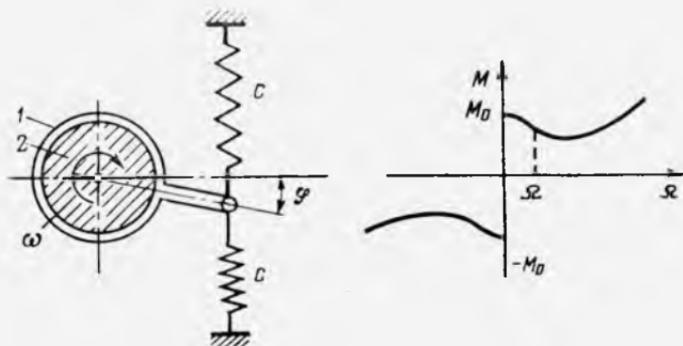


Рис. 130

183. Исследовать устойчивость малых свободных колебаний маятника Фруда (см. задачу 181), используя метод Ван-дер-Поля. Принять, что момент инерции маятника  $J=0,15 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , его масса  $m=5 \text{ кг}$ , длина  $l=0,3 \text{ м}$ . Коэффициенты разложения момента сил трения в окрестностях точки перегиба следующие:  $M''(\Omega)=-0,0375 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ ,  $M''(\Omega)=0$ ,  $M'''(\Omega)=0,045 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^3$ . Коэффициент момента сил вязкого трения  $\alpha=0,015 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ .

184. Провести качественное исследование изменений амплитуды колебаний маятника Фруда (см. рис. 129), считая, что в некоторый начальный момент времени ( $t=0$ ) маятник отклонен на угол  $\Psi_0=0,1 \text{ рад}$  ( $\Psi_0=0$ ) от положения равновесия при  $\Omega \neq 0$ . При исследовании использовать числовые данные и ре-

зультаты решения задачи 183. Изобразить характер изменения амплитуды на фазовой плоскости.

185. Определить частоту колебаний маятника Фруда, соответствующую устойчивому предельному циклу (см. задачу 181).

186. Определить амплитуду предельного цикла колебаний, описываемых уравнением

$$d^2x/dt^2 + p_0x = \mu p_0[1-x^2]dx/dt,$$

и исследовать его устойчивость при  $\mu > 0$ .

187. Исследовать устойчивость малых продольных колебаний планера массой  $m$ , буксируемого самолетом с постоянной скоростью  $v_0$  на гибком растяжимом тросе жесткостью  $c$  (рис. 131). Силу лобового сопротивления планера считать равной  $F_c = c_x S \rho v_0^2 / 2$ , где  $c_x$  — коэффициент лобового сопротивления;  $S$  — площадь миделевого сечения;  $\rho$  — плотность воздуха.

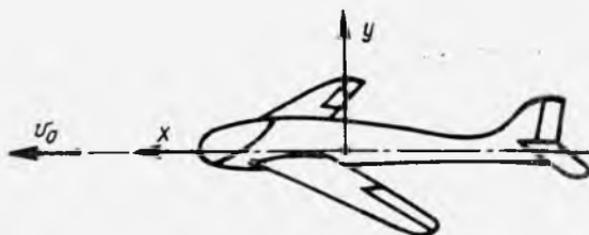


Рис. 131

## Глава 2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### § 7. Свободные колебания\*

188. Два груза массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 132) скреплены пружиной, имеющей жесткость  $c$ . Определить частоты малых собственных колебаний системы.



Рис. 132

189. Стальной цилиндр радиусом  $r$  и массой  $M$  (рис. 133) может кататься без проскальзывания по горизонтальной плоскости. К оси цилиндра подвешен маятник, состоящий из стержня длиной  $l$  с массой  $m$  на конце.

\* Силы сопротивления во всех задачах, если они не указаны, не учитывать.

Считая стержень невесомым, а массу  $m$  точечной, составить дифференциальные уравнения свободных колебаний системы. Определить частоты малых собственных колебаний системы, если  $M=2$  кг;  $r=0,1$  м;  $l=0,5$  м;  $m=0,2$  кг.

190. Диск массой  $m$ , имеющий момент инерции  $J$ , свободно надет на круглый жесткий вал (рис. 134). Диск удерживается на валу пружиной, имеющей средний диаметр витка  $D$ , число витков  $n$  и угол подъема витка  $\alpha$ .

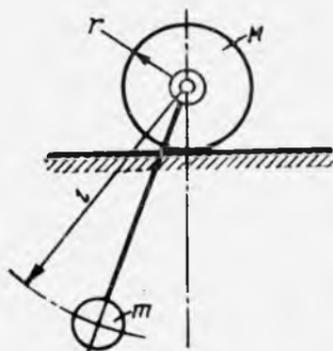


Рис. 133

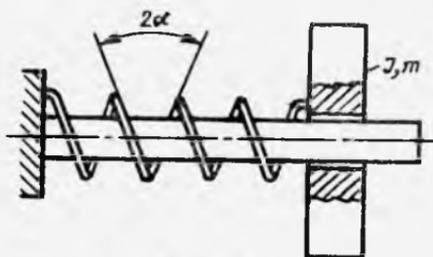


Рис. 134

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска, считая, что  $J=mD^2/2$ , а жесткости проволоки пружины при изгибе и кручении соответственно равны  $EJ_x$  и  $GJ_p$ .

Определить частоты собственных колебаний и исследовать их зависимость от угла подъема витка  $\alpha$  в пределах  $0 \leq \alpha \leq \pi/8$ .

191. На натянутой струне закреплены две массы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 135). Натяжение струны  $T_0$  при малых колебаниях масс

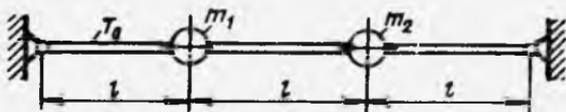


Рис. 135

остается практически постоянным. Силой тяжести, действующей на массы, пренебречь. Определить частоты собственных колебаний системы.

192. На конце консольной балки с жесткостью на изгиб  $EJ_x$  находится электродвигатель (рис. 136). Масса электродвигателя  $m$ ; момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку  $O_1$  (центр инерции), равен  $J_{O1}$ .

Вычислить погрешность, которая допускается при определении частоты собственных колебаний системы, если двигатель рассматривать как точечную массу.

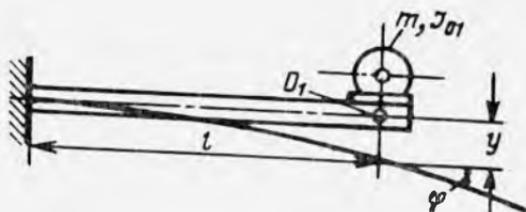


Рис. 136

193. Стальной вал диаметром  $d=0,1$  м несет две сосредоточенные массы  $m_1=200$  кг и  $m_2=250$  кг (рис. 137). Вал укреплен на трех опорах так, что расстояния от опор до каждой массы составляют  $a=1$  м и  $b=2$  м. Считая массы точечными и пренебрегая массой вала, определить частоты собственных колебаний системы.



Рис. 137

194. Для систем, изображенных на рис. 138, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний и определить частоты собственных колебаний.

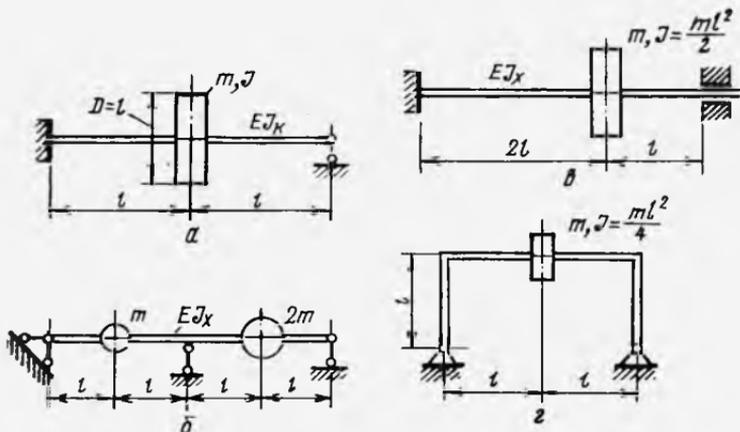


Рис. 138

195. На стальной балке прямоугольного поперечного сечения (рис. 139) закреплены два груза  $m_1=m$  и  $m_2=2m$ . Определить частоты и формы собственных колебаний балки, если  $m=2$  кг,  $l=0,5$  м;  $b=20$  мм,  $h=40$  мм.

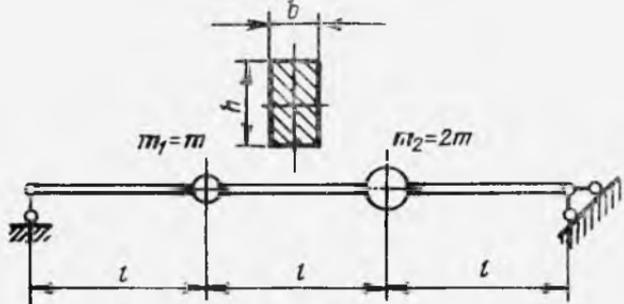


Рис. 139

196. На однопролетной балке жесткостью  $EJ_x$  закреплены три одинаковые точечные массы  $m$  (рис. 140). Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных колебаний системы.

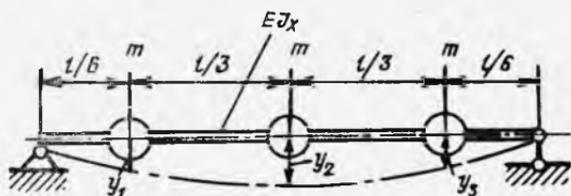


Рис. 140

197. Определить частоты и формы собственных колебаний укрепленной на стойке пластины массой  $m$  (рис. 141), считая, что жесткость стойки при изгибе  $EJ_x$ . Момент инерции пластины относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через центр тяжести, равен  $J$ .

198. Определить частоты и формы малых собственных колебаний системы (рис. 142), считая массы точечными. Изгибная жесткость всех участков рамы одинакова и равна  $EJ_x$ .

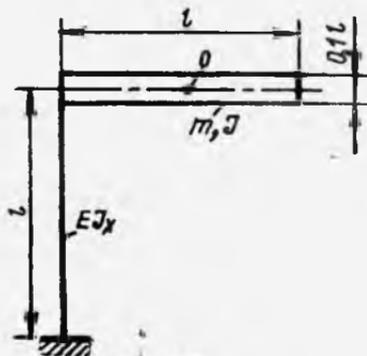


Рис. 141

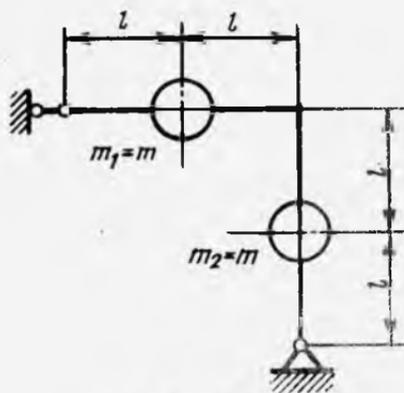


Рис. 142

199. Определить частоты и формы собственных колебаний рамы (рис. 143). Массой стоек по сравнению пластины пренебречь; жесткость стоек при изгибе равна  $EJ_x$ . Пластину считать абсолютно жесткой.

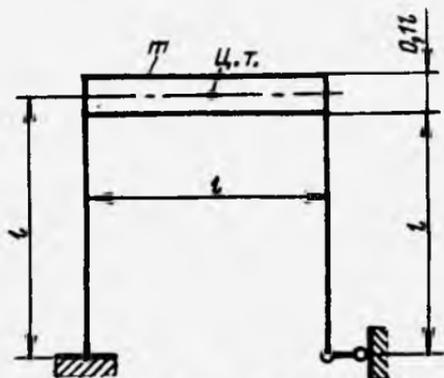


Рис. 143

200. Длинный стальной вал постоянного поперечного сечения закреплен в коротких подшипниках (рис. 144). Подшипники расположены на швеллерах, заделанных на стенку. На валу имеется диск массой  $m$ , момент инерции массы которого относительно диаметра равен  $J$ .

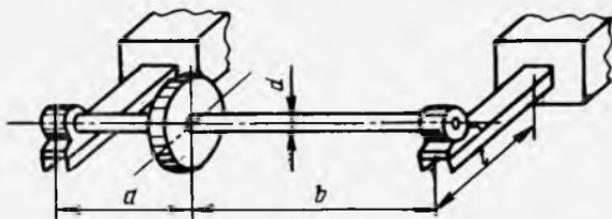


Рис. 144

Пренебрегая массами опорных швеллеров, подшипников и вала, определить частоты вертикальных собственных колебаний диска, если  $m=320$  кг,  $J=12,8$  кг·м<sup>2</sup>,  $a=1$  м,  $b=2$  м,  $l=0,6$  м,  $d=0,1$  м; балки изготовлены из швеллера № 16.

Указание. Короткие подшипники можно рассматривать как шарнирные опоры. При определении жесткости системы закручивание швеллеров не учитывать.

201. На раме круглого поперечного сечения (рис. 145) закреплены массы  $m_1=2m$  и  $m_2=m$ . Определить частоты и формы вертикальных собственных колебаний системы, считая, что между жесткостями стержней имеется зависимость вида  $GJ_k = =0,8 EJ_x$ .

202. Груз массой  $m$  закреплен на гибком стержне длиной  $l$  (рис. 146). Считая, что момент инерции массы груза относительно его центральной оси, перпендикулярной к плоскости черте-

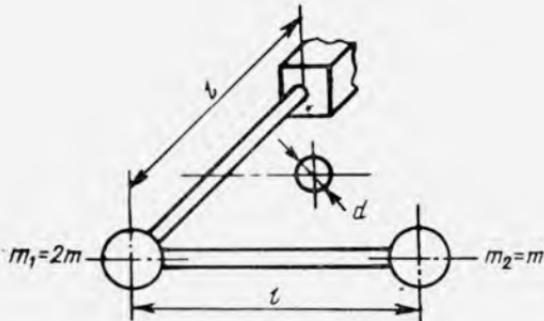


Рис. 145



Рис. 146

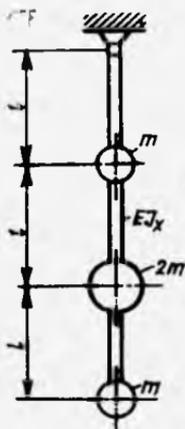


Рис. 147

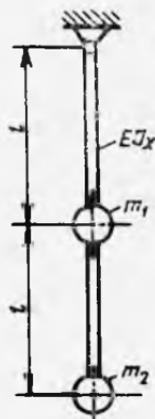


Рис. 148

жа, равен  $J = ml^2/4$ , определить частоты и формы собственных колебаний системы в плоскости чертежа. Действием силы тяжести и массой стержня при решении задачи пренебречь.

203. Определить частоты собственных колебаний системы (см. задачу 202) с учетом силы тяжести.

204. На гибком стержне длиной  $2l$  закреплены две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 147). Жесткость стержня на изгиб равна  $EJ_x$ . Пренебрегая действием силы тяжести и массой стержня, определить частоты и формы собственных колебаний стержня в плоскости чертежа.

205. Три точечные массы закреплены на гибком стержне жесткостью  $EJ_x$  (рис. 148). Пренебрегая массой стержня и не учитывая действие силы тяжести, определить частоты и формы собственных колебаний системы в плоскости чертежа.

206. Определить частоты и формы собственных колебаний в плоскости чертежа системы, состоящей из двух масс  $m$ , связанных между собой гибким безынерционным стержнем жесткостью  $EJ_x$  (рис. 149). Момент инерции каждой массы относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости черте-

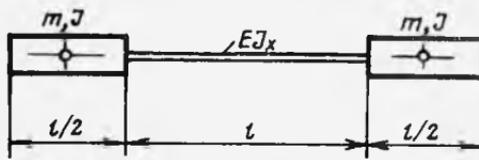


Рис. 149

жа, равен  $J = ml^2/4$ . Влиянием силы тяжести при решении задачи пренебречь.

207. Определить частоты и формы собственных колебаний системы (в плоскости чертежа), представляющей собой коромысло с двумя закрепленными на нем одинаковыми массами  $m$ , имеющими момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа, равный  $J = ml^2/4$  (рис. 150). Влиянием силы тяжести пренебречь.



Рис. 150

208. Два тела массами  $m_1$  и  $m_2$ , имеющие моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа, соединены упругим стержнем, изгибная жесткость которого  $EJ_x$  (рис. 151). Пренебрегая массой соеди-

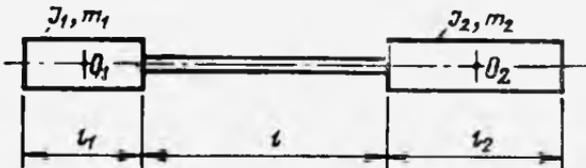


Рис. 151

нительного стержня и не учитывая действие силы тяжести, вывести дифференциальные уравнения малых свободных колебаний системы (в плоскости чертежа).

209. Для системы, изображенной на рис. 151, определить собственные частоты колебаний, считая, что  $m_2 = 2m_1$ ;  $J_2 = 2J_1 = m_2 l^2/2$ ;  $l_1 = l_2 = l$ .

210. Определить частоты и формы собственных колебаний системы в плоскости чертежа, состоящей из точечной массы  $m$  и двух грузов массами  $m$ , моменты инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа,  $J = ml^2/4$  (рис. 152). Изгибная жесткость соединительных стержней  $EJ_x$ . При решении задачи массой стержней и силой тяжести пренебречь; длину стержня и размер  $l$  считать равными.

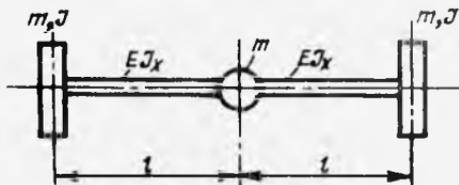


Рис. 152

211. На свободном валу постоянного сечения закреплены три маховые массы, имеющие моменты инерции  $J_1, J_2, J_3$  (рис. 153). Составить дифференциальные уравнения малых свободных крутильных колебаний масс и определить частоты их собственных колебаний. Принять, что моменты инерции масс равны:  $J_1 = 203,9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 611,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 305,9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; диаметр стального вала  $d = 50 \text{ мм}$ , расстояние между массами  $l_1 = 250 \text{ мм}$ ,  $l_2 = 400 \text{ мм}$ .

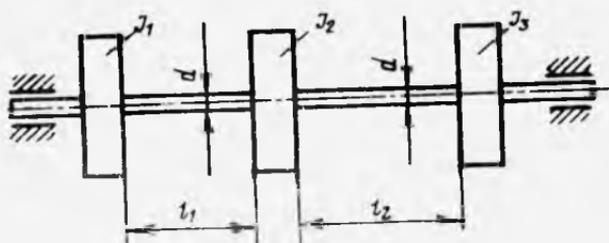


Рис. 153

212. Определить частоты собственных колебаний систем 1 и 2 (рис. 154), считая, что моменты инерции шестерен и валов малы по сравнению с моментами инерции дисков  $J_1$  и  $J_2$ . Жесткости валов на кручение соответственно равны  $c_1$  и  $c_2$ , а передаточное число зубчатой передачи  $u = z_2/z_1$ , где  $z_2$  и  $z_1$  — числа зубьев шестерен.

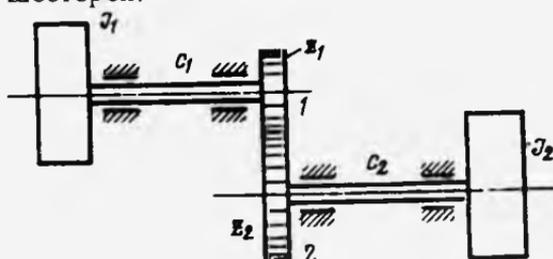


Рис. 154

213. Для систем, изображенных на рис. 155, составить дифференциальные уравнения малых свободных угловых колебаний; определить частоты собственных колебаний. Массами валов и колес по сравнению с массами дисков пренебречь.

Указание. На приведенных схемах  $z$  — число зубьев колес,  $c$  — крутильная жесткость вала.

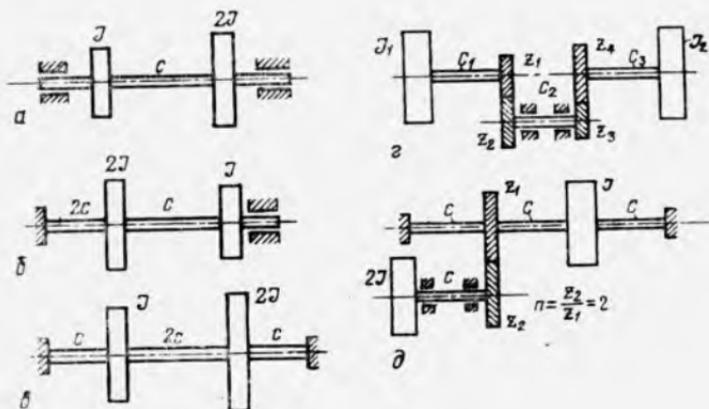


Рис. 153

214. Система, совершающая крутильные колебания, состоит из трех маховиков (см. рис. 153), моменты инерции которых соответственно равны  $J_1 = J$ ;  $J_2 = 2J$ ;  $J_3 = 3J$ . Маховики соединены валами, имеющими крутильную жесткость, равную  $c$  каждый.

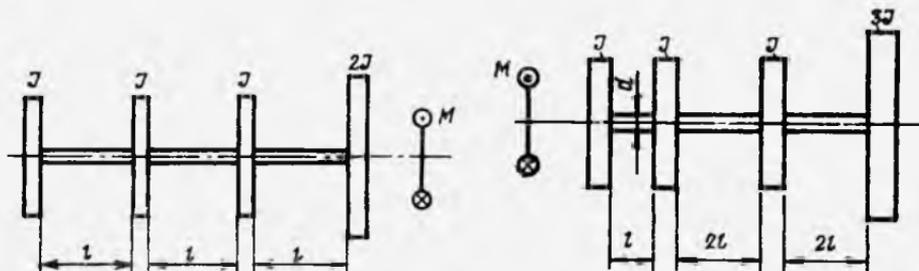


Рис. 156

Рис. 157

Определить частоты и формы собственных колебаний системы (массой валов пренебречь). Произвести проверку правильности полученных форм колебаний, используя свойство их ортогональности.

215. Составить дифференциальные уравнения малых свободных ( $M=0$ ) колебаний системы дисков (рис. 156), считая жесткость участков вала на кручение равной  $GJ_p$ . Определить частоты и формы собственных колебаний.

216. Определить частоты и формы собственных ( $M=0$ ) колебаний системы (рис. 157), считая, что жесткость вала на кручение равна  $GJ_p$ .

217. Получить характеристическое уравнение для определения частот собственных колебаний системы (см. задачу 212), считая, что моменты инерции маховиков равны  $J_1$  и  $J_2$ , а моменты инерции зубчатых колес  $J_1'$  и  $J_2'$ . Крутильные жесткости валов соответственно равны  $c_1$  и  $c_2$ .

218. Судовая двигательная установка состоит из двух одинаковых двигателей, имеющих приведенные к оси вращения мо-

менты инерции  $J_1$  и  $J_2$  вращающихся частей (рис. 158). Двигатели имеют одинаковую скорость вращения и приводят во вращение гребной винт, имеющий момент инерции  $J_3$ .

Считая, что передаточное число редуктора  $u = z_2/z_1$ , жесткости валов системы равны  $c_1$ ,  $c_2$ , а также пренебрегая моментами инерции зубчатых колес редуктора, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы и получить характеристическое уравнение. Затуханием в системе пренебречь.

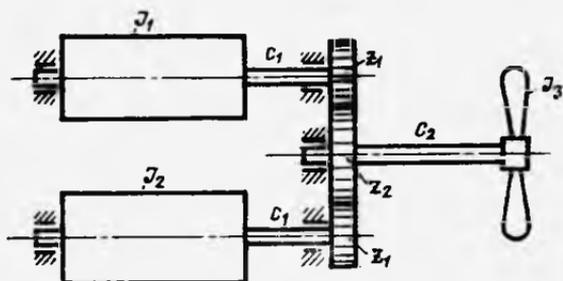


Рис. 158

219. На стальном валике жесткостью  $c_1$  насажены два маховика, моменты инерции которых  $J_1$  и  $J_2$  (рис. 159). Маховики соединены между собой упругим элементом — легкой конической оболочкой, которая жестко скреплена с правым маховиком и может проскальзывать относительно левого. Крутильная жесткость оболочки равна  $c_2$ , а момент сил трения пропорционален угловой скорости проскальзывания.

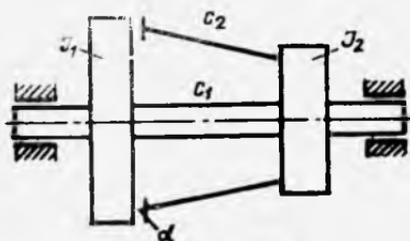


Рис. 159

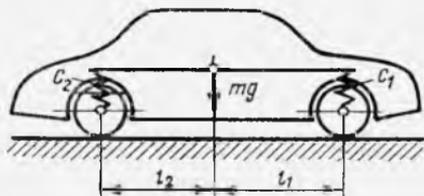


Рис. 160

Считая, что  $J_1 = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $c_1 = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $c_2 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , а коэффициент вязкого трения  $\alpha = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , составить дифференциальные уравнения свободных затухающих колебаний системы и вычислить значение корней характеристического многочлена.

220. Корпус автомобиля массой  $m$  соединен с колесами рессорами, имеющими жесткость  $c_1$  и  $c_2$  (рис. 160). Расстояния от центра массы корпуса до подвесок равны  $l_1$  и  $l_2$ . Считая, что момент инерции массы корпуса относительно центральной поперечной оси равен  $J$ , и пренебрегая упругостью шин, состав

вить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний корпуса автомобиля в продольной плоскости. Определить частоты собственных колебаний, если  $c_1=200$  кН/м;  $c_2=250$  кН/м;  $l_1=1$  м;  $l_2=1,5$  м;  $m=1,5 \cdot 10^3$  кг;  $J=300$  кг·м<sup>2</sup>.

221. Установить, при каком соотношении между параметрами автомобиля (см. задачу 220) его частоты собственных колебаний равны между собой.

222. Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний автомобиля (рис. 161, а), кузов которого имеет массу и момент инерции относительно центральной поперечной оси  $m$ . Масса переднего и заднего мостов колес равна  $m_1$  и  $m_2$ , жесткость рессор передней и задней подвески  $c_1$  и  $c_2$ , а жесткость шин передних и задних колес  $c$  и  $2c$ , соответственно. При

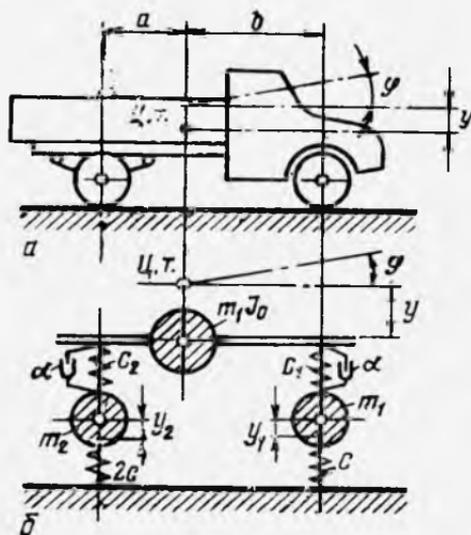


Рис. 161

решении считать, что в рессорах имеется вязкое трение с коэффициентом трения  $\alpha$ . Расчетная схема системы изображена на рис. 161, б.

223. Определить частоты собственных колебаний автомобиля (см. рис. 161) для частного случая  $J_0=tab$ . Принять следующие числовые значения параметров системы:  $a=2,3$  м;  $b=0,94$  м;  $m=5,4 \cdot 10^3$  кг;  $m_1=m_2=650$  кг;  $c_1=c_2=35$  кН/м;  $\alpha=0$ . Жесткость шин переднего и заднего колес считать одинаковой и равной  $c=1200$  кН/м.

224. На рис. 162 схематично изображена передача с гибкой связью (привод токарного станка). В установившемся режиме работы момент двигателя уравнивается моментом сил резания (моментами сил сопротивления можно в первом приближении пренебречь); напряжения в ветвях передачи равны  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$ .

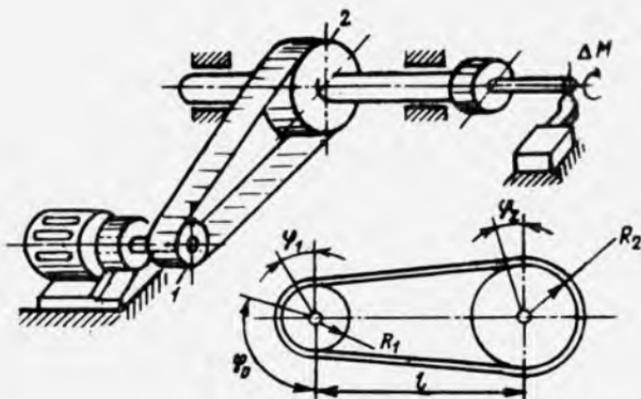


Рис. 162

Составить дифференциальные уравнения малых угловых колебаний шкивов 1 и 2 и определить частоты собственных колебаний, если  $R_1=100$  мм,  $R_2=200$  мм; момент инерции массы ведущего шкива 1 и ротора электродвигателя  $J_1=0,08$  кг·м<sup>2</sup>; момент инерции массы ведомого шкива 2 и шпинделя станка  $J_2=0,1$  кг·м<sup>2</sup>;  $l=0,6$  м; площадь поперечного сечения гибкой связи  $F=2$  см<sup>2</sup>; модуль упругости материала гибкой связи  $E=100$  МПа; угол упругого проскальзывания гибкой связи на шкиве  $\varphi_0=150^\circ$ ; коэффициент трения между гибкой связью и шкивом  $\mu_0=0,3$ .

Указание. Удлинения ветвей передачи, вызванные дополнительными напряжениями, возникающими при колебаниях шкивов, соответственно равны

$$\Delta l_1 = \Delta \sigma_1 \left[ \frac{l}{E} + \frac{R_2}{\mu_0 E} (1 - e^{\mu_0 \varphi_0}) \right] = a_1 \Delta \sigma_1,$$

$$\Delta l_2 = \Delta \sigma_2 \left[ \frac{l}{E} + \frac{R_1}{\mu_0 E} (e^{\mu_0 \varphi_0} - 1) \right] = a_2 \Delta \sigma_2.$$

225. В конструкциях ременного привода станков постоянно усилия натяжения в ветвях передачи часто осуществляется за счет использования массы двигателя. На рис. 163 приведена схема вертикальной ременной передачи, в которой гибкая связь заменена упругими элементами, работающими на растяжение.

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний шкивов привода, считая, что момент инерции массы верхнего шкива равен  $J=0,1$  кг·м<sup>2</sup>, а его радиус  $R_2=200$  мм; момент инерции массы двигателя и нижнего шкива относительно точки  $O$   $J'=0,125$  кг·м<sup>2</sup>, их масса  $m=16$  кг, радиус нижнего шкива  $R_1=0,1$  м; момент инерции массы нижнего шкива и ротора двигателя  $J_1=0,08$  кг·м<sup>2</sup>; плечо  $h_1=0,5$  м; жесткость упругих связей  $EF=2 \cdot 10^4$  кН·м<sup>2</sup>, их длина  $l=0,6$  м,  $\varphi_{10}=9^\circ 40'$ . Определить частоты собственных колебаний системы.

226. В современном машиностроении получили широкое применение самонатяжные передачи. На рис. 164 изображена

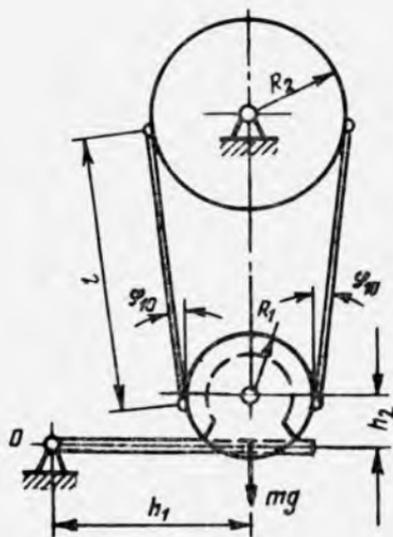


Рис. 163

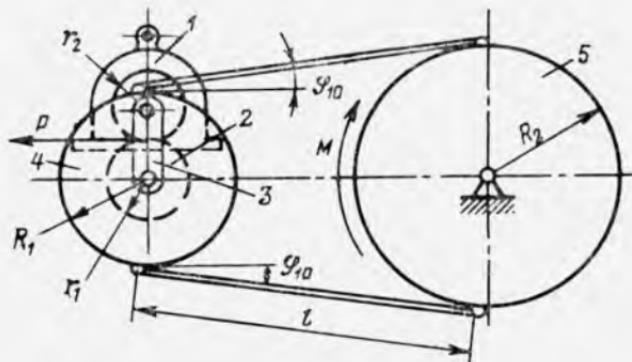


Рис. 164

схема самонатяжной передачи. Для упрощения решения гибкая замкнутая связь заменена двумя упругими элементами, работающими на растяжение. Крутящий момент от электродвигателя 1 на ведущий шкив 4 передается через пару шестерен 2, закрепленных на осях двигателя и шкива и связанных между собой кулисой 3.

В статическом положении (как и при установившемся режиме работы передачи с замкнутой гибкой связью) внешний момент  $M$  уравнивается моментом двигателя 1. При увеличении внешнего момента  $M$  возрастает и момент со стороны двигателя, т. е. увеличивается усилие зацепления  $P$  — сила, передающая момент со стороны шестерни двигателя на шестерню ведущего шкива 4. При этом сила зацепления одновременно натягивает передачу, отклоняя кулису 3.

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний шкивов передачи и определить частоты собственных колебаний, считая, что шестерня 2 не перемещается. Моменты инерции движущихся масс, приведенные к осям вращения шкивов, равны  $J_1$  и  $J_2$ ; масса ведущего шкива с шестерней  $m_1$ ; модуль упругости связей  $E$ , а их площадь поперечного сечения  $F$ . Массами кулисы и упругих связей пренебречь. Провести числовое решение при следующих значениях параметров системы:  $J_1=0,08 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_2=0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $m_1=0,16 \text{ кг}$ ;  $l=600 \text{ мм}$ ;  $\varphi_{10}=9^\circ 40'$ ;  $F=2 \text{ см}^2$ ;  $E=100 \text{ МПа}$ ;  $R_1=100 \text{ мм}$ ;  $R_2=200 \text{ мм}$ ;  $r_1=50 \text{ мм}$ ;  $r_2=40 \text{ мм}$ .

227. Масса  $m$  укрепена на двух растяжимых нитях длиной  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 165). Считая, что в процессе малых колебаний груза в вертикальной плоскости натяжение  $T_0$  в нитях не изменяется, определить частоты малых собственных колебаний массы  $m$ . Момент инерции массы относительно оси, перпендику-

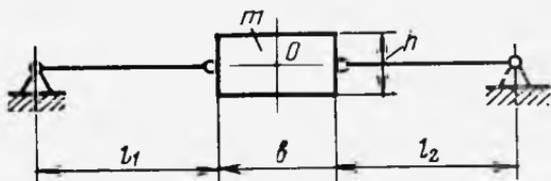


Рис. 165

лярной чертежу и проходящей через центр тяжести груза, равен  $J$ , жесткость нитей на растяжение  $EF_0$ . Статическим смещением, вызванным массой груза, пренебречь.

228. Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний вагонетки массой  $m$ , движущейся с постоянной скоростью  $v$  по натянутому тросу (сила натяжения троса  $T_0$ ) (рис. 166). Момент инерции массы вагонетки относи-

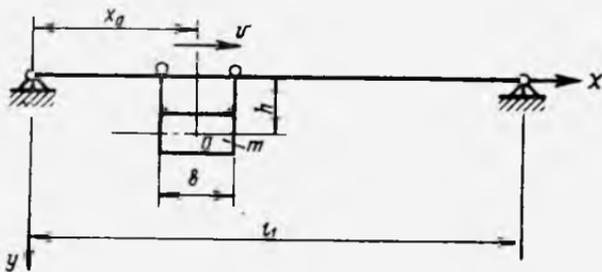


Рис. 166

тельно оси, проходящей через ее центр тяжести перпендикулярно чертежу, равен  $J$ . Изменением натяжения  $T_0$  в тросе пренебречь.

229. Точечный груз массой  $m$  укреплен на свободной невесомой растяжимой нити, концы которой жестко закреплены на

одном уровне на расстоянии  $l_1$  один от другого. На рис. 167 изображено статическое состояние системы. Все величины, приведенные на чертеже, считать известными. Определить частоты собственных колебаний массы в плоскости чертежа, считая, что жесткость нити при растяжении равна  $EF$ .

230. Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний массы  $m$ , движущейся по растяжимой невесомой нити, концы которой закреплены на одном уровне на расстоянии  $l_1$  один от другого (рис. 167). Скорость движения

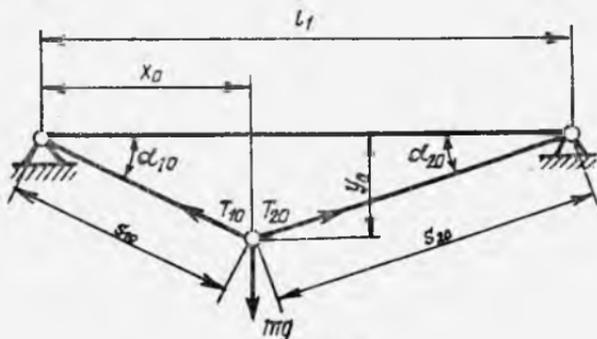


Рис. 167

массы относительно нити постоянная и равна  $v$ . Жесткость нити при растяжении  $EF$ . Принять, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) координаты массы равны  $x_0=0$ ,  $y_0=s_{00}$ .

231. В качестве возбудителя крутильных колебаний можно использовать магнитоэлектрический вибратор, например шунтовой двигатель с раздельным питанием обмоток якоря и возбуждения (рис. 168). Обмотка возбуждения  $1$  питается постоянным током, а на обмотку якоря  $3$  подается переменное напряжение  $U=U_0 \sin \omega t$ , частоту которого можно регулировать. Колебания якоря  $2$ , имеющего момент инерции массы  $J$ , вызывают изменением напряжения в цепи якоря на величину  $\alpha_1 d\varphi/dt$  (где  $\alpha_1$  — коэффициент, зависящий от магнитного по-

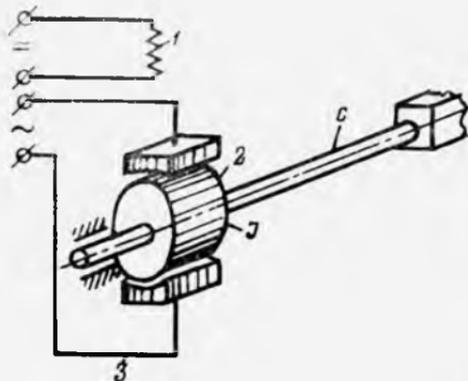


Рис. 168

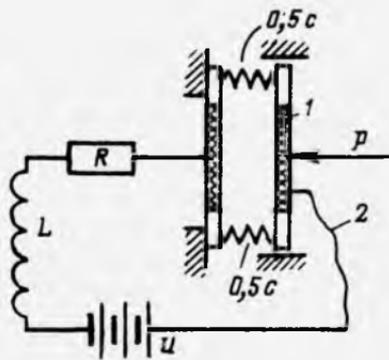


Рис. 169

тока якоря;  $\varphi$  — угол поворота якоря). Изменение напряжения в цепи якоря вызывает возникновение тока, создающего электромагнитный момент  $M = \alpha_2 i$  ( $\alpha_2$  — коэффициент, зависящий от магнитного потока якоря;  $i$  — ток в цепи), действующий на якорь.

Составить дифференциальные уравнения свободных колебаний системы, считая, что крутильная жесткость торсиона равна  $c$ , индуктивность цепи якоря  $L$ , а активное сопротивление его цепи  $R$ . Силами сопротивления в механической системе пренебречь. Определить корни характеристического многочлена для частного случая, когда  $R \approx 0$ .

**232.** Электромеханический прибор, известный под названием конденсаторный микрофон, схематически изображен на рис. 169. Цепь состоит из батареи постоянного напряжения  $U$ , катушки самоиндукции  $L$ , активного сопротивления  $R_2$ , конденсатора переменной емкости  $C$  и гибкого проводника 2. Конденсатор имеет одну неподвижную пластинку, с которой упруго связана движущаяся пластинка 1 массой  $m$ , которая представляет собой звуковоспринимающую мембрану микрофона. Она колеблется под действием переменного давления  $p$  звуковых волн. Система имеет две степени свободы (две обобщенные координаты) — заряд  $q$  конденсатора и перемещение  $x$  мембраны.

Составить дифференциальные уравнения движения пластинки 1 (мембраны) и изменения заряда  $q$  конденсатора, считая, что жесткость каждой из пружин  $0,5 c$ .

**233.** Колебательная система состоит из двух дисков с моментами инерции массы  $J_1$  и  $J_2$ , скрепленных между собой валом, крутильная жесткость которого равна  $c$  (рис. 170). Опре-

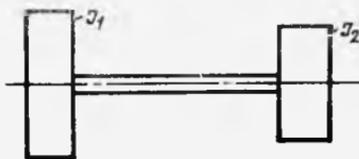


Рис. 170

делить частоты собственных колебаний системы и установить закон движения дисков, если в некоторый начальный момент времени им сообщены одинаковые по величине, но различные по направлению угловые скорости движения  $\dot{\varphi}_0$  (считать, что при  $t=0$   $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ).

## § 9. Вынужденные колебания

**234.** Определить максимальные нормальные напряжения, возникающие в балке (см. рис. 139) при действии на массу  $m$ , периодической силы  $P = P_0 \sin \omega t$ , где  $\omega^2 = 1/(m_2 \delta_{22})$ ,  $P_0$  — значение амплитуды силы.

235. Для систем, изображенных на рис. 171, определить коэффициент динамичности, равный отношению амплитуды возмущающей силы  $P_0$  к амплитуде усилия, действующего на массу  $m_2$ . Принять

$$c = l^3/EI_x; m_1 = 2m_2; \omega = \sqrt{c/m_1}.$$

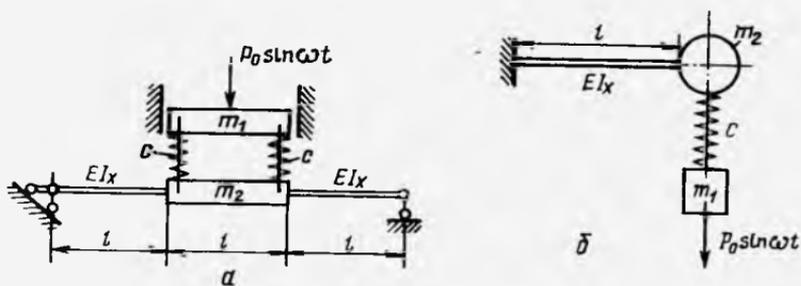


Рис. 171

236. Тяжелый электродвигатель массой  $m$  закреплен на балке длиной  $3l$  (рис. 172). При вращении ротора мотора, имеющего эксцентрично расположенную массу  $m_1$ , развивается центробежная сила инерции  $F_0 = m_1 \omega^2 e$  (где  $e$  — эксцентриситет массы ротора,  $\omega$  — его угловая скорость).

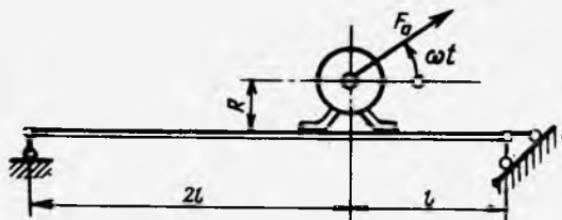


Рис. 172

Определить частоты собственных колебаний и амплитуды вынужденных колебаний системы, если расстояние от оси балки до центра массы мотора  $R = l/4$ , момент инерции массы мотора относительно центральной оси  $J_0 = ml^2/4$ , угловая скорость  $\omega = 2 \sqrt{EI_x/(me)^3}$ . Массой балки по сравнению с массой двигателя пренебречь.

237. На массу  $m_2$  (рис. 173) действует периодическая возмущающая сила, равная  $P = P_0 \sin \omega t$ . Площадь поперечного сечения стержней, соединяющих массы, равна  $F$ , а модуль упругости  $E$ . Установить, при каких значениях параметров системы амплитуда вертикальных колебаний массы  $m_2$  равна нулю.

238. Определить параметры системы, при которых амплитуда колебаний массы  $m_2$  равна нулю, считая частоту  $\omega$  возмущающей силы заданной (рис. 174).

239. Две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  находятся на шарнирно закрепленной балке (рис. 175). На систему действует возмущающий момент  $M = M_0 \sin \omega t$ . Определить параметры системы, при которых амплитуда колебаний массы  $m_1$  равна нулю.

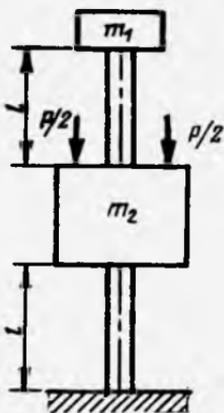


Рис. 173

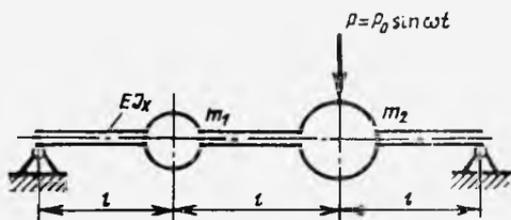


Рис. 174

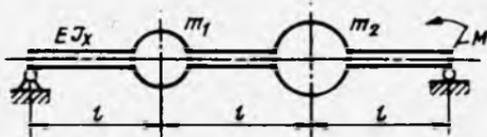


Рис. 175

240. Для гашения колебаний массы  $m_2$ , находящейся на конце мачты, используется маятниковый гаситель колебаний (рис. 176). На массу  $m_2$  действует периодическое возмущение  $P = P_0 \sin \omega t$ . Средняя изгибная жесткость мачты  $EJ_x$ . Определить параметры маятника ( $m_1$ ,  $l_1$ ), при которых амплитуда колебаний массы  $m_2$  равна нулю.

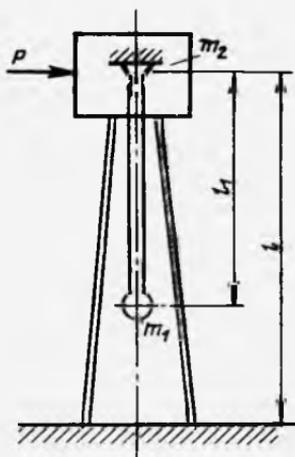


Рис. 176

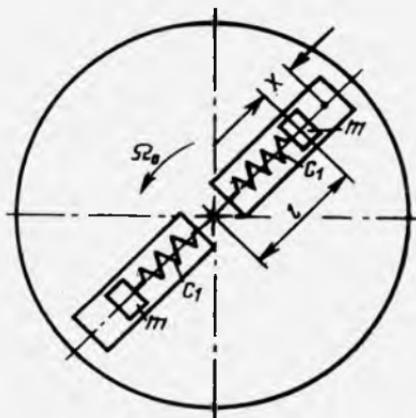


Рис. 177

241. Для гашения крутильных колебаний применяется гаситель колебаний Прингла, в котором массы  $m$  могут перемещаться в радиальных пазах диска (рис. 177). Определить параметры  $m$  и  $c_1$  гасителя, при которых амплитуда угловых колебаний диска равна нулю (при заданной частоте  $\omega$  возмущающего момента и угловой скорости диска  $\Omega_0$ ), если известны: возмущающий момент  $M = M_0 \sin \omega t$ , действующий на диск; жесткость  $c$  вала, на котором находится диск, момент инерции массы диска  $I$  и угловая скорость диска при стационарном режиме  $\Omega_0$ .

242. Рассмотренный в задаче 241 гаситель колебаний Прингла имеет недостаток — массы  $m$  с увеличением угловой скорости  $\Omega_0$  смещаются из-за деформации пружин, изменяя суммарный момент инерции системы. Указать, как надо изменить конструкцию гасителя, чтобы на интервале изменения  $\Omega_0$  ( $0 \leq \Omega \leq \leq \Omega_{0*}$ ) массы оставались относительно диска неподвижными.

243. На рис. 178 показан маятниковый гаситель колебаний, установленный на диске, вращающемся с угловой ско-

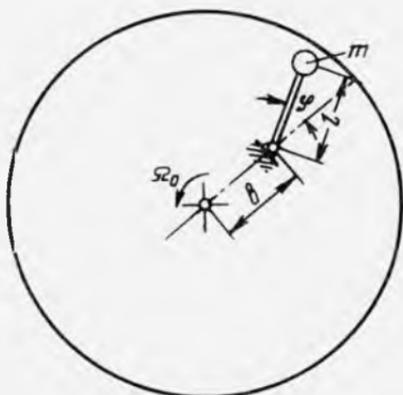


Рис. 178

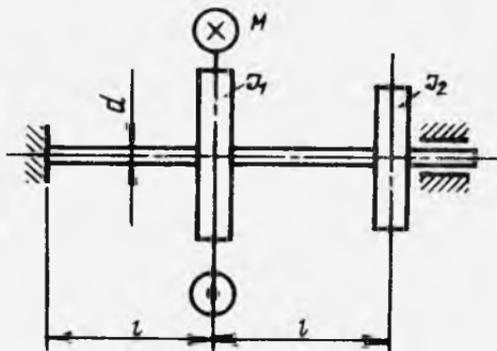


Рис. 179

ростью  $\Omega$ . Определить параметры  $m$  и  $l$  маятникового гасителя колебаний, при которых амплитуда колебаний диска равна нулю.

244. На систему, изображенную на рис. 145, в сечении закрепления массы  $m_2$  действует вертикальная периодическая сила  $P = P_0 \sin \omega t$ . Определить допустимое значение амплитуды возмущающей силы  $P_0$ , если частота возмущающей силы  $\omega = 0,8 p_1$  (где  $p_1$  — первая частота собственных колебаний системы),  $d = 40$  мм,  $l = 1$  м, считая, что коэффициент  $n_T = 3$ . Материал стержней — сталь Ст3 ( $\sigma_{T.P} = \sigma_{T.C} = 240$  МПа).

245. Определить наибольшие касательные напряжения, возникающие в стальном валу постоянного поперечного сечения (рис. 179) при действии периодического возмущающего момента  $M = M_0 \sin \omega t$ , если  $J_1 = 2J_2$ ,  $M_0 = 5$  Н·м,  $d = 1$  см;  $\omega^2 = 2 / (I_2 \delta_{11})$ ,  $l = 20$  см,  $G = 80$  ГПа. Вычислить коэффициент запаса прочности вала по пределу текучести, если  $\tau_T = 200$  МПа.

246. На стальном валу круглого поперечного сечения, имеющем жесткость при кручении  $GJ_\rho$ , закреплены четыре диска (см. рис. 156). Определить наибольший крутящий момент на валу в установившемся режиме колебаний при действии периодического возмущающего момента  $M = M_0 \sin \omega t$ , где  $\omega = 0,8 p_2$  ( $p_2$  — вторая частота собственных колебаний системы).

247. Определить наибольшие напряжения, возникающие в вале (см. рис. 157) постоянного поперечного сечения  $d = 40$  мм при действии на него периодически изменяющегося крутящего

момента  $M = M_0 \sin \omega t$ , если  $M_0 = 300$  Н·м;  $\omega = 0,7 p_2$  ( $p_2$  — вторая частота собственных колебаний системы).

248. Два абсолютно жестких шкива (рис. 180) соединены упругими связями, работающими на растяжение и имеющими предварительное натяжение  $N_0 = F \sigma_0$ .

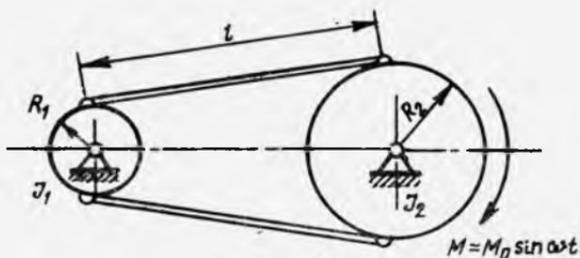


Рис. 180

Определить частоты собственных колебаний шкивов и величину наибольшего возмущающего момента  $M_0$ , при котором напряжение в упругой связи достигает нуля. Принять, что радиусы шкивов:  $R_1 = 10$  см,  $R_2 = 20$  см, их моменты инерции  $J_1 = 0,08$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>, длина упругой связи  $l = 60$  см, площадь ее поперечного сечения  $F = 2$  см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E = 100$  МПа, напряжение предварительного натяжения  $\sigma_0 = 2$  МПа, частота возмущающего момента  $\omega = 0,8 p_2$  (где  $p_2$  — вторая частота собственных колебаний системы).

249. Определить закон изменения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в установившемся режиме колебаний передачи привода токарного станка (см. задачу 224, рис. 162) при действии на ведомый вал периодического возмущающего момента сил резания  $\Delta M = M_0 \sin \omega t$ .

250. На стальном валике 1 (рис. 181) диаметром  $d$ , жестко закреплен маховик 2, имеющий момент инерции массы  $J_1$ . Нижний конец валика жестко зашпелен, а верхний поддерживается подшипником. Второй маховик 3 с моментом инерции массы  $J_2$  свободно надет на валик и прижимается к маховику 2 пружиной 4.

Считая, что к маховику 2 приложен периодически изменяющийся момент  $M = M_0 \sin \omega t$ , а между маховиками имеется кулоново трение с коэффициентом трения  $\mu$ , составить дифференциальные уравнения движения маховиков 2 и 3. При составлении уравнений учесть, что пружина 4, прикрепленная к маховику 3 и верхней опоре, имеет предварительный осевой натяг  $\delta_0$ , величина которого изменяется в процессе колебаний.

251. Определить напряжения, возникающие в элементах конструкции при установившихся колебаниях (см. рис. 181), считая, что между маховиками 2 и 3 возникает вязкое трение и момент сил вязкого трения  $M_T = \alpha_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$ .

252. На свободном конце консольного вала жесткостью  $c$  закреплен диск (момент инерции диска  $J_1$ ) с надетым на него

массивным кольцом (момент инерции кольца  $J_2$ ) (рис. 182). Кольцо удерживается на диске ребрами. Между диском и кольцом имеется вязкое трение. Момент трения пропорционален относительной скорости движения диска и кольца  $M_T = \alpha(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ , где  $\varphi_1$  — угол поворота диска;  $\varphi_2$  — угол поворота кольца.

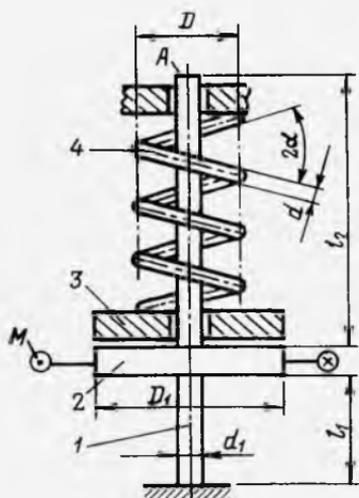


Рис. 181

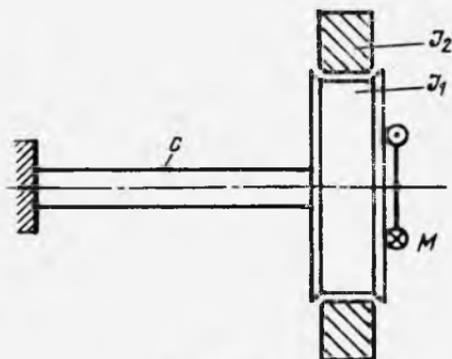


Рис. 182

Составить дифференциальные уравнения малых колебаний диска и кольца при действии на диск момента  $M = M_0 \sin \omega t$ . Определить амплитуды установившихся колебаний диска и кольца.

253. Составить дифференциальные уравнения движения прицепа по дороге с неровностями (рис. 183), считая, что масса прицепа  $m$ , масса колес  $m_1$ , момент инерции массы прицепа относительно поперечной оси, проходящей через точку  $O$ , равен  $J_0$ , жесткость рессор  $c$ , жесткость шин колес  $c_1$ , скорость буксирования  $v$ .

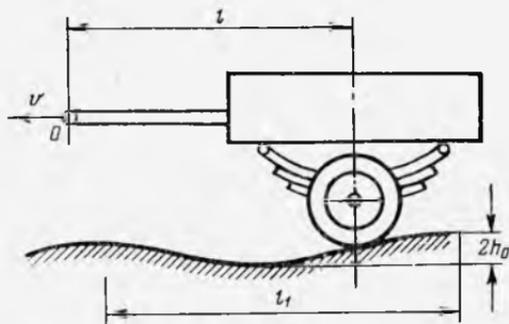


Рис. 183

При решении задачи принять, что точка крепления прицепа к машине (точка  $O$ ) не имеет вертикальных перемещений, а профиль дороги описывается уравнением  $h=h_0(1-\cos 2\pi x/l_0)$ , где  $x=vt$ . Учсть, что при колебаниях прицепа в рессорах возникают силы трения  $F_T=\alpha(y-y_1)$ , пропорциональные относительной скорости вертикального перемещения кузова и колеса.

Определить частоты собственных колебаний и критические скорости буксирования при отсутствии трения в рессорах.

254. Автомобиль движется по дороге, имеющей периодические неровности (рис. 184). Считая, что профиль дороги описы-

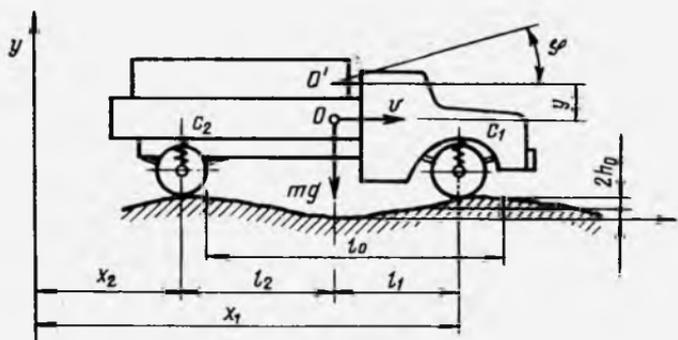


Рис. 184

вается уравнением  $h=h_0(1-\cos 2\pi x/l_0)$ , где  $x=vt$ , определить амплитуды углового и вертикального ускорений при установившихся колебаниях системы. Принять, что масса автомобиля  $m=6000$  кг; момент инерции массы относительно центральной поперечной оси  $J=1,2 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup>; жесткости рессор  $c_1=200$  кН/м и  $c_2=250$  кН/м; расстояния до центра тяжести  $l_1=1$  м,  $l_2=1,5$  м; скорость движения автомобиля  $v=25$  км/ч; шаг неровностей  $l_0=5$  м; высота неровностей  $h=0,1$  м.

265. Определить критическую скорость движения автомобиля по дороге с неровностями (см. задачу 254), т. е. такую скорость  $v$ , при которой амплитуды вынужденных колебаний достигают максимальных значений.

256. Составить дифференциальные уравнения вынужденных колебаний автомобиля (см. задачу 222, рис. 161) при движении его со скоростью  $v$  и по дороге с неровностями, которые приближенно описываются уравнением  $h=h_0(1-\cos 2\pi x/l_0)$ .

257. На рис. 185 изображена схема центрифуги, предназначенной для разделения смеси жидкостей по плотностям ее компонентов. При вращении системы с угловой скоростью  $\omega$  более тяжелые фракции скапливаются у стенок сосуда, а легкие вытесняются в центр (ближе к оси вращения). Слив легких фракций производится через центральную трубку.

Известно, что из-за технологических погрешностей при изготовлении центр масс сосуда с жидкостью находится на расстоянии  $e$  (эксцентриситет масс) от оси вращения.

Составить дифференциальные уравнения движения центрифуги, считая угловую скорость  $\omega$  постоянной, а слив жидкости равномерным, т. е. полагая, что масса  $m_{ж}$  находящейся в сосуде жидкости изменяется во времени по закону  $m_{ж} = m_1(1 - t/t_1)$ , где  $m_1$  — масса жидкости в начальный момент времени,  $t_1$  — время, за которое вытекает вся жидкость. Масса сосуда  $m_1$  намного больше массы трубки. Жесткость трубки при изгибе равна  $c$ . Изменением вертикальной координаты центра масс системы и колебаниями жидкости в сосуде пренебречь.

258. На массу  $m$ , закрепленную на конце упругого стержня (рис. 186), действует единичный импульс  $J = m\dot{u}(0)$ . Считая, что изгибная жесткость стержня  $EJ_x$ , а момент инерции массы относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, равен  $J = ml^2/4$ , определить закон движе-

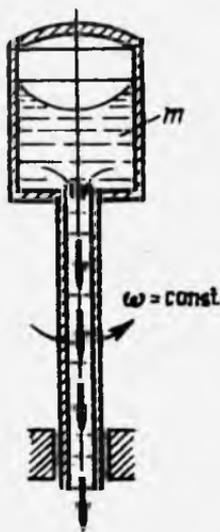


Рис. 185

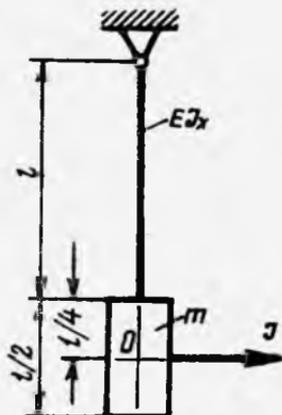


Рис. 186

ния массы и максимальный изгибающий момент в стержне. В качестве начальных условий принять, что при  $t=0$  горизонтальное смещение, угол поворота и угловая скорость движения груза равны нулю [ $u(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ ]. Влиянием силы тяжести на движение системы пренебречь.

259. Демпфер крутильных колебаний (рис. 187) состоит из упругого элемента 4, несущего на своем свободном конце контактное кольцо 1, к которому пружиной 3 прижимается маховик 2.

Считая, что на маховик действует периодически изменяющийся крутящий момент  $M = M_0 \sin \omega t$ , а момент сил трения между маховиком и кольцом пропорционален скорости их относительного движения (с коэффициентом пропорциональ-



одностороннее воздействие автомобиля на сиденье. На рис. 189 показана схема виброизоляции сиденья водителя от пола автомобиля (точка  $O$ ) ( $m$  — суммарная масса сиденья и водителя);  $c_1, c_2$  — жесткости пружин упругой подвески сиденья;  $\alpha$  — коэффициент вязкого трения.

В результате обработки осциллограммы случайного стационарного процесса с нулевым математическим ожиданием, возникающего при движении автомобиля с постоянной определенной скоростью  $v$ , получена корреляционная функция вертикального смещения точки  $O$  вида

$$K_{y_0}(\tau) = D_{y_0} e^{-\alpha_1 |\tau|},$$

где  $D_{y_0}$  — дисперсия,  $\alpha_1$  — параметр затухания.

Получить выражения для дисперсий вертикального ускорения водителя с сиденьем (пружины и демпфер можно считать невесомыми).

### § 10. Критические состояния и устойчивость колебаний

262. Диск массой  $m$  закреплен на гибком идеально сбалансированном безмассовом валике длиной  $2l$ , вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 190).

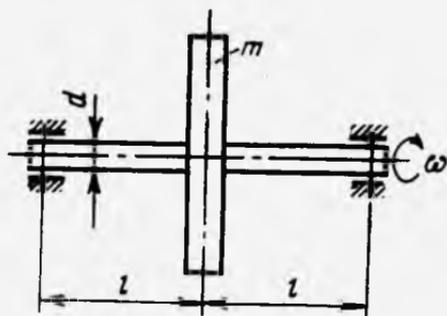


Рис. 190

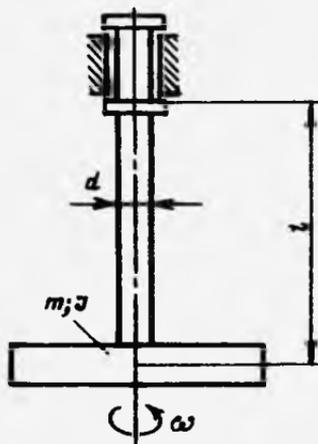


Рис. 191

Считая, что эксцентриситет массы диска относительно оси валика равен нулю, составить дифференциальные уравнения малых колебаний диска в системе координат  $x, y, z$ , вращающейся со скоростью  $\omega$  (ось  $z$  является осью вращения). Вследствие симметрии схемы можно считать, что поворот диска в плоскости чертежа отсутствует, т. е. диск совершает только вертикальные колебания. Определить частоты колебаний диска во вращающейся системе координат, пренебрегая действием силы тяжести.

263. Вывести уравнения малых колебаний диска относитель-

но стационарного режима вращения с учетом эксцентриситета  $e$  (см. рис. 78). Уравнения получить во вращающейся системе координат.

264. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний диска массой  $m$ , насаженного без эксцентриситета на вал длиной  $2l$  (см. рис. 190) при вращении его с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Определить значение критической угловой скорости  $\omega_*$ , если поперечное сечение вала имеет различные осевые моменты инерции, т. е.  $J_x \neq J_y$  (например, прямоугольное поперечное сечение).

265. На горизонтальном валике диаметром  $d$  и длиной  $2l$  укреплен (без эксцентриситета) массивный диск массой  $m$  (см. рис. 190). Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска при равномерном вращении валика с угловой скоростью  $\omega$ . Определить амплитуды установившихся колебаний диска. Массой валика по сравнению с массой диска пренебречь.

266. Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний вращающегося диска массой  $m$ , насаженного на горизонтальный валик (см. рис. 190) прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$  ( $b < h$ ). Определить амплитуду установившихся колебаний диска и критическую угловую скорость  $\omega$  валика с учетом силы тяжести, действующей на диск.

267. На рис. 191 изображен вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  стальной консольный валик длиной  $l$  и диаметром  $d$ , несущий на одном конце массивный диск массой  $m$ . Момент инерции массы диска относительно оси вращения равен  $J$ .

Считая, что имеется регулярная прецессия, определить критическую угловую скорость валика с учетом ( $J \neq 0$ ) и без учета ( $J = 0$ ) гироскопического эффекта, если  $l = 1$  м;  $J_x = \pi d^4 / 64 = 490$  см<sup>4</sup>;  $J = 4,05$  кг·м<sup>2</sup>;  $E = 200$  ГПа;  $m = 175$  кг.

268. Стальной вал диаметром  $d$  вращается в длинных подшипниках (рис. 192). На конце вала насажен маховик радиусом  $R$  и толщиной  $h$ . Считая, что длинный подшипник можно рассматривать как глухую заделку, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска и вычислить значение критической угловой скорости вала  $\omega_*$ , если  $R = 0,3$  м;  $h = 80$  мм;  $d = 0,1$  м;  $l = 1$  м. Массой вала по сравнению с массой диска пренебречь.

Полученный результат сопоставить с результатом решения без учета гироскопического эффекта.

269. Определить критическую угловую скорость стального вала, закрепленного в двух коротких подшипниках (рис. 193), которые можно рассматривать как шарнирные опоры. При расчете принять:  $D = 0,6$  м;  $h = 80$  мм,  $d = 0,12$  м,  $a = 1$  м,  $l = 3$  м,  $E = 200$  ГПа.

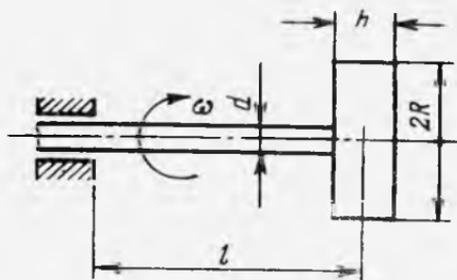


Рис. 192

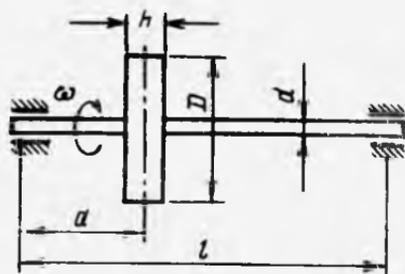


Рис. 193

270. Гибкий стальной валик длиной  $2l$  с закрепленным на нем несбалансированным диском, масса которого  $m$ , помещен в однородное магнитное поле с постоянной напряженностью  $\Phi_0$  (рис. 194). Определить критическую угловую скорость валика  $\omega_c$ , если изгибная жесткость равна  $EJ_x$ , а эксцентриситет центра массы относительно оси вращения  $e$ .

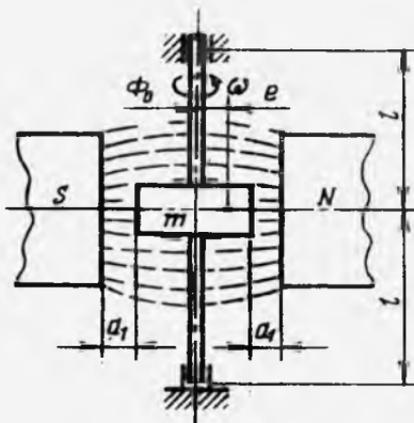


Рис. 194

Указание. При положении груза посредине между магнитами их силы притяжения взаимно компенсируются. При отклонении же груза силы, действующие на него со стороны магнитов, оказываются различными и их разность не равна нулю (см. решение задачи 107:  $\Delta F = F_1 - F_2$ ). При решении принять

$$F_1 = k\Phi_0^2/(a_1 - x)^2; \quad F_2 = k\Phi_0^2/(a_1 + x)^2.$$

271. Тонкая прямоугольная абсолютная жесткая стальная пластинка массой  $m$ , закрепленная на четырех пружинах, помещена в воздушный поток (рис. 195). Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний пластинки в вертикальной плоскости, считая, что между подъемной силой  $F_1$ , скоростью потока  $v$  и углом поворота  $\theta$  имеется следующая зависимость:

$$F = \frac{dc_z}{d\theta} \frac{hl}{2} \rho v^2 \theta,$$

где  $F_1$  — подъемная сила, приложенная в точке 0, находящейся на расстоянии  $l/4$  от передней кромки пластинки;  $C_2$  — коэффициент подъемной силы (производная  $dC_z/d\theta$  считается известной);  $\rho$  — плотность воздуха.

Исследовать устойчивость малых свободных колебаний пластинки.

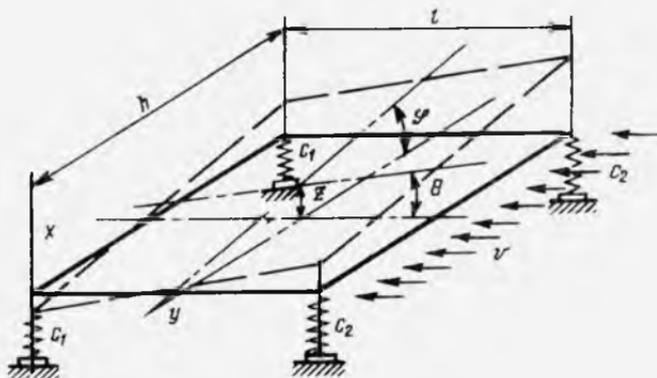


Рис. 195

272. Определить критическую скорость потока воздуха  $v$ , при которой колебания пластинки становятся неустойчивыми (см. задачу 271), считая, что  $dC_z/d\theta=3$ ,  $c_1=0,1$  кН/м,  $c_2=0,05$  кН/см,  $\rho=1,25$  кг·м<sup>3</sup>,  $h=20$  см,  $J_y=ml^2/12$ .

273. Горизонтальный полет самолета (рис. 196) всегда сопровождается дополнительными движениями, вызванными различными возмущениями. Ограничившись возмущенным движением самолета в вертикальной плоскости [учитывая только малое смещение по оси  $y$  и малый угол поворота  $\varphi$  (рис. 196)], т. е. рассматривая самолет как систему с двумя степенями свободы, получить уравнения возмущенного движения и соотно-

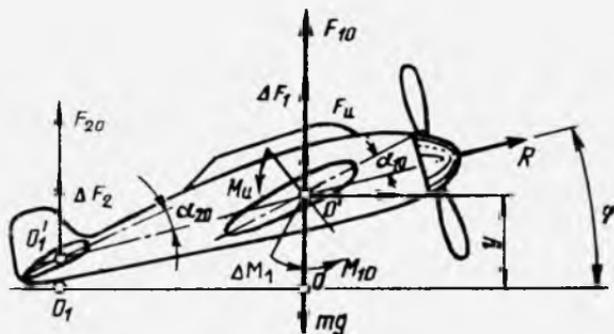


Рис. 196

шения, позволяющие исследовать устойчивость невозмущенного горизонтального установившегося полета.

При выводе уравнений принять, что на хвостовое оперение действуют только аэродинамические силы  $F_{20}$  и  $\Delta F_2$ , вектор скорости  $v$  практически сохраняет свое горизонтальное направление, а вектор тяги  $\bar{R}$  постоянен по модулю и направлен по оси самолета  $OO_1$ .

Указание. При установившемся горизонтальном движении действующие на самолет аэродинамические силы  $F_{10}$ ,  $F_2^0$ ,  $M_{10}$ , сила тяжести  $mg$ , сила тяги  $R$  и сила лобового сопротивления  $X_0$  взаимно уравновешены.

При возмущенном движении появляются дополнительные аэродинамические силы  $\Delta F_1, \Delta F_2$  и  $\Delta M_1$ , которые при малых колебаниях линейно зависят от приращений углов атаки  $\Delta\alpha_1$  и  $\Delta\alpha_2$ , т. е. можно считать

$$\Delta F_1 = C_1 \Delta\alpha_1, \quad \Delta F_2 = C_2 \Delta\alpha_2, \quad \Delta M_1 = C_3 \Delta\alpha_3,$$

где  $C_j$  — постоянные числа ( $j=1 \dots 3$ ).

Для вывода уравнений надо получить выражения для  $\Delta\alpha_j$  в зависимости от  $y$  и  $\varphi$ , характеризующих возмущенное движение самолета.

274. Исследовать устойчивость малых свободных колебаний шкивов передачи относительно установившегося режима ее работы (см. рис. 162, задачу 224), если при колебаниях возникают два возмущающих момента: момент со стороны электродвигателя  $\Delta M_1 = -\beta_1 \dot{\varphi}_1$  и момент сил резания  $\Delta M_2 = -\beta_2 \dot{\varphi}_2 = -10\dot{\varphi}_2$  ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — скорости угловых колебаний шкивов,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — коэффициенты обратной связи).

Определить значения коэффициента  $\beta_1$ , при которых колебания системы устойчивы.

275. Механическая система (рис. 197) состоит из вала 1, свободно вращающегося в подшипниках; маховика 2, жестко

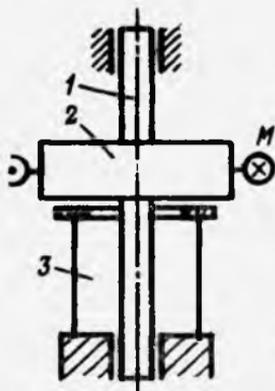


Рис. 197

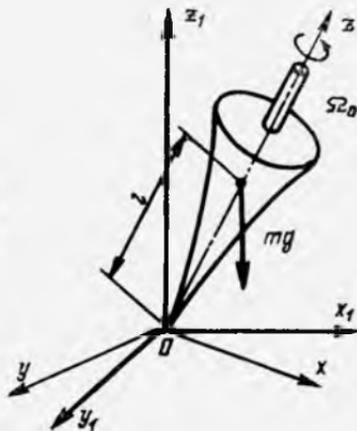


Рис. 198

скрепленного с валом, и упругой муфты 3. На маховик 2 действует внешний крутящий момент  $M = a\dot{\varphi}_1$ , величина которого пропорциональна угловой скорости вала.

