



*И. М. Тернов*

**ВВЕДЕНИЕ  
В ФИЗИКУ СПИНА  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ  
ЧАСТИЦ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

И.М.ТЕРНОВ

# ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ СПИНА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

*Рекомендовано Государственным комитетом  
Российской Федерации по высшему образованию  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности "Физика"*



Издательство  
Московского университета  
1997

Рецензенты:

кафедра теоретической физики РУДН,  
проф. Б. И. Садовников

**Тернов И. М.**

Т 35 Введение в физику спина релятивистских частиц. — М.:  
Изд-во Моск. ун-та, 1997. — 240 с.  
ISBN 5-211-03376-0

В пособии рассматриваются вопросы теории спина релятивистских частиц, динамика спина при движении частиц во внешнем электромагнитном поле, проблема измерения спина и аномального магнитного момента электрона, а также ряд поляризационных и спиновых эффектов в электрослабых взаимодействиях фермионов, движущихся во внешнем электромагнитном поле.

Обсуждаются вопросы инженерной физики спина: создание поляризованных пучков частиц и управление поляризацией. Дан обзор ряда достижений физики высоких энергий, связанных с применением релятивистских пучков частиц с ориентированным спином.

Для студентов старших курсов физических факультетов университетов, а также для научных работников, преподавателей и аспирантов.

## Оглавление



*10/2/8*

Предисловие.....	5
Введение. Развитие теории спина.....	6
<b>Глава I. Проблемы описания спина в квантовой механике</b> .....	<b>18</b>
§ 1.1. Оператор момента количества движения и группа вращений координат	18
§ 1.2. Угловой момент в квантовой теории.....	22
§ 1.3. Оператор орбитального момента. Собственные функции и собственные значения.....	25
§ 1.4. Неприводимые представления группы вращений. Оператор спина.....	27
§ 1.5. Сохранение полного момента количества движения в релятивистской теории.....	31
<b>Глава II. Спин в релятивистской теории Дирака</b> .....	<b>36</b>
§ 2.1. Эволюция квантового состояния в нерелятивистской теории Паули.....	36
§ 2.2. Спин в релятивистском движении. Уравнение Дирака.....	40
§ 2.3. Оператор спина. Преобразование Фолди-Вутхайзена.....	46
§ 2.4. Спиновые состояния электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле.....	59
§ 2.5. Квазирелятивистское приближение теории Дирака. Физическая интерпретация спиновых взаимодействий.....	62
§ 2.6. Эволюция спина электрона в представлении Гейзенберга. Уравнение Баргманна-Мишеля-Телегди.....	69
<b>Глава III. Поляризационные эффекты при движении и излучении         фермионов во внешнем электромагнитном поле</b> .....	<b>75</b>
§ 3.1. Метод точных решений. Представление Фарри. Точные решения уравнения Дирака.....	75
§ 3.2. Поляризационные свойства электромагнитного излучения. Матрицы плотности.....	86
§ 3.3. Поляризационные и спиновые свойства излучения Черенкова.....	92
§ 3.4. Поляризационные и спиновые эффекты в синхротронном излучении.....	98
§ 3.5. Квантовая теория эффекта радиационной поляризации.....	116
§ 3.6. Спиновые эффекты в процессах однофотонной аннигиляции и рождения электрон-позитронных пар в магнитном поле.....	123
§ 3.7. Рассеивание света на электроне, движущемся в поле плоской электромагнитной волны.....	130
§ 3.8. Спиновая структура бета-распада нейтрона в сильном магнитном поле	135
§ 3.9. Динамическая природа аномального магнитного момента электрона....	140

Глава IV. Проблема измерения спина электрона .....	158
§4.1. Классический эксперимент Штерна и Герлаха. Резонансный метод Раби .....	158
§4.2. Прецизионное измерение спинового магнитного момента электрона и позитрона (Вашингтонский эксперимент) .....	164
§4.3. Прецизионный метод измерения поляризации. Аномальный магнитный момент мюона .....	171
Глава V. Вопросы инженерной физики спина .....	176
§5.1. Источники поляризованных частиц. Проблема создания пучков релятивистских частиц с ориентированным спином .....	176
§5.2. Стабильность поляризации частиц при их движении в фокусирующем магнитном поле циклического ускорителя и накопительного кольца. Резонансная деполяризация .....	181
§5.3. Радиационная поляризация электронов и позитронов в накопительных кольцах .....	188
§5.4. Управление поляризацией. Создание пучков частиц с заданной ориентацией спина .....	198
§5.5. Измерение поляризации пучков релятивистских частиц .....	203
Глава VI. Поляризационные пучки частиц и новые возможности физического эксперимента .....	217
§6.1. Действующие коллайдеры — источники поляризованных частиц .....	217
§6.2. Экспериментальное наблюдение спиновой зависимости процессов на встречных пучках поляризованных электронов .....	222
§6.3. Поляризационные эффекты при взаимодействии пучков протонов с ориентированным спином .....	231
§6.4. Исследование спиновой структуры нуклона .....	234
Литература .....	238

## Предисловие

Это учебное пособие написано на основе лекционного курса “Квантовая механика”, читаемого автором в течение ряда лет студентам физического факультета Московского университета. В книгу вошли также лекции из специальных курсов, читаемых студентам-теоретикам.

В задачу автора входило изложение развития релятивистской квантовой теории спина релятивистских частиц. В последние годы в физике высоких энергий наблюдается возрастание интереса к поляризационным явлениям как новому, а иногда и уникальному источнику информации о природе взаимодействия частиц. Изучение спиновой зависимости физических процессов привело к ряду выдающихся достижений, и физика спина в наши дни выделилась в самостоятельное перспективное научное направление.

В книге принята достаточно простая форма изложения. Это делает ее доступной для широкого круга студентов физических факультетов университетов, а также для научных работников, преподавателей и аспирантов. В предлагаемом читателям учебном пособии рассматриваются общие проблемы теории спина релятивистских частиц, задачи описания спиновых состояний частицы, а также сложности процесса измерения спина независимо от орбитального движения частицы.

В книге излагается “метод точных решений”, в основе которого лежат точные решения уравнения Дирака для частицы во внешнем электромагнитном поле. С помощью этого метода оказалось возможным предсказать и установить ряд принципиально новых спиновых эффектов: эффект радиационной поляризации электронов и позитронов при их движении в накопительных кольцах, динамическую природу аномального магнитного момента электрона, спиновые закономерности в процессе бета-распада во внешнем поле, а также ряд других.

В книге рассмотрены также некоторые вопросы инженерной физики спина — создание пучков релятивистских частиц с ориентированным спином и управление поляризацией. Рассматривается ряд выдающихся экспериментов, проведенных с поляризованными частицами и приведших к существенно новому пониманию природы взаимодействия частиц. Анализируются также новые возможности изучения физики спина в связи с перспективой введения в строй коллайдеров нового поколения.

Автор выражает искреннюю благодарность своим коллегам — В. Г. Багрову, В. А. Бордовицыну, А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому, научное общение с которыми стимулировало создание этой книги. Их замечания всегда оказывались ценными, а дискуссии плодотворными.

Автор приносит благодарность А. П. Крыловой и В. И. Королевой за помощь в составлении библиографии и подготовке рукописи к печати.

Москва, 1993

## РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ СПИНА

В 1808 г. французский физик Этьен Малюс, наблюдая отблески лучей заходящего солнца, отраженных в стеклах окна Люксембургского дворца, обнаружил, что отраженный свет проходит через пластинку исландского шпата без двойного лучепреломления: второе изображение исчезает. Отраженный от поверхности стекла свет приобретал новое, неизвестное ранее свойство: он был поляризован (этот термин ввел Малюс). Так впервые, в результате отражения, был получен поляризованный пучок фотонов — частиц с массой покоя, равной нулю. Это произошло за 90 лет до открытия электрона (Дж. Томсон, 1897).