Считая, что между маховиком и муфтой действуют силы вязкого сопротивления, пропорциональные относительной угловой скорости с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ , и пренебрегая инерционностью муфты, определить область значений коэффициента  $a$ , при которых движение маховика является устойчивым. Принять, что суммарный момент инерции массы вала и маховика  $J = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , угловая жесткость муфты  $c_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $\alpha = 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

276. Угловая скорость волчка в установившемся режиме относительно оси симметрии равна  $\Omega_0$  (рис. 198). Центр тяжести волчка расположен на расстоянии  $l$  от точки  $O$ ; сила тяжести волчка равна  $mg$ . Определить частоты колебаний оси симметрии (ось  $Oz$ ) волчка относительно вертикального положения. Установить критическую угловую скорость  $\Omega_0$ .

277. Вертикальная ось симметрии гироскопа (рис. 199) может свободно вращаться вокруг точки  $O$  и удерживается пружинами в точке  $O_1$ . Пружины взаимно перпендикулярны и имеют жесткость  $c$ . Определить момент количества движения гироскопа, необходимый для его устойчивого вращения.

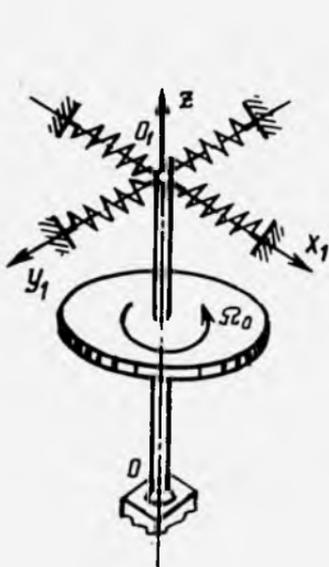


Рис. 199

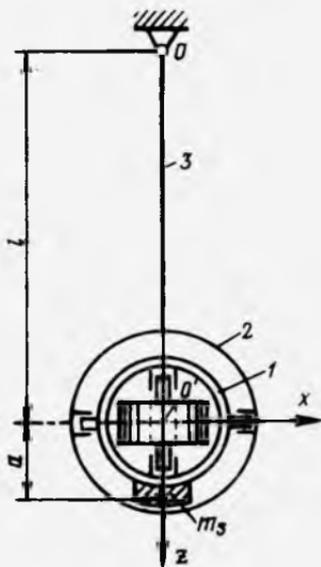


Рис. 200

278. Получить уравнения возмущенного движения оси симметрии гироскопа (см. задачу 277) для случая, когда жесткости пружин различные. Установить, при каком условии ось симметрии гироскопа совершает малые периодические движения. Найти критическую угловую скорость гироскопа  $\Omega_0$ . Принять,

что жесткость пружин в направлении оси  $Ox_1$  равна  $c_1$ , а в направлении оси  $Oy_1$  равна  $c_2$ .

279. Масса математического маятника представляет собой гироскоп в карданном подвесе (рис. 200). Наружное кольцо 2, жестко связанное со стержнем 3, несет подшипники внутреннего кольца, имеющего противовес массой  $m_3$ . Во внутреннем кольце 1 вращается ротор гироскопа. Сила тяжести ротора  $Q_1$ , его моменты инерции массы  $J_{x_2}, J_{y_1}, J_{z_2}$ , сила тяжести внутреннего кольца  $Q_2$ , его моменты инерции массы  $J_{x_2}, J_{y_2}, J_{z_2}$ . Угловая скорость ротора относительно оси  $z$  равна  $\Omega_0$ . Пренебрегая массой стержня 3, определить частоты малых колебаний системы.

280. Устойчивость монорельсовой тележки (рис. 201) достигается с помощью вертикального гироскопа. Ось гироскопа укреплена в точке  $O_1$  так, что она может двигаться только в плоскости симметрии тележки (в плоскости  $x_1Oz_1$ ). Масса тележки  $m = Q/g$ , момент инерции тележки относительно оси  $Ox_1$  равен  $Jx_0$  (оси  $x_1, y_1, z_1$  жестко связаны с тележкой, ось  $z$  направ-

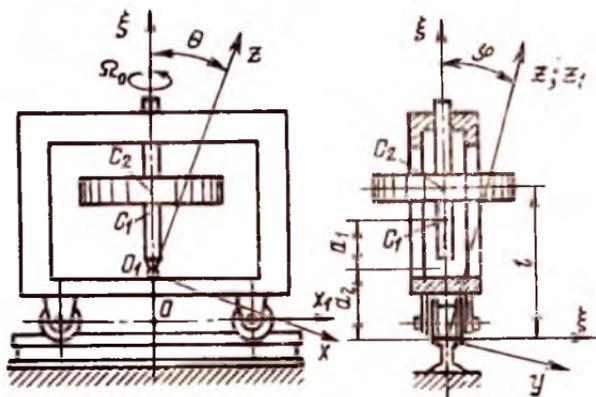


Рис. 201

лена по оси симметрии гироскопа, ось  $y$  совпадает с осью  $y_1$ , ось  $x$  перпендикулярна плоскости  $zy$ ). Моменты инерции гироскопа относительно осей  $x, y, z$  соответственно равны  $J_x, J_y, J_z$  (вследствие симметрии  $J_x = J_y$ ). Сила тяжести гироскопа  $Q$ , центры тяжести тележки и гироскопа находятся соответственно в точках  $C_1$  и  $C_2$ .

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний гироскопа относительно вертикали, считая углы  $\theta$  и  $\phi$  малыми. Получить характеристическое уравнение для определения частот собственных колебаний и соотношение для вычисления критической угловой скорости  $\Omega_0$  гироскопа.

281. Гироскоп в карданном подвесе используется как прибор для измерения угловой скорости (гиротаксметр) (рис. 202). Наружное кольцо гироскопа 1 закреплено на основании и вра-

щается вместе с ним относительно оси  $y_1$ . Измеряемая угловая скорость основания  $\Omega$ , угловая скорость ротора 2 гироскопа  $\Omega_0$ . При вращении наружного кольца гироскопа относительно оси  $y_1$  ротор гироскопа поворачивается относительно оси  $x$  на угол  $\delta$ . Гашение колебаний внутреннего кольца 4 гироскопа осуществляется демпфером вязкого трения 4, имеющим коэффициент пропорциональности  $\alpha$ .

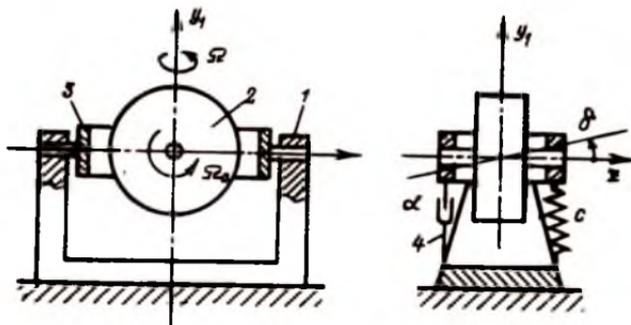


Рис. 202

Составить дифференциальные уравнения движения гироскопа относительно угла  $\delta$ , если суммарные моменты инерции кольца вместе с ротором относительно осей  $x$  и  $y$ , жестко связанных с кольцом, равны  $J_x$  и  $J_y$ ; момент инерции ротора относительно оси симметрии  $z$  равен  $J_0$ . Определить угловую скорость  $\Omega$ , считая, что она очень медленно изменяется во времени, т. е.  $\dot{\Omega} \approx 0$ .

282. Диск радиусом  $r$ , имеющий массу  $m$ , катится без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 203).

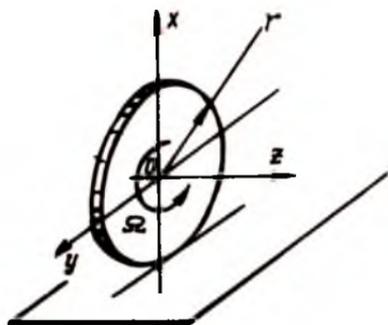


Рис. 203

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска в плоскости  $xOz$  и исследовать их устойчивость в зависимости от скорости движения  $\Omega$ . Толщиной диска при составлении уравнения движения пренебречь.

## § 11. Приближенные методы определения низших частот

283. Воспользовавшись методом Релея, определить низшую частоту колебаний системы (рис. 204). Массы  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 = 2m_1$ ) считать точечными; массой балки пренебречь.

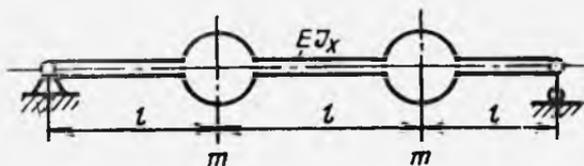


Рис. 204

284. Методом Релея определить низшую частоту поперечных колебаний системы (рис. 205), пренебрегая массой балки.

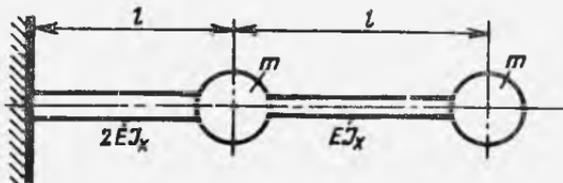


Рис. 205

285. Методом Релея определить низшую частоту колебаний системы (рис. 206). Массой балки пренебречь.

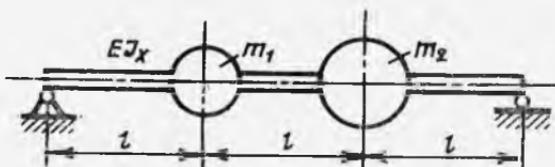


Рис. 206

286. Найти низшую частоту колебаний системы (см. задачу 195) по методу Релея.

287. Определить низшую частоту колебаний системы с учетом массы балки, если масса единицы длины балки равна  $m_0$  (см. рис. 206), причем  $m = 2m_0l$ .

288. Определить низшую частоту колебаний системы (пренебрегая массой балки), если жесткости пружин  $c = EJ_x/2l^3$  (рис. 207).

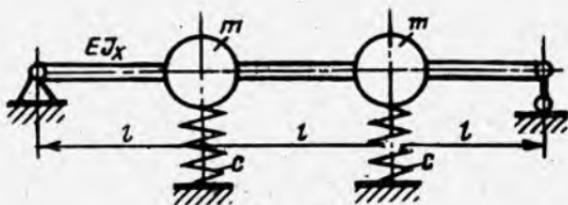


Рис. 207

289. Методом Релея определить низшую частоту продольных колебаний системы (рис. 208), состоящей из трех равных масс  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , соединенных безынерционными стержнями. Площадь поперечного сечения стержней  $F$ , модуль упругости  $E$ .

290. Определить низшую частоту продольных колебаний системы (рис. 209) методом Релея, считая стержни безынерционными.

291. Определить низшую частоту продольных колебаний системы (рис. 210) методом Релея, считая стержни безынерционными.

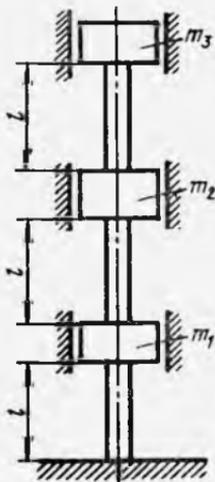


Рис. 208

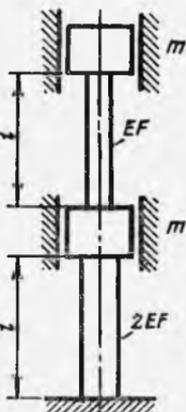


Рис. 209

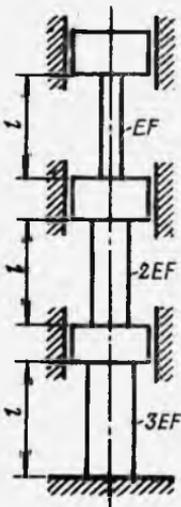


Рис. 210

292. Методом Релея определить низшую частоту крутильных колебаний системы (рис. 211), пренебрегая инерционностью вала.

293. Определить методом Релея низшую частоту крутильных колебаний системы (рис. 212), состоящей из четырех маховых

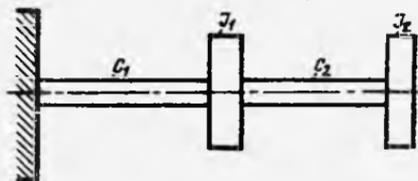


Рис. 211

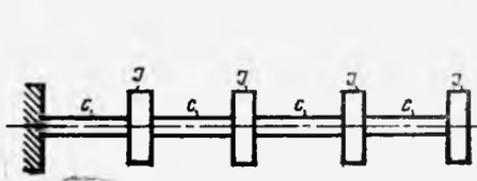


Рис. 212

масс, у каждой из которых момент инерции равен  $J$ , соединенных безынерционными стержнями с крутильной жесткостью  $c$ .

294. Методом Донкерля определить низшую частоту колебаний системы в задачах 283 и 285.

295. Методом Донкерля определить низшую частоту продольных колебаний масс в задаче 288.

296. По методу Донкерля определить низшую частоту колебаний системы в задачах 290 и 291.

## Глава 1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### § 1. Свободные колебания

1.

$$\text{а) } p = \sqrt{3EJ_x(a+b)/ma^2b^2};$$

$$\text{б) } p = \sqrt{12EJ_x/ma^2(4a+3b)};$$

$$\text{в) } p = \sqrt{cl + 3EJ_x/ml^3}.$$

Указание. Дифференциальное уравнение движения в канонической форме для систем с одной степенью свободы имеет вид (по методу сил)

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}),$$

где  $\delta_{11}$  — перемещение массы под действием единичной силы, совпадающей по направлению с перемещением, поэтому частота свободных колебаний  $p = 1/\sqrt{m\delta_{11}}$ .

2.

$$\text{а) } p = \sqrt{EJ_x/ml^3}; \quad \text{б) } p = \sqrt{48EJ_x/7ml^3};$$

$$\text{в) } p = \sqrt{6EJ_x/mh^2(h+b)}; \quad \text{г) } p = \sqrt{12EJ_x/ma^2(4a+3b)}.$$

В качестве примера определения коэффициентов податливости для статически неопределимых систем рассмотрим задачу 2, г. Разорвав связь (считая, что связь между массой  $m$  и опорной поверхностью двусторонняя), приложим к массе  $m$  силу  $N$  (реакция связи). В результате имеем раму, нагруженную силой  $N$  и силой инерции  $J$  (рис. 213). Методом сил получаем два уравнения относительно перемещения массы  $m$  по осям  $y$  и  $z$ :

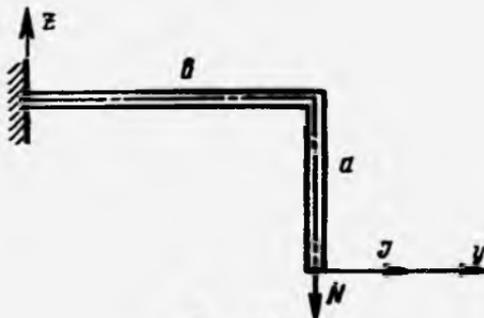


Рис. 213

$$y = \delta_1 J + \delta_{22} N; \quad (1)$$

$$0 = \delta_{21} J + \delta_{22} N; \quad (2)$$

где  $J = -m\ddot{y}$ .

Исключив  $N$ , имеем

$$y = -\delta_{11}^1 m\ddot{y}; \quad \text{где} \quad \delta_{11}^1 = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}/\delta_{22}.$$

Таким образом, частота колебаний

$$p = 1/\sqrt{m\delta_{(11)}^{(1)}}.$$

Изложенный прием определения  $\delta_{11}^{(1)}$  для статически неопределимых задач не требует традиционных вычислений (как правило, довольно трудоемких) для определения податливости системы  $\delta_{11}^{(1)}$  с предварительным раскрытием статической неопределимости и определением перемещения от единичной силы по направлению смещения массы при колебаниях. Если на систему наложено несколько связей (например, система трижды статически неопределима), то столько же можно получить и алгебраических уравнений для определения реакций связей, которые затем исключаются из дифференциального уравнения.

3.

$$a) \quad p = \sqrt{\frac{6\pi EJ_x}{mR^3(3\pi^3 - 16)}}; \quad б) \quad p = \sqrt{\frac{5,55EJ_x}{mR^3}}.$$

4. Аналогично решению задачи 2 дифференциальное уравнение малых крутильных колебаний для всех схем имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J\delta_{11}} \varphi = 0.$$

Следовательно, частоты собственных колебаний для схем  $a-g$  (см. рис. 4) соответственно равны

$$a) \quad p = \sqrt{\frac{GJ_k}{Jl}}; \quad б) \quad p = \sqrt{\frac{2GJ_k}{3Jl}};$$

$$в) \quad p = \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)GJ}{l_1 l_2 J}}; \quad г) \quad p = \sqrt{\frac{EJ_x 4 \cdot 5}{RJ}}.$$

Указание. В вариантах  $г$  и  $д$  системы статически неопределимы, и для получения  $\delta_1$  необходимо сначала раскрыть статическую неопределенность.

5.

$$p = \sqrt{\frac{c}{m_1 + m_2}}.$$

6.

$$p = \sqrt{\frac{5}{9} \frac{c}{m} + \frac{1}{3} \frac{g}{l}}.$$

7.

$$p = \sqrt{\frac{5}{9} \frac{c}{m}}.$$

8. Поворот зубчатого колеса на некоторый малый угол  $\varphi$  вызывает перемещение его центра на величину  $\varphi D/2$ . При этом точка  $A$  (точка крепления пружин к водилу) смещается на величину  $\delta = \varphi l - \varphi D/2$ . Учитывая, что момент инерции массы колеса  $J_1 = m_1 D^2/8$ , а момент инерции массы водила  $J_2 = m_2 l^2/12$ , найдем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{(m_1 + m_2) D^2 \dot{\varphi}}{8} + \left( \frac{m_1 D^2}{8} + \frac{m l^2}{3} \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{m_2 l D \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Изменение потенциальной энергии системы выразили через деформацию пружин и угол подъема водила:

$$\Pi = 2 \frac{c \delta^2}{2} + m_2 g \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) = \left[ c \left( l - \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{m_2 g l}{4} \right] \varphi^2.$$

Используя уравнение Лагранжа второго рода, получаем

$$\ddot{\varphi} + 12 \frac{m_2 g l + 4c (l - D/2)^2}{(9m_1 + 6m_2) D^2 + 8m_2 l^2 - 12m_2 l D} \varphi = 0,$$

откуда частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{\frac{12m_2 g l - 48c (l - D/2)^2}{(9m_1 + 6m_2) D^2 + 8m_2 l^2 - 12m_2 l D}}.$$

9. В процессе малых свободных колебаний цилиндра кинетическая энергия складывается из кинетической энергии вращательного движения и кинетической энергии поступательного перемещения:

$$T = (1/2) J \dot{\varphi}^2 + (1/2) m (r \dot{\varphi})^2,$$

где  $J = Q r^2 / 2g$  — момент инерции массы цилиндра.

С учетом последнего

$$T = (3/4) (Q/g) r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Изменение потенциальной энергии системы вызвано растяжением (сжатием) пружин и подъемом цилиндра при его вращении по вогнутой поверхности. При повороте цилиндра на угол  $\varphi$  верхняя его точка  $A$  смещается на величину  $\delta = 2r \varphi$ , а на потенциальная энергия деформации пружин

$$\Pi_1 = 2c \delta^2 / 2 = 4c r^2 \varphi^2.$$

При отклонении цилиндра от положения равновесия на угол  $\varphi$  угловая координата  $\psi$  центра его тяжести равна

$$\psi = \varphi r / (R - r).$$

В таком случае изменение потенциальной энергии положения цилиндра

$$\Pi_2 = Q(R-r)(1 - \cos \Psi) = \frac{Q}{2} \frac{r\dot{\Psi}^2}{(R-r)}.$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа, получаем уравнение малых свободных колебаний

$$\ddot{\Phi} + \left( \frac{2}{3} \frac{q}{(R-r)} + \frac{16}{3} \frac{cq}{Q} \right) \Phi = 0,$$

откуда собственная частота колебаний

$$p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{q}{(R-r)} + \frac{16}{3} \frac{cq}{Q}}.$$

Из полученной формулы следует, что при  $R \rightarrow r$ ,  $p \rightarrow \infty$ , т. е. частота колебаний возрастает с уменьшением радиуса кривизны вогнутой поверхности.

10.

$$p = \sqrt{c/(2m) - g/(2l)}.$$

11.

$$p = \sqrt{c/Jm} = 224 \text{ с}^{-1}.$$

12. Для решения задачи удобнее всего воспользоваться уравнением Лагранжа второго рода.

В процессе колебаний при отклонении стержня  $AB$  на некоторый угол  $\varphi$  от положения равновесия диск имеет кинетическую энергию

$$T = m\dot{v}^2/2 + Jm\dot{\varphi}^2; \quad J_m = \frac{mR^2}{2}; \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угол закручивания стержня.

Линейная скорость перемещения диска  $v$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}$  связаны со скоростью отклонения стержня  $\dot{\varphi}$  зависимостями

$$v = l\dot{\varphi}; \quad \dot{\psi} = (l/R)\dot{\varphi}. \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = c\varphi^2/2 + mgy,$$

где  $y$  — изменение вертикальной координаты центра тяжести диска.

Очевидно, что

$$y = l(1 - \cos \varphi) \sin \alpha \approx (l\varphi^2 \sin \alpha)/2. \quad (3)$$

Подставив эти соотношения в уравнение Лагранжа второго рода, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{c(l/R)^2 + mgl \sin \alpha}{(3/2) ml^2} \varphi = 0,$$

откуда собственная частота колебаний

$$p = \sqrt{\frac{c(l/R)^2 + mgl \sin \alpha}{(3/2) ml^2}}.$$

Из последнего соотношения следует, что частота  $p$  обращается в нуль (система неустойчива) при

$$\sin \alpha = -cl / (mgR^2).$$

13. При перемещении поплавка в вертикальном направлении (например, вниз) на величину  $\Delta x$  возникает дополнительная выталкивающая сила, равная  $(\pi d^2/4)\gamma\Delta x$ . Дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$[m_1\Delta\ddot{x} + (\pi d^2/4)\gamma\Delta x]l_1 + m_2\Delta\ddot{x}(l_3^2/l_1) + c\Delta x(l_2^2/l_1) = 0,$$

откуда частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{(\pi d^2\gamma/4 + cl_2^2/l_1^2)(m_1 + m_2l_3^2/l_1^2)}.$$

14. Составим дифференциальное уравнение движения, используя уравнение Лагранжа второго рода.

Кинетическая энергия диска

$$T = mv^2/2 + J\varphi_1^2 \cdot 2,$$

где  $v$  — скорость движения диска по направляющей;  $\varphi_1$  — угловая скорость диска.

Потенциальная энергия

$$\Pi = mg(R-r)(1 - \cos\varphi).$$

Углы  $\varphi$  и  $\varphi_1$  (рис. 214, а), а также скорость  $v$  связаны между собой соотношениями

$$\varphi_1 = \frac{R-r}{r}\dot{\varphi}; \quad v = (R-r)\dot{\varphi}. \quad (1)$$

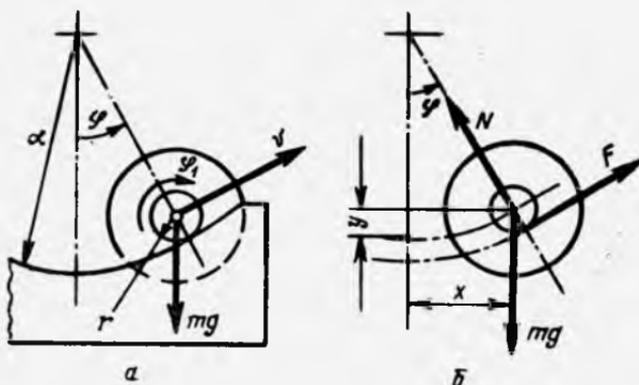


Рис. 214

С учетом последнего кинетическая энергия диска

$$T = [(R-r)/r^2](mr^2 + J) (\dot{\varphi}^2/2).$$

Подставим в уравнение Лагранжа выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$(mr^2 + J)\dot{\varphi} + mg[r^2/(R-r)]\sin\varphi = 0. \quad (2)$$

При рассмотрении малых колебаний ( $\sin\varphi \approx \varphi$ ) частота колебаний  $p = \sqrt{mgr^2 / [(R-r)(mr^2 + J)]}$ .

Получим теперь дифференциальное уравнение движения, используя метод Даламбера. Из рис. 214, б можно записать

$$m\ddot{x} = -N \cos \varphi + F \cos \varphi; \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = N \cos \varphi + F \sin \varphi - mg; \quad (4)$$

$$J\ddot{\varphi} = -Fr, \quad (5)$$

где  $N$  — сила нормального давления;  $F$  — сила трения между ступицей и направляющей, препятствующая проскальзыванию диска.

Умножив уравнение (3) на  $\cos \varphi$ , а уравнение (4) на  $\sin \varphi$  и сложив их, получим

$$m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) = F - mg\sin\varphi. \quad (6)$$

Используя уравнения (1) и (5), запишем выражение для силы трения

$$F = -J(R-r)\ddot{\varphi}/r^2. \quad (7)$$

Выразим координаты центра тяжести диска через угол  $\varphi$ :

$$x = (R-r)\sin\varphi; \quad y = (R-r)(1-\cos\varphi). \quad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в уравнение (6), получим уравнение (2), выведенное выше по методу Лагранжа.

15. Решение этой задачи аналогично решению задачи 14. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний имеет вид

$$(mR^2 + 2J)\ddot{\varphi} + cR^2\varphi = 0,$$

где  $\varphi$  — угол поворота колеса.

$$16. \quad \ddot{\varphi} + \frac{3(R-a)g}{l^2 + 4a^2}\varphi = 0;$$

$$p = \sqrt{\frac{3(R-a)g}{l^2 + 4a^2}}; \quad \varphi_{0\max} = \mu(l^2 + 4a^2)/(l^2 + a^2 + 3Ra).$$

$$17. \quad p = \sqrt{\frac{mgR^2}{(J + R^2m)(R-r)}}.$$

18. Рассмотрим произвольный момент движения груза, когда точка контакта смещается в положение  $B$  (рис. 215, а). Полное контактное усилие разложим на две составляющие  $N_x$  и  $N_y$ . Тогда дифференциальные уравнения движения можно представить в виде

$$(Q/g)\Delta\ddot{x} = N_x; \quad (Q/g)\Delta y = N_y - Q. \quad (1)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — смещения центра тяжести груза при колебаниях.

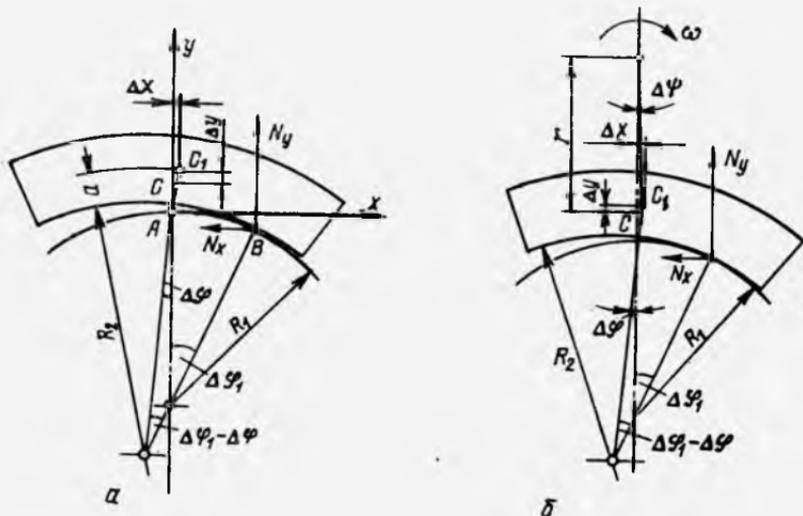


Рис. 215

Используя принцип Даламбера, рассмотрим сумму моментов всех сил относительно центра тяжести груза  $C_1$ :

$$-J_C \Delta\varphi = N_y (AB \cos\varphi_1 - \Delta x) \cos\Delta\varphi - N_x (a + \Delta y). \quad (2)$$

Учитывая, что  $AB = R_1 \Delta\varphi_1 = R_2 (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi)$ , найдем

$$\Delta\varphi_1 = R_2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta R}; \quad AB = R_1 R_2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta R}; \quad \Delta x = a \Delta\varphi.$$

Так как  $\Delta y = AB \Delta\varphi = R_1 R_2 \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta R}$  — величина высшего порядка малости, то, подставляя (1) в (2), получаем дифференциальное уравнение движения

$$(J_C + a^2 m) \Delta\varphi + mg (R_1 R_2 / \Delta R - a) \Delta\varphi = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим частоту собственных колебаний

$$p = \sqrt{[mg / (J_C + a^2 m)] (R_1 R_2 / \Delta R - a)}.$$

В случае вращения маховика можно пренебречь ускорением силы тяжести и дифференциальные уравнения свободных колебаний груза представить в виде (рис. 215, б)

$$m \Delta \ddot{x} = -N_x + m \omega^2 r \Delta \Psi \quad (\Delta \Psi = (a/r) \Delta\varphi);$$

$$J_C \Delta\varphi = N_x a - m \omega^2 r (R_1 \Delta\varphi_1 - \Delta x),$$

где

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi R_2 / \Delta R \quad \text{и} \quad \Delta x = a \Delta\varphi.$$

Исключая из этих уравнений  $\Delta \Psi$ ,  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta x$  и  $N_x$ , получаем

$$(J_c + a^2 m) \Delta \varphi + m \omega^2 r [(R_1 R_2 - a \Delta R - a_2 \Delta R / r) \Delta R] \Delta \varphi = 0$$

Отсюда находим частоту собственных колебаний груза:

$$p = \sqrt{[m \omega^2 r / (J_c + a^2 m)] (R_1 R_2 / \Delta R - a - a^2 / r)}.$$

19.

$$p = \omega \sqrt{R / l}.$$

20. На рис. 216, а показано положение стойки в произвольный момент времени. Взяв сумму моментов относительно шарнира, получим

$$-Pl - mgy + P_1 a = 0. \quad (1)$$

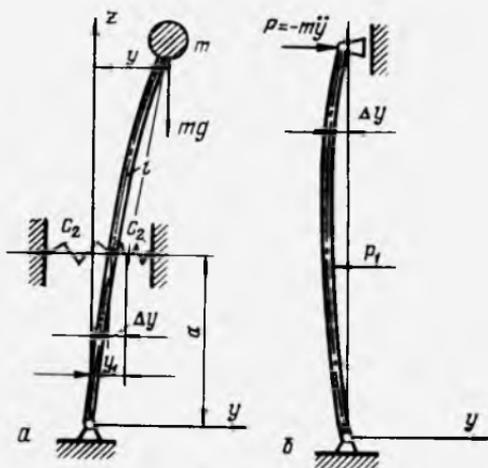


Рис. 216

Так как  $P_1 = 2c_2(y_1 - \Delta y)$ , а  $y_1 = ya/l$ , то после преобразований получим дифференциальное уравнение малых свободных колебаний маятника:

$$myl + 2c_2(ya/l - \Delta y)a - mgy = 0. \quad (2)$$

Прогиб  $\Delta y$  (рис. 216, б) равен

$$\Delta y - P(l-a)^2 a / (3EJ_x) = [a(l-a)^2 / (3EJ_x)] (m\ddot{y})$$

(при определении величины  $\Delta y$  силой тяжести пренебрегаем, поэтому  $P_1 = Pl/a$ ).

После преобразований из уравнения (2) получаем

$$\ddot{y} = \frac{2c_2 a^2 / l - mg}{m \left[ l + 2c_2 \frac{a^2 (l-a)^2}{3EJ_x} \right]} y = 0.$$

Частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{\frac{2c_2 a^2 / l - mg}{m \left[ l + 2c_2 \frac{a^2 (l-a)^2}{3EJ_x} \right]}} y = 0.$$

При  $EJ_x = \infty$  и  $a = l/2$  получаем

$$p = \sqrt{c/(2m) - g/2l}.$$

21.

$$p = \omega \sqrt{m\tau l / J_B}.$$

22. При малых колебаниях точечной массы  $m$  на нее действуют силы (во вращающейся системе координат), показанные на рис. 217, а: сила инерции  $J = -m\ddot{y}_0$ , центробежная сила инерции  $F = m\omega^2(R+l)$ , сила инерции Кориолиса (из-за относительной скорости движения)  $F_K = 2m\omega y_0$  и силы  $Q$  и  $N$ , дейст-

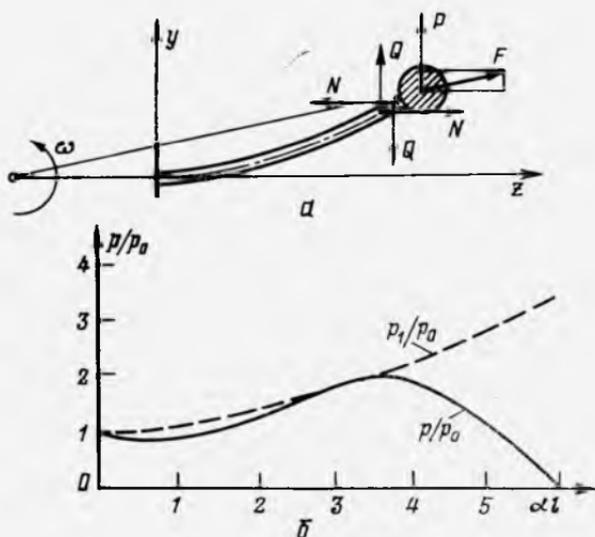


Рис. 217

вующие со стороны упругого стержня. При малых колебаниях можно считать, что масса  $m$  смещается только по оси  $y$ , поэтому, воспользовавшись принципом Даламбера, получаем следующие два уравнения (проектируя силу  $F$  на оси  $y$  и  $z$  и считая угол  $\beta$  малым):

$$m\ddot{y}_0 + Q - m\omega^2 y_0 = 0, \quad (1)$$

$$2m\omega \dot{y}_0 + m\omega^2(R+l) = N.$$

При малых колебаниях влиянием силы Кориолиса на осевое усилие можно пренебречь, т. е. можно положить

$$N = m\omega^2(R+l). \quad (2)$$

Рассматривая изгиб стержня (рис. 217, б), получаем уравнение

$$EJ_x y'' = -(y_0 - y)N + Q(l - z),$$

ИЛИ

$$y'' = \alpha^2 y = -\alpha^2 y_0 + \frac{(l-z)}{EJ_x} Q \left( \alpha^2 = \frac{N}{EJ_x} = \frac{m\omega^2(R+l)}{EJ_x} \right). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$y = C_1 \operatorname{ch} \alpha z + C_2 \operatorname{sh} \alpha z + y_0 - (Q/N)(l-z).$$

Из краевых условий:  $z=0, y=0, y'=0$  находим  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 = Ql/N - y_0; \quad C_2 = -Q/(\alpha N). \quad (5)$$

Так как при  $z=l, y=y_0$ , то из (4) с учетом соотношений (5) получаем

$$Q[(l/N) \operatorname{ch} \alpha l - (1/\alpha N) \operatorname{sh} \alpha l] - y_0 \operatorname{ch} \alpha = 0. \quad (6)$$

Воспользовавшись уравнением (1), исключим из (6)  $Q$ . После чего получим уравнение

$$\ddot{y}_0 + \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha l \alpha^3 EJ_x}{(\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l) m} - \omega^2 \right] y_0 = 0. \quad (7)$$

Можно показать, что при  $\omega=0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) после раскрытия неопределенности скоба в уравнении (7) равна  $3EJ_x/ml^3$ , а это соответствует частоте собственных колебаний точечной массы. Частота колебаний стержня равна

$$p = p_0 \sqrt{\frac{(\alpha l)^3 \operatorname{ch} \alpha l}{3(\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)} - \frac{(\alpha l)^2}{3(1+R/l)}} \quad (p_0 = 3EJ_x/(ml^2)) \quad (8)$$

В выражение (8) входит произведение  $\alpha l$ , которое связано с угловой скоростью  $\omega$  и частотой собственных колебаний  $p_0$  массы соотношением

$$\alpha l = \sqrt{3(1+R/l)} (\omega/p_0).$$

23. Если к массе  $m$  приложить силу (статически), направленную по оси  $y$  (рис. 218, а), то на стержень будут действовать силы  $Q$  и  $N$ , равные

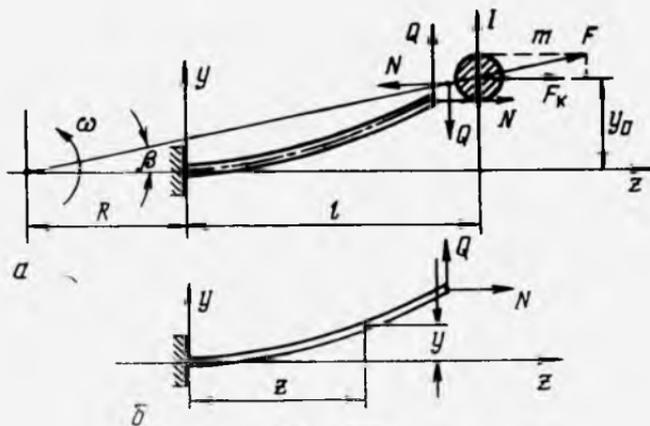


Рис. 218

$$Q = P + m\omega^2 y_0; \quad (1)$$

$$N = M\omega^2 (R + l). \quad (2)$$

Понимая под жесткостью стержня отношение  $c = P/y_0$ , найдем  $y_0$ , воспользовавшись приближенной формулой для прогибов при продольно-поперечном изгибе:

$$y_0 = y / (1 + N/P_3), \quad (3)$$

где

$$y = Ql^3 / (3EJ_x).$$

Подставив в выражение (3) соотношения (1), (2), после преобразований получим

$$y_0 \left[ 1 - \frac{m\omega^2 l^3}{3EJ_x (1 + N/P_3)} \right] \frac{3EJ_x}{l^3} (1 + N/P_3) = P.$$

Следовательно, жесткость системы (с учетом центробежных сил инерции) равна

$$c = c_0 [1 + (4/\pi^2) (\alpha l)^2] - m\omega^2,$$

где

$$c_0 = 3EJ_x/l^3; \quad \alpha^2 = N/(EJ_x) = m\omega^2 (R + l)/EJ_x.$$

Зная жесткость, находим приближенное выражение для частоты собственных колебаний массы  $m$ :

$$p_1 = p_0 \sqrt{1 + (4/\pi^2) (\alpha l)^2 - \frac{(\alpha l)^2}{3(1 + R/l)}}. \quad (4)$$

Числовые значения отношений  $p/p_0$  и  $p_1/p_0$  при  $R = l$  приведены ниже:

$\alpha/l$ . . . . .	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$p/p_0$ . . . . .	0,701	1,111	1,382	1,732	2,108	1,443	1,091	0
$p_1/p_0$ . . . . .	1,031	1,112	1,391	1,761	2,176	2,614	3,066	3,527

Графики изменения отношений  $p/p_0$  для точного решения [формула (8) в решении задачи 22] и  $p_1/p_0$  [формула (4) в решении задачи 23] приведены на рис. 218, б. Из графиков следует, что только в интервале значений  $\alpha l$  от 0 до 4  $p$  и  $p_1$  мало различаются между собой (максимум на 4%). При  $\alpha l > 4$  приближенной формулой (4) при определении частоты пользоваться нельзя.

24. На рис. 219, а показано положение массы  $m$  в состоянии равновесия с учетом сил инерции (масса сместилась на  $y_{10}$ ) и при колебаниях, когда масса  $m$  имеет еще дополнительное сме-

шение  $y_{2k}$ , зависящее от времени. На рис. 219, б показана масса с действующими на нее силами при колебаниях, где  $F_{2y}$  и  $F_{2z}$  — проекции силы  $F_2$  (см. рис. 219, а),  $J$  — сила инерции,  $Q$  и  $N$  — силы, действующие на массу со стороны упругого стержня. Кроме приведенных сил на массу будет действовать еще сила Кориолиса (см. решение задачи 22), которой при малых колебаниях пренебрегаем.

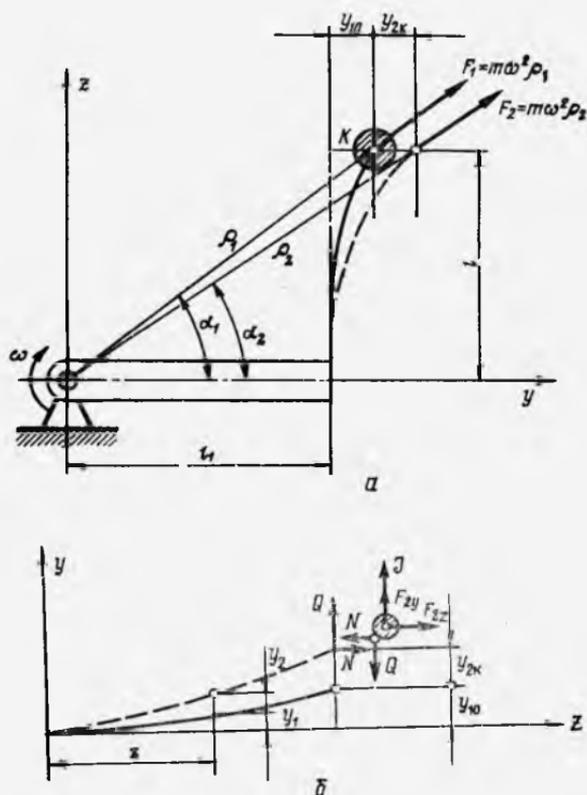


Рис. 219

Уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$J + E_{2y} - Q = 0$$

или

$$m(\ddot{y}_{2k} - m\omega^2(l_1 + y_{10} + y_{2k})) + Q = 0. \quad (1)$$

Силы  $Q$  и  $N$  можно представить в виде

$$Q = Q_0 + \Delta Q; \quad NF_{2z} = m\omega^2 l, \quad (2)$$

где  $Q_0 = m\omega^2(l_1 + y_{10})$  — сила, действующая на массу в отклоненном состоянии равновесия;  $\Delta Q$  — дополнительная сила, вызванная колебаниями.

Сила  $N$  при малых колебаниях (без учета силы Кориолиса) остается неизменной как в статике, так и при колебаниях.

С учетом соотношения (2) уравнение (1) принимает вид

$$m\ddot{y}_{2k} - m\omega^2 y_{2k} + \Delta Q = 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$EJ_x y'' = -N(y_{10} + y_{2k} - y) + (l - z). \quad (4)$$

Так как  $y = y_1 + y_2$  (см. рис. 219, б), то, исключив из уравнения (4) слагаемые, характеризующие состояние равновесия, получим

$$y_2' - \alpha^2 y_2 = -\alpha^2 y_{2k} + \frac{\Delta Q}{EJ_x} (l - z). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$y_2 = C_1 \operatorname{ch} \alpha z + C_2 \operatorname{sh} \alpha z + y_{2k} - (\Delta Q/N) (l - z). \quad (6)$$

При  $Z=0$  должны выполняться условия  $y_2 = 0$ ,  $y_2' = 0$ , что возможно при

$$C_1 = (\Delta Q/N) (l - y_{2k}); \quad C_2 = -\Delta Q/(\alpha N). \quad (7)$$

Из выражения (6) при  $z=l$  получаем (с учетом соотношений (7)) зависимость

$$\Delta Q = y_{2k} \frac{RJ_x (\alpha l)^3 \operatorname{ch} \alpha l}{l^3 (\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)}.$$

Окончательно уравнение малых колебаний массы  $m$  записываем в виде

$$\ddot{y}_{2k} + \left[ \frac{EJ_x (\alpha l)^3 \operatorname{ch} \alpha l}{ml^3 (\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)} - \omega^2 \right] y_{2k} = 0.$$

Частота колебаний массы  $m$  равна

$$p = p_0 \sqrt{\frac{(\alpha l)^3 \operatorname{ch} \alpha l}{3 (\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)}} \left( \frac{\omega}{\bar{p}_0} \right)^2 \left( p_0^2 = \frac{3EJ_x}{ml} \right).$$

25. Уравнение малых колебаний массы  $m$  имеет вид (рис. 220) -

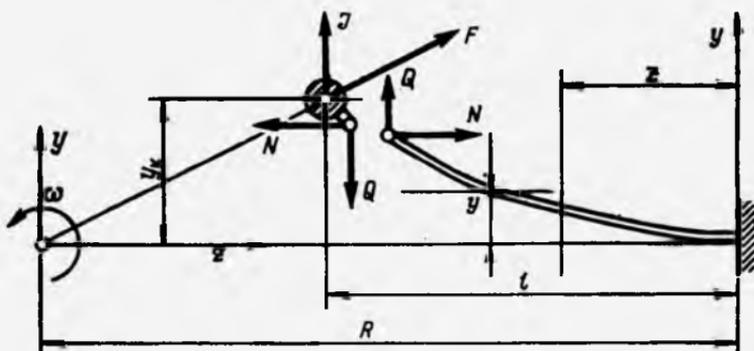


Рис. 220

$$m y_{\kappa} - m \omega^2 y_{\kappa} + Q = 0. \quad (1)$$

Запишем уравнение изогнутой оси стержня:

$$E J_x y'' = N (y_{\kappa} - y) + Q (l - z),$$

или

$$y'' - \alpha^2 y = \alpha^2 y_{\kappa} - (Q/EJ_x) (l - z). \quad (2)$$

После решения уравнения (2) имеем

$$y = C_1 \cos \alpha Z + C_2 \sin \alpha Z + y_{\kappa} + (Q/N) (l - z). \quad (3)$$

Так как при  $z=0$   $y=y'=0$ , то для постоянных  $C_1$  и  $C_2$  получаем

$$C_1 = -(y_{\kappa} + Ql/N); \quad C_2 = Q/(\alpha N).$$

При условии  $z=l$  имеем  $y=y_{\kappa}$  и из уравнения (3) получаем зависимость

$$Q = [E J_x \alpha^3 \cos \alpha l / (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)] y_{\kappa}.$$

Исключив из (1)  $Q$ , получим уравнение малых колебаний массы

$$\ddot{y}_{\kappa} + p_0^2 \{ (\alpha l)^3 \cos \alpha l / [3 (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)] - (\omega/p_0)^2 \} y_{\kappa} = 0.$$

Частота колебаний равна

$$p = p_0 \sqrt{(\alpha l)^3 \cos \alpha l / [3 (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)] - (\omega/p_0)^2}.$$

26. В этом случае на груз, отклоненный от положения равновесия на величину  $y_0$ , действует кроме силы инерции  $m y_0$  и силы упругости  $c y_0$  еще центробежная сила, равная  $m \omega^2 y_0$ , т. е. дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m \ddot{y}_0 + (c - m \omega^2) y_0 = 0.$$

Таким образом, частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{c/m - \omega^2},$$

при  $c/m - \omega^2 p = 0$ , т. е. движение становится неустойчивым  
27.

$$p = \sqrt{2T_0/(ml)}.$$

28. Рассмотрим отклоненное от положения равновесия состояние массы  $m$  (рис. 221, а). В соответствии с принципом Даламбера

$$m \ddot{y} = -T_0 y/x_0 - T_0 y/(l - x_0)$$

или

$$\ddot{y} + T_0 y l / [m x_0 (l - x_0)] = 0.$$

Отсюда частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{T_0 l / [m x_0 (l - x_0)]}.$$

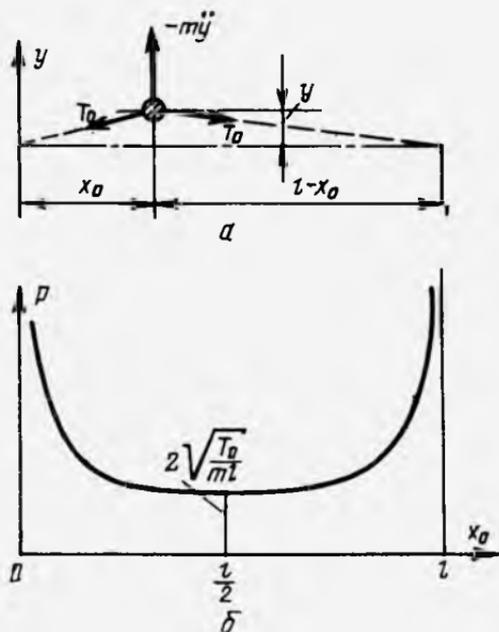


Рис. 221

График этой зависимости приведен на рис. 221, б.

29. В процессе вертикальных колебаний на груз действуют сила инерции  $m\ddot{v}$ , сила тяжести  $mg$  и восстанавливающая сила  $N = \sigma F$ . Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{v} + \sigma F = mg, \quad (1)$$

где

$$v = R\omega + \Delta x.$$

Полное напряжение  $\sigma$  в тросе можно рассматривать как сумму статического напряжения и напряжения, вызванного удлинением троса  $\Delta x$  при колебаниях груза:

$$\sigma F = mg + EF\Delta x/x, \quad (2)$$

где

$$x = R\omega t = vt$$

С учетом (2) представим уравнение (1) в виде

$$m\Delta\ddot{x} + \Delta x EF/(vt) = 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) является уравнением Бесселя, общий интеграл которого можно представить в виде

$$\Delta x = C_1(\tau_1) I_1(\tau) + C_2 \tau Y_1(\tau), \quad (4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования;  $\tau = 2\sqrt{EEt/mv}$  — безразмерная переменная;  $I_1$  и  $Y_1$  — функция Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно.

Вычислим скорость движения массы  $m$ :

$$\Delta \dot{x} = \frac{d\Delta x}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \left\{ C_1 \frac{d}{d\tau} [\tau I_1(\tau)] = C_2 \frac{d}{d\tau} [\tau Y_1(\tau)] \right\} \frac{2EF}{mv\tau}. \quad (5)$$

Используя известные соотношения между функциями Бесселя нулевого и первого порядка, получим

$$\tau I_0(\tau) = \frac{d}{d\tau} [\tau I_1(\tau)]; \quad \tau Y_0(\tau) = \frac{d}{d\tau} [\tau Y_1(\tau)].$$

Представим уравнение (5) в виде

$$\Delta \dot{X} = [C_1 I_0(\tau) + C_2 Y_0(\tau)] [2EF/mv]. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования найдем из граничных условий задачи (при  $t = t_0$ ;  $\Delta x = 0$ ;  $\Delta x = \Delta x_0$ ):

$$C_1 = -AY_1(\tau_0); \quad C_2 = AI_1(\tau_0);$$

$$A = \frac{\Delta x_0 4t_0 / \tau_0^2}{I_1(\tau_0) Y_0(\tau_0) - I_0(\tau_0) Y_1(\tau_0)}.$$

Окончательное решение задачи получим в виде

$$\Delta x = A\tau [I_1(\tau_0) Y_1(\tau) - Y_1(\tau_0) I_1(\tau)]. \quad (7)$$

Найдем последовательные моменты времени, в которые движущаяся масса проходит через положение равновесия, т. е. моменты времени, в которых  $\Delta x = 0$ . Из (7) следует, что эти промежутки времени определяются соотношением

$$I_1(\tau) / Y_1(\tau) = I_1(\tau_0) / Y_1(\tau_0) = \text{const}. \quad (8)$$

В соответствии с условиями задачи

$$\tau_0 = 2 \sqrt{EFt_0 / mv} = 2 \sqrt{10^{10} \cdot 10^{-5} / (100 \cdot 1)} = 63,2.$$

Из решения уравнения (2) получаем значения моментов времени  $\tau_n$ , в которых удлинение троса равно статическому.

Рассмотрим частный случай начальных условий. Будем считать, что  $t_0 = 0$ . В таком случае  $I_0(0) = 1$ ,  $Y_0(0) = \infty$ . В связи с ограниченностью скорости из уравнения (6) следует, что  $C_2 = 0$ , а  $C_1 = \Delta x mv / (2EF)$  и решение принимает вид

$$\Delta x = \tau I_1(\tau) \Delta x_0 mv / (2EF).$$

Отсюда следует, что  $\Delta x$  равно нулю при  $I_1(\tau_n) = 0$ . Для нахождения корней  $\tau_n$  воспользуемся справочником [2] ( $\tau_1 = 3,83$ ;  $\tau_2 = 7,01$ ;  $\tau_3 = 10,17$  и т. д.).

Моменты времени  $t_n$ , в которые  $\Delta x$  равно нулю, равны

$$t_n = \tau_n^2 mv / (4EF).$$

**30.** Для составления дифференциального уравнения движения груза применим уравнение Лагранжа второго рода. Положение тела в любой момент времени определяется двумя координатами: углом отклонения от положения статического равновесия  $\varphi$  и длиной размотанной части троса  $l$ . Поскольку  $l = \omega R t$  — известная функция времени, в качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$ .

Кинетическая энергия движущегося груза в декартовых координатах выражается в виде

$$T = 0,5 m (x^2 + y^2),$$

где

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi.$$

С учетом этого кинетическая энергия груза равна

$$T = 0,5 m [(l \sin \varphi + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (l \cos \varphi - l \dot{\varphi} \sin \varphi)^2] = 0,5 m [l^2 + l^2 \dot{\varphi}^2] \quad (1)$$

Потенциальная энергия груза в отклоненном положении

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Подставляя уравнения (1) и (2) в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0,$$

получим дифференциальное уравнение движения в виде

$$\ddot{\varphi} + (2l/l) \dot{\varphi} + (g/l) \sin \varphi = 0.$$

Полагая отклонения малыми ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) и учитывая зависимость длины размотанной части троса от времени ( $l = \omega R t$ ), получим дифференциальное уравнение малых свободных колебаний

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}/t + g\varphi/(\omega R t) = 0. \quad (3)$$

В случае подъема груза свободная длина троса в любой момент времени  $t$  (полагая  $l_0 = \omega R t_0$ ) равна

$$l = l_0 - \omega R t = \omega R (t_0 - t) = \omega R t_1, \quad (t_1 = t_0 - t),$$

и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\varphi}_{t_1} - 2\dot{\varphi}_{t_1}/t_1 + g\varphi/(\omega R t_1) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) можно представить в виде

$$\varphi = (C_1/\tau) I_1(\tau) + (C_2/\tau) Y_1(\tau), \quad (5)$$

где  $I_1(\tau)$ ,  $Y_2(\tau)$  — функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно;  $\tau = 2\sqrt{gt_1/(\omega R)}$ .

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий задачи (при  $t = t_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ). Дифференцируя уравнение (5) по времени  $t$  с учетом известных соотношений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{\tau} I_1(\tau) \right] &= \frac{1}{\tau} I_2(\tau); \\ \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{\tau} Y_1(\tau) \right] &= -\frac{1}{\tau} Y_2(\tau) \end{aligned}$$

(где  $I_2(\tau)$ ,  $Y_2(\tau)$  — функции Бесселя второго порядка первого и второго рода соответственно), получим

$$\varphi = -(C_1 I_2(\tau) / \tau + C_2 Y_2(\tau) / \tau).$$

Из начальных условий находим

$$C_1 = \varphi_0 \tau_0 Y_2(\tau_0) / [I_1(\tau_0) Y_2(\tau_0) - I_2(\tau_0) Y_1(\tau_0)];$$

$$C_2 = -\varphi_0 \tau_0 I_2(\tau_0) / [I_1(\tau_0) Y_2(\tau_0) - I_2(\tau_0) Y_1(\tau_0)].$$

Подставив полученные выражения для постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение движения (5), получим

$$\Phi = \varphi_0 \frac{\tau_0}{\tau} \frac{I_1(\tau) Y_2(\tau_0) - Y_1(\tau) I_2(\tau_0)}{I_1(\tau_0) Y_2(\tau_0) - I_2(\tau_0) Y_1(\tau_0)}.$$

Решение уравнения (4) также можно представить в функциях Бесселя:

$$\varphi = \tau^3 [C_1 I_3(\tau) + C_2 Y_3(\tau)],$$

где  $I_3(\tau)$  и  $Y_3(\tau)$  — функции Бесселя третьего порядка первого и второго рода соответственно.

Постоянные интегрирования определим из начальных условий задачи, подобно тому, как это выполнено в примере 29.

Окончательно получаем

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\tau^3}{\tau_0^2} \frac{I_3(\tau) Y_2(\tau_0) - Y_3(\tau) I_2(\tau_0)}{I_3(\tau_0) Y_2(\tau_0) - Y_3(\tau_0) I_2(\tau_0)}.$$

Случай опускания груза рассмотреть самостоятельно.

**31.** Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы имеет вид

$$m\ddot{y} + cy = 0, \quad (1)$$

где  $y$  — вертикальное перемещение груза;  $c$  — жесткость системы.

Для определения жесткости системы приложим в точке нахождения массы  $m$  к балке единичную силу  $P$ . Тогда жесткость  $c = 1/y_1$  ( $y_1$  — прогиб от единичной силы).

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании имеет вид

$$EJ_x y^{IV} + ky = 0,$$

или

$$y^{IV} + 4\beta^4 y = 0, \quad (2)$$

где

$$4\beta^4 = k / (EJ_x).$$

Представим решение уравнения (2) в виде

$$y = y(0)v_1 + y'(0)v_2 + y''(0)v_3 + y'''(0)v_4, \quad (3)$$

где  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , ... — значения прогиба и его производных в начале координат (при  $x=0$ );  $v_i(x)$  — функции Крылова:

$$v_1 = \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x; \quad v_2 = \frac{1}{2\beta} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x);$$

$$v_3 = \frac{1}{2\beta^2} \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x;$$

$$v_4 = \frac{1}{4\beta^3} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x).$$

Полагая, что начало координат находится посередине балки (в точке закрепления массы), запишем граничные условия для определения  $y(0)$  и  $y'(0)$  и т. д.:

при  $x=0$   $y'=0$ ,  $y''' = -1/2EJ_x$ ,

при  $x=l/2$   $y=0$ ,  $y''=0$

Учитывая, что  $v_1' = -4\beta^4 v_4$ ,  $v_2^1 = v_1$ ,  $v_3^1 = u_2$ ;  $v_4' = v_3$ , найдем

$$y(0) = y_1 = \frac{2\beta^4 v_2(\beta l/2) v_3(\beta l/2) - v_1(\beta l/2) v_4(\beta l/2)}{v_1^2(\beta l/2) + 4\beta^4 v_3^2(\beta l/2)}.$$

Вычислим жесткость системы  $c = 1/y_1$ . Сначала определим  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt{k/(4EJ_x)}; \quad \beta = 1 \text{ м}^{-1}$$

Тогда  $\beta l/2 = 1 \cdot 2/2 = 1$ ,  $c = 1/y_1$ . После вычисления  $y_1$  получаем  $c = 9,44$  кН/м.

Частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{c/m} = \sqrt{9440/100} \approx 9,7 \text{ с}^{-1}.$$

**32.** Аналогично решению задачи 31, уравнение изгиба балки имеет вид

$$y = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 + C_4 v_4.$$

Располагая начало координат в левой крайней точке балки, получаем  $C_1 = C_2 = 0$ . Для сечения  $x=l$  имеем  $y''=0$ ,  $EI_x y''' = -1$ . Используя эти граничные условия, найдем прогиб от единичной силы:

$$y_1(l) = \frac{1}{EJ_x} \frac{v_2(\beta l) v_3(\beta l) - v_1(\beta l) v_4(\beta l)}{v_1^2(\beta l) + 4\beta^4 v_2(\beta l) v_4(\beta l)}.$$

Учитывая, что  $\beta = 0,01 \text{ см}^{-1}$  и  $\beta l = 1$ , найдем жесткость системы

$$c = 1/y_1, \text{ или } c = 3,8 \text{ кН/м}$$

и частоту собственных колебаний

$$p = \sqrt{c/m} = \sqrt{3800/20} = 13,8 \text{ с}^{-1}.$$

**33.** Жесткость системы определяется так же, как и в задаче 31. Для определения начальных параметров в уравнении (3) решения задачи 31 имеем следующие условия: при  $x=0$   $y=0$  и  $y'=0$ , при  $x=l$   $y'=0$  и  $Q = EJ_x y = -1/2$ . В таком случае прогиб балки в месте закрепления груза ( $x=l$ ) от действия единичной силы равен

$$y_1(l) = \frac{1}{2EJ_x} \frac{v_3^2(\beta l) - v_2(\beta l) v_4(\beta l)}{v_1(\beta l) v_2(\beta l) + 4\beta^4 v_3(\beta l) v_4(\beta l)}.$$

В рассматриваемом случае

$$\beta l = l \sqrt{k/EJ_x}, \text{ или } \beta l = 0,25,$$

а частота собственных колебаний груза

$$p = \sqrt{\frac{1}{my_1(l)}}, \text{ или } p = 87 \text{ с}^{-1}.$$

34. Метод Релея основан на равенстве максимальных значений кинетической и потенциальной энергий при колебаниях консервативных систем:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}.$$

Максимальная кинетическая энергия системы

$$T_{\max} = 0,5 m y_k^2 + 0,5 \int_0^l m_0 \dot{y}^2 dz.$$

Здесь второе слагаемое представляет собой наибольшее значение кинетической энергии балки.

Максимальная потенциальная энергия (энергия изгиба балки)

$$\Pi_{\max} = 0,5 c y_k^2.$$

Здесь

$$c = 3EJ_x/l^3.$$

Прогиб балки при колебаниях можно представить в виде

$$y(t, z) = y_1(z) \sin pt.$$

Функция  $y_1(z)$  должна качественно соответствовать ожидаемой форме колебаний и удовлетворять граничным условиям задачи.

В рассматриваемом случае в качестве  $y_1(z)$  можно взять уравнение прогибов балки от действия некоторой силы  $Q$ , приложенной к массе  $m$  (рис. 222). При этом

$$y_1(z) = \frac{Ql^3}{EJ_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right].$$

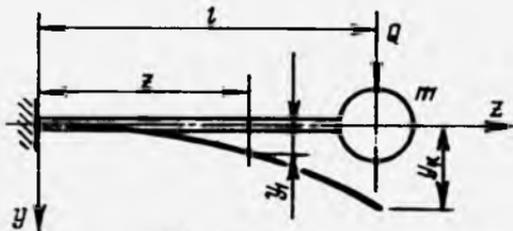


Рис. 222

Эта функция удовлетворяет всем граничным условиям задачи (при  $z=0$   $y_1=y_1'=0$ , при  $z=l$   $y_1''=0$ ). Вычислим максимальное значение кинетической энергии системы:

$$T_{\max} = \frac{mp^2}{2} \left( \frac{Ql^2}{3EJ_x} \right)^2 + \frac{m_0 p^2}{2} \left( \frac{Ql^3}{3EJ_x} \right) \int_0^l \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right]^2 dz,$$

или

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \left( \frac{Ql^3}{3EJ_x} \right) (m + \mu m_0 l),$$

где  $\mu = \frac{1}{l} \int_0^l \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right]^2 dz = 0,236$  — коэффициент приведения массы системы.

Наибольшее значение потенциальной энергии

$$\Pi_{\max} = (c/2) [Ql^3 / (3EJ_x)]^2.$$

Приравняв  $T_{\max}$  и  $\Pi_{\max}$ , находим собственную частоту колебаний системы по формуле

$$p = \sqrt{c / (m + \mu m_0 l)} = \sqrt{c / [m + (33/140) m_0 l]}.$$

35. Решение задачи аналогично приведенному выше. Выберем функцию прогибов балки в виде

$$y_1(z) = y_0 \sin \pi z / 2l.$$

Тогда коэффициент приведения массы

$$\mu = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz,$$

а собственная частота колебаний

$$p = \sqrt{c / (m + m_0 l)},$$

где  $c = 6EJ_x / l^3$ .

После вычислений получаем  $\mu = 1$ .

Если в качестве функции прогибов принять прогибы от некоторой сосредоточенной силы, приложенной к массе  $m$ , то коэффициент приведения массы балки  $\mu = 34/33 \approx 1,03$ .

36. Формула для вычисления собственной частоты колебаний имеет вид

$$p = \sqrt{c / (m + \mu m_1)},$$

где  $c$  — жесткость системы;  $m_1$  — коэффициент приведения массы;  $\mu$  — распределенная масса системы.

Параметры  $c$  и  $\mu$  для схем, приведенных на рис. 32, а—е, соответственно равны:

$$c = Gd^4 / (8D_l^3), \quad \mu \approx 0,333;$$

$$c = EJ_x / l^3 \quad \mu \approx 0,121;$$

$$c = 96EJ_x / 7l^3 \quad \mu \approx 0,445;$$

$$c = 24EJ_x/l^3 \quad \mu \approx 0,371;$$

$$c = 3EJ_x l^3/(a^3 b^3) \quad \mu \approx 0,522;$$

$$c = \pi d^4 G/(66a) \quad \mu \approx 0,04,$$

где  $i$  — число витков пружины. Коэффициент  $\mu$  (см. решение задачи 34) определяется с учетом конкретных краевых условий схем, приведенных на рис. 32.

Для схемы, приведенной на рис. 32,  $e$ , в формуле для определения частоты собственных колебаний необходимо заменить величину  $m$  на  $J$  (момент инерции массы).

## § 2. Свободные колебания систем с учетом сил сопротивления

37. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний вала смесителя имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p^2\varphi = 0,$$

где

$$2n = \alpha/J, \quad p^2 = c/J.$$

По условию задачи,  $n = 1,2/(2 \cdot 0,5) = 1,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $p^2 = G\pi d^4/(32lJ) = = 19,6 \text{ с}^{-1}$ , или  $p = 4,43 \text{ с}^{-1}$ .

Так как  $p > n$ , то наступает затухающий периодический режим и решение уравнения свободных колебаний (1) имеет вид

$$\varphi = e^{-1,2t} (C_1 \cos 4,25t + C_2 \sin 4,25t). \quad (2)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из начальных условий задачи: при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0$  ( $\varphi_0$  — угол скручивания вала при его равномерном вращении) и  $\dot{\varphi} = 0$ .

При равномерном вращении вала со скоростью  $\Omega$  угол скручивания

$$\varphi_0 = -\alpha\Omega/c.$$

Используя начальные условия, найдем, что  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = -\alpha\Omega/c$ . С учетом этого уравнение движения (2) принимает вид

$$\varphi = -\left(\frac{d\Omega}{c}\right) e^{1,2t} \cos 4,25t.$$

Время  $t_*$ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в 10 раз, находим из условия  $e^{-1,2t_*} = 0,1$ , откуда  $t_* = 1,9 \text{ с}$ .

38. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p_0^2\varphi = 0,$$

где  $2n = \frac{\pi H}{J^4} \frac{D_1^3}{D_2 - D_1} \rho v$ ;  $J$  — момент инерции цилиндра.

Вычислим

$$\rho_0^2 = \frac{GJ_\rho}{LJ} = \frac{8 \cdot 10^5 \pi d^4 32}{L \cdot 32 \pi D_1^4 H \rho} \approx 1,02 \text{ с}^{-2}$$

и  $2n = 0,046 \text{ в.}$

Поскольку

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\rho_0^2 - n^2}} = 6,5 \text{ с.}$$

окончательно получаем

$$n = \sqrt{\rho_0^2 - \frac{4\pi^2}{\tau_0^2}} = \sqrt{1,02^2 - \frac{4 \cdot 3,14^2}{6,5^2}} = 0,295 \text{ с}^{-1} \quad \text{и} \quad v = 12,826 \text{ м}^2/\text{с.}$$

39. Воспользовавшись методом сил, получим следующее дифференциальное уравнение малых свободных колебаний массы  $m$ :

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}) + \delta_{12}(-\alpha\dot{y}_K). \quad (1)$$

Уравнение (1) содержит еще одно неизвестное  $y_K$ , так как сила сопротивления приложена не к массе  $m$ , а к безынерционной балке в точке  $K$ , поэтому надо рассматривать еще одно уравнение, связывающее смещение точки  $K$  с силами, действующими на систему

По методу сил,

$$y_K = \delta_{21}(-m\ddot{y}) + \delta_{22}(-\alpha\dot{y}_K). \quad (2)$$

Исследование свободных колебаний массы  $m$  сводится таким образом к решению системы уравнений (1) и (2). Решение можно искать в виде

$$y = A e^{\lambda t}; \quad y_K = B e^{\lambda t}.$$

В результате получаем характеристическое уравнение третьей степени вида

$$\alpha \left( \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \right) \lambda^3 + \frac{1}{\delta_{21}} \lambda^3 + \frac{\alpha \delta_{22}}{\delta_{11} \delta_{22} m} \lambda + \frac{1}{\delta_{11} \delta_{21} m} = 0.$$

Рассмотренная задача относится к задачам с «дробным числом степеней свободы» (в данном случае «полторы степени свободы»).

40. Составим дифференциальное уравнение движения диска. На диск действует инерционный момент  $-I\ddot{\varphi}$ , момент сил сопротивления пружины  $-c\varphi$  и момент сил вязкого сопротивления демпфера  $-\alpha\dot{\varphi}$ . Поэтому можно записать

$$I\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \rho^2\varphi = 0 = 0,$$

где  $J = \frac{\pi D^4 H \rho}{32} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $2n = \alpha/J$ ;  $\rho^2 = c/J$ .

Жесткость пружины

$$c = \frac{EJ_x}{\pi D_{1l}} = \frac{Ed_1^4}{67D_{1l}}, \quad c = 0,938 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Частота собственных колебаний системы без демпфирования

$$p = \sqrt{c/J}, \quad p = 24,3 \text{ с}^{-1}.$$

Логарифмический декремент определяется как  $\delta = n\tau_0$ , где  $\tau_0 = 2\pi/\sqrt{p^2 - n^2}$ . Отсюда приведенный коэффициент силы вязкого сопротивления

$$n = \delta p / \sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}; \quad n = 5,64,$$

а коэффициент момента вязкого сопротивления

$$\alpha = 2n/i = 2 \cdot 5,64 / 1,57 \cdot 10^{-3} = 7,18 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

41. Дифференциальное уравнение свободных колебаний запишем в виде

$$\ddot{\Phi} + \frac{\alpha}{2ml} \dot{\Phi} + \frac{cl + mg}{2ml} \Phi = 0,$$

где  $\alpha$  — коэффициент момента вязкого сопротивления движению.

Частота собственных колебаний системы без затухания

$$p = \sqrt{(cl + mg)/2ml}.$$

По формуле  $c = Gd^4 / (80^3 i)$  находим  $c = 333 \text{ кН/м}$  и, следовательно,  $p = 14,0 \text{ с}^{-1}$ .

Период затухания колебаний

$$\tau_0 = 2\pi / \sqrt{p^2 - n^2},$$

откуда

$$n = \sqrt{p^2 - 4\pi^2/\tau_0^2}.$$

После подстановки и вычисления получаем  $n \approx 12,5 \text{ с}^{-1}$ .

Коэффициент сопротивления движению найдем из условия

$$2n = \alpha / (2ml),$$

т. е.

$$\alpha = 4nml = 4 \cdot 12,5 \cdot 10 \cdot 0,15 = 75 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

42. При движении поршня в жидкости на него кроме силы инерции  $m d^2y/dt^2$  и силы упругости пружины  $cy$  действует сила сопротивления, развиваемая демпфером. Эта сила пропорциональна скорости протекания жидкости через отверстия в поршне и, следовательно, скорости движения поршня:

$$F = \alpha dy/dt.$$

Воспользовавшись принципом Даламбера, получим дифференциальное уравнение движения поршня

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2y = 0. \quad (1)$$

Учитывая начальные условия задачи (при  $t=0$ ,  $y=y_0$ ,  $\dot{y}_0=0$ ), представим решение уравнения (1) в виде

$$y = y_0 e^{-nt} \cos(\sqrt{p^2 - n^2} \cdot t). \quad (2)$$

Приведенный коэффициент вязкого сопротивления вычислим по формуле

$$n = [4\mu H / (mz)] (D/e)^4.$$

После вычисления получаем  $n \approx 5,42 \text{ с}^{-1}$  и  $p^2 = c/m = 3 \cdot 10^3 / 2,73 = 1098,9 \text{ с}^{-2}$ .

Время  $t$ , в течение которого амплитуда уменьшается в два раза, найдем из условия  $y = 0,5 y_0$ . Подставляя полученные значения  $n$  и  $p$  в уравнение (2), определим время, в течение которого происходит уменьшение амплитуды колебаний в два раза:

$$0,5 y_0 = y_0 e^{-nt},$$

откуда находим  $t_1 = 0,14 \text{ с}$ .

43. При движении груза на него действуют сила инерции  $-m\ddot{x}$ , сила сопротивления пружин  $2cx$  и сила вязкого сопротивления жидкости  $\alpha\dot{x}$ . С учетом этих сил дифференциальное уравнение движения груза представим в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0,$$

где  $n = \alpha/2m = 500/2 \cdot 50 = 5 \text{ с}^{-1}$ ;  $p^2 = 2c/m = \frac{2 \cdot 1000}{50} = 40 \text{ с}^{-2}$ .

Учитывая начальные условия, получим решение уравнения движения груза в виде  $x = x_0 e^{-nt} \cos p_1 t$ , где  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = 3,87 \text{ с}^{-1}$ . Время затухания колебаний  $t_*$  найдем из условия

$$\frac{x_0}{100} = x_0 e^{-nt_*},$$

откуда

$$t_* = \frac{1}{n} \ln 100 = \frac{1}{5} \ln 100 = 0,92 \text{ с}.$$

44. В соответствии с принципом Даламбера составим дифференциальное уравнение движения груза как уравнение равновесия при отклонении стержня на некоторый малый угол  $\varphi$ :

$$mgl\varphi = ml^2\ddot{\varphi} - ca^2\ddot{\varphi} - a^2\alpha\dot{\varphi} = 0. \quad (1)$$

Обозначив  $2n = a^2\alpha/(ml^2)$ ,  $p^2 = (ca^2 - mgl)/ml^2$ , запишем дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p^2\varphi = 0. \quad (2)$$

При  $n=0$  система имеет частоту собственных колебаний

$$p = \sqrt{(ca^2 - mgl)/ml^2}.$$

Для определения логарифмического декремента затухания колебаний вычислим жесткость пружины  $c = Gd^4/8D^3i$ . После подстановки числовых значений получим  $c = 10$  кН/м;  $p^2 = 1600$  с<sup>-2</sup>, или  $p = 40$  с<sup>-1</sup>.

Приведенный коэффициент сопротивления демпфера  $n = a^2\alpha/(2ml^2) = (0,2^2 \cdot 3 \cdot 10^2)/2 \cdot 1 \cdot 0,5^2 = 24$  с<sup>-1</sup>.

Частота собственных затухающих колебаний  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = 1600 - 576 = 32$  с<sup>-1</sup>.

Период затухающих колебаний  $\tau_0 = 2\pi/p = 6,28/40 = 0,157$  с, откуда логарифмический декремент затухания  $\delta = n\tau_0 = 24 \times 0,157 = 3,768$ .

45. Дифференциальное уравнение колебаний, полученное из уравнения Лагранжа второго рода, при отклонении столба жидкости от положения равновесия на величину  $x$  с учетом силы сопротивления имеет вид

$$\ddot{y} + 2nx + p^2x = 0,$$

где  $2n = \alpha/m = 4x \sin \beta / [\pi d^2 ps (1 + \sin \beta)]$ ;  $p^2 = (2g/s) \sin \beta$ , (так как сила тяжести неуравновешенного столба жидкости равна  $2xg\rho\pi d^2/4$ ), откуда частота  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$  и период  $\tau_0 = 2\pi/p_1$ .

46. При движении массы  $m$  из начального положения (справа налево) дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 - F_\tau = 0.$$

Так как при  $t = 0$   $\dot{x}_1 = 0$ ,  $x_1 = x_0$ , то решение уравнения (1) имеет вид

$$x_1 = \left(x_0 - \frac{F_\tau}{mp^2}\right) \cos pt + \frac{F_\tau}{mp^2}, \quad (2)$$

где  $p = \sqrt{c/m}$ .

Время  $t_1$ , соответствующее движению массы справа налево, находим из условия  $\dot{x}_1(t_1) = 0$ . Поэтому

$$t_1 = \pi/p.$$

Максимальное отклонение массы  $m$  от нейтрального положения влево

$$x_{1\max} = -x_0 + 2F_\tau/mp^2.$$

При движении массы  $m$  слева направо дифференциальное уравнение движения представляется в виде (сила кулонова трения изменяет знак)

$$m\ddot{x}_2 + cx_2 + F_\tau = 0. \quad (3)$$

При начальных условиях  $t = t_1$ ;  $x_2 = x_{1\max}$ ;  $\dot{x}_2 = 0$  решение уравнения (3) имеет вид

$$x_2 = \left(x_0 - \frac{3F_\tau}{mp^2}\right) \cos pt - \frac{F_\tau}{(mp^2)}.$$

После каждого полупериода амплитуда колебаний уменьшается на  $2F_{\tau}(mp^2)$ , поэтому для  $n$ -го полупериода можно записать

$$x_n = [x_0 - (2n-1)F_{\tau}/(mp^2)\cos pt + (-1)^{n-1}F_{\tau}/(mp^2)].$$

Колебания массы  $m$  продолжаются до тех пор, пока

$$F_{\tau} < c/x_{(m-1)\max}/.$$

47. При закручивании свободной пружины на некоторый угол  $\varphi$  ее длина изменяется на величину  $\lambda$ . В рассматриваемой конструкции осевое смещение диска отсутствует, т. е.  $\lambda = 0$  и в упорах возникает сила реакции  $N$ . Для определения жесткости конструкции составим уравнения перемещений:

$$\varphi = M\delta_{11} + N\delta_{12}, \quad (1)$$

$$\lambda = M\delta_{21} + N\delta_{22},$$

где  $\delta_{11}$  и  $\delta_{12}$  — углы закручивания свободной пружины от действия единичного момента и от единичной силы;  $\delta_{21}$  и  $\delta_{22}$  — осевое удлинение свободной пружины от единичного момента и от единичной силы соответственно.

Вычислим коэффициенты  $\delta_{ij}$ . Приложим к свободной пружине внешний крутящий момент  $\delta = 1$ , который вызовет в проволоке пружины внутренний крутящий и изгибающий моменты  $M_{1k} = l\sin\alpha$ , и  $M_{1u} = l\cos\alpha$  ( $\alpha$  — угол подъема витков пружины). Приложение единичной осевой силы вызовет также внутренние крутящий и изгибающий моменты  $M_{2k} = 1 \cdot R\cos\alpha$  и  $M_{2u} = 1 \cdot R\sin\alpha$ . В соответствии с методом Мора имеем

$$\delta_{11} = \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{1u}}{GJ_{\rho}} ds + \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{1k}^2}{EJ_x} ds = 2\pi Ri \left( \frac{\sin^2 \alpha}{GJ_{\rho}} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ_x} \right), \quad (2)$$

$$\delta_{22} = \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{2u}^2}{GJ_{\rho}} ds + \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{2k}^2}{EJ_x} ds = 2\pi Ri^3 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_{\rho}} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ_x} \right); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{1k}M_{2k}}{GJ_{\rho}} ds + \int_0^{2\pi Ri} \frac{M_{1u}M_{2u}}{EJ_x} ds = \\ &= \pi Ri^2 \left( \frac{1}{GJ_{\rho}} + \frac{1}{EJ_x} \right) \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (4)$$

где  $i$  — число витков пружины.

Решение системы уравнений (1) с учетом  $\lambda = 0$  позволяет получить следующее соотношение:

$$\varphi = c/M$$

где  $c = \delta_{22}/(\delta_{11}\delta_{12} - \delta_{12}^2)$ ;  $M = -\varphi c_1$ ;

$$c_1 = \delta_{12}/(\delta_{11}\delta_{12} - \delta_{12}^2).$$

В соответствии с полученным решением момент сил трения

$$M_{\text{тр}} = \mu NR = \mu c_1 \varphi R = c^* \varphi,$$

где  $c^* = \mu R c_1$ ;  $\mu$  — коэффициент кулонова трения;  $R$  — радиус трущихся поверхностей.

В последнем соотношении нет знака минус, так как имеются две поверхности трения и  $M_{\text{тр}}$  не зависит от того, по какой из поверхностей происходит контакт.

Таким образом, в процессе колебаний на диск действуют следующие моменты: момент инерции  $J\ddot{\varphi}$ , момент силы сопротивления пружины  $c\varphi$  и момент силы трения  $c^*\varphi$ , который всегда направлен против скорости движения  $\dot{\varphi}$ . Дифференциальное уравнение движения представим в виде

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + \text{sign}\dot{\varphi}c^*\varphi = 0, \quad (5)$$

где  $\text{sign}\dot{\varphi}$  означает знак скорости движения  $\dot{\varphi}$ .

По условию задачи при  $t=0$  диск отклонен от положения равновесия на угол  $\varphi_0$ .

Для первой четверти периода колебаний (при  $\varphi_0 \geq \varphi \geq \varphi_{01}$ ) дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + (c/I - c^*/J)\varphi = 0.$$

Для движения диска необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $c\varphi_0 > c^*\varphi_0$  или  $M > M_{\text{тр}}$ , как указано в условии задачи.

Решение уравнения движения для первой четверти периода колебаний имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos k_1 t,$$

где

$$k_1 = \sqrt{(c - c^*)/J_0}.$$

Время движения в первой четверти периода  $t_1 = \pi/2k_1$ .

При переходе через положения равновесия ( $\varphi=0$ ) изменяется знак момента силы сопротивления и знак момента инерции. Знак момента силы кулонова трения сохраняется, так как сохраняется знак скорости  $\dot{\varphi}$ . Поэтому движение во второй четверти периода можно описать дифференциальным уравнением

$$\ddot{\varphi} + (c + c^*)\varphi/J = 0. \quad (6)$$

Учитывая начальные условия движения ( $t=t_1$ ;  $\varphi=0$ ;  $\dot{\varphi} = -\varphi_0 k_1$ ), решение уравнения (6) представим в виде

$$\varphi = -\varphi_0 \frac{k_1}{k_2} \sin k_2 t,$$

где  $k_2 = \sqrt{(c_1 + c^*)/J}$ . Отсюда следует, что в конце полупериода при  $t_2 = \pi/2k_2$ ,  $t = t_1 + t_2 = 0,5\pi(1/k_1 + 1/k_2)$  отклонение диска от положения равновесия составляет

$$\dot{\varphi}_{01} = -\varphi_0 (k_1/k_2), \quad (7)$$

скорость же движения  $\dot{\varphi}_{01} = 0$ .

В третьей четверти периода дифференциальное уравнение движения имеет вид (1), но с начальным углом  $\varphi_{01}$ , определяемым выражением (7). В четвертой четверти периода движение описывается дифференциальным уравнением (6).

Проведя решение аналогично предыдущему (см. задачу 46), получим, что в конце первого периода амплитуда угла поворота диска уменьшается до

$$\varphi_{01} = \varphi_0 (k_1/k_2)^2 = \varphi_0 (c-c^*) / (c+c^*).$$

В конце  $n$ -го периода колебаний амплитуда равна

$$\varphi_{0n} = \varphi_0 (k_1/k_2)^{2n} = \varphi_0 [(c-c^*) / (c+c^*)]^n.$$

Период колебаний

$$T = 2(t_1 + t_2) = \pi \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \frac{\pi J}{c^2 - c^*} \left( \sqrt{\frac{c-c^*}{J}} + \sqrt{\frac{c+c^*}{J}} \right).$$

48. При наличии кулонова трения между диском и упорами дифференциальное уравнение свободных колебаний системы (см. задачу 47) имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi + \text{sign} \dot{\varphi} c^* \varphi = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что в начальный момент времени  $t=0$  диск имеет некоторое отклонение  $\varphi_0$  и находится в покое ( $\dot{\varphi}_0 = 0$ ). В таком случае в начале движения при изменении угла  $\varphi$  в пределах  $0 < \varphi \leq \varphi_0$  уравнение (1) имеет вид

$$\ddot{\varphi}_0 + k_1^2 \varphi_0 = 0, \quad (2)$$

где

$$k_1^2 = (c - c^*) / J.$$

При переходе диска через положение равновесия изменяется знак силы упругого сопротивления и знак силы инерции, и уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi}_2 + k_2^2 \varphi_2 = 0, \quad (3)$$

где

$$k_2^2 = (c + c^*) / J.$$

В третьей четверти периода будет действительно уравнение (2), в четвертой — уравнение (3) и т. д.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$\varphi_1 = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t.$$

Учитывая, что при  $t=0$   $\varphi_1 = \varphi_0$ , а  $\dot{\varphi}_1 = 0$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_0 \cos k_1 t, \\ \dot{\varphi}_1 &= -k_1 \varphi_0 \sin k_1 t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Выражения (4) на фазовой плоскости ( $\varphi$ ;  $\dot{\varphi}$ ) представляются в виде уравнения эллипса (рис. 223):

$$\varphi_1^2/\varphi_0^2 + \dot{\varphi}_1^2/(k_1\varphi_0)^2 = 1.$$

Решение уравнения (3) получим, учитывая, что при  $t=t_1 = \pi/2k_1$   $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$ , а  $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 = -k_1\varphi_0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= -\left(k_1/k_2\right) \varphi_0 \sin k_2 t, \\ \dot{\varphi}_2 &= -k_1 \varphi_0 \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь время  $t$  во второй четверти движения изменяется от 0 до  $t_2$ . Конец второй четверти движения определяем из условия, что при  $t=t_2$   $\dot{\varphi}_2 = 0$ , откуда  $t_2 = \pi/2k_2$ .

Система (5) на фазовой плоскости представляется также в виде уравнения эллипса (см. рис. 223):

$$\frac{\varphi_2^2}{(k_1\varphi_0/k_2)^2} + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{(k_1\varphi_0)^2} = 1.$$

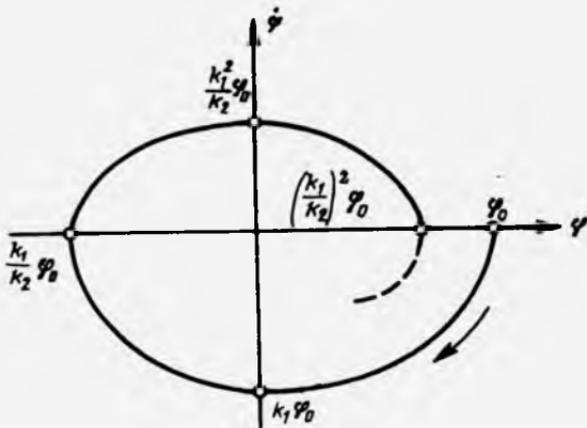


Рис. 223

Подобным же образом находим решения для остальных участков движения. Так как  $k_1 < k_2$ , то движение системы является затухающим.

49. Дифференциальное уравнение свободных механических колебаний системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение колебаний тока в контуре представим в виде

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение колебаний напряжения в контуре будет следующим:

$$CU + U/L = 0. \quad (3)$$

В соответствии со структурой уравнений (2) и (3) электрическая аналоговая цепь является контуром, состоящим из конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и выключателя. Если на обкладках конденсатора накопить электрический заряд, затем цепь замкнуть, то в ней возникнут колебания электрического тока  $I$  и колебания напряжения с частотой  $\rho = 1/\sqrt{LC}$ .

50. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний поршня имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0.$$

Дифференциальные уравнения колебаний тока и напряжения в электрических цепях представим в виде

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0, \quad (1)$$

$$C\ddot{U} + \dot{U}/R + U/L = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает колебания тока в цепи, состоящей из катушки индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и конденсатора  $C$ , соединенных параллельно. Уравнение (2) описывает колебания напряжения в контуре, состоящем из тех же элементов, но соединенных последовательно.

### § 3. Вынужденные колебания

51. При движении станины вибрографа по закону  $y = y_0 \sin \omega t$  магнит совершает колебания, описываемые дифференциальным уравнением

$$m\ddot{y} = -c(y_1 - y), \quad (1)$$

где  $y_1$  и  $y$  — перемещения нижнего и верхнего концов пружины соответственно;  $y_1 - y$  — величина растяжения пружины, или величина смещения магнита относительно катушки.

Обозначим

$$z = y_1 - y. \quad (2)$$

Тогда

$$\ddot{y}_0 = \ddot{z} + \ddot{y} = z - y_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставив в уравнение (3) значение  $y$  из (1) с учетом (2), получим дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний

$$z = p_0^2 z = y_0 \omega^2 \sin \omega t,$$

где  $p_0^2 = c/m$ .

Решение последнего уравнения имеет вид

$$z = \frac{y_0}{p_0^2 / \omega^2 - 1} \sin \omega t.$$

Наименьшие искажения колебаний, очевидно, происходят при  $p_0^2 \ll \omega^2$ . Тогда  $z \approx -y_0 \sin \omega t$ .

Знак минус показывает, что колебания магнита относительно колебаний станины противоположны по фазе, т. е. магнит в этом случае остается неподвижным в пространстве.

52. При вращении детали с угловой скоростью  $\omega$  закон движения измерительного стержня выражается уравнением

$$x = l \sin \omega t. \quad (1)$$

При этом на стержень действуют сила инерции  $-m\ddot{x}$ , сила реакции  $R$  и сила упругости пружин  $c_1x + c_2(x + \delta_0)$  (где  $c_1$  — суммарная жесткость плоских пружин;  $c_2$  — жесткость винтовой пружины;  $\delta_0$  — предварительный натяг винтовой пружины). В таком случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2(x + \delta_0) = R,$$

или (2)

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x + R_0 = R,$$

где  $c_2\delta_0 = R_0$ .

Условие непрерывности контакта заключается в том, что сила реакции  $R$  всегда направлена в одну сторону (вверх). Тогда предельную угловую скорость  $\omega$  можно найти из условия, что минимальное значение реакции в течение периода хотя бы один раз становится равным нулю.

Подставляя уравнение (1) в (2), находим

$$(p_0^2 - \omega^2) \sin \omega t + R_0/(me) = R, \quad (3)$$

где  $p_0 = \sqrt{(c_1 + c_2)/m}$  — частота собственных колебаний измерительного стержня.

Рассмотрим возможные случаи.

При дорезонансном режиме работы ( $p_0^2 > \omega^2$ ) минимальное значение реакции достигается в моменты времени, когда  $\sin \omega t_1 = -1$ . При этом

$$-p_0^2 + \omega^2 + R_0/(me) > 0, \quad (4)$$

или

$$R_0/(me) > m_0^2 - \omega^2. \quad (5)$$

Для непрерывности контакта необходимо, чтобы условие (5) выполнялось во всем интервале возможных значений  $\omega$  ( $0 < \omega < p_0$ ), и если оно выполняется при  $\omega = 0$ , то и для всех  $\omega \neq 0$  оно будет выполняться.

При  $\omega = 0$   $R_0 > (c_1 + c_2)e$ .

Если условие (5) не выполнено, то возможны нарушения контакта, т. е.  $R = 0$ . Из условия (4) получаем следующее выражение для предельной угловой скорости  $\omega$ :

$$\omega_{1*}^2 = p_0^2 - R_0/(me).$$

Еще один случай нарушения контакта возможен при  $\omega^2 > p_0^2$  (зарезонансный режим). При этом  $R=0$  в момент времени, когда  $\omega t_2=1$ . Таким образом, еще одно значение предельной угловой скорости определяем по формуле

$$\omega_{2*}^2 = p_0^2 + R_0/(me).$$

Динамическую реакцию при  $\omega=0,1\omega_{2*}$  находим из уравнения (2):

$$R = R_0 + [(c_1 + c_2) - m(0,1\omega_{2*})^2]e \sin \omega_{2*}^2 t_1. \quad (6)$$

Вычислим теперь параметры, входящие в уравнения (3) и (5). Жесткость винтовой пружины

$$c_2 = \frac{Gd^4}{8D^3l} = \frac{10^{10} \cdot 0,001^4}{0,005^3 \cdot 20} = 4 \text{ кН/м.}$$

Жесткость двух плоских пружин

$$c_1 = \frac{24EJ_x}{l^3} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 125 \cdot 10^{-12}}{27 \cdot 10^{-6} \cdot 12} = 9,26 \text{ кН/м.}$$

Предельная угловая скорость

$$\omega_{2*} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{R_0}{ml}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3 + 9,26 \cdot 10^3}{0,05} + \frac{5}{0,05 \cdot 10^{-3}}} = 600,4 \text{ с}^{-1}.$$

Наконец, измерительное усилие прибора, определенное по формуле (6), равно

$$R = 5 \pm 1,3 \text{ Н.}$$

**53.** Отбросив шарнир (заменяв его реакцией  $N$ ) и приложив к торцевому сечению неизвестный момент  $M$  (рис. 224), согласно методу сил, получаем три уравнения

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}) + \delta_{12}M + \delta_{13}N;$$

$$\vartheta = \delta_{21}(-m\ddot{y}) + \delta_{22}M + \delta_{23}N;$$

$$y_1 = \delta_{31}(-m\ddot{y}) + \delta_{32}M + \delta_{33}N,$$

где  $\delta_{ij}$  — коэффициенты податливости;  $\vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t$   $y_1$  — вертикальное перемещение сечения, связанного с шарниром,  $y_1 = 0$ .

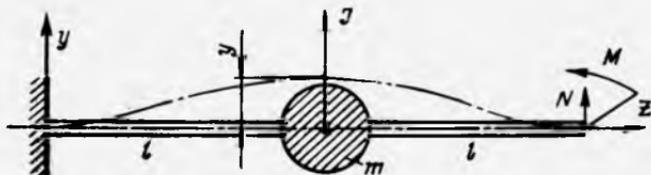


Рис. 224

Выразив из двух последних уравнений этой системы  $M$  и  $N$ , после преобразований получаем следующее уравнение относительно  $y$ :

$$\ddot{y} + ay = b\vartheta_0 \cos \omega t,$$

где  $a, b$  — коэффициенты, зависящие от  $\delta_{ij}$ .

При установившихся колебаниях имеем

$$y = \frac{b\vartheta_0}{a - \omega^2} \cos \omega t.$$

Определив  $y$ , находим  $M$  и  $N$ . Изгибающий момент в заделке (см. рис. 224) равен

$$M_{из} = JI + 2IN + M.$$

Максимальное нормальное напряжение в заделке равно

$$\sigma_{max} = M_{из}/W_x.$$

где  $W_x$  — момент сопротивления сечения.

54. Задачу следует решать аналогично задаче 53. В сечении, перемещение которого задано, прикладываем неизвестную силу  $P$ , отбрасываем опору, вводя еще одну неизвестную силу  $N$ , и методом сил получаем три уравнения:

$$y = \delta_{11}(-my) + \delta_{12}N + \delta_{13}P_k, \quad (1)$$

$$0 = \delta_{21}(-my) + \delta_{22}N + \delta_{23}P_k, \quad (2)$$

$$y_k = \delta_{31}(-my) + \delta_{32}N + \delta_{33}P_k, \quad (3)$$

где  $P_k$  — неизвестная сила, приложенная в точке  $k$ ,  $y_k = y_0 \cos \omega t$ .

Из уравнений (2) и (3) находим  $P_k$  и  $N$ . Выражение для силы  $N$  имеет вид

$$N = \frac{(\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23})my + \delta_{23}y_0 \cos \omega t}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32}}. \quad (4)$$

Исключая  $N$  и  $P_k$  из уравнения (1), получаем следующее выражение для определения  $y$ :

$$\ddot{y} + p^2y = by_0 \cos \omega t, \quad (5)$$

где  $p$  и  $b$  — коэффициенты, зависящие от  $\delta_{ij}$ .

Определив  $y$  из уравнения (5), находим  $N$ .

55. Перемещение стержня  $1$  на некоторую величину  $x$  вызывает поворот рычага на угол  $\varphi = x/l$ . В этом случае при движении вверх усилие в пружине  $2$  увеличивается, а в пружинах  $5$  уменьшается. Таким образом, на стержень  $1$  действуют сила инерции  $-mx$ , сила сопротивления пружины  $2c_1(x+x_0)$ , реакция опоры  $R$  и усилие со стороны рычага  $3$ , равное  $[J\ddot{\varphi} + c_2(\varphi - \varphi_0)]/l_0$ .

При этом дифференциальное уравнение движения стержня  $1$  имеет вид

$$(m+J/l^2)\ddot{x} + (c_1-c_2/l^2)x + (c_1x_0+c_2\varphi_0/l) = R_0.$$

Обозначив  $m+J/l^2=M$ ,  $c_1=c_2/l^2=c$ ,  $c_1x_0+c_2\varphi_0/l=P_0$ , представим дифференциальное уравнение движения измерительного стержня в виде

$$M\ddot{x} + cx + P_0 = R. \quad (1)$$

Условие постоянства контакта заключается в том, что реакция в точке  $B_1$  не изменяет свой знак, т. е.  $R \geq 0$ .

Поскольку профиль поверхности описывается уравнением  $x = a \sin 2\pi z/A$ , уравнение движения измерительного стержня имеет вид

$$x = a \sin \omega t, \quad (2)$$

где

$$\omega t = 2\pi z/A = (2\pi/A)vt. \quad (3)$$

Подставляя уравнение (2) в (1) и учитывая условие  $R \geq 0$ , получаем

$$(p_0^2 - \omega^2)a \sin \omega t + P_0/M \geq 0, \quad (4)$$

где  $p_0 = \sqrt{c/M}$  — частота собственных колебаний рычага прибора.

Возможны два случая нарушения контакта (см. решение задачи 52). При дорезонансном режиме ( $p_0^2 > \omega^2$ ) нарушение контакта возможно при

$$\omega^2 = p_0^2 - P_0/aM.$$

Если параметры системы выбрать такими, чтобы выполнялось условие  $P_0 > \frac{c_1 l^2 + c_2}{l^2} a = p_0^2 Ma$ , то нарушение контакта не произойдет.

При работе в зарезонансной области ( $\omega^2 > p_0^2$ ) значение  $\omega$ , при котором возможно нарушение контакта, найдем из равенства соотношения (4) нулю (при  $\sin \omega t_1 = 1$ ). Тогда

$$\omega^2 = p_0^2 + P_0/aM,$$

или с учетом (3) получаем, что предельное значение скорости  $v_*$  определяется формулой

$$v_* = (A/2\pi) \sqrt{p_0^2 + P_0/(aM)}.$$

56.  $v_* = \frac{A}{2\pi} \sqrt{p_0^2 + \frac{M_0 l}{J a}}$ , где  $(p_0^2 = c_2/J)$ .

57. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний триммера имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + [c + (c_1 + c_2)l^2]\varphi = c^2 l x_0 \sin \omega t.$$

При резонансе

$$\omega_k^2 = [c + (c_1 + c_2)l^2]/I = p_0^2 + (c_1 + c_2)l^2/J,$$

откуда

$$p_0^2 = \omega_k - (c_1 + c_2) l^2 / J.$$

58. Динамический коэффициент определяется по формуле

$$k_{\text{дин}} = a/x_0 = 1/|1 - \omega^2/p^2|.$$

Для изображенных на рис. 50 схем *a* и *б* соответственно имеем

$$k_{\text{дин}} = 1/|1 - m\omega^2/c| \text{ и}$$

$$k_{\text{дин}} = 1/|1 - 4m\omega^2/3c|$$

59. Коэффициент динамичности выражается формулой

$$k_{\text{дин}} = 1/|1 - J\omega^2/c|.$$

Так как  $k_{\text{дин}} = 1/15$ , а работа мотора происходит в зарезонансной области ( $p_0^2 > \omega^2$ ), то жесткость системы должны быть равна

$$c = J\omega^2 = 20 \cdot 105^2 / 16 = 1,38 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Будем считать участок  $l_1$  абсолютно жестким, а крепление опор к основанию как заделку. Раскрыв статическую неопределенность и вычислив угловое перемещение опоры двигателя, находим, что жесткость одной опоры

$$c_1 = 11,3EJ_x/l_1. \quad (1)$$

Здесь момент инерции площади поперечного сечения  $J_x = bh^3/12 = b^4/c$ , а модуль упругости стали  $E = 200$  ГПа. Так как  $c = 2c_1$ , то с учетом (1) находим  $b = 0,654$  см. Принимаем  $b = 6,5$  мм, тогда  $h = 2b = 13$  мм.

В этом случае после вычислений получаем  $c = 2c_1 = 1,34 \times 10^4$  Н·м,  $k_{\text{дин}} = 1/15,1$ .

Как показывает расчет, наибольший изгибающий момент в стойке  $M_{\text{max}} = 0,3 M$ , следовательно, в опасном сечении действует переменный момент

$$M_{\text{max}} = 0,3 M = 0,3 (M_0 + k_{\text{дин}} M_1 \sin \omega t).$$

Среднее значение наибольшего напряжения в сечении

$$\sigma_m = 0,3 M_0/W_x, \quad \sigma_m = 275 \text{ МПа}.$$

Амплитуда напряжения

$$\sigma_a = k_{\text{дин}} 0,3 M_1/W_x, \quad \sigma_a = 110 \text{ МПа},$$

а коэффициент запаса выносливости

$$n_\sigma = \frac{1}{\sigma_a/\sigma_1 + \sigma_m/\sigma_B}, \quad n_\sigma = 1,8.$$

60. Поскольку возмущающая сила имеет периодический характер, амплитуда вынужденных колебаний системы

$$a = a_{\text{ст}}/|1 - \omega^2/p_0^2|.$$

Амплитуда реакции опоры пропорциональна амплитуде деформации упругой связи

$$R_{\text{дин}} = ca = R_{\text{ст}} / |1 - \omega^2 / \rho_0^2|.$$

Отсюда следует, что динамический коэффициент

$$k_{\text{дин}} = R_{\text{дин}} / R_{\text{ст}} = 1 / |1 - \omega^2 / \rho_0^2|.$$

Таким образом, для приведенных на рис. 52 схем  $a$ — $b$  соответственно имеем

$$\begin{aligned} k_{\text{дин}} &= 1 / |1 - m\omega^2 / c|; \\ k_{\text{дин}} &= 1 / |1 - m\omega^2 / c|; \\ k_{\text{дин}} &= 1 / |1 - 9m\omega^2 / 20c|. \end{aligned}$$

61. Обозначим смещение верхнего конца пружины через  $x_1$ , а массы — через  $x_2$ . Тогда сила, действующая на груз при движении верхнего конца пружины,  $F = c(x_1 - x_2)$ .

Дифференциальное уравнение движения массы имеет вид

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 - c(x_1 - x_2) = 0,$$

или

$$\ddot{x}_2 + 2n\dot{x}_2 + \rho_0^2 x_2 = (cx_0 / m) \sin \omega t.$$

Амплитуда колебаний груза относительно положения равновесия (считая  $\omega = \rho_0$ ) равна

$$x_{20} = \frac{x_0}{\alpha} \sqrt{c/m} = \frac{1,55}{27} \sqrt{\frac{7200}{9,1}} = 1,615 \text{ см.}$$

Сдвиг фаз в резонансном режиме равен  $\pi/2$ , поэтому полное удлинение пружины

$$x_{\text{max}} = x_{20} + x_{\text{ст}} = x_{20} + Q/c = 1,615 + 1,26 = 2,875 \text{ см,}$$

где  $x_{\text{ст}}$  — растяжение пружины при статическом действии силы  $Q = mg$ .

Максимальная сила, растягивающая пружину,

$$P_{\text{max}} = cx_{\text{max}} = 7200 \cdot 2,875 \cdot 10^{-2} = 207 \text{ Н.}$$

Найдем теперь среднее и амплитудное напряжение в пружине

$$\tau_m = \frac{8QD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 91 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3} = 92,74 \text{ МПа,}$$

$$\tau_a = \frac{8x_{20}cD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,615 \cdot 10^{-2} \cdot 7200 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3} = 118,5 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса прочности по пределу текучести

$$n_{\tau} = \tau_{\tau} / \tau_{\text{max}} = \tau_{\tau} / (\tau_m + \tau_a) = \frac{600}{92,74 + 118,5} = 2,84.$$

Наконец, коэффициент запаса усталостной прочности

$$n_{\sigma} = 1 / (\tau_a / \tau_{-1} + \tau_m / \tau_b) = 1 / \left( \frac{92,74}{300} + \frac{118,5}{850} \right) = 2,22.$$

62. Обозначим вертикальное перемещение штока через  $x_1$ , а перемещение массы через  $x_2$ . В таком случае на массу действует передаваемое через демпфер усилие  $F = \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ , сила инерции  $m\ddot{x}_2$  и сила сопротивления пружин  $2cx_2$ .

В соответствии с принципом Даламбера, дифференциальное уравнение движения представим в виде

$$m\ddot{x}_2 + 2cx_2 = \alpha(x_1 - x_2).$$

Учитывая, что перемещение штока зависит от угловой скорости кривошипа

$$x_1 = r \sin \omega t,$$

получим

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + 2cx_2 = \alpha\omega r \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{x}_2 + 2n\dot{x}_2 + p_0^2 x_2 = 2n\omega r \cos \omega t,$$

где

$$2n = \alpha/m, \quad p_0^2 = 2c/m.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_2 = 2n\omega r \sin(\omega t + \xi) / \sqrt{(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2};$$

$$\operatorname{tg} \xi = 2n\omega / (p_0^2 - \omega^2).$$

Наибольшие напряжения в пружине возникают при ее наибольшей осадке, т. е. при  $\sin(\omega t + \xi) = 1$ . Так как по условию  $\omega = p_0$ , то  $x_{2\max} = r$ .

Сила, соответствующая этой осадке, будет равна

$$P_1 = cr.$$

Полная сила в пружине

$$P = P_1 + mg/2 = cr + mg/2.$$

Наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = 8(cr + mg/2)D(\pi d^3).$$

63.

$$p = \sqrt{p_0^2 - n^2} \quad (\text{где } p_0^2 = c/m, \quad n = \alpha/2m); \quad \omega_1 = 0;$$

$$\omega_2 = \sqrt{2(p_0^2 - 2n^2)}.$$

64. Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2nx + p_0^2 x = F_0 \sin xt, \quad (1)$$

где  $x$  — горизонтальное смещение центра массы системы, отсчитанное от положения статического равновесия;  $2n = \alpha/(m_1 + m_2)$ ;  $p_0^2 = c/(m_1 + m_2)$ ;  $F_0 = m_0\omega^2 e/(m_1 + m_2)$ .

Решение уравнения (1) для случая установившегося движения имеет вид

$$x = F_0 \sin(\omega t - \varepsilon) / \sqrt{(\nu_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — фаза колебаний.

Вычислим работу сил трения (рассеянную энергию) за один период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ :

$$A_{\text{тр}} = \int_0^{2\pi/\omega} \alpha \dot{x} dx = \int_0^{2\pi/\omega} \alpha \dot{x} dt = \frac{\alpha F_0^2 \pi \omega}{(\rho_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Значение коэффициента вязкого сопротивления  $\alpha$ , при котором рассеянная энергия становится максимальной, найдем из условия  $dA_{\text{тр}}/d\alpha = 0$ . Дифференцируя уравнение (3) по  $\alpha$  и учитывая, что  $n = \alpha/[2 \times (m_1 + m_2)]$ , получаем

$$(\rho_0^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2 \omega^2 / (m_1 + m_2)^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = |(\rho_0 - \omega^2) / \omega| (m_1 + m_2). \quad (4)$$

Подставив соотношение (4) в уравнение (3), вычислим максимальное значение рассеянной за один период энергии

$$A_{\text{max}} = |\pi F_0^2 (m_1 + m_2) / [2(\rho_0^2 - \omega^2)]|. \quad (5)$$

В резонансном режиме ( $\rho_0 = \omega$ ) работа сил трения обратно пропорциональна коэффициенту трения  $\alpha$ , что следует из уравнения (3).

65. Используя решение задачи 64, из уравнения (2) найдем амплитуду установившихся колебаний:

$$x_0 = m_0 \omega^2 e / [(m_1 + m_2) \sqrt{(\rho_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}].$$

Усилие, действующее на пружины,  $F_1 = cx$ .

Найдем значение угловой скорости, при которой амплитуда усилия, действующего на пружины, равна амплитуде возмущающей силы

$$F_{10} = cx_0 = \frac{cm_0 \omega^2 e}{(m_1 + m_2) \sqrt{(\rho_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = m_0 \omega^2 e.$$

Учитывая, что  $\rho_0^2 = c/(m_1 + m_2)$ , получаем

$$\rho_0^2 = \sqrt{(\rho_0^2 - \omega^2)^2 + n^2\omega^2},$$

откуда

$$\omega_1 = \sqrt{2\rho_0^2 - 4n^2} = \sqrt{2(\rho_0^2 - 2n^2)}.$$

На рис. 225 изображен график изменения амплитуды силы  $F_{10} = cx_0$  в зависимости от частоты возмущающей силы  $\omega$ . Из графика непосредственно следует, что при  $\omega = \omega_1 F_{10} < m_0 \omega^2 l$ , а при  $\omega = \omega_1 F_{10} > m_0 \omega^2 l$ .

66. Дифференциальное уравнение движения массы двигателя имеет вид

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + cy = P_0 \sin \omega t,$$

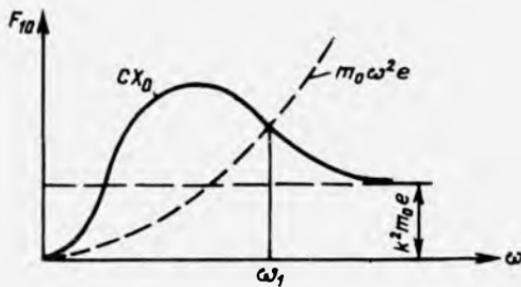


Рис. 225

Или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0 y = (P_0/m) \sin \omega t, \quad (1)$$

где

$$2n = \alpha/m; \quad p_0^2 = c/m; \quad c = 3EJ_x/l^3$$

Приведем решение уравнения (1) для случая установившегося режима колебаний

$$y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{где } A = y_{ст}/\sqrt{(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2}; \quad y_{ст} = P_0/c; \quad \text{tg } \varphi = 2n\omega/(p_0^2 - \omega^2).$$

Полный прогиб балки равен  $y + y_0$ , где  $y_0$  — прогиб от действия силы тяжести мотора  $mg$ .

Таким образом, прогиб балки, а следовательно, и напряжения в ней изменяются по несимметричному циклу.

Вычислим величину напряжения в заделке:

$$\sigma_m = mgl/W_x = 6mgl/(bh^2) = (6 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 1)/(125 \cdot 10^{-6}) = 24 \text{ МПа.}$$

Поскольку напряжения пропорциональны прогибам, амплитудное напряжение можно вычислить следующим образом:

$$\sigma_a = \sigma_{ст}/\sqrt{(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2},$$

где

$$\sigma_{ст} = P_0 l/W_x = \frac{2000 \cdot 1 \cdot 6}{125 \cdot 10^{-6}} = 96 \text{ МПа}; \quad p_0^2 = c/m = 3EJ_x/(ml^3), \\ p_0^2 = 6250 \text{ с}^{-2}.$$

Коэффициент запаса усталостной прочности определим по формуле

$$n_\sigma = \frac{1}{\sigma_a/\sigma_{-1} + \sigma_m/\sigma_B}, \quad (2)$$

в которой единственным неизвестным является коэффициент  $n$ .

Из формулы (2) определяем  $n = 62,64 \text{ с}^{-1}$ , откуда  $\alpha = 2nm = 2 \cdot 62,64 \cdot 50 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ .

67. Динамический коэффициент равен

$$k_{дин} = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2}.$$

После подстановки числовых данных получаем  $k_{дин} = 0,316$ .

68. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  относительно станины имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = y_0 \omega^2 (\sin \omega t + 200 \sin 10 \omega t),$$

где  $y$  — смещение массы  $m$  относительно основания,  $2n = \alpha/m$ ;  $p_0^2 = c/m$ .

Запишем решение этого уравнения для состояния установившегося движения:

$$y = \frac{y_0 \omega^2}{\sqrt{(p_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \alpha_1) + \\ + \frac{200 \omega^2 y_0}{\sqrt{(p_0^2 - 100 \omega^2)^2 + 400 n^2 \omega^2}} \sin(10 \omega t - \alpha_2),$$

где  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2n\omega/(\omega^2 - p_0^2)$ ;  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 20n\omega/(100\omega^2 - p_0^2)$ .

Учитывая, что  $p_0^2 = 0,01 \omega^2$  и  $n = 0,02 \omega$ , окончательно получаем, что относительное смещение массы  $m$ , которое записывает прибор, определяется выражением

$$y = y_0 \sin(\omega t - \alpha_1) + 2y_0 \sin(10 \omega t - \alpha_2).$$

69. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний зеркала имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + c\varphi = M(i),$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p_0^2 \varphi = M(i)/J,$$

где возмущающий момент  $M(i) = F_m a$ .

Вычислим жесткость системы. Приложим к зеркальцу единичный момент  $M_1 = F_1 a = 1$  (рис. 226, а). При этом зеркальце повернется на угол  $\varphi_1$  относительно вертикальной оси. Считая, что  $h \ll l_1$  (рис. 226, б), найдем

$$F_1 = 2Q\beta = 2Q\varphi_1 a/l_1.$$

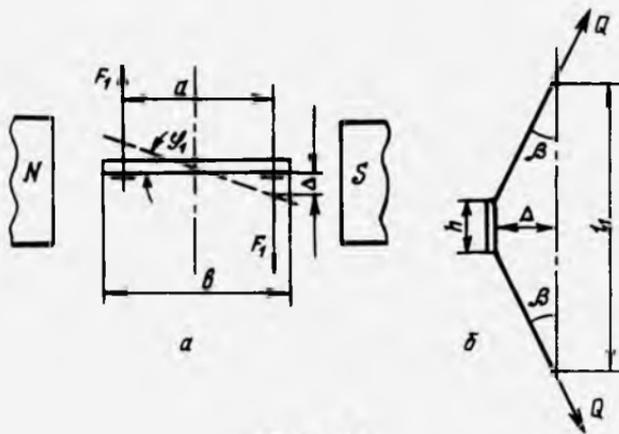


Рис. 226

Отсюда

$$M_1 = F_1 a = 2Q\varphi_1 a^2 / l_1 = c\varphi_1.$$

Следовательно, жесткость системы

$$c = 2Qa^2 / l_1.$$

Момент инерции массы зеркала относительно его оси вращения

$$J = m_3 b^2 / 12.$$

Таким образом, частота свободных колебаний зеркала

$$p = \sqrt{24Qa^2 / (m^3 l_1 b^2) - (\alpha / 2J)^2}.$$

70. Дифференциальное уравнение движения рамки вибратора имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + c\varphi = M_0. \quad (1)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p_0^2\varphi = \bar{M}, \quad (2)$$

где  $\bar{M} = M_0 / J$ .

Поскольку возмущающий момент  $M_0$  является внезапно приложенным, т. е. удовлетворяет условию

$$M_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ M_0 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

а начальные условия имеют следующий вид: при  $t = 0$   $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , то решение уравнения (2) будет таким:

$$\varphi = \varphi_{ст} \left[ 1 - \frac{p_0}{p_1} e^{-nt} \sin(p_1 t + \beta) \right],$$

где  $\varphi_{ст} = M_0 / c = \gamma i / c$ ;

$$p_0 = \sqrt{c/J}; \quad n = \alpha/2J; \quad p_1 = \sqrt{p_0^2 - n^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta = p_1 / n = \sqrt{p_0^2 - n^2} / n.$$

После вычислений получаем

$$c = GJ_p / l = \frac{40 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 16 \cdot 10^{-12}}{32 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 21 \text{ Н/м};$$

$$p_0 = \sqrt{c/J} = \sqrt{2,1 / (1,02 \cdot 10^{-6} \cdot 10)}.$$

При отсутствии демпфирования

$$p_1 = p_0 = 1320 \text{ с}^{-1}; \quad \beta = \pi/2.$$

При демпфировании ( $n = 0,3 p_0$ )

$$p_1 = 1259 \text{ с}^{-1}; \quad \operatorname{tg} \beta = 3,17; \quad \beta \cong 72^\circ 30'.$$

На рис. 227 приведены графики  $\varphi/\varphi_{ст}$  от  $p_1 t$  для двух коэффициентов  $n$ .

71. Обозначим абсолютную угловую скорость маховика  $\dot{\varphi}$ . Тогда инерционный крутящий момент, действующий на маховик, равен  $J\dot{\varphi}$  ( $J$  — полярный момент инерции массы маховика).

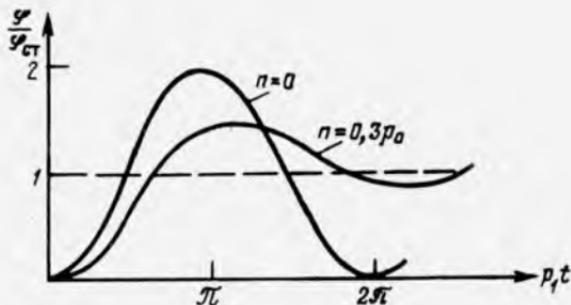


Рис. 227

Сила сопротивления пружины определяется разностью углов поворота маховика и шкива и составляет  $c(\psi - \varphi)$ , где  $\varphi$  — угол поворота шкива.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения маховика имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = \alpha(\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}) + (\psi - \varphi) = 0.$$

Обозначим  $v = \psi - \varphi$ . Тогда

$$J\ddot{v} + \alpha\ddot{v} = cv = -J\ddot{\varphi}.$$

Учитывая, что  $\varphi = \omega = \omega_0 + \omega_1 \cos kt$ , получаем

$$\ddot{v} = 2n\dot{v} + p_0^2 v = k\omega_1 \sin kt,$$

где  $2n = \alpha/J$ ;  $p_0^2 = c/J$ .

Решение последнего уравнения имеет вид

$$v = A \sin(kt - \beta),$$

где  $A = k\omega_1 / \sqrt{(p_0^2 - k^2)^2 + 4n^2 k^2}$ .

Сдвиг фаз

$$\beta = \arctg [2nk / (p_0^2 - k^2)].$$

Логарифмический декремент затуханий определим по формуле

$$\delta = 2\pi n / \sqrt{p_0^2 - n^2}.$$

Вычислим момент инерции маховика:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \frac{b\gamma}{g}.$$

После подстановки числовых значений получаем  $J = 3,68 \cdot 10^{-2}$  кг·м<sup>2</sup>.

Частота собственных колебаний (без затухания) и коэффициент сопротивления соответственно равны

$$p_0 = \sqrt{146 / (3,68 \cdot 10^{-2})} = 62,92 \text{ с}^{-1},$$

$$n = \alpha / 2J = 0,73 / (2 \cdot 3,68 \cdot 10^{-2}) = 9,92.$$

Таким образом, получаем  $\delta = 1$ , сдвиг фаз  $\beta \approx 53^\circ 30'$ .

72. Дифференциальное уравнение движения корпуса вибратора имеет вид

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = P(t),$$

где

$$M = m + 2(m_0 + m_1).$$

Возмущающую силу  $P(t)$  находим как проекцию на вертикальную ось сил инерции неуравновешенных масс:

$$P(t) = 2m_0\omega^2 e \sin \omega t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний вибратора

$$x_0 = x_{ст} / \sqrt{(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2},$$

где  $x_{ст} = 2m_0\omega^2 e/c$ ;  $n = \alpha/2M$ ;  $p_0 = \sqrt{c/M}$ .

73. Дифференциальное уравнение движения измерительного стержня индикатора при изменении давления имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = P(t) = \Delta p(t) F \beta$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k_0^2 x = \Delta p F \beta / m = B \sin \omega t, \quad (1)$$

где

$$2n = \alpha/m; \quad k_0^2 = c/m; \quad B = \Delta p_0 F e \beta / (m \Delta). \quad (2)$$

Решение уравнения (1) будет следующим:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (3)$$

где

$$x_0/x_{ст} = k_0^2 / \sqrt{(k_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (4)$$

Подставляя числовые данные в соотношения (2) и (4), получаем

$$2n = 200, \quad x_{ст} = 1,5 \text{ мм.}$$

График изменения  $x_0/x_{ст}$  в зависимости от  $\omega/k_0$  (амплитудно-частотная характеристика прибора) приведен на рис. 228 (кривая 1).

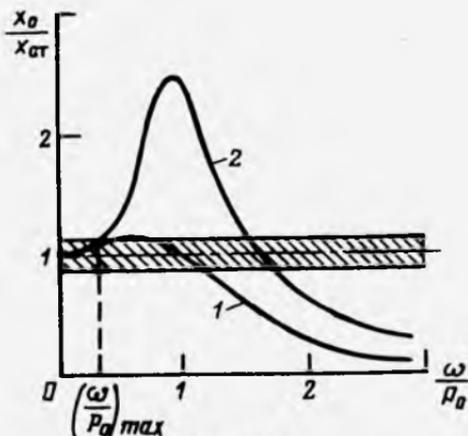


Рис. 228

74. Дифференциальное уравнение движения цилиндра 4 (см. рис. 65) имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (c_1 + c_2 + c_3)x = \Delta pF,$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p_0^2x = B \sin \omega t,$$

где  $2n = \alpha/m = 0,75 \cdot 10^{-3}/0,1 \cdot 10^{-3} = 75 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_0^2 = (c_1 + c_2 + c_3)/m = (2000 + 50 + 1000)/0,1 = 3,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-2}$ ;  $B = p_0 eAF/(m\Delta) = (3,5 \times 10^4 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^{-4})/(0,1 \cdot 10^{-3}) = 14 \text{ м/с}^2$ .

Статическое отклонение  $x_{ст} = B/p_0^2 = 14/(3,5 \cdot 10^4) = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,4 \text{ мм}$ .

Зависимость частоты колебаний цилиндра от амплитуды имеет вид

$$x_0/x_{ст} = [(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2]^{-1/2}.$$

В рассматриваемом случае  $2n/p_0 = 75/\sqrt{3,5 \cdot 10^4} = 0,4$ , поэтому

$$x_0/x_{ст} = [(1 - \omega^2/p_0^2) + (0,4 \omega/p_0)^2]^{-1/2}.$$

График этой функции изображен на рис. 228 (кривая 2).

Там же приведено поле допуска на динамическую погрешность измерения (заштрихованная полоса), уравнение которого можно представить в виде

$$x_0/x_{ст} = 1 \pm 0,1.$$

Точка пересечения поля допуска и амплитудно-частотной характеристики дает наибольшее допустимое значение угловой скорости контролируемой детали  $\omega_{\max} \cong p_0^2/3 = 62,5 \text{ с}^{-1}$ .

75. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Кинетическая и потенциальная энергия, а также диссипативная функция Релея соответственно равны

$$T = mv^2/2 + J_0\dot{\varphi}^2/2;$$

$$\Pi = c(l\varphi - h)^2/2;$$

$$R = \alpha(l\dot{\varphi} - \dot{h})^2/2.$$

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}},$$

получим

$$J_0\ddot{\varphi} + \alpha l(\dot{\varphi} - \dot{h}) + cl(l\varphi - h) = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p_0^2\varphi = b \sin(2\pi\nu t/l_1 - \gamma) + p_0^2 h_0/l,$$

где

$$b = \sqrt{\left(\frac{2\pi\nu h_0 \alpha l}{l_1 J_0}\right)^2 + p_0^4 \left(\frac{h_0}{l}\right)^2} \operatorname{tg} \gamma - p_0^2 l_1 / (4n\pi\nu);$$

$$2n \quad \alpha l^2 / J_0; \quad p_0^2 = cl^2 / J_0.$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$q = A \sin(2\pi\nu t / l_1 - \gamma) + B \cos(2\pi\nu t / l_1 - \gamma) + D.$$

Очевидно, что  $D = h_0 / l$ , а для определения постоянных  $A$  и  $B$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} [p_0^2 - (2\pi\nu/l)^2]A - 2n(2\pi\nu/l_1)B &= b; \\ 2n(2\pi\nu/l_1)A + [p_0^2 - (2\pi\nu/l_1)^2]B &= 0, \end{aligned}$$

из которой находим

$$A = \frac{b [p_0^2 - (2\pi\nu/l_1)^2]}{[p_0^2 - (2\pi\nu/l_1)^2]^2 + 4n^2 (2\pi\nu/l_1)^2};$$

$$B = \frac{2nb(2\pi\nu/l_1)}{[p_0^2 - (2\pi\nu/l_1)^2]^2 + 4n^2 (2\pi\nu/l_1)^2}.$$

Решение уравнения движения (1) можно представить в виде

$$q = q_0 \sin(2\pi\nu t / l_0 + \beta) + h_0 / l,$$

где

$$q_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{b}{\sqrt{[p_0^2 - (2\pi\nu/l_1)^2]^2 + 4n^2 (2\pi\nu/l_1)^2}}.$$

Максимальное значение амплитуды колебаний в зависимости от скорости движения прицепа находим из условия

$$d\varphi_0/d\nu = 0,$$

или

$$\begin{aligned} 2(2n/l)^2 h_0^2 [p_0^4 - 2p_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4n^2 \omega^2] + 4[(2n/l)^2 h_0^2 \omega^2 + \\ + p_0^4 (h_0/l)^2] (p_0^2 - \omega^2 + 2n_2) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega = 2\pi\nu/l_1$ .

После преобразований выражения (2) имеем

$$n^2 \omega^4 + p_0^4 \omega^2 - p_0^6 = 0.$$

При отсутствии затухания ( $n=0$ ) из последнего уравнения получаем, что наибольшего значения амплитуда вынужденных колебаний достигает при резонансе  $\omega = p_0$  или  $\nu_* = p_0 l_1 / 2\pi$ .

При наличии затухания в системе

$$\omega = \sqrt{-p_0^4/2n^2 \pm \sqrt{p_0^8/4n^4 + p_0^6/n^2}}.$$

Поскольку физический смысл имеет только действительный корень, то

$$\nu_* = (l/2\pi) \sqrt{-p_0^4/2n^2 + \sqrt{p_0^8/4n^4 + p_0^6/n^2}}.$$

76. Аналогично уравнению (5) решения задачи 47 дифференциальное уравнение движения диска представим в виде

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi + \text{sign} \dot{\varphi} c^* \varphi = M_0 \sin(\omega t + \gamma),$$

где  $c = \delta_{22}/(\delta_{11}\delta_{12} - \delta_{12}^2)$ ,  $c^* = \mu R c_1$ .

Считая, что в некоторый момент времени  $t_0 = 0$  в режиме установившихся колебаний отклонение системы максимально, дифференциальное уравнение на первом участке движения представим в виде

$$\varphi_1 + p_0^4 \varphi_1 = \mu \sin(\omega t + \gamma), \quad (1)$$

где  $p_0^4 = (c - c^*)/J$ ,  $\mu = M_0/J$ .

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi_1 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + [\mu / (p_1^2 - \omega^2)] \sin(\omega t + \gamma),$$

где  $\gamma$  — начальная фаза возмущающего момента.

Уравнение движения на втором участке (см. решение задачи 47) будет следующим:

$$\varphi_2 + p_2^2 \varphi_2 = \mu \sin(\omega t + \gamma), \quad (2)$$

где  $p_2^2 = (c + c_*)/J$ .

Запишем решение уравнения (2):

$$\varphi_2 = C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t + [\mu / (p_2^2 - \omega^2)] \sin(\omega t + \gamma). \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся следующими условиями:

1) при движении системы на первом участке при  $t = 0$  имеем  $\varphi_1 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \varphi_{1\max}$ ;

2) при движении системы на втором участке при  $t = t_1$  имеем  $\varphi_2 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1$ .

В конце второго участка (из условия периодичности) при  $t = t_2 = \pi/\omega$  имеем  $\varphi_2 = 0$ , а  $\dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_{1\max}$ .

Таким образом, для решения задачи получаем следующую систему из шести уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{aligned} & C_1, C_2, C_3, C_4, t_1, \gamma: \\ & p_1 C_2 + [\mu \omega / (p_1^2 - \omega^2)] \cos \gamma = 0; \\ & \varphi_{1\max} = C_1 \cos p_1 t_1 + C_2 \sin p_1 t_1 + [\mu / (p_1^2 - \omega^2)] \sin(\omega t_1 + \gamma); \\ & -p_1 C_1 \sin p_1 t_1 + p_1 C_2 \cos p_1 t_1 + [\mu \omega / (p_1^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_1 + \gamma) = -p_2 C_3 \sin p_2 t_1 + p_2 C_4 \cos p_2 t_1 + [\mu \omega / (p_2^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_1 + \gamma); \\ & C_3 \cos p_2 t_1 + C_4 \sin p_2 t_1 + [\mu / (p_2^2 - \omega^2)] \sin(\omega t_1 + \gamma) = 0; \\ & C_1 + [\mu / (p_1^2 - \omega^2)] \sin \gamma = -\{C_3 \cos p_2 \pi / \omega + C_4 \sin p_2 \pi / \omega + \\ & \quad + [\mu / (p_2^2 - \omega^2)] \sin(\pi + \gamma)\}; \\ & -p_2 C_3 \sin(p_2 \pi / \omega) + p_2 C_4 \cos(p_2 \pi / \omega) + [\mu \omega / (p_2^2 - \omega^2)] \cos(\pi + \gamma) = 0. \end{aligned}$$

77. Точное решение задачи об установившихся колебаниях при наличии в системе кулонова трения оказывается весьма сложным (см. задачу 76). Упрощение может быть достигнуто, если предположить, что и при наличии кулонова трения в системе происходит гармоническое движение по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \gamma).$$

При этом энергия, рассеиваемая за цикл, может быть определена по формуле

$$U = 4\mu NR\varphi_0/2.$$

В последнем выражении учтено, что сила трения  $\mu N$  прямо пропорциональна углу отклонения системы  $\varphi$ , поскольку  $N = c_1\varphi$  (см. решение задачи 47).

При наличии в системе вязкого трения рассеянная энергия будет равна (см. решение задачи 64)

$$U_1 = \alpha \pi \omega \varphi_0^2.$$

Приравняв энергии  $U$  и  $U_1$ , найдем коэффициент эквивалентного вязкого трения:

$$\alpha = 2\mu c_1 / (\pi \omega).$$

Амплитуда вынужденных колебаний системы с вязким сопротивлением, эквивалентным кулоному трению, равна

$$\varphi_0 = \varphi_{ст} / \sqrt{(1 - \omega^2/p_0^2)^2 + (2n\omega/p_0^2)^2},$$

где  $\varphi_{ст} = M_0/c$  — статическое отклонение системы при действии момента  $M_0$ ;  $c$  — угловая жесткость системы;

$$2n = \alpha/J = 2\mu c_1 / (\pi \omega J); p_0^2 = c/J.$$

Угол сдвига фаз  $\gamma$  определим из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = 2n\omega / (p_0^2 - \omega^2).$$

78. Дифференциальное уравнение движения системы представим в виде

$$J\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + c\varphi + \operatorname{sign}\dot{\varphi}c^*\varphi = M_0 + M_1 \sin \omega t. \quad (1)$$

Уравнение эквивалентной линейной системы имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \alpha_0\dot{\varphi} + c\varphi = M_0 + M_1 \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  — коэффициент эквивалентного вязкого сопротивления, определяемый из условия равенства энергии, рассеиваемой за цикл.

Считая, что установившееся движение гармоническое, т. е.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(\omega t + \gamma),$$

где  $\varphi_0 = M_0/c$ , вычислим энергию, рассеиваемую в системе, воспользовавшись уравнением (1).

Энергия, рассеиваемая за период в демпфере вязкого трения, равна  $\pi \alpha \varphi_1 \omega$ , а энергию, рассеиваемую в демпфере куло-

нова трения, можно определить из зависимости момента сил кулонова трения  $M_{\text{тр}} = \mu NR = \mu c_1 R \varphi$  от угла закручивания диска  $\varphi$ . Выражение для  $M_{\text{тр}}$  показывает, что работа, рассеиваемая силами трения за половину периода при несимметричном цикле отклонений, равна

$$[(M_{\text{трmax}} + M_{\text{трmin}}) / 2] 2\varphi_1 = 2\mu c_1 R \varphi_0 \varphi_1,$$

Приравнявая энергии, рассеиваемые за период в заданной и эквивалентной системах, получаем

$$\pi \alpha_n \varphi_1^2 \omega = \pi \alpha \varphi_1 \omega + 4\mu c_1 R \varphi_0 \varphi_1,$$

откуда

$$\alpha_n = \alpha + (4\mu c_1 R / \pi \omega) \varphi_0 / \varphi_1.$$

Амплитуду вынужденных колебаний при наличии вязкого трения вычислим по формуле

$$\varphi_1 = M_1 / c \sqrt{(1 - \omega^2 / p_0^2)^2 + (2n\omega / p_0^2)^2},$$

где  $2n = \alpha_n / J$ ;  $p_0^2 = c / J$ .

Угол сдвига фаз  $\gamma$  определим, как и при вязком трении:

$$\text{tg} \gamma = 2n\omega / (p_0^2 - \omega^2).$$

79. Дифференциальное уравнение движения массы имеет вид

$$\ddot{x} + p_0^2 x = P(t) / m. \quad (1)$$

Возмущающую силу  $P(t)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$P(t) = P_0 \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega t}{1.3} + \frac{\cos 4\omega t}{3.5} + \frac{\cos 6\omega t}{5.7} + \dots \right) \right]. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) равно сумме решений от каждого из возмущений (2):

$$x = \frac{2P_0}{\pi c} - \frac{4P_0}{\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)(p_0^2 - 4n^2\omega^2)}.$$

Отсюда следует, что гармоническое движение смещено относительно положения равновесия на величину  $x_{\text{ст}} = 2P_0 / \pi c$ .

Резонанс наступает при  $p_0 = 2n\omega$ , т. е. при

$$\omega = p_0 / 2; p_0 / 4; p_0 / 6; \dots$$

80. Решение задачи аналогично решению задачи 79. В рассматриваемом случае возмущающую силу можно представить в виде ряда Фурье

$$P(t) = P_0 \left[ \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega t}{1.3} + \frac{\cos 4\omega t}{3.5} + \dots \right) \right].$$

Решение уравнения движения груза относительно положения равновесия имеет вид

$$x = \frac{P_0}{\pi c} + \frac{P_0 \sin \omega t}{2m(p_0^2 - \omega^2)} - \frac{2P_0}{\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)(p_0^2 - 4^2\omega^2)}$$

Полное перемещение груза

$$x_0 = x + mg/c.$$

81. Дифференциальное уравнение движения массы при действии произвольной возмущающей силы  $P(t)$  имеет вид

$$\ddot{y} + p_0^2 y = (1/m)P(t), \quad (1)$$

где  $p_0^2 = c/m$ ;  $c = 3EJ_x/l^3$ .

Общее решение можно получить, используя преобразование Лапласа. Уравнение для изображения функции  $Y(s)$ , соответствующее уравнению (1), представим в виде

$$(s^2 + p_0^2)Y(s) = y_0 s + \dot{y}_0 + f(s)/m, \quad (2)$$

откуда

$$Y(s) = y_0 \frac{s}{s^2 + p_0^2} + \frac{\dot{y}_0}{s^2 + p_0^2} + \frac{1}{m(s^2 + p_0^2)} f(s),$$

где  $y_0 = y(0)$ ,  $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ , а  $f(s)$  — изображение функции  $P(t)$ . Переходя к оригиналу, получаем

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{1}{mp_0} \int_0^t p(\tau) \sin p_0(t - \tau) d\tau.$$

Последний интеграл называют сверткой функций  $P(t)$  и  $\sin p_0 t$ . Воспользуемся в данном случае уравнением (2). Так как  $P(t)$  — дельта-функция первого порядка, изображение которой равно единице, и  $y_0 = \dot{y}_0 = 0$

$$Y(s) = 1/[m(s^2 + p_0^2)],$$

откуда

$$Y_1(t) = \sin p_0 t / (mp_0).$$

Полученное решение называют реакцией системы на единичный импульс.

82. Так как  $P(t) = Q$  и  $y_0 = \dot{y}_0 = 0$ , то воспользовавшись преобразованием Лапласа, получаем

$$(s^2 + p_0^2)Y(s) = Q/(ms),$$

откуда

$$Y(s) = Q/[ms(s^2 + p_0^2)]$$

и тогда

$$y(t) = [Q/(mp_0^2)](1 - \cos p_0 t); \quad \dot{y}(t) = [Q/(mp_0)] \sin p_0 t.$$

Из полученного решения следует, что при внезапном приложении нагрузки прогиб  $y_{\max}$  в два раза больше, чем при статическом действии силы. Действительно.

$$y_{\max} = 2Q/(mp_0) = 2Q/c = 2\delta_{\text{ст.}}$$

83. Рассмотрим силу  $P(t)$ , действующую на массу  $m$  (см. рис. 71). Для случая, показанного на рис. 71, а, в интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$ , решение имеет вид

$$y = y_0(t)P_0,$$

где  $y_2 = (1 - \cos p_0 t)/(mp_0^2)$ .

В интервале времени  $t_1 \leq t \leq \infty$  решение будет следующим:

$$y = P_0[y_2(t) - y_2(t - t_1)].$$

Окончательно получаем:

при  $0 \leq t \leq t_1$

$$y = P_0(1 - \cos p_0 t)/(mp_0^2),$$

при  $t_1 \leq t$

$$y = P_0[\cos p_0(t - t_1) - \cos p_0 t]/(mp_0^2).$$

Аналогично для случая, представленного на рис. 71, б, будем иметь:

при  $0 \leq t \leq t_1$

$$y = P_0(1 - \cos p_0 t)/(mp_0^2),$$

при  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$y = P_0[2 - \cos p_0 t - \cos p_0(t - t_1)]/(mp_0^2)$$

и при  $s \geq t_2$

$$y = P_0[2 \cos p_0(t_2 - t) - \cos p_0(t - s_1) - \cos p_0 t]/(mp_0^2).$$

84. Движение системы при однородных начальных условиях  $y_0 = \dot{y}_0 = 0$  имеет вид (см. решение задачи 81)

$$y = \frac{1}{mp_0} \int_0^{\tau} P(\tau) \sin p_0 \tau d\tau.$$

В рассматриваемом случае

$$y = a(t - \sin p_0 t/p_0)/(mp_0^2); \quad (1)$$

$$\dot{y} = a(t - \cos p_0 t)/(mp_0^2). \quad (2)$$

Решение (1) можно получить и операционным методом. Учитывая, что  $f(s) = a/s^2$ , получаем

$$Y(s) = a/[s^2(s^2 + p_0^2)].$$

откуда (переходя к оригиналу) имеем

$$y(t) = a(t - \sin p_0 t/p_0)/(mp_0^2).$$

85. Уравнение движения

$$\ddot{y} + p_0^2 y = P(t)/m,$$

где  $P(t)$  — функция, составленная из периодически повторяющихся импульсов, имеет периодическое решение с периодом  $T$

вынуждающей силы только при специально подобранных начальных условиях  $y_0 = y(0)$  и  $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ .

Пользуясь правилом отыскания изображения для периодической функции и для дельта-функции, получаем

$$(s^2 + p_0^2)Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 = 1/[m(1 - e^{-sT})].$$

Отсюда

$$Y(s) = (sy_0 + \dot{y}_0)/(s^2 + p_0^2) + 1/[m(s^2 + p_0^2)(1 - e^{-sT})]; \quad (1)$$

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{1}{mp_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sin p_0(t - kT) H(t - kT),$$

где  $H(t)$  — единичная функция Хевисайда.

Из уравнения (1) получаем решение для интервала

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + (\dot{y}_0/p_0) \sin p_0 t + [1/(mp_0)] \sin p_0 t. \quad (2)$$

Для того чтобы решение (2) было периодическим, должны быть выполнены условия периодичности:  $y_0 = y(T)$ ,  $\dot{y}_0 = \dot{y}(T)$ , которые позволяют получить два уравнения для определения нужных начальных условий:

$$y_0(1 - \cos p_0 T) - (\dot{y}_0/p_0) \sin p_0 T = (1/mp_0) \sin p_0 T;$$

$$y_0 \sin p_0 T + (\dot{y}_0/p_0)(1 - \cos p_0 T) = (1/mp_0) \cos p_0 T.$$

Определитель  $D$  системы равен

$$D = 2(1 - \cos p_0 T)/p_0.$$

Если  $T \neq 2k\pi/p_0$ , т. е. отсутствует резонанс (определить  $D \neq 0$ ), то искомые начальные условия имеют вид

$$y_0 = \sin p_0 T / [2(1 - \cos p_0 T) mp_0]; \quad (3)$$

$$\dot{y}_0 = -1/(2m).$$

Подставив условие (3) в уравнение (2), получим искомое периодическое решение  $0 \leq t \leq T$ :

$$y(t) = \frac{1}{2mp_0} \left( \frac{\sin p_0 T}{1 - \cos p_0 T} \cos p_0 t + \sin p_0 t \right),$$

или

$$y(t) = (A/p_0) \sin(p_0 t + \alpha),$$

где  $A = 1/[m \sqrt{2(1 - \cos p_0 T)}]$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \sin p_0 T / (1 - \cos p_0 T)$ .

Таким образом, амплитуда скорости  $x_{\max} = A$ , а амплитуда перемещения  $x_{\max} = A/p_0$ .

**86.** Решение для периода функции  $P(t)$  можно представить в виде

$$P_0(t) = (1/m)[\sigma(t) - \sigma(t - T/2)].$$

Изображения  $P(t)$  и  $y(t)$  равны

$$f(s) = (1 - e^{-Ts/2}) [m(1 - e^{-Ts})] = 1/[m(1 + e^{-Ts/2})],$$

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + p_0^2} \frac{1}{m(s^2 + p_0^2)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{kTs}{2}}.$$

Переходя к оригиналу, имеем

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{1}{mp_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \\ \times \sin p_0 \left( t - \frac{kT}{2} \right) H \left( t - \frac{kT}{2} \right).$$

Как и в задаче 85, периодическое решение с периодом  $T$  возможно только при специальных начальных условиях  $y_0$  и  $\dot{y}_0$ . Найдем их из условий

$$y(T/2) = -y_0; \quad \dot{y}(T/2) = -\dot{y}_0$$

и используем для нахождения решения  $y(t)$  в полупериоде  $0 \leq t \leq T/2$ :

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + (y_0/p_0) \sin p_0 t + (1/mp_0) \sin p_0 t.$$

После вычисления получаем

$$y(t) = \frac{1}{2mp_0} \left( \sin p_0 t - \frac{\sin p_0 T/2}{1 + \cos p_0 T/2} \cos p_0 t \right);$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2m} \left( \cos p_0 t + \frac{\sin p_0 T/2}{1 + \cos p_0 T/2} \sin p_0 t \right).$$

87. В интервале  $0 \leq t \leq T$  функцию  $P(t)$  можно представить в виде

$$P(t) = h[H(t) - H(t-t_1)]$$

и, следовательно, изображения  $P(t)$  и  $y(t)$  имеют вид

$$f(s) = h(1 - e^{-st_1})/[s(1 - e^{-sT})];$$

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + p_0^2} + \frac{h(1 - e^{-st_1})}{ms(s^2 + p_0^2)(1 - e^{-sT})}.$$

Переходя к оригиналу, получаем решение  $y(t)$  для одного периода:

$$y(t) = y_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{y}_0}{p_0} \sin p_0 t + \frac{h}{mp_0^2} [\cos p_0(t-t_1) - \cos p_0 t]. \quad (1)$$

Определим  $y_0$  и  $\dot{y}_0$ , так же как в задаче 85, из условий  $y(T) = y_0$ ,  $\dot{y}(T) = -\dot{y}_0$ :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{h}{2mp_0^2} \frac{1 - \cos p_0 T + \cos(T-t_1) - \cos p_0 t_1}{1 - \cos p_0 T} \\ \dot{y}_0 &= \frac{h}{2mp_0} \frac{\sin p_0 T - \sin p_0(T-t_1) - \sin p_0 t_1}{1 - \cos p_0 T}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив уравнения (2) в выражение (1), после элементарных преобразований находим искомое решение в интервале  $0 \leq t \leq T$ :

$$y(t) = \frac{h \sin p_0 \frac{t_1}{2}}{m p_0^2} \left[ \frac{\cos p_0 \left( t + \frac{T-t_1}{2} \right)}{\sin p_0 \frac{T}{2}} + 2 \sin p_0 \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right].$$

В интервале  $T \leq t \leq \infty$   $y(t)$  изменяется периодически с периодом  $T$ .

88. Дифференциальное уравнение движения  $m$  имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = (1/m) P(t), \quad (1)$$

где  $2n = \alpha/m$ .

Переходя к изображениям, получаем

$$(s^2 + 2ps + p_0^2) Y(s) = 2ny_0 + \dot{y}_0 + sy_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kst}.$$

Для одного периода ( $0 \leq t \leq T$ ) в сумме справа следует взять лишь первое слагаемое, приняв  $k=0$ . Возвращаясь к оригиналам, получаем решение для первого периода:

$$y(t) = e^{-nt} \left[ y_0 \cos \omega_0 t + \frac{n\dot{y}_0 + \dot{y}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \right],$$

где  $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ .

Для того чтобы решение было периодическим с периодом  $T$ , нужно подобрать начальные значения  $y_0$  и  $\dot{y}_0$ , используя условия периодичности:

$$y_0 = y(T); \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(T). \quad (3)$$

Дифференцируя (2), получаем  $\dot{y}(t)$ . Из условий (3) найдем необходимые начальные значения  $y_0$  и  $\dot{y}_0$ :

$$y_0 = \frac{e^{nT} \sin \omega_0 T}{m\omega_0 (e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \omega_0 T + 1)}; \quad (4)$$

$$\dot{y}_0 = \frac{e^{nT} \left( \cos \omega_0 T - \frac{n}{\omega_0} \sin \omega_0 T \right) - 1}{m (e^{2nT} - 2e^{nT} \cos \omega_0 T + 1)}.$$

Подставив уравнения (4) в (2), получим искомое решение в интервале  $0 \leq t \leq T$ , которое справедливо и для последующих интервалов.

#### § 4. Критические состояния и устойчивость колебаний

89. Рассмотрим элементарный объем жидкости, выделенный из трубки сечениями  $x$  и  $x+dx$  (рис. 229). Масса этого объема  $dm_1 = \rho F_0 dx$  (здесь  $m_1 = \rho F_0 \cdot l$  — масса единицы длины столба жидкости).

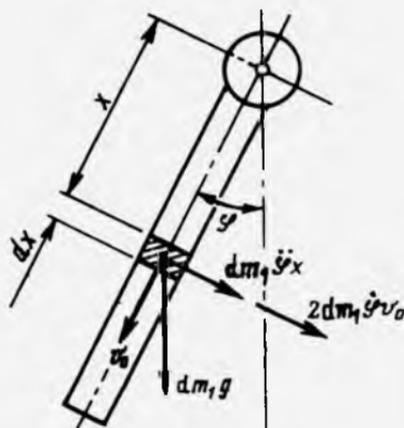


Рис. 229

На рассматриваемый объем действуют сила тяжести ( $dm_1 g$ ), касательная составляющая — сила инерции ( $dm_1 \ddot{\varphi} x$ ) и сила Кориолиса ( $2dm_1 v_0 \dot{\varphi}$ ). Момент сил относительно точки подвеса равен

$$dM = -(g\varphi + \ddot{\varphi}x + 2v_0\dot{\varphi})x dm,$$

или

$$M = \int_0^l dM = -(m_1 l^2 g \varphi / 2 + m_1 \ddot{\varphi} l^3 / 3 + v_0 m_1 l^2 \dot{\varphi}).$$

Запишем момент сил инерции массы трубки и силы тяжести:

$$M_1 = -(m_0 \ddot{\varphi} l^2 / 3 + m_0 g \varphi l / 2).$$

В соответствии с принципом Даламбера

$$M + M_2 = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{3m_1 v_0}{m_0 + m_1 l} \dot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Отсюда находим, что частота собственных колебаний трубки, заполненной движущей жидкостью, равна

$$p = \sqrt{3g/(2l) - \{3m_1 v_0 / [2(m_0 + m_1 l)]\}^2}.$$

Движение является аperiодическим при  $v > v_*$ , где

$$v_* = [(m_0 + m_1 l) / m_1] \sqrt{2g / (3l)}.$$

90. На рис. 230 изображено деформированное состояние системы при ее колебаниях. Изгиб трубы сопровождается появлением центробежных сил инерции в жидкости, величина которых на единицу длины трубы составляет

$$q = m_1 v^2 / \rho_K,$$

где  $m_1 = \frac{\pi d^2}{4} \rho$  — масса жидкости, приходящаяся на единицу трубы;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\rho_K$  — радиус кривизны трубы.

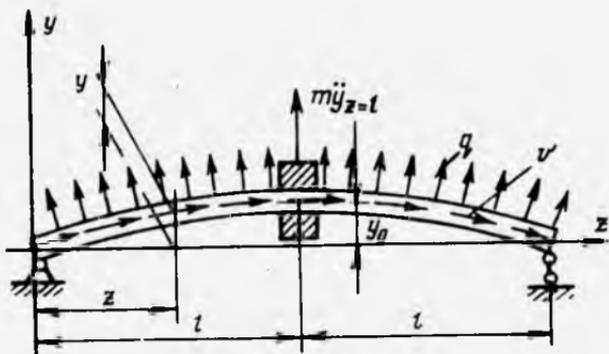


Рис. 230

Дифференциальное уравнение изогнутой оси трубы имеет вид

$$\frac{d^2}{dz^2} [E J_x y''] = q, \quad (1)$$

где  $J_x = \pi d^3 \delta / 8$  — осевой момент инерции сечения трубы.

Так как в выбранной координатной системе  $zOy$  (см. рис. 230) вторая производная прогиба отрицательна, то

$$q = m_1 v^2 / \rho_K = -m_1 v^2 d^2 y / dz^2.$$

С учетом последнего уравнение (1) принимает вид

$$E J_x y + m_1 v^2 y'' = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) представим в виде

$$y = C_1 \cos \nu z + C_2 \sin \nu z + C_3 z + C_4,$$

где  $\nu = \sqrt{m_1 v^2 / (E J_x)}$ .

Постоянные интегрирования определим из граничных условий: 1) при  $z=0$   $y=0$ ; 2) при  $z=0$   $M_n = E J_x y'' = 0$ ; 3) при  $z=l$   $y'=0$ ; 4) при  $z=l$   $Q = -E J_x y''' = -m_1 \ddot{y}_0 / 2$ .

Последнее условие представляет собой выражение для перерезывающей силы  $Q$ , действующей в сечении стержня при  $z=l$ .

С помощью этих граничных условий представим уравнение изогнутой оси трубы в виде

$$\dot{y} = -[(m_1 \ddot{y}_0) (2\nu^3 E J_x)] (\sin Qz / \cos \nu l - \nu z).$$

Отсюда следует, что уравнение движения массы при  $z=l$  имеет вид

$$y_0 + 2EJ_x v^3 \cos vly_0 / [m(\sin vl - vl \cos vl)] = 0.$$

Частота колебаний груза зависит от скорости протекающей жидкости:

$$p = \sqrt{2EJ_x v^3 \cos vl / [m(\sin vl + vl \cos vl)]}. \quad (3)$$

Если скорость протекания жидкости  $v=0$ , то из выражения (3) получаем известную формулу для определения частоты собственных колебаний

$$p = \sqrt{6EJ_x / (ml^3)}.$$

Частота колебаний равна нулю при  $\cos vl=0$ , т. е. при  $vl = \pi/2$ . Следовательно, критическая скорость протекания жидкости

$$v_* = v \sqrt{EJ_x / m_1} = (\pi/2l) \sqrt{EJ_x / m_1}.$$

91. Рассмотрим элементарный объем жидкости, движущейся по радиальному отверстию со скоростью  $v$  (рис. 231).

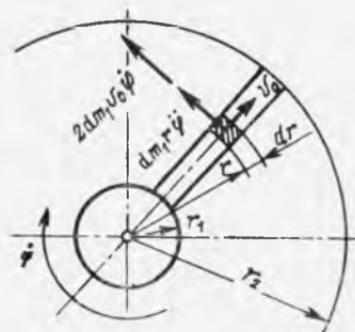


Рис. 231

В процессе малых колебаний на него действуют дополнительная сила инерции переносного движения  $dm_1 r \ddot{\varphi}$  и сила Кориолиса  $2dm_1 v_0 \dot{\varphi}$ . Момент этих сил относительно оси вращения равен

$$dM = -dm_1 r^2 \ddot{\varphi} - 2dm_1 v_0 \dot{\varphi} r,$$

где  $m_1$  — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины отверстия;  $\dot{\varphi}$  — отклонение угловой скорости диска от стационарного значения  $\omega$ .