В 1921 г. Штерн и Герлах, пропуская пучки атомов в возбужденном состоянии через неоднородное магнитное поле, наблюдали ориентированное квантование пучков частиц с массой покоя, отличной от нуля. Было установлено, что пучок атомов в неоднородном магнитном поле разделяется на две компоненты в соответствии с правилами квантования собственного (спинового) магнитного момента электрона. В опытах Штерна и Герлаха впервые были получены поляризованные пучки частиц с отличной от нуля массой покоя.

Возвращаясь к открытию Малюса, подчеркнем здесь, что более 100 лет разделяют два замечательных достижения физического эксперимента. Однако интересно заметить, что природа физического явления поляризации и в опытах Малюса, и в опытах Штерна и Герлаха одинака: она связана с замечательным фундаментальным свойством частиц — их спином, собственным моментом количества движения.

Известный с конца прошлого столетия электрон относится к числу хорошо изученных элементарных частиц. В течение длительно-го времени предполагалось, что основные свойства электрона можно охарактеризовать с помощью величин массы покоя и заряда, определяющих индивидуальность частицы, а также ее взаимодействие с другими частицами и полями. Однако уже более 60 лет тому назад была открыта еще одна фундаментальная величина, характеризующая свойства электрона наряду с массой, зарядом, — спин, причем спиновые свойства частиц оказались весьма существенными, поскольку они не только определяют статистические закономерности поведения коллективов частиц, но и вносят вклад в кинематику частиц, а также в законы их взаимодействия. Развитию теории спина предшествовало известное накопление экспериментальных фактов, которые невозможно было объяснить свойствами одного лишь орбитального движения, т. е. перемещения частицы в пространстве. Так, в 1915 г.

Дейнштейн и де Гааз поставили уникальный эксперимент по проверке гиромагнитного отношения  $\mu_z/L_z = -ge/2mc$  ( $e = -e_0$  — заряд электрона), т. е. отношения величин проекций магнитного и механического моментов. В этом эксперименте исследовалось изменение орбитального механического момента количества движения стержня, изготовленного из магнитного материала и помещенного в магнитное поле. При изменении направления внешнего магнитного поля стержень испытывал движение вокруг оси, параллельной полю. Неожиданно оказалось, что при этом  $g$ -фактор равен 2 (в то время как для орбитального движения  $g = 1$ ). Таким образом, было установлено, что само явление магнетизма не связано с орбитальным движением электронов.

Вначале это казалось совершенно необъяснимым, а между тем дальнейшие эксперименты принесли новые неожиданности: в опытах Штерна и Герлаха (1922) было обнаружено двукратное расщепление пучка атомов, находящихся в невозбужденном состоянии. В результате прохождения такого пучка через неоднородное магнитное поле величина расщепления оказывалась равной  $\pm\mu_0 H$ , где  $\mu_0 = e_0 \hbar / 2mc$  — магнетон Бора. С точки зрения классической физики этого не должно было быть, поскольку в невозбужденном состоянии атома его орбитальный момент равен нулю.

Большое значение в дальнейших исследованиях, связанных с изучением природы электрона, имел эффект Зеемана — расщепление спектральных линий излучения, испускаемого атомами во внешнем магнитном поле. Вопреки обычной классической теории, в соответствии с которой в опытах должно было наблюдаться расщепление спектральной линии на две компоненты:  $\omega = \omega_0 \pm e_0 H / 2mc$  (нормальный эффект Зеемана, 1896), подобную картину можно было наблюдать только в случае сильного магнитного поля. В обычных же условиях расщепление оказывалось более сложным и получило название аномального эффекта Зеемана, сыгравшего решающую роль в открытии спиновых свойств электрона.

Количественный анализ экспериментальных наблюдений настоятельно подсказывал необходимость введения наряду с целыми квантовыми числами также полуцелых величин. Стало очевидным, что для описания движения электрона кроме обычных трех степеней свободы необходимо ввести четвертую — “внутреннюю” — степень свободы, не связанную с перемещением частицы в пространстве. Так появилась мысль о том, что электрон наряду с орбитальным моментом количества движения должен обладать также собственным, или спиновым механическим (и магнитным) моментом, не связанным с орбитальным движением частицы.

Эти соображения и легли в основу гипотезы Уленбека и Гаудсмита (учеников Пауля Эренфеста) — гипотезы о вращающемся электро-не (1925). В соответствии с этой гипотезой постулируется, что электрон обладает спиновым механическим моментом количества движения, равным половине кванта действия, т. е.  $\hbar/2$ . Проекция этого собственного момента на любое направление может принимать только

два альтернативных значения  $s_z = \pm \hbar/2$ . Электрону также приписывается наличие спинового магнитного момента, численно равного магнетону Бора  $\mu_0 = e_0 \hbar / 2mc$ , причем проекция его может принимать также только значения  $\mu_z = \pm \mu_0$ .

Гипотеза о спине, явившаяся ярким моментом в исследовании свойств электрона, открыла возможность объяснения целого ряда экспериментальных фактов, и прежде всего опытов Эйнштейна и де Гааза, а также Штерна и Герлаха. Действительно, гиромагнитное отношение  $g = 2$ , обнаруженное в эксперименте по перемагничиванию магнитного стержня Эйнштейна и де Гааза, для спиновых механического и магнитного моментов выполняется автоматически, а двукратное расщепление пучка атомов в возбужденном состоянии после их прохождения через неоднородное магнитное поле находит объяснение в квантовании проекции спинового магнитного момента.

И тем не менее гипотеза Уленбека и Гаудсмита вначале была встречена достаточно сдержанно и воспринималась критически. Основные моменты сомнений и критики гипотезы о вращающемся электро-не касались попытки создания классической модели спина. Уленбек и Гаудсмит пытались связать внутреннюю степень свободы частицы с электроном, протяженным в пространстве в виде шарика-волчка, вращающегося вокруг собственной оси, — отсюда произошло и само название “спин электрона” (от английского глагола to spin — вращаться). Эта модель вращающегося электрона (spinning electron), классическая в своей сущности, вызывала ряд тревожных сомнений, поскольку, в частности, линейная скорость вращения электрона-волчка должна была во много раз превышать скорость света\*.

В том же 1925 году Я. И. Френкель заложил основу классической теории эволюции спина электрона при движении частицы во внешнем электромагнитном поле. Решающим моментом в этой теории явился переход к точечной частице — это дало возможность снять трудности, наблюдавшиеся в модели протяженного волчка. Френкель ввел помимо трех обычных степеней свободы точечной частицы, связанных с ее орбитальным движением, еще и “вращательные” степени свободы, соответствующие  $2s + 1$  возможным ориентациям спина в системе покоя. Для электрона число возможных ориентаций спина равно 2. На этом пути было создано уравнение эволюции спина во внешнем электромагнитном поле, причем это уравнение обладало необходимыми ковариантными свойствами и описывало спин релятивистского электрона. Несмотря на дальнейшее развитие “классической” теории спина, подобный подход к описанию спина вызывал трудности и подвергался критике, поскольку эти уравнения являлись независимым от квантовой механики постулатом и не содержали постоянною Планка  $\hbar$ .

---

\* Заметим, что впервые идея о вращающемся электро-не была высказана Комптоном, а также обсуждалась Кронигом, но не получила в их работах развития.

Вскоре теория Френкеля уступила место последовательному квантовомеханическому описанию спина как существенно квантовой характеристики частицы и даже на длительный промежуток времени оказалась забытой. Однако не следует считать, что “классический” подход к описанию спина, предложенный Френкелем еще до создания квантовой механики Паули и Дирака, представляет лишь исторический интерес. Это направление, имеющее свои преимущества в смысле физической наглядности поведения спина частицы во внешнем поле, через много лет нашло подтверждение в строгой квантовой теории и в наши дни продолжает успешно развиваться (уравнение Баргмана—Мишеля—Телегди, 1959).

Введение спина электрона в квантовую механику впервые было осуществлено Паули, реализовавшим идеи Уленбека и Гаудсмита с помощью применения матричной алгебры (1927). Для того чтобы волновая функция электрона, подчиняющаяся уравнению Шредингера, несла информацию не только о положении частицы в пространстве, но и о состоянии спина, Паули предложил двухкомпонентное обобщение волновой функции с учетом двух возможных ориентаций электронного спина. В приближенной нерелятивистской теории Паули спин, таким образом, вводился феноменологическим постулатом, а само уравнение Паули имело вид двухкомпонентного обобщения уравнения Шредингера.

Законченная квантовая теория спина была создана Дираком (1928) после того, как им было предложено релятивистское волновое уравнение, описывающее движение электронов при любых значениях их энергии, включая даже ультрарелятивистскую область.

Важнейшим достижением теории Дирака явилось отсутствие необходимости вводить спин частицы, исходя из феноменологических соображений: спиновые свойства электрона были заложены уже в самом исходном уравнении. Строго говоря, в теории Дирака вообще нельзя разделить свойства электрона, обусловленные его орбитальным движением и спином, — они выступают здесь как единое целое, особенно в области высоких энергий частицы. И только в нерелятивистском приближении, когда скорость частицы значительно меньше, чем скорость света, уравнение Дирака переходит в приближенное уравнение Паули, и при этом спин частицы получает обычную интерпретацию.

Утрата наглядности обычных нерелятивистских величин в теории Дирака связана с особым характером движения релятивистского электрона. Вследствие того что в релятивистской квантовой механике имеет место интерференция зарядово-сопряженных состояний, т. е. состояний с положительными значениями энергии (частица) и отрицательно-энергетических состояний (античастица), обычное движение электрона сопровождается быстрыми осцилляциями (“дрожание” — *Zitterbewegung*), исключающими возможность сколь угодно точной локализации частицы в пространстве. Вследствие этих особенностей движения релятивистского электрона спиновые и орбитальные свойства частицы оказываются тесно связанными друг с другом. Так,

в частности, хорошо известно, что в теории Дирака (в отличие от теории Паули) сохраняется только полный момент количества движения  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  в нерелятивистском приближении приобретают смысл орбитального и спинового моментов. Таким образом, в связи с этим описание спина релятивистского электрона выступает как самостоятельная задача.

Важным этапом на пути решения этой проблемы является исследование возможности перехода к двухкомпонентной волновой функции вместо обычных для теории Дирака четырех компонент: только при этом условии просматривается возможность наглядной физической интерпретации спина. Такая задача была решена Л. Фолди и С. Вутхайзенем (1950), причем было показано, что точное решение этой задачи может быть получено только для свободно движущейся частицы. При этом оказалось возможным ввести унитарный оператор преобразования волновых функций, с помощью которого можно разделить состояния с положительными и отрицательными значениями энергии, и тогда четырехкомпонентный биспинор Дирака распадается на два двухкомпонентных спинора, подчиняющихся двум независимым уравнениям. Однако в случае, если электрон движется во внешнем электромагнитном поле, такое разделение оказывается затруднительным. Таким образом, возникла необходимость развития методов описания состояний поляризации электрона, допускающих их обобщение на случай движения частицы в поле.

Существо вопроса заключается в том, что для нахождения решений уравнения Дирака с определенным значением проекции спина (разделенных по спиновым состояниям) необходимо ввести соответствующий оператор поляризации, коммутирующий с гамильтонианом, обладающий свойствами релятивистской ковариантности и переходящий в системе покоя электрона в паулиевский оператор спина. Это соответствует идее Дарвина, предложившего еще на раннем этапе развития квантовой теории положить в основу определения поляризации релятивистского электрона значение его спина в системе покоя частицы. На этом пути оказалось возможным ввести релятивистский оператор спина  $O$ , а также его ковариантные обобщения: четырехмерный псевдовектор спина  $S^\mu$  и тензор поляризации  $P_{\mu\nu}$ . Эти операторы допускают простое обобщение на случай движения дираковской частицы во внешнем поле. Операторы поляризации открывают возможность найти решения уравнения Дирака, разделенные по спиновым состояниям, — ввести четвертое квантовое число, характеризующее спин — “внутреннюю” степень свободы частицы.

В последние годы успешно развивается новое направление квантовой электродинамики, в основе которого лежит так называемый “метод точных решений”. В этом методе в основу определения квантового состояния частицы во внешнем поле полагаются точные решения уравнения Дирака, при этом становится возможным изучение поведения частицы даже в сильном электромагнитном поле, включая его экстремальные значения.

Надо отметить, что изучение поведения вещества в критических условиях — важная проблема современной физики. С одной стороны, это обусловлено важностью технических приложений; с другой стороны, изучение взаимодействия вещества с экстремальным полем в критических условиях позволяет наблюдать и предсказывать новые физические явления: нелинейные по величине поля эффекты, новые каналы реакций, изменение характера движения частицы в области формирования процесса и связанное с этим изменение его вероятности.

Таким образом, метод точных решений оказался важным направлением в квантовой электродинамике. На его основе были предсказаны такие совершенно новые квантовые эффекты, как однофотонное рождение пар в сильном магнитном поле, квантовые флуктуации траектории электрона при его излучении в магнитном поле, эффект радиационной поляризации электронов и позитронов, развита нелинейная теория аномального магнитного момента электрона и др. Большое значение в этих исследованиях имели точные решения уравнения Дирака для частицы во внешнем поле, разделенные по спиновым состояниям. Этим особо подчеркивается значение операторов поляризации для исследования в области физики поляризационных явлений.

Наряду с точными методами решения задач, связанных с поляризационными явлениями, в последние годы успешно развивается квазиклассический метод описания динамики спина, в основе которого лежит уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди (БМТ). Действительно, число задач, допускающих точное решение уравнения Дирака, весьма ограничено, и они могут служить лишь моделями конкретных физических процессов.

Реальные условия, в которых движутся частицы, подсказывают необходимость приближенных подходов к описанию динамики спина, одним из которых является квазиклассический метод (БМТ). Этот метод применим в условиях одночастичного приближения, когда можно отвлечься от процессов, связанных с рождением и аннигиляцией частиц. Очевидно, что при этом картина движения частицы упрощается: рассматриваются состояния только одного знака энергии, и “дрожание” исчезает.

Важно подчеркнуть, что уравнение БМТ совпадает с известным, уже упоминавшимся уравнением Френкеля, если в нем сделать необходимые изменения обозначений. В этом развитии теории можно усмотреть известный возврат к классической модели спина-точечного волчка, движущегося по релятивистским законам.

Как уже отмечалось, движение дираковской частицы является сложным и его интерпретация является непростой задачей. Однако физическая картина движения наглядно раскрывается в нерелятивистском приближении теории. При разложении гамильтониана уравнения Дирака в ряд по величине  $\beta = v/c$  в первом приближении возникает паулиевское взаимодействие спинового магнитного момента с внешним магнитным полем. А затем во втором порядке по  $\beta$  появляется реляти-

вистская поправка, а также спин-орбитальное и контактное взаимодействие электрона с внешним полем. В нерелятивистском приближении “дрожание” автоматически устраняется, и все операторы приобретают наглядный смысл, благодаря чему открывается возможность физической интерпретации сложнейшего характера движения электрона.

С помощью теории Дирака удалось объяснить особенности спектра энергии водородного атома: естественное расщепление энергетических уровней, происходящее как следствие релятивистского характера движения электрона и его спин-орбитального взаимодействия (тонкая структура уровней энергии). На основе этих достижений нашла решение задача об аномальном (сложном) эффекте Зеемана, не поддававшаяся объяснению в классической теории и в квантовой нерелятивистской теории. Анализ спин-спинового взаимодействия электрона и ядра привел к объяснению замечательного эффекта — сверхтонкого расщепления энергетических уровней водорода, обусловленного различной взаимной ориентацией спинов частиц. При этом была установлена возможность излучения атомарного водорода с характерной длиной волны 21 см — излучения, с которым связаны выдающиеся успехи радиоастрономии в решении ряда проблем, возникших при исследовании галактик.