Полный момент сил инерции жидкости

$$M = -n \int_{r_1}^{r_2} (r^2 \ddot{\varphi} + 2v_0 \dot{\varphi} r) m_1 dr =$$

$$= -nm_1 [\ddot{\Psi} (r_2^3 - r_1^3)/3 + v_0 \dot{\Psi} (r_2^2 - r_1^2)].$$

Кроме того, при колебаниях диска на него действуют момент инерции  $I_{\Phi}$  и момент упругих сил со стороны вала  $c\Phi$ .

С учетом всех действующих на диск сил дифференциальное уравнение его малых свободных колебаний можно представить так:

$$\ddot{\Phi} + \frac{nv_0 m_1 (r_2^2 - r_1^2)/3}{J - nm_1 (r_2^3 - r_1^3)/3} \dot{\Phi} + \frac{c}{J + nm_1 (r_2^3 - r_1^3)/3} \Phi = 0.$$

Найдем отсюда частоту собственных малых колебаний диска с учетом протекающей жидкости и скорость  $v_*$  (из условия  $p_1 = 0$ ):

$$p_1 = \sqrt{\frac{c}{J + nm_1 (r_2^3 - r_1^3)/3} - \frac{1}{4} \left( \frac{nv_0 m_1 (r_2^2 - r_1^2)}{J + nm_1 (r_2^3 - r_1^3)/3} \right)^2},$$

$$v_* = \sqrt{\frac{4c |J + nm_1 (r_2^3 - r_1^3)/3|}{nm_1 (r_2^2 - r_1^2)}}.$$

92. Решение этой задачи отличается от решения задачи 90 только определением перерезывающей силы. При наличии пружины следует считать, что

$$Q = -EJ_x y'''' = -(m\ddot{y}_0 + cy_0)/2,$$

откуда выражение для критической скорости протекания жидкости имеет вид

$$\lg vl = (v lc - 2EJ_x v^3) / c.$$

93. Рассмотрим отклоненное состояние диска (рис. 232, а). В этом положении на диск действует упругая восстанавливающая сила

$$\vec{F}_e = -c\vec{r}_1,$$

где  $c$  — жесткость вала при изгибе ( $c = 6EJ_x/l^3$ ).

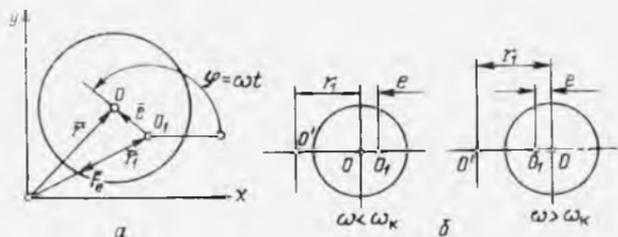


Рис. 232

Так как  $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{e}$ , то упругая восстанавливающая сила

$$\vec{F}_e = -c(\vec{r} - \vec{e}).$$

В этом случае дифференциальное уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$m\ddot{r} + c(\bar{r} - \bar{e}) = 0, \quad (1)$$

где  $m$  — масса диска.

Представим уравнение (1) в проекциях на неподвижные координатные оси  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + cx &= ce \cos \omega t, \\ m\ddot{y} + cy &= ce \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При установившемся движении решение системы уравнения (2) будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} x &= [ep_0^2 / (p_0^2 - \omega^2)] \cos \omega t; \\ y &= [ep_0^2 / (p_0^2 - \omega^2)] \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $p_0 = \sqrt{c/m}$ .

Из уравнений (3) следует, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает при  $\omega \rightarrow p_0 = \sqrt{c/m}$ .

При  $\omega < \omega_0$  отклонение центра тяжести диска от оси вращения равно  $r_1 + e$ , а при  $\omega > \omega_0$  смещение центра тяжести диска происходит в сторону центра вращения, т. е. центр тяжести диска находится на расстоянии  $r_1 - e$  от оси вращения (рис. 232, б).

Как следует из выражений (3), при весьма высоких скоростях вращения ( $\omega \rightarrow \infty$ ) происходит самоцентрирование диска (смещение  $r$  стремится к нулю).

В рассматриваемом случае масса диска

$$m = \pi D^2 h \rho / 4, \quad m = 0,625 \text{ кг.}$$

Жесткость вала

$$c = 6EJ_x / l^3, \quad c = 2,35 \text{ кН/м}$$

Частота собственных колебаний

$$p_0 = \sqrt{c/m}, \quad p_0 = 61,4 \text{ с}^{-1}.$$

Отклонение вала от положения равновесия (см. уравнения (3))

$$r_1 = r - e = \sqrt{x^2 + y^2} - e = e\omega^2 / (p_0^2 - \omega^2),$$

или

$$r_1 = \frac{e}{1 - \omega^2/p_0^2}, \quad r_1 = 1,6 \text{ мм.}$$

Определим силу, которая отклоняет стержень на 1,6 мм:

$$P = c\delta = cr_1, \quad P = 3,77 \text{ Н}$$

и вычислим наибольшие напряжения в вале по формуле  $\sigma = M_H / W_x$  (где  $M_H = Pl/2$ ,  $W_x = \pi d^3/32$ ). Окончательно получаем  $\sigma = 38,4 \text{ МПа}$ .

$$94. \omega_* = \sqrt{3EJ_x/(ml^3)}.$$

96. В отклоненном положении (рис. 233) на вращающийся вал действует инерционная распределенная нагрузка интенсивностью

$$q = m_0 \omega^2 y,$$

где  $m_0$  — масса единицы длины вала;  $\omega$  — угловая скорость вала;  $y$  — прогиб вала.

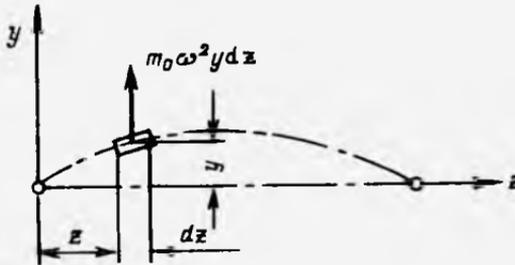


Рис. 233

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси вала в системе координат, вращающейся с валом:

$$EJ_x y^{IV} = q = m_0 \omega^2 y. \quad (1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - k^4 = (\lambda^2 - k^2)(\lambda^2 + k^2) = 0,$$

где  $k^4 = m_0 \omega^2 / (EJ_x)$ .

Запишем решение уравнения (1)

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 \operatorname{sh} kz + C_4 \operatorname{ch} kz$$

и приведем граничные условия при шарнирном опирании концов вала:

$$y = y'' = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$y = y'' = 0 \text{ при } z = l.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем систему, состоящую из четырех однородных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0; \\ C_2 + C_4 = 0; \\ -k^2 C_2 + k^2 C_4 = 0; \\ -C_1 k^2 \sin kl - C_2 k^2 \cos kl + C_3 k^2 \operatorname{sh} kl + C_4 k^2 \operatorname{ch} kl = 0. \end{cases}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, находим

$$\sin kl \cdot \operatorname{sh} kl = 0.$$

Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения  $kl = \pi$ , т. е. критическая угловая скорость вала равна

$$\omega_* = (\pi^2/l^2) \sqrt{EJ_x/m_0}.$$

96. Уравнение упругой линии при изгибе вала в системе координат, вращающейся вместе с валом, имеет вид (см. задачу 95):

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 \operatorname{sh} kz + C_4 \operatorname{ch} kz,$$

где  $k' = m_0 \omega^2 / (EJ_x)$ .

В случае консольного закрепления (см. рис. 81, а) граничные условия будут следующие:

$$\text{при } z=0 \quad y=y'=0;$$

$$\text{при } z=l \quad y''=y'''=0,$$

что позволяет для определения критической угловой скорости получить уравнение вида

$$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = -1. \quad (1)$$

Решение последнего уравнения наиболее просто получить графически. Для этого достаточно найти координаты  $(kl)_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) пересечения левой части уравнения (1) с прямой  $\eta = -1$  (рис. 234).

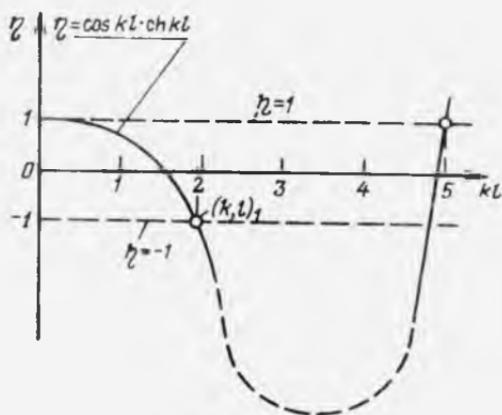


Рис. 234

Наименьший корень этого уравнения  $(kl)_1 \cong 1,875$ , а критическая угловая скорость

$$\omega_* = (3,52/l^2) \sqrt{EJ_x/m_0}.$$

В случае крепления вала, как показано на рис. 81, б, соответственно имеем

$$\text{при } z=0 \quad y=y'=0;$$

$$\text{при } z=l \quad y=y'=0,$$

что позволяет получить следующее уравнение для определения критической угловой скорости:

$$\cos kl \cdot \operatorname{sh} kl = 1.$$

Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения  $(kl)_1 = 4,9$ , а критическое значение угловой скорости

$$\omega_* = (24/l^2) \sqrt{EJ_x/m_0}.$$

97. В отклоненном от прямолинейного положения равновесия состоянии на каждую единицу трубы действуют сила инерции, вызванная вращением трубы с жидкостью, равная  $(m_0 + m_1)\omega^2 y$ , и центробежная сила инерции движущейся жидкости, вызванная искривлением вала  $m_1 v^2/\rho = -m_1 v^2 y''$  (рис. 235) (знак минус определяется знаком кривизны).

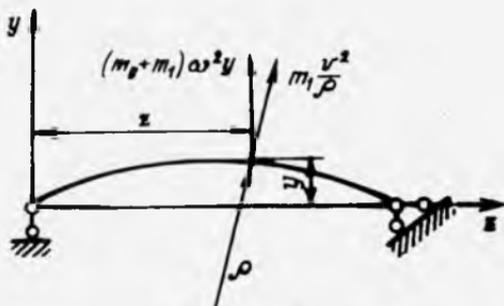


Рис. 235

Дифференциальное уравнение изогнутой оси вала представим в виде

$$EJ_x y^{IV} = (m_0 + m_1)\omega^2 y - m_1 v^2 y'', \quad (1)$$

или

$$y^{IV} + k_1^2 y'' - k_2^4 y = 0,$$

где

$$k_1^2 = m_1 v^2 / (EJ_x); \quad k_2^2 = (m_0 + m_1)\omega^2 / (EJ_x).$$

Характеристическое уравнение для уравнения (1) имеет вид

$$\lambda^4 + k_1^2 \lambda^2 - k_2^4 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{(k_1^2 + \sqrt{k_1^4 + 4k_2^4})/2};$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{(\sqrt{k_1^4 + 4k_2^4} - k_1^2)/2}.$$

Решение уравнения (1) получим в виде

$$y = C_1 \sin \lambda_1 z + C_2 \cos \lambda_2 z + C_3 \operatorname{sh} \lambda_3 z + C_4 \operatorname{ch} \lambda_4 z.$$

Постоянные интегрирования определим из условий

$$\text{при } z=0 \quad y=0 \text{ и } y''=0;$$

$$\text{при } z=l \quad y=0 \text{ и } y''=0.$$

Критическую угловую скорость найдем из уравнения

$$\sin \lambda_1 l \cdot \operatorname{sh} \lambda_3 l = 0. \quad (2)$$

Левая часть уравнения (2) равна нулю в следующих случаях:  $\lambda_1 f = k\pi$ ;  $\lambda_3 = 0$ , т. е. при  $\omega = 0$ .

При  $k=1$ , т. е.  $\lambda_1 l = \pi$ , получим значение критической угловой скорости

$$\omega_* = \sqrt{\pi^4 E J_x / [l^4 (m_0 + m_1)] - \pi^2 m_1 v^2 / [l^2 (m_0 + m_1)]}.$$

98. В соответствии с принципом Даламбера, уравнение движения рычага 2 можно получить, взяв сумму моментов относительно точки  $A$  всех сил, действующих на рычаг:

$$J_A \ddot{\varphi} + m_2 \varphi l_1^2 / 2 + c l_1^2 \varphi / 2 - m_1 \omega^2 l_2^2 \varphi = 0,$$

где  $J_A \ddot{\varphi}$  — момент силы инерции рычага при колебательном движении;  $m_2 \varphi l_1^2$  — момент силы инерции штока;  $c l_1^2 \varphi$  — момент силы сжатия пружины;  $m_1 \omega^2 l_2^2 \varphi$  — момент дополнительной инерционной центробежной силы, возникающей при отклонении рычага при колебании на угол  $\varphi$ ;  $\omega = \omega_1 R_1 / R$ .

Отсюда собственная частота колебаний штока

$$p = \sqrt{\frac{c l_1^2 / 2 - m_1 \omega^2 l_2^2}{J_A + m_2 l_1^2 / 2}}.$$

При  $\omega^2 \geq \omega_*^2 = c l_1^2 / (2 m_1 l_2^2)$  малые колебания масс  $m_1$  становятся неустойчивыми и нормальная работа чувствительного элемента регулятора скорости нарушается, тем самым критическое значение угловой скорости  $\omega$  является верхним пределом рабочих угловых скоростей регулятора.

99. При малых колебаниях грузов  $m_1$  их горизонтальные смещения  $\Delta r$  связаны с вертикальным смещением  $\Delta y$  втулки массой  $m_2$  соотношением

$$\Delta y = [l_1 / (l_1 + l_2)] (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \Delta r = k \Delta r.$$

Для составления дифференциального уравнения движения грузов воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dq} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (1)$$

Составим выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{m_2 \Delta y^2}{2} + 2 \frac{m_1 \Delta y^2}{2 k^2} + 2 \frac{m_1 (r + \Delta y / k)^2 \omega^2}{2};$$

$$\Pi = m_2 g (y_0 + \Delta y) + c (y_0 + \Delta y)^2 / 2.$$

где  $y_0$  — сжатие пружины при стационарном режиме работы регулятора.

Принимая на обобщенную координату  $q$  смещение  $\Delta y$ , из уравнения (1) получим

$$\left( m_2 + \frac{2 m_1}{k^2} \right) \ddot{\Delta y} + \left( c - \frac{2 m_1 \omega^2}{k^2} \right) \Delta y + m_2 g + c y_0 - \frac{2 m_1 r \omega^2}{k} = 0.$$

Так как в стационарном режиме  $\Delta y = \dot{\Delta y} = 0$ , то

$$m_2 g + c y_0 - 2 m_1 r \omega^2 / k = 0,$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение малых колебаний регулятора можно привести к виду

$$\Delta \ddot{y} + p^2 \Delta y = 0,$$

где частота собственных колебаний системы

$$p = \sqrt{(k^2 c - 2 m_1 \omega^2) / (k^2 m_2 + 2 m_1)}. \quad (2)$$

Из выражения (2) следует, что существует критическая угловая скорость регулятора

$$\omega_* = k^2 c / (2 m_1),$$

при которой собственная частота колебаний равна нулю.

100.

$$l_* = \frac{m_2 g / (4c) - D}{2} + \sqrt{\left(\frac{m_2 g}{8c}\right)^2 - \frac{m_2 g D}{8c}}.$$

101. При малых колебаниях стержня относительно положения динамического равновесия на стержень действуют момент сил инерции, равный  $J_0 \ddot{\varphi}$ , сила тяжести  $Q = mg$  и центробежная сила инерции, направленная перпендикулярно оси вращения и равная  $0,5 m l \omega^2 \sin(\alpha + \varphi)$  (здесь угол  $\alpha$  определяет положение динамического равновесия, а  $\varphi$  — малое отклонение от положения динамического равновесия).

Уравнение малых колебаний стержня получим в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ . Стержень может поворачиваться относительно оси, проходящей через шарнир. Для положения стержня, показанного на рис. 85, эта ось перпендикулярна плоскости чертежа и проходит через точку  $O$ .

Приравнивая сумму моментов сил, действующих на стержень, и момента инерции стержня относительно этой оси нулю, получаем уравнение

$$-J_0 \ddot{\varphi} + \frac{m l}{2} \omega^2 \sin(\alpha + \varphi) \frac{2}{3} l \cos(\alpha + \varphi) - Q \frac{1}{2} \sin(\alpha + \varphi) = 0.$$

Учитывая, что  $J_0 = m l^2 / 3$ , и считая угол  $\varphi$  малым, имеем

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \alpha - \omega^2 \cos 2\alpha \right) \varphi + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{\omega^2}{2} \sin 2\alpha = 0. \quad (1)$$

Два последних слагаемых в этом уравнении соответствуют положению динамического равновесия при  $\varphi = \ddot{\varphi} = 0$ , т. е. их сумма равна нулю:

$$1,5g \sin \alpha / l - 0,5\omega^2 \sin 2\alpha = 0.$$

Следовательно, положение равновесия возможно при двух значениях угла  $\alpha$ :

$$\alpha_1 = 0 \text{ и } \alpha_2 = \arccos[3g / (2\omega^2 l)]. \quad (2)$$

При  $\alpha_1=0$  из уравнения (1) следует, что колебания будут устойчивыми при

$$\omega^2 < 1,5g/l.$$

Критическая угловая скорость, при которой состояние равновесия неустойчиво, равна  $\omega_* = \sqrt{1,5g/l}$ .

Подставив в уравнение (1)  $\alpha_2$ , получим, что при

$$\omega^2 > 3g/(2l)$$

любое отклоненное состояние равновесия является устойчивым.

102.

$$\omega_* = \sqrt{g/l}; \quad p = \sqrt{g/l - \omega^2} \quad \text{и} \quad p = \omega \sqrt{1 - [g/(l\omega^2)]^2}.$$

103. Кинетическая энергия груза при малых колебаниях равна

$$T = 0,5mx^2 + 0,5m\omega^2x^2,$$

где  $x$  — смещение груза, отсчитанное от оси вращения.

Потенциальная энергия деформации пружин

$$\Pi = 0,5c[(\delta_0 + x)^2 + (\delta_0 - x)^2] = c(\delta_0^2 + x^2).$$

Составляя функцию Лагранжа  $L = T - \Pi$  и подставляя ее в уравнение Лагранжа, получаем

$$\ddot{x} + (2c - m\omega^2)x/m = 0,$$

откуда собственная частота колебаний

$$p = \sqrt{2c/m - \omega^2}.$$

Критическая угловая скорость

$$\omega_* = \sqrt{2c/m}.$$

104. Дифференциальное уравнение относительного движения массы  $m$  имеет вид

$$\ddot{x} + (c - m\omega^2)x/m = 0,$$

где  $x$  — отклонение массы  $m$  от положения динамического равновесия.

Частота колебаний и критическая угловая скорость соответственно равны

$$p = \sqrt{c/m - \omega^2}; \quad \omega_* = \sqrt{c/m}.$$

105. В процессе малых колебаний на пластинку действуют следующие силы:  $Y$  — подъемная сила;  $M_c$  — момент, создаваемый упругим стержнем, и инерционная нагрузка.

Поскольку площадь поверхности пластинки  $s = bh$ , подъемная сила

$$Y = \rho v^2 b h a,$$

где  $\rho$  — плотность воздуха.

Момент  $M_c = c\alpha$ , где  $c$  — угловая жесткость системы [ $c = GJ_p/(2l) = \pi d^4 G/(64l)$ ].

Момент сил инерции пластинки  $J\ddot{\alpha}$ , где  $J = (bh^2\rho_1/3)(h + 3d/2)$  — момент инерции массы пластинки относительно оси вращения ( $\rho_1$  — плотность материала пластинки).

Используя принцип Даламбера, составим дифференциальное уравнение движения в виде суммы моментов всех сил относительно оси вращения:

$$J\ddot{\alpha} + c\alpha - Y(3h/3 + d/2) = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + [c/J - \pi\rho^2 bhh_1/(2J)]\alpha = 0, \text{ где } h_1 = 3h/4 + d/2.$$

Отсюда частота собственных колебаний пластинки

$$p = \sqrt{c/J - \pi\rho^2 bhh_1/(2J)}.$$

Нетрудно видеть, что существует критическая скорость

$$v_* = \sqrt{2c/(\pi\rho bhh_1)},$$

при которой частота колебаний равна нулю — система теряет устойчивость (происходит дивергенция пластинки).

106. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний рычага имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = P_0 R \varphi \text{ или } \ddot{\varphi} + (c - P_0 R) \varphi = 0.$$

Частота собственных колебаний  $p = \sqrt{(c - P_0 R)/J}$ . Критическая сила  $P_* = c/R$ .

107. Сила притяжения массы  $m$  магнитом

$$F = k\Phi_0^2/a_1^2.$$

Если массу сместить в горизонтальном направлении на малую величину  $x$  ( $x \ll a_1$ ) (рис. 236), то возникает сила, равная разности сил притяжения:

$$\Delta F = F_1 - F_2 = k\Phi_0^2/(a_1 - x)^2 - k\Phi_0^2/(a_1 + x)^2 \approx 4k\Phi_0 x/a_1^3,$$

где

$$F_1 = k\Phi_0^2/(a_1 - x)^2; \quad F_2 = k\Phi_0^2/(a_1 + x)^2.$$

Воспользовавшись принципом Даламбера, получим дифференциальное уравнение движения массы:

$$m\ddot{x} + 2T_0 x/l = 4k\Phi_0^2 x/a_1^3,$$

или

$$\ddot{x} + [2T_0/(ml) - 4k\Phi_0^2/(ma_1^3)]x = 0.$$

При малых колебаниях частота собственных колебаний массы в магнитном поле

$$p = \sqrt{2T_0/(ml) - 4k\Phi_0^2/(ma_1^3)}.$$

Интересной особенностью полученного выражения для частоты является зависимость ее от  $\Phi_0$ , которое эквивалентно по своему влиянию «отрицательной упругости».

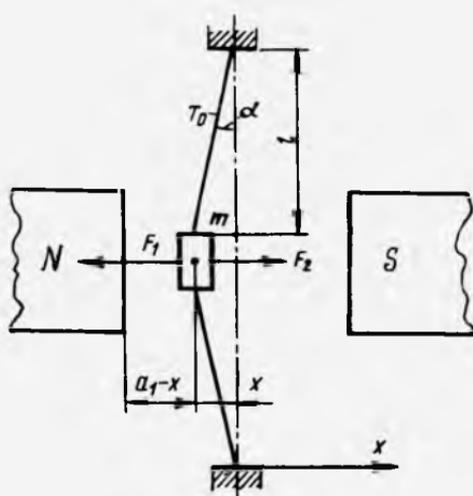


Рис. 236

Каждому значению натяжения  $T_0$  соответствует критическое значение магнитодвижущей силы

$$\Phi_* = \sqrt{T_0 a_1^3 / (2kl)},$$

при котором частота  $p$  равна нулю. При этом значении  $\Phi$  состояние равновесия массы  $m$  является неустойчивым, т. е. колебания невозможны.

$$108. p = \sqrt{bh^3 E / (4l^3 m) - 4k\Phi_0^2 / (ma_1^3)}; \Phi_* = \sqrt{bh^3 E a_1^3 / (16kl^3)}$$

109. Воспользовавшись методом сил, получим дифференциальное уравнение движения массы

$$y = \delta_{11} (-m\ddot{y}) + \delta_{12} R_0,$$

где  $\delta_{11} = l^3 / 48EJ$  — прогиб балки в точке крепления массы  $m$  от единичной силы;  $\delta_{12}$  — прогиб в точке крепления массы  $m$  от единичной силы, приложенной к балке на расстоянии  $z$  от начала координат, или, что то же самое (по теореме взаимности перемещений), прогиб балки на расстоянии  $z$  от единичной силы, приложенной в месте крепления массы  $m$ .

Для  $\delta_{12}$  примем приближенное выражение

$$\delta_{12} \approx \delta_{11} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Так как  $z = vt$ , то окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение колебаний массы  $m$ :

$$\ddot{y} + p_0^2 y = (R_0/m) \sin \pi vt/l. \quad (1)$$

При однородных начальных условиях  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$  решение уравнения (1) имеет вид

$$y = \frac{R_0}{m \left[ \rho_0^2 - \left( \frac{\pi v}{l} \right)^2 \right]} \left( \sin \frac{\pi v t}{l} - \frac{\pi v}{l \rho_0} \sin \rho_0 t \right).$$

Из рассмотрения знаменателя выражения (2) следует, что имеется критическая скорость движения силы  $R_0$ , которую можно найти из условия

$$\rho_0^2 - (\pi v / l)^2 = 0,$$

откуда

$$v_* = l \rho_0 / \pi = (l / \pi) \sqrt{48 E J / (l^3 m)}.$$

Однако при этом значении скорости  $v$  в уравнении (2) имеется неопределенность, раскрывая которую ( $\pi v / l \rightarrow \rho_0$ ), получаем

$$y = -[R_0 / (2m \rho_0)] (t \cos \rho_0 t - \sin \rho_0 t / \rho_0).$$

Так как время движения силы по балке конечно, то конечно и смещение массы  $m$ , т. е. никакой критической скорости нет.

## § 5. Параметрические колебания

110. Для составления дифференциальных уравнений движения воспользуемся методом Даламбера. Спроектируем все силы, действующие на груз, на неподвижные оси  $xO_1y$  (рис. 237):

$$m \ddot{x} = -N \sin \varphi, \quad (1)$$

$$m \ddot{y} = N \cos \varphi - mg. \quad (2)$$

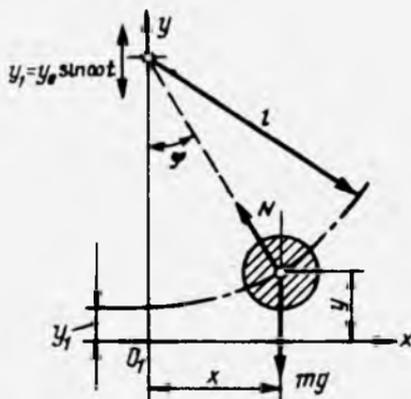


Рис. 237

Исключим из уравнения (1) силу натяжения  $N$ :

$$m(x \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi) = -mg \sin \varphi. \quad (3)$$

Координаты положения груза выразим через угол отклонения стержня от вертикали  $\varphi$  и смещение точки подвеса  $y_1$ :

$$\begin{aligned}y &= l - l \cos \varphi + y_1, \\x &= l \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4)$$

В таком случае

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - y_0 \omega^2 \sin \omega t, \\ \ddot{x} &= l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в уравнение (3) и считая угол  $\varphi$  малым, т. е. полагая  $\cos \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = \varphi$ ,  $\varphi^2 = 0$ , получаем

$$\ddot{\varphi} + [g/l - (y_0 \omega^2/l) \sin \omega t] \varphi = 0.\quad (6)$$

Уравнение (6) обычно приводят к форме уравнения Матье

$$d^2\varphi/d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau)\varphi = 0,$$

где  $a = 4g/(\omega^2 l)$ ;  $2q = 4y_0/l$ ;  $\tau = \omega t/2$ .

В зависимости от конкретных параметров системы малые колебания маятника будут устойчивыми или неустойчивыми. Устойчивым колебаниям соответствует положение изображающей точки на диаграмме Айнса—Стретта в незаштрихованных областях (см. приложение 1). Если параметры  $a$  и  $q$  таковы, что изображающая точка попадает в заштрихованную область, то колебания будут неустойчивыми.

В рассматриваемом случае  $a = 0,784$ ;  $q = 0,04$ , что соответствует точке на диаграмме (см. приложение 1) в устойчивой зоне.

**111.** Решение задачи аналогично решению задачи 110. В отличие от него коэффициент  $a$  в уравнении Матье отрицателен. Таким образом, движение маятника устойчиво при  $\omega \geq 396 \text{ с}^{-1}$  (при выполнении условия  $|a| < q_2/2$ ).

**112.**  $\omega_{\min} \approx 125 \text{ с}^{-1}$ .

**113.** Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний пластинки аналогично уравнению движения, полученному в задаче 110. Если пренебречь силой лобового сопротивления, которая при малых отклонениях пластинки весьма мала, то, считая в указанном решении скорость потока переменной и пренебрегая слагаемыми, содержащими  $v_1^2$ , получим дифференциальное уравнение движения в виде

$$d^2\alpha/d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau)\alpha = 0,$$

где

$$a = \frac{4}{\omega^2} \left( \frac{c l^2}{J} = \frac{3\pi}{4} \frac{b l^2 \rho v_0^2}{J} \right); \quad 2q = -\frac{4}{\omega^2} \frac{3\pi}{2} \frac{b l^2 \rho v_0 v_1}{J}; \quad J = \frac{1}{3} l^3 b \delta \rho.$$

При указанных в задаче параметрах и  $a = 1,53$  коэффициенты уравнения Матье равны:

$$\text{при } v_1 = 5 \text{ м/с} \quad 2q = -0,132, \quad |q| = 0,066;$$

$$\text{при } v_1 = 10 \text{ м/с} \quad 2q = -0,264, \quad |q| = 0,132.$$

Из диаграммы Айнса—Стретта (см. приложение 1) следует, что при изменении амплитуды скорости потока в заданных пределах колебания являются устойчивыми.

114. При составлении дифференциального уравнения движения можно воспользоваться приближенной формулой для определения прогибов стержня при продольно-поперечном изгибе

$$y = y_0 / (1 - P/P_3),$$

где  $y_0 = -my/c$  — прогиб стержня от действия только поперечной нагрузки, которой в рассматриваемом случае является сила инерции массы;  $c$  — жесткость стержня при изгибе;  $P_3 = \pi^2 EI_x / (4l^2)$  — критическое значение сжимающей силы.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{y} + (1 - P/P_3) cy/m = 0,$$

или

$$\ddot{y} + (a + 2q \cos 2\tau) y = 0,$$

где

$$a = \frac{4}{\omega^2} \left( \frac{6EJ_x}{ml} \cdot \frac{24P_0}{\pi^2 l m} \right) = 6,63; \quad 2q = -\frac{4}{\omega^2} \cdot \frac{24P_1}{\pi^2 l m} = -0,39.$$

После подстановки числовых значений находим  $a = 6,63$ ;  $|q| = 0,195$ . На диаграмме Айнса—Стретта (см. приложение 1) точка с такими координатами характеризует устойчивое движение.

115. В рассматриваемом случае жесткость балки при поперечном изгибе  $c = 24EI_x/l^3$ , а критическая сила  $P_3 = \pi^2 EI_x/l^2$ . Коэффициенты уравнения Матье будут определяться следующими выражениями:

$$a = \left( 1 - \frac{P_0}{P_3} \right) \frac{4c}{m\omega^2};$$

$$2q = -\frac{P_1}{P_3} \frac{4c}{m\omega^2}.$$

После подстановки значений получаем  $a = 4,2$ ;  $|q| = 0,02$ . Точка с такими координатами находится в области неустойчивости на диаграмме Айнса—Стретта (см. приложение 1).

116. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  можно представить в виде

$$\ddot{y} + 2(T_0 + T_1 \sin \omega t) y / (ml) = 0,$$

или

$$d^2 y / d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau) y = 0,$$

где

$$a = \frac{4}{\omega^2} \frac{2T_0}{ml} = \frac{4}{25^2} \cdot \frac{2 \cdot 20}{0,25 \cdot 0,2} = 5,12;$$

$$2q = \frac{4}{\omega^2} \frac{2T_1}{ml} = \frac{4}{25^2} \cdot \frac{2 \cdot 10}{0,25 \cdot 0,2} = 2,56; \quad \tau = \omega t / 2.$$

Движение массы  $m$  является устойчивым, так как точка с координатами  $a=5,12$ ;  $q=1,28$  находится в незаштрихованной области диаграммы Айнса—Стретта (см. приложение 1).

117. Дифференциальное уравнение движения груза представим в виде

$$y = -\delta_{11} m \ddot{y},$$

где  $\delta_{11} = l^3 / (3EJ_x) = (l_0 - l_1 \sin \omega t)^3 / (3EJ_x)$ .

Ограничиваясь линейной частью разложения функции  $1/\delta_{11}$  в ряд по степеням  $l_1$ , получаем дифференциальное уравнение движения в виде

$$\ddot{y} + \frac{3EJ_x}{ml_0^3} \left( 1 + 3 \frac{l_1}{l_0} \sin \omega t \right) y = 0.$$

Это уравнение удобно представить в форме уравнения Матье

$$d^2y/d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau)y = 0,$$

где

$$a = \frac{4}{\omega^2} \frac{3EJ_x}{ml_0^3}; \quad 2q = \frac{4}{\omega^2} \frac{9EJ_x}{ml_0^3} \frac{l_1}{l_0}; \quad \omega t = \frac{\pi}{2} + 2\tau.$$

Подставив числовые значения параметров системы в выражения для коэффициентов  $a$  и  $2q$ , получаем  $a=2,5$ ;  $q=0,75$ .

Решение уравнения Матье будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от соотношения между коэффициентами  $a$  и  $q$ . В рассматриваемом случае изображающая точка на диаграмме Айнса—Стретта (см. приложение 1) попадает в незаштрихованную область, т. е. движение груза при выбранных параметрах системы устойчиво.

118. В произвольный момент времени точка перегиба нити  $O$  смещается из своего среднего положения на величину  $y_1$ , а нить отклоняется от положения равновесия на угол  $\varphi$  (рис. 238).

Используя теорему об изменении момента количества движения, запишем

$$\frac{d}{dt} [m(l_0 + y_1)^2 \dot{\varphi}] = -mg(l_0 + y_1) \varphi, \quad (1)$$

откуда

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{y}_1 \dot{\varphi} / (l_0 + y_1) + g\varphi / (l_0 + y_1) = 0. \quad (2)$$

По методу Даламбера рассмотрим равновесие сил, действующих на груз в произвольный момент времени. Это сила натяжения нити  $N$ , сила тяжести  $mg$  и силы инерции  $m\ddot{x}$  и  $m\ddot{y}$ .

Спроецируем все действующие на груз силы на вертикальную и горизонтальную оси:

$$m\ddot{y} = N \cos \varphi - mg, \quad (3)$$

$$m\ddot{x} = -N \sin \varphi. \quad (4)$$

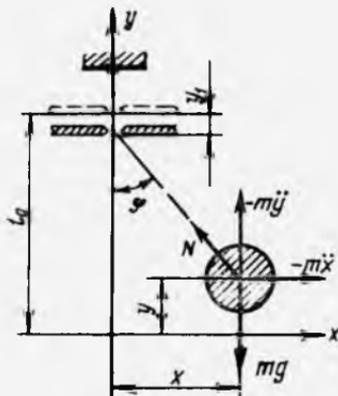


Рис. 238

Выразим координаты груза  $x$  и  $y$  через угол  $\varphi$  и длину  $l_0$ :  
 $x = (l_0 + y_1) \sin \varphi$ ;  $y = (l_0 + y_1) (1 - \cos \varphi)$ .

Подставив эти соотношения в уравнения (3) и (4) и исключив из них силу натяжения  $N$ , получим уравнение (2).

119. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

где  $l = l_0 + l_1 \sin \omega t$ .

120. Изменение положения массы  $m$  вызывает изменение момента инерции системы. В таком случае для составления уравнения движения удобно воспользоваться теоремой об изменении момента количества движения

$$\frac{d}{dt} (J_0 \dot{\varphi}) = \Sigma M_{0i}, \quad (1)$$

где  $J_0$  — полный момент инерции массы системы относительно точки подвеса  $O$ ;  $\varphi$  — угловое отклонение системы от положения равновесия;  $M_{0i}$  — моменты внешних сил, действующих на систему относительно точки  $O$ .

Уравнение движения массы  $m$  относительно рамы имеет вид

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Момент инерции системы

$$J_0 = J_1 + m (l_0 + x_0 \sin \omega t)^2. \quad (2)$$

Момент сил тяжести относительно точки подвеса  $O$  при отклонении системы на угол  $\varphi$  равен

$$\Sigma M_{0i} = -m_1 g l_1 \varphi - mg (l_0 + x_0 \sin \omega t) \varphi. \quad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение движения системы в виде

$$[J_1 + m (l_0 + x_0 \sin \omega t)^2] \ddot{\varphi} + 2m x_0 \omega (l_0 + x_0 \sin \omega t) \times \\ \times \cos \omega t \cdot \dot{\varphi} + g [m_1 l_1 + m (l_0 + x_0 \sin \omega t)] \varphi = 0.$$

121. Решение аналогично решению, приведенному для задачи 120. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2x_0 \cos \omega t}{l_0 + x_0 \sin \omega t} \dot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + x_0 \sin \omega t} \varphi = 0,$$

где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от вертикали.

122. При отклонении вагонетки от положения равновесия на расстояние  $x$  и повороте шкива на угол  $\varphi$  изменение длины троса (рис. 239) составит

$$\Delta l = R\varphi + \sqrt{l_{01}^2 + x^2} - l_{01},$$

или в случае малых колебаний ( $x \ll l_{01}$ )

$$\Delta l = R\varphi.$$

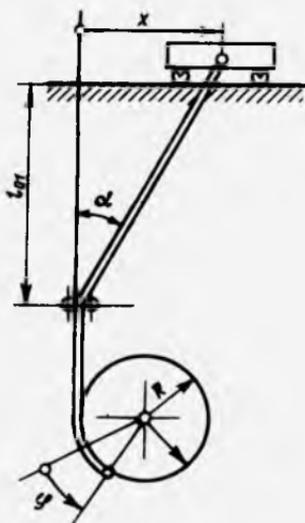


Рис. 239

Отсюда следует, что изменение натяжения в тросе

$$\Delta T = \Delta l E F / l_0 = R E F \varphi / l_0.$$

Тогда дифференциальное уравнение движения вагонетки можно записать так:

$$m\ddot{x} = -(T_0 + \Delta T) \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол, на который отклоняется трос от вертикали при колебании вагонетки.

При малых колебаниях

$$\sin \alpha = \alpha = x / l_{01}. \quad (1)$$

С учетом (1) дифференциальное уравнение движения представим в виде

$$\ddot{x} + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0. \quad (2)$$

Вычислим числовое значение параметров, входящих в выражение (2):

$$a = 4T_0 / (m\omega^2 l_{01}) = 4 \cdot 10^3 / (500 \cdot 10^2 \cdot 0,7) = 0,114;$$

$$2q = 4REF_{\Phi_0} / (m\omega^2 l_0 l_{01}) = 4 \cdot 0,1 \cdot 200 \cdot 10^9 \times \\ \times 10^4 \cdot 0,1 / (500 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot 0,7) = 2,28; \quad q = 1,14.$$

Из диаграммы Айнса—Стретта (см. приложение 1) следует, что малые колебания вагонетки неустойчивы.

123. Дифференциальное уравнение движения массы в магнитном поле имеет тот же вид, что и уравнение в задаче 108:

$$m\ddot{x} + (c - k\Phi^2/a_1^3)x = 0, \quad (1)$$

где  $c = 3EJ_x/l^3$ ;  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \sin \omega t$ .

С учетом малости амплитуды магнитодвижущей силы  $\Phi_1$  уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\ddot{x} + \left( \frac{c}{m} - \frac{k\Phi_0^2}{ma_1^3} - \frac{2k\Phi_0\Phi_1}{ma_1^3} \sin \omega t \right) x = 0,$$

или

$$dx/d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0,$$

где

$$a = \frac{4}{\omega^2} \left( \frac{c}{m} - \frac{k\Phi_0^2}{ma_1^3} \right), \quad 2q = -\frac{4}{\omega^2} \frac{2k\Phi_0\Phi_1}{ma_1^3}.$$

Наносим на диаграмму Айнса—Стретта точку с координатами  $a = 1,03$ ;  $|q| = 0,02$ , находим, что движение массы устойчиво, так как точка находится в незаштрихованной области.

124. При движении шины ее расстояние от проводника равно  $a_1 = a_0 + x$ .

Сила, действующая на шину при ее колебании

$$\Delta F = F_0 - F_2,$$

где

$$F_0 = 2\mu I_1 I_{20} l / a_0;$$

$$F_2 = \frac{2\mu l l (I_{20} + I_{21} \sin \omega t)}{a_0 + x} \approx \frac{2\mu l l}{a_0} (I_{20} + I_{21} \sin \omega t) \left( 1 - \frac{x}{a_0} \right).$$

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + 2cx = \Delta F,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{2c}{m} \left[ 1 - \frac{\mu l l_1}{ca_0^2} (I_{20} + I_{21} \sin \omega t) \right] x = -\frac{2\mu l l_1 I_{21} l}{a_0 m} \sin \omega t.$$

125. Дифференциальное уравнение колебаний рычага имеет вид (см. рис. 90)

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{c}{J} - \frac{P_0 R}{J} - \frac{P_1 R}{J} \sin \omega t \right) \varphi = 0.$$

Обозначив  $\omega t = \pi/2 + 2\tau$ , после преобразований получаем коэффициенты уравнения Матье:

$$a = \frac{4}{\omega^2} \frac{c - P_0 R}{J}; \quad 2q = -\frac{4}{\omega^2} \frac{P_1 R}{J}.$$

Рассчитав числовые значения коэффициентов  $a=6,0$  и  $q=0,4$ , находим, что движение является устойчивым.

126. В произвольный момент времени положение массы определяется координатой

$$x_0 = x_{00} + vt.$$

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний в таком случае имеет вид (см. решение задачи 28)

$$\ddot{y} + \frac{T_0}{m} \frac{l}{(l - x_{00} - vt)(x_{00} + vt)} y = 0.$$

127. Пусть в произвольный момент времени точка подвеса маятника смещена относительно положения равновесия на некоторую величину  $y_0$ , а маятник отклонен от вертикали на угол  $\varphi$  (рис. 240). Тогда дифференциальные уравнения движения массы  $m$  имеют вид

$$m\ddot{x}_1 = -N \sin \varphi; \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_1 = -N \cos \varphi + mg. \quad (2)$$

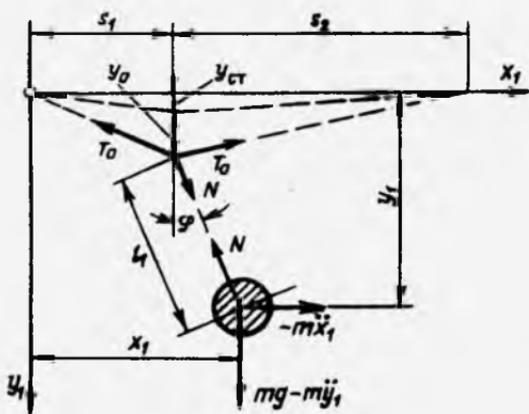


Рис. 240

Подставив в эти уравнения значения координат

$$x_1 = s_1 + l_1 \sin \varphi; \quad (3)$$

$$y_1 = y_{ст} + y_0 + l_1 \cos \varphi$$

и исключив из них силу  $N$ , находим

$$l_1 \ddot{\varphi} - \ddot{y}_0 \sin \varphi = -g \sin \varphi$$

или, полагая угол  $\varphi$  малым,

$$\ddot{\varphi} + (g - \ddot{y}_0) \varphi / l_1 = 0. \quad (4)$$

Из условия равновесия узла точки подвеса маятника следует, что

$$N \cos \varphi = T(y_0 + y_{\text{ст}})/s_1 + T_0(y_0 + y_{\text{ст}})/s_2.$$

Выражая  $N$  через  $\ddot{y}$  с помощью выражения (2) и учитывая соотношения (3), получаем

$$(l/s_1 s_2) T_0 (y_0 + y_{\text{ст}}) = mg - m [\ddot{y} - l_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)].$$

Учитывая, что  $l T_0 y_{\text{ст}} / (s_1 s_2) = mg$  и пренебрегая нелинейными членами в правой части уравнения (поскольку  $\varphi$  — малый угол), представим последнее выражение в виде

$$\ddot{y}_0 = -T_0 y_0 l / (m s_1 s_2),$$

или

$$\ddot{y}_0 - p^2 y_0 = 0, \quad (5)$$

где  $p^2 = T_0 l / (m s_1 s_2)$ .

Решая уравнение (5) с учетом начальных условий ( $t=0$ ,  $y_0 = y_{00}$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ), получаем уравнение движения точки подвеса маятника

$$y_0 = y_{00} \cos pt.$$

Подставим это выражение в уравнение (4):

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l_1} (g + y_0 p^2 \cos pt) \varphi = 0.$$

После замены  $pt = 2\tau$  получаем уравнение Матье

$$d^2 \varphi / d\tau^2 + (a + 2q \cos 2\tau) \varphi = 0,$$

где  $a = 4q / (p^2 l_1)$ ;  $2q = 4y_{00} / l_1$ .

Подставив числовые значения параметров, находим  $a = 0,0687$ ;  $q = 0,665$ , что соответствует устойчивому движению.

Во втором случае получаем  $a = 0,825$ ;  $q = 2$ . Точка с такими коэффициентами попадет в область неустойчивых колебаний.

В рассматриваемом случае, конечно, не может быть беспрерывно нарастающих угловых колебаний, так как система консервативна. Под неустойчивым движением следует понимать неустойчивость вертикальных колебаний (тенденцию к нарастающим колебаниям по углу  $\varphi$ ). Для правильного определения угла  $\varphi$  следует рассмотреть колебания с учетом нелинейных слагаемых.

128. Решение аналогично решению, приведенному для задачи 127. В первом случае движение маятника будет неустойчивым, а во втором — устойчивым. 1)  $a = 0,0981$ ,  $q = 0,5$ ; 2)  $a = 0,0981$ ,  $q = 0,07$ .

## § 6. Случайные колебания

129. При решении задачи 75 получено дифференциальное уравнение малых угловых колебаний системы

$$\ddot{\Phi} + \frac{\alpha l^2}{J_0} \dot{\Phi} + p_0^2 \Phi = \frac{clh}{J_0} + \frac{\alpha lh}{J_0}, \quad (1)$$

где  $p_0^2 = cl^2/J_0$ .

Как известно, зависимость спектральной плотности выхода  $\Phi$  от спектральной плотности входа  $h$  имеет вид

$$S_\Phi(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_h(\omega),$$

где  $|W(i\omega)|^2$  — квадрат модуля частотной характеристики системы.

Частотная характеристика системы равна передаточной функции системы, у которой оператор  $p$  заменен на оператор  $i\omega$ , т. е.

$$W_i(i\omega) = W(p)|_{p=i\omega}.$$

Передаточная функция системы  $W(p)$  равна отношению изображения по Лапласу соответствующей выходной величины к изображению входной величины:

$$W(p) = X_{\text{вых}}(p) / X_{\text{вх}}(p).$$

Передаточная функция для уравнения (1) имеет вид

$$W(p) = \frac{cl/J_0 + \alpha lp/J_0}{p^2 + \alpha l^2 p/J_0 + p_0^2},$$

где  $p$  — оператор дифференцирования ( $p = d/dt$ ).

Частотная характеристика системы

$$iW(i\omega) = \frac{l}{J_0} \frac{(c + \alpha i\omega)}{[(i\omega)^2 + \alpha l^2 i\omega/J_0 + p_0^2]}.$$

Выражения для спектральной плотности  $S_h$  и модуля частотной функции можно представить в виде

$$S_h(\omega) = 10v / [(25v^2 + \omega^2) 2\pi] = 10v / (|5v + i\omega|^2 2\pi),$$

$$|W(i\omega)| = \frac{(cl/J_0)^2 - (\alpha l/J_0)^2 (i\omega)^2}{|(i\omega)^2 + \alpha l^2 (i\omega)/J_0 + p_0^2|}.$$

Тогда выражение для дисперсии угла  $\Phi$  примет вид

$$D_\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(cl/J_0)^2 - (\alpha l/J_0)^2 (i\omega)^2] 10v d\omega}{|(i\omega)^2 + \alpha l^2 i\omega/J_0 + p_0^2|^2 |5v + i\omega|^2},$$

или

$$D_\Phi = \frac{10v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(cl/J_0)^2 - (\alpha l/J_0)^2 (i\omega)^2] d\omega}{|(i\omega)^2 + (5v + \alpha l^2/J_0)(i\omega)^2 + (5v\alpha l^2/J_0 + p_0^2)i\omega + 5vp_0^2|^2}. \quad (2)$$

В приложении 2 даны значения интегралов типа (2). В рассматриваемом случае интеграл (2) соответствует интегралу  $I_3$  из приложения 2:

$$D_\Phi = 10v \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - a_0 a_1 b_2 / a_3}{2a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}, \quad (3)$$

где

$$a_2 < p_0^2 + \alpha l^2 5v/J_0; \quad b_0 = 0; \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \alpha l^2/J_0 +$$

$$+5v; b_1 = -(\alpha l / J_0)^2; b_2 = (cr / J_0)^2; a_3 < 5\rho_0^2.$$

После преобразований выражение (3) принимает следующий вид:

$$\sigma_\varphi^2 = D_\varphi = \frac{5v\rho_0^2 (\alpha l / J_0)^2 + (\alpha l^2 / J_0 + 5v) (cl / J_0)^2}{\rho_0^2 \frac{\alpha l^2}{J_0} \left[ \rho_0^2 + 5v \frac{\alpha l^2}{J_0} + 25v^2 \right]}$$

График изменения  $\sigma_\varphi$  в зависимости от скорости движения прицепа  $v$  показан на рис. 241.

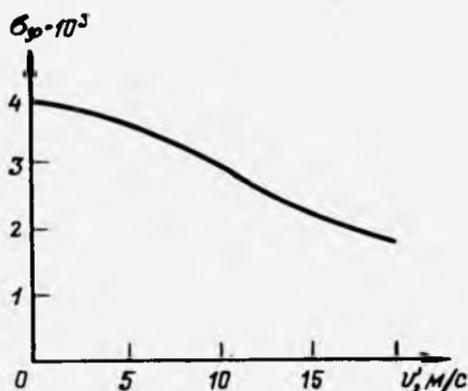


Рис. 241

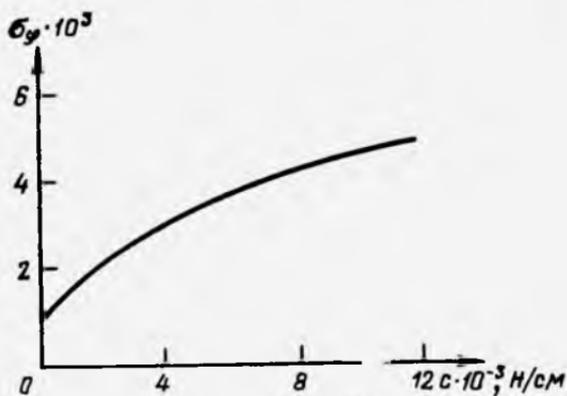


Рис. 242

130. Среднеквадратичное значение отклонения угла определяется выражением (см. решение задачи 129)

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{5v\rho_0^2 (\alpha l / J_0)^2 + (\alpha l^2 / J_0 + 5v) (cl / J_0)^2}{\frac{cl^4 \alpha}{J_0^2} \left[ \frac{cl^2}{J_0} + 5v \frac{\alpha l^2}{J_0} + 25v^2 \right]}}$$

На рис. 242 приведен график изменения  $\sigma_\varphi$  в зависимости от жесткости рессоры  $c$ . Предельное значение  $\sigma_{\varphi_0}$  при  $c \rightarrow \infty$  равно

$$\sigma_{\varphi_*} = \sqrt{J_0(\alpha l^2 / J_0 + 5v) / (\alpha l^4)}.$$

131. Зависимость спектральной плотности производной функции от спектральной плотности функции имеет вид

$$S_{\dot{\varphi}} = \omega^2 S_{\varphi}(\omega). \quad (1)$$

-В этом случае дисперсия скорости

$$D_{\dot{\varphi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Поскольку

$$S_{\dot{\varphi}}(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_h(\omega),$$

выражение для дисперсии скорости представим в виде (см. решение задачи 129)

$$D_{\dot{\varphi}} = \frac{10v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[ \left( \frac{\alpha l}{J_0} \right)^2 (i\omega)^4 - \left( \frac{cl}{J_0} \right)^2 (i\omega)^2 \right] d\omega}{\left| (i\omega)^3 + \left( 5v + \frac{\alpha l^2}{J_0} \right) (i\omega)^2 + \left( 5v \frac{\alpha l^2}{J_0} + p_0^2 \right) i\omega + 5v p_0^2 \right|^2}. \quad (3)$$

Интеграл (3) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{\dot{\varphi}}^2 = \frac{5v \left[ \left( \frac{cl^2}{J_0} \right)^2 + \left( 5v \frac{\alpha l^2}{J_0} + p_0^2 \right) \left( \frac{\alpha l^2}{J_0} \right) \right]^2}{\left[ 25v^2 + 5v \frac{\alpha l^2}{J_0} + p_0^2 \right] \frac{\alpha l^4}{J_0}}.$$

График изменения  $\sigma_{\dot{\varphi}}$  в зависимости от скорости движения прицепа  $v$  приведен на рис. 243.

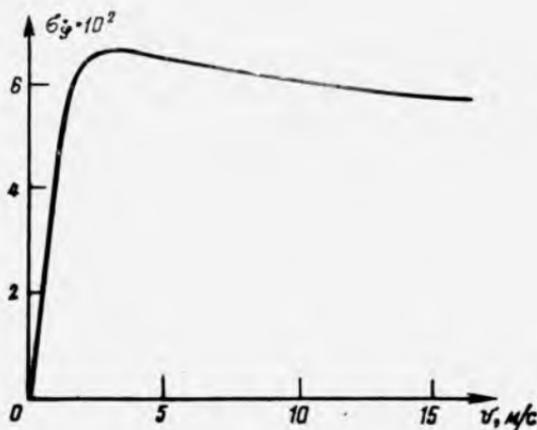


Рис. 243

132. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} / m + p_0^2 y = f m,$$

где  $p_0^2 = c/m$ ;  $c = 6EI_x/l^3 = Ebh^3/12l^3$ .

Спектральная плотность ускорения

$$S_{\ddot{y}}(\omega) = \omega^4 S_y(\omega).$$

Учитывая, что спектральную плотность смещения  $y$  можно представить в виде

$$S_y = |W(i\omega)|^2 S_f = \frac{\beta_1}{m^2 |(i\omega)^2 + \alpha i\omega/m + p_0^2|^2 |\beta_2 + (i\omega)^2|^2 2\pi},$$

найдем дисперсию ускорения

$$D_{\ddot{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1 \omega^4 d\omega}{m^2 \left[ (i\omega)^4 + \left( \frac{\alpha}{m} + \beta^2 \right) (i\omega)^2 + \left( \frac{\alpha}{m} \beta_2 + p_0^2 \right) i\omega + \beta_2 p_0^2 \right]^2}.$$

Из приложения 2 получаем

$$D_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{y}}^2 = \frac{\beta_1 (\alpha \beta_2 / m + p_0^2)}{2m [\alpha \beta_2 / m + p_0^2 + \beta_2^2] \alpha}.$$

После подстановки числовых значений имеем  $\sigma_{\ddot{y}}^2 = 29 \text{ м}^2/\text{с}^4$ .

133. В процессе колебаний на массу  $m$  действует сила

$$F = -m\ddot{y} - \alpha\dot{y} + f = cy.$$

Вследствие симметрии реакции опор

$$R = 0,5 F = 0,5 cy.$$

Выразим спектральную плотность реакции через спектральную плотность перемещения:

$$S_R(\omega) = 0,25c^2 S_y(\omega).$$

Учитывая, что спектральная плотность перемещения массы связана со спектральной плотностью возмущающей силы соотношением (см. задачу 132)

$$S_y(\omega) = \frac{S_f(\omega)}{|(i\omega)^2 + \alpha i\omega/m + p_0^2|^2 2m^2},$$

найдем спектральную плотность реакции

$$S_R = \frac{0,25c^2 \beta_1}{2m^2 \left[ (i\omega)^4 + \left( \frac{\alpha}{m} + \beta^2 \right) (i\omega)^2 + \left( \frac{\alpha}{m} \beta_2 + p_0^2 \right) i\omega + p_0^2 \beta_2 \right]^2 \cdot 2\pi}.$$

Воспользовавшись приложением 2, найдем

$$\sigma_R^2 = \frac{\beta_1 c^2}{4m} \cdot \frac{\alpha/m + \beta_2}{2\alpha (\alpha \beta_2 / m + p_0^2 + \beta_2^2)}.$$

После подстановки числовых значений получаем  $\sigma_R^2 = 3 \text{ Н}^2$ , откуда  $\sigma_R = 1,7 \text{ Н}$ .

Максимальное напряжение в балке

$$\sigma_{\max} = Rl/W_x = 6Rl/(bh^2).$$

Среднеквадратичное отклонение максимального напряжения

$$\sigma_\sigma = \sigma_R l h / (I_x \cdot 2).$$

После подстановки числовых значений находим  $\sigma_\sigma = 10,2$  МПа.

134. При возмущенном движении системы угловая скорость

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega.$$

Если возмущение  $\Delta\Omega$  мало, то момент сопротивления можно найти как

$$M_c(\Omega) = M_c(\Omega_0) + (\partial M_c / \partial \Omega)_{\Omega=\Omega_0} \Delta\Omega.$$

Представим дифференциальное уравнение возмущенного движения при действии на систему случайного момента сопротивления  $\Delta M_c$

$$I d\Delta\Omega/dt = M_d - M_c(\Omega_0) - (\partial M_c / \partial \Omega)_{\Omega=\Omega_0} \Delta\Omega + \Delta M_c.$$

Поскольку  $M_d = M_c(\Omega_0)$ , то

$$I d\Delta\Omega/dt + (\partial M_c / \partial \Omega)_{\Omega=\Omega_0} \Delta\Omega = \Delta M_c.$$

Как известно, зависимость спектральной плотности от корреляционной функции имеет вид

$$S_{\Delta M}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Delta M}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau,$$

или, учитывая выражение для  $K_{\Delta M}$ ,

$$S_{\Delta M} = \frac{1}{2\pi} D \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} D \left[ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{D\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)\pi}.$$

Спектральная плотность случайной угловой скорости  $\Delta\Omega$  равна

$$S_{\Delta\Omega} = |W(i\omega)|^2 \cdot S_{\Delta M},$$

где  $|W(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{J^2\omega^2 + (\partial M_c / \partial \Omega)^2}}$ .

Дисперсия отклонения угловой скорости

$$D_{\Delta\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D\alpha d\omega}{[J^2\omega^2 + (\partial M_c / \partial \Omega)^2] (\omega^2 + \alpha^2)},$$

откуда

$$D_{\Delta\Omega} = \frac{2D}{[(\partial M_c / \partial \Omega)(\alpha J + \partial M_c / \partial \Omega)]}.$$

135. При решении задачи 69 получено дифференциальное уравнение вынужденных колебаний зеркала осцилографа вида

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + p_0^2\varphi = A_i, \quad (1)$$

где  $n = \alpha/i$ ;  $A = aBl \cdot 10/gJ$ .

В случае, когда полный ток  $i = i_0 + \Delta i$ , угол поворота зеркала можно представить в виде  $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ , где  $\varphi_0$  — угол, соответствующий номинальному значению тока  $i_0$ , а  $\Delta\varphi$  — угол, вызванный случайным током  $\Delta i$ .

Для угла  $\Delta\varphi$  из выражения (1) получаем

$$\Delta\varphi + 2n\Delta\dot{\varphi} + p_0^2\Delta\varphi = A\Delta i.$$

Спектральная плотность угла  $\Delta\varphi$  равна

$$S_{\Delta\varphi} = A^2 S_{\Delta i} / |(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2|^2.$$

Дисперсия угла  $\Delta\varphi$  (см. приложение 2) равна

$$D_{\Delta\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{NA^2 d\omega}{|(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2|^2} = \frac{\pi NA^2}{2np_0^2}.$$

Среднеквадратичное отклонение угла  $\Delta\varphi$  будет следующим:

$$\sigma_{\Delta\varphi} = (A/2p_0) \sqrt{2\pi Q/n}.$$

136. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  при кинематическом возбуждении имеет вид

$$\ddot{y} + 2ny + p_0^2 y = p_0^2 y_0,$$

где

$$2n = \alpha/m; \quad p_0^2 = 6EJ_x/(ml^3).$$

Вычислим спектральную плотность вертикального смещения массы

$$S_y(\omega) = p_0^4 S_{y_0}(\omega) / [(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]^2 2\pi.$$

Наибольший изгибающий момент в балке возникает в заделке и, следовательно,

$$M = (-m\ddot{y} - \alpha\dot{y})l.$$

Его спектральная плотность

$$S_M = l^2 | -m(i\omega)^2 - \alpha i\omega |^2 S_y(\omega),$$

или

$$S_M = \frac{20p_0^4 l^2 [m^2(i\omega)^4 - \alpha^2(i\omega)^2]}{2\pi [(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]^2 |10 + i\omega|^2} = \\ = \frac{20p_0^4 l^2 [m^2(i\omega)^4 - \alpha^2(i\omega)^2]}{|(i\omega)^2 + (2n + 10)(i\omega) + (20n + p_0^2)|^2 \cdot 2\pi}.$$

Вычислим среднеквадратичное отклонение изгибающего момента  $M$ :

$$\sigma_M^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega) d\omega = \frac{5p_0^4 l^2 [(2n+10)m^2 + \alpha^2]}{n(20n + p_0^2 + 100)}.$$

После подстановки числовых значений получаем  $\sigma_M^2 = 5,4 \cdot 10^8$  (кН·м)<sup>2</sup>, или  $\sigma_M = 2,32$  кН·м.

Максимальное нормальное напряжение в заделке

$$\sigma_{\max} = M/W_x,$$

Поэтому среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_{\max} = \sigma_M/W_x = 2,32/3,97 \cdot 10^{-5} = 29,3 \text{ МПа.}$$

137. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$ , составленное по методу сил, имеет вид

$$y_1 = \delta_{11} (-m\ddot{y}_1 - \alpha\dot{y}_1) + \delta_{12}P. \quad (1)$$

Вычислим спектральную плотность перемещения массы:

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{\delta_{12}^2 S_P(\omega)}{|m\delta_{11}(i\omega)^2 + \alpha\delta_{11}i\omega + 1|^2}.$$

Тогда дисперсия случайного смещения  $y_1$  равна

$$D_{y_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{12}^2 a d\omega}{|m\delta_{11}(i\omega)^2 + (\alpha + bm)\delta_{11}(i\omega) + (1 + b\alpha\delta_{11})i\omega + b|^2}. \quad (2)$$

Вычислим интеграл (2) (см. приложение 2):

$$D_{y_1} = a\delta_{12}^2(\alpha + bm)/[2b\alpha(1 + b\delta_{11}\alpha + b^2\delta_{11}m)].$$

Среднеквадратичное отклонение вертикального смещения массы  $m$

$$\sigma_{y_1} = \sqrt{D_{y_1}}.$$

Изгибающий момент в заделке

$$M = Pl + 2l(-m\ddot{y}_1 - \alpha\dot{y}_1). \quad (3)$$

Воспользовавшись уравнением (1), исключим из уравнения (3) силу  $P$ :

$$M = (l/\delta_{12})(y_1 + \delta_{11}m\ddot{y}_1 + \delta_{11}\alpha\dot{y}_1) - 2l(m\dot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1)$$

или

$$M = (\delta_{11}/\delta_{12} - 2)ml\ddot{y}_1 + (\delta_{11}/\delta_{12} - 2)\alpha l\dot{y}_1 + ly_1/\delta_{12}.$$

Спектральная плотность

$$S_M = |W_1(i\omega)|^2 S_{y_1}(\omega),$$

где  $|W_1(i\omega)|$  — модуль частотной функции, равный

$$W_1(i\omega) = \left(\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} - 2\right)ml(i\omega)^2 + \left(\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} - 2\right)\alpha li\omega + \frac{l}{\delta_{12}}.$$

С учетом значения  $W_1$  выражение для  $S_M$  принимает вид

$$S_M = \frac{\alpha \delta_{12}^2 [b_0 (i\omega)^4 + b_1 (i\omega)^2 + b_2]}{|m\delta_{11} (i\omega)^3 + (\alpha + bm) \delta_{11} (i\omega)^2 + (1 + \delta_{11} b\alpha) i\omega + b^2|^2 2\pi},$$

где  $b_0 = m^2 l^2 (\delta_{11}/\delta_{12} - 2)^2$ ;

$$b_1 = \frac{2ml^2}{\delta_{12}} \left( \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} - 2 \right) - \alpha^2 b^2 \left( \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} - 2 \right)^2; \quad b_2 = \left( \frac{l}{\delta_{12}} \right)^2.$$

Дисперсия момента  $M$  (см. приложение 2) будет равна

$$D_M = \int_{-\infty}^{\infty} S_M d\omega = \frac{(1 + b\delta_{11}\alpha) b_0 - m\delta_{11}b_1 - \delta_{11}^2 m (\alpha + bm) b_2 / b}{2\delta_{11}^2 m\alpha (1 + \delta_{11}b\alpha + b^2\delta_{11}m)}.$$

138. Дифференциальное уравнение случайных колебаний массы  $m$  имеет вид (см. решение задачи 136)

$$\Delta \ddot{y} + 2n\Delta \dot{y} + p_0^2 \Delta y = p_0^2 \Delta y_0. \quad (1)$$

Для определения среднеквадратичного отклонения разности

$$\Delta y - \Delta y_0 = \varepsilon \quad (2)$$

необходимо знать спектральную плотность случайной функции  $\varepsilon$ . Для этого найдем сначала передаточную функцию (2).

Передаточная функция системы (1) (при нулевых начальных данных) имеет вид

$$W(p) = \Delta Y(p) / \Delta Y_0(p) = p_0^2 / (p^2 + 2np + p_0^2),$$

где  $\Delta Y(p)$  и  $\Delta Y_0(p)$  — изображения функций  $\Delta y$  и  $\Delta y_0$  по Лапласу.

Воспользовавшись преобразованием Лапласа для левой и правой частей уравнения (2), получим

$$\varepsilon(p) = \Delta Y(p) - \Delta Y_0(p).$$

Передаточная функция системы (9) имеет вид

$$W_1 = \varepsilon(p) / \Delta Y_0(p) = W(p) - 1 = p(p + 2n) / (p^2 + 2np + p_0^2).$$

Спектральная плотность равна

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_1(i\omega)|^2 S_{\Delta y_0},$$

или

$$S_\varepsilon = \frac{\alpha_1 [(i\omega)^4 - 4n(i\omega)^2]}{|(i\omega)^2 + (2n + \beta)(i\omega) + (p_0^2 + 2n\beta) i\omega + \beta p_0^2|^2 2\pi}.$$

Вычислим дисперсию разности  $\varepsilon$  (см. приложение 2):

$$D_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega = \frac{\alpha_1 (p_0^2 + 2n\beta + 4n^2)}{2n(p_0^2 + 2n\beta + \beta^2)}.$$

Среднеквадратичное отклонение разности перемещений

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}.$$

139. Дифференциальное уравнение движения поршня под действием случайной составляющей давления имеет вид

$$\Delta \ddot{z}_1 + 2n\Delta \dot{z}_1 + p_0^2 \Delta z_1 = F \Delta p_1 / (m_1 + m_2),$$

где  $m_1$  — масса поршня;  $m_2$  — масса штока.

Спектральная плотность смещения поршня

$$S_{\Delta z_1} = |W(i\omega)|^2 S_{\Delta p_1}(\omega),$$

или

$$S_{\Delta z_1} = \frac{\alpha_1 F^2}{(m_1 + m_2) |(i\omega)^3 + (2n + \beta)(i\omega)^2 + (2n\beta + p_0^2)i\omega + \beta p_0^2|^2 2\pi}.$$

Вычислим дисперсию перемещения  $\Delta z_1$  (см. приложение 2):

$$D_{\Delta z_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta z_1} d\omega = \frac{\alpha_1 F^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{2n + \beta}{4p_0^2 \beta n [2n\beta + p_0^2 + \beta^2]}.$$

Среднеквадратичная погрешность показаний прибора (или среднеквадратичная ошибка прибора)  $\sigma_{\Delta z_1} = \sqrt{D_{\Delta z_1}}$ .

140. Дифференциальное уравнение движения со штоком имеет вид

$$\Delta \ddot{z}_1 + 2n\Delta \dot{z}_1 + p_0^2 \Delta z_1 = \Delta p_1 F / (m_1 + m_2) + p_0^2 \Delta z_0.$$

При действии независимых случайных возмущений дисперсия равна сумме дисперсий:

$$D_{\Delta z_1} = D_{\Delta z_1}(\Delta p_1) + D_{\Delta z_1}(\Delta z_0).$$

Дисперсия каждого из возмущений в отдельности равна

$$D_{\Delta z_1}(\Delta p_1) = \frac{F^2}{(m_1 + m_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_{\Delta p_1} d\omega,$$

$$D_{\Delta z_1}(\Delta z_0) = p_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_{\Delta z_0} d\omega,$$

где  $W(i\omega) = 1 / |(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2|$ .

После вычисления интегралов (см. приложение 2) получим

$$\sigma_{\Delta z_1}^2 = D_{\Delta z_1} = \frac{F^2 \alpha_1}{(m_1 + m_2)^2} \frac{(2n + \beta_1)}{4n p_0^2 \beta_1 (2n\beta_1 + p_0^2 + \beta_1^2)} + \frac{p_0^2 \alpha_2}{4n \beta_2} \frac{(2n + \beta_2)}{4n \beta_2 (2n\beta_2 + p_0^2 + \beta_2^2)}.$$

141. Дифференциальное уравнение движения поршня со штоком под действием случайных возмущений имеет вид

$$\Delta \ddot{z}_1 + 2n\Delta \dot{z}_1 + p_0^2 \Delta z_1 = F \Delta p_1 / (m_1 + m_2) + p_0^2 \Delta z_0.$$

Дисперсия  $\Delta z_1$  будет равна

$$D_{\Delta z_1} = D_{\Delta z_1}(\Delta p_1) + D_{\Delta z_1}(\Delta z_0).$$

Здесь

$$D_{\Delta z_1}(\Delta p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 S_{\Delta p_1} d\omega = \frac{NF^2}{(m_1 + m_2)^2 4n p_0^2},$$

$$D_{\Delta z_1}(\Delta z_0) = \frac{p_0^2 \alpha_2 (2n + \beta_2)}{4\beta_2 n (2n\beta_2 + p_0^2 + \beta_2^2)}.$$

Оптимальное значение жесткости пружины найдем из условия

$$d(D_{\Delta z}/dp_{0*}^2) = 0, \quad \text{где } p_{0*}^2 = c/(m_1 + m_2).$$

Для определения  $p_{0*}^2$  получаем уравнение

$$p_{0*}^4 - \frac{2AK}{BK-A} p_{0*}^2 - \frac{AK^2}{BK-A} = 0,$$

где

$$A = \frac{NE^2}{(m_1 + m_2)^2 4n}; \quad B = \frac{\alpha_2 (2n + \beta_2)}{4\beta_2 n}; \quad K = 2n\beta_2 + \beta_2^2.$$

Оптимальное значение жесткости пружины  $c_*$  существует только при условии  $BK - A > 0$  и равно

$$c_* = (m_1 + m_2) p_{0*}^2 = (m_1 + m_2) \left( \frac{AK}{BK-A} + \sqrt{\left( \frac{AK}{BK-A} \right)^2 + \frac{AK^2}{BK-A}} \right).$$

142. Представим дифференциальное уравнение малых вертикальных колебаний массы  $m$  при кинематическом возбуждении в виде

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = p_0^2 y_0.$$

Для определения дисперсии ускорения  $\ddot{y}$  найдем спектральную плотность перемещения  $y_0$  в зависимости от корреляционной функции

$$\begin{aligned} S_{y_0}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{y_0}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= D_{y_0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1 - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1 + i\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{2D_{y_0}\alpha_1}{(\alpha_1^2 + \omega^2)\pi}. \end{aligned}$$

Спектральная плотность вертикального смещения груза определяется выражением

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_{y_0}(\omega),$$

где

$$|W(i\omega)| = p_0^2 / |(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2|.$$

Найдем спектральную плотность ускорения  $\ddot{y}$ :

$$S_{\ddot{y}}(\omega) = \omega^4 S_y(\omega) = \frac{2D_{y_0}\alpha_1\omega^4 p_0^4}{| (i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2 |^2 |\alpha_1 + i\omega|^2 2\pi}.$$

Вычислим дисперсию вертикального ускорения по формуле

$$D_y'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D_{y_0} \alpha_1 \omega^4 p_0^4 d\omega}{|(i\omega)^3 + (2n + \alpha_1)(i\omega^2) + (2n\alpha_1 + p_0^2) i\omega + \alpha_1 p_0^2|^2}$$

Воспользовавшись приложением 2, получим

$$\sigma_y = \sqrt{D_{y_0} \alpha_1 p_0^2 (\alpha_1 2n + p_0^2) / [2n (2n\alpha_1 + p_0^2 + \alpha_1^2)]}$$

143. Дифференциальное уравнение движения массы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = P(t). \quad (1)$$

Представим его решение при действии произвольного возмущения  $F(t)$  при нулевых начальных условиях в виде

$$x = \frac{1}{mp_0} \int_0^{t_k} \sin p_0(t_k - \tau) P(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $p_0 = \sqrt{c/m}$ .

На рис. 244, а изображен график функции  $\sin p_0(t_k - \tau)$ , где  $p_0 = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $t_k = 2 \text{ с}$ .

Для того чтобы отклонение груза было максимальным в момент времени  $t_k = 2 \text{ с}$ , необходимо, чтобы подынтегральное выражение было знакопостоянным, т. е. значение  $P(t)$  в промежутке времени  $0 \leq \tau \leq 0,43$  было отрицательным, а при  $0,43 \leq \tau \leq 2$  положительным.

Наибольшее значение  $x_k$  получим при следующем законе изменения силы:

$$P(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0,43; \\ +1 & \text{при } 0,43 \leq \tau \leq 2. \end{cases} \quad (3)$$

График изменения возмущения во времени показан на рис. 244, б.

После вычисления интеграла (2) с учетом закона изменения силы  $P(\tau)$  (3) имеет  $x_{\max} = 58,6 \text{ мм}$ .

При действии же внезапно приложенной единичной силы  $F=1$  смещение массы в момент  $t_k = 2 \text{ с}$  равно 37 мм.

144. Скорость движения массы можно получить, продифференцировав по параметру  $t_k$  выражение для смещения (см. уравнение (2) в задаче 143). В общем случае производную интеграла по параметру можно вычислить так:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx + \frac{ab(\alpha)}{d\alpha} f[b(\alpha), \alpha] - \frac{da(\alpha)}{d\alpha} f[a(\alpha), \alpha].$$

В соответствии с этим скорость движения груза

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^{t_k} \cos p_0(t_k - \tau) P(\tau) d\tau.$$

Учитывая закон изменения функции возмущения

$$P(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0,43; \\ +1 & \text{при } 0,43 \leq \tau \leq 2, \end{cases}$$

получаем

$$\dot{x}(t_k) = \frac{1}{m} \int_0^{0,43} \cos 2(2-\tau)(-1) d\tau + \int_{0,43}^2 \cos 2(2-\tau)(+1) d\tau,$$

или  $\dot{x}(t_k) = 38$  мм/с.

145. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = P(t). \quad (1)$$

Запишем его решение:

$$x = \frac{1}{mp} \int_0^{t_k} e^{-n(t_k-\tau)} \sin p(t_k-\tau) P(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $n = \alpha/(2m)$ ,  $p = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ ,  $p_0^2 = c/m$ .