Интересно заметить, что уравнение Дирака для электрона, движущегося в кулоновом поле ядра (водородный атом), решается точно (Дарвин, 1928; Гордон, 1928), и это открывает уникальные возможности для экспериментальной проверки основ теории. Большие успехи в экспериментальном исследовании спектральных закономерностей атома водорода были достигнуты в послевоенное время, когда усиленное развитие получил радиоспектроскопический метод исследования, основанный на прецизионном измерении частоты электромагнитных колебаний в области микроволнового диапазона (сантиметровый и миллиметровый диапазоны). Новые возможности, открывшиеся в физическом эксперименте, принесли и новые данные о природе электрона.

Радиоспектроскопический метод исследования был, в частности, успешно применен к исследованию сверхтонкой структуры уровней энергии водородного атома, а также к наблюдению эффекта Зеемана, сыгравшего уже не раз ключевую роль в процессе познания природы электрона. При этом было установлено, что результаты эксперимента обнаружили некоторые расхождения с теорией Дирака, которые можно было объяснить, если предположить, что магнитный момент электрона в действительности несколько больше, чем магнетон Бора. Теоретическое объяснение природы этого добавочного магнитного момента было дано Швингером (1948), показавшим, что магнитный момент электрона изменяется в результате взаимодействия электрона с электромагнитным вакуумом (вакуумный аномальный магнитный момент) и становится равным  $\mu = \mu_0(1 + a_e)$ ,  $a_e = (g - 2)/2 = \alpha/2\pi$ ,  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  — постоянная тонкой структуры. Взаимодействие электрона с квантовыми флуктуациями электромагнитного поля усложняет характер движения электрона: он движется подобно броуновской частице, испытывая на себе воздействие флуктуационных

сил. Это взаимодействие не учитывалось в теории Дирака, и его необходимо было ввести дополнительно. Таким образом, природа спинового магнитного момента электрона оказалась еще более сложной.

Дальнейшие исследования показали, что в общем случае движения электрона в электромагнитном поле проявляется динамическая природа аномального магнитного момента частицы: его нелинейная зависимость от энергии электрона и напряженности поля.

Заметим здесь, что развитие экспериментальной техники измерения величины спинового магнитного момента и его аномальной части ("прямая атака" на аномальный магнитный момент) в последние годы дало возможность достичь выдающихся результатов. Современное состояние физического эксперимента дает основания для оптимизма в отношении возможности экспериментальной проверки динамической природы магнитного момента электрона, которая явилась бы определенным этапом в познании многообразия свойств этой частицы.

Остановимся далее на роли спина во взаимодействии частиц. Спиновые свойства, как известно, присущи всем элементарным частицам, причем спин каждой частицы является такой же фундаментальной характеристикой, как масса или заряд. Как известно, все частицы делятся на два класса: с целым спином (бозоны) и с полуцелым (фермионы). Частицы целого спина подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, согласно которой в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц. В противоположность этому для частиц полуцелого спина справедлива статистика Ферми-Дирака, в соответствии с которой в каждом состоянии может находиться лишь одна частица с заданным значением проекции спина (принцип запрета Паули). Знание спина частиц является, таким образом, необходимым с точки зрения поведения их коллектива.

Одним из ярких примеров проявления спиновых статистических свойств является микроскопическая теория сверхпроводимости. Как известно, в основе этой теории лежит особое свойство электронов, проявляющееся при их движении в сверхпроводнике с сильным электрон-фотонным взаимодействием (взаимодействием электронов с решеткой кристалла). В результате этого взаимодействия между электронами возникают силы притяжения, превосходящие кулоновское отталкивание. Образуются квазичастицы — куперовские пары, в которых электроны обладают противоположно ориентированными спинами (спин куперовской пары равен нулю). Такая сложная частица ведет себя как бозон с зарядом  $2e$  (бозонизация), это и является ключевым моментом всей теории сверхпроводимости: все куперовские пары переходят теперь в одно и то же сверхпроводящее состояние, образуя когерентный конденсат.

Уже длительное время, начиная с пионерских работ Мотта (1929), существует интерес к изучению спинового взаимодействия — проявления спиновых свойств частиц в процессах рассеяния. Эксперименты по упругому и неупругому рассеянию частиц при их столкновении в на-

вестной проблемой изучения структуры частиц, поисками фундаментальных частиц, а также исследованием природы сил взаимодействия между частицами. Физика столкновений частиц бурно развивается и совершенствуется: возрастает энергия частиц, создаются поляризованные мишени и пучки частиц.

Еще в ранних работах Мотта было отмечено, что поляризованный пучок электронов рассеивается несколько иначе, чем неполяризованный: спиновые эффекты вносят свой вклад в процесс рассеяния. Этот вклад обусловлен спин-орбитальным взаимодействием, поскольку движущийся электрон с ориентированным спином взаимодействует с электромагнитным полем частиц мишени не только как заряд, но и как спиновый электрический момент. Интересным является далее и то обстоятельство, что при рассеянии неполяризованного вначале пучка электронов последний может частично поляризоваться. Это явление можно обнаружить с помощью экспериментов по двойному рассеянию: наблюдаемая во вторичном рассеянии электронов асимметрия может быть объяснена тем, что частицы во время вторичного рассеяния несут информацию о рассеянии на первой мишени, они как бы “запоминают” историю своего первоначального рассеяния. Степень асимметрии во вторичном рассеянии оказывается пропорциональной степени поляризации пучка электронов, приобретенной ими в первичном рассеянии.

Итак, пучок электронов при рассеянии на неподвижной мишени приобретает поляризацию: это напоминает поляризацию пучка фотонов (Малюс) при отражении света от диэлектрика. Спиновая зависимость обнаруживается не только при рассеянии частиц на неподвижной мишени, но также и при столкновениях: при столкновении поляризованных электронов процесс рассеяния сильно зависит от ориентации спинов частиц (Мёллер).

Мы остановились здесь на процессах упругого рассеяния. Однако очень важно заметить, что и процессы неупругого рассеяния также обнаруживают спиновую зависимость. Так, в частности, в явлениях двухфотонной аннигиляции электрон-позитронной пары  $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$  в случае продольно поляризованных частиц процесс рождения фотонов зависит от взаимной ориентации их спинов. Упомянем еще об одном процессе с явно выраженной зависимостью от поляризации частиц — комптоновском рассеянии фотонов на электронах. Если фотоны обладают круговой поляризацией и рассеиваются на поперечно поляризованных электронах большой энергии, то процесс рассеяния характеризуется зависимостью от поляризации электрона и круговой поляризации падающего фотона.

Исследование спиновых эффектов при взаимодействии частиц позволяет получить важную, иногда даже уникальную информацию о физических свойствах частиц и природе их взаимодействия. Развитие современной экспериментальной техники, достижение высокой точности в измерениях позволяют получить надежные данные о самых тонких физических характеристиках и явлениях. При этом спиновые эффекты дают информацию о “внутренних” степенях свободы,

характеризующих частицу, а данные крайне необходимы на современном уровне развитии физики, когда речь идет об исследовании структуры частиц, об открытии и наблюдении новых, неизвестных ранее элементарных частиц.

Мы достаточно подробно остановились на роли спиновых эффектов в квантовой электродинамике (КЭД). Однако значение спиновых явлений этим не ограничивается. Поляризация частиц уже в недавнем прошлом открыла возможность получения совершенно уникальной информации о законах природы при исследовании слабых взаимодействий. Достаточно вспомнить выдающиеся эксперименты Ву (1957) по бета-распаду поляризованных ядер, в которых было обнаружено фундаментальное явление несохранения четности. Эксперимент обнаружил асимметрию в вылете электронов: бета-электроны испускались преимущественно в направлении, противоположном спину ядер. Так была экспериментально подтверждена гипотеза Ли и Янга (1956) об отсутствии зеркальной симметрии в слабых взаимодействиях.

После опыта по бета-распаду поляризованных ядер во многих физических лабораториях мира был проявлен большой интерес к поляризованным мишеням и поляризованным пучкам частиц как к новым источникам информации о механизмах взаимодействия частиц — к изучению спиновой зависимости в физических явлениях.

В этой связи следует упомянуть о том, что эксперименты с поляризованными электронами и позитронами делают особенно информативным процесс их аннигиляции с последующим превращением в адроны, поскольку этот процесс существенно зависит от поляризации сталкивающихся пучков. Интересными оказались опыты по наблюдению струйной структуры рождения адронов в аннигиляции  $e^+e^-$ , реализованные на накопительном кольце SPEAR в Стенфорде (США). Обнаруженная в этих экспериментах азимутальная асимметрия адронного инклюзивного распределения подтвердила кварк-партонную модель адронов, и было также установлено значение спина кварков  $1/2$ .

Изучение спиновых корреляций дает возможность исследования структурных функций адрона, а также помогает в выборе между различными моделями взаимодействия. Важность этого направления исследований подчеркивается современным развитием квантовой хромодинамики (КХД) и большими достижениями эксперимента.

Применение пучков поляризованных частиц имеет также важное значение в постановке экспериментов с наблюдением интерференции электромагнитных и слабых взаимодействий. В этой связи следует подчеркнуть, что проектируемые на ближайшее будущее ускорители и коллайдеры с помощью реакций на встречных пучках дадут возможность повысить эффективную энергию ускоренных частиц при встречных столкновениях до таких значений, когда эффекты, обусловленные слабыми и электромагнитными взаимодействиями, окажутся сравнимыми по своей величине. В этих условиях весьма важно иметь возможность установить различие между вкладами от этих взаимодействий. Путь к решению этой задачи открывает применение пучков

поляризованных частиц, поскольку процессы, связанные со слабыми взаимодействиями, существенно зависят от продольной поляризации частиц, т. е. от ориентации их спина по отношению к направлению движения частицы.

В связи с развитием исследований по изучению поляризационных явлений — нового раздела физики высоких энергий — стала особо актуальной задача разработки источников поляризованных частиц высокой энергии. Проблема получения пучков частиц с ориентированным спином, обеспечение стабильности поляризации и управление ею составляют новую главу физики — инженерную физику спина.

Источником поляризованных пучков фотонов обычно являются релятивистские электроны или позитроны, движущиеся во внешнем электромагнитном поле. Так, в частности, хорошо известны и изучены поляризационные свойства синхротронного и ондуляторного излучений, однако для получения жестких фотонов высокой энергии используются некоторые другие физические эффекты, позволяющие повысить энергию фотонов при достижении высокой степени поляризации: рассеяние лазерного излучения на ультрарелятивистских электронах (обратный комптон-эффект), когерентное тормозное излучение электронов в монокристаллах и др.

Положение с созданием поляризованных релятивистских пучков заряженных частиц оказалось более сложным. Надо заметить, что в течение длительного времени не существовало прогресса в создании пучков поляризованных электронов и протонов высокой энергии. Существующие способы поляризации могли обеспечить лишь нерелятивистскую область энергий. Это прежде всего электроны бета-распада: они продольно поляризованы, далее — поляризация частиц при их рассеянии и, наконец, ориентация спинового магнитного момента частиц путем воздействия на них комбинациями электрического и магнитного полей. Все эти методы были ограничены в своих возможностях: они были неприменимы в нерелятивистской области энергий и, кроме того, давали недостаточную степень поляризации пучков, а также их слабую интенсивность.

Возникла мысль о возможности ускорения поляризованных вначале частиц до высоких энергий. В этой проблеме возникли свои трудности: нужен был источник частиц с заданной ориентацией спина, причем источник интенсивных пучков. Кроме того, поскольку частицы в ускорителе проходят огромный путь, необходимо было проанализировать деполяризующие факторы: возникновение резонансов, влияние неоднородностей поля вдоль траектории частицы, а также возможные другие источники деполяризации.

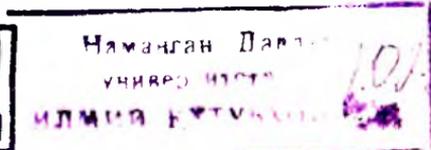
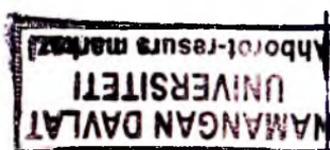
Впервые серьезные исследования динамики спина протона при его движении в циклическом ускорителе “Сатурн” были проведены во Франции (Сакле) в 1960–1962 гг. Изучалась возможность ускорения протонов с ориентированным спином, и было установлено, что движение спина теряет устойчивость, когда частота прецессии спина близка к комбинации частот орбитального движения. Надлежащим

выбором параметров ускорителя и энергии частицы можно избежать деполаризующих резонансов. Эти исследования открыли возможность ускорения поляризованных протонов. Однако важная задача получения релятивистских пучков поляризованных электронов и позитронов оказалась неразрешенной, и любой прогресс в этом направлении имел бы большое значение.

В 1961–1963 гг. автору удалось предсказать, а затем совместно с А. А. Соколовым рассчитать эффект радиационной поляризации электронов и позитронов при их длительной циркуляции в накопительных кольцах. При этом синхротронное излучение приводит к преимущественной ориентации спина частиц. Пучок электронов становится поляризованным, причем спин частиц оказывается направленным против внешнего магнитного поля — поперечная поляризация. Так был открыт эффект радиационной поляризации электронов. Для позитронов этот эффект также имеет место, однако спин позитронов ориентируется при этом противоположно электронному спину. Теоретические исследования вначале были проведены для модели однородного поля.

В условиях движения частиц в реальных накопительных установках возникает ряд дополнительных факторов, влияющих на устойчивость ориентации спина и способных вызвать деполаризацию пучка. В ряде работ, выполненных в ИЯФ СО АН СССР под руководством А. Н. Скринского, был проведен детальный анализ влияния конкретных условий движения заряда в накопительном кольце на процесс поляризации. Итог этих исследований оказался весьма оптимистичен: вплоть до энергий электронов порядка 100 ГэВ принципиально возможно обеспечить устойчивую поляризацию пучков частиц, близкую к предсказанной в модели однородного поля. Через несколько лет после теоретического предсказания эффект радиационной поляризации наблюдался экспериментально во Франции (Орсе), в ИЯФ СО АН СССР (Новосибирск) и несколько позже в США (Стенфорд), ФРГ (Гамбург), Японии и в CERN (LEP). В настоящее время этот эффект является единственным и в силу этого уникальным способом получения поляризованных пучков электронов и позитронов высокой энергии. Поляризация при этом возникает естественно: она происходит без какого-либо дополнительного воздействия на частицы со стороны внешних электромагнитных полей.

Физические эксперименты с применением поляризованных пучков релятивистских частиц становятся особенно перспективными в свете развития современной техники коллайдеров, открывающего область недостижимых до недавнего прошлого ТЭВ-ных значений энергии. Возрастающий интерес к физике поляризационных явлений проявляется в систематическом проведении международных конференций, посвященных физике спина, и это еще раз подчеркивает, что физика поляризованных частиц стала новым успешно развивающимся направлением.



# ПРОБЛЕМЫ ОПИСАНИЯ СПИНА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

## §1.1. Оператор момента количества движения и группа вращений координат

Проблема описания спиновых свойств частиц является одной из важнейших в квантовой теории. Этой проблеме посвящено много исследований, касающихся развития математического аппарата, а также анализа принципиальных трудностей в физической интерпретации спиновых закономерностей.