Поскольку влияние вязкого трения на частоту колебаний весьма незначительно, можно принять

$$p = \sqrt{p_0^2 - n^2} = \sqrt{2^2 - (0,2)^2} \approx 2 \text{ с}^{-1}.$$

Подынтегральная функция в выражении (2) изменяет свой знак в момент времени  $\tau_1 = 0,43$  с (см. задачу 143). Следовательно, закон изменения силы  $F(\tau)$ , при котором  $x$  достигает максимального значения, будет таким же, как и в задаче 143.

146. Дифференциальное уравнение малых колебаний системы относительно положения равновесия, соответствующего номинальному значению тяги  $R_0$ , имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = \Delta R, \quad (1)$$

откуда

$$x = \frac{1}{m\bar{p}} \int_0^{t_k} e^{-n(t_k-\tau)} \sin p(t_k-\tau) \Delta R(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $n = \alpha/(2m)$ ,  $p = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ ,  $p_0^2 = c/m$ .

График подынтегральной функции  $e^{-n(t-\tau)} \sin p(t_k-\tau)$  (при  $p \approx 30 \text{ с}^{-1}$ ,  $n = 2 \text{ с}^{-1}$ ) (рис. 245, а) имеет нули при  $\tau = 0,08$ ;  $0,185$ ,  $0,29$ ;  $0,395$  с. Следовательно, закон изменения разброса тяги  $\Delta R$  имеет вид (рис. 245, б)

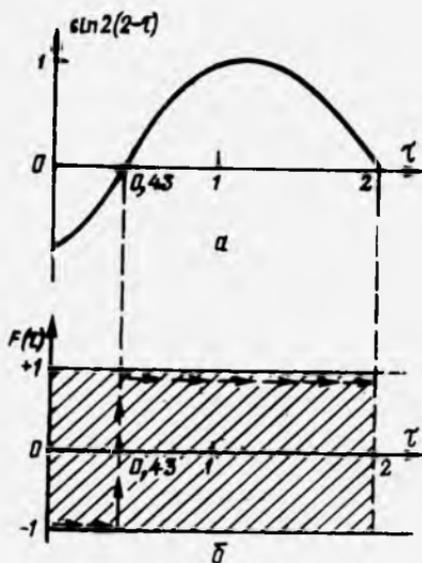


Рис. 244

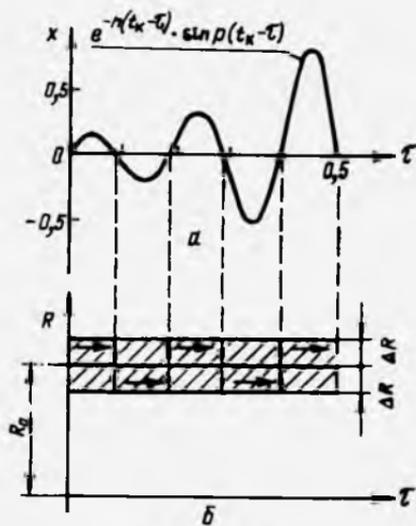


Рис. 245

$$\Delta R = \begin{cases} +0,05R & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0,08; \\ -0,05R & \text{при } 0,08 \leq \tau \leq 0,185; \\ +0,05R & \text{при } 0,185 \leq \tau \leq 0,29; \\ -0,05R & \text{при } 0,29 \leq \tau \leq 0,395; \\ +0,05R & \text{при } 0,395 \leq \tau \leq 0,5. \end{cases}$$

После интегрирования (которое проще всего выполнить графически) из уравнения (2) получаем

$$x_{\max} = 75 \cdot 10^{-4} R_0 / (mp); \quad x_{\max} = 5 \text{ см.}$$

Такому сжатию пружины соответствует сила  $P = cx_{\max} = 900 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 45 \text{ кН}$ .

Следовательно, разброс тяги  $\Delta R = 5\%$  может вызвать ошибку в замере тяги, равную

$$\Delta = (P/R_0) 100 = 22,5\%.$$

147. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при нулевых начальных условиях определяются следующими уравнениями (см. задачу 143):

$$x = \frac{1}{mp_0} \int_0^{t_k} \sin p_0(t_k - \tau) P(\tau) d\tau;$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^{t_k} \cos p_0(t_k - \tau) P(\tau) d\tau.$$

(1)

Введя обозначения  $a_1 = A \cos \alpha$ ,  $a_2 = (A/p_0) \sin \alpha$ , представим выражение функции погрешности прибора в виде

$$\Delta = xA \cos \alpha + (\dot{x}/p_0)A \sin \alpha. \quad (2)$$

Подставим выражения (1) в соотношение (2), получим

$$\Delta = \frac{A}{mp_0} \int_0^{t_k} [\sin p_0(t_k - \tau) \cos \alpha + \cos p_0(t_k - \tau) \sin \alpha] P(\tau) d\tau, \quad (3)$$

или

$$\Delta = \frac{A}{mp_0} \int_0^{t_k} \sin [p_0(t_k - \tau) + \alpha] P(\tau) d\tau.$$

Учитывая, что числовые значения коэффициентов уравнения (3) равны  $A=0,2$ ;  $\alpha=\pi/6$ , найдем такие значения времени  $\tau$ , при которых  $\sin[4\pi(0,5-\tau) + \pi/6] = 0$ . Из последнего соотношения следует, что  $4\pi(0,5-\tau) + \pi/6 = n\pi$  (где  $n=1, 2, 3, \dots$ ), откуда получаем  $\tau_1 = 1/24$  с,  $\tau_2 = 7,24$  с.

Таким образом, закон воздействия возмущающей силы на систему, при котором  $\Delta$  достигает максимального значения, имеет вид

$$P(\tau) = \begin{cases} +0,1 & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1,24; \\ -0,1 & \text{при } 1,24 \leq \tau \leq 7,24; \\ +0,1 & \text{при } 7,24 \leq \tau \leq 1/2. \end{cases}$$

Интегрируя выражение (3) с учетом закона изменения возмущающей силы  $P(\tau)$ , получаем, что наибольшее возможное значение ошибки прибора  $\Delta_{\max} = 5$  мм.

148. Решение дифференциального уравнения малых угловых колебаний (см. условие задачи) в момент времени  $t_k$  можно представить в виде вектора  $\varphi_k$  на фазовой плоскости  $\varphi$ О $\dot{\varphi}$  (рис. 246, а). Каждому закону изменения возмущающего момента  $M_B$  в момент времени  $t_k$  соответствует определенный вектор  $\varphi_k$ .

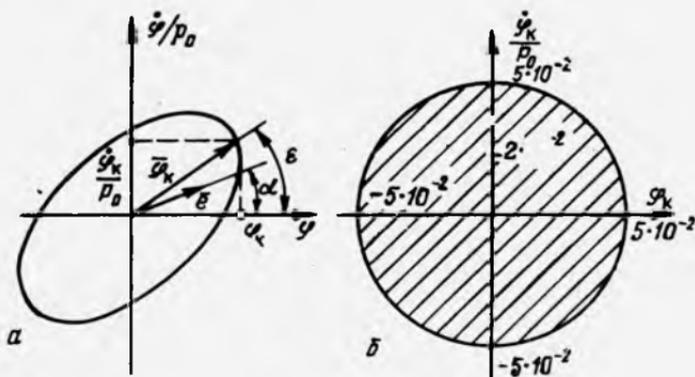


Рис. 246

По-видимому, имеется такой закон изменения момента  $M_B$ , при котором модуль вектора  $\bar{\varphi}_K$  (направленного под углом  $\epsilon$  к оси  $\varphi$ ) достигает своего наибольшего значения (см. рис. 246, а). Если изменять значение угла  $\epsilon$  в пределах  $0 \dots 2\pi$  и для каждого промежуточного значения  $\epsilon$  определять  $|\varphi|_{\max}$ , то конец вектора  $\varphi_K$  опишет на фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую (см. рис. 246, а).

Поскольку для каждого значения  $\epsilon$  определяется  $|\varphi|_{\max}$ , полученная кривая является границей области возможных (наибольших) решений  $\varphi$  и  $\bar{\varphi}$ .

Для практического определения границ области возможных решений спроектируем вектор  $\bar{\varphi}_K$  на прямую, определяемую единичным вектором  $\bar{e}$ :

$$\varphi_e = (\bar{\varphi}_K = \bar{e}) = \left( \varphi_K \cos \alpha + \frac{\dot{\varphi}}{p_0} \sin \alpha \right). \quad (1)$$

Определив максимальное значение проекции вектора решения  $\varphi_e$  для фиксированного значения угла  $\alpha$  и закон изменения момента  $M_B$ , соответствующий  $\varphi_{e\max}$ , находим по этому закону значение компонентов вектора  $\varphi_K$ , т. е. значения  $\varphi_K$  и  $\dot{\varphi}_K$ , которые являются координатами одной из точек границ области возможных значений решения.

Например, при  $\alpha = \pi/6$  выражение (1) принимает вид (см. решение задачи 147)

$$\varphi_e = \frac{1}{J_0 p_0} \int_0^{t_K} \sin \left[ p_0 (t_K - \tau) + \frac{\pi}{6} \right] M_B d\tau. \quad (2)$$

Полагая

$$\sin [p_0 (t_K - \tau) + \pi/6] = 0,$$

найдем

$$p_0 (t_K - \tau) + \pi/6 = \pi; \quad p_0 (t_K - \tau) + \pi/6 = 2\pi.$$

Учитывая, что  $p_0 = \sqrt{a/I_0} \approx 1,26 \text{ с}^{-1}$ , получаем  $\tau_1 = 0,42 \text{ с}$ ,  $\tau_2 = 2,9 \text{ с}$ .

Следовательно, закон изменения  $M_B$ , при котором  $\varphi_e$  достигает максимального значения, имеет вид

$$M_B = \begin{cases} +b & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0,42; \\ -b & \text{при } 0,42 \leq \tau \leq 2,9; \\ +b & \text{при } 2,9 \leq \tau \leq 5. \end{cases} \quad (3)$$

Вычислим значение  $\varphi_K$  для случая, когда закон изменения возмущающего момента имеет вид (3):

$$\varphi_K = \frac{b}{J_0 p_0} \left[ \int_0^{0,42} \sin p_0 (t_K - \tau) d\tau + \int_{0,42}^{2,9} \sin p_0 (t_K - \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{2,9}^5 \sin p_0(t_k - \tau) d\tau \right] = \frac{2b}{J_0 p_0^2} \cdot 1,66.$$

Аналогично

$$\dot{\Phi}_k / p_0 = [2b / (J_0 p_0^2)] \cdot 1,09.$$

Произведя подобные вычисления для различных значений угла  $\alpha$ , получаем следующие значения:

$\alpha$	0	30°	60°	90°
$\Phi_k$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	0
$\Phi_k P$	0	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$

Область возможных значений решений, построенная в соответствии с приведенной таблицей, показана на рис. 246, б.

149. Дифференциальное уравнение возмущенного движения зеркала имеет вид (см. решение задачи 135):

$$\Delta \ddot{\Phi} + 2n \Delta \dot{\Phi} + p_0^2 \Delta \Phi = A \Delta i(t). \quad (1)$$

Запишем решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях:

$$\Delta \Phi = \frac{A}{p_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p_1(t-\tau) \Delta i d\tau,$$

где  $p_1 = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ .

Для получения максимального значения  $\Delta \Phi$  возьмем верхний предел равным бесконечности, а закон изменения  $\Delta i(\tau)$  — разрывным, следящим за знаком функции  $\sin p_1(t-\tau)$ . Это позволит вычислить

$$\Delta \Phi_{\max} = \frac{\alpha A}{p} \int_0^{\infty} e^{-n\varepsilon} |\sin p_1 \varepsilon| d\varepsilon. \quad (2)$$

Интеграл в выражении (2) можно представить в виде

$$\Delta \Phi_{\max} = \frac{\alpha A}{p_1} \left[ \int_0^{\pi/p_1} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon - \int_{\pi/p_1}^{2\pi/p_1} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{2\pi/p_1}^{3\pi/p_1} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon - \dots + (-1)^k \int_{k\pi/p_1}^{(k+1)\pi/p_1} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \right],$$

где  $\Phi(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon} \sin p_1 \varepsilon$ .

После интегрирования получаем

$$\Delta \Phi_{\max} = \frac{\alpha A}{p_1^2} \left( 1 + e^{-\frac{n\pi}{p_1}} \right) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{jn\pi}{p_1}}.$$

Ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} e^{\frac{-n\pi j}{\rho_1}}$  представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна  $1 / \left(1 - e^{\frac{-n\pi}{\rho_1}}\right)$ .

Окончательно находим

$$\Delta\varphi_{\max} = aA \left(1 + e^{\frac{-n\pi}{\rho_1}}\right) / \left[\rho_1^2 \left(1 - e^{\frac{-n\pi}{\rho_1}}\right)\right].$$

Если  $n$  мало (при малом затухании), то, принимая  $\rho_1 \approx \rho_0$ , получаем

$$\Delta\varphi_{\max} \approx 2aA / (\pi n \rho_0).$$

150. На рис. 247 изображены масса  $m$  и балка в произвольный момент времени. Воспользовавшись принципом Даламбера, получим дифференциальные уравнения движения массы и балки:

$$m\ddot{y} + N - P = 0; \quad (1)$$

$$J_0\ddot{\varphi} + \alpha L^2\dot{\varphi} + cL^2\varphi = -NL. \quad (2)$$

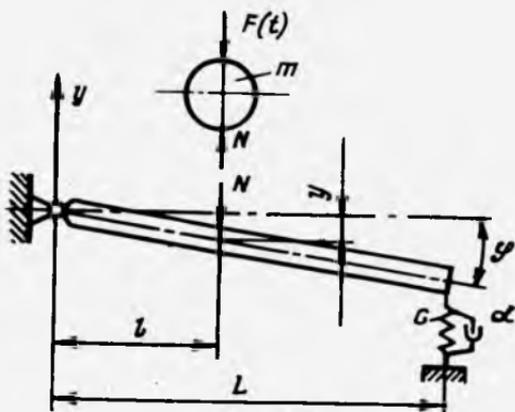


Рис. 247

Исключая из системы уравнений реакцию  $N$  и учитывая, что  $y = l\varphi$ , получаем

$$(J_0 + ml^2)\ddot{\varphi} + \alpha L^2\dot{\varphi} + cL^2\varphi = Pl$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \rho_0^2\varphi = Pl / (J_0 + ml^2),$$

где  $2n = \alpha L^2 / (J_0 + ml^2)$ ;  $\rho_0^2 = cL^2 / (J_0 + ml^2)$ .

Решение уравнений (3) представим в виде

$$\varphi = \frac{l}{(J_0 + ml^2)\rho_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin \rho_1(t-\tau) P d\tau, \quad (4)$$

где  $\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 - n^2}$ .

Учитывая связь между  $y$  и  $\varphi$ , из уравнения (1) определим динамическую реакцию

$$N = P(t) - m l d^2 \varphi / dt^2.$$

Учитывая выражение (4), найдем

$$N = P(t) - \frac{P(t) m l^2}{J_0 + m l^2} + \frac{m l^2 B}{(J_0 + m l^2) p_1} \times \\ \times \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin [p_1 (t-\tau) + \beta] P d\tau, \quad (5)$$

где  $B = \sqrt{p_0^4 + 4n^2 p_1^2}$ ;  $\beta = \text{arctg } 2n p_1 / p_0^2$ .

Максимальное значение выражения (5) получается при разрывном поведении возмущения  $P(\tau)$  (аналогично задаче 146), когда функция  $P(\tau)$  принимает постоянные значения, равные  $\pm a$ . В этом случае подынтегральная функция берется по модулю.

Моменты разрыва функции  $P(\tau)$  определяются из условия  $\sin [p_1 \tau_k + \beta] = 0$  или  $p_1 \tau_k + \beta = k\pi$ , откуда  $\tau_k = (k\pi - \beta) / p_1$ .

Интегрируя уравнение (5), полагая  $t - \tau = \varepsilon$ , получаем следующее выражение для наибольшего значения динамической реакции:

$$N = \frac{J_0 a}{J_0 + m l^2} - B_1 [e^{-n\varepsilon} \sin (p_1 \varepsilon + \beta + \beta_1) \Big|_0^{\varepsilon_1} - \\ - e^{-n\varepsilon} \sin (p_1 \varepsilon + \beta + \beta_1) \Big|_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} + \dots],$$

где  $B_1 = B m l^2 a / [p_0 p_1 (J_0 + m l^2)]$ ;  $\text{tg } \beta_1 = \text{arctg } (p_1 / n)$ .

Для получения наибольшего значения реакции  $N_{\text{max}}$  прием верхний предел равным бесконечности. Тогда

$$N_{\text{max}} = \frac{J_0 a}{L_0 + m l^2} + B_1 \left[ \sin (\beta + \beta_1) + 2 \sin \beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}} \right].$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}} = e^{-\frac{n(\pi - \beta)}{p_1}} \left/ \left( 1 - e^{-\frac{n\pi}{p_1}} \right) \right.,$$

окончательно получаем

$$N_{\text{max}} = -\frac{J_0 a}{J_0 + m l^2} + B_1 \left[ \sin \beta \cos \beta_1 + \cos \beta \sin \beta_1 + \right. \\ \left. + 2 \sin \beta_1 \frac{e^{-n(\pi - \beta) / p_1}}{1 - e^{n\pi / p_1}} \right],$$

где  $\sin \beta = 2n p_1 / \sqrt{p_0^4 + 4n^2 p_1^2}$ ;  $\sin \beta_1 = p_0 / \sqrt{p_0^2 + n^2}$ .

При малых значениях коэффициента вязкого трения  $\alpha$  (или, что то же самое, при  $n \ll 1$ ) можно записать

$$\sin \beta = 2n / p_0; \quad \cos \beta \approx 1, \quad \sin \beta_1 \approx 1, \quad \cos \beta_1 \approx n / p_0.$$

Раскладывая  $e^{-n\pi/\rho_1}$  и  $e^{-n\beta/\rho_1}$  в ряд и оставляя только линейные члены разложения, из уравнения (6) получаем

$$N_{\max} = 2aml^2 p_0 / [n\pi (J_0 + ml^2)].$$

151. При установившихся колебаниях решение уравнения движения (3) (см. задачу 150) имеет вид

$$\varphi = \frac{al}{(J_0 + ml^2)} \frac{\sin(\omega t + \beta)}{\sqrt{(\omega^2 - p_0^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (1)$$

где  $\beta = \text{arctg}[2n\omega/(p_0^2 - \omega^2)]$ .

Так как  $\omega = p_0$ , то из уравнения (1) следует

$$\varphi = al \sin\left(\frac{\pi}{2} + p_0 t\right) / [(J_0 + ml^2) 2np_0].$$

Динамическая реакция

$$N = -ml\ddot{\varphi} + P(t) = \frac{aml^2 p_0^2}{(J_0 + ml^2) 2np_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} + p_0 t\right) + a \sin p_0 t.$$

Амплитуда динамической реакции при малых  $\alpha$  равна

$$N_{\max} = p_0 a ml^2 / [2n(J_0 + ml^2)].$$

Максимальное значение реакции  $N_{\max}$  при разрывном поведении возмущающей силы  $P(t)$  (см. задачу 150) на 30% больше, чем при  $P(t) = a \sin p_0 t$ .

152. Дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний системы имеет вид

$$\ddot{\varphi} + p_0^2 \varphi = Pl/J, \quad (1)$$

где  $p_0^2 = cL^2/(J_0 + ml^2)$ ;  $J = J_0 + ml^2$ .

В соответствии с начальными условиями ( $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ ;  $\varphi(0) = 0$ ) представим решение уравнения (1) в виде

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_0 \cos p_0 t_k + \frac{l}{J} \int_0^{t_k} \cos p_0(t_k - \tau) P(\tau) d\tau,$$

или

$$\dot{\varphi}_k = -\dot{\varphi}_0 + \frac{l}{J} \int_0^{t_k} \cos(3\pi - p_0 \tau) P(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Следовательно,  $\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_{k\max}$  при следующем законе изменения возмущающей силы:

$$P(\tau) = \begin{cases} +a & \text{при } 0 \leq \tau \leq \pi/(2p_0); \\ -a & \text{при } \pi/(2p_0) \leq \tau \leq 3\pi/(2p_0); \\ +a & \text{при } 3\pi/(2p_0) \leq \tau \leq 5\pi/(2p_0); \\ -a & \text{при } 5\pi/(2p_0) \leq \tau \leq 3\pi/p_0 = t_k. \end{cases}$$

Принтегрировав уравнение (2) с учетом найденного закона изменения возмущающей силы  $P(t)$ , получаем

$$|\dot{\Phi}_{\max}| = \Phi_0 + 6la/(Jp_0).$$

## § 7. Нелинейные колебания

153. Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии  $T_1$  верхней массы  $m_1$  и кинетической энергии  $T_2$  нижней массы  $m_2$ .

Так как масса  $m_1$  совершает вращательное движение, поворачиваясь в процессе колебаний на угол  $\varphi$ , и поступательное движение, перемещаясь горизонтально на расстояние  $x_1$ , то

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 D_1^2}{8} \dot{\varphi}^2 + m_1 \dot{x}_1^2 \right]. \quad (1)$$

Масса  $m_2$  совершает вращательное движение со скоростью  $\dot{\varphi}$  и два поступательных движения:  $x_2$  по горизонтали и  $y_2$  по вертикали. Поэтому можно записать

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_2 D_2^2}{8} \dot{\varphi}^2 + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \right]. \quad (2)$$

Изменение потенциальной энергии системы связано только с изменением вертикальной координаты  $y_2$  груза  $m_2 g$ :

$$\Pi = m_2 g y_2. \quad (3)$$

Принимая в качестве обобщенной координаты угол поворота  $\varphi$ , найдем

$$x_1 = 0,5\varphi D_1; \quad x_2 = l \sin \varphi - 0,5D_1; \quad y_2 = l(1 - \cos \varphi), \quad (4)$$

откуда

$$\dot{x}_1 = 0,5D_1 \dot{\varphi}; \quad \dot{x}_2 = (l \cos \varphi - 0,5D_1) \dot{\varphi}; \quad \dot{y}_2 = \dot{\varphi} l \sin \varphi \quad (5)$$

Подставив выражения (1)–(5) в уравнение Лагранжа второго рода, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_2 g l \sin \varphi}{\frac{3}{8} m_1 D_1^2 + m_2 \left( \frac{D_2^2}{8} + \frac{D_1^2}{4} + l^2 - l D_1 \cos \varphi \right)} = 0.$$

154.

$$\frac{2}{3} m l^2 \ddot{\alpha} + \frac{c l^2 \cos \varphi \cos \alpha}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \alpha \sin 2\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin 2\varphi}} \right) = 0,$$

$$p = \sqrt{3c/m \cos \varphi}.$$

155.

$$\ddot{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{3}{4} \frac{cg}{Q} (\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}) = 0.$$

$$p = \sqrt{(3g/4)[c/(mg) + 1/l]}.$$

156. Период колебаний системы можно разбить на четыре отрезка: два отрезка времени, в течение которых одна из пружин

жин находится в контакте с упором, и два отрезка времени, в течение которых происходит свободное движение груза.

Движение груза при контакте пружины с упором описывается уравнением

$$x = (\dot{x}_0 / p_0) \sin p_0 t, \quad (1)$$

где  $\dot{x}_0$  — скорость, с которой пружина (груз) входит в соприкосновение с упором;  $p_0 = \sqrt{c/m}$ .

В соответствии с уравнением (1) время контактирования пружины с упором

$$t_1 = \pi / p_0.$$

Поскольку пружина входит в соприкосновение с упором со скоростью  $\dot{x}_0$ , время движения груза в свободном состоянии (в одну сторону)

$$t_2 = 2\Delta / \dot{x}_0.$$

Период колебаний

$$T = 2(t_1 + t_2) = 2(\pi / p_0 + 2\Delta / \dot{x}_0). \quad (2)$$

Представим последнее выражение в зависимости от амплитуды свободных колебаний  $x_0$ . Наибольшее сжатие пружины, очевидно, равно  $x_0 - \Delta$ , что в соответствии с уравнением (1) можно выразить через  $x_0$ :

$$x_0 - \Delta = \dot{x}_0 / p_0,$$

или

$$\dot{x}_0 = p_0(x_0 - \Delta). \quad (3)$$

Подставим соотношение (3) в уравнение (2):

$$T = (2/p_0)[\pi + 2\Delta / (x_0 - \Delta)].$$

Таким образом, частота свободных колебаний

$$p = 2\pi / T = 2p_0 / [\pi + 2\Delta / (x_0 - \Delta)].$$

$$157. \quad p = 2\pi / T = \frac{2\pi p_1 p_2}{(p_1 + p_2) [\pi + 2\Delta / (x_0 - \Delta)]}.$$

158. При движении груза в одну сторону (например, влево) от положения равновесия дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = 0, \quad (1)$$

где  $p_1^2 = c_1/m$ .

Считая, что в момент прохождения грузом положения равновесия (т. е. при  $x_1 = 0$ ) скорость движения  $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$ , представим решение уравнения (1) в виде

$$x_1 = (\dot{x}_{10} / p_1) \sin p_1 t. \quad (2)$$

Груз будет находиться в контакте с левой пружиной в течение полупериода колебаний (2), т. е. в течение

$$t_1 = \pi/p_1.$$

Аналогично время контакта груза с правой пружиной

$$t_2 = \pi/p_2.$$

Период установившихся колебаний

$$T = t_1 + t_2 = \pi(p_1 + p_2)/(p_1 p_2).$$

Частота свободных колебаний

$$p = 2\pi/T = 2\sqrt{c_1 c_2} / [\sqrt{m}(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})].$$

**159.** Частота малых свободных колебаний груза

$$p = \sqrt{c/m}.$$

Жесткость системы  $c$  определяется как отношение нагрузки к вызванному ею перемещению

$$c = P/x.$$

Для обеспечения постоянства частоты свободных колебаний необходимо, чтобы отношение  $c/m$  было постоянным. Это возможно в двух случаях: при постоянной нагрузке  $P$  и при нелинейной характеристике пружины. В последнем случае для каждого значения груза  $P$  жесткость пружины

$$c = dP/dx.$$

Из условия постоянства частоты свободных колебаний следует, что

$$p^2 = (g/P) (dP/dx),$$

откуда

$$(g/p^2) \ln P = x + C_1,$$

или

$$P = \exp[(p^2/g)(x + C_1)].$$

Значение постоянной интегрирования  $C_1$  найдем из граничных условий задачи. При  $P = P_0$ ,  $x = x_0$  имеем

$$c_1 = (g/p^2) \ln P_0 + x_0.$$

Окончательно выражение зависимости перемещения от приложенной нагрузки принимает вид

$$x = (g/p^2) \ln P/P_0 + x_0.$$

**160.** Кинетическая энергия при движении массы  $m$  определяется выражением

$$T = m\dot{x}^2/2.$$

Потенциальная энергия

$$П = c(\delta_0 + \delta)^2/2,$$

где  $c\delta_0 = T_0$  — начальное натяжение нити;  $c\delta = T_1$  — дополнительное натяжение, вызванное колебанием массы;  $\delta$  — удлинение нити при колебаниях массы.

Выразим  $\delta$  через отклонение  $x$ , ограничиваясь первым нелинейным членом разложения:

$$\delta = 2(l - l \cos \alpha) = x^2/l,$$

где  $\alpha = x/l$ .

Окончательно потенциальная энергия деформации системы равна

$$\Pi = c(\delta_0 + x^2/l)^2/2.$$

Подставим выражение для кинетической и потенциальной энергии деформации в уравнение Лагранжа:

$$\ddot{x} + (2c\delta_0/m)[x/l + x^2/(\delta_0 l^2)] = 0.$$

Возьмем первый интеграл этого дифференциального уравнения движения, для чего представим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dx}.$$

Тогда

$$\dot{x}^2 = A_1 - \int_{A_0}^x \frac{4c\delta_0}{m} \left( \frac{x}{l} + \frac{x^3}{\delta_0 l^2} \right) dx,$$

или

$$\dot{x}^2 = A_1 - (4c\delta_0/m) \left[ (x^2 - A_0^2)/(2l) + (x^4 - A_0^4)/(4\delta_0 l^2) \right].$$

Используя начальные условия (при  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $\dot{x}=x_0$ ), находим

$$\dot{x} = 2 \left[ \frac{c\delta_0}{m} \left( \frac{x_0^2 - x^2}{2l} + \frac{x_0^4 - x^4}{2\delta_0 l^2} \right) \right]^{1/2}.$$

Последнее соотношение можно представить в виде кривой на фазовой плоскости.

**161.** При отклонении массы  $m$  от положения равновесия на произвольную величину  $x$  натяжение в пружинах (рис. 248) составляет

$$T = c\Delta l = c(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0) \approx cx^2/(2l_0). \quad (1)$$

Спроектируем на горизонтальную ось силы, действующие на массу:

$$m\ddot{x} = -2T_x/l_0 = -cx^2/l_0^2,$$

или

$$\ddot{x} + kx^3 = 0, \quad (2)$$

где  $k = c/(ml_0^2)$ .

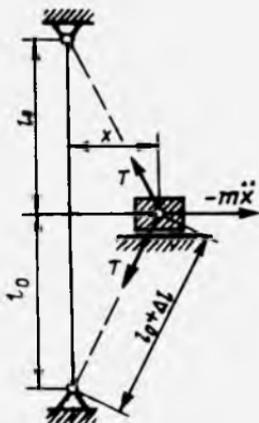


Рис. 248

Введем обозначение  $x = y$ . Тогда

$$\ddot{x} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{dy}{dx} = y \frac{dy}{dx}.$$

Подставим последнее соотношение в уравнение (2):

$$y dy = -kx^3 dx. \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3) с учетом начальных условий (при  $t=0$   $x=x_0$ ,  $\dot{x}=y=0$ ), получаем  $y^2 = k(x_0^4 - x^4)/2$ .

Учитывая, что  $y = \dot{x}$ , из последнего соотношения имеем

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{k(x_0^4 - x^4)/2}} = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{2}{k}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^4}},$$

где  $\varepsilon = x/x_0$  — безразмерное перемещение.

Поскольку восстанавливающая сила  $T$  [см. уравнение (1)] симметрична, для определения периода колебаний достаточно рассмотреть только одну четверть периода:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{2}{k}} \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^4}} = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{2}{k}} K(a, \varphi). \quad (4)$$

Здесь  $K(a, \varphi)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, который является частным случаем эллиптического интеграла первого рода вида

$$K(a, \varphi) = \int_{\cos \varphi}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2 + a^2 t^2)}},$$

где  $a = \sin \alpha$ ,  $a' = \cos \alpha$  [3].

В рассматриваемом случае надо положить  $\alpha = \pi/4$  и  $\varphi = \pi/2$ . Из таблицы значений эллиптического интеграла [3] при  $\alpha = 45^\circ$  находим  $K\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1,8541$ .

Следовательно, период колебаний груза

$$T = 1,8541 (4l_0/x_0) \sqrt{m/c}.$$

Круговая частота колебаний

$$p = 0,85 (x_0/l_0) \sqrt{c/m}.$$

162. По методу Релея, для консервативной системы применяется равенство наибольшей кинетической и наибольшей потенциальной энергий системы:

$$T_{\max} = \Pi_{\max},$$

где

$$T_{\max} = m\dot{x}_0^2/2; \quad \Pi_{\max} = \int_0^{\Delta l_{\max}} 2T d(\Delta l).$$

Так как  $T = c\Delta l$  (см. решение задачи 161), а  $\Delta l \approx x^2/(2l_0)$ , то

$$\Pi_{\max} = cx_0^4/(4l_0^2).$$

Следовательно,

$$m\dot{x}_0^2/2 = cx_0^3/(4l_0^2) \quad \text{и} \quad x_0 = \sqrt[4]{l_0\dot{x}_0^4/2m/c}.$$

Учитывая связь между частотой свободных колебаний и начальным смещением (см. решение задачи 161), находим

$$p = (0,85/l_0) \sqrt[4]{l_0\dot{x}_0^4/2c/m} = 1,02 \sqrt[4]{\dot{x}_0^4/l_0^4 c/m}.$$

163. Составим дифференциальное уравнение движения подобно тому, как это сделано в задаче 161:

$$m\ddot{x} + 2T_0x/l_0 + cx^2/l_0^2 = 0.$$

Переходя к безразмерному смещению  $\varepsilon = x/x_0$ , получаем

$$\ddot{\varepsilon} + 2T_0\varepsilon/(ml_0) + cx_0^2\varepsilon^3/(ml_0^2) = 0. \quad (1)$$

Введем соотношение  $\ddot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}d\dot{\varepsilon}/d\varepsilon$ . Учитывая начальные условия задачи, после интегрирования уравнения (1) имеем

$$\dot{\varepsilon}^2 = [2c/(ml_0)] [(T_0/c)(1 - \varepsilon^2) + (x_0^2/4l_0)(1 - \varepsilon)^4]. \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает движение массы на фазовой плоскости (рис. 249).

164. Рассмотрим произвольный момент движения. Пусть, например, масса движется справа налево, так что  $x > 0$ , а  $\dot{x} < 0$  (см. рис. 248 к решению задачи 161).

Поскольку сила кулонова трения всегда направлена против скорости движения, дифференциальное уравнение колебаний представим в виде (см. задачу 163).

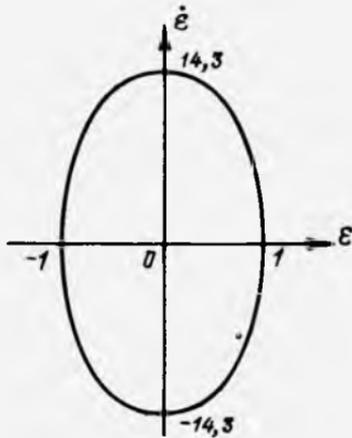


Рис. 249

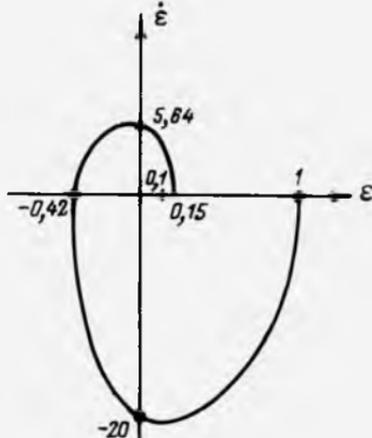


Рис. 250

$$m\ddot{x} + 2T_0x/l_0 + cx^2/l_0^2 = F. \quad (1)$$

Перейдем к безразмерной координате  $\varepsilon = x/x_0$ :

$$\ddot{\varepsilon} + 2T_0\varepsilon/(ml_0) + cx_0^2\varepsilon^2/(ml_0^2) = F/(mx_0). \quad (2)$$

Поскольку  $\ddot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}d\varepsilon/d\varepsilon$ , из уравнения (2) с учетом начальных условий (при  $t=0$   $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ ) получаем

$$\dot{\varepsilon} = \pm \sqrt{2} \sqrt{-\frac{2F}{mx_0}(\varepsilon_0 - \varepsilon) + \frac{J_0}{ml_0}(\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2) + \frac{cx_0^2}{4ml_0^2}(\varepsilon_0^4 - \varepsilon^4)},$$

Подставляем числовые значения входящих в это уравнение параметров:

$$\dot{\varepsilon} = \pm \sqrt{2} \sqrt{-50(\varepsilon_0 - \varepsilon) + 200(\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2) + 50(\varepsilon_0^4 - \varepsilon^4)}. \quad (3)$$

Исследуем движение массы на первом полупериоде колебаний  $\varepsilon_0 = 1$ , а  $\dot{\varepsilon} < 0$ .

Из решения уравнения (3) имеем:

при  $t=0$   $\varepsilon = 1$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ ;

при  $\varepsilon = 0$  из соотношения (3) находим  $\dot{\varepsilon} = -20$ ;

при  $t=T/2$   $\varepsilon = -0,42$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ .

Для исследования движения на втором полупериоде колебаний можно также использовать решение (3), но при этом следует считать, что ось  $x$  направлена влево (это ведет к изменению знаков  $\varepsilon$  и  $\dot{\varepsilon}$ , что надо учесть в решении).

При  $\varepsilon = 0$  из соотношения (3) получаем  $\dot{\varepsilon} = 5,64$ ;

при  $t=T$   $\dot{\varepsilon} = 0$ ,  $\varepsilon \approx 0,15$  (рис. 250).

Аналогично строим решение и на остальных участках движения.

Движение массы  $m$  прекратится, если в одном из крайних положений (левом или правом) восстанавливающая сила пружины

жин будет меньше (или равна) силы трения. Из этого условия найдем наибольшее отклонение, при котором невозможно свободное движение массы.

Полагая в уравнении (2)  $\ddot{\epsilon}=0$ , получаем  $\epsilon_0=0,124$ . Из расчета следует, что движение заканчивается на третьем полу-периоде в точке на фазовой плоскости  $\dot{\epsilon}=0$ ,  $\epsilon \approx 0,1$ .

165. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$mx + cx + c_1x^3 = 0 \quad (1)$$

или

$$\dot{x} + p^2x + \mu x^3 = 0, \quad (2)$$

где  $\mu$  — малый параметр.

Запишем решение уравнения (2) в виде ряда

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \quad (3)$$

Положим

$$p^2 = p_1^2 + \mu a_1 + \mu^2 a_2, \quad (4)$$

где  $p_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  — постоянные.

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2). Ограничиваясь слагаемыми, содержащими  $\mu$  в первой степени, получаем

$$\ddot{x}_0 + p_1^2 x_0 + \mu (\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 + a_1 x_0 + x_0^3) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) должно быть справедливо при любом малом значении  $\mu$ , поэтому

$$\ddot{x}_0 + p_1^2 x_0 = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = -(a_1 x_0 + x_0^3). \quad (7)$$

Учитывая начальные условия (при  $t=0$   $x_0=A$ ,  $\dot{x}_1=0$ ), решение уравнения (6) представим в виде

$$x_0 = A \cos p_1 t.$$

Подставим это выражение в правую часть уравнения (7):

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = -(a_1 A + 0,75A^3) \cos p_1 t - 0,25A^3 \cos 3p_1 t. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) должно быть ограниченным, поэтому

$$a_1 A + 3A^3/4 = 0$$

(в противном случае частота возмущения равна частоте свободных колебаний и  $x_1 \rightarrow \infty$ ). Отсюда получаем

$$a_1 = -3A^2/4. \quad (9)$$

Решение уравнения (8) с учетом начальных условий имеет вид

$$x_1 = [A_3 / (32p_1^2)] (\cos 3p_1 t - \cos p_1 t).$$

Следовательно, в первом приближении полное решение дифференциального уравнения (1) можно записать так:

$$x = A \cos p_1 t + \mu [A_3 / (3\delta p_1^2)] (\cos 3p_1 t - \cos p_1 t).$$

Частоту свободных колебаний находим из соотношения (4) с учетом (9)

$$p_1^2 = p^2 + 3\mu A^2 / 4.$$

В рассматриваемом частном случае  $p_1 = 1,17 \text{ с}^{-1}$ .

**166.** Заменим нелинейную характеристику  $F = cx + c_1 \dot{x}^3$  линейной  $F = c_0 x$ . Для этого необходимо, чтобы

$$\int_0^A [c_0 x - (cx + c_1 \dot{x}^3)]^2 dx = \min.$$

Вычисляем интеграл и варьируем полученное выражение по неизвестному параметру  $c_0$ . Тогда

$$c_0 = c + 3c_1 A^2 / 5,$$

откуда следует, что частота свободных колебаний массы

$$p = \sqrt{c_0 / m} = \sqrt{c / m + 3c_1 A^2 / (5m)}.$$

С учетом числовых значений входящих в уравнение параметров получаем  $p = 1,14 \text{ с}^{-1}$ .

**167.** Считая движение гармоническим, решение дифференциального уравнения свободных колебаний (см. решение задачи 165)

$$\ddot{x} + p^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (1)$$

ищем в виде

$$x_0 = A \cos(p_1 t + \alpha). \quad (2)$$

Решая уравнение (1) по методу Галеркина, необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi/p_1} (\ddot{x}_0 + p^2 x_0 + \mu x_0^3) x_0 dt = 0. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в уравнение (3), находим квадрат частоты

$$p_1^2 = p^2 + 0,75\mu A^2.$$

Полученный результат совпадает с решением задачи 165 по методу Ляпунова—Пуанкаре.

**168.** Характеристику упругих элементов в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$F = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq \Delta;$$

$$F = c(x - \Delta) \text{ при } \Delta \leq x \leq A.$$

Заменим действительную нелинейную характеристику линейной

$$F_1 = c_0 x.$$

Определим среднеквадратичное отклонение линейной характеристики от нелинейной:

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta}^{\Delta} c_0^2 x^2 dx + \frac{1}{A-\Delta} \int_{\Delta}^A [c(x-\Delta)c_0x]^2 dx.$$

Так как  $dJ/dc_0 = 0$ , то

$$c_0 = (2A^2 - 2A\Delta - \Delta^2) c / (2A^2 + 2A\Delta + 5\Delta^2).$$

Частота колебаний равна

$$p = \sqrt{c(2A^2 - 2A\Delta - \Delta^2) / m(2A^2 + 2A\Delta + 5\Delta^2)}.$$

Колебания возможны, если

$$2A^2 - 2A\Delta - \Delta^2 > 0,$$

откуда получаем

$$A > 1,36\Delta.$$

**169.** Уравнение свободных колебаний имеет вид (см. решение задачи 161)

$$m\ddot{x} + 2Tx/l = 0. \quad (1)$$

Вычислим полное натяжение в пружине:

$$T = c\Delta l + T_0, \quad (2)$$

где  $\Delta l \approx x^2 / (2l_0)$ .

Подставим выражение (2) в уравнение (1), считая  $x \ll l_0$ :

$$m\ddot{x} + 2T_0x/l_0 + cx^3/l_0^2 = 0$$

или

$$\ddot{x} + p^2x + \mu x^3 = 0, \quad (3)$$

где  $p^2 = 2T_0 / (ml_0)$ ;  $\mu = c / (ml_0^2)$ .

Решая уравнение (3) (см. решение задачи 165), получаем

$$p_1^2 = p^2 + 3\mu x_0^2 / 4,$$

откуда после вычислений находим  $x_0 \approx 91,2$  мм.

**170.** Сила, действующая на массу при отклонении ее на  $x$ , равна

$$F = k\Phi_0^2 / (a_1 - x)^2 - k\Phi_0^2 / (a_1 + x)^2 \approx 4(k\Phi_0^2 / a_1^2) (x/a_1 + 2x^3/a_1^3).$$

Представим дифференциальное уравнение движения массы в виде

$$m\ddot{x} + cx = F$$

или

$$\ddot{x} + p^2x + \mu x^2 = 0.$$

Здесь

$$p^2 = c/m - 2k\Phi_0^2 / (ma_1^3); \quad \mu = -8k\Phi_0^2 / (ma_1^5). \quad (1)$$

Применяя метод малого параметра (см. решение задачи 165), получаем выражение для основного тона частоты свободных колебаний

$$p_1^2 = p^2 + 3\mu x_0^2/4. \quad (2)$$

Подставив выражения (1) в уравнение (2), находим критическое значение  $x_0$  ( $p_1=0$ ):

$$x_0^2 = (c - 4/k\Phi_0^2/a_1^3) (6k\Phi_0^2/a_1^5). \quad (3)$$

Введем безразмерный параметр, зависящий от магнитного поля и жесткости системы:  $\alpha = 4k\Phi_0^2/(ca_1^3)$ .

Тогда решение (3) принимает вид

$$\varepsilon^2 = 2(1-\alpha)/(3\alpha), \quad (4)$$

где  $\varepsilon = x_0/a_1$ .

Уравнение (4) представлено в виде кривой на рис. 251. Поскольку  $\varepsilon = x_0/a_1 < 1$ , заштрихованная область является областью устойчивых значений  $\varepsilon$  и  $\alpha$  (областью устойчивых колебаний). Кривая соответствует критическим значениям  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

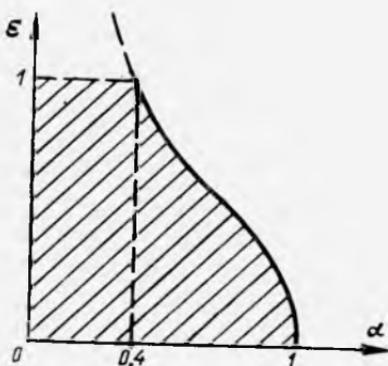


Рис. 251

При  $\alpha \leq 0,4$   $\varepsilon = 1, 0$ , т. е. движение происходит с ударами о магниты, и, следовательно, приведенное выше решение становится несправедливым.

171. Дифференциальное уравнение движения шины  $B$  имеет вид (см. решение задачи 124)

$$m\ddot{x} + 2cx - [2\mu I_1 I_2 l/a_0 - 2\mu I_1 I_2 l/(a_0 + x)] = 0.$$

Раскладывая  $1/(a_0 + x)$  в ряд и полагая  $x = x_0 + x_1$ , получаем

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 + \mu_1 \beta x_1^2 - \mu_1^2 \beta x_1^3 = 0, \quad (1)$$

где  $\mu_1 = x_0/a_0$ ;  $\beta = 2\mu I_1 I_2 l/(ma_0^2)$ ;  $p^2 = 2c/m - \beta$ ;  $\mu_1 x_1 = x/a_0$ .

Ищем периодическое решение уравнения (1) и частоту колебаний в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \mu_1 x_{11} + \mu_1^2 x_{12}; \\ p_1^2 &= p^2 + C_1 \mu_1 + C_2 \mu_1^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_{10}$ ,  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  и  $C_1$  и  $C_2$  — соответственно функции и постоянные, подлежащие определению.

Подставляя выражения (2) в уравнение (1) и ограничиваясь членами, содержащими  $\mu_1^2$ , получаем систему уравнений:

$$\ddot{x}_{10} + p_1^2 x_{10} = 0; \quad (3)$$

$$\ddot{x}_{11} + p_1^2 x_{11} = C_1 x_{10} - \beta x_{10}^2; \quad (4)$$

$$\ddot{x}_{12} + p_1^2 x_{12} = C_1 x_{11} + C_2 x_{10} - 2\beta x_{10} x_{11} \beta x_{10}^3. \quad (5)$$

Учитывая начальные условия (при  $t=0$   $x_{10}=1$ ,  $\dot{x}_{10}=0$ ), решение уравнения (3) представим в виде (в такой форме решение можно искать при условии  $p^2 > 0$  или  $2c/m - \beta > 0$ )

$$x_{10} = 1 \cdot \cos p_1 t.$$

Решение уравнения (4) не должно содержать вековых членов, поэтому следует принять  $C_1=0$ . Если решение уравнения (4) соответствует однородным начальным условиям ( $x_{11} = 0 = \dot{x}_{11}(0) = 0$ ), то

$$x_{11} = -\frac{\beta}{2p_1^2} + \frac{1}{3} \frac{\beta}{p_1^2} \cos p_1 t + \frac{\beta}{6p_1^2} \cos 2p_1 t + \frac{1}{3} \frac{\beta}{p_1^2} \sin p_1 t.$$

Подобным же образом получаем решение уравнения (5). Из условия, что коэффициент при множителе  $\cos p_1 t$  в правой части решения уравнения (5) равен нулю, следует, что

$$C_2 = 5\beta^2 / (4p_1^2) - 3\beta/4.$$

Подставляя  $C_2$  во второе уравнение (2) и учитывая, что  $C_1=0$ , находим основную частоту свободных колебаний шины

$$p_2^2 = p^2 + (x_0/a)^2 [5\beta^2 / (4p_1^2) - 3\beta/4]. \quad (6)$$

Уравнение (6) необходимо решить относительно  $p_1^2$ . Учитывая, что  $p_1^2 = p^2 + C_2 \mu^2$ , можно в правой части этого уравнения принять  $p_1^2 = p^2$ . Тогда

$$p_1^2 = p^2 + (x_0/a_0)^2 [5\beta^2 / (4p^2) - 3\beta/4] = \\ = p_0^2 - \beta + (x_0/a_0)^2 \{5\beta^2 / [4(p_0^2 - \beta)] - 3\beta/4\},$$

где  $p_0^2 = 2c/m$ .

**172.** Решение отличается от решения задачи 171 только знаком  $\beta$ .

**173.** Принимая в качестве малого параметра  $\mu_1 = x_{\max}/a_0$ , получаем уравнение движения в виде уравнения (1) в решении задачи 171. Решение уравнения (3) должно удовлетворять начальным условиям  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , откуда

$$x_0 = (\dot{x}_0/p_1) \sin p_1 t.$$

Следовательно,  $x_{0\max} = \dot{x}_0/p_1$ , т. е.  $\mu_1 = \dot{x}_0/a_0 p_1$ .

Решая далее задачу, аналогично задаче 171, получаем, что основная частота свободных колебаний шины

$$p_1^2 = p^2 + (\dot{x}_0/a_0 p)^2 [5\beta^2 / (4p^2) - 3\beta/4],$$

где  $p^2 = 2c/m - \beta$ ;  $\beta = 2\mu I_1 I_2 l / (ma_0^2)$ .

174. Приведем заданное дифференциальное уравнение к виду

$$\ddot{\varphi} + g\varphi/l - g\varphi^3/(6l) = 0. \quad (1)$$

Принимая в качестве малого параметра  $\mu = g/(6l)$ , получаем (с точностью до членов первого порядка относительно  $\mu$ ) частоту основного тона колебаний

$$p_1^2 = (g/l) (1 - \varphi_0^2/8). \quad (2)$$

Применяя метод прямой линеаризации, представим дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

Согласно этому методу, необходимо, чтобы уклонение линейной характеристики от нелинейной было минимально, т. е.

$$\frac{d}{dc} \int_0^{\varphi_0} \left\{ \left[ \left( \frac{g}{l} \varphi - \frac{g}{6l} \varphi^3 \right) - c\varphi \right] \varphi \right\}^2 d\varphi = 0.$$

Произведя вычисления, находим

$$c = p_1^2 = p_0^2 (1 - 5\varphi_0^2/42), \quad (3)$$

где  $p_0^2 = g/l$ .

Сравнивая выражения (2) и (3), получаем

$$\Delta = p_0^2 (1 - 5\varphi_0^2/42) - p_0^2 (1 - \varphi_0^2/8) = 0,006 p_0^2 \varphi_0^2.$$

175. Дифференциальное уравнение колебаний рычага имеет вид (см. решение задачи 106)

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi + \mu\varphi^3 = 0,$$

где  $p_2 = (c - FR)/J$ ;  $\mu = FR/(6J)$ .

Основная частота, определенная по методу малого параметра,

$$p_1^2 = p^2 + (3/4) (\dot{\varphi}_0/p_1)^2 [FR/(6J)]. \quad (1)$$

Воспользуемся теперь методом Галеркина. Считая движение гармоническим и полагая  $\varphi_1 = \varphi_0 \sin(p_1 t + \alpha)$ , потребуем равенства нулю интеграла

$$\int_0^{2\pi/p_1} (\ddot{\varphi}_1 + p^2\varphi_1 + \mu\varphi_1^3) \varphi_1 dt = 0.$$

Учитывая, что  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_0/p_1$ , из последнего выражения найдем

$$p_1^2 = p^2 + (3/4) (\dot{\varphi}_0/p_1)^2 [FR/(6J)]. \quad (2)$$

Таким образом, полученные решения (1) и (2) совпадают.

176. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний рычага имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + (mgl_0 + c)\varphi + \text{sign } \dot{\varphi} k\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\text{sign } \dot{\varphi}$  означает, что знак момента силы трения  $M_{\text{тр}} = k\dot{\varphi}^2$  совпадает со знаком скорости  $\dot{\varphi}$ .

Представим дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = \text{sign } \dot{\varphi} \alpha \dot{\varphi}^2 = 0,$$

где  $p^2 = (mgl_0 + c)/J$ ,  $\alpha = k/J$ .

Поскольку необходимо выяснить зависимость частоты колебаний от начального отклонения  $\varphi_0$ , за начальные условия примем

$$\varphi(0) = a, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Рассмотрим первый полупериод движения. Здесь  $\text{sign } \dot{\varphi} = -1$  и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi - \alpha\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (2)$$

Решение ищем в форме

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha^2\omega^2 + \dots, \quad p^2 = p_1^2 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \dots \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2) и пренебрегая членами, содержащими  $\alpha$  в степени выше второй, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + p_1^2\varphi_0 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_1 + p_1^2\varphi_1 &= \dot{\varphi}_0^2 - C_1\varphi_0; \\ \ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 &= -C_1\dot{\varphi}_1 - C_2\varphi_0 + 2\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с начальными условиями решение первого уравнения (4) имеет вид

$$\varphi_0 = a \cos p_1 t. \quad (5)$$

Подставляя это решение в правую часть второго уравнения (4) (при однородных начальных условиях надо принять  $C_1 = 0$ , чтобы не было вековых членов):

$$\varphi_1 = (1/2)a^2 - (2/3)a^2 \cos p_1 t + (1/6)a^2 \cos^2 p_1 t. \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в правую часть третьего уравнения (4):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 &= -C_2 a \cos p_1 t - 2a^3 p_1^2 \sin p_1 t [(1/3) \sin p_1 t + \\ &+ (1/3) \sin 2p_1 t. \end{aligned} \quad (7)$$

В последнем уравнении содержится произвольная постоянная  $C_2$ , которую нужно определить из условия отсутствия резонанса. Уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + p_1^2\varphi_2 &= \left(\frac{1}{3} p_1^2 a^3 - C_2 a\right) \cos p_1 t - \frac{2}{3} p_1^2 a^3 + \\ &+ \frac{2}{3} p_1^2 a^3 + \frac{2}{3} p_1^2 a^3 \cos 2p_1 t - \frac{1}{3} p_1^2 a^3 \cos 3p_1 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы решение (8) не содержало вековых членов, должно соблюдаться условие

$$C_2 = \rho_1^2 a^2 / 3.$$

Из второго уравнения (3) найдем частоту свободных колебаний

$$\rho_1 = \rho / \sqrt{1 + \alpha^2 a^2 / 3}.$$

При колебаниях (ограничиваясь двумя слагаемыми)  $\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1$ , и при  $t = \pi / \rho_1$  амплитудное значение угла

$$\varphi(\pi / \rho_1) = a_1 = -(a - 4\alpha a^2 / 3).$$

Рассматривая уравнение движения на втором полупериоде

$$\ddot{\varphi} + \rho^2 \varphi + \alpha \varphi^2 = 0,$$

можно получить выражение для частоты

$$\rho_2 = \rho / \sqrt{1 + \alpha^2 a_1^2 / 3}$$

и значение амплитуды в конце второго полупериода

$$a_2 = a_1 - 4\alpha a_1^2 / 3.$$

Для последующих полупериодов задача решается аналогично.

177. Уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + c_1 x^3 = P_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Уравнение (1) решаем по методу Галеркина, положив

$$x \approx x_1 = x_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Подставим (2) в уравнение (1) и потребуем равенства нулю интеграла

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} [m\ddot{x}_1 + cx_1 + c_1 x_1^3 - P_0 \sin \omega t] x_1 dt = 0,$$

где  $2\pi/\omega$  — период колебаний.

После интегрирования получаем

$$(3/4)c_1 x_0^3 + (c - m\omega^2)x_0 - P_0 = 0. \quad (3)$$

Корни уравнения (3) удобно определить графически, построив графики функций  $\eta_1 = (3/4)c_1 x_0^3$  и  $\eta_2 = P_0 - (c - m\omega^2)x_0$ .

В точке пересечения графиков  $\eta_1$  и  $\eta_2$  получаем значение действительного корня уравнения (3), равного  $x_0 \approx 2,27$  см (рис. 252)

178. В зависимости от значения частоты возмущающей силы изменяются и корни уравнения

$$(3/4)c_1 x_0^3 + (c - m\omega^2)x_0 - F_0 = 0 \quad (1)$$

[см. уравнение (3) в решении задачи 177].

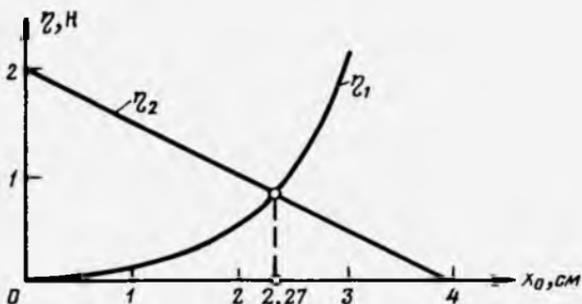


Рис. 252

Аналитическим условием совпадения двух действительных корней этого кубического уравнения является условие  $D=0$  при  $p^3=-q^2$  [2]. Здесь  $D=q^2+p^3$ ;  $q=-2F_0/3c_1$ ;  $p=4(c-m\omega^2)/(9c_1)$ . Отсюда находим

$$\omega_*^2 = c/m + [9c_1/(4m)][2F_0/(3c_1)]^{2/3}.$$

Используя числовые данные задачи 177, получаем  $\omega_*^2 = 16,6 \text{ с}^{-1}$ . При этом  $q = -13,33$ ;  $p = -5,63$ .

Для определения амплитуд корней уравнения (1) следует воспользоваться тригонометрической формой решения кубического уравнения. Корни уравнения (1) будут следующие:

$$x_{01} = -2r \cos \varphi/3; (x_0)_{2,3} = 2r \cos[(\pi \pm \varphi)/3].$$

Так как  $r = \text{sign } q \sqrt{|p|} = -2,38$ , а  $\cos \varphi = q/r^3 = 1$ , то корни уравнения (1) равны  $x_{01} = 47,6 \text{ мм}$ ;  $(x_0)_{2,3} = -2,38 \text{ мм}$ .

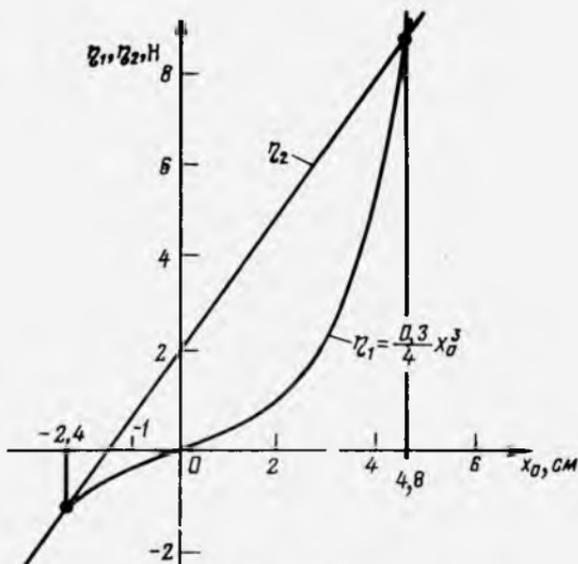


Рис. 253

Тот же результат можно получить графически. С увеличением значения  $\omega$  прямая  $\eta_2 = F - (c - m\omega)^2 x_0$  на графике  $\eta(x_0)$  (рис. 253) поворачивается против вращения часовой стрелки. Искомому значению  $\omega_*$  будет соответствовать такое ее положение, при котором она касается левой ветви графика  $\eta_1$  и пересекает его правую ветвь.

179. Дифференциальное уравнение движения [уравнение (1) в решении задачи 177] представим в виде

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = (m\omega^2 - c)x - c_1 x^3 + F_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Используя метод Дуффинга, примем в качестве первого приближения величину

$$x_1 = x_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Подставим  $x_1$  в правую часть уравнения (1) и получим уравнение для вычисления второго приближения:

$$m\ddot{x}_2 + m\omega^2 x_2 = [(m\omega^2 - c)x_0 - (3/4)c_1 x_0^3 + F_0] \sin \omega t + (1/4)c_1 x_0^2 \sin 3\omega t.$$

Поскольку рассматривается только периодическое решение, то для исключения векового члена необходимо, чтобы

$$(m\omega^2 - c)x_0 - (3/4)c_1 x_0^3 + F_0 = 0. \quad (2)$$

Это уравнение совпадает с выражением для определения амплитуды вынужденных колебаний  $x_0$  по методу Галеркина. Если условие (2) выполнено, то второе приближение находим как решение дифференциального уравнения

$$m\ddot{x}_2 + m\omega^2 x_2 = (1/4)c_1 x_0^3 \sin 3\omega t,$$

откуда

$$x_2 = A \sin \omega t + B \cos \omega t - [c_1 x_0^3 / (32\omega^2 m)] \sin 3\omega t.$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  определяем из начальных условий. Так как при отсутствии трения сдвиг фаз между возмущающей силой и смещением равен нулю, максимальное отклонение массы происходит в момент действия наибольшей силы, т. е. за начало отсчета времени можно принять  $t = T/4$ , где  $T = 2\pi/\omega$  — период. При этом  $x_2 = x_0$  и  $\dot{x}_2 = 0$ .

Используя эти условия, находим  $A = x_0 - c_1 x_0^3 / (32\omega^2 m)$ ;  $B = 0$ .

Следовательно, приближенное решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид

$$x = x_0 \sin \omega t - [c_1 x_0^3 / (32\omega^2 m)] (\sin \omega t - \sin 3\omega t).$$

Из уравнения (2) вычисляем  $x_0 = 2,27$  см, тогда  $x = 2,27 \cdot \sin 10t = 0,363 \cdot 10^{-1} (\sin 10t - \sin 30t)$ .

180. Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + cx + c_1 x^3 = F_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (1)$$

Здесь учтено, что при наличии сопротивления смещение  $x$  и сила  $F$  имеют рассогласование по фазе (угол сдвига фаз  $\beta$ ). Приближенное решение уравнения (1) имеет вид

$$x = x_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и пренебрегая слагаемыми, содержащими  $\sin 3\omega t$ , получаем

$$(-m\omega^2 x_0 + cx_0 + 0,75c_1 x_0^3 - F_0 \cos \beta) \sin \omega t + (\alpha \omega x_0 - F_0 \sin \beta) \cos \omega t = 0. \quad (3)$$

Поскольку функции  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  линейно независимы, для равенства нулю уравнения (3) необходимо, чтобы

$$-m\omega^2 x_0 + cx_0 + 0,75c_1 x_0^3 - F_0 \cos \beta = x; \quad \alpha \omega x_0 - F_0 \sin \beta = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (4) определяет амплитуду колебаний  $x_0$  и сдвиг фаз  $\beta$ . Исключив из (4)  $\beta$ , получаем

$$[(c - m\omega^2)x_0 + 0,75c_1 x_0^3]^2 + (\alpha \omega x_0)^2 = F_0^2. \quad (5)$$

На рис. 254 показано графическое решение уравнения (5), в котором

$$\eta_1 = [(c - m\omega^2)x_0 + 0,75c_1 x_0^3]^2 + (\alpha \omega x_0)^2; \quad \eta_2 = F_0^2.$$

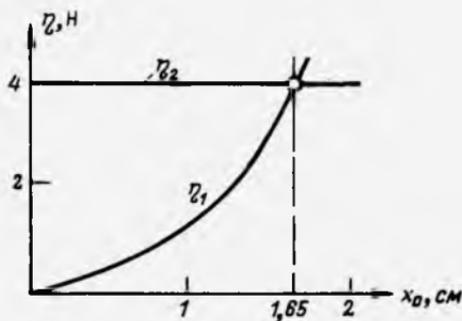


Рис. 254

Точка пересечения графиков  $\eta_1$  и  $\eta_2$  позволяет получить значение амплитуды установившихся колебаний  $x_0 = 1,65$  см. При этом сдвиг фаз  $\beta = \arcsin \alpha \Delta x_0 / F_0 \approx 54^\circ 40'$ .

181. Предположим, что маятник совершает колебания относительно некоторого отклоненного от вертикали положения. Тогда дифференциальное уравнение его движения имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}). \quad (1)$$

Разложим функцию возмущения  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  в ряд в окрестностях номинального значения  $\Omega$ :

$$M(\Omega - \dot{\varphi}) = M(\Omega) - M'(\Omega)\dot{\varphi} + 0,5M''(\Omega)\dot{\varphi}^2 - 0,17M'''(\Omega)\dot{\varphi}^3 + \dots$$

Ограничиваясь линейной частью разложения, получаем

$$J\ddot{\varphi} + [\alpha + M'(\Omega)]\dot{\varphi} + mgl\varphi = M(\Omega).$$

Отсюда следует, что при отсутствии колебаний ( $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ ) угол отклонения маятника от вертикали равен

$$\varphi_0 = M(\Omega) / (mgl). \quad (2)$$

Пусть  $\psi = \varphi - \varphi_0$ , тогда можно записать

$$J\ddot{\psi} + [\alpha + M'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\psi = 0.$$

При  $\alpha + M'(\Omega) > 0$  система диссипативна, т. е. ее колебания являются затухающими.

При  $\alpha + M'(\Omega) < 0$  система самовозбуждающаяся, т. е. возможны возрастающие во времени колебания.

Вопрос о действительном поведении системы можно решить, если в разложении  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  оставить нелинейные члены.

Рассмотрим разложение  $M(\Omega - \dot{\varphi})$ , включающее члены третьего порядка. Тогда

$$J\ddot{\psi} + [\alpha + M'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\psi = M''(\Omega)\dot{\psi}^2/2 - M'''(\Omega)\dot{\psi}^3/6.$$

Обозначим  $\alpha + M'(\Omega) = -b_1$ ;  $M'''(\Omega)/6 = b_2$ . Тогда при  $M''(\Omega) = 0$  можно записать

$$J\ddot{\psi} - b_1\dot{\psi} + b_2\dot{\psi}^3 + mgl\psi = 0.$$

Полагая  $p_0 = \sqrt{mgl/J}$ ;  $\vartheta = p_0 t$ ;  $x = \psi p_0 \sqrt{b_2/b_1}$ ;  $\mu = b_1/(J p_0)$ , получаем уравнение Релея

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}, \quad (3)$$

где  $\dot{x} = dx/d\vartheta$ .

**182.** Нелинейное уравнение угловых колебаний тормозной колодки имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} - M(\Omega - \dot{\varphi}) = 0, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции тормозной колодки относительно оси вращения вала. Ограничиваясь линейной частью разложения  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  в ряд, получаем

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + a\varphi = M(\Omega'), \quad (2)$$

где

$$a = \left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega = \Omega'}.$$

Так как  $c\dot{\varphi}_0 = M(\Omega')$ , а также полагая  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$  (где  $\varphi_0$  — угол поворота тормозной колодки при установившемся режиме,  $\varphi_1$  — дополнительный угол поворота при колебаниях колодки), из уравнения (2) имеем

$$J\ddot{\varphi}_1 + c\dot{\varphi}_1 + a\varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что угловые колебания тормозной колодки будут устойчивыми, если  $a > 0$ , что имеет место при значениях  $|\Omega'| \geq |\Omega_*|$  (рис. 255).

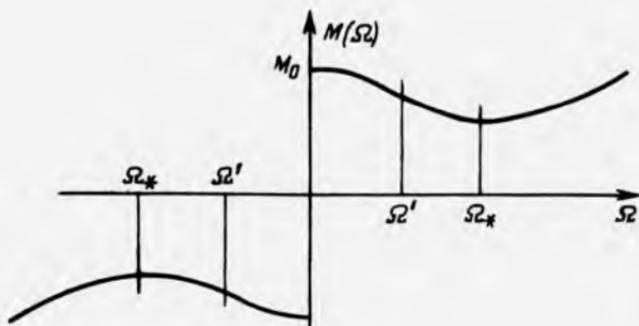


Рис. 255

183. Как показано при решении задачи 181, уравнение движения маятника при нелинейной характеристике сил трения приводится к уравнению Релея (см. уравнение (3) в решении задачи 181).

$$\ddot{x} + p_0^2 x = \mu \dot{x} p_0 [1 - \dot{x}^2 p / o^2], \quad (1)$$

где  $\mu = -(\alpha + M'(\Omega)) / (J p_0)$ .

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = a \cos(p_0 t + \gamma),$$

где  $a$  и  $\gamma$  — неопределенные, медленно изменяющиеся во времени функции, т. е. такие функции, производные которых по времени имеют тот же порядок малости, что и параметр  $\mu$ .

Найдем скорость  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(p_0 t + \gamma) - a p_0 \sin(p_0 t + \gamma) - \dot{a} \gamma \sin(p_0 t + \gamma).$$

Поскольку в решении имеются две неопределенные функции ( $a$  и  $\gamma$ ), необходимо, чтобы

$$\dot{a} \cos(p_0 t + \gamma) - a \dot{\gamma} \sin(p_0 t + \gamma) = 0. \quad (2)$$

Тогда

$$\dot{x} = -a p_0 \sin(p_0 t + \gamma); \quad (3)$$

$$\ddot{x} = -\dot{a} p_0 \sin(p_0 t + \gamma) - a p_0^2 \cos(p_0 t + \gamma) - \dot{a} \gamma p_0 \cos(p_0 t + \gamma). \quad (4)$$

Подставим выражения (3) и (4) в исходное уравнение (1):

$$\begin{aligned} & -\dot{a} p_0 \sin(p_0 t + \gamma) - a p_0 \dot{\gamma} \cos(p_0 t + \gamma) = \\ & = -\mu [1 - a^2 \sin^2(p_0 t + \gamma)] a p_0^2 \sin(p_0 t + \gamma). \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения неизвестных  $\dot{a}$  и  $\dot{\gamma}$  воспользуемся уравнениями (2) и (5), из которых можно записать

$$\dot{\gamma} = \mu p_0 [1 - a^2 \sin^2(p_0 t + \gamma)] \sin(p_0 t + \gamma) \cos(p_0 t + \gamma); \quad (6)$$

$$\dot{a} = a \mu p_0 [1 - a^2 \sin^2(p_0 t + \gamma)] \sin^2(p_0 t + \gamma).$$

По методу Ван-дер-Поля, функции (6) можно заменить их средними за период значениями (при этом  $\gamma$  считается параметром, а не функцией времени), т. е.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{p_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/p_0} \dot{\gamma}(\tau) d\tau; \\ \dot{a} &= \frac{p_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/p_0} \dot{a}(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (7)$$

Интегралы (7) удобнее вычислять, перейдя к новой независимой переменной  $\theta = p_0\tau + \gamma$ . Тогда

$$d\theta = p_0 d\tau + \dot{\gamma} d\tau.$$

Поскольку  $\dot{\gamma}$  имеет тот же порядок малости, что и параметр  $\mu$ , можно считать, что

$$d\theta = p_0 d\tau.$$

В таком случае

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a\mu p_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta d\theta; \\ \dot{\gamma} &= \frac{\mu p_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta.\end{aligned}$$

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned}a &= \frac{\mu p_0}{2} \Phi(a) = \frac{\mu p_0 a}{2} \left(1 - \frac{3}{4} a^2\right); \\ \dot{\gamma} &= \frac{\mu p_0}{2\pi} \Psi(a) = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение (8) позволяет определить изменение амплитуды колебаний  $a$  во времени. Из общей теории нелинейных колебаний известно, что равенство нулю правой части уравнения (8) свидетельствует о наличии предельных циклов (или состояний равновесия на фазовой плоскости). Найдем корни уравнения  $\dot{a} = 0$ . Из (8) следует, что  $a = 0$  при  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 2/\sqrt{3}$ .

Нулевой корень соответствует состоянию равновесия маятника, а ненулевой — периодическому движению.

Исследуем устойчивость равновесия и устойчивость периодического движения маятника. Допустим,

$$a = a_i + \Delta a, \quad (9)$$

где  $a_i$  — корни уравнения  $\Phi(a) = 0$ ;  $\Delta a$  — отклонения маятника от состояния равновесия или периодического движения. Подставим выражение (9) в (8):

$$d\Delta a/dt = (\mu p_0/2) \Phi(a_i + \Delta a).$$

Разложим правую часть последнего уравнения в ряд, удерживая в разложении только линейные члены

$$d\Delta a/dt = (\mu\rho_0/2) (d\Phi/da_i) \Delta a. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) имеет вид

$$\Delta a = C e^{\frac{\mu\rho_0}{2} \frac{d\Phi}{da_i} t},$$

откуда следует, что виджение (или состояние равновесия) маятника устойчиво при  $d\Phi/da_i < 0$  (если  $\mu > 0$ ) и неустойчиво при  $d\Phi/da_i > 0$ . В рассматриваемом случае  $\mu = 0,015 > 0$  (см. задачу 181). Следовательно,

$$\Phi(a) = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{3}{4} a^2\right); \quad \frac{d\Phi}{da} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{9}{4} a^2\right).$$

При  $a = a_1 = 0$

$$d\Phi/da_1 = 1/2 > 0,$$

т. е. состояние равновесия неустойчиво.

При  $a = a_2 = 2\sqrt{3}$ .

$$d\Phi/da_2 = -1 < 0.$$

Следовательно, предельный цикл колебаний является устойчивым, т. е. маятник, выведенный из положения равновесия, совершает колебания с медленно изменяющейся амплитудой, стремящейся с ростом времени к предельному значению  $\psi_{\text{пред}}$  (переходя к амплитуде угловых колебаний  $\psi$ ), равному

$$\psi_{\text{пред}} = \frac{a_2}{\rho_0} \sqrt{b_1/b_2}, \quad \psi_{\text{пред}} = 0,224 \text{ рад.}$$

184. Поскольку начальный угол отклонения маятника  $\psi_0$  меньше предельного ( $\psi_0 = 0,1$  рад, а  $\psi_{\text{пред}} = 0,224$  рад), амплитуда колебаний маятника непрерывно увеличивается, стремясь к предельной. На рис. 256 пунктиром показана фазовая траектория изображающей точки, характеризующей движение маятника

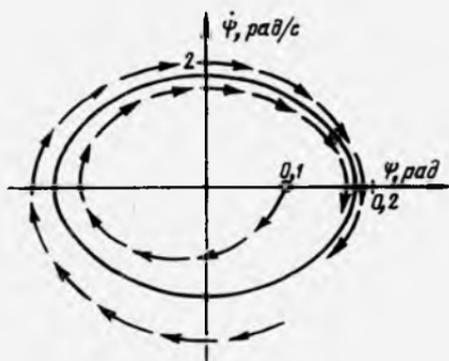


Рис. 256

ка. Сплошная замкнутая кривая изображает предельный цикл (установившееся периодическое движение маятника).

Если  $\psi_0 > \psi_{\text{пред}}$ , то движение маятника происходит с убывающей амплитудой (пунктир снаружи замкнутой кривой).

185. Решение нелинейного уравнения колебаний маятника (см. решение задачи 183) рассматривали в виде

$$x = a \cos(p_0 t + \gamma).$$

Было получено, что  $\dot{\gamma} = 0$ , поэтому частота маятника, соответствующая устойчивому предельному циклу, равна  $p_0$ .

186. После выкладок, аналогичных выполненным при решении задачи 183, получаем

$$\Phi(a) = (a/8)(4 - a^2); \quad \psi(a) = 0.$$

Приравняв  $\Phi(a)$  нулю, находим  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$ . Первый корень соответствует неустойчивому равновесию системы, второй дает амплитуду предельного цикла.

Продифференцировав выражение  $\Phi(a)$  по  $a$  (см. решение задачи 183) и подставив в него значение  $a$ , соответствующее предельному циклу, получим

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right|_{a=a_2} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} a_2^2 = -1 < 0.$$

Следовательно, предельный цикл устойчив.

187. В стационарном режиме сила лобового сопротивления планера уравновешивается силой натяжения троса

$$c x_0 = c_x S \rho v_0^2 / 2, \quad (1)$$

где  $c$  — жесткость троса при растяжении;  $x_0$  — удлинение троса при стационарном режиме полета.

Если планер совершает малые продольные колебания, его движение описывается уравнением

$$m \ddot{x} + c(x_0 + x) = c_x S \rho (v_0 - \dot{x})^2 / 2, \quad (2)$$

где  $x$  — отклонение от положения равновесия.

При увеличении  $x$  скорость планера уменьшается, поэтому в правой части уравнения (2) стоит знак минус.

Преобразуем уравнение (2) с учетом равенства (1):

$$\ddot{x} + p_0^2 x = -\mu (2v_0 \dot{x} - \dot{x}^2) = F_c,$$

где  $p_0^2 = c/m$ ;  $\mu = c_x \rho S / (2m)$ .