Рассмотрим общие основы описания спина, опираясь на групповые свойства преобразований координат, отражающие проявление симметрии в квантовых системах. Подобный подход открывает возможность простого и наглядного объяснения физической картины общности явлений и установления их связи с фундаментальными свойствами пространства, и в частности с его изотропностью. Важность значения симметрии для квантовой механики была установлена в работах Вейля, Вигнера и Ван-дер-Вардена (1928–1932).

Исследуем поведение волновой функции  $\Psi(\mathbf{r})$  частицы при преобразовании системы координат, в качестве которого будем рассматривать преобразование группы трехмерных вращений. Пусть, далее,  $G$  — элемент группы трехмерных вращений

$$\mathbf{r}' = G\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = G^{-1}\mathbf{r}'.$$

Тогда из очевидного равенства

$$\Psi'(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r})$$

можно получить

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(G^{-1}\mathbf{r}).$$

Здесь волновая функция определяется с точностью до фазового множителя, однако следует потребовать, чтобы операторы преобразования образовывали группу, изоморфную группе вращений, и тогда фазовый множитель обращается в единицу.

Исходя из этого можно утверждать, что существует унитарный оператор  $R$ , преобразующий  $\Psi$  в  $\Psi'$ :

$$\Psi' = R\Psi, \quad R = R(G), \quad RR^{-1} = 1.$$

С помощью того же самого оператора  $R$  можно определить трансформированное значение любого оператора  $F$ :

$$F' = RFR^{-1}.$$

Рассмотрим теперь бесконечно малое вращение координат на угол  $\delta\varphi$ . При этом (формула Эйлера)

$$G\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{r} + [\delta\varphi\mathbf{r}].$$

Найдем вызванное (индуцированное) этим поворотом преобразование волновой функции

$$R_{\delta\varphi}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(G^{-1}\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r} - [\delta\varphi\mathbf{r}]) = \{1 - \delta\varphi[\mathbf{r}\nabla]\}\Psi(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Таким образом, мы получим, что оператор вращения в пространстве волновых функций имеет вид

$$R_{\delta\varphi} = 1 - \delta\varphi[\mathbf{r}\nabla] = 1 - i\delta\varphi\mathbf{L} \quad (c = \hbar = 1), \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{L}$  — оператор орбитального момента количества движения. В частности, для поворота координат на угол  $\delta\varphi = \varepsilon$  вокруг оси  $z$  можно получить, что

$$r_z(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon L_z.$$

Заметим здесь, что в силу изотропности пространства гамильтониан системы (речь идет о свободных частицах) обладает симметрией: он остается инвариантным относительно вращения координат. Поэтому гамильтониан коммутирует с оператором  $R$  (а следовательно, и с  $\mathbf{L}$ ). Таким образом, инвариантности гамильтониана относительно группы преобразований — пространственных вращений соответствует закон сохранения момента количества движения (теорема Нетер).

Из полученного выражения (1.1) следует далее, что оператор момента количества движения  $\mathbf{L}$  является генератором (инфинитезимальным оператором) представления группы вращений в пространстве векторов состояния (в пространстве волновых функций)

$$X_z = \left. \frac{\partial r_z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -iL_z, \quad \text{или} \quad \mathbf{X} = -i\mathbf{L}, \quad (1.3)$$

и тогда

$$r_z(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon L_z}.$$

Заметим, что для поворота координат на угол  $\delta\varphi = \varepsilon$  вокруг других осей декартовой системы координат можно получить также

$$r_x(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon L_x}, \quad r_y(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon L_y}.$$

Определим теперь структурные константы  $c_{ij}^k$  группы трехмерных вращений в рассматриваемом представлении, т. е. найдем

$$X_i X_j - X_j X_i = c_{ij}^k X_k.$$

С этой целью учтем, что инфинитезимальный оператор  $\mathbf{X}$  преобразуется по правилу вектора

$$X'_v = X_v + \delta\varphi \mathbf{X}[\mathbf{u}\mathbf{v}]$$

(проекция на единичный орт  $\mathbf{v}$ , вращение на угол  $\delta\varphi$  вокруг орта  $\mathbf{u}$ ), а также по правилу оператора наблюдаемой

$$X'_v = r_{\delta\varphi} X_v r_{\delta\varphi}^{-1}, \quad \text{где} \quad r_{\delta\varphi} = 1 + \mathbf{X}\delta\varphi, \quad \mathbf{X} = -[r\nabla].$$

Сравнение этих двух преобразований

$$X'_v = X_v + \delta\varphi \mathbf{X}[\mathbf{u}\mathbf{v}], \quad X'_v = X_v + \delta\varphi (X_u X_v - X_v X_u)$$

приводит к перестановочному соотношению

$$X_i X_j - X_j X_i = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad (1.4)$$

где структурные коэффициенты группы определяются трехмерным абсолютно антисимметричным тензором третьего ранга  $\varepsilon_{ijk}$  — тензорная плотность Леви-Чивита\*.

Таким образом, перестановочные соотношения для операторов проекций орбитального момента

$$L_i L_j - L_j L_i = i\varepsilon_{ijk} L_k \quad (c = \hbar = 1) \quad (1.5)$$

вытекают из общих свойств группы вращений.

Полученные нами (см. (1.3)) операторы проекций орбитального момента количества движения представляют собою генераторы бесконечномерного (а следовательно, приводимого) представления группы трехмерных вращений в пространстве волновых функций. Такое представление называется регулярным и обозначается  $D_R$ .

\* Компоненты этого тензора равны 0, если хотя бы два индекса совпадают, либо они равны  $\pm 1$ . Если комбинацию индексов можно привести к последовательности 123 путем четного числа перестановок, то  $\varepsilon_{ijk} = 1$ , в случае нечетного числа перестановок  $\varepsilon_{ijk} = -1$ .

Сейчас мы подходим к наиболее существенному моменту. Пока речь шла только об орбитальном движении частицы и мы не рассматривали “внутренние степени свободы”, характеризующие спиновые состояния частицы. Теперь необходимо ввести наряду с пространственными переменными “внутренние”, или спиновые переменные; предполагается, что волновая функция имеет  $2s + 1$  компонент, где  $s$  соответствует спину частицы в единицах  $\hbar$ .

Тогда при преобразовании вращения координат волновая функция будет преобразовываться более сложным образом, чем это следует из (1.2): будет не только изменяться аргумент функции, но и перемешиваться ее компоненты:

$$\psi'_\alpha(\mathbf{r}) = R(G)\psi_\alpha(\mathbf{r}) = Q_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{r}), \quad (1.6)$$

Здесь  $Q_{\alpha\beta}$  —  $(2s + 1)$ -рядная матрица, соответствующая неприводимому представлению  $D(s)$  группы вращения в пространстве “внутренних” переменных волновой функции. Для преобразования, близкого к тождественному, можно записать

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{k=1}^s \delta\varphi_k (F_k)_{\alpha\beta},$$

где  $F_k$  — генераторы представления  $D(s)$ . Таким образом, для инфинитезимального преобразования волновой функции вместо (1.1) следует записать

$$\psi'_\alpha(\mathbf{r}) = (I - \delta\varphi[\mathbf{r}\nabla])(\delta_{\alpha\beta} - i\delta\varphi F_{\alpha\beta})\psi_\beta(\mathbf{r})$$

или

$$\psi'_\alpha(\mathbf{r}) = \{I\delta_{\alpha\beta} - i\delta\varphi(F_{\alpha\beta}I - i[\mathbf{r}\nabla])\delta_{\alpha\beta}\}\psi_\beta(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

Поэтому для генераторов представления мы получаем (см. (1.3))

$$(F_k)_{\alpha\beta} = -i\{L_k\delta_{\alpha\beta} + I(F_k)_{\alpha\beta}\}. \quad (1.8)$$

Это соответствует рассмотрению прямого произведения двух представлений

$$T^{R,S} = D_R \otimes D_S. \quad (1.9)$$

Вводя далее спиновые матрицы  $\mathbf{S} = \hbar\mathbf{F}$ , получаем, что  $\mathcal{F} = -i\mathbf{J}$ , где  $\mathbf{J} = \mathbf{L} \otimes I + I \otimes \mathbf{S}$  является оператором полного углового момента частицы. Подчеркнем здесь, что оператор орбитального момента действует только на аргумент волновой функции, а оператор спина — только на индекс компонент волновой функции, не касаясь аргумента. Вопрос о конкретной возможности подобного разделения спиновых свойств частицы и ее орбитального движения оставляем пока открытым с тем, чтобы к этому анализу вернуться позже. А пока рассмотрим явный вид операторов спина частицы.

## §1.2. Угловой момент в квантовой теории

Рассмотрим задачу о введении оператора углового момента в квантовой механике, придавая ей наиболее общий вид, и с этой целью положим в основу рассмотрения принцип соответствия, переходя от классических скобок Пуассона

$$\{u, v\} = \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

к квантовым:

$$\{u, v\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [u, v],$$

где величины  $u$  и  $v$  становятся операторами:

$$[u, v] = uv - vu.$$

При этом, в частности, замена классических скобок Пуассона квантовыми для компонент момента количества движения  $\mathbf{L} = [r\mathbf{p}]$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

приводит к перестановочным соотношениям для операторов проекций орбитального момента  $\mathbf{L}$  на декартовы оси координат:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Эти перестановочные соотношения мы положим в основу рассмотрения свойств эрмитового оператора углового момента  $\mathbf{J}$ , включающего в себя и орбитальный  $\mathbf{L}$  и спиновый  $\mathbf{S}$  моменты количества движения:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (1.10)$$

Далее для упрощения записи целесообразно ввести безразмерный оператор  $\mathbf{j}$ :  $\mathbf{J} = \hbar \mathbf{j}$ , для которого (1.10) переходит в формулу

$$[j_i, j_j] = i \varepsilon_{ijk} j_k. \quad (1.11)$$

Для дальнейшего весьма важно подчеркнуть, что перестановочные соотношения (1.11) являются отражением фундаментальных физических свойств оператора углового момента — они, в частности, не зависят от конкретного выбора представления. Поэтому в едином подходе к введению операторов углового момента в квантовой теории открывается возможность рассмотрения не только орбитального момента количества движения, но и спина.

Введем также оператор квадрата углового момента  $j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ , оператор проекции углового момента на оси  $z$  декартовой системы координат  $j_z$ , а также эрмитово сопряженные друг к другу операторы  $j_{\pm} = j_x \pm ij_y$ . При этом легко убедиться, что соответствующие перестановочные соотношения имеют вид

$$[j^2, j_j] = 0, \quad [j_{\pm}, j_z] = \mp j_{\pm}, \quad (1.12)$$

Таким образом, одновременно измеримыми являются квадрат углового момента, а также его проекция на одну из осей декартовой системы координат.

В силу коммутации  $j^2$  и  $j_z$  можно предполагать существование у них общего вектора состояния, такого, что

$$j^2|\lambda, \mu\rangle = \lambda|\lambda, \mu\rangle, \quad j_z|\lambda, \mu\rangle = \mu|\lambda, \mu\rangle. \quad (1.13)$$

При этом можно показать, что этот вектор состояния под воздействием  $j_{\pm}$  переходит в другой общий вектор состояния с измененным значением  $\mu$ . Действительно, рассмотрим достаточно очевидное соотношение

$$j_z j_{\pm} |\lambda, \mu\rangle = (j_{\pm} j_z + [j_z, j_{\pm}]) |\lambda, \mu\rangle = (\mu \pm 1) j_{\pm} |\lambda, \mu\rangle,$$

из которого следует, что оператор  $j_{\pm}$  либо увеличивает, либо уменьшает число  $\mu$  на единицу:

$$j_{\pm} |\lambda, \mu\rangle = N_{\pm} |\lambda, \mu \pm 1\rangle. \quad (1.14)$$

Для дальнейшего рассмотрения собственных функций и собственных значений операторов углового момента весьма существенным обстоятельством является то, что спектр собственных значений операторов  $j_z$  ограничен сверху и снизу:  $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$ . Это непосредственно следует из достаточно простых рассуждений. Действительно, поскольку все операторы проекций  $j$  на декартовы оси координат эрмитовы, можно записать, что

$$\langle \lambda, \mu | j^2 | \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu | j_x^2 | \lambda, \mu \rangle + \langle \lambda, \mu | j_y^2 | \lambda, \mu \rangle + \mu^2 \geq 0,$$

откуда непосредственно следует, что спектр значений  $\mu$  ограничен:

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}.$$

Поэтому очевидно, что действие операторов  $j_{\pm}$  в силу соотношения (1.14) имеет следующий вид:

$$j_+ |\lambda, \mu_{\max}\rangle = j_+ |\lambda, j\rangle = 0, \quad j_- |\lambda, \mu_{\min}\rangle = 0 \quad (1.15)$$

(в дальнейшем будем полагать, что верхняя граница  $\mu_{\max} = j$ ).

Теперь нетрудно найти коэффициент  $N_{\pm}$  в формуле (1.14). Поскольку  $\langle \lambda, \mu | \lambda, \mu \rangle = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} N_{\pm}^2 &= \langle \lambda, \mu | j_{\pm}^{\dagger} j_{\pm} | \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu | (j_x \mp ij_y)(j_x \pm ij_y) | \lambda, \mu \rangle = \\ &= \langle \lambda, \mu | j_x^2 + j_y^2 \pm i[j_x, j_y] | \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu | j^2 - j_z^2 \mp j_z | \lambda, \mu \rangle = \lambda - \mu^2 \mp \mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$j_{\pm} | \lambda, \mu \rangle = \sqrt{\lambda - \mu^2 \mp \mu} | \lambda, \mu \rangle. \quad (1.16)$$

И далее с помощью (1.15) и (1.16) находим

$$\lambda - j^2 - j = 0, \quad \lambda - \mu_{\min}^2 + \mu_{\min} = 0, \quad (1.17)$$

откуда следует

$$(j + \mu_{\min})(j - \mu_{\min} + 1) = 0.$$

Таким образом, определяется нижняя граница  $\mu_{\min} = -j$ , а сама величина  $\mu$  заключается в пределах

$$-j \leq \mu \leq j. \quad (1.18)$$

Собственные значения оператора квадрата углового момента согласно (1.17) оказываются равными  $\lambda = j(j+1)$ , т.е.

$$j^2 | \lambda, \mu \rangle = j(j+1) | \lambda, \mu \rangle. \quad (1.19)$$

Важно заметить, что рассматриваемая здесь система состояний  $| \lambda, \mu \rangle$  может быть получена из  $| j, -j \rangle$  действием оператора  $j_+$ , повышающего индекс  $\mu$  (см. (1.16)) путем его многократного применения. При этом, чтобы пройти от состояния  $-j$  до  $j$ , необходимо сделать  $2j+1$  шагов. Но количество шагов может быть только целым числом, поэтому  $j$  может быть целым  $(0, 1, \dots)$  или полуцелым  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ . Поэтому и  $\mu$  в зависимости от  $j$  (см. (1.18)) может принимать либо целые, либо полуцелые значения. Таким образом, переходя к матричному представлению для оператора углового момента, можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle j, m' | j_{\pm} | j, m \rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{m', m \pm 1}, \\ \langle j, m' | j_x | j, m \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{m', m \pm 1}, \\ \langle j, m' | j_y | j, m \rangle &= \mp \frac{i}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{m', m \pm 1}, \\ \langle j, m' | j_z | j, m \rangle &= m \delta_{m', m}, \quad \langle j, m' | j^2 | j, m \rangle = j(j+1) \delta_{m', m}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Полученные здесь формулы содержат все неприводимые представления алгебры Ли группы вращений. Однако мы начнем более подробное рассмотрение с регулярного бесконечномерного, а следовательно, приводимого представления  $D_R$ , генераторами которого являются операторы компонент орбитального момента количества движения (см. (1.3))\*.