При колебаниях планера относительно положения равновесия сила сопротивления должна быть симметричной функцией  $x$ , поэтому  $F_c$  следует принять равной

$$F_c = -\mu (2v_0 \dot{x} - x |\dot{x}|).$$

Допустим, что  $x = a \cos(p_0 t + \varphi) = a \cos \varphi$ .

Считая  $a$  и  $\varphi$  переменными и применяя метод Ван-дер-Поля (см. задачу 183), можно записать (достаточно получить уравнение для  $a$ )

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2v_0 a - a^2 p_0 |\sin \theta|] \sin^2 \theta d\theta,$$

или  $da/dt = \Phi(a)$ , где  $\Phi(a) = -(a\mu/p_0)[2v_0\pi - (8/3)ap_0]$ .

При  $a_1=0$  и  $a_2=3v_0\pi/(4p_0)$  получаем  $\Phi(a)=0$ , что соответствует наличию состояния равновесия ( $a_1=0$ ) и предельному циклу с амплитудой  $a_2=3v_0\pi/4p_0$ .

Найдем производные  $\Phi(a)$  по  $a$  при значении  $a$ , равном  $a_1$  и  $a_2$ :

$$d\Phi/da|_{a=a_1} = -2v_0\pi/p_0 < 0;$$

$$d\Phi/da|_{a=a_2} = 3v_0\pi/(4p_0) > 0.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что положение равновесия (установившийся полет планера) является устойчивым.

## Глава 2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### § 8. Свободные колебания

188. Воспользовавшись принципом Даламбера, получим следующие дифференциальные уравнения движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = 0;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0.$$

Решение системы ищем в виде

$$x_1 = A \sin pt; \quad x_2 = B \cos pt.$$

Для определения коэффициентов  $A$  и  $B$  запишем систему уравнений вида

$$(c - p^2 m)A - cB = 0;$$

$$-cA + (c - m_2 p^2)B = 0.$$

Так как  $A$  и  $B$  не равны нулю, то определитель системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c - m_1 p^2 & -c \\ -c & c - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$p^2 [m_1 m_2 p^2 - (m_1 + m_2) c] = 0.$$

Отсюда получаем

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{(m_1 + m_2) c / (m_1 m_2)}.$$

189. За обобщенные координаты примем угол поворота цилиндра  $\varphi$  и угол отклонения маятника от вертикали  $\theta$ . Вычислим кинетическую энергию цилиндра:

$$T_1 = (J\dot{\varphi}^2 + Mr^2\dot{\varphi}^2)/2,$$

где  $J = Mr^2/2$ .

Скорость движения массы  $m$  складывается из скорости, перпендикулярной стержню ( $l\dot{\vartheta}$ ) и скорости горизонтального перемещения оси цилиндра ( $r\dot{\varphi}$ ). Кинетическая энергия массы  $m$  равна

$$T_2 = m(l^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2lr\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \cos \vartheta)/2.$$

Изменение потенциальной энергии системы определяется вертикальным смещением массы  $m$ :

$$\Pi = mgl(1 - \cos \vartheta).$$

Составляя функцию Лагранжа  $L = T_1 + T_2 - \Pi$  и подставляя ее в уравнение Лагранжа

$$(d/dt) (\partial L / \partial \dot{q}_i) - \partial L / \partial q_i = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} (3Mr^2/2 + mr^2)\ddot{\varphi} + mlr\dot{\vartheta} \cos \vartheta - mlr\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta &= 0; \\ mlr\ddot{\varphi} \cos \vartheta + ml^2\ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В случае малых колебаний в последних уравнениях следует пренебречь нелинейными членами и принять  $\sin \vartheta = \vartheta$ ,  $\cos \vartheta = 1$ . Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} (3M/2 + m)r^2\ddot{\varphi} + mlr\ddot{\vartheta} &= 0; \\ mlr\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\vartheta} + mgl\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения собственных частот колебаний положим  $\varphi = A \sin pt$ ,  $\vartheta = B \sin pt$ . Подставив эти выражения в уравнения (2), из условия равенства нулю определителя системы однородных уравнений найдем

$$\begin{aligned} p_1 &= 0; \quad p_2 = \sqrt{\frac{(1,5M + m)g}{(1,5M + m)l - ml}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1,5 \cdot 2 + 0,2) \cdot 10}{(1,5 \cdot 2 + 0,2) \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,5}} \approx 4,6 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

190. Применяя метод сил, составим дифференциальные уравнения движения диска:

$$\begin{aligned} x &= \delta_{11}(-m\ddot{x}) + \delta_{12}(-J\ddot{\varphi}); \\ \varphi &= \delta_{12}(-m\ddot{x}) + \delta_{22}(-J\ddot{\varphi}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — перемещения диска от единичных сил, приложенных в направлении возможных перемещений. Вычисление  $\delta_{ij}$  показано в решении задачи 47.

Так как жесткость проволоки пружины при изгибе и кручении соответственно равна  $EJ_x$  и  $GJ_0$ , то можно записать

$$\delta_{11} = \frac{\pi n D^3}{4} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{EJ_x} + \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_\rho} \right);$$

$$\delta_{22} = \pi n D \left( \frac{\cos^2 \alpha}{EJ_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{GJ_\rho} \right);$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\pi n D^2}{4} \sin 2\alpha \left( \frac{1}{EJ_x} + \frac{1}{GJ_\rho} \right).$$

Подставим эти выражения в уравнения (1) и найдем их решения в виде  $\delta_i = A_i \sin pt$ :

$$p_{1,2}^2 = \frac{8(EJ_x + GJ_\rho)}{\pi n D^3 m (1 + 3 \cos^2 2\alpha)} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{EJ_x GJ_\rho (1 + 3 \cos^2 2\alpha)}{(EJ_x + GJ_\rho)^2}} \right).$$

Графики изменения частот  $p_1$  и  $p_2$  в зависимости от угла  $\alpha$  приведены на рис. 257. При этом принято, что  $GJ_\rho = 0,8EJ_x$ , а  $p_0^2 = EJ_x (\pi n D^3 m)$ .

191. Рассмотрим положения масс в произвольный момент времени (рис. 258, а). На массы действуют силы, показанные на рис. 258, б. Воспользовавшись принципом Даламбера, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + T_0 \alpha_1 + T_0 \alpha_2 = 0; \tag{1}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + T_0 \alpha_2 + T_0 \alpha_3 = 0,$$

где  $\alpha_1 = y_1/l$ ;  $\alpha_2 = (y_2 - y_1)/l$ ,  $\alpha_3 = y_2/l$ .

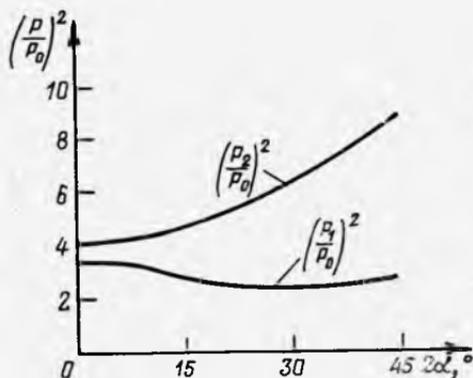


Рис. 257

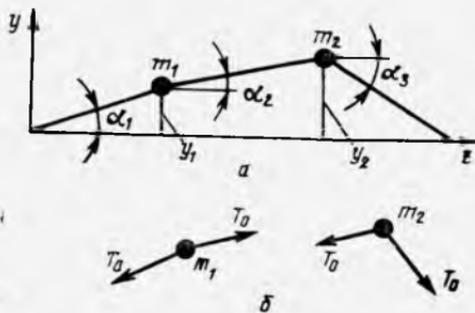


Рис. 258

С учетом выражений для  $\alpha_1 \dots \alpha_3$  система уравнений (1) принимает вид

$$m_1 \ddot{y}_1 + T_0 (y_1/l) - T_0 (y_2 - y_1)/l = 0;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + T_0 (y_2 - y_1)/l + T_0 y_2/l = 0.$$

Отсюда собственные частоты колебаний масс будут равны

$$p_{1,2} = \sqrt{T_0/l} \cdot \sqrt{[(m_1 + m_2) \mp \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 / (m_1 m_2)}]}.$$

192. Дифференциальные уравнения движения массы  $m$ , составленные по методу сил, имеют вид

$$y = \delta_{11} (-m\ddot{y}) + \delta_{12} (-J_{01}\ddot{\varphi});$$

$$\varphi = \delta_{21} (-m\ddot{y}) + \delta_{22} (-J_{01}\ddot{\varphi}).$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде

$$y = A \sin pt, \quad \varphi = B \sin pt.$$

После преобразований получаем следующее уравнение для определения собственных частот колебаний системы:

$$p^4 - (\delta_{22}J_{01} + \delta_{11}m)p^2 / (\Delta m J_{01}) + 1 / (\Delta m J_{01}) = 0,$$

где  $\Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}$ .

Отсюда квадраты частот колебаний

$$p_{1,2}^2 = \frac{(\delta_{22}J_{01} + \delta_{11}m) \mp \sqrt{(\delta_{22}J_{01} + \delta_{11}m)^2 - 4\Delta m J_{01}}}{2m\Delta J_{01}}.$$

Первая частота колебаний  $p_1$  при  $J_{01} \rightarrow 0$  позволяет получить частоту колебаний точечной массы, равную  $\sqrt{1/(\delta_{11}m)}$ . Найдем поправку к этой частоте, принимая  $J_{01}$  малым, но не равным нулю. Преобразуем выражение для  $p_1^2$  к виду

$$p_1^2 = \frac{\delta_{22}J_{01} + \delta_{11}m - \delta_{11}m \sqrt{1 + \frac{\delta_{22}^2 J_{01}^2 + 2\delta_{11}\delta_{22}mJ_{01} - 4J_{01}\Delta m}{m^2\delta_{11}^2}}}{2\Delta \cdot m J_{01}}.$$

Разложив корень в ряд и ограничившись только первым членом разложения, после преобразований получаем

$$p_1^2 = 1/(\delta_{11}m) - (\delta_{22}^2 J_{01}) / (4\Delta \cdot m^2 \delta_{11}).$$

Второе слагаемое в этом выражении представляет собой искомую погрешность в определении квадрата частоты, если считать массу  $m$  точечной.

193. Для определения собственных частот колебаний многомассовых статически неопределимых систем удобно воспользоваться уравнениями движения, составленными по методу сил. При этом статическую неопределенность системы можно не раскрывать, а заменить лишние связи неизвестными силами  $X_i$ .

Выберем основную систему так, как это показано на рис. 259. Силами, действующими на балку, являются силы инерции  $(-m\ddot{y}_1$  и  $-m\ddot{y}_2)$  и неизвестная реакция  $X$ .

Перемещения точек приложения этих сил равны

$$y_1 = -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12} + X\delta_{13};$$

$$y_2 = -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22} + X\delta_{23};$$

$$y_3 = -m_1\ddot{y}_1\delta_{31} - m_2\ddot{y}_2\delta_{32} + X\delta_{33}.$$

Полагая  $y_1 = C_1 \sin pt$ ,  $y_2 = C_2 \sin pt$ ,  $X = X_0 \sin pt$  и учитывая,

что  $y_3=0$ , получаем систему из трех однородных уравнений относительно неизвестных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $X_0$ .

Уравнение частот этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} (1 - m_1 p^2 \delta_{11}) & -m_2 p^2 \delta_{12} & \delta_{13} \\ -m_1 p^2 \delta_{21} & (1 - m_2 p^2 \delta_{22}) & \delta_{23} \\ -m_1 p^2 \delta_{31} & -m_2 p^2 \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$m_1 m_2 \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} p^4 - [m_1 (\delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13}^2) + m_2 (\delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2)] p^2 + \delta_{33} = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты  $\delta_{ij}$  определим методом Мора путем перемножения по правилу Верещагина соответствующих эпюр 1, 2 и 3 (см. рис. 259):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{a^2 (l-a)^2}{3IEJ_x}; & \delta_{22} &= \frac{b^2 (l-b)^2}{3IEJ_x}; & \delta_{33} &= \frac{l^3}{48EJ_x}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{ab}{6IEJ_x} (l^2 - a^2 - b^2); & \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{a}{4EJ_x} \left( \frac{a^2}{3} - \frac{l^2}{4} \right); \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{b}{4EJ_x} \left( \frac{b^2}{3} - \frac{l^2}{4} \right), \end{aligned}$$

где  $l=2(a+b)$ .

Подставив числовые данные в эти выражения и решив уравнение (1), находим  $p_1=101 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_2=150 \text{ с}^{-1}$ .

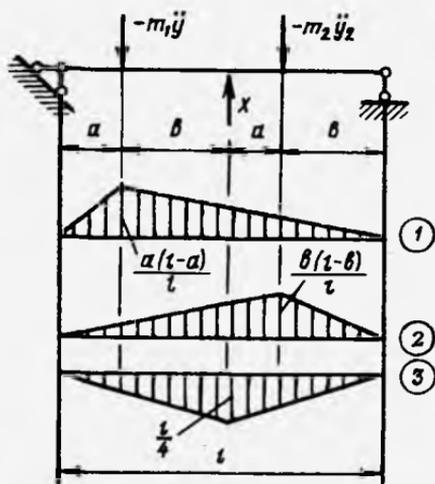


Рис. 259

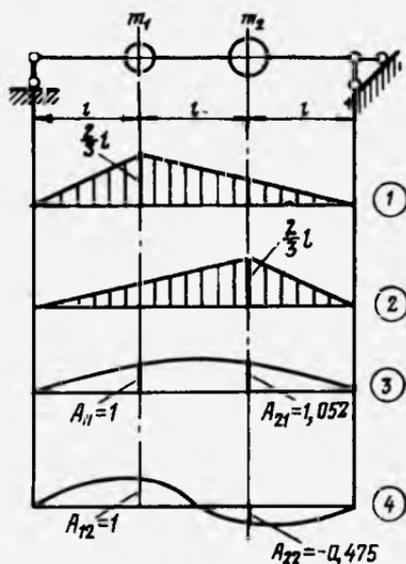


Рис. 260

194. Дифференциальные уравнения малых свободных колебаний, составленные по методу сил, имеют тот же вид, что и в задаче 193.

Собственные частоты колебаний системы равны:

а)  $p_1 = 3,68 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ ;  $p_2 = 10,62 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$  (см. рис. 138, а);

б)  $p_1 = 2,34 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ ;  $p_2 = 3,05 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$  (см. рис. 138, б);

в)  $p_1 = 2,54 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ ;  $p_2 = 4,37 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$  (см. рис. 138, в);

г)  $p_1 = 1,05 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ ;  $p_2 = 6,06 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$  (см. рис. 138, г).

195. Дифференциальные уравнения движения системы, составленные по методу сил, имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} (-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12} (-m_2 \ddot{y}_2); \\ y_2 &= \delta_{21} (-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22} (-m_2 \ddot{y}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Для определения коэффициентов  $\delta_{ij}$  к каждой из точек крепления масс приложим единичные силы и построим эпюры 1, 2 изгибающих моментов (рис. 260). Перемножив их по правилу Верещагина, получим

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 4l^3 / (9EJ_x); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 7l^3 / (18EJ_x). \quad (2)$$

Нахождение решения уравнений (1) в виде  $y_1 = A_1 \sin pt$ ,  $y_2 = A_2 \sin pt$  позволяет получить систему однородных уравнений вида

$$(\delta_{11} m_1 p^2 - 1) A_1 + \delta_{12} m_2 p^2 A_2 = 0; \quad (3)$$

$$\delta_{21} m_1 p^2 A_1 + (\delta_{22} m_2 p^2 - 1) A_2 = 0.$$

Отсюда находим уравнение частот

$$p^4 - p^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_1 \delta_{22}}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{21}^2)} + \frac{1}{m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{21}^2)} = 0. \quad (4)$$

Подставим в уравнение (4) выражения для  $\delta_{ij}$  из (2):

$$p^4 - p^2 \frac{72}{5} \frac{EJ_x}{ml^3} + \frac{54}{5} \left( \frac{EJ_x}{ml^3} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$p_1 = 0,89 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}; \quad p_2 = 3,7 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

Для определения форм колебаний в уравнениях (3) положим  $A_{11} = 1$  и  $p = p_1$ . Тогда

$$A_{21} = (1 - \delta_{11} m_1 p_1^2) / (\delta_{12} m_2 p_1^2)$$

или после подстановки  $A_{21} = 1,052$ .

Аналогично при  $A_{12} = 1$  и  $p = p_2$  получаем  $A_{22} = -0,475$ .

Формы колебаний 3, 4 изображены на рис. 260.

Числовые значения частот, соответствующие условию задачи, равны

$$p_1 = 336 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 1400 \text{ с}^{-1}.$$

196. Воспользуемся методом сил и запишем уравнения движения

$$y_1 = \delta_{11}(-m\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m\ddot{y}_2) + \delta_{13}(-m\ddot{y}_3);$$

$$y_2 = \delta_{21}(-m\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m\ddot{y}_2) + \delta_{23}(-m\ddot{y}_3);$$

$$y_3 = \delta_{31}(-m\ddot{y}_1) + \delta_{32}(-m\ddot{y}_2) + \delta_{33}(-m\ddot{y}_3),$$

где  $\delta_{11} = 25 \lambda$ ;  $\delta_{12} = 39 \lambda$ ;  $\delta_{13} = 17 \lambda$ ;  $\delta_{22} = 81 \lambda$ ;  $\delta_{23} = 39 \lambda$ ;  $\delta_{33} = 25 \lambda$ ;  $\lambda = l^3/3888EJ_x$ .

Решение ищем в виде  $y_i = A_i \sin pt$ .

После преобразований, аналогичных приведенным в решении задачи 195, получаем следующее уравнение частот колебаний системы:

$$2880 \mu^3 - 1344 \mu^2 + 131 \mu - 1 = 0, \quad (1)$$

где  $\mu = ml^3 p^2 / (3888EJ_x)$ .

Решение уравнения (1) ищем графически. На рис. 261 показан график левой части выражения (1). Из графика получаем три значения  $\mu$ , при которых левая часть уравнения (1) равна

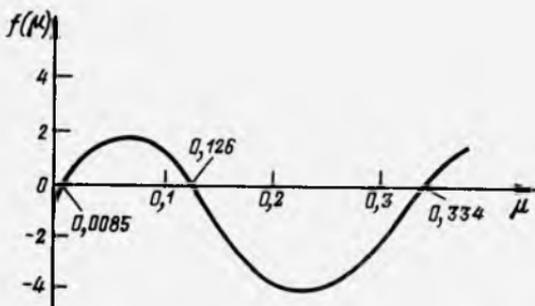


Рис. 261

нулю:  $\mu_1 = 0,00825$ ;  $\mu_2 = 0,126$ ;  $\mu_0 = 0,334$ . После подстановки и соответствующих преобразований находим

$$p_1 = 5,65 \sqrt{EJ_x / (ml^3)};$$

$$p_2 = 22,05 \sqrt{EJ_x / (ml^3)};$$

$$p_3 = 36 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

197. Положение центра тяжести пластины при колебаниях определяется горизонтальным  $x$  и вертикальным  $y$  смещениями и углом поворота  $\varphi$  пластины. В этом случае дифференциаль-

ные уравнения малых свободных колебаний могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x &= \delta_{11}(-m\ddot{x}) + \delta_{12}(-m\ddot{y}) + \delta_{13}(-J\ddot{\varphi}); \\ y &= \delta_{21}(-m\ddot{x}) + \delta_{22}(-m\ddot{y}) + \delta_{23}(-J\ddot{\varphi}); \\ \varphi &= \delta_{31}(-m\ddot{x}) + \delta_{32}(-m\ddot{y}) + \delta_{33}(-J\ddot{\varphi}). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты  $\delta_{ij}$  уравнений (1) определим перемножением по правилу Верещагина эюр изгибающих моментов 1, 2, 3 от единичных сил, приложенных к центру тяжести пластинки в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  (рис. 262, а-в):  $\delta_{11} = l^3/(3EJ_x)$ ;  $\delta_{12} = \delta_{21} = = l^3/(4EJ_x)$ ;  $\delta_{13} = \delta_{31} = l^2/(2EJ_x)$ ;  $\delta_{22} = l^3/(4EJ_x)$ ;  $\delta_{23} = \delta_{32} = = l^2/(2EJ_x)$ ;  $\delta_{33} = l/(EJ_x)$ .

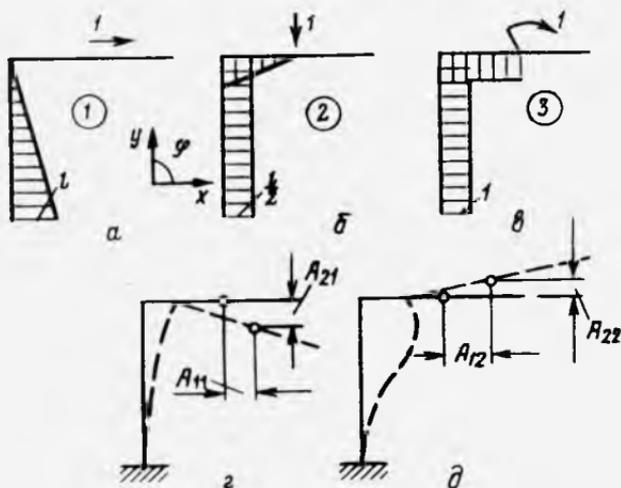


Рис. 262

В случае малых перемещений вертикальное перемещение центра тяжести пластинки  $y = l\varphi/2$ . Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} x &= (-m\ddot{x})\delta_{11} + [-m\delta_{12} - (2J/l)\gamma_{13}]\ddot{y}; \\ y &= (-m\ddot{x})\delta_{21} + [-m\gamma_{22} - (2J/l)\delta_{23}]\ddot{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая  $x = A_1 \sin pt$ ;  $y = A_2 \sin pt$  и учитывая, что  $J = ml^2/12$ , найдем собственные частоты колебаний:

$$p_1 = 1,185 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}; \quad p_2 = 4,75 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}. \quad (3)$$

Для определения формы свободных колебаний положим в уравнениях (2)  $x = A_{11} \sin p_1 t$  и  $y = A_{21} \sin p_1 t$ . Тогда при  $p = p_1$

$$A_{21} = \frac{1 - mq_2^2 \delta_{11}}{(m\delta_{12} + J\delta_{13}/l) p_2^2} A_{11} = 1,15 A_{11}.$$

Аналогично при  $p = p_2$  находим

$$A_{22} = \frac{1 - m q_2^2 \delta_{11}}{(m \delta_{12} + J \delta_{13} / l) p_2^2} A_{12} = -0,87 A_{12}.$$

Проверкой правильности решения может служить условие ортогональности главных форм колебаний:

$$m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22} = 0.$$

В рассматриваемом случае при  $m_1 = m_2 = m$

$$A_{11} A_{12} + A_{21} A_{22} = 0.$$

Полагая  $A_{11} = A_{12}$ , убеждаемся в выполнении условия ортогональности. Формы колебаний рамы показаны на рис. 162, г, д.

198.  $p_1 = 0,97 \sqrt{EJ_x / (m l^3)}$ ;  $p_2 = 3,2 \sqrt{EJ_x / (m l^3)}$ .

Формы колебаний и смещения масс  $m_1$  и  $m_2$  изображены на рис. 263 а и б соответственно.

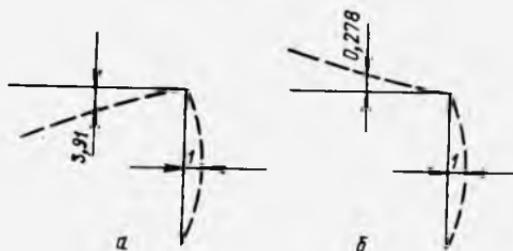


Рис. 263

199. Центр тяжести пластины может иметь линейные (вертикальные и горизонтальные) и угловые перемещения, т. е. система имеет три степени свободы. Выберем основную статически определяемую систему так, как это показано на рис. 264:

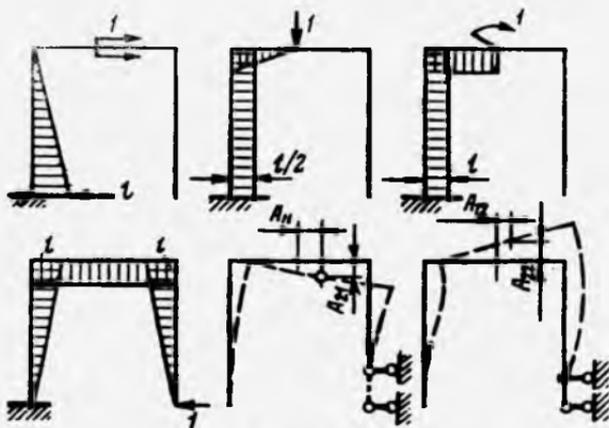


Рис. 264

Используя метод сил, представим дифференциальные уравнения движения центра тяжести пластины в виде

$$\begin{aligned}x &= (-m\ddot{x})\delta_{11} + (-m\ddot{y})\delta_{12} + (-J\ddot{\varphi})\delta_{13} + R\delta_{14}; \\y &= (-m\ddot{x})\delta_{21} + (-m\ddot{y})\delta_{22} + (-J\ddot{\varphi})\delta_{23} + R\delta_{24}; \\ \varphi &= (-m\ddot{x})\delta_{31} + (-m\ddot{y})\delta_{32} + (-J\ddot{\varphi})\delta_{33} + R\delta_{33},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $R$  — неизвестная реакция.

К системе уравнений (1) необходимо добавить уравнение перемещений, учитывающее, что линейное перемещение в направлении и неизвестной реакции  $R$  равно нулю:

$$(-m\ddot{x})\delta_{41} + (-m\ddot{y})\delta_{42} + (-J\ddot{\varphi})\delta_{43} + R\delta_{44} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  — горизонтальное, вертикальное и угловое перемещения массы  $m$  соответственно.

Для определения коэффициентов уравнений (1) и (2) приложим к основной системе единичные силы и построим эпюры изгибающих моментов подобно тому, как это сделано в задаче 197.

Систему уравнений (1) можно упростить, если учесть, что левый угол пластинки не имеет вертикального перемещения, т. е. что между вертикальным смещением  $y$  и углом поворота  $\varphi$  имеется зависимость вида  $y = l\varphi/2$ .

Учитывая что, момент инерции массы пластинки относительно центра тяжести равен  $J = ml^2/12$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}x &= (-m\ddot{x})\delta_{11} - \left(m\delta_{12} + \frac{ml}{6}\delta_{13}\right)\ddot{y} + R\delta_{14}; \\y &= (-m\ddot{x})\delta_{21} - \left(m\delta_{22} + \frac{ml}{6}\delta_{23}\right)\ddot{y} + R\delta_{24}; \\0 &= (-m\ddot{x})\delta_{41} - \left(m\delta_{42} + \frac{ml}{6}\delta_{43}\right)\ddot{y} + R\delta_{44}.\end{aligned}\quad (3)$$

Вычислим коэффициенты  $\delta_{ij}$ , используя эпюры 1, 2, 3 и 4 (см. рис. 264):

$$\delta_{11} = l^2/(3EJ_x); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = l^3/(4EJ_x); \quad \delta_{13} = \delta_{31} = l^2/(2EJ_x);$$

$$\gamma_{14} = \delta_{41} = l^3/(6EJ_x); \quad \delta_{22}^2 = l^3/(4EJ_x); \quad \delta_{23} = \delta_{32} = l^2/(2EJ_x);$$

$$\delta_{24} = \delta_{42} = l^3/(4EJ_x); \quad \delta_{34} = \delta_{43} = l^2/(EJ_x); \quad \delta_{44} = 2l^2/(3EJ_x).$$

Пологая  $x = A_1 \sin pt$ ,  $y = A_2 \sin pt$ ,  $R = R_0 \sin pt$ , определим частоты свободных колебаний системы:

$$p_1 = 1,45 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}; \quad p_2 = 5,83 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}.$$

Для установления форм свободных колебаний примем  $x = -x_1 = A_{11} \sin pt$ ;  $y = y_1 = A_{11} \sin pt$ . Тогда из системы (3) получаем

$$A_{21} = 1,05A_{11}.$$

Положив  $x = x_2 = A_{12} \sin p_2 t$ ,  $y = y_2 = A_{22} \sin p_2 t$ , находим вторую форму колебаний  $A_2 = -0,95 A_{12}$ .

Формы свободных колебаний при  $A_{11} = A_{12} = 1$  изображены на рис. 264 пунктиром.

200.  $p_1 = 71,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = 466 \text{ с}^{-1}$ .

201.  $p_1 = 0,685 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ ,  $p_2 = 1,4 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}$ .

Формы колебаний, соответствующие этим частотам, изображены на рис. 265, а и б.

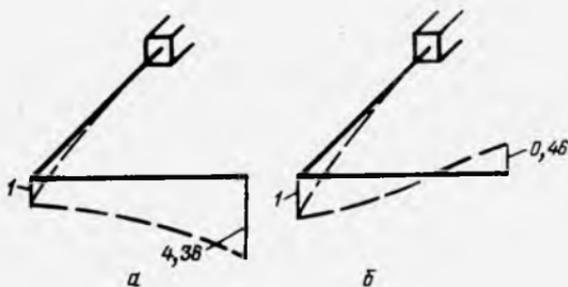


Рис. 265

202. Рассмотрим отклоненное от положения равновесия состояние системы (рис. 266, а). Вычислим потенциальную энергию системы как энергию изгиба стержня

$$\Pi = cy^2/2.$$

где  $c = 3EJ_x/l^3$  — жесткость при изгибе консольной балки.

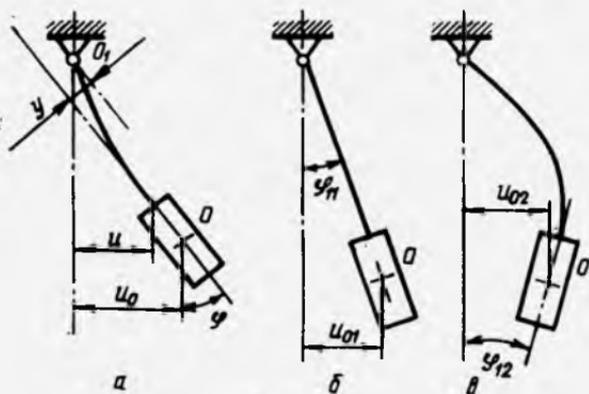


Рис. 266

Кинетическая энергия груза

$$T = m\dot{u}_0^2/2 + J\dot{\phi}_0^2/2,$$

где  $\dot{u}_0 = \dot{u} + \dot{\phi}l/4$  (см. рис. 266, а).

При рассмотрении малых колебаний

$$y = (\varphi l - u) \cos \varphi = \varphi l - u.$$

Применяя метод Лагранжа, получаем уравнения малых колебаний

$$m\ddot{u} + m l \ddot{\varphi} / 4 + c(u - \varphi l) = 0;$$

$$m\ddot{u} + 5m l \ddot{\varphi} / 4 + 4c(\varphi l - u) = 0.$$

Решение этих уравнений ищем в виде  $u = A_1 \cos pt$ ;  $\varphi = A_2 \cos pt$ , что позволяет получить уравнение частот

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{c}{m} - p^2 \right) & - \left( \frac{l}{4} p^2 + \frac{cl}{m} \right) \\ - \left( p^2 + \frac{4c}{m} \right) & \left( \frac{4cl}{m} - \frac{5}{4} l p^2 \right) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$p^4 = 29c p^2 / (4m) = 0.$$

Отсюда находим

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{87 EJ / (4m l^3)}.$$

Нулевой частоте ( $p_1 = 0$ ) соответствует движение системы, как жесткого целого (рис. 266, б); частоте  $p_2$  соответствует форма колебаний изгибного характера (рис. 266, в).

Из условия ортогональности форм колебаний можно установить соотношение между амплитудами. Так как

$$m u_{01} u_{02} + J \varphi_{11} \varphi_{12} = 0,$$

то, полагая  $u_{01} = u_{02} = 1$  (см. рис. 266, б, в), находим  $\varphi_{11} = 4/(5l)$ ;  $\varphi_{12} = -5/l$ .

203. В отличие от решения задачи 202 потенциальная энергия системы с учетом силы тяжести равна

$$\Pi = \frac{c u^2}{2} - m g \frac{5}{4} l (1 - \cos \varphi) = \frac{c u^2}{2} + \frac{5}{8} m g l \varphi^2.$$

Выражение для кинетической энергии остается таким же, как и в задаче 202.

Уравнения движения груза имеют вид

$$\ddot{u} + \frac{l}{4} \ddot{\varphi} + \frac{c}{m} (u - l \varphi) = 0;$$

$$\ddot{u} + \frac{5}{4} l \ddot{\varphi} + \frac{4c}{m} (l \varphi - u) + 5g \varphi = 0.$$

Из этой системы уравнений после соответствующих преобразований получаем уравнение частот

$$p^4 - \frac{29}{4} \frac{c}{m} p^2 + \frac{5c}{m l} g = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{29}{8} \frac{c}{m} \pm \sqrt{\left( \frac{29}{8} \frac{c}{m} \right)^2 - \frac{5c g}{m l}}},$$

где  $c = 3EJ/l^3$ .

204. Рассмотрим положение стержня в произвольный момент времени (рис. 267, а). Кинетическая энергия системы равна

$$T = m_1 \dot{u}_1^2 / 2 + m_2 \dot{u}_2^2 / 2.$$

При определении потенциальной энергии изгиба стержня его можно рассматривать как балку на двух опорах (рис. 267, б). Поскольку изгибающие моменты в верхней и нижней точках равны нулю, то

$$\Pi = cu_{11}^2 / 2,$$

где  $c = 6EJ_x / l^3$ .

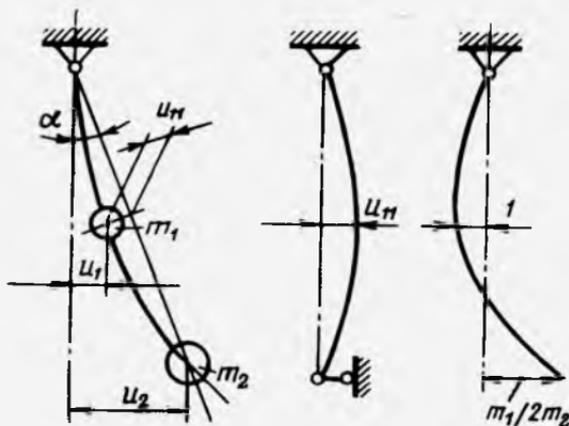


Рис. 267

Из рис. 272, а следует, что в случае малых колебаний ( $\cos \alpha \approx 1$ )

$$u_{11} = \alpha l - u_1; \quad \alpha l = u_2 / 2.$$

С учетом последнего представим уравнения движения масс в виде

$$m_1 \ddot{u}_1 - cu_1 - \frac{c}{2} u_2 = 0;$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + \frac{c}{4} u_2 - \frac{c}{2} u_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$\rho^2 [m_1 m_2 \rho^2 - (cm_1 / 4 + cm_2)] = 0,$$

откуда

$$\rho_1 = 0; \quad \rho_2 = \sqrt{(cm_1 + 4cm_2) / (4m_1 m_2)}.$$

Нулевой частоте соответствует вращение стержня без изгиба, а частоте  $\rho_2$  — форма колебаний, изображенная на рис. 267, в.

205. Рассмотрим положение системы в произвольный момент времени (рис. 268, а). В соответствии с принципом Даламбера система, нагруженная силами инерции, находится в равновесии, поэтому реакция опоры

$$R = -m\ddot{u}_1 - 2m\ddot{u}_2 - m\ddot{u}_3 \quad (1)$$

Момент сил инерции относительно шарнира равен нулю, т. е.

$$ml\ddot{u}_1 + 4ml\ddot{u}_2 + 3ml\ddot{u}_3 = 0. \quad (2)$$

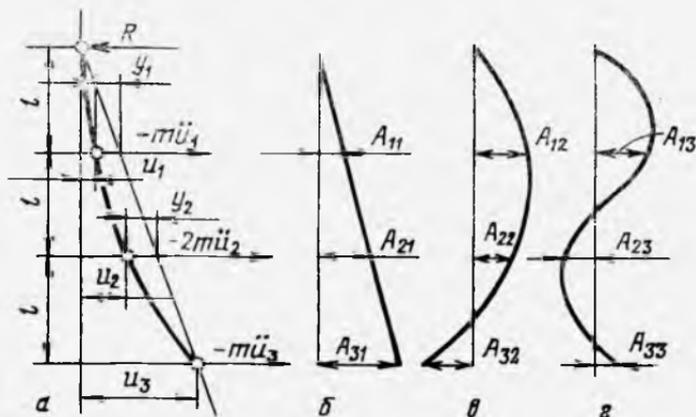


Рис. 268

В уравнения (1) и (2) входят четыре неизвестные величины ( $R, u_1, u_2, u_3$ ). Для получения недостающих уравнений рассмотрим изгиб стержня под действием сил инерции:

$$EJ_{xy}'' = -Rz + (-m\ddot{u}_1)(z-l) + (-2m\ddot{u}_2)(z-2l).$$

После двукратного интегрирования, учитывая соотношение (1), получаем

$$EJ_{xy} = (m\ddot{u}_1 + 2m\ddot{u}_2 + m\ddot{u}_3)z^3/6 - m\ddot{u}_1(z-l)^3/6 - 2m\ddot{u}_2(z-2l)^3/6 + Cz + D. \quad (3)$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находим из граничных условий задачи: при  $z=0, y=0$ ; при  $z=3, y=0$ .

Из первого граничного условия имеем  $D=0$ , а из второго —

$$C = -(19l^2 m\ddot{u}_1 + 52l^2 m\ddot{u}_2 + 27l^2 m\ddot{u}_3)/18.$$

Окончательно уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$EJ_{xy} = (mu_1 + 2m\ddot{u}_2 + m\ddot{u}_3) \left( \frac{z^3}{6} - \frac{3l^2 z}{2} \right) - m\ddot{u}_1 \left( \frac{(z-l)^3}{6} - \frac{4l^2 z}{9} \right) - 2m\ddot{u}_2 \left( \frac{(z-2l)^3}{6} - \frac{l^2 z}{18} \right). \quad (4)$$

Из рис. 268, а следует, что

$$y_1 = -y_{z=l} = u_3/3 - u_1; \quad y_2 = -y_{z=2l} = 2u_3/3 - u_2 \quad (5)$$

Используя соотношения (5), из уравнений изогнутой оси (4) получаем два недостающих уравнения:

$$\frac{8}{3} m\ddot{u}_1 + \frac{23}{3} m\ddot{u}_2 + 4m\ddot{u}_3 + \frac{3EJ_x}{l^3} u_1 - \frac{EJ_x}{l^3} u_3 = 0; \quad (6)$$

$$\frac{17}{18} m\ddot{u}_1 + \frac{28}{9} m\ddot{u}_2 + \frac{5}{3} m\ddot{u}_3 + \frac{EJ_x}{l^3} u_2 - \frac{2}{3} \frac{EJ_x}{l^3} u_3 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (2), (6), (7) образуют полную систему уравнений. После преобразований получаем следующее уравнение для определения частот:

$$p^2 \left[ p^4 - 16 \frac{EJ_x}{ml^3} p^2 + \frac{108}{5} \left( \frac{EJ_x}{ml^3} \right)^2 \right] = 0,$$

откуда находим

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 1,23 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}; \quad p_3 = 3,8 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

Нулевой частоте соответствует вращение стержня без изгиба, т. е. движение абсолютно жесткого тела (рис. 268, б).

Найдем связь между амплитудами при второй форме колебаний ( $p = p_2$ ). Рассмотрим систему уравнений (2) и (6), в которых примем  $u_{i2} = A_{i2} \sin p_2 t$ . Тогда

$$4A_{22} + 3A_{32} = -A_{12}; \quad 11,5A_{22} + 7A_{32} = -A_{12}.$$

Считая  $A_{12} = 1$ , получаем  $A_{22} = 0,61$ ,  $A_{32} = -1,15$ .

Аналогично, полагая в уравнениях (2) и (6)  $u_{i3} = A_{i3} \sin p_3 t$  и считая  $A_{13} = 1$ , находим, что при колебаниях по третьей форме  $A_{23} = -0,485$ ;  $A_{33} = 0,31$ .

Вторая и третья формы колебаний системы приведены на рис. 268, в и г соответственно.

206. Формы колебаний системы можно определить из следующих соображений. Система (рис. 269, а) имеет две нулевые частоты, соответствующие поступательному и угловому движениям тела как жесткого целого. Эти формы колебаний изображены на рис. 269, б, в.

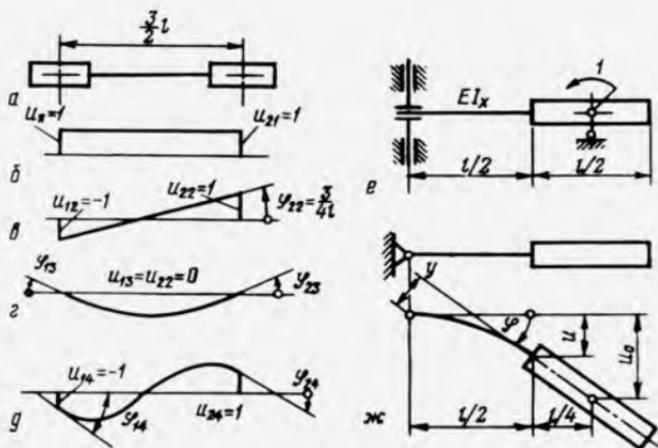


Рис. 269

Две другие изгибные формы — симметричную и кососимметричную — можно найти из условий ортогональности.

Пусть  $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$  — линейные перемещения левой массы, соответствующие различным формам колебаний;  $u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}$  — линейные перемещения правой массы;  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$  — угловые перемещения левой массы;  $\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24}$  — угловые перемещения правой массы.

Третья форма колебаний (симметричная изгибная форма) должна быть ортогональна первой форме (поступательному движению), т. е.

$$m u_{11} u_{13} + m u_{21} u_{23} + J \varphi_{11} \varphi_{13} + J \varphi_{21} \varphi_{23} = 0.$$

Поскольку  $\varphi_{11} = \varphi_{12} = 0$ , то полагая  $u_{11} = u_{21} = 1$ , получаем  $u_{13} = u_{23} = 0$  (случай  $u_{13} = u_{23} \neq 0$  относится к первой форме колебаний).

Кроме того, третья форма колебаний должна быть ортогональна второй:

$$m u_{12} u_{13} + m u_{22} u_{23} + J \varphi_{12} \varphi_{13} + J \varphi_{22} \varphi_{23} = 0.$$

Полагая  $u_{12} = -1$ ,  $u_{22} = 1$  и учитывая, что  $u_{13} = u_{23} = 0$ , а  $\varphi_{12} = \varphi_{23} = 3/(4l)$  находим, что  $\varphi_{13} = -\varphi_{23}$ . На рис. 269, *г* показана третья форма колебаний.

Аналогично из условия ортогональности четвертой и первой форм колебаний можно записать

$$m \cdot 1 \cdot u_{14} + m \cdot 1 \cdot u_{24} + J \varphi_{14} \cdot 0 + J \varphi_{24} \cdot 0 = 0.$$

откуда

$$u_{14} = -u_{24} = -1.$$

Учитывая ортогональность четвертой и третьей форм, получаем

$$m \cdot 0 \cdot 1 + m \cdot 0 \cdot (-1) + J \varphi_{13} \varphi_{14} + J \varphi_{23} \varphi_{24} = 0,$$

или

$$\varphi_{14} = \varphi_{24}$$

Наконец, из ортогональности четвертой и второй форм колебаний имеем

$$m \cdot (-1) \cdot (-1) + m \cdot 1 \cdot 1 + J \frac{3}{4l} \varphi_{14} + J \frac{3}{4l} \varphi_{24} = 0,$$

или

$$\varphi_{14} = \varphi_{24} = -16/(3l).$$

Четвертая форма колебаний изображена на рис. 269, *д*.

Частоты колебаний определим, используя найденные формы колебаний. Поскольку третья форма колебаний (см. рис. 269, *в*) является симметричной, рассмотрим правую часть системы (рис. 269, *е*).

Для определения жесткости системы при угловых колебаниях приложим к массе единичный момент и найдем угол поворота

$$\varphi_{13} = \delta_{11} = l(2EJ_x).$$

Соответствующие частоты колебаний равны

$$p_1 = 0; \quad p_3 = \sqrt{1/(J\delta_{11})} = \sqrt{8EJ_x/(ml^3)} = 2,84 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}.$$

Четвертой частоте колебаний соответствует кососимметричная форма. Поэтому силовую схему можно представить так, как это изображено на рис. 269, ж.

Для определения частот воспользуемся уравнениями Лагранжа. Кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно равны

$$T = J\dot{\varphi}^2/2 + m\dot{u}_0^2/2; \quad \Pi = cy^2/2,$$

где  $u_0 = u + l\varphi/u$ ;  $c = 24EJ_x/l^3$ ;  $y = l\varphi/2 - u$ .

Уравнение движения и уравнение частот имеют вид

$$(J + ml^2/16)\ddot{\varphi} + ml\ddot{u}/4 + c l^2 \varphi/4 - clu/2 = 0;$$

$$ml\ddot{\varphi}/4 + m\ddot{u} - cl\varphi/2 + cu = 0;$$

$$p^2 [Jmp^2 - 9c(l^2m + J)/16] = 0.$$

Частоты, соответствующие кососимметричным формам колебаний, равны

$$p_2 = 0; \quad p_4 = \sqrt{67,5EJ_x/(ml^3)} = 8,2 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}.$$

207. Система имеет четыре степени свободы и соответственно четыре формы колебаний: две кососимметричные (рис. 270, а, в) и две симметричные (рис. 270, б, г).

Определение частот кососимметричных форм колебаний аналогично определению, приведенному в задаче 206. После соответствующих преобразований находим

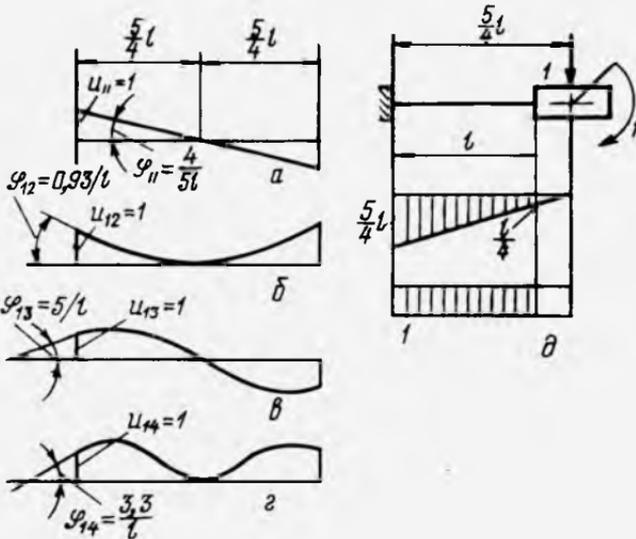


Рис. 270

$$p_1 = 0; \quad p_3 = 4,7 \sqrt{EJ_x/(mL^3)}.$$

Для вычисления частот симметричных форм колебаний рассмотрим правую часть системы с жесткой заделкой на одном конце (рис. 270, б).

Выведем дифференциальные уравнения движения, используя метод сил:

$$u = \delta_{11}(-m\ddot{u}) + \delta_{12}(-J\ddot{\varphi}); \quad \varphi = \delta_{21}(-m\ddot{u}) + \delta_{22}(-J\ddot{\varphi}).$$

По методу Мора с применением правила Верещагина определим коэффициенты  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{11} = 3l^3/(48EJ_x); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 3l^2/(4EJ_x); \quad \delta_{22} = l/(EJ_x).$$

Таким образом частоты симметричных форм колебаний равны

$$p_2 = 1,1 \sqrt{EJ/(mL^2)}; \quad p_4 = 6,5 \sqrt{EJ_x/(mL^2)}.$$

Полагая  $u_{22} = u_{24} = 1$ , находим углы

$$\varphi_{22} = 0,93/l; \quad \varphi_{24} = -3,3/l.$$

208. Положение системы в произвольный момент времени определяется четырьмя независимыми координатами  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 271, а).

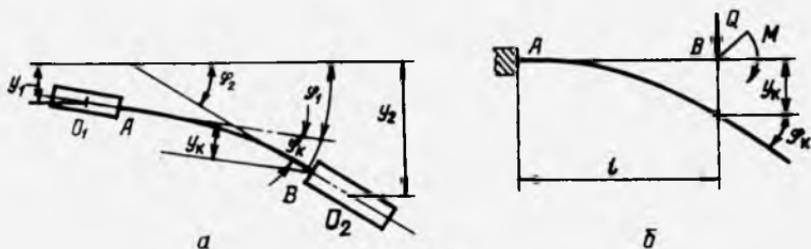


Рис. 271

Кинетическая энергия этой системы равна

$$T = m_1 \dot{y}_1^2/2 + m_2 \dot{y}_2^2/2 + J_1 \dot{\varphi}_1^2/2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2/2.$$

Потенциальную энергию деформации системы удобно выразить через относительные линейные  $y_h$  и угловые  $\varphi_h$  перемещения масс. Считая массу  $m$  неподвижной (рис. 271, б), приложим к концу упругого стержня силу  $Q$  и момент  $M$ . Тогда угол поворота и прогиб стержня будут соответственно равны

$$y_k = \delta_{11}Q + \delta_{12}M;$$

$$\varphi_k = \delta_{21}Q + \delta_{22}M.$$

$$\text{где } \delta_{11} = l^3/(3EJ_x); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = l^2/(2EJ_x); \quad \delta_{22} = l/(EJ_x).$$

Из этой системы уравнений определим  $Q$  и  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} Q &= (\delta_{22}/\Delta) y_k - (\delta_{12}/\Delta) \varphi_k; \\ M &= -(\delta_{21}/\Delta) y_k + (\delta_{11}/\Delta) \varphi_k, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где } \Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 = [l^2/(EJ_x)]^2/6.$$

Вычислим потенциальную энергию деформации изгиба стержня:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^l \frac{M_{II}^2 dz}{2EJ_x} = \int_0^l \frac{(M + Qz)^2}{2EJ_x} dz = \frac{M^2 l}{2EJ_x} + \frac{QMl^2}{2EJ_x} + \frac{Q^2 l^3}{6EJ_x} = \\ &= a_{11} \varphi_K^2 + a_{12} \varphi_K y_K + a_{22} y_K^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{l}{2\Delta^2 EJ_x} \left( \delta_{11}^2 - l \delta_{12}^2 + \frac{1}{3} \delta_{12}^2 l^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{EJ_x}{l}, \\ a_{12} &= \frac{l}{2\Delta^2 EJ_x} \left[ l(\delta_{11} \delta_{22} + \delta_{12}^2) - 2\delta_{11} \delta_{12} - \frac{l^3}{3} \delta_{12} \delta_{22} \right] = \frac{3}{2} \frac{EJ_x}{l^2}, \\ a_{22} &= \frac{l}{2\Delta^2 EJ_x} \left( \delta_2^2 - l \delta_{12} \delta_{22} + \frac{l^2}{3} \delta_{22}^2 \right) = \frac{3}{2} \frac{EJ_x}{l^3}. \end{aligned}$$

Как следует из рис. 271, а:

$$\begin{aligned} y_K &= y_2 - y_1 - l_2 \varphi_2 / 2 - l_1 \varphi_2 / 2 - l_1 \varphi_1 / 2 - l \varphi_1 = \\ &= y_2 - y_1 - l_2 \varphi_2 / 2 - l_1' \varphi_1 / 2; \\ \varphi_K &= \varphi_2 - \varphi_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $l_1' = l + l_1 / 2$ .

Подставив выражения (2) в уравнение потенциальной энергии деформации (1), получаем

$$\begin{aligned} \Pi &= b_{11} \varphi_1^2 + b_{22} \varphi_2^2 + b_{33} y_1^2 + b_{44} y_2^2 + b_{12} \varphi_1 \varphi_2 + \\ &+ b_{13} \varphi_1 y_1 + b_{14} \varphi_1 y_2 + b_{23} \varphi_2 y_1 + b_{24} \varphi_2 y_2 + b_{34} y_1 y_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} + (l_1')^2 a_{22} / 4 - l_1' a_{12} / 2; \quad b_{22} = a_{11} + l_2^2 a_{22} / 4 - \\ &- l_2 a_{12} / 2; \quad b_{33} = b_{44} = a_{22}, \quad b_{12} = -2a_{11} + l_1' a_{12} / 2 + \\ &+ l_2 a_{12} / 2 - l_1' l_2 a_{22} / 2; \quad b_{13} = a_{12} - l_1' a_{22}; \quad b_{14} = -a_{12} + l_1' a_{22}; \\ b_{23} &= -a_{12} + l_2 a_{22}; \quad b_{24} = a_{12} - l_2 a_{22}; \quad b_{34} = -2a_{22}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь уравнением Лагранжа, запишем систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + 2b_{11} \varphi_1 + b_{12} \varphi_2 + b_{13} y_1 + b_{14} y_2 &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + b_{12} \varphi_1 + 2b_{22} \varphi_2 + b_{23} y_1 + b_{24} y_2 &= 0; \\ m_1 \ddot{y}_1 + b_{13} \varphi_1 + b_{23} \varphi_2 + 2b_{33} y_1 + b_{34} y_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + b_{14} \varphi_1 + b_{24} \varphi_2 + b_{34} y_1 + 2b_{44} y_2 &= 0. \end{aligned}$$

**209.** Решение дифференциальных уравнений малых свободных колебаний, полученных в задаче 208, ищем в виде  $y_i = A_i \cos pt$ ;  $\varphi_i = B_i \sin pt$ , что позволяет получить следующее уравнение для определения  $p$ :

$$\begin{vmatrix} 2b_{11} - J_1 p^2 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & 2b_{22} - J_2 p^2 & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & 2b_{33} - m_1 p^2 & b_{34} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & 2b_{44} - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$J_1 J_2 m_1 m_2 p^8 + a_1 p^6 + a_2 p^4 + a_3 p^2 + a_4 = 0.$$

Поскольку система имеет две степени свободы, соответствующие движению абсолютно жесткого тела, четыре корня уравнения должны быть нулевыми, т. е. коэффициенты  $a_3$  и  $a_4$  равны нулю.

Отличные от нуля частоты определим из уравнения

$$J_1 J_2 m_1 m_2 p^4 + a_1 p^2 + a^2 = 0. \quad (1)$$

Подставив в это уравнение выражения для  $b_{ij}$ , находим

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 [J_1 J_2 m_1 b_{44} + J_1 J_2 m_2 b_{33} + J_1 m_1 m_2 b_{22} + J_2 m_1 m_2 b_{11}] = \\ &= -(13/16) m^3 l F J_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= J_1 J_2 (b_{34}^2 - 4b_{33} b_{44}) + J_1 m_2 (b_{23}^2 - 4b_{22} b_{33}) + J_1 m_1 (b_{24}^2 - 4b_{22} b_{44}) + \\ &+ J_2 m_1 (4b_{11} b_{44} - b_{14}^2) + J_2 m_2 (4b_{11} b_{23} - b_{13}^2) + \\ &+ m_1 m_2 (4b_{11} b_{22} - b_{12}^2) = (21/32) (m E J_x / l)^2. \end{aligned}$$

Собственные частоты колебаний определим из уравнения (1):

$$p_{1,2} = 0; \quad p_3 = 0,447 \sqrt{E J_x / (m l^3)}; \quad p_4 = 3,52 \sqrt{E J_x / (m l / (m l^3))}.$$

**210.** Система имеет пять степеней свободы (положение каждого из грузов определяется вертикальным смещением и углом поворота, а положение центральной точечной массы — только ее вертикальным смещением).

Двум степеням свободы (движение системы как жесткого целого) соответствуют нулевые частоты  $p_1 = p_2 = 0$  и формы движения, показанные на рис. 272, а и б.

Третья форма колебаний ортогональна двум первым:

$$m u_{11} u_{13} + m u_{21} u_{23} + m u_{31} u_{33} + J \varphi_{11} \varphi_{13} + J \varphi_{31} \varphi_{33} = 0; \quad (1)$$

$$m u_{11} u_{13} + m u_{22} u_{23} + m u_{32} u_{33} + J \varphi_{12} \varphi_{13} + J \varphi_{32} \varphi_{33} = 0. \quad (2)$$

Поскольку  $\varphi_{11} = \varphi_{31} = 0$  и  $u_{11} = u_{21} = u_{31} = 1$  из уравнения (1) следует, что

$$u_{31} + u_{23} + u_{33} = 0.$$

Принимая  $u_{13} = u_{33} = -1$ , находим  $u_{23} = 2$ .

Аналогично, подставляя в уравнение (2) значения  $u_{32} = 1$ ,  $u_{12} = u_{13} = u_{33} = -1$ ,  $\varphi_{12} = \varphi_{32} = 1/l$ , получаем  $u_{22} = 0$ . Следовательно, третья форма колебаний является симметричной (рис. 272, в).

Условие ортогональности четвертой формы колебаний трем первым позволяет получить следующие соотношения:

$$u_{14} + u_{24} + u_{34} = 0; \quad (3)$$

$$-u_{14} + u_{34} + \frac{J}{ml} \varphi_{14} + \frac{J}{ml} \varphi_{34} = 0; \quad (4)$$

$$-u_{14} + 2u_{24} - u_{34} + \frac{J}{m} \varphi_{13}\varphi_{14} + \frac{J}{m} \varphi_{33}\varphi_{34} = 0. \quad (5)$$

Поскольку четвертая форма колебаний должна быть кососимметричной, т. е.  $u_{14} = -u_{34} = -1$ , из соотношения (3) получаем  $u_{24} = 0$ . Кроме того,  $\varphi_{14} = \varphi_{34}$  и из уравнения (4), полагая  $u_{34} = 1$ , находим  $\varphi_{14} = \varphi_{34} = -ml/J = -4/l$ .

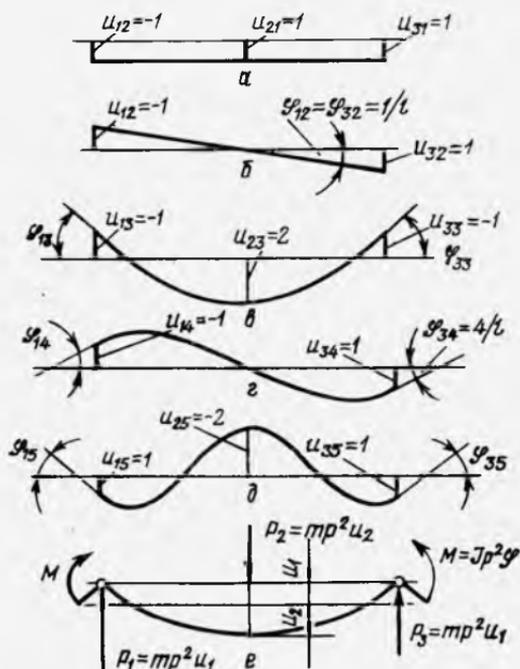


Рис. 272

Четвертая форма колебаний показана на рис. 272, *г*.

Пятая, симметричная, форма колебаний ортогональная первым четырем. После выкладок, аналогичных предыдущим, принимая  $u_{15} = u_{35} = 1$ , получаем  $\varphi_{15} = -\varphi_{35} = 3ml/(J\varphi_{13}) = 12/(l\varphi_{13})$ ;  $u_{25} = -2$ . Эта форма колебаний изображена на рис. 272, *д*.

Частоты колебаний можно определить, используя найденные формы свободных колебаний. Для нахождения частот, соответствующих симметричным формам колебаний, рассмотрим систему как шарнирно закрепленную балку, нагруженную по концам моментами  $M = Jp^2\varphi$  и инерционными силами  $P_1, P_2, P_3$  (рис. 272, *е*).

Из условия равновесия системы  $P_1 + P_3 = P_2$ , т. е.  $u_2 = 2u_1$ . Представим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде

$$EJ_x y'' = M + mu_1 p^2 z - mu_2 p^2 (z-l).$$

После интегрирования и определения постоянных имеем

$$EJ_x y = M \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} mu_1 p^2 - \frac{(z-l)^3}{6} mu_2 p^2 - \left( Ml + \frac{mu_1 p^2 l^2}{2} \right) z. \quad (6)$$

При  $z=l$

$$y = -(u_1 + u_2) = -3u_1.$$

Тогда из уравнения (6) получаем

$$3EJ_x u_1 = Ml^2/2 + mu_1 l^3 p^2/3. \quad (7)$$

Поскольку  $y'_{z=0} = -\varphi$ , из уравнения (6) следует

$$EJ_x \varphi = Ml + mu_1 l^2 p^2/2. \quad (8)$$

Учитывая, что  $M = Jp^2\varphi$ , приведем (7) и (8) к виду

$$\begin{aligned} (-ml^3 p^2/3 + 3EJ_x) u_1 - Jp^2 l^2 \varphi/2 &= 0; \\ ml^2 p^2 u_1/2 + (Jlp^2 - EJ_x) \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Соответствующее уравнение частот будет таким:

$$p^4 - 52EJ_x p^2 / (ml^2 + 144[-EJ_x / (ml^3)]^2) = 0.$$

Отсюда находим частоты симметричных форм колебаний:

$$p_3 = 1,71 \sqrt{EJ_x / (ml^2)}; \quad p_5 = 7 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

При отыскании форм колебаний остались неопределенными углы  $\varphi_{13}$  и  $\varphi_{15}$ . Их можно вычислить, используя одно из уравнений (9) и известные частоты  $p_3$  и  $p_5$ . Так, принимая  $u_{13} = -1$ , находим  $\varphi_{13} = -5,5/l$ , а при  $u_{15} = 1$   $\varphi_{15} = -2,2/l$ .

Частоты колебаний, соответствующие кососимметричным формам колебаний, находим аналогично тому, как показано в решении задачи 206. Значения частот  $p_2$  и  $p_4$  будут следующие:

$$p_2 = 0; \quad p_4 = 3,88 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

**211.** Для составления дифференциальных уравнений движения воспользуемся принципом Даламбера. Рассматривая каждую из масс, найдем, что в процессе колебаний на массу действуют момент сил инерции и момент сил упругости. Считая, что  $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < (\varphi_i - \text{углы поворота дисков})$ , имеем

$$-J_1 \ddot{\varphi}_1 + M_1 = 0;$$

$$-J_2 \ddot{\varphi}_2 + (M_2 - M_1) = 0;$$

$$\text{или } J_3 \ddot{\varphi}_3 - M_3 = 0,$$

$$-J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$-J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) - c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$-J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0.$$

Решение последней системы уравнений будем искать в виде  $\varphi_i = A_i \sin pt$ . Уравнение частот имеет вид

$$p^6 - p^4 \left( \frac{c_1 + c_2}{J_2} + \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} \right) + c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} p^2 = 0.$$

Учитывая, что  $c_1 = GJ_p/l_1$  и  $c_2 = GJ_p/l_2$ , получаем следующие значения собственных частот колебаний:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 92,4 \text{ с}^{-1}; \quad p_3 = 151,6 \text{ с}^{-1}.$$

**212.** Пусть  $\varphi_1$  — угол поворота левого диска;  $\varphi_2$  — угол поворота правого диска;  $\varphi_1'$  — угол поворота шестерни 1;  $\varphi_2'$  — угол поворота шестерни 2.

Вычислим кинетическую и потенциальную энергии системы:

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2 / 2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 / 2; \tag{1}$$

$$\Pi = c_1 (\varphi_1 - \varphi_1')^2 / 2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_2')^2 / 2.$$

Между углами поворота шестерен имеется зависимость вида

$$\varphi_1' = -\varphi_2' u.$$

Исключив из выражения (1) угол  $\varphi_1$  и воспользовавшись уравнением Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 + u \varphi_2') &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_2' - \varphi_2) &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

$$u c_1 (\varphi_1 + u \varphi_2') + c_2 (\varphi_2' - \varphi_2) = 0.$$

Последнее из этих уравнений означает, что в любой момент времени моменты упругих сил, действующие на шестерни со стороны валов, уравновешены.

Исключив из выражения (2) угол  $\varphi_2'$ , имеем

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{c_1 c_2}{c_1 u^2 + c_2} \varphi_1 + \frac{c_1 c_2 u}{c_1 u^2 + c_2} \varphi_2 = 0; \tag{3}$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{c_1 c_2 u}{c_1 u^2 + c_2} \varphi_1 + \frac{c_1 c_2 u^2}{c_1 u^2 + c_2} \varphi_2 = 0.$$

Уравнение частот для системы (3) будет следующим:

$$p^2 \left[ J_1 J_2 p^2 - (J_1 u^2 + J_2) \frac{c_1 c_2}{c_1 u^2 + c_2} \right] = 0,$$

откуда следует, что собственные частоты колебаний равны

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 u^2 + c_2} \frac{J_1 u^2 + J_2}{J_1 J_2}}.$$

**213.** Уравнения угловых колебаний дисков следует составить аналогично тому, как это сделано в задачах 211 и 212. Частоты колебаний для приведенных на рис. 155 а—д схем соответственно равны:

$$а) p_1=0; p_2=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{c}{J}};$$

$$б) p_1=\sqrt{c/2J}; p_2=\sqrt{2c/J};$$

$$в) p_1=0,8\sqrt{c/J}; p_2=1,97\sqrt{c/J};$$

$$г) p_1=0; p_2=\sqrt{\frac{J_1 u_1^2 u_2^2 + J_2}{J_1 J_2} \frac{c_1 c_2 c_3 u_2^2}{u_1^2 u_2^2 c_1 + u_2^2 c_2 + c_3}} \quad (u_1 = z_2/z_1, u_2 = z_4/z_3);$$

$$д) p_1=0,651\sqrt{c/J}; p_2=1,256\sqrt{c/J}.$$

214. Уравнения движения систем можно получить по методу Лагранжа. Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны

$$T=J\dot{\varphi}_1^2/2+2J\dot{\varphi}_2^2/3+3J\dot{\varphi}_3^2/2;$$

$$\Pi=c(\varphi_1-\varphi_2)^2/2+c(\varphi_3-\varphi_2)^2/2.$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1+c(\varphi_1-\varphi_2)&=0; \\ 2J\ddot{\varphi}_2-c(\varphi_1-\varphi_2)+c(\varphi_2-\varphi_3)&=0; \\ 3J\ddot{\varphi}_3-c(\varphi_2-\varphi_3)&=0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) ищем в виде  $\varphi_i=A_i \cos pt$ , поэтому можно записать

$$\begin{aligned} (c-Jp^2)A_1-cA_2&=0; \\ -cA_1+(2c-2Jp^2)A_2-cA_3&=0; \\ -cA_2+(c-3Jp^2)A_3&=0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда получаем уравнение частот

$$p^2[p^4-7cp^2/(3J)+(c/J)^2]=0.$$

Следовательно, частоты колебаний системы будут равны

$$p_1=0; p_2=0,755\sqrt{c/J}; p_3=1,33\sqrt{c/J}.$$

Найдем связь между амплитудами колебаний для каждой из форм колебаний. При нулевой частоте (первая форма) из системы уравнений (2) получаем  $A_{11}=A_{21}=A_{31}$ .

Для второй частоты колебаний имеем  $A_{22}=(c-Jp_2^2)A_{12}/c=0,435A_{12}$ ;  $A_{32}=cA_{22}/(c-3Jp_2^2)=-0,615A_{12}$ .

Наконец, для третьей частоты колебаний амплитуды колебаний будут следующими:

$$A_{23}=-0,77A_{13}; A_{33}=0,179A_{13}.$$

Формы колебаний показаны на рис. 273. При построении принято

$$A_{11}=A_{12}=A_{13}=1.$$

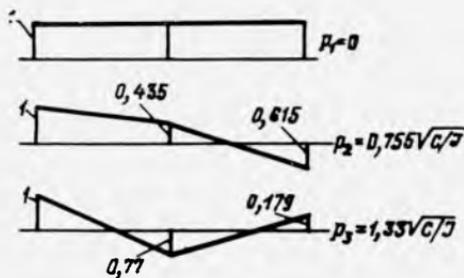


Рис. 273

Проверим полученные формы колебаний, используя условие ортогональности. Представим условие ортогональности форм (например, первой и второй) в общем виде

$$JA_{11}A_{12} + 2JA_{21}A_{22} + 3JA_{31}A_{32} = 0. \quad (3)$$

Подставим в уравнение (3) значения амплитуд  $A_{ij}$  первой и второй форм колебаний:

$$J(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0,435 - 3 \cdot 1 \cdot 0,615) = J(0,025) \approx 0.$$

Из условия ортогональности для первой и третьей форм получаем

$$J(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0,77 + 3 \cdot 0,179) = J \cdot 0,003 \approx 0,$$

а для второй и третьей форм —

$$J(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0,77 \cdot 0,435 - 3 \cdot 0,615 + 0,179) = 0.$$

215. Обозначим  $c = GJ_p/1$ , тогда дифференциальные уравнения движения дисков можно представить в виде

$$J\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$J\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) + c(\varphi_2 - \varphi_3) = 0;$$

$$J\ddot{\varphi}_3 - c(\varphi_2 - \varphi_3) + c(\varphi_3 - \varphi_4) = 0;$$

$$2J\ddot{\varphi}_4 + c(\varphi_4 - \varphi_3) = 0.$$

Принимая  $\varphi_i = A_i \sin pt$ , получаем уравнение частот

$$p^2 \left[ p^6 - \frac{11}{2} \frac{c}{J} p^4 + 8 \left( \frac{c}{J} \right)^2 p^2 - \frac{5}{2} \left( \frac{c}{J} \right)^3 \right] = 0.$$

Отсюда находим частоты колебаний

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0,656 \sqrt{c/J}; \quad p_3 = 1,335 \sqrt{c/J}; \quad p_4 = 1,82 \sqrt{c/J}.$$

На рис. 274 показаны соответствующие формы колебаний. Как видно, условие ортогональности форм колебаний выполняется.

216. Уравнение частот системы имеет вид

$$p^2 \left[ p^6 - \frac{26}{3} \frac{c}{J} p^4 + 18 \left( \frac{c}{J} \right)^2 p^2 - 8 \left( \frac{c}{J} \right)^3 \right] = 0.$$

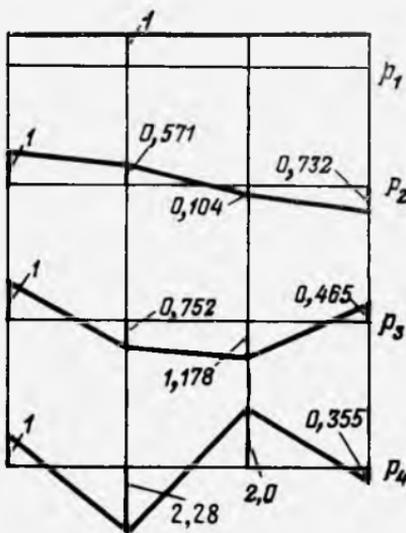


Рис. 274

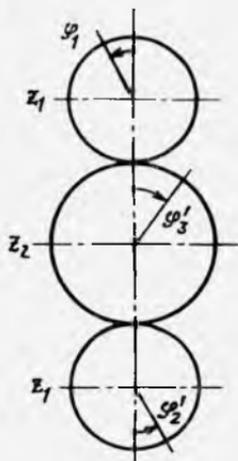


Рис. 275

Корни этого уравнения (собственные частоты) следующие:

$$p=0; p_2^2=0,613 c/J; p_3^2=2,26c/J; p_4^2=5,8 c/J.$$

Формы свободных колебаний характеризуются следующими амплитудами отклонений дисков:

первая форма

$$\varphi_{11}=1; \varphi_{21}=1; \varphi_{31}=1; \varphi_{41}=1;$$

вторая форма

$$\varphi_{12}=1; \varphi_{22}=0,387; \varphi_{32}=-0,0375; \varphi_{42}=-0,455;$$

третья форма

$$\varphi_{13}=1; \varphi_{23}=-1,26; \varphi_{33}=-0,966; \varphi_{43}=0,412;$$

четвертая форма

$$\varphi_{14}=1; \varphi_{24}=-4,8; \varphi_{34}=6,22; \varphi_{44}=-0,8.$$

**217.** Выражение для потенциальной энергии деформации системы остается тем же, что и в решении задач 212, а в выражении для кинетической энергии появляются два новых слагаемых:

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2/2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2/2 + J_1' (\dot{\varphi}_1')^2/2 + J_2' (\dot{\varphi}_2')^2/2.$$

Исключая из выражений для кинетической и потенциальной энергии угол  $\varphi_1^1$  (см. решение задачи 212) и используя уравнение Лагранжа, получаем следующую систему уравнений:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 + c_1 u \varphi_2' = 0;$$

$$(J_2' + J_1' u^2) \ddot{\varphi}_2' + c_1 u \varphi_1 + (c_1 u^2 + c_2) \varphi_2' - c_2 \varphi_2 = 0;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 \varphi_2' + c_2 \varphi_2 = 0.$$

Принимая  $\varphi_i = \varphi_{i0} = \sin pt$ , получаем уравнение частот

$$p^2 \{ J_1 J_2 J_3 p^4 - [J_2 (c_1 J_3 + c_3 J_1) + J_1 J_3 c_2] p^2 + (c_1 c_2 - c_1^2 u^2) J_2 + c_1 c_2 J_3 + (c_2 c_3 - c_2^2) J_1 \} = 0,$$

где  $J_3 = J_1' u^2 + J_2'$ ;  $c^3 = c_1 u^2 + c_2$ .

218. Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2 / 2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 / 2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 / 2$$

$$\Pi = c_1 (\varphi_1 - \varphi_1')^2 / 2 + c_1 (\varphi_2 - \varphi_2')^2 / 2 + c_2 (\varphi_3' - \varphi_3)^2 / 2.$$

Здесь  $\varphi_1'$ ,  $\varphi_2'$  и  $\varphi_3'$  — углы поворота зубчатых колес редуктора.

На рис. 275 изображена схема работы редуктора, из которой следует

$$\varphi_1' = -\varphi_3' \frac{z_2}{z_1} = -u\varphi_3'; \quad \varphi_1' = \varphi_2'.$$

Исключая с учетом последних соотношений из уравнений (1) углы  $\varphi_1'$  и  $\varphi_2'$  и используя уравнения Лагранжа, получаем следующие дифференциальные уравнения движения:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 + u\varphi_3') = 0;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_1 (\varphi_2 + u\varphi_3') = 0;$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2 (\varphi_3 - \varphi_3') = 0;$$

$$c_1 u (\varphi_1 + u\varphi_3') + c_1 u (\varphi_2 + u\varphi_3') + c_2 (\varphi_3' - \varphi_3) = 0.$$

Выразим  $\varphi_3'$  из последнего уравнения:

$$\varphi_3' = \frac{c_2 \varphi_3 - c_1 u (\varphi_1 + \varphi_2)}{2c_1 u^2 + c_2}.$$

Исключая из уравнений движения угол  $\varphi_3'$ , получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + a_{11} \varphi_1 - a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 = 0;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - a_{12} \varphi_1 + a_{11} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 = 0; \quad (2)$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + a_{13} \varphi_1 + a_{13} \varphi_2 + 2u a_{13} \varphi_3 = 0,$$

где  $a_{11} = \frac{c_1^2 u^2 + c_1 c_2}{2c_1 u^2 + c_2}$ ;  $a_{12} = \frac{c_1^2 u^2}{2c_1 u^2 + c_2}$ ;  $a_{13} = \frac{c_1 c_2 u}{2c_1 u^2 + c_2}$ .

Уравнение частот системы (2) имеет вид

$$J_1 J_2 J_3 p^6 + [2u a_{13} J_1 J_2 - a_{11} (J_1 J_3 + J_2 J_3)] p^4 + [2u a_{13} a_{11} (J_1 + J_2) - a_{13}^2 (J_1 + J_2) - a_{12}^2 J_3] p^2 - 2a_{13} [u (a_{11}^2 - a_{12}^2) - a_{13} (a_{12} + a_{11})] = 0.$$

Нетрудно показать, что свободный член последнего уравнения равен нулю. Это следует и из физических соображений — система может вращаться как жесткое тело.

219. Рассматривая динамическое равновесие каждого маховика, получаем два уравнения следующего вида:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) = 0; \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi_1$  — угол поворота левого маховика,  $\varphi_2$  — угол поворота правого маховика;  $\varphi_3$  — угол поворота контактного кольца демпфера.

Рассматривая равновесие безынерционной упругой оболочки, получаем третье уравнение

$$\alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (1)–(3) ищем в виде  $\varphi_i = A_i e^{\lambda t}$ , что позволяет получить следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (\lambda^2 J_1 + \lambda \alpha + c_1) & -c_1 & -p\alpha \\ -c & (\lambda^2 J_2 + c_1 + c_2) & -c_2 \\ \lambda \alpha & c_2 & -(\lambda \alpha + c_2) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^5 J_1 J_2 \sigma + \lambda^4 J_1 J_2 c_2 + \lambda^3 \alpha (J_1 + J_2) (c_1 + c_2) + \lambda^2 c_1 c_2 (J_1 + J_2) = 0. \quad (4)$$

Имеем систему с дробным числом степеней свободы. Из уравнения (4) получаем два нулевых корня ( $\lambda_{1,2} \approx 0$ ), соответствующие вращению системы как абсолютно жесткого тела. Для нахождения остальных трех корней составим следующее уравнение:

$$\lambda^3 + \frac{c_2}{\alpha} \lambda^2 + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} (c_1 + c_2) \lambda + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \frac{c_1 \cdot c_2}{\alpha} = 0.$$

Подставив в него числовые данные, получаем

$$\lambda^3 + 60\lambda^2 + 630\lambda + 12\,600 = 0,$$

откуда находим

$$\lambda_3 = -53,1; \quad \lambda_{4,5} = (-3,45 \pm i16,5).$$

220. В качестве обобщенных координат выбираем вертикальное смещение центра тяжести копуса  $y$  и угол его поворота  $\varphi$  (рис. 276).

Потенциальная и кинетическая энергии системы при колебаниях равны

$$\Pi = c_1 (y + \varphi l_1)^2 / 2 + c_2 (y - \varphi l_2)^2 / 2;$$

$$T = m\dot{y}^2 / 2 + J\dot{\varphi}^2 / 2.$$

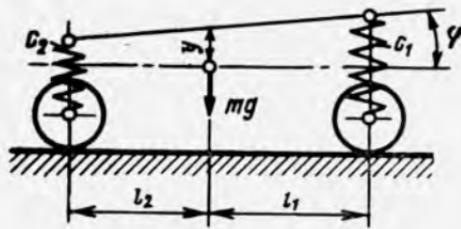


Рис. 276

Подставив эти выражения в уравнения Лагранжа второго рода, получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + c_1(y + \phi l_1) + c_2(y - \phi l_2) &= 0; \\ J\ddot{\phi} + c_1 l_1(y + \phi l_1) - c_2 l_2(y - \phi l_2) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\ddot{y} + a_{11}y + a_{12}\phi = 0; \quad \ddot{\phi} + a_{21}y + a_{22}\phi = 0, \quad (a)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (c_1 + c_2)/m; \quad a_{12} = (c_1 l_1 - c_2 l_2)/m; \\ a_{21} &= (c_1 l_1 - c_2 l_2)/J; \quad a_{22} = (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2)/J. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (а) ищем в виде  $y = A \sin pt$ ;  $\phi = B \sin pt$ . Собственные частоты колебаний

$$p_{1,2} = \sqrt{(a_{11} + a_{22})/2 \pm \sqrt{[(a_{11} - a_{22})/2]^2 + a_{12}a_{21}}}$$

откуда после подстановки числовых значений получаем

$$p_1 = 16,5 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = 50 \text{ с}^{-1}.$$

221. Равенство частот собственных колебаний системы возможно при выполнении следующих условий:

$$c_1 l_1 = c_2 l_2 \text{ и } (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2)/J = (c_1 + c_2)/m.$$

Если ввести обозначение  $\rho^2 = J/m$ , то эти два условия можно свести к одному

$$\rho^2 = l_1 l_2.$$

222. За обобщенные координаты выберем вертикальное перемещение центра тяжести кузова  $y$ , его угловое перемещение  $\phi$  и вертикальные перемещения переднего и заднего мостов  $y_1$  и  $y_2$  (см. рис. 161). Выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции Релея имеют вид

$$T = \frac{J_0 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m \dot{y}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2};$$

$$\Pi = \frac{c_1}{2} (y + \phi b - y_1)^2 + \frac{c_2}{2} (y - \phi a - y_2)^2 + \frac{c y_1^2}{2} + \frac{2c y_2^2}{2};$$

$$R = \frac{\alpha}{2} (\dot{y} + \dot{\phi} b - \dot{y}_1)^2 + \frac{\alpha}{2} (\dot{y} - \dot{\phi} a - \dot{y}_2)^2.$$

Подставив  $T$ ,  $\Pi$  и  $R$  в уравнения Лагранжа, получаем следующие уравнения движения:

$$J_0 \ddot{\varphi} + \alpha (a^2 + b^2) \dot{\varphi} + (c_2 a_2 + c_1 b^2) \varphi + \alpha (b - a) \dot{y} + (c_1 b - c_2 a) y - \alpha b \dot{y}_1 + \alpha a \dot{y}_2 - c_1 b y_1 + c_2 y_2 a = 0;$$

$$m_1 \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + (c_1 + c_2) y + \alpha (b - a) \dot{\varphi} + (c_1 b - c_2 a) \varphi - \alpha (y_1 + y_2) - c_1 y_1 - c_2 y_2 = 0;$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha y_1 + (c + c_1) y_1 - \alpha b \dot{\varphi} - c_1 b \varphi - \alpha y - c_1 \varphi = 0;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha y_2 + (2c + c_2) y_2 + \alpha a \dot{\varphi} + c_2 a \varphi - \alpha y - c_2 y = 0.$$

223. За независимые переменные (обобщенные координаты) примем перемещения  $y_1$  и  $y_2$  центров тяжести переднего и заднего мостов. Силы вязкого сопротивления примем равными нулю ( $\alpha = 0$ ).

Введем новые неизвестные  $z_1$  и  $z_2$ , положив  $z_1 = y + \varphi a$ ;  $z_2 = y - \varphi b$ . Тогда

$$y = z_1 b / (a + b) + z_2 a / (a + b); \quad \varphi = z_1 / (a + b) - z_2 / (a + b).$$

Проводя решение подобно тому, как это сделано в задаче 222, получаем две независимые системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} m b \ddot{z}_1 + c_1 (a + b) z_1 - c (a + b) y_1 = 0; \\ m_1 \ddot{y}_1 + (c + c_1) y_1 - c_1 z_1 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m a \ddot{z}_2 + c_1 (a + b) z_2 - c (a + b) y_2 = 0; \\ m_1 \ddot{y}_2 + (c + c_1) y_2 - c_1 z_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Частный случай  $J_0 = tab$  эквивалентен расчетной схеме, приведенной на рис. 277.

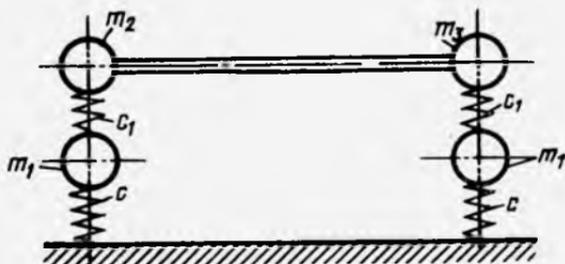


Рис. 277

Система уравнений (1) описывает колебания переднего моста и некоторой массы  $m_2 = mb / (a + b)$  при неподвижной массе  $m_3$ , а система уравнений (2) — колебания заднего моста и некоторой массы  $m_3 = ma / (a + b)$  при неподвижной массе  $m_2$ .

Из системы уравнений (1) после соответствующих преобразований и подстановки числовых значений находим  $p_1 = 8,27 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_3 = 48,5 \text{ с}^{-1}$ , а из системы уравнений (2) получаем  $p_2 = 9,9 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_4 = 48,8 \text{ с}^{-1}$ .

224. Удлинения верхней и нижней ветвей передачи при колебаниях шкивов равны

$$\Delta l_1 = R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi; \quad \Delta l_2 = -R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi. \quad (1)$$

Удлинения  $\Delta l_{1,2}$  можно выразить через дополнительные напряжения по формулам, приведенным в условии задачи:

$$\Delta l_1 = a_1 \Delta \sigma_1; \quad \Delta l_2 = a_2 \Delta \sigma_2. \quad (2)$$

В процессе колебаний на каждый из шкивов действуют момент сил инерции и момент сил натяжения в ветвях передачи. Дифференциальные уравнения свободных колебаний шкивов имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + R_1 F (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + R_2 F (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом соотношений (1) и (2) систему уравнений (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + R_1^2 F a_3 \varphi_1 / J_1 - R_1 R_2 F a_3 \varphi_2 / J_1 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_2 - R_1 R_2 F a_3 \varphi_1 / J_2 + R_2^2 F a_3 \varphi_2 / J_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_3 = (a_1 + a_2) / a_1 a_2$ .

Из уравнений (4) после преобразований находим

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{R_1 F a_3 (R_1 / J_1 + R_2 / J_2)}, \quad p_2 = 146,3 \text{ с}^{-1}.$$

225. На рис. 278 изображено положение системы в произвольный момент времени. Вычислим кинетическую и потенциальную энергии системы:

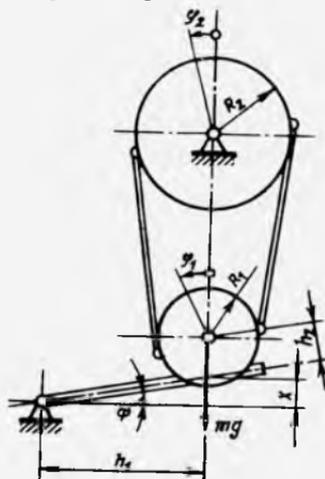


Рис. 278

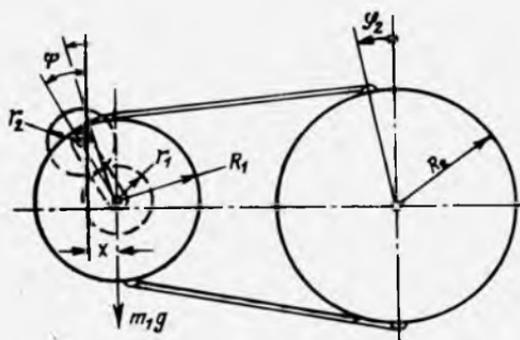


Рис. 279

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2 / 2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 / 2 + J_1' \dot{\psi}^2 / 2; \quad (1)$$

$$\Pi = c\Delta l_1^2 / 2 + c\Delta l_2^2 / 2 + mg [h_1 \sin \psi + h_2 (\cos \psi - 1)],$$

где  $c = EF/l$ .

Удлинения упругих связей равны

$$\Delta l_1 = R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2 - x \cos \varphi_{10};$$

$$\Delta l_2 = R_2 \varphi_2 - R_1 \varphi_1 - x \cos \varphi_{10},$$

или, учитывая, что  $x \cong h_1 \psi$ ,

$$\Delta l_1 = R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2 - h_1 \psi \cos \varphi_{10}; \quad (2)$$

$$\Delta l_2 = R_2 \varphi_2 - R_1 \varphi_1 - h_1 \psi \cos \varphi_{10}.$$

Подставим выражения (1) с учетом соотношений (2) в уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{2cR_1^2}{J_1} \varphi_1 - \frac{2cR_1R_2}{J_1} \varphi_2 = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{2cR_1R_2}{J_2} \varphi_1 + \frac{2cR_2^2}{J_2} \varphi_2 = 0;$$

$$\ddot{\psi} + \frac{2ch_1^2 \cos \varphi_{10}}{J_1'} \psi + \frac{mgh_1}{J_1'} = 0. \quad (3)$$

Угол  $\psi$  можно представить как сумму угла  $\psi_0$  от статического приложения нагрузки  $mg$  и угла  $\psi_1$  при колебании системы, т. е.

$$\psi = \psi_0 + \psi_1.$$

При этом в статическом состоянии ( $\ddot{\psi} = 0$ ) справедливо соотношение

$$2ch_1^2 \psi_0 \cos \varphi_{10} + mgh_1 = 0.$$

С учетом этого третье уравнение в системе (3) принимает вид

$$\ddot{\psi}_1 + 2ch_1^2 \cos \varphi_{10} \psi_1 / J_1' = 0.$$

Алгоритм определения частот аналогичен изложенному в задаче 193. Окончательно получаем, что частоты собственных колебаний системы равны

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 187 \text{ с}^{-1}; \quad p_3 = 270 \text{ с}^{-1}.$$

**226.** Вычислим кинетическую и потенциальную энергии системы при колебании шкивов (рис. 279):

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2 / 2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 / 2 + m_1 x^2 / 2; \quad (1)$$

$$\Pi = c\Delta l_1^2 / 2 + c\Delta l_2^2 / 2 + m_1 g (r_1 + r_2) (1 - \cos \psi),$$

где  $c = EF/l$  — жесткость упругих связей;  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  — удлинения упругих связей, равные

$$\Delta l_1 = R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2 - x \cos \varphi_{10};$$

$$\Delta l_2 = -R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 - x \cos \varphi_{10}.$$

Между углом  $\varphi_1$  поворота ведущего шкива 4 и углом  $\psi$  поворота кулисы 3 имеется зависимость вида

$$\varphi_1 = \psi(1 + r^2/r_1), \quad (2)$$

где  $\psi = x/(r_1 + r_2)$ .

Из выражения (2) следует, что  $x = r_1\varphi_1$ . Тогда уравнения (1) принимают следующий вид:

$$T = J_2\dot{\varphi}_2^2/2 + (J_1 + m_1r_1^2)\dot{\varphi}_1^2/2;$$

$$\Pi = \frac{c}{2} [(R_1 - r_1 \cos \varphi_{10}) \varphi_1 - R_2\varphi_2]^2 + \frac{c}{2} [-(R_1 + r_1 \cos \varphi_{10}) \varphi_1 + R_2\varphi_2]^2 + m_1g(r_1 + r_2) \left(1 - \cos \frac{r_1}{r_1 + r_2} \varphi_1\right).$$

Используя уравнения Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \left[ \frac{2EF}{(J_1 + m_1r_1^2)l} (R_1^2 + r_1^2 \cos^2 \varphi_{10}) + m_1gr_1 \right] \varphi_1 - \\ - \frac{2EFR_1R_2}{(J_1 + m_1r_1^2)l} \varphi_2 = 0; \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{2EF}{J_2l} R_1R_2\varphi_1 + \frac{2EF}{J_2l} R_2^2\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Из последних уравнений после соответствующих преобразований и подстановки числовых значений получаем  $p_1 = 34,6 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_2 = 179 \text{ с}^{-1}$ .

277. На рис. 280 изображена масса  $m$  в произвольный момент времени  $t$ . Поскольку натяжение в нитях  $T_0$  принимается постоянным, горизонтальным смещением массы можно пренебречь.

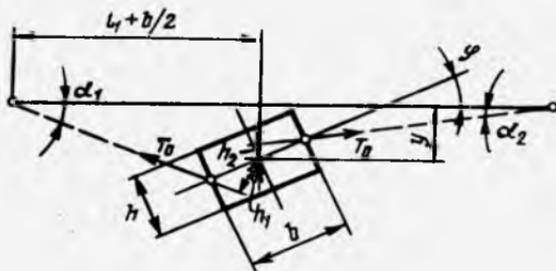


Рис. 280

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{y} = -(T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2),$$

$$J\ddot{\varphi} = -(T_0 h_1 + T_0 h_2).$$

Учитывая, что  $\sin \alpha_1 = (y + b\varphi/2)/l_1$ ,  $\sin \alpha_2 = (y - b\varphi/2)/l_1$ ,  $\sin \alpha_2 = (y - b\varphi/2)/l_1$ ,  $h_1 = (b/2) \sin(\alpha_1 + \alpha)$ ,  $h_2 = (b/2) \sin(\varphi - \alpha_2)$ , а также считая  $\alpha$  и  $\varphi$  малыми, получаем

$$\ddot{y} + \frac{T_0(l_1+l_2)}{ml_1l_2}y + \frac{T_0b(l_2-l_1)}{2ml_1l_2}\varphi = 0;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{T_0b(l_2-l_1)}{2Jl_1l_2}y + \frac{T_0b}{2J}\left(2 + \frac{b}{2}\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}\right)\varphi = 0.$$

Из этих уравнений теперь можно записать уравнение частот:

$$\begin{vmatrix} -p^2 + \frac{T_0(l_1+l_2)}{ml_1l_2} & \frac{T_0b(l_2-l_1)}{2ml_1l_2} \\ \frac{T_0b(l_2-l_1)}{2Jl_1l_2} & -p^2 + \left(2 + \frac{b}{2}\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}\right)\frac{T_0b}{2J} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$p^4 - p^2 \left[ \frac{b}{J} + \frac{l_1+l_2}{l_1l_2} - \frac{4J+mb^2}{4mJ} \right] T_0 + \frac{T_0^2 b b + 2(l_1+l_2)}{2mJ l_1l_2} = 0.$$

В частном случае при  $l_1=l_2=l$  движения по  $y$  и  $\varphi$  независимы и частоты малых собственных колебаний равны

$$p_1 = \sqrt{2T_0/(ml)}; \quad p_2 = \sqrt{(T_0b/2J)(2+b/l)}.$$

228. В произвольный момент времени положение вагонетки определяется тремя координатами:  $x, y+h, \varphi$  (рис. 281). При этом горизонтальная координата является независимой функцией скорости движения вагонетки ( $x=x_0+vt$ ), а две другие связаны между собой следующим образом:

$$m\ddot{y} = (T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2) - mg,$$

$$J\ddot{\varphi} = -T_0h_2 + T_0h_1.$$

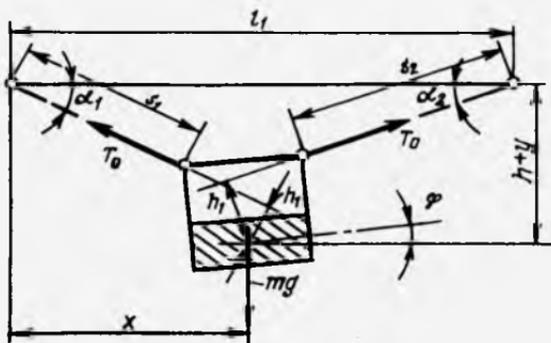


Рис. 281

Учитывая, что

$$\sin \alpha_1 \approx (y+b\varphi/2)/s_1; \quad \sin \alpha_2 \approx (y-b\varphi/2)/s_2;$$

$$h_1 \approx h+y-x \sin \alpha_1; \quad h_2 \approx h+y-(l-x) \sin \alpha_2,$$

получаем

$$\ddot{y} + [2T_0/(mb)] A_1(t) y + (T_0/m) A_2(t) \varphi = -g;$$

$$\ddot{\varphi} + (T_0/J) A_2(t) y + (T_0b/2J) A_1(t) \varphi = 0,$$

где

$$A_1(t) = b(l-b) / [(x_0 + vt - b/2)(l - x_0 - vt - b/2) \cdot 2];$$

$$A_2(t) = b[l - 2(x_0 + vt)] / [(x_0 + vt - b/2)(l - x_0 - vt - b/2) \cdot 2].$$

229. Рассмотрим произвольное отклоненное от положения равновесия состояние системы (рис. 282, а). В соответствии с

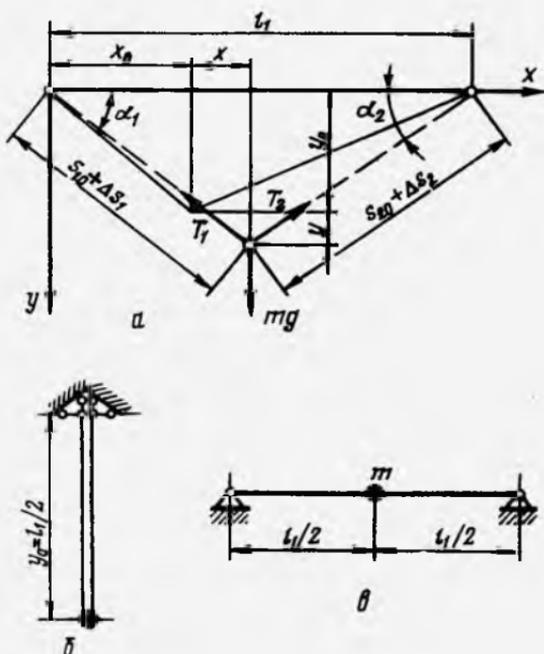


Рис. 282

принципом Даламбера дифференциальные уравнения движения массы можно представить в виде

$$m\ddot{x} = -T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2; \quad m\ddot{y} = -(T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2) + mg. \quad (1)$$

Из рис. 282, а следует, что

$$\cos \alpha_1 = (x_0 + x) / (s_{10} + \Delta s_1);$$

$$\cos \alpha_2 = [l_1 - (x_0 + x)] / (s_{20} + \Delta s_2);$$

$$\sin \alpha_1 = (y_0 + y) / (s_{10} + \Delta s_1)$$

$$\sin \alpha_2 = (y_0 + y) / (s_{20} + \Delta s_2).$$

При этом натяжения в ветвях нити равны

$$T_1 = T_{10} + \Delta T_1; \quad T_2 = T_{20} + \Delta T_2.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения движения (1) и сохраняя члены, линейно зависящие от приращений номинальных значений, получаем

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -T_{10} \frac{x}{s} - T_{20} \frac{x}{s_{20}} - \Delta T_1 \frac{x_0}{s_{10}} + \Delta T_2 \frac{l_1 - x_0}{s_{20}} + \\
&\quad + T_{10} \frac{x_0}{s_{10}^2} \Delta s_1 - T_{20} \frac{l_1 - x_0}{s_{20}^2} \Delta s_2; \\
m\ddot{y} &= -T_{10} \frac{y}{s_{10}} - T_{20} \frac{y}{s_{20}} - \Delta T_1 \frac{y_0}{s_{10}} - \Delta T_2 \frac{y_0}{s_{20}} + \\
&\quad + T_{10} \frac{y_0}{s_{10}^2} \Delta s_1 + T_{20} \frac{y_0}{s_{20}^2} \Delta s_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Удлинения ветвей нити связаны следующими зависимостями с приращениями усилий:

$$\Delta s_1 = \Delta T_1 s_{10} / (EF) = \Delta T_1 s_{10} / (cl_1); \quad \Delta s_2 = \Delta T_2 s_{20} / (cl_1). \tag{3}$$

В уравнения (2) и (3) входят шесть неизвестных величин ( $x$ ,  $y$ ,  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$ ,  $\Delta s_1$ ,  $\Delta s_2$ ). Дополнительными геометрическими уравнениями могут служить тождества

$$\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = 1;$$

$$\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = 1,$$

которые позволяют получить (с учетом выведенных выше соотношений) следующие два уравнения:

$$\Delta s_1 = (y_0/s_{10})y + (x_0/s_{10})x;$$

$$\Delta s_2 = [(l_1 - x_0)/s_{20}]x + (y_0/s_{20})y. \tag{4}$$

Входящие в систему уравнений (2) статические натяжения ветвей имеют между собой зависимость в виде уравнений равновесия

$$-T_{10} \frac{x_0}{s_{10}} + T_{20} \frac{l_1 - x_0}{s_{20}} = 0; \quad T_{10} \frac{y_0}{s_{10}} + T_{20} \frac{y_0}{s_{20}} = mg,$$

из которых легко получить

$$T_{10} = mg \frac{(l_1 - x_0)}{l_1} \frac{s_{10}}{y_0}; \quad T_{20} = mg \frac{x_0}{l_1} \frac{s_{20}}{y_0}. \tag{5}$$

Подставив соотношения (3), (4) и (5) в уравнения (2), имеем

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_{11}x + a_{12}y = 0; \\ \ddot{y} + a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{y_0^2}{m} \left( \frac{T_{10}}{s_{10}^3} + \frac{T_{20}}{s_{20}^3} \right) + \frac{EF}{m} \left( \frac{x_0^2}{s_{10}^3} + \frac{(l_1 - x_0)^2}{s_{20}^3} \right)^2;$$

$$a_{12} - a_{21} = \frac{EFy_0}{m} \left( \frac{x_0}{s_{10}^3} - \frac{l_1 - x_0}{s_{20}^3} \right) - \frac{y_0}{m} \left( \frac{T_{10}x_0}{s_{10}^3} - \frac{T_{20}(l_1 - x_0)}{s_{20}^3} \right);$$

$$a_{22} = \frac{1}{m} \left( \frac{T_{10}x_0^2}{s_{10}^3} + \frac{T_{20}(l_1 - x_0)^2}{s_{20}^3} \right) + \frac{EFy_0^2}{m} \left( \frac{1}{s_{10}^3} + \frac{1}{s_{20}^3} \right).$$

Полагая  $x = A \sin pt$ ,  $y = B \sin pt$ , находим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} a_{11} - p^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$p^4 = (a_{11} + a_{22}) p^2 - a_{12}^2 + a_{11}a_{22} = 0.$$

Отсюда

$$p_{1,2} = \sqrt{(a_{11} + a_{22})/2 \mp \sqrt{[(a_{11} + a_{21})/2]^2 + a_{12}^2}}.$$

В частном случае расположения массы  $m$  в середине пролета ( $x_0 = l_1/2$ ,  $s_{10} = s_{20} = s_0$ ) начальные натяжения в ветвях  $T_{10} = T_{20} = T_0$ . При этом система уравнений (6) распадается на два независимых дифференциальных уравнения:

$$m\ddot{x} + 2[T_0(y_0^2/s_0^3) + EF(x_0^2/s_0^3)]x = 0; \quad (7)$$

$$m\ddot{y} + 2[T_0(x_0^2/s_0^3) + EF(y_0^2/s_0^3)]y = 0.$$

Частоты вертикальных и горизонтальных колебаний соответственно равны.

$$p_1 = \sqrt{[2/(ms_0^3)](T_0 y_0^2 + EF x_0^2)};$$

$$p_2 = \sqrt{[2/(ms_0^3)](T_0 x_0^2 + EF y_0^2)}. \quad (8)$$

Из выражений (7) можно найти частоты колебаний для ряда частных случаев. Полагая  $x_0 = 0$ , т. е. рассматривая вертикальные колебания груза на растяжимой нити (см. рис. 282, б) (при этом  $s_0 = y_0$ ;  $T_0 = mg/2$ ;  $l_1 = 0$ ), находим

$$p_1 = \sqrt{g/s_0}; \quad p_2 = \sqrt{2EJ/(ms_0)}.$$

Если во втором уравнении (7) принять  $y_0 = 0$ , получаем частный случай колебаний массы  $m$ , расположенной посредине упругой нити (рис. 282, в). В этом случае

$$p_1 = \sqrt{4EF/(ml_1)}; \quad p_2 = \sqrt{2T_0'/(ml_1)},$$

где  $T_0'$  — натяжение, при котором  $y_0 \approx 0$ .

230. Дифференциальные уравнения движения массы  $m$  аналогичны уравнениям (6), полученным в задаче 229, но в отличие

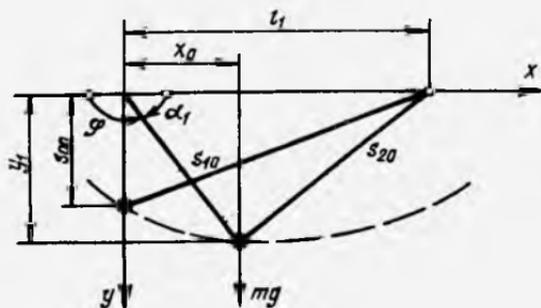


Рис. 283

от них величины  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $T_{10}$  и  $T_{20}$  являются функциями скорости движения массы  $v$  и времени  $t$ .

В соответствии с начальными условиями задачи масса  $m$  начинает двигаться из положения, изображенного на рис. 283, описывая в стационарном движении дугу эллипса. Уравнение эллипса в обозначениях, приведенных на рис. 283, в полярной форме имеет вид

$$s_{10} = s_{00} / (1 - e \cos \alpha_1) = s_{00} / (1 - ex_0/s_{10}). \quad (1)$$

Учитывая, что  $s_{10} = s_{00} + vt$ , из уравнения (1) получаем

$$x_0 = vt/e,$$

где

$$e = l_1 / (s_{10} + s_{20}) = l_1 / (s_{00} + \sqrt{s_{00}^2 + l_1^2}).$$

Вторая координата массы  $m$  при ее стационарном движении равна

$$y_0 = \sqrt{s_{10}^2 - x_0^2}.$$

Натяжения  $T_{10}$  и  $T_{20}$ , соответствующие стационарному движению, определим из уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 = T_{20}(l_1 + x_0)/s_{20} - T_{10}x_0/s_{10}; \\ m\ddot{y}_0 = T_{10}y_0/s_{10} + T_{20}y_0/s_{20} - mg. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно  $T_{10}$  и  $T_{20}$  с учетом полученных выше соотношений, находим

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{\ddot{y}_0 + g}{m(y_0/s_{10})[1 + x_0/(l_1 - x_0)]}; \\ T_{20} &= \frac{\ddot{y}_0 + g}{m(y_0/s_{20})[(l_1 - x_0)/x_0 + 1]}; \end{aligned}$$

где  $\ddot{y}_0 = (v^2/y_0)[(1 - 1/l^2) - (s_{10} - x_0/l)^2/y_0^2]$ .

**231.** Изменение напряжения в цепи якоря в произвольный момент времени равно приложенному напряжению, т. е.

$$U_L + U_R + U_\varphi = U_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Учитывая, что  $U_L = L di/dt$ ,  $U_R = Ri$ ,  $U_\varphi = \alpha_1 d\varphi/dt$ , представим уравнение (1) в виде

$$L di/dt + Ri + \alpha_1 d\varphi/dt = U_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение вращения якоря:

$$J d^2\varphi/dt^2 + c\varphi = \alpha_2 i, \quad (3)$$

где  $\alpha_2 i$  — электромагнитный возмущающий момент.

Решение однородных уравнений (2) и (3) ищем в виде  $i = A_1 e^{at}$ ;  $\varphi = A_2 e^{at}$ , что позволяет получить следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + (R/L)\lambda^2 + [(\alpha_1\alpha_2 + cL)/(JL)]\lambda + Rc/(JL) = 0.$$

В частном случае весьма малого активного сопротивления цепи якоря ( $R \approx 0$ ) получаем следующие значения корней:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_1\alpha_2 + cL}{JL}} = \pm i \sqrt{\frac{c}{J} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{JL}}.$$

232. В состоянии равновесия конденсатор имеет заряд  $q_0$ , а пружины сжаты на величину  $x_0$  (силой, с которой пластины конденсатора притягиваются между собой).

При колебаниях заряд и смещение соответственно равны

$$q = q_0 + \Delta q, \quad x = x_0 + \Delta x.$$

Емкость конденсатора  $C$  обратно пропорциональна расстоянию между электродами

$$C = a/(l-x),$$

где  $a$  — некоторая постоянная;  $l$  — расстояние между пластинами в отсутствие заряда.

При выводе уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа. Потенциальная энергия системы (электрическая и упругая)

$$\Pi = -U\Delta q + c(\Delta x + x_0)^2/2.$$

Разлагая выражение для потенциальной энергии в ряд и ограничиваясь квадратичной частью разложения, получаем

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{l-x_0}{2a} \Delta q^2 - \frac{q_0}{a} \Delta q \Delta x + \frac{c}{2} \Delta x^2 + \left[ \frac{q_0}{a} (l-x_0) - U \right] \Delta q + \\ + \left[ cx_0 - \frac{q_0^2}{2a} \right] \Delta x + \text{const.} \end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках равны нулю из условия равновесия системы. Сумма кинетической и магнитной энергий

$$T = m\Delta \dot{x}^2/2 + L\Delta \dot{q}^2/2.$$

Энергия, рассеиваемая системой (из-за активного сопротивления в электрическом контуре),

$$D = R\Delta \dot{q}^2/2.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения свободных колебаний системы имеют вид

$$m\Delta \ddot{x} + c\Delta x - \frac{q_0}{a} \Delta q = 0;$$

$$L\Delta \ddot{q} + R\Delta \dot{q} + \frac{l-x_0}{a} \Delta q - \frac{q_0}{a} \Delta x = 0.$$

233. Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны

$$T = J_1 \dot{\varphi}_1^2/2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2/2; \quad \Pi = c(\varphi_1 + \varphi_2)^2/2,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота дисков.

Используя уравнения Лагранжа, запишем дифференциальные уравнения движения дисков:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Представляя решение системы уравнений (1) в виде  $\varphi_1 = A_1 \sin pt$ ,  $\varphi_2 = A_2 \sin pt$ , получаем следующее уравнение частот:

$$p^4 - c(J_1 + J_2)p^2 / (J_1 J_2) = 0.$$

Отсюда находим частоты собственных колебаний дисков

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{c(J_1 + J_2) / (J_1 J_2)}.$$

Закон движения дисков с учетом кратных нулевых корней имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \dot{\varphi}_0 \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2} t + \frac{2\varphi_0 J_2}{p_2 (J_1 + J_2)} \sin p_2 t; \\ \varphi_2 &= \dot{\varphi}_0 \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2} t - \frac{2\varphi_0 J_1}{p_2 (J_1 + J_2)} \sin p_2 t. \end{aligned}$$

## § 9. Вынужденные колебания

234. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний, составленные по методу сил, представим в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} (-m_1 \ddot{y}_1 + p) + \delta_{12} (-m_2 \ddot{y}_2); \\ y_2 &= \delta_{21} (-m_1 \ddot{y}_1 + p) + \delta_{22} (-m_2 \ddot{y}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) ищем в форме  $y_1 = A_1 \sin \omega t$ ,  $y_2 = A_2 \sin \omega t$ . Подставив  $y_1$  и  $y_2$  в уравнения (1), найдем значения амплитуд колебаний  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= P_0 \frac{\delta_{11} (1 - m_2 \delta_{22} \omega^2) + \delta_{12}^2 m_2 \omega^2}{(1 - \delta_{11} m_1 \omega^2) (1 - \delta_{22} m_2 \omega^2) - \delta_{12}^2 m_1 m_2 \omega^4}; \\ A_2 &= P_0 \frac{\delta_{21}}{(1 - \delta_{11} m_1 \omega^2) (1 - \delta_{22} m_2 \omega^2) - \delta_{12}^2 m_1 m_2 \omega^4}. \end{aligned}$$

По условию задачи  $\omega^2 = 1 / (m_2 \delta_{22})$ . Следовательно,

$$A_1 = -8J_0 l^3 / (9EJ_x); \quad A_2 = -64P_0 l^3 / (63EJ_x).$$

или с учетом найденных в задаче 195 соотношений

$$A_1 = -8P_0 l^3 / (9EI_x); \quad A_2 = -64P_0 l^3 / (63EI_x).$$

В процессе колебаний на массы  $m_1$  и  $m_2$  действуют периодические силы  $F_1 = -P - m_1 \ddot{y}_1$  и  $F_2 = -m_2 \ddot{y}_2$ , амплитудные значения которых равны

$$F_{10} = 0; \quad F_{20} = 2P_0 \delta_{22} / \delta_{12}.$$

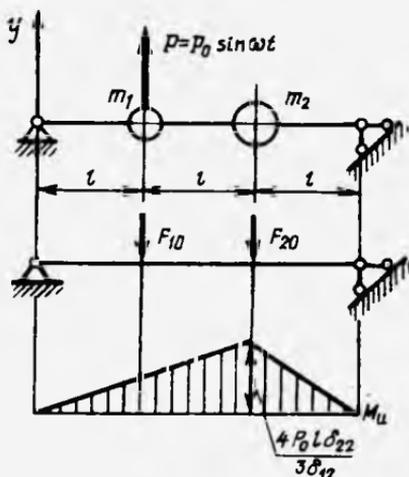


Рис. 284

На рис. 284 показана эпюра изгибающих моментов, из которой видно, что опасным является сечение закрепления массы  $m_2$ , в котором действует

$$M_{\max} = 46P_0l/21.$$

Наибольшие напряжения в балке

$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W_x = \frac{4P_0l\delta_{22}}{3\delta_{12}W_x}.$$

235. Обозначив через  $x_1$  и  $x_2$  перемещение массы  $m_1$  и  $m_2$ , соответственно получаем следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= (P_0 \sin \omega t - m_1 \ddot{x}_1) \delta_{11} + (-m_2 \ddot{x}_2) \delta_{12}; \\ x_2 &= (-m_1 \ddot{x}_1) \delta_{21} + (-m_2 \ddot{x}_2) \delta_{22}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для случая, показанного на рис. 171, а коэффициенты уравнений системы (1) равны

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= [1/c + l^3/(3EJ_x)]/2 = 2/(3c); \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = l^3/(6FJ_x) = 1/(6c); \quad \delta_{22} = \delta_{12}. \end{aligned}$$

В установившемся режиме колебаний решения уравнений (1) ищем в виде  $x_1 = x_{10} \sin \omega t$ ;  $x_2 = x_{20} \sin \omega t$ .

Подставив эти выражения в систему уравнений (1), получаем

$$\begin{aligned} x_{10} &= \frac{P_0 (1 - m_2 \omega^2 \delta_{22}) \delta_{11}}{(1 - m_1 \omega^2 \delta_{11}) (1 - m_2 \omega^2 \delta_{22}) - m_1 m_2 \omega^4 \delta_{12}^2}; \\ x_{20} &= \frac{P_0 m_1 \omega^2 \delta_{21} \delta_{11}}{(1 - m_1 \omega^2 \delta_{11}) (1 - m_2 \omega^2 \delta_{22}) - m_1 m_2 \omega^4 \delta_{12}^2}. \end{aligned}$$

С учетом исходных значений окончательно имеем

$$x_{10} = 44P_0/(45c); \quad x_{20} = -8P_0/(45c).$$

Усилие, передаваемое на массу  $m_2$  со стороны массы  $m_1$ , равно

$$P_1 = 2c(x_{10} - x_{20}) = 2,31P_0.$$

Коэффициент динамичности передачи силы равен

$$k_{\text{дин}} = P_1/P_0 = 2,31.$$

Для случая, показанного на рис. 171, б, коэффициент динамичности

$$k_{\text{дин}} = 4,5.$$

**236.** Разложим полную силу инерции  $F_0$  на две составляющие:  $F_y = F_0 \sin \omega t$  и  $F_z = F_0 \cos \omega t$ , направленные соответственно перпендикулярно осевой линии балки и вдоль нее. Положение центра массы мотора в любой момент времени определяется двумя независимыми координатами — его вертикальным перемещением  $y$  и углом поворота  $\varphi$ .

Используя метод сил, можно записать

$$\begin{aligned} y &= (F_y - m\ddot{y})\delta_{11} + (F_z R - J\ddot{\varphi})\delta_{12}; \\ \varphi &= (F_y - m\ddot{y})\delta_{21} + (F_z R - J\ddot{\varphi})\delta_{22}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J = J_0 + mR^2$  — момент инерции массы двигателя относительно его основания.

Коэффициенты уравнений (1) определим по правилу Верещагина

$$\delta_{11} = 4l^3 / (9EJ_x); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 2l^3 / (9EJ_x); \quad \delta_{22} = l^3 / (3EJ_x).$$

Частоты свободных колебаний системы найдем из уравнений (1), приняв в них  $F_y = F_z = 0$ . Полагая  $y = c_1 \sin pt$ ,  $\varphi = c_2 \sin pt$ , после преобразований получаем две частоты колебаний:

$$p_1 = 1,43 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}; \quad p_2 = 3,96 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

Решение системы уравнений (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} y &= A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t; \\ \varphi &= B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в уравнения (1) и учитывая связь между компонентами центробежной силы инерции, получаем следующую систему уравнений для определения постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ :

$$\begin{aligned} (1 - m\omega^2\delta_{11})A_1 - I\omega^2\delta_{12}B_1 &= F_0\delta_{11}; \\ (1 - m\omega^2\delta_{11})A_2 - I\omega^2\delta_{12}B_2 &= F_0R\delta_{12}; \\ (1 - I\omega^2\delta_{22})B_1 - m\omega^2\delta_{12}A_1 &= F_0\delta_{12}; \\ (1 - I\omega^2\delta_{22})B_2 - m\omega^2\delta_{12}A_2 &= F_0R\delta_{22}. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} A_1 &= (F_0/\Delta) [(1-J\omega^2\delta_{22})\delta_{11}+J\omega^2\delta_{12}^2] = -104F_0l^3/(227EJ_x); \\ A_2 &= (F_0/\Delta) [(1-m\omega^2\delta_{11})\delta_{12}+m\omega^2\delta_{12}\delta_{22}] = -72F_0l^3/(227EJ_x); \\ B_1 &= (F_0R/\Delta) [(1-J\omega^2\delta_{22})\delta_{12}+J\omega^2\delta_{12}\delta_{22}] = -18F_0l^2/(227EJ_x); \\ B_2 &= (F_0R/\Delta) [(1-m\omega^2\delta_{11})\delta_{22}+m\omega^2\delta_{12}^2] = 5F_0^2l/227EJ_x, \end{aligned}$$

где  $\Delta = (1-m\omega^2\delta_{11})(1-J\omega^2\delta_{22}) - mJ\omega^4\delta_{12}^2$ .

Из выражений (2) следует, что амплитуды вынужденных линейных и угловых колебаний соответственно равны

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,467F_0l^3/(EJ_x); \\ \varphi_0 &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 0,319F_0l^2/(EJ_x). \end{aligned}$$

**237.** Дифференциальные уравнения движения масс, составленные по методу сил, имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{x}_1) + \delta_{21}(-m_2\ddot{x}_2 + P); \\ x_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{x}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{x}_2 + P). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы (1) ищем в виде  $x_1 = A\sin\omega t$ ;  $x_2 = B\sin\omega t$ . Для определения  $A$  и  $B$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (1-\delta_{11}m_1\omega^2)A - \delta_{12}m_2\omega^2B &= P_0\delta_{12}; \\ -m_1\delta_{21}\omega^2A + (1-\delta_{22}m_2\omega^2)B &= P_0\delta_{22}. \end{aligned}$$

Отсюда находим амплитуду колебаний массы  $m_2$ :

$$B = P_0 \frac{\delta_{22}(1-\delta_{11}m_1\omega^2) + m_1\delta_{12}^2\omega^2}{(1-\delta_{11}m_1\omega^2)(1-\delta_{22}m_2\omega^2) - m_1m_2\delta_{12}\delta_{21}\omega^4}.$$

Амплитуда колебаний массы  $m_2$  равна нулю при

$$\delta_{22}(1-\delta_{11}m_1\omega^2) + m_1\delta_{12}^2\omega^2 = 0,$$

откуда получаем связь между частотой возмущающей силы и параметрами системы

$$\omega^2 = \delta_{22}/[m_1(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)]. \quad (2)$$

Левая часть выражения (2) представляет собой парциальную частоту колебаний массы  $m_1$  (частота колебаний массы  $m_1$  при жестко закрепленной массе  $m_2$ ). Коэффициенты этого уравнения равны

$$\delta_{11} = 2l/(EF); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = l/(EF); \quad \delta_{22} = l/(EF).$$

**238.** Амплитуда колебаний массы  $m_2$  равна нулю при

$$\omega^2 = \delta_{22}/[m_1(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)],$$

где

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 4l^3/(9EJ_x); \quad \delta_{12} = 7l^3/(18EJ_x).$$

239. Воспользовавшись методом сил, запишем дифференциальные уравнения движения масс:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{13}M; \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{23}M. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как  $y_1$  должно быть тождественно нулю, то из системы (1) получаем

$$\begin{aligned} \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 &= \delta_{13}M; \\ y_2 &= -\delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + \delta_{23}M. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение системы (2) будем искать в виде  $y_2 = A \sin \omega t$ . После преобразований получаем

$$\begin{aligned} -\omega^2 \delta_{12} m_2 A &= \delta_{13} M; \\ (1 - \delta_{22} m_2 \omega^2) A &= \delta_{23} M. \end{aligned} \quad (3)$$

Из системы (3) находим связь между частотой возмущающего момента  $\omega$  и параметрами системы, при которых амплитуда колебаний массы  $m_1$  равна нулю:

$$\omega^2 = \delta_{13} / [m_2 (\delta_{22} \delta_{13} - \delta_{23} \delta_{12})].$$

240. На рис. 285 показано положение системы при колебаниях (мачта заменена стержнем). Координаты массы  $m_1$  можно выразить через угол  $\varphi$  и смещение массы  $m_2$  следующим образом:

$$x_1 = x_2 + l_1 \sin \varphi; \quad y_1 = l_1 (1 - \cos \varphi).$$

Для вывода уравнений малых колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$  воспользуемся методом Лагранжа. Запишем кинетическую и потенциальную энергии:

$$\begin{aligned} T &= m_1 \dot{x}_1^2 / 2 + m_1 \dot{y}_1^2 / 2 + m_2 \dot{x}_2^2 / 2; \\ \Pi &= m_1 g (1 - \cos \varphi) + c x_2^2 / 2, \end{aligned}$$

где  $c$  — жесткость балки на изгиб, равная  $3EI_x/l^3$ .

После преобразований получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x}_2 + c x_2 + m_1 l_1 \ddot{\varphi} &= F_0 \sin \omega t; \\ m_1 l_1 \ddot{x}_2 + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi} + m_1 g l_1 \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Решение этой системы будем искать в виде  $x_2 = A \sin \omega t; \varphi = B \sin \omega t$ . Амплитуда колебаний массы  $m_2$  равна

$$A = (1/\Delta) [P_0 (g l_1 - l_1^2 \omega^2) m_1],$$

где  $\Delta$  — определитель системы алгебраических уравнений, соответствующих (1).

Амплитуда колебаний  $A$  равна нулю при

$$\omega^2 = g/l_1,$$

где  $\sqrt{g/l_1}$  — частота колебаний маятника при неподвижной массе  $m_2$ .

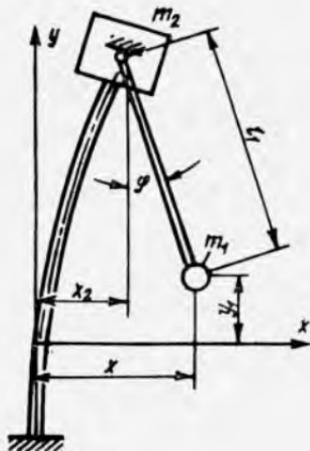


Рис. 285

241. Составим дифференциальные уравнения малых колебаний системы, воспользовавшись методом Лагранжа. При колебаниях диска угловая скорость равна

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega,$$

где  $\Omega_0$  — угловая скорость диска при стационарном режиме;  $\Delta\Omega = \dot{\varphi}$  — дополнительная угловая скорость диска при колебаниях.

При колебаниях массы  $m$  смещаются на величину  $x$  от положения динамического равновесия. При динамическом равновесии массы находятся на расстоянии  $l$  от оси вращения.

Кинетическая энергия системы

$$T = J(\Omega_0 + \Delta\Omega)^2/2 + 2m\{[(\Omega_0 + \Delta\Omega)(l+x)]^2 + x^2\}/2,$$

потенциальная —

$$\Pi = c\varphi^2/2 + 2c_1(x_0 + x)^2/2,$$

где  $x_0$  — растяжение пружины при стационарном режиме вращения. Обобщенная сила равна  $M$ . После преобразований из уравнений Лагранжа второго рода получаем два дифференциальных уравнения вида

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{c\varphi}{J + 2ml^2} + \frac{4ml\Omega_0}{J + 2ml^2} \dot{x} = M_0 \sin \omega t, \\ \ddot{x} - 2\Omega_0 l \dot{\varphi} + (c_1/m - \Omega_0^2)x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение этой системы будем искать в виде  $\varphi = A \sin \omega t$ ;  $x = B \cos \omega t$ .

После преобразований получаем, что амплитуда колебаний диска

$$A = (M_0/\Delta)[c_1/m - \Omega_0^2 - \omega^2],$$

где  $\Delta$  — определитель системы (1).

Параметры гасителя колебаний, при которых амплитуда угловых колебаний диска равна нулю, определяются соотношением

$$\omega^2 = c_1/m - \Omega_0^2,$$

т. е. гашение колебаний происходит в том случае, когда частота возмущающего момента равна частоте колебаний массы  $m$  на вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$  диске.

242. На рис. 286 показана измененная конструкция гасителя Прингла, в которой пружины имеют предварительный натяг  $x_0$ . В этом случае массы  $m$  будут прижаты к диску до тех пор, пока сила  $ml_0\Omega_0^2$ , действующая на массу  $m$ , не станет равной силе предварительного сжатия пружины, т. е.

$$ml_0\Omega_0^2 = x_0c_1.$$

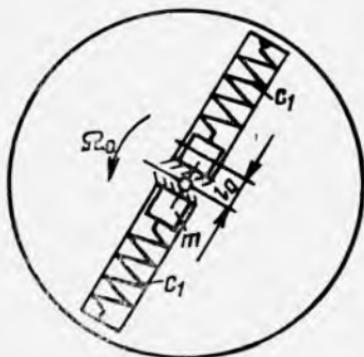


Рис. 286

243. Для гашения вынужденных колебаний диска, происходящих с частотой  $\omega$ , необходимо, чтобы частота колебаний маятника  $p$  равнялась  $\omega$ , т. е.  $\omega = p$ . Следовательно, частота колебаний маятника, находящегося на вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$  диске, равна

$$p = \Omega \sqrt{b/l}.$$

244. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} (-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12} (-m_2 \ddot{y}_2 + P); \\ y_2 &= \delta_{21} (-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22} (-m_2 \ddot{y}_2 + P), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{21} = l^3 / (3EJ_x)$ ;  $\delta_{22} = 23l^3 / (12EJ_x)$ ;  $m_1 = 2m$ ;  $m_2 = m$ ;  $P = P_0 \sin \omega t$ . (При решении считаем  $GJ_k = 0,8EJ_x$ ).

Решение системы уравнений (1) будем искать в виде

$$y_1 = A_1 \sin \omega t; \quad y_2 = A_2 \sin \omega t. \quad (2)$$

Подставив соотношения (2) в уравнения (1), найдем амплитуды вынужденных колебаний:

$$A_1 = 1,085 P_0 l^3 / (EJ_x); \quad A_2 = 5,02 P_0 l^3 / (EJ_x).$$

Вычислим теперь силы, действующие в точках закрепления масс:

$$F_1 = -m_1 \ddot{y}_1 = 2mA_1\omega^2 \sin \omega t = 0,8P_0 \sin \omega t;$$

$$F_2 = P - m_2 \ddot{y}_2 = (P_0 + A_2\omega^2 m) \sin \omega t = 2,94P_0 \sin \omega t.$$

Опасным сечением рамы является сечение заделки. Амплитудные значения изгибающего и крутящего моментов в этом сечении равны

$$M_{и0} = (F_{10} + F_{20})l = 3,74P_0l;$$

$$M_{к0} = F_{20}l = 2,94P_0l.$$

В соответствии с теорией наибольших касательных напряжений эквивалентное напряжение в опасной зоне равно

$$\sigma_э = (1/W_x) \sqrt{M_{и0}^2 + M_{к0}^2} = 4,75P_0/W_x,$$

где  $W_x = \pi d^3/32$  — момент сопротивления при изгибе бруса круглого поперечного сечения.

Из условия прочности  $\sigma_{э\max} < \sigma_{ТР}/n_T$  находим, что допускаемая амплитуда переменной возмущающей силы равна  $P_0 \approx 106$  Н.

245. Решение этой задачи аналогично решению задачи 234.

Поскольку  $\delta_1 = \delta_{12} = l/(GJ_p)$ , а  $\delta_{22} = 2\delta_{11} = 2l/(GJ_p)$ , то амплитуды установившихся колебаний дисков равны

$$A_1 = -\delta_{11}M_0; \quad A_2 = \delta_{12}M_0.$$

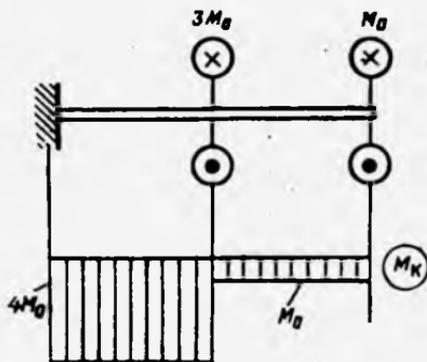


Рис. 287

Найдем максимальные значения моментов, действующих на вал:

$$M_{10} = M_0 + A_1\omega^2 J_1 = -3M_0;$$

$$M_{20} = A_2\omega^2 J_2 = -M_0.$$

На рис. 287 изображена эпюра кротящих моментов от действия на вал моментов  $M_{10}$  и  $M_{20}$ .

Наибольшее касательное напряжение

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= M_{\max} / (0,2d^3) = 4M_0 / (0,2d^3) = \\ &= 4 \cdot 5 / 0,2 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Коэффициент

$$n_T = \tau_T / \tau_{\max} = 200 / 100 = 2.$$

**246.** Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний аналогичны уравнениям свободных колебаний в задаче 215, за исключением четвертого уравнения, которое в правой части содержит возмущающий момент  $M$ . Решение этой системы уравнений удобно искать в форме  $\varphi_i = B_i \sin \omega t$ , что позволяет получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(c - J\omega^2)B_1 - cB_2 &= 0; \\ -cB_1 + (2c - J\omega^2)B_2 - cB_3 &= 0; \\ -cB_2 + (2c - J\omega^2)B_3 - cB_4 &= 0; \\ -cB_3 + (c - 2J\omega^2)B_4 &= M_0.\end{aligned}$$

После решения этой системы получаем следующие значения для углов закручивания:  $B_1 = 0,373M_0/c$ ;  $B_2 = 9,274M_0/c$ ;  $B_3 = -0,841M_0/c$ ;  $B_4 = -0,352M_0/c$ . Отсюда следует, что амплитудные значения крутящих моментов на участках вала равны

$$\begin{aligned}M_{12} &= c(B_1 - B_2) = 0,102M_0; \\ M_{23} &= c(B_2 - B_3) = 1,112M_0; \\ M_{34} &= c(B_3 - B_4) = -1,193M_0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_{\max} = |M_{34}|.$$

**247.** Решение аналогично решению задачи 256.

Амплитуды вынужденных колебаний дисков имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}B_1 &= 3,08M_0/c; \quad B_2 = 1,135M_0/c; \\ B_3 &= -0,1M_0/c; \quad B_4 = -0,02M_0/c.\end{aligned}$$

Отсюда амплитуды крутящих моментов

$$M_{12} = 1,945M_0; \quad M_{23} = 1,235M_0; \quad M_{34} = -0,19M_0.$$

Наибольшее касательное напряжение в вале

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= M_{\max} / W_p = 1,945M_0 / W_p = 1,945 \cdot 300 / 0,2 \times \\ &\times 64 \cdot 10^{-6} = 45,5.\end{aligned}$$

**248.** На рис. 288, *a* изображено произвольное отклонение системы от положения равновесия. Удлинения верхней и нижней ветвей упругой связи соответственно равны

$$\Delta l_1 = R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2; \quad \Delta l_2 = -R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2.$$

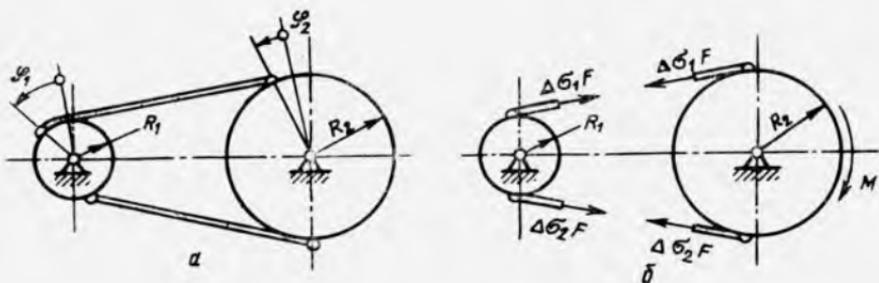


Рис. 288

Дополнительные напряжения в ветвях связи можно определить из соотношений

$$\Delta l_1 = \Delta \sigma_1 l / E; \quad \Delta l_2 = \Delta \sigma_2 l / E.$$

На рис. 288, б изображены шкивы с действующими на них дополнительными усилиями. Из рассмотрения равновесия шкивов следует, что

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + R_1 F (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2) = 0;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + R_2 F (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_1) = M.$$

После преобразований получаем

$$\ddot{\varphi}_1 + a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 = M / J_2,$$

где

$$a_{11} = 2R_1 EF / (J_1 l); \quad a_{12} = -2R_1 R_2 EF / (J_1 l);$$

$$a_{21} = -2R_1 R_2 EF / (J_2 l); \quad a_{22} = 2R_2 RE F / (J_2 l).$$

Полагая  $\varphi_1 = Ae^{ipt}$  и  $\varphi_2 = Be^{ipt}$ , после преобразований (см. задачу 188) находим собственные частоты:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{\frac{2EF}{l} \left( \frac{R_1^2}{J_1} + \frac{R_2^2}{J_2} \right)}, \quad p_2 = 187 \text{ с}^{-1}$$

(нулевой корень соответствует малому повороту шкивов в одну сторону; при этом дополнительные напряжения в связях не возникают).

Для определения амплитуд малых вынужденных колебаний шкивов получаем следующие выражения:

$$\varphi_{10} = -\frac{M_0 a_{12}}{J_2 [(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12} a_{21}]};$$

$$\varphi_{20} = \frac{M_0 (a_{11} - \omega^2)}{J_2 [(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12} a_{21}]}.$$

После подстановки исходных значений и соответствующих преобразований получаем  $\varphi_{10} = -0,595 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varphi_{20} = 0,51 \cdot 10^{-4} M_0$ .

Полные напряжения в ветвях упругой связи равны

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_1 = \sigma_0 + E(R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2)/l;$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \Delta\sigma_2 = \sigma_0 + E(R_2\varphi_2 - R_1\varphi_1)/l,$$

или  $\sigma_1 = \sigma_0 = -0,0269 M_0 \sin \omega t$ ;  $\sigma_2 = \sigma_0 + 0,0269 M_0 \sin \omega t$ . Напряжение в одной из ветвей равно нулю при  $M_0 = 73,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

249. Дифференциальные уравнения малых вынужденных колебаний имеют следующий вид (см. решение задачи 224):

$$\ddot{\varphi}_1 + R_1^2 E a_3 \varphi_1 / J_1 - R_1 R_2 F a_3 \varphi_2 / J_1 = 0;$$

$$\varphi_2 - R_1 R_2 a_3 \varphi_1 / J_2 + R_2^2 F a_3 \varphi_2 / J_2 = M_0 \sin \omega t.$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде  $\varphi_1 = \varphi_{10} \sin \omega t$ ,  $\varphi_2 = \varphi_{20} \sin \omega t$ , поэтому

$$\varphi_{10} = \frac{M_0 R_1 R_2 F a_3}{J_1 J_2 \omega^2 [\omega^2 - (R_1^2 F / J_1 + R_2^2 F / J_2) a_3]};$$

$$\varphi_{20} = \frac{M_0 (\omega^2 - R_1^2 a_3 / J_1)}{J_2 \omega^2 [\omega^2 - (R_1^2 F / J_1 + R_2^2 F / J_2) a_3]}.$$

Изменение напряжений в ветвях передачи связано с удлинением ветвей (см. задачу 224):

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta l_1}{a_1} = \frac{R_1 \varphi_{10} - R_2 \varphi_{20}}{a_1} \sin \omega t;$$

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\Delta l_2}{a_2} = \frac{R_2 \varphi_{20} - R_1 \varphi_{10}}{a_2} \sin \omega t.$$

Таким образом, законы изменения полных напряжений в ветвях передачи будут следующими:

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + \Delta\sigma_{10} \sin \omega t;$$

$$\sigma_2 = \sigma_{20} + \Delta\sigma_{20} \sin \omega t.$$

250. Дифференциальные уравнения движения маховиков 2 и 3 представим в виде

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 - M_T &= M_0 \sin \omega t; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2 + M_T &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота маховиков;  $c_1 \varphi_1$  и  $c_2 \varphi_2$  — силы упругого сопротивления;  $M_T$  — момент сил трения между поверхностями маховиков.

Между моментом сил кулонова трения и распределенным нормальным давлением  $p_n$  имеется зависимость

$$M_T = \int_{F_K} \varphi p_n \rho dF,$$

где  $F_K$  — площадь поверхности трения (контактная поверхность);  $p_n = N/F_K$ ;  $\rho$  — полярная координата площадки  $dF$ ,  $N$  —

сила **нормального** давления, равная  $N_0 + \Delta N$ ;  $N_0 = \delta_0 / \delta_{11}$  — сила предварительного сжатия пружины;  $\Delta N$  — динамическая составляющая силы нормального давления.

Вычислим жесткости упругих элементов системы. Жесткость валика

$$c_1 = GJ_\rho / l_1 = \pi d_1^4 G / (32 l_1).$$

В процессе колебаний нормальное давление периодически изменяется, что связано с удлинением (укорочением) пружины при ее закручивании.

Найдем связь между углом поворота маховика  $\varphi_2$  и изменением силы нормального давления  $\Delta N$ . Поскольку высота пружины (ее предварительная осадка  $\delta_0$ ) при повороте маховика  $Z$  на угол  $\varphi_2$  не изменяется, уравнения перемещений представим в виде

$$\delta_{1P} + \Delta N \delta_{11} = 0; \tag{2}$$

$$\delta_{2P} + \Delta N \delta_{21} = \varphi_2,$$

где  $\delta_{1P}$  и  $\delta_{11}$  — осадка свободной пружины от действия внешнего момента  $M$  и единичной осевой силы соответственно;  $\delta_{2P}$  и  $\delta_{21}$  — углы закручивания свободной пружины от тех же сил.

В соответствии с методом Мора

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{M_{iK} M_{jK}}{GJ_\rho} ds + \int_s \frac{M_{iN} M_{jN}}{EJ_x} ds.$$

Учитывая, что  $M_{PK} = M \sin \alpha$ ,  $M_{PN} = M \cos \alpha$ ,  $M_{2K} = \sin \alpha$ , и считая, что длина проволоки пружины  $s = \pi D_i / \cos \alpha$  (где  $i$  — число витков пружины), найдем

$$\delta_{1P} = \frac{\pi D^2 M l}{4} \left( \frac{1}{GJ_\rho} + \frac{1}{EJ_x} \right) \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha};$$

$$\delta_{11} = \frac{\pi D^2 l}{4} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ_x} \right) \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\delta_{2P} = \pi D M l \left( \frac{\sin^2 \alpha}{GJ_\rho} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ_x} \right) \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\delta_{21} = \frac{\pi D l^2}{4} \left( \frac{1}{GJ_\rho} + \frac{1}{EJ_x} \right) \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Из уравнений (2) имеем

$$\Delta N = - \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = - \frac{M}{D} \frac{(EJ_x + GJ_\rho) \sin 2\alpha}{EJ_x \cos^2 \alpha + GJ_\rho \sin^2 \alpha};$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \delta_{2P} - \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \delta_{21} = & \frac{\pi D M l}{EJ_x GJ_\rho} \left[ EJ_x \sin^2 \alpha + \right. \\ & \left. + GJ_\rho \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \frac{(EJ_x + GJ_\rho)^2 \sin^2 \alpha}{EJ_x \cos^2 \alpha + GJ_\rho \sin^2 \alpha} \right] \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Считая угол  $\alpha$  малым ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ ;  $\sin^2 \alpha = 0$ ), получаем

$$\Delta N = \frac{M}{D} \frac{EJ_x + GJ}{EJ_x} \rho 2\alpha;$$

$$\varphi_2 = \pi D M_l / (EJ_x).$$

Введем обозначения:  $c_2 = M/\varphi_2$ ;  $n_1 = \Delta N/\varphi_2$ .

Найдем выражение для момента сил трения:

$$M_T = \int_{\tilde{F}_K} \rho p_n \mu dF = p_n \mu \int_{d_1/2}^{D_1/2} 2\pi \rho^2 d\rho = \frac{\pi \mu p_n}{12} (D_1^3 - d_1^3),$$

или

$$M_T = \mu (N_0 + \Delta N) (D_1^3 - d_1^3) / [3 (D_1^2 - d_1^2)].$$

При выводе уравнений движения (1) необходимо учесть, что момент сил кулонова трения  $M_T$  всегда направлен против относительной скорости движения маховиков, т. е. знак момента сил трения определяется знаком разности  $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ .

Окончательно дифференциальные уравнения колебаний маховиков имеют вид

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \dot{\varphi}_1 + \text{sign} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \frac{D_1^3 - d_1^3}{D_1^2 - d_1^2} (N_0 + n_1 \varphi_2) = M_0 \sin \omega t;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \dot{\varphi}_2 - \text{sign} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \frac{\mu}{3} \frac{D_1^3 - d_1^3}{D_1^2 - d_1^2} (N_0 + n_1 \varphi_2) = 0.$$

251. Дифференциальные уравнения движения маховиков представим в виде

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + \alpha_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_1 \varphi_1 = M_0 \sin \omega t;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + \alpha_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_2 \varphi_2 = 0, \quad (1)$$

где  $c_1 = \pi d_1^4 G / (32 I_1)$ ;  $c_2 = d^4 E / (64 D l)$ .

Из второго уравнения системы (1) получаем

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{\alpha_1} (J_2 \ddot{\varphi}_2 + \alpha_1 \dot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2). \quad (2)$$

Продифференцируем один раз первое уравнение системы (1) и подставим в него выражение (2):

$$\frac{J_1 J_2}{\alpha_1} \ddot{\varphi}_2 + (J_1 + J_2) \dot{\varphi}_2 + \frac{J_1 c_2 + J_2 c_1}{\alpha_1} \varphi_2 +$$

$$+ (c_1 + c_2) \dot{\varphi}_2 + \frac{c_1 c_2}{\alpha_1} \varphi_2 = M_0 \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$\varphi_2 = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \quad (4)$$

Подставив (4) в выражение (3), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left( \frac{J_1 J_2}{\alpha_1} \omega^4 - \frac{J_1 c_2 + J_2 c_1}{\alpha_1} \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{\alpha_1} \right) A_2 - [(J_1 + J_2) \omega^3 + (c_1 + c_2) \omega] B_2 = 0; \\ \left( \frac{J_1 J_2}{\alpha_1} \omega^4 - \frac{J_1 c_1 + J_2 c_2}{\alpha_1} \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{\alpha_1} \right) B_2 - \\ - [(J_1 + J_2) \omega^3 - (c_1 + c_2) \omega] A_2 = M_0 \omega, \end{aligned}$$

из которой определим  $A_2$  и  $B_2$  (выполнить самостоятельно).

Амплитудное отклонение маховика 3 от положения равновесия равно

$$\varphi_{20} = \sqrt{E_1^2 + B_1^2}.$$

Используя решение задачи 250, найдем внутренние силы в пружине:

$$\begin{aligned} M = \frac{E J_x}{\pi D_i} \varphi_{20}; \quad N = N_0 + \Delta N = \frac{\delta_0}{\delta_{11}} + \frac{M E J_x + K J \rho}{D E J_r} 2\alpha = \\ = \delta_0 \frac{4 G J \rho}{\pi D^2 i} + \varphi_{20} \frac{E J_x + G J \rho}{\pi D^2 i} 2\alpha, \end{aligned}$$

где  $\delta_0$  — предварительный натяг пружины.

Отсюда наибольшие напряжения в пружине:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = M / W_x = E \varphi_{20} / (2\pi); \\ \tau_{\max} = \frac{8ND}{\pi d^3} = \delta_0 \frac{dG}{\pi D^2 i} + \varphi_{20} \frac{(E + 2G)d}{\pi D i} \alpha. \end{aligned}$$

Из уравнения (2) можно записать

$$\varphi_1 = \frac{1}{\alpha_1} \int (J_2 \ddot{\varphi}_2 + \alpha \dot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2) dt,$$

т. е.

$$\varphi_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t,$$

где  $A_1 = \left( J_2 \omega + \frac{C_2}{\omega} \right) \frac{B_2}{\alpha_1} + A_2$ ;  $B_1 = B_2 - \left( J_2 \omega + \frac{c_2}{\omega} \right) \frac{A_2}{\alpha_1}$ .

Амплитуда колебаний маховика 2 равна

$$\varphi_{10} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2},$$

а наибольшие напряжения в валике

$$\tau_{\max} = 32 c_1 \varphi_{10} / (\pi d_1^3).$$

252. Воспользовавшись принципом Даламбера, получим следующие дифференциальные уравнения малых колебаний диска и кольца:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c\dot{\varphi}_1 + \alpha(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= M_0 \sin \omega t, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + \alpha(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\varphi_1 = A \sin \omega t + B \cos \omega t; \quad \varphi_2 = C \sin \omega t + D \cos \omega t.$$

Для определения произвольных постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  составим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} (C - J_1 \omega^2)A - \alpha \omega B + \alpha \omega D &= M_0; \\ \alpha \omega A + (c - J_1 \omega^2)B - \alpha \omega C &= 0; \\ -\alpha \omega B - J_2 \omega^3 C - \alpha \omega D &= 0; \\ -\alpha \omega A - \alpha \omega C - J_2 \omega^3 D &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из системы (2) получаем

$$\begin{aligned} A &= M_0 [(c - J_1 \omega^2)(J_2^2 \omega^4 + \alpha^2 \omega^2) - J_2 \alpha^2 \omega^4] / \Delta \\ B &= M_0 \alpha J_2^2 \omega^5 / \Delta; \\ C &= M_0 [(c - J_1 \omega^2) \alpha^2 \omega^2 - J_2 \alpha^2 \omega^4] / \Delta; \\ D &= M_0 J_2 \alpha \omega^3 (c - J_1 \omega^2) / \Delta, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} c - J_1 \omega^2 & -\alpha \omega & 0 & \alpha \omega \\ \alpha \omega & -c - J_1 \omega^2 & -\alpha \omega & 0 \\ 0 & \alpha \omega & -J_2 \omega^2 & -\alpha \omega \\ -\alpha \omega & 0 & \alpha \omega & -J_2 \omega^2 \end{vmatrix}$$

Амплитуды установившихся колебаний диска и кольца соответственно равны

$$\varphi_{10} = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \varphi_{20} = \sqrt{C^2 + D^2}.$$

253. На рис. 289 изображена расчетная схема конструкции. Выражения для кинетической и потенциальной энергии системы и для диссипативной функции Релея имеют вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{2} + \frac{J_0 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2}; \\ \Pi &= \frac{c(l\varphi - y_1)^2}{2} + \frac{c_1(y_1 - h)^2}{2}; \\ R &= \frac{\alpha(l\dot{\varphi} - \dot{y}_1)^2}{2}. \end{aligned}$$

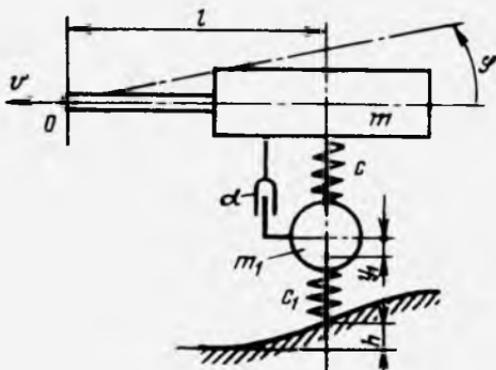


Рис. 289

Подставив эти выражения в уравнения Лагранжа, имеем:

$$J_0 \ddot{\varphi} + \alpha l (\dot{\varphi} - \dot{y}_1) + cl (\varphi - y_1) = 0;$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - \alpha (\dot{\varphi} l - \dot{y}_1) - c (\varphi - y_1) + c_1 (y_1 - h) = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n \dot{\varphi} + p_0^2 \varphi - \frac{2n}{l} \dot{y}_1 - \frac{p_0^2}{l} y_1 = 0;$$

$$\ddot{y}_1 + 2n_1 \dot{y}_1 + p_{10}^2 y_1 + p_{20}^2 y_1 - 2n_1 l \dot{\varphi} - p_{10}^2 l \varphi = p_{20}^2 h,$$

где  $2n = \alpha l^2 / J_0$ ;  $2n_1 = \alpha / m_1$ ;  $p_0^2 = cl^2 / J_0$ ;  $p_{10}^2 = c / m_1$ ;  $p_{20}^2 = c_1 m_1$ .

При отсутствии силы трения ( $\alpha = 0$ ) частоты собственных колебаний

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{p_0^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2}{2}\right)^2 - p_0^2 p_{20}^2},$$

а критические скорости буксирования

$$v_{1*} = l_1 p_1 / (2\pi); \quad v_{2*} = l_1 p_2 / (2\pi).$$

254. Потенциальная энергия деформации рессор при движении машины по неровной дороге равна

$$\Pi = \frac{c_1}{2} (y + \varphi l_1 - h_1)^2 + \frac{c_2}{2} (y - \varphi l_2 - h_2)^2, \quad (1)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — подъем переднего и заднего колеса при движении автомобиля соответственно.

Учитывая, что положение автомобиля на дороге определяется координатой  $x=vt$ , а расстояние между осями машины  $L=l_1+l_2$ , получаем

$$\begin{aligned} h_1 &= h_0(1 - \cos 2\pi vt/l_0); \\ h_2 &= h_0(1 - \cos 2\pi(vt + L)/l_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = m\dot{y}^2/2 + J\dot{\varphi}^2/2 + mv^2/2. \quad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) получаем дифференциальные уравнения малых колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \frac{c_1 + c_2}{m} y + \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{m} \varphi &= \frac{c_1 h_2 + c_2 h_1}{m}; \\ \varphi + \frac{c_1 l_1 + c_2 l_2}{J} y + \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{J} \varphi &= \frac{c_1 l_1 h_1 + c_2 l_2 h_2}{J}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) удобнее представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_{11}y + a_{22}\varphi &= b_1 - b_2 \cos \frac{2\pi vt}{l_0} + b_3 \sin \frac{2\pi vt}{l_0}; \\ \ddot{\varphi} + a_{21}y + a_{22}\varphi &= b_1' - b_2' \cos \frac{2\pi vt}{l_0} + b_3' \sin \frac{2\pi vt}{l_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= (c_1 + c_2) h_0/m; & b_2 &= \frac{h_0}{m} (c_1 + c_2 \cos \frac{2\pi L}{l_0}); \\ b_3 &= \frac{h_0}{m} c_2 \sin \frac{2\pi L}{l_0}; & b_1' &= (c_1 l_1 + c_2 l_2) h_0/J; \\ b_2' &= \frac{h_0}{J} (c_1 l_1 + c_2 l_2 \cos \frac{2\pi L}{l_0}); & b_3' &= \frac{h_0}{J} c_2 l_2 \sin \frac{2\pi L}{l_0}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \cos \frac{2\pi vt}{l_0} + B \sin \frac{2\pi vt}{l_0}; \\ \varphi &= \varphi_0 + A_1 \cos \frac{2\pi vt}{l_0} + B_1 \sin \frac{2\pi vt}{l_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} y_0 &= (b_1 a_{22} - b_1' a_{12})/\Delta_1, & A &= [a_{12} b_1' - b_2 (a_{22} - \omega^2)]/\Delta; \\ B &= [b_3 (a_{22} - \omega^2) - a_{12} b_3']/\Delta; & \varphi_0 &= (a_{11} b_1' - a_{21} b_1)/\Delta_1; \\ A_1 &= [a_{21} b_2 - b_2' (a_{11} - \omega^2)]/\Delta; & B_1 &= [b_3' (a_{11} - \omega^2) - a_{21} b_3]/\Delta; \\ \Delta_1 &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}; & \Delta &= (a_{11} - \omega^2) (a_{22} - \omega^2) - a_{12} a_{21}; & \omega &= 2\pi v/l_0. \end{aligned}$$

Выражения (6) можно представить так:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \beta); \\ \varphi &= \varphi_0 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin(\omega t + \beta), \end{aligned}$$

тогда выражения для амплитуд вертикального и углового ускорений будут следующие:

$$\ddot{y}_0 = \left( \frac{2\pi\nu}{l_0} \right)^2 \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$\ddot{\varphi}_0 = \left( \frac{2\pi\nu}{l_0} \right) \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

После подстановки числовых значений получаем  $\ddot{y}_0 = 7,5 \text{ м/с}^2$ ,  $\ddot{\varphi}_0 = 0,2 \text{ рад/с}^2$ .

255. Так как в рассмотренной системе (см. решение задачи 254) затухание не учитывается, критические скорости движения соответствуют случаям резонанса, т. е.

$$v_{1*} = l_0 p_1 / 2\pi; \quad v_{2*} = l_0 p_2 / 2\pi,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — частоты собственных колебаний.

256. При движении автомобиля по неровной дороге пружины с жесткостью  $c$  и  $2c$ , характеризующие податливость шин передних и задних колес, получают дополнительные сжатия  $h_1$  и  $h_2$ . Следовательно, в выражении для потенциальной энергии, приведенном в решении задачи 222, последние два слагаемые будут такими:  $c(y_1 - h_1)^2$  и  $2c(y_2 - h_2)^2/2$ .

Так как расстояние между осями автомобиля равно  $a + b = l_1 + l_2$ , то

$$h_1 = h_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi\nu t}{l_0} \right); \quad h_2 = h_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi(\nu t + a + b)}{l_0} \right).$$

Дифференциальные уравнения движения автомобиля по дороге с периодическими неровностями совпадают с уравнениями свободных колебаний, полученными в задаче 222, кроме двух последних, которые не являются однородными и правые части которых соответственно равны  $ch_1$  и  $2ch_2$ .

257. Пусть  $m = m_0 + m_1(1 - t/t_1)$  — суммарная масса сосуда и находящейся в нем жидкости. Дифференциальные уравнения движения массы  $m$  имеют вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = ce \cos \omega t;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = ce \sin \omega t,$$
(1)

где  $e$  — отклонение массы  $m$  от положения равновесия.

Введем следующие обозначения  $m_H = m_0 + m_1$  — суммарная масса при  $t = 0$ ;  $\tau = m_1 t / [(m_0 + m_1)t_1]$  — безразмерное время.

Тогда уравнения (1) можно представить в виде

$$\ddot{x} + \frac{e}{m_H(1-\tau)} x = \frac{ec \cos \omega t}{m_H(1-\tau)},$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m_H(1-\tau)} y = \frac{ec \sin \omega t}{m_H(1-\tau)}.$$
(2)

Учитывая, что  $dt = m_H t_1 d\tau / m_1$  и  $p^2 = c/m_H$ , заменим в уравнениях системы (2) дифференцирование по  $t$  дифференцированием по  $\tau$ :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{x}{1-\tau} = e p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{\cos \frac{m_H}{m_1} t_1 \tau \omega}{1-\tau};$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{y}{1-\tau} = e p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{\sin \frac{m_H}{m_1} t_1 \tau \omega}{1-\tau}.$$

Переходя к безразмерным координатам  $x_1 = x/e$  и  $y_1 = y/c$ , окончательно получаем

$$\ddot{x}_1 + p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{x_1}{1-\tau} = \frac{p^2}{1-\tau} \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right) \cos \omega \frac{m_H}{m_1} t_1 \tau;$$

$$\ddot{y}_1 + p^2 \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right)^2 \frac{y_1}{1-\tau} = \frac{p^2}{1-\tau} \left( \frac{m_H}{m_1} t_1 \right) \sin \omega \frac{m_H}{m_1} t_1 \tau.$$

258. Дифференциальные уравнения движения груза получены в решении задачи 202 и имеют вид

$$\ddot{u} + \frac{l}{4} \ddot{\varphi} + \frac{c}{m} (u - \varphi l) = 0;$$

$$\ddot{u} + \frac{5}{4} l \ddot{\varphi} + 4 \frac{c}{m} (\varphi l - u) = 0. \quad (1)$$

Решая уравнения (1) при указанных начальных условиях, получаем уравнения движения системы:

$$u = \frac{20}{29} \frac{J}{m} t + \frac{9}{29} \frac{J}{m p_2} \sin p_2 t;$$

$$\varphi = \frac{20}{29} \frac{J}{m l} t - \frac{20}{29} \frac{J}{m l p_2} \sin p_2 t, \quad (2)$$

где  $p_2 = \sqrt{29c/(5m)}$ .

Движение центра тяжести груза при этом описывается уравнением

$$u_0 = u + \frac{1}{4} \varphi l = \frac{25}{29} \frac{J}{m} t + \frac{4}{29} \frac{J}{m p_2} \sin p_2 t.$$

Вычислим силы инерции, действующие на груз:

$$F = -m \ddot{u}_0 = \frac{4}{29} J p_2 \sin p_2 t;$$

$$M = -J \ddot{\varphi} = -\frac{5}{29} J l p_2 \sin p_2 t.$$

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении А стержня (рис. 290) и равен

$$M_{\max} = M + \frac{Fl}{4} = \frac{4}{29} J p_2 l = 0,643 J \sqrt{E J_x / (m l)}.$$

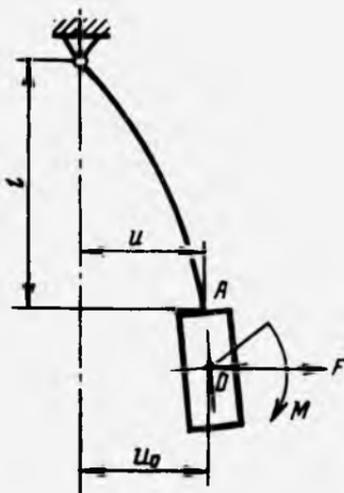


Рис. 290

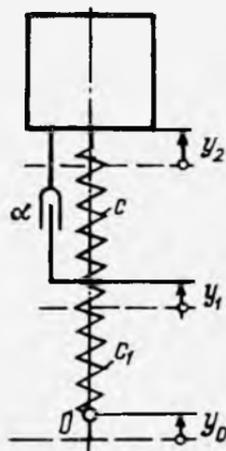


Рис. 291

259. Запишем дифференциальные уравнения движения маховика и контактного кольца:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + \alpha_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_2\varphi_1 &= M_0 \sin \omega t; \\ \alpha_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_1\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота маховика и кольца.

Решение уравнений (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t; \\ \varphi_2 &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив выражения (2) в уравнения (1), находим

$$A_2 = \frac{c_1 + c_2 - J\omega^2}{D} M_0; \quad B_2 = \frac{c_1 - J\omega^2}{D} \frac{c}{\alpha_1 \omega} M_0,$$

где  $D = (c_1 + c_2 - J\omega^2)^2 + (c_1 - J\omega^2)^2 c_2^2 (\alpha_1^2 \omega^2)$ .

Амплитуда установившихся колебаний

$$\Phi_{20} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}.$$

260. Решение аналогично решению задачи 259. Уравнение вертикальных колебаний будет следующим:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= F_0 \{ [1 + 16c_2^2 / (\alpha^2 \omega^2)] (c_1 - m\omega^2) + 4c_2 \} / D; \\ A_2 &= -F_0 16c_2^2 / (D\alpha\omega); \quad D = 4c_2^2 (c_1 - m\omega^2)^2 / (\alpha^2 \omega^2) + \\ &\quad + (c_1 + 4c_2 - m\omega^2)^2. \end{aligned}$$

261. На рис. 291 показано положение сиденья с водителем в произвольный момент времени.

Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  имеет вид

$$m\ddot{y}_2 + \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c(y_2 - y_1) = 0. \quad (1)$$

Второе уравнение получим, рассмотрев равновесие системы подвески (считая пружины и демпфер невесомыми);

$$c_1(y_1 - y_0) = c(y_2 - y_1) + \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1). \quad (2)$$

Систему уравнений (1) и (2) можно представить в виде

$$\ddot{y}_2 + 2n\dot{y}_2 + p_0^2 y_2 - 2n\dot{y}_1 - p_0^2 y_1 = 0; \quad (3)$$

$$2n\dot{y}_2 + p_0^2 y_2 - 2n\dot{y}_1 - p_0^2 y_1 - p_1^2 y_1 = -p_1^2 y_0,$$

где  $2n = \alpha/m$ ;  $p_0^2 = c/m$ ;  $p_1^2 = c_1/m$ .

Для нахождения передаточных функций перейдем к изображению по Лапласу. При нулевых начальных данных из уравнений системы (3) получаем

$$(p_2 + 2np + p_0^2) Y_2(p) - (2np + p_0^2) Y_1(p) = 0;$$

$$(2np + p_0^2) Y_2(p) - (2np + p_0^2 + p_1^2) Y_1(p) = -p_1^2 Y_0(p).$$

Передаточная функция между возмущением (вход) и перемещением массы (выход) равна

$$W(p) = \frac{p_1^2 (2np + p_0^2 + p_1^2)}{2np^3 + (p_0^2 + p_1^2)p^2 + 2np_1^2 p + p_0^4 + p_0^2 p_1^2}.$$

Спектральная плотность ускорения  $y_2$  равна

$$S_{\ddot{y}_2} = \omega^4 S_{y_2},$$

а спектральная плотность вертикального смещения —

$$S_{y_2}(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_{y_0}(\omega).$$

Для определения спектральной плотности перемещения  $y_2$  необходимо найти  $S_{y_0}$  по известной корреляционной функции

$$\begin{aligned} S_{y_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{y_0}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= D_{y_0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1 - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1 + i\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{2D_{y_0}\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

После преобразований выражение для  $S_{y_2}$  можно представить в виде

$$S_{y_2} = \frac{2}{\Delta} D_{y_0} \alpha_1 p_1^4 [-4n^2 (i\omega)^6 + (i\omega^4) (p_0^2 + p_1^2)],$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta &= |2n(i\omega)^4 + (2n\alpha_1 + p_0^2 + p_1^2)(i\omega)^3 + \\ &+ [\alpha_1(p_0^2 + p_1^2) + 2np_1^2](i\omega)^2 + [p_1^2(p_0^2 + \\ &+ 2n\alpha_1) + p_0^4] [i\omega + \alpha_1(p_0^4 + p_0^2 p_1^2)]|^2. \end{aligned}$$

Вычислим дисперсию ускорения:

$$D_{\ddot{y}_z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{y}_z} d\omega.$$

Воспользовавшись приложением 2, получаем

$$\sigma_{\ddot{y}_z}^2 = D_{\ddot{y}_z} = \frac{D_{y_0} \alpha_1 p_1^4 [4n^2 (a_1 a_4 - a_2 a_3) - a_0 a_3 (p_0^2 + p_1^2)]}{a_0 (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)},$$

где

$$a_1 = 2n\alpha_1 + p_0^2 + p_1^2; \quad a_4 = \alpha_1 (p_0^4 + p_0^2 p_1^2);$$

$$a_2 = \alpha_1 (p_0^2 + p_1^2) + 2n p_1^2; \quad a_3 = p_1^2 (p_0^2 + 2n\alpha_1) + p_0^4;$$

$$a_0 = 2n.$$

## § 10. Критические состояния и устойчивость колебаний

262. Пусть в произвольный момент времени  $t$  положение центра тяжести диска определяется вектором  $r$  (рис. 292). Воспользуемся для описания движения диска уравнением Лагранжа второго рода.

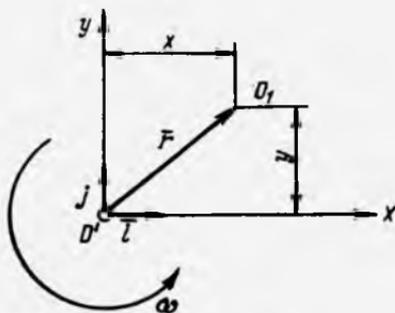


Рис. 292

Кинетическая энергия диска

$$T = m(v_x^2 + v_y^2) / J_0 \omega^2 / 2, \quad (1)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$  — проекции абсолютной скорости центра тяжести диска на оси  $x$  и  $y$ ;  $J_0$  — момент инерции массы диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр тяжести диска (точка  $O_1$ ).

Так как абсолютная скорость движения центра тяжести диска

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + [\bar{\omega} \times \bar{r}],$$

где

$$[\bar{\omega} \times \bar{r}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix},$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты осей, то проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  можно определить как скалярные произведения:

$$\begin{aligned} v_x &= (\bar{v}\bar{i}) = \dot{x} - \omega y, \\ v_y &= (\bar{v}\bar{j}) = \dot{y} + \omega x. \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциальная энергия изгиба вала

$$\Pi = cr^2/2 = c(x^2 + y^2)/2, \quad (3)$$

где  $c = 6EJ_x/l^3$  — жесткость вала.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где  $L = T - \Pi$  — функция Лагранжа.

Подставляя в уравнения (4) выражения для потенциальной (3) и кинетической (1) энергий с учетом соотношений (2), получаем дифференциальные уравнения малых колебаний диска во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (p_0^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} &= 0; \\ \ddot{y} + (p_0^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} &= 0, \end{aligned}$$

где  $p_0^2 = c/m$ .

Приняв  $x = Ae^{ipt}$ ,  $y = Be^{ipt}$ , получим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} (p_0^2 - \omega^2) - p^2 & -2\omega ip \\ 2\omega ip & (p_0^2 - \omega^2) - p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$[(p_0^2 - \omega^2) - p^2]^2 = 4\omega^2 p^2. \quad (5)$$

Из решения уравнения (5) получаем (во вращающейся системе координат) две частоты колебаний диска:

$$p_1 = p_0 - \omega; \quad p_2 = p_0 + \omega.$$

**263.** Положение центра тяжести диска (точка  $O_1$ ) при колебаниях относительно стационарно вращающихся осей  $yO'x$  определяется вектором  $\bar{r}$  (рис. 293), равным

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{e},$$



$y=y_1$ , а также  $\cos\varphi=1$ ;  $\sin\varphi=\varphi$ ;  $x_1\varphi\approx y_1\varphi\approx 0$  (в стационарном режиме считаем, что ось  $x$  направлена по прямой, проходящей через точки  $O''OO_1$ ).

Система уравнений (2) после преобразований и исключения уравнений равновесия диска при стационарном режиме вращения принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (p_0^2 - \omega^2)x_1 - 2\omega\dot{x}_1 &= 0; \\ \ddot{y}_1 + (p_0^2 - \omega^2)y_1 + 2\omega\dot{y}_1 - p_0^2 e\varphi &= 0; \\ \ddot{\varphi} + p_1^2 x_0 \varphi - p_1^2 y_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p_0^2 = c/m$ ,  $p_1^2 = ce/J_0$ .

Следует отметить, что система (3) справедлива как для случая  $\omega < \omega_*$ , так и для случая  $\omega > \omega_*$ .

264. Пусть  $c_x$  — жесткость вала при его изгибе в направлении главной оси инерции  $x$ , а  $c_y$  — в то же в направлении оси  $y$ . Выражение для кинетической энергии системы имеет такой же вид, как и в решении задачи 262, а потенциальная энергия равна

$$\Pi = c_x x^2/2 + c_y y^2/2.$$

Во вращающейся системе координат дифференциальные уравнения малых колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (k_x^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + (k_y^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_x^2 = c_x/m$ ;  $k_y^2 = c_y/m$ .

Принимая  $x = Ae^{ipt}$  и  $y = Be^{ipt}$ , из уравнений (1) получаем

$$p^4 - p^2(k_x^2 + k_y^2 + 2\omega^2) + (k_x^2 - \omega^2)(k_y^2 - \omega^2) = 0, \quad (2)$$

откуда

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2 + 2\omega^2}{2}} \mp \sqrt{\frac{(k_x^2 - k_y^2)^2}{4} + 2\omega^2(k_x^2 + k_y^2)}.$$

В соответствии с представлением решения в виде  $x = Ae^{ipt}$ ,  $y = Be^{ipt}$  движение диска является устойчивым, если  $p_{1,2}$  являются действительными. Если же  $p_{1,2}$  комплексно-сопряженные величины вида  $p_{1,2} = \pm i\lambda$ , то решение содержит функцию  $e^{\lambda t}$ , неограниченно возрастающую во времени, т. е. при некотором значении угловой скорости  $\omega_*$  происходит неограниченный рост амплитуд колебаний и, следовательно, малые колебания являются неустойчивыми. Такая угловая скорость системы и является критической.

Условие появления комплексно-сопряженных корней можно получить из уравнения (2) в виде

$$k_x^2 + k_y^2 + 2\omega^2 - \sqrt{(k_x^2 - k_y^2)^2 + 8\omega^2(k_x^2 + k_y^2)},$$

откуда

$$k_x \leq \omega_* \leq k_y.$$

Из последнего неравенства следует, что имеется целая область значений критических угловых скоростей.

265. Как и в задаче 262, решение удобно вести во вращающейся системе координат. Однако в отличие от указанной задачи в выражение для потенциальной энергии необходимо добавить слагаемое  $\Pi_1 = mgy_1$ , где  $y_1$  — координата центра тяжести диска в неподвижной системе координат  $x_1O_1y_1$  (рис. 294), зависящее от силы тяжести.

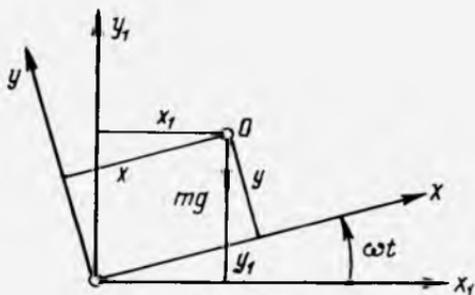


Рис. 294

Переходя к вращающейся системе координат  $xO_1y$ , получаем

$$\Pi_1 = mg(x\sin\omega t + y\cos\omega t).$$

Полная потенциальная энергия будет равна

$$\Pi = c(x^2 + y^2)/2 + mg(x\sin\omega t + y\cos\omega t),$$

где  $c = 2E\pi d^4/4l^3$ .

Выражение для кинетической энергии останется тем же, что и в задаче 262, поэтому дифференциальные уравнения движения будут следующими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} + g\sin\omega t &= 0; \\ \ddot{y} + (k^2 + \omega^2)y + 2\omega\dot{x} + g\cos\omega t &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k^2 = c/m$ .

Решение уравнений (1) для установившихся колебаний будем искать в виде  $x = A\sin\omega t$ ,  $y = B\cos\omega t$ . (2)

Подставляя эти выражения в уравнения (1), получаем неоднородную систему уравнений для определения  $A$  и  $B$ , из которой находим  $A = B = -g/k^2$ .

Критическое значение угловой скорости найдем из условия равенства нулю определителя однородной системы уравнений. Окончательно получаем  $\omega_* = k/2$ .

266. Дифференциальные уравнения движения во вращающейся системе координат (см. решение задачи 265) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (k_x^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} &= -g \sin \omega t; \\ \ddot{y} + (k_y^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} &= g \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_x^2 = 4Ebh^3 / (ml^3)$ ,  $k_y^2 = 4Ehb^3 / (ml^3)$ .

Если решение уравнений (1) искать в виде  $x = A \sin \omega t$ ,  $y = B \cos \omega t$ , то амплитуды установившихся колебаний будут следующими:

$$A = -g \frac{k_x^2 - 4\omega^2}{k_x^2 k_y^2 - 2\omega^2 (k_x^2 + k_y^2)}; \quad B = -g \frac{k_x^2 - 4\omega^2}{k_x^4 k_y^2 - 2\omega^2 (k_x^2 + k_y^2)}$$

Критическая угловая скорость валика

$$\omega_* = \sqrt{k_x^2 k_y^2 / [2(k_x^2 + k_y^2)]}.$$

Кроме того, имеется область критических скоростей, полученная при решении задачи 264.

267. При вращении изогнутого валика с угловой скоростью относительно оси  $AB$  (рис. 295) на отклоненный и повернутый

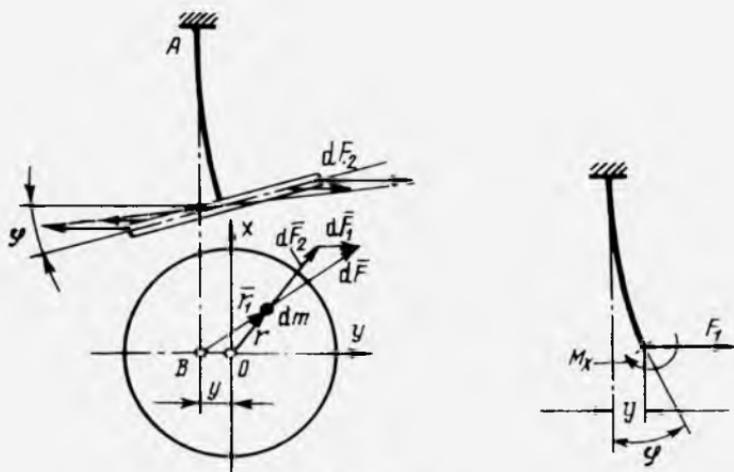


Рис. 295

диск действуют силы инерции, перпендикулярные оси  $AB$ . При этом полная сила инерции, действующая на элементарную массу  $dm$ , равна

$$dF = dm\omega^2 \bar{r}_1.$$

Учитывая, что  $\bar{r}_1 = \bar{r} + y$ , представим силу инерции  $dF$  в виде суммы двух составляющих:

$$d\bar{F} = d\bar{F}_1 + d\bar{F}_2,$$

где  $d\bar{F}_1 = dm\omega^2 y$ ,  $d\bar{F}_2 = dm\omega^2 \bar{r}$ .

Равнодействующая сила  $d\vec{F}_1$  равна  $m\omega^2 y$  и направлена вдоль оси  $Oy$ . Сила  $d\vec{F}_2$  создает момент относительно оси  $Ox$ , препятствующий повороту диска. Поскольку угол поворота диска относительно оси  $x$  мал, момент силы  $d\vec{F}_2$  равен

$$M_x = \omega^2 \varphi \int_m y^2 dm = \omega^2 \varphi J,$$

где  $J$  — момент инерции массы диска относительно оси вращения.

Таким образом, со стороны диска на валик действуют сила  $F_1$  и момент  $M_x$ .

Воспользовавшись методом сил, получим уравнения смещений точки крепления диска:

$$y = \delta_{11} m \omega^2 y - \delta_{12} \omega^2 J \varphi; \quad \varphi = \delta_{21} m \omega^2 y - \delta_{22} \omega^2 J \varphi,$$

или

$$(1 - \delta_{11} m \omega^2) y + \delta_{12} \omega^2 J \varphi = 0; \tag{1}$$

$$\delta_{21} m \omega^2 y - (1 + \delta_{22} \omega^2 J) \varphi = 0,$$

где  $\delta_{11} = l^3 / (3SJ_x)$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21} = -l^2 / (2EJ_x)$ ,  $\delta_{22} = l / (EJ_x)$ ,  $J_x = \pi d^4 / 64$  — момент инерции площади поперечного сечения валика.

Из равенства нулю определителя системы (1) найдем уравнение для критической угловой скорости валика:

$$\omega^4 + \frac{12EJ_x}{Jml^3} \left( \frac{ml^2}{3} - J \right) \omega^2 - \frac{12}{Jm} \left( \frac{EJ_x}{l^2} \right)^2 = 0, \tag{2}$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{6EJ_x}{Jml^3} \left( J - \frac{ml^2}{3} \right) + \sqrt{\left[ \frac{6EJ_x}{Jml^3} \left( J - \frac{ml^2}{3} \right) \right]^2 + \frac{12}{Jm} \left( \frac{EJ_x}{l^2} \right)^2}. \tag{3}$$

Из второго корня уравнения (2) получаем мнимое значение для угловой скорости валика.

Если момент инерции массы диска мал и им можно пренебречь, т. е. рассматривать диск как точечную массу, то критическую угловую скорость найдем из уравнений (1) при  $J \rightarrow 0$ :

$$\omega^2 = \sqrt{1 / (m\delta_{11})} = \sqrt{3EJ_x / (ml^3)}. \tag{4}$$

Числовые значения критических частот  $\omega_*$ , вычисленные по формулам (3) и (4), соответственно равны 165 и 130 с<sup>-1</sup>. Таким образом, гироскопический эффект, делая систему более жесткой, сдвигает критическое значение угловой скорости в область более высоких частот.

**268.** Критическая угловая скорость, вычисленная с учетом гироскопического эффекта, равна  $\omega_* \approx 138$  с<sup>-1</sup>. Если гироскопический эффект не учитывать, то  $\omega_{*1} \approx 127,8$  с<sup>-1</sup>.

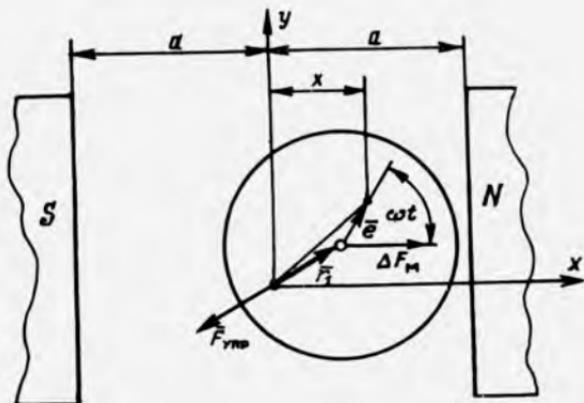


Рис. 296

269. С учетом гироскопического эффекта критическая угловая скорость  $\omega_* \approx 173 \text{ с}^{-1}$ , без учета —  $\omega_{*1} \approx 158,6 \text{ с}^{-1}$ .

270. Рассмотрим силы, действующие на диск (рис. 296). Пусть  $r_1$  — прогиб валика,  $e$  — эксцентриситет центра массы диска относительно центра вращения,  $\bar{F}_{\text{упр}} = -c\bar{r}_1$  — сила упругости, действующая на диск со стороны валика,  $\Delta F_m$  — суммарная сила притяжения магнитов.

В соответствии с принципом Даламбера дифференциальные уравнения движения при постоянной угловой скорости диска имеют вид

$$\ddot{x} + p^2 x = e p^2 \cos \omega t + \frac{\Delta F_m}{m}, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + p^2 y = e p^2 \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $p^2 = c/m = 6EJ_x/ml^2$ .

Суммарная сила притяжения магнитов

$$\Delta F_m = k\Phi_0^2/(a-x)^2 - k\Phi_i^2/(a+x)^2.$$

Раскладывая последнее выражение в ряд и ограничиваясь линейной частью разложения, находим

$$\Delta F_m = 4k\Phi_0^2 x/a^3.$$

После подстановки уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + [p^2 - 4k\Phi_0^2/(ma^3)]x = p^2 e \cos \omega t. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что система, находящаяся в магнитном поле, имеет две критические угловые скорости

$$\omega_{*1} = \sqrt{p^2 - 4k\Phi_0^2/(ma^3)}; \quad \omega_{*2} = p.$$

271. Пластинка имеет три степени свободы: вертикальное перемещение по оси  $z$  и два угловых  $\varphi$  и  $\theta$ .

Поворот пластинки на угол  $\theta$  приводит к появлению угла атаки относительно потока воздуха. При этом возникает аэродинамическая подъемная сила (см. условие задачи). Кроме того, вертикальные перемещения пластинки создают упругие силы в пружинах. Их равнодействующая

$$F = -c_1(z - \theta l/2 + \varphi h/2) - c_1(z - \theta l/2 - \varphi h/2) - c_2(z + \theta l/2 + \varphi h/2) - c_2(z + \theta l/2 - \varphi h/2).$$

Определим моменты сил упругости относительно центральных осей  $x$  и  $y$ :

$$M_x = -c_1\varphi h^2 - c_2\varphi h^2,$$

$$M_y = 2c_1(z - \theta l/2)l - 2c_2(z + \theta l/2)l.$$

Дифференциальные уравнения движения пластинки имеют вид

$$m\ddot{z} + 2(c_1 + c_2)z + (c_1 - c_2)\theta l - \frac{dc_z}{d\theta} \frac{\rho v^2}{2} hl\theta = 0; \quad (1)$$

$$J_y\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)l^2\theta + (c_2 - c_1)lz - \frac{dc_z}{d\theta} \frac{hl}{2} \rho v^2 \frac{l}{4}\theta = 0; \quad (2)$$

$$J_x\ddot{\varphi} + \frac{h^2}{4}(c_1 + c_2)\varphi = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) не зависит от уравнений (1) и (2), поэтому из него можно найти частоту угловых колебаний пластинки относительно оси  $x$ :

$$p = h \sqrt{(c_1 + c_2)/(4J_x)},$$

Остальные две частоты определим из уравнений (1) и (2), полагая  $z = Ae^{pt}$ ,  $\theta = Be^{pt}$ . Подставив выражение для  $z$  и  $\theta$  в уравнения (1) и (2), после преобразований получаем определитель  $D$  системы однородных алгебраических уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2(c_1 + c_2)}{m} + p^2 & \frac{(c_1 - c_2)}{m} l - \frac{2}{m} F_{10} \\ -\frac{(c_1 - c_2)l}{J_y} & \frac{(c_1 + c_2)}{2J_y} l^2 + p^2 - \frac{F_{10}l}{4J_y} \end{vmatrix},$$

где  $F_{10} = \frac{dc_z}{d\theta} \frac{hl}{4} \rho v^2$ .

Из условия равенства нулю определителя  $D$  получаем характеристическое уравнение вида

$$p^4 + a_2 p^2 + a_4 = 0, \quad (4)$$

где

$$a_2 = \frac{2(c_1 + c_2)}{m} - F_{10} \frac{l}{4J_y} + \frac{(c_1 + c_2)l^2}{2J_y};$$

$$a_4 = \frac{(c_1 + c_2)^2 l^2}{mJ_y} + \left( \frac{c_1 - c_2}{m} l - \frac{2}{m} F_{10} \right) \frac{c_1 - c_2}{J_y} l - \frac{2(c_1 + c_2)F_{10}l}{4mJ_y},$$

Необходимым условием отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (4) является положительность его коэффициентов (для биквадратного уравнения это условие является также и достаточным):

$$-F_{10} \frac{l}{4J_y} + \frac{2(c_1 + c_2)}{m} + \frac{(c_1 + c_2)}{2} \frac{l^2}{J_y} > 0, \quad (5)$$

$$\frac{(c_1 + c_2)^2 l^2}{mJ_y} + \left( \frac{c_1 - c_2}{m} - \frac{dc_z}{d\theta} \frac{\rho v^2}{2m} h \right) \frac{(c_1 - c_2) l^2}{J_y} - \frac{2(c_1 + c_2)}{m} F_{10} \frac{l}{4J_y} > 0, \quad (6)$$

При выполнении условий (5), (6) колебания пластинки устойчивы.

272. Колебания пластинки будут устойчивыми, если корни характеристического уравнения (4) (см. решение задачи 271) имеют отрицательные действительные части. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты  $a_2$  и  $a_4$  в уравнении (4) были положительными.

Значения аэродинамической силы  $F_{10}$ , при которых коэффициенты  $a_2$  и  $a_4$  обращаются в нуль, являются критическими, поэтому критические значения скорости  $v$  найдем из условий

$$a_2 = 0; a_4 = 0. \quad (1)$$

Подставив числовые значения параметров системы, из условий обращения в нуль коэффициентов  $a_2$  и  $a_4$  соответственно находим  $v_{*1} = 32,6$  м/с,  $v_{*2} = 73$  м/с.

273. При «малом» возмущенном движении с индексом нуль сокращаются и уравнения движения, полученные по методу Даламбера, имеют следующий вид (рис. 297):

$$F_n + \Delta F_1 + \Delta F_2 + R\varphi = 0, \quad (1)$$

$$M_n + \Delta M_1 - \Delta F_2 l = 0, \quad (2)$$

где  $F_n$ ,  $M_n$  — соответственно сила инерции и момент инерции самолета относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку  $O'$ .

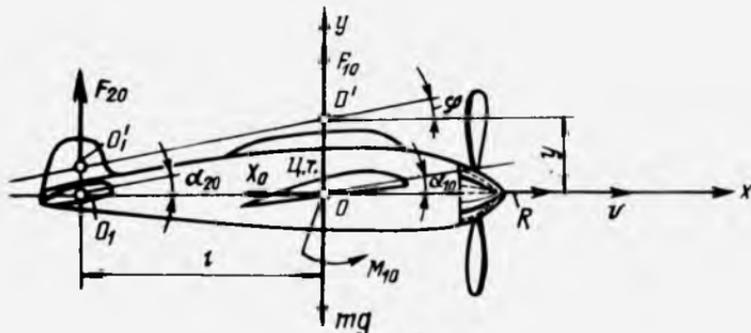


Рис. 297

Получим выражения для приращений углов атаки  $\Delta\alpha_1$  и  $\Delta\alpha_2$ . Для крыла угол  $\Delta\alpha_1$  равен углу  $\varphi$  минус угол «скоса» потока, равный  $\dot{y}/v$ , т. е.

$$\Delta\alpha_1 = \varphi - \dot{y}/v.$$

Хвостовое оперение при малых  $\varphi$  и  $y$  имеет вертикальное смещение

$$y_1 = y - \varphi l,$$

поэтому можно принять, что приращение угла атаки  $\Delta\alpha_2$  зависит только от угла «скоса» потока и равно

$$\Delta\alpha_2 = \frac{C_2}{v} (\dot{\varphi} l - \dot{y}).$$

Таким образом, имеем следующие выражения для приращений сил  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$  и момента  $\Delta M_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= C_1 (\varphi - \dot{y}/v); \quad \Delta F_2 = C_2 (\dot{\varphi} l/v - \dot{y}/v); \\ \Delta M_1 &= C_3 (\varphi - \dot{y}/v). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в уравнения (1) и (2), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v}_y + \frac{C_1 + C_2}{mv} \Delta v_y - \frac{C_2 l}{mv} \dot{\varphi} - \frac{(C_1 + R)}{m} \varphi &= 0; \\ \ddot{\varphi} + \frac{(C_3 - C_2 l)}{Jv} \Delta v_y + \frac{C_2 l^2}{Jv} \dot{\varphi} - \frac{C_3}{J} \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta v_y = \dot{y}$ .

Полагая  $\Delta v_y = Ae^{\lambda t}$ ,  $\varphi = Be^{\lambda t}$ , из системы (4) находим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_1 &= \frac{c_2 l}{Jv} + \frac{C_1 + C_2}{mv}; \quad a_2 = -\frac{C_3}{J} + \frac{C_2 l}{Jv} \frac{(C_1 + C_2)}{mv} + \frac{C_2 l}{mv} \frac{(C_3 - C_2 l)}{Jv}; \\ a_3 &= \frac{(C_1 + R)}{m} \frac{(C_3 - C_2 l)}{Jv} - \frac{C_3}{Jmv} (C_1 + C_2), \end{aligned}$$

Необходимое условие устойчивости невозмущенного движения самолета:

$$a_j > 0.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости невозмущенного движения (критерий Гурвица):

$$a_1 a_2 - a^3 > 0.$$

274. Дифференциальные уравнения движения шкивов имеют вид (см. решение задачи (241))

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + a_{11} \dot{\varphi}_1 - a_{12} \dot{\varphi}_2 &= \beta_1 \dot{\varphi}_1; \\ \ddot{\varphi}_2 - a_{21} \dot{\varphi}_1 + a_{22} \dot{\varphi}_2 &= -\beta_2 \dot{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы  $\lambda^3 + (\beta_2 - \beta_1)\lambda^2 + (a_{11} + a_{22} - \beta_1\beta_2)\lambda + (a_{11}\beta_2 - a_{22}\beta_1) = 0$ ,

или

$$\lambda^3 + (10 - \beta_1)\lambda^2 + (21\,420 - 10\beta_1)\lambda + (51\,000 - 16\,320\beta_1) = 0.$$

Необходимым условием устойчивости движения является условие положительности коэффициентов характеристического уравнения, т. е.  $\beta < 10$ ;  $\beta_1 < 2142$  и  $\beta_1 < 3,1$ . Следовательно,  $\beta_1$  должен быть меньше 3,1.

Достаточным условием устойчивости решения является выполнение критерия Гурвица. Для уравнения третьей степени должно выполняться условие  $\Delta_2 > 0$ :

$$(10 - \beta_1)(21\,420 - 10\beta_1) - (51\,000 - 16\,320\beta_1) > 0,$$

откуда  $-\infty < \beta_1 < 34$ ;  $480 < \beta_1 < \infty$ .

Сопоставляя эти неравенства с необходимым условием, получаем интервал возможных значений  $\beta_1$ :  $-\infty < \beta_1 < 3,1$ .

275. При движении маховика происходит его проскальзывание относительно контактного кольца муфты. Обозначив угол поворота маховика через  $\varphi_1$ , а угол поворота контактного кольца через  $\varphi_2$ , запишем дифференциальное уравнение движения маховика:

$$J\ddot{\varphi} + \alpha_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = a\dot{\varphi}_1, \quad (1)$$

где  $\alpha_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$  — момент сил трения.

Момент сил трения

$$M_{\text{тр}} = 2\pi R \delta \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) R = \alpha_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Дифференциальное уравнение движения контактного кольца имеет вид

$$\alpha_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_1\varphi_2 = 0. \quad (2)$$

Приняв  $\varphi_1 = Ae^{\lambda t}$ ,  $\varphi_2 = Be^{\lambda t}$ , получаем следующее уравнение для определения параметра  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + \frac{Jc_1 - a\alpha_1}{J\alpha_1} \lambda^2 + \frac{\alpha_1 - a}{J\alpha_1} c_1 \lambda = 0. \quad (3)$$

Из решения уравнения (3) получаем три корня:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{Jc_1 - a\alpha_1}{2J\alpha_1} \pm \sqrt{\left(\frac{Jc_1 - a\alpha_1}{2J\alpha_1}\right)^2 - \frac{\alpha_1 - a}{J\alpha_1} c_1}.$$

Движение маховика будет устойчивым, если:

а) корни  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  отрицательны — в этом случае возмущенное движение ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) затухает со временем;

б) корни  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью — в этом случае движение ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) имеет периодический характер с уменьшающейся амплитудой.

Необходимым и достаточным условием отрицательности кор-

ней уравнения (3) является условие положительности его коэффициентов, т. е.

$$Jc_1 - a\alpha_1 > 0, \alpha_1 - a > 0. \quad (4)$$

Из второго условия (4) следует, что устойчивое движение происходит при  $\alpha_1 > a$ , т. е. при  $a\alpha_1 > a^2$ . Подставляя это неравенство в первое условие (4), получаем  $Jc_1 > a\alpha_1 > a^2$ , откуда

$$a < \sqrt{c_1 J} = 1 \cdot 10^{-4} = 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Поскольку при этом должно выполняться условие  $a < \alpha = 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , окончательно получаем, что движение устойчиво при  $a < 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

276. Дифференциальное уравнение вращения волчка вокруг неподвижной точки имеет вид

$$d\bar{K}/dt = \bar{M},$$

где  $\bar{K}$  — главный момент количества движения волчка (кинетический момент) относительно неподвижной точки  $O$ .

В общем случае вектор  $\bar{K}$  равен

$$\bar{K} = J\omega,$$

где  $J$  — матрица моментов инерции тела (моментов инерции относительно осей  $x, y, z$ , жестко связанных с волчком);  $\omega$  — вектор угловой скорости волчка при возмущенном движении.

Матрица  $J$  имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix}.$$

Как известно, полная производная вектора  $\bar{K}$  связана с локальной производной в подвижной системе координат соотношением

$$d\bar{K}/dt = d'\bar{K}/dt + [\bar{\omega}' \times \bar{K}], \quad (1)$$

где  $\bar{\omega}'$  — вектор угловой скорости подвижной системы координат, не обязательно жестко связанной с волчком, т. е. в общем случае  $\bar{\omega} \neq \bar{\omega}'$ .

Если локальная производная берется в системе координат, жестко связанных с волчком, то  $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$ , и получаем уравнения Эйлера

$$d'\bar{K}/dt + [\omega \times \bar{K}] = \bar{M}.$$

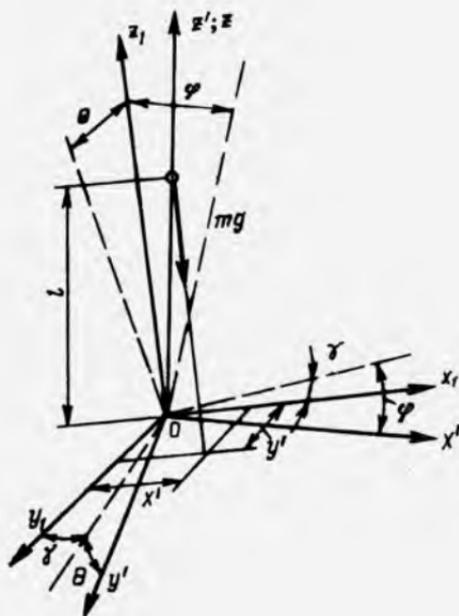


Рис. 298

Проецируя уравнение (1) на подвижные, но не связанные с волчком оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  (рис. 298), находим (не употребляя штрих в локальной производной):

$$\begin{aligned} dK_{x'}/dt + K_{z'}\omega_{y'} - K_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'}; \\ dK_{y'}/dt + K_{x'}\omega_{z'} - K_{z'}\omega_{x'} &= M_{y'}; \\ dK_{z'}/dt + K_{y'}\omega_{x'} - K_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}. \end{aligned} \quad (2)$$

Оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  участвуют в движении волчка (при малых колебаниях), но не участвуют в его собственном вращении. Ось  $Oz'$  всегда совпадает с осью симметрии волчка  $Oz$ . Поэтому угловые скорости  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$  и  $\omega_{z'}$  можно рассматривать как малые величины.

При малых движениях оси симметрии гироскопа полная угловая скорость волчка  $\bar{\omega} = \bar{\Omega}_0 + \bar{\omega}'$ . Запишем проекции вектора  $\bar{\omega}'$  (при малых отклонениях от невозмущенного состояния), (см. рис. 298):

$$\omega_{z'} \approx \dot{\gamma}; \quad \omega_{x'} \approx \dot{\theta}; \quad \omega_{y'} \approx \dot{\varphi}.$$

Проекция кинетического момента на оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , являющиеся главными осями инерции тела, следующие:

$$K_{x'} = J_x \omega_{x'}; \quad K_{y'} = J_y \omega_{y'}; \quad K_{z'} = J_z \omega_{z'}$$

где  $\omega_{x'} \approx \dot{\theta}$ ;  $\omega_{y'} \approx \dot{\varphi}$ ;  $\omega_{z'} \approx \dot{\Omega}_0 + \dot{\gamma}$ .

Запишем моменты силы тяжести относительно осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  (при малых углах  $x' = x$  и  $y' \approx y$ ):

$$M_{z'} \approx 0; \quad M_{y'} \approx mgx', \quad M_{x'} \approx mgy',$$

где  $x' = l\varphi$ ,  $y' = l\theta$ .

Из уравнений системы (2) получаем (вследствие симметрии  $J_x = J_y$ ) линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\theta} + J_z \Omega_0 \dot{\varphi} - mgl\theta &= 0; \\ J_x \ddot{\varphi} - J_z \Omega_0 \dot{\theta} - mgl\varphi &= 0; \\ \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из третьего уравнения этой системы следует, что  $\omega_z = \text{const} = \Omega_0$ .

Умножив первое уравнение системы (3) на мнимую единицу  $i$  и сложив его со вторым уравнением, получаем

$$\ddot{\gamma} - i \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \dot{\gamma} - mg \frac{l}{J_x} \gamma = 0, \quad (4)$$

где  $\gamma = \theta + i\varphi$ .

Характеристическое уравнение для (4) будет следующим (решение ищем в виде  $\gamma = Ce^{\lambda t}$ ):

$$\lambda^2 - i \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \lambda - mg \frac{l}{J_x} = 0,$$

а его корни равны

$$\lambda_{1,2} = i \left[ \frac{J_z}{2J_x} \Omega_0 \pm \sqrt{\left( \frac{J_z}{2J_x} \right)^2 \Omega_0^2 - \frac{mgl}{J_x}} \right].$$

Возмущенное движение волчка устойчиво, если

$$\left( \frac{J_z}{2J_x} \Omega_0 \right)^2 > \frac{mgl}{J_x}.$$

Следовательно, критическая угловая скорость волчка

$$\Omega_{0*} = \frac{2}{J_z} \sqrt{mglJ_x}.$$

277. При малом отклонении оси гироскопа от вертикального положения можно получить следующие дифференциальные уравнения движения (см. решение задачи 276):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + J_z \Omega_0 \dot{\varphi} / J_x &= M_{x'} / J_x; \\ \ddot{\varphi} - J_z \Omega_0 \dot{\theta} / J_x &= M_{y'} / J_x. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае на гироскоп кроме силы тяжести действуют упругие силы со стороны пружин.

На рис. 299 показано положение точки  $D_1$  оси гироскопа в произвольный момент времени.

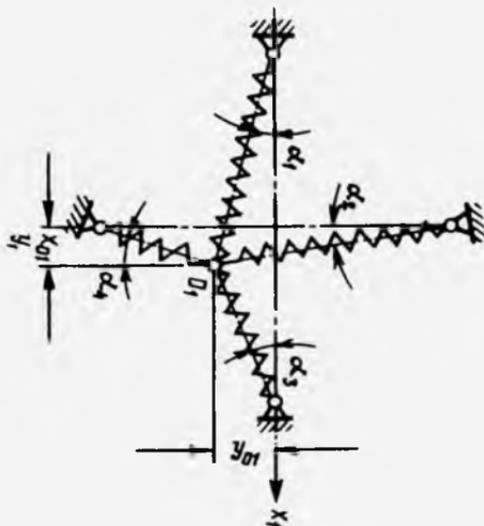


Рис. 299

Выражения для моментов имеют вид

$$M_{x'} = (mg/2 - 2cl)l\theta; \quad (2)$$

$$M_{y'} = (mg/2 - 2cl)l\varphi.$$

С учетом выражений (2) дифференциальные уравнения движения (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \dot{\varphi} - \frac{(mg - 4cl)l}{2J_x} \theta &= 0; \\ \ddot{\varphi} - \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \dot{\theta} - \frac{(mg - 4cl)l}{2J_x} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Корни характеристического уравнения системы (3) (см. решение задачи 276) будут следующие:

$$\lambda_{1,2} = i \left[ \frac{J_z}{2J_x} \Omega_0 \mp \sqrt{\left( \frac{J_z}{2J_x} \Omega_0 \right)^2 - \frac{l}{2J} (mh - 4cl)} \right].$$

Движение гироскопа устойчиво, если

$$J_z \Omega_0 > \sqrt{2J_x l (mg - 4cl)}.$$

278. Дифференциальные уравнения движения гироскопа имеют вид (см. решение задачи 277):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \dot{\varphi} - \frac{l}{2J_x} (mg - 4c_2 l) \theta &= 0; \\ \ddot{\varphi} - \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \dot{\theta} - \frac{l}{2J_x} (mg - 4c_2 l) \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы (1) ищем в виде  $\theta = A_1 e^{\lambda t}$ ,  $\varphi = A_2 e^{\lambda t}$ . Тогда характеристическое уравнение для системы (1) имеет вид

$$\lambda^4 + \left[ \left( \frac{J_z}{J_x} \Omega_0 \right)^2 - \frac{mgl + 2l^2(c_1 + c_2)}{J_x} \right] \lambda^2 + \frac{l^2}{4J_x^2} (mg - 4c_1l)(mg - 4c_2l) = 0, \quad (2)$$

или

$$\lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_4 = 0. \quad (3)$$

Найдем корни уравнения (3):

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{-a_2/2 \pm \sqrt{a_2^2/4 - a_4}}.$$

Если  $a_2 > 0$ ,  $a_4 > 0$  и, кроме того,  $a_2^2 - a_4 > 0$ , то корни можно представить в виде

$$\lambda_{1,2} = i \sqrt{a_2/2 \mp \sqrt{a_2^2/4 - a_4}},$$

т. е. в этом случае движение оси симметрии гироскопа является периодическим.

Из условия  $a_2^2 - 4a_4 = 0$  находим критическую скорость

$$\Omega_{0*}^2 = \frac{J_x^2}{J_z^2} \left[ \frac{l}{J_r} \sqrt{(mg - 4c_1l)(mg - 4c_2l)} + \frac{l}{J_r} (mg - 2c_1l - 2c_2l) \right].$$

279. Для вывода дифференциальных уравнений малых колебаний воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода.

На рис. 300 показано положение системы в произвольный момент времени  $t$ . Оси  $x, y, z$  жестко связаны с внутренним кольцом 1. При колебаниях прямая  $OO'$  всегда находится в плоскости  $yz$ .

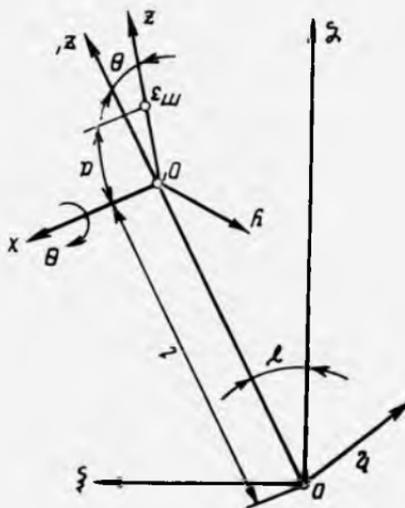


Рис. 300

Кинетическая и потенциальная энергии ротора равны

$$T_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\zeta}_1^2) + \frac{J_{x_1}}{2} \omega_{x_1}^2 + \frac{J_{y_1}}{2} \omega_{y_1}^2 + \frac{J_{z_1}}{2} \omega_{z_1}^2;$$

$$\Pi_1 = m_1 g l (1 - \cos \gamma).$$

Кинетическая и потенциальная энергии внутреннего кольца и противовеса будут соответственно равны

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{\xi}_2^2 + \dot{\zeta}_2^2) + \frac{J_{x_2}}{2} \omega_{x_2}^2 + \frac{J_{y_2}}{2} \omega_{y_2}^2 + \frac{J_{z_2}}{2} \omega_{z_2}^2;$$

$$\Pi_2 = m_2 g l (1 - \cos \gamma);$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} (\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2 + \dot{\zeta}_3^2);$$

$$\Pi_3 = m_3 g [(l+a) - (l+a \cos \theta) \cos \gamma].$$

Считая, что углы  $\theta$  и  $\gamma$  малы, вычислим проекции угловой скорости ротора и внутреннего кольца на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}, & \omega_{y_1} &= \dot{\gamma}; & \omega_{z_1} &= \Omega_0 + \dot{\gamma}; \\ \omega_{x_2} &= \dot{\theta}, & \omega_{y_2} &= \dot{\gamma}; & \omega_{z_2} &= \gamma \dot{\theta} \approx 0. \end{aligned}$$

Определим координаты центров тяжести всех трех масс:

$$\xi_1 = l\gamma; \quad \xi_2 = l\gamma; \quad \xi_3 = (l+a)\gamma;$$

$$\zeta_1 = l; \quad \zeta_2 = l; \quad \zeta_3 = l+a; \quad \eta_3 = a\theta.$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta} - J_{z_1} \Omega_0 \dot{\gamma} + m_3 g a \theta &= 0; \\ J_2 \ddot{\gamma} + J_{z_1} \Omega_0 \dot{\theta} + A \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= J_{x_1} + J_{x_2} + m_3 a^2; \quad J_2 = J_{y_1} + J_{y_2} + \\ &+ (m_1 + m_2) l^2 + m_3 (l+a)^2; \quad A = [(m_1 + m_2) l + \\ &+ (l+a) m_3] g. \end{aligned}$$

Решение системы (1) ищем в виде  $\theta = C_1 \cos pt$ ,  $\gamma = C_2 \sin pt$ . Для определения частот получаем уравнение

$$p^4 - \frac{(J_2 m_3 g a + J_1 A + J_{z_1}^2 \Omega_0^2)}{J_1 J_2} p^2 + \frac{A m_3 g a}{J_1 J_2} = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) легко найти частоты колебаний  $p_1$  и  $p_2$ .

280. Кинетические энергии ротора гироскопа и тележки соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} (\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 + \dot{x}_1^2) + \frac{J_x \omega_x^2}{2} + \frac{J_y \omega_y^2}{2} + \frac{J_z \omega_z^2}{2},$$

$$T_0 = \frac{J_{r_0} \dot{\Phi}^2}{2},$$

а потенциальные —

$$\Pi = Q a_1 (1 - \cos \theta) - Q (a_1 + a_2) (1 - \cos \varphi);$$

$$\Pi_0 = -Q_0 l_0 (1 - \cos \varphi).$$

Ротор гироскопа получает дополнительные угловые скорости  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ , вызванные угловыми смещениями ротора и тележки. Вектор угловой скорости  $\dot{\varphi}$  направлен по оси  $x_1$ .

Проектируя угловую скорость  $\dot{\varphi}$  на оси  $x$  и  $z$ , получаем угловые скорости  $\omega_x$  и  $\omega_z$  ротора:  $\omega_x = \dot{\varphi} \cos \theta$ ,  $\omega_z = \Omega_0 + \dot{\varphi} \sin \theta$ .

Движение ротора в направлении  $\theta$  создает угловую скорость, направленную по оси  $y$  и равную  $\omega_y = \dot{\theta}$ .

Координаты центра тяжести ротора:

$$\xi = (a_1 + a_2) \cos \varphi + a_1 \cos \theta; \quad \zeta = (a_1 + a_2) \sin \varphi; \quad x_1 = a_1 \sin \theta.$$

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа второго рода, получаем следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$(J_y + m a_1^2) \ddot{\theta} - J_z \Omega_0 \dot{\varphi} - Q a_1 \theta = 0; \quad (1)$$

$$[J_x + m (a_1 + a_2)^2] \ddot{\varphi} + J_z \Omega_0 \dot{\theta} - [Q (a_1 + a_2) + Q_0 l_0] \varphi = 0.$$

Решение системы (1) ищем в виде  $\theta = A_1 \cos pt$ ,  $\varphi = A_2 \sin pt$ . Тогда уравнение частот имеет вид

$$p^4 - \frac{J_z \Omega_0^2 - (m a_1^2 + J_x) [Q (a_1 + a_2) + Q_0 l_0] - [m (a_1 + a_2)^2 + J_x] Q a_1}{(J_y + m a_1^2) [J_x + m (a_1 + a_2)^2]} p^2 + \frac{Q a_1 [Q (a_1 + a_2) + Q_0 l_0]}{(J_y + m a_1^2) [J_x + m (a_1 + a_2)^2]} = 0. \quad (2)$$

$$\text{или } p^4 - \alpha_2 p^2 + \alpha_4 = 0.$$

Для устойчивого движения необходимо, чтобы корни уравнения (2) были действительными, а это выполняется при условии  $\alpha_2^2 - 4\alpha_4 > 0$ . Поэтому критическая угловая скорость гироскопа определяется из условия  $\alpha_2^2 = 4\alpha_4$ .

281. Для вывода дифференциального уравнения движения воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода.

Кинетическая энергия системы

$$T = J_x \omega_x^2 / 2 + J_y \omega_y^2 / 2 + J_z \omega_z^2 / 2.$$

На рис. 300 показано положение кольца с ротором в произвольный момент времени. Угловые скорости  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  являются проекциями полной угловой скорости  $\omega$  на подвижные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  участвуют в движении кольца, но не участвуют в собственном вращении ротора):

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega}_0 + \bar{\Omega} + \bar{\delta}.$$

Проектируя  $\bar{\omega}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получаем

$$\omega_x = \dot{\delta}; \quad \omega_y = \Omega \cos \delta; \quad \omega_z = \Omega_0 - \Omega \sin \delta.$$

Выражение для кинетической энергии в случае малости  $\delta$  принимает вид

$$T = J_x \dot{\delta}^2 / 2 + J_y \Omega^2 / 2 + J_0 \Omega_0 - \Omega \delta)^2 / 2.$$

Запишем выражения для потенциальной энергии системы в функции Релея:

$$\Pi = c l^2 \delta^2 / 2; \quad R = \alpha \dot{\delta}^2 / 2.$$

Уравнение Лагранжа второго рода в рассматриваемом случае следующее:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial T}{\partial \delta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}} = 0.$$

Подставив в это уравнение выражения для  $T$ ,  $\Pi$  и  $R$ , получаем дифференциальное уравнение движения гироскопа:

$$\ddot{\delta} + 2n\dot{\delta} + p_0^2 \delta = - \frac{J_0}{J_x} \Omega \Omega_0,$$

где  $2n = \alpha / J_x$ ;  $p_0^2 = c l^2 / J_x$ .

Если частота свободных колебаний прибора  $p_0$  велика, то его движение при ненулевых начальных условиях быстро затухает и угол  $\delta$  определяется только правой частью уравнения

$$\delta = - J_0 \Omega \Omega_0 / (c l^2).$$

Следовательно, угловая скорость

$$\Omega = - \delta c l^2 / (J_0 \Omega_0).$$

**282.** Рассмотрим неподвижную систему координат  $O_1XYZ$  с центром в точке касания диска с плоскостью (рис. 301).

Пусть в некоторый момент времени плоскость диска отклонилась от вертикали на малый угол  $\theta$ , а касательная к диску в точке его контакта с плоскостью составляет угол  $\Phi$  с осью  $O_1Y$ , т. е. оси диска  $x$ ,  $y$ ,  $z$  составляют с осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  малые углы  $\theta$  и  $\Phi$ . Вектор угловой скорости диска

$$\bar{\Omega} = \Omega \bar{e}_1 + \Omega_2 \bar{e}_2 + \Omega_3 \bar{e}_3,$$

где  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$ ,  $\bar{e}_3$  — единичные векторы, направленные по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\Omega_1 = -\Phi \cos \theta$ ,  $\Omega_2 = \dot{\theta}$ ,  $\Omega_3 \cong |\bar{\Omega}|$  — составляющие угловой скорости  $\Omega$ .

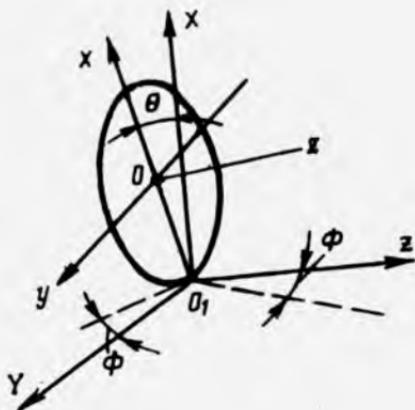


Рис. 301

Вычислим момент количества движения диска относительно точки  $O$ :

$$K = K_1 \bar{e}_1 + K_2 \bar{e}_2 + K_3 \bar{e}_3 = -A\dot{\Phi} \cos \theta \bar{e}_1 + A\dot{\theta} \bar{e}_2 + C\Omega \bar{e}_3,$$

где  $A = mr^2/4$ ,  $C = mr^2/2$  — соответственно экваториальный и осевой моменты инерции массы диска.

Используя теорему об изменении момента количества движения, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$A \frac{d}{dt} (-\dot{\Phi} \cos \theta) + A\dot{\theta}\dot{\Phi} \sin \theta + C\Omega\dot{\theta} = 0;$$

$$A\ddot{\theta} + C\Omega\dot{\Phi} \cos \theta + A\dot{\Phi}^2 \sin \theta \cos \theta = N_z r;$$

$$C\dot{\Omega} = -N_y r,$$

где  $N_y$  и  $N_z$  — проекции реакции  $N$  на оси  $Oz$  и  $Oy$ .

В случае малых колебаний и постоянной угловой скорости ( $\Omega = \text{const}$ ) имеем

$$A\ddot{\theta} + C\Omega\dot{\Phi} = N_z r; \tag{1}$$

$$A\ddot{\Phi} - C\Omega\dot{\theta} = 0.$$

Рассмотрим движение центра массы диска. Так как точка  $O$  находится в состоянии мгновенного покоя, то ее скорость равна

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3 = 0 \cdot \bar{e}_1 + r\Omega \bar{e}_2 + (-r\dot{\theta}) \bar{e}_3,$$

Выразим составляющие абсолютного ускорения в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через угловые и линейные скорости:

$$\omega_1 = \dot{v}_1 - v_2 \Omega_3 + v_3 \Omega_2; \quad \omega_2 = \dot{v}_2 - v_3 \Omega_1 + v_1 \Omega_3;$$

$$\omega_3 = \dot{v}_3 - v_1 \Omega_2 + v_2 \Omega_1.$$

Дифференциальные уравнения движения центра массы диска в таком случае имеют вид

$$\begin{aligned} m\omega_1 &= m(\dot{v}_1 - v_2\Omega_3 + v_3\Omega_2) = N_x - mg \cos \theta; \\ m\omega_2 &= m(\dot{v}_2 - v_3\Omega_1 + v_1\Omega_3) = N_y; \\ m\omega_3 &= m(\dot{v}_3 - v_1\Omega_2 + v_2\Omega_1) = N_z - mg \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя введенные выше обозначения и пренебрегая нелинейными членами, из последнего уравнения системы (3) получаем

$$-mr(\ddot{\theta} + \Omega\dot{\psi}) = N_z - mg\theta. \quad (3)$$

Исключив из уравнений (1) и (3) величины  $N_z$  и  $\dot{\Phi}$ , имеем

$$\ddot{\theta} + \frac{(C + mr^2)C\Omega^2/A - mgr}{A + mr^2} \theta = C_1,$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Частота малых колебаний диска

$$p = \sqrt{\frac{(C + mr^2)C\Omega^2/A - mgr}{A + mr^2}} = \sqrt{\frac{4}{5} \left( 3\Omega^2 - \frac{9}{r} \right)},$$

Малые колебания диска устойчивы при  $\Omega > \sqrt{g/3r}$ .

## § 11. Приближенные методы определения низших частот

283. Зададимся некоторой статистической нагрузкой, принимая определяемую ее кривую прогибов за форму колебания системы (рис. 302). В этом случае максимальная потенциальная энергия равна работе внешних сил, т. е.

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \sum P_i y_i,$$

где  $y_i$  — прогибы, вызываемые принятой системой нагрузки.

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \sum p^2 y_i^2 m_i.$$

Приравняв  $T_{\max}$  и  $P_{\max}$ , находим

$$p^2 = \sum P_i y_i / \sum m_i y_i^2. \quad (1)$$

При расчете удобно за  $P_i$  принять силы тяжести, т. е.  $P_i = m_i g$ . В этом случае формула для частоты колебаний принимает вид

$$p^2 = g \sum m_i y_i / \sum m_i y_i^2. \quad (2)$$

Для определения прогибов  $y_1$  и  $y_2$  построим эпюры изгибающих моментов от заданных сил и от единичных сил по на-

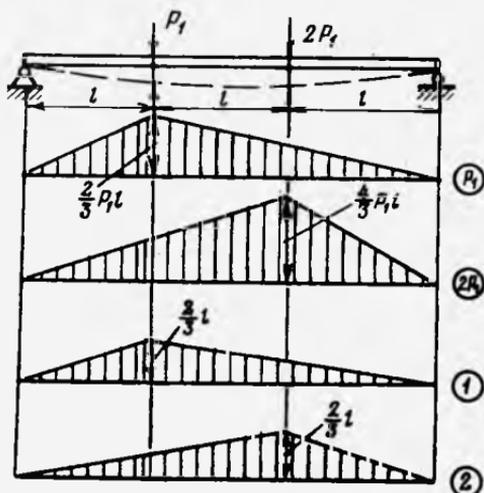


Рис. 302

правлению  $y_1$  и  $y_2$  (рис. 302, эпюры 1 и 2). Перемножая эпюры по правилу Верещагина, находим

$$y_1 = 11 P_1 l^3 / (9 E J_x); \quad y_2 = 23 P_1 l^3 / (18 E J_x).$$

Подставив в формулу (2) выражения для  $y_1$  и  $y_2$ , получаем

$$p = 0,891 \sqrt{E J_x / m l^3}.$$

284.  $p = 0,71 \sqrt{F J_x / (m l^3)},$

285. В рассматриваемом случае можно принять следующее приближенное выражение для прогибов:

$$y = y_0 \sin \pi z / 3l.$$

Максимальная потенциальная энергия равна

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} F J_x \int_0^{3l} y_0^2 \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi z}{3l} dz = \frac{3l}{4} E J_x y_0^2 \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4,$$

а максимальная кинетическая энергия сосредоточенных масс —

$$T_{\max} = p^2 \left( m y_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{3} + m y_0^2 \sin^2 2\pi/3 \right) / 2.$$

Частота собственных колебаний

$$p = 1,1 \sqrt{F J_x / (m l^2)}.$$

286. Перемещения масс будут следующие:

$$y_1 = y_2 = 81 m g l^3 / (3888 E J_x); \quad y_2 = 159 m g l^3 / (3888 E J_x).$$

Частота собственных колебаний

$$p = 5,71 \sqrt{EJ_x / (ml^3)}.$$

287. Максимальная кинетическая энергия в этом случае (с учетом кинетической энергии распределенных масс балки) будет следующая:

$$T_{\max} = p^2 \left[ m y_0^2 \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{3l} y_0^2 m_0 \sin^2 \frac{\pi z}{3l} dz \right].$$

Максимальная потенциальная энергия (см. решение задачи 285).

$$\Pi_{\max} = \frac{3}{4} l E J_x y_0^2 \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4.$$

Частота собственных колебаний

$$p = \sqrt{\frac{\pi^4 E J}{108 \cdot \frac{3}{4} (m + m_0 l) l^3}} = 0,91 \sqrt{\frac{E J_x}{m l^3}},$$

288. Максимальная потенциальная энергия системы

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} E J_x y_0^2 \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 \int_0^{3l} \sin^2 \frac{\pi z}{3l} dz + \frac{c}{2} y_0^2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} \right).$$

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{1}{2} p^2 2m y_0^2 \frac{3}{4}.$$

Низшая частота собственных колебаний системы

$$p = 1,35 \sqrt{E J_x / (m l^3)}.$$

289. Для определения частоты по методу Релея воспользуемся формулой (см. решение задачи 283)

$$p^2 = g \sum_{i=1}^3 y_i m_i \left/ \sum_{i=1}^3 m_i z_i^2 \right. \quad (1)$$

На рис. 303 показаны эпюры осевых усилий 1, 2, 3, необходимых для вычисления прогибов  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ .

После вычисления получаем

$$y_1 = 3lmg / (EF); \quad y_2 = 5lmg / (EF); \quad y_3 = 6lmg / (EF).$$

Подставив  $y_i$  в выражение (1), находим

$$p = 0,45 \sqrt{EF / (ml)}.$$

290.  $p = 0,775 \sqrt{EF / (ml)}$ .

291.  $p = 0,65 \sqrt{EF / (ml)}$ ,

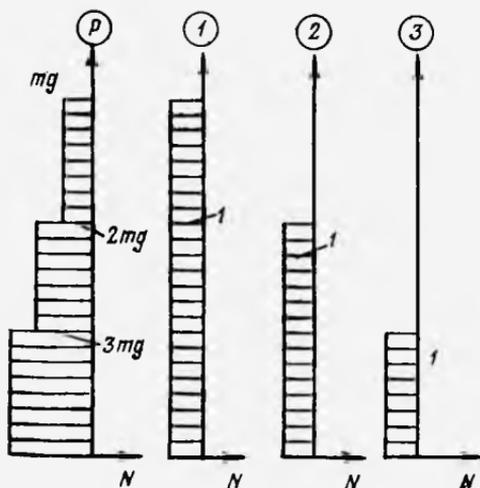


Рис. 303

292. При крутильных колебаниях выражение для низшей частоты колебаний можно представить в виде

$$p^2 = \frac{\sum M_i \varphi_i}{\sum J_i \varphi_i^2}, \quad (1)$$

где  $M_i$  — статически приложенные моменты, которые можно взять пропорциональными моментам инерции  $M_i = aJ_i$ ;  $\varphi_i$  — углы поворота маховых масс.

Для определения углов  $\varphi_i$  приложим к валу моменты  $M_i$  и построим эпюры 1 и 2 (рис. 304) от  $M_i$ , а также эпюры от единичных моментов. Углы закручивания

$$\varphi_1 = (M_1 + M_2) / c_1; \quad \varphi_2 = M_2 / c_2 + (M_1 + M_2) / c_1.$$

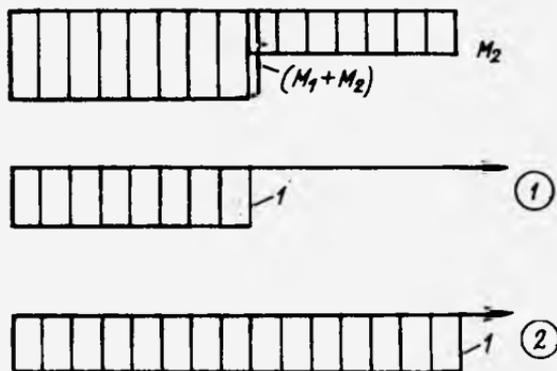


Рис. 304

Так как  $M_1 = \alpha J_1$ ,  $M_2 = \alpha J_2$ , то после преобразований и шарп жения (1) получаем квадрат низшей частоты:

$$p^2 = \frac{\frac{J_1(J_2 + J_2)}{c_1} + J_2 \left( \frac{J_2}{c_2} + \frac{J_1 + J_2}{c_1} \right)}{\frac{J_1}{c_1^2} (J_1 + J_2)^2 + J_2 \left( \frac{J_2}{c_2} + \frac{J_1 + J_2}{c_1} \right)^2}.$$

293.  $p = 0,35 \sqrt{c/J}$ .

294. По методу Донкерлея, низшую частоту колебаний системы найдем по формуле

$$1/p^2 = 1/p_1^2 + 1/p_2^2 + \dots + 1/p_n^2,$$

где  $p_i$  — парциальная частота колебаний массы  $m_i$ .

В задаче 283 парциальные частоты колебаний равны

$$p_1^2 = 1/(m_1 \delta_{11}); \quad p_2^2 = 1/(m_2 \delta_{22}),$$

где  $\delta_{11} = 12l^3/(27EJ_x)$ ;  $\delta_{22} = 12l^3/(27EJ_x)$ .

Таким образом, частота  $p$  равна

$$p = 0,865 \sqrt{EJ_x/ml^3}.$$

В задаче 295 имеем  $m_1$  и  $m_2$ , поэтому частота колебаний в этом случае будет

$$p = 1,06 \sqrt{EJ_x/(ml^3)}.$$

295. Низшую частоту колебаний найдем из выражения

$$1/p^2 = 1/p_1^2 + 1/p_2^2 + 1/p_3^2,$$

где  $p_1^2 = 1/(m\delta_{11})$ ;  $p_2^2 = 1/(m\delta_{22})$ ;  $p_3^2 = 1/(m\delta_{33})$ ;

$$\delta_{11} = 3l/(EF); \quad \delta_{22} = 2l/(EF); \quad \delta_{33} = l/(EF).$$

После вычислений находим

$$p = 0,41 \sqrt{EF/(ml)}.$$

296.  $p = 0,7 \sqrt{EF/(ml)}$ ;  $p = 0,58 \sqrt{EF/(ml)}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 368 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендиев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1980. 976 с.
3. Янке Б., Эмде Ф. Таблицы функций: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1959. 150 с.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 442 с.
5. Сборник задач по теории колебаний / Под ред. Л. В. Постникова и В. И. Королева. М.: Наука, 1978. 271 с.
6. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
7. Сборник задач по аналитической механике / Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко. М.: Наука, 1980. 320 с.
8. Магнус К. Колебания: Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 303 с.
9. Светлицкий В. А. Динамика старта летательных аппаратов. М.: Наука, 1986. 280 с.
10. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 316 с.
11. Василенко Н. В. Теория колебаний. К.: Вища шк., 1992. 430 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1. ДИАГРАММА АЙНСА—СТРЕТТА

Колебания, описываемые уравнением Матвея  $\ddot{y} + (a + 2q \cos 2\tau)y = 0$ , устойчивы, если точка с координатами  $(a, q)$  находится в незаштрихованной области диаграммы Айнса—Стретта, и неустойчивы, если в заштрихованной области (рис. 305).

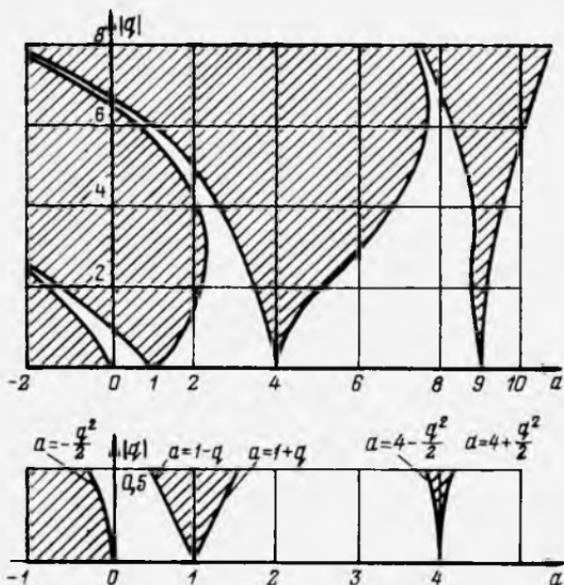


Рис. 305

## Приложение 2. ИНТЕГРАЛЫ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИСПЕРСИИ

В общем случае интегралы, получающиеся при определении дисперсии случайной функции по известной ее спектральной плотности, можно привести к виду

$$J_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2} d\omega,$$

где

$$A(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G(i\omega) = b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.$$

Для  $n=1$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b d\omega}{|a_0 i\omega + a_1|^2} = \frac{b_0}{2a_0 a_1} 2\pi.$$

Для  $n=2$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[b_0 (i\omega)^2 + b_1] d\omega}{|a_0 (i\omega)^2 + a_1 (i\omega) + a_2|^2} = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1} 2\pi.$$

Для  $n=3$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[b_0 (i\omega)^4 + b_1 (i\omega)^2 + b_2] d\omega}{|a_0 (i\omega)^3 + a_1 (i\omega)^2 + a_2 i\omega + a_3|^2} = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{2a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)} 2\pi.$$

Для  $n=4$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[b_0 (i\omega)^6 + b_1 (i\omega)^4 + b_2 (i\omega)^2 + b_3] d\omega}{|a_0 (i\omega)^4 + a_1 (i\omega)^3 + a_2 (i\omega)^2 + a_3 (i\omega) + a_4|^2} =$$
$$= \frac{b_0 (-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4} (a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2a_0 (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)} 2\pi.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Колебания систем с одной степенью свободы . . . . .	6
§ 1. Свободные колебания . . . . .	6
§ 2. Свободные колебания систем с учетом сил сопротивления . . . . .	17
§ 3. Вынужденные колебания . . . . .	22
§ 4. Критические состояния и устойчивость колебаний . . . . .	37
§ 5. Параметрические колебания . . . . .	167
§ 6. Случайные колебания . . . . .	175
§ 7. Нелинейные колебания . . . . .	195
Глава 2. Колебания систем с несколькими степенями свободы . . . . .	218
§ 8. Свободные колебания . . . . .	218
§ 9. Вынужденные колебания . . . . .	257
§ 10. Критические состояния и устойчивость колебаний . . . . .	278
§ 11. Приближенные методы определения низших частот . . . . .	299
Список литературы . . . . .	303
Приложения . . . . .	305

Учебное издание

**Валерий Александрович Светлицкий**

**ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИИ**

Часть I

Редактор *Е. Н. Ставицкая*

Художник *С. К. Девин*

Технический редактор *О. В. Рыбина*

Корректоры *Л. И. Малютина, М. А. Василевская*

ЛР № 020523 от 23.04.92

Сдано в набор 25.11.93.

Подписано в печать 08.02.94

Формат 60×90 1/16

Гарнитура литературная

Бумага тип. №

Печать высокая.

Усл. печ. л. 19,25.

Уч.-изд. л. 22,72.

Тираж 2000 экз.

Заказ 5000

Изд. № 71

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 107005. Москва, 2-я Бауманская, 5.

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ

1400010, г. Люберцы 10, Октябрьский пр., 403