### §1.3. Оператор орбитального момента.

#### Собственные функции и собственные значения

Рассмотрим оператор орбитального момента, который в координатном представлении имеет вид

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = -i\hbar[\mathbf{r}\nabla].$$

Этот оператор, отражающий связь с пространственным движением частицы, удовлетворяет перестановочным соотношениям (1.5). Наряду с операторами проекций орбитального момента на декартовы оси координат ( $L_1, L_2, L_3$ ) введем также оператор квадрата момента  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ , который коммутирует со всеми операторами  $L$ :

$$[L^2, L_i] = 0. \quad (1.21)$$

Иначе говоря, этот оператор  $L^2$  коммутирует со всеми генераторами группы трехмерных вращений  $SO(3)$  в пространстве волновых функций (оператор Казимира).

Наиболее удобной для записи этих операторов является сферическая система координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

в которой

$$\begin{aligned} L_1 &= i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_2 &= i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

\* Как известно, если в пространстве представления группы существует нетривиальное инвариантное подпространство, представление является приводимым. Если же такого подпространства нет, представление является неприводимым.

причем

$$L^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (1.23)$$

где  $\nabla_{\theta, \varphi}^2$  — оператор Лежандра.

Поскольку операторы  $L$  и  $L^2$  коммутируют друг с другом, они обладают полной системой общих волновых функций — это суть сферические или шаровые функции  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ :

$$\langle \theta, \varphi | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (1.24)$$

где  $P_l^m(x)$  — присоединенный полином Лежандра:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l+m} \frac{(x^2-1)^l}{2^l l!}, \quad (1.25)$$

причем

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x).$$

Условие однозначности  $Y_l^m$  требует периодичности по углу  $\varphi$ :  $Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi + 2\pi)$ , откуда следует, что собственные значения оператора  $L_z$

$$L_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m \quad (1.26)$$

могут быть только целыми числами:  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  ( $m$  — магнитное квантовое число в теории водородоподобного атома). Требование конечности  $Y_l^m$  на интервале изменения угла  $0 \leq \theta \leq \pi$  приводит к условию целочисленности орбитального квантового числа:

$$L^l Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Поскольку сферические функции образуют ортонормированный базис

$$\oint Y_l^{m'}{}^* Y_l^m d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

любую квадратично интегрируемую функцию  $\psi(\theta, \varphi)$  на единичной сфере можно представить в виде разложения по этому базису:

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l^m Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (1.28)$$

т. е. по состояниям  $|l, m\rangle$  с определенными моментами и их проекциями. Это соответствует редукции приводимого регулярного представления  $D_R$  группы пространственных вращений  $SO(3)$  на неприводимые представления  $D(l)$ :

$$D_R = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D(l). \quad (1.29)$$

#### §1.4. Неприводимые представления группы вращения.

##### Операторы спина

Вернемся теперь к формулам (1.20), описывающим неприводимые представления алгебры Ли группы вращений. Нам необходимо определить явный вид матриц различных порядков, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (1.10).

В связи с этим заметим, что уравнения на собственные функции и собственные значения оператора  $J$

$$J^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle, \quad J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle \quad (1.30)$$

имеют решения не только для целочисленных значений  $j = l$  (как это было в (1.26) и (1.27)), но также и для полужелых значений. Это связано с тем, что алгебра Ли группы  $SO(3)$  имеет неприводимые представления любой размерности  $2j + 1$ , где  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Число  $j$ , определяющее данное неприводимое представление, характеризует вес данного представления  $D(j)$ . Рассмотрим простейшие неприводимые представления.

**1. Представление  $D(0)$  (скалярное).** В этом случае  $j = 0$ ,  $m = 0$ , размерность представления равна 1. Это соответствует единственному базисному вектору  $|0, 0\rangle$ , описывающему состояние с моментом 0 (бесспиновая частица). Все генераторы преобразования вращения в пространстве “внутренних” переменных являются просто нулями, и при таких преобразованиях векторы состояния не изменяются вообще.

**2. Представление  $D(1/2)$  (спинорное).** В случае спинорного представления  $j = 1/2$ ,  $m = \pm \frac{1}{2}$  размерность представления  $2j + 1$  равна 2, а матрицы генераторов поворота в пространстве спиновых переменных векторов состояния являются матрицами Паули\*:

$$\frac{1}{\hbar} S_j = \frac{1}{2} \sigma_j, \\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

\* Матрицы (1.31) являются также генераторами группы  $SU(2)$ , локально изоморфной группе вращений.

и

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = s(s+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{2}.$$

Важно здесь подчеркнуть, что и в спинорном представлении реализуются те же самые перестановочные соотношения (1.10), характерные для генераторов группы вращений  $SO(3)$ :

$$S_i S_j - S_j S_i = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k. \quad (1.32)$$

Именно это обстоятельство легло в основу введения спинового оператора в теории Паули:

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.33)$$

Мы здесь рассматриваем, однако, (1.33) не как постулат, а как следствие общего теоретико-группового подхода.

Как нетрудно убедиться, все матрицы Паули антикоммутируют между собой и квадрат каждой из них равен единице:

$$\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik}. \quad (1.34)$$

Заметим также, что

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (1.35)$$

С помощью генераторов группы поворотов в пространстве спиновых переменных вектора состояния (1.31) можно установить вид оператора поворота на конечный угол  $\varphi$  вокруг оси  $z$  (см. формулу (1.3)):

$$R_z(\varphi) = e^{-i\varphi\sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения следует, что при конечном повороте на угол  $2\pi$  оператор вращения приобретает знак  $-1$ :

$$r_z(2\pi) = -r_z(0) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы встречаемся со случаем двузначного представления группы  $SO(3)$ : каждому элементу группы соответствует два оператора  $\pm r_z(\varphi)$ . Однако следует иметь в виду, что разные результаты, получаемые при повороте на угол  $2\pi$ , не представляют трудностей, поскольку они ненаблюдаемы: хотя волновая функция и меняет знак, все наблюдаемые величины при повороте на угол  $2\pi$  не изменяются.

И наконец, найдем собственные функции оператора спина, подчиняя их требованию быть собственными для оператора проекции спина на ось  $z$  и для оператора квадрата спина.

Как уже отмечалось, в рассматриваемом спинорном представлении  $j = \frac{1}{2}$  и  $m = \pm \frac{1}{2}$  ( $-j \leq m \leq j$ ) и базисные векторы  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  и  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  описывают состояния со спином  $\frac{1}{2}$  и проекциями спина на ось  $z$ , равными  $\pm \frac{1}{2}$ . Волновая функция электрона в связи с этим является двухкомпонентной:

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

И ее мы подчиняем требованию быть собственной для оператора квадрата спина ( $\hbar = 1$ ):

$$S^2|\chi\rangle = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\chi\rangle = s(s+1)|\chi\rangle \quad (1.36)$$

и оператора проекции спина на ось  $z$ :

$$S_z|\chi\rangle = m|\chi\rangle = m|m\rangle. \quad (1.37)$$

Из этих формул следует, что спин электрона (в единицах  $\hbar$ ) равен  $\frac{1}{2}$ , а третья компонента спина принимает значения  $\pm \frac{1}{2}$ . Решение уравнения (1.37) приводит к следующим нормированным собственным векторам оператора:

$$\chi_{1/2}^{1/2} = \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2}^{1/2} = \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Эти векторы нормированы:

$$\left\langle \chi_{1/2}^{1/2} \left| \chi_{1/2}^{1/2} \right\rangle = \left\langle \chi_{-1/2}^{1/2} \left| \chi_{-1/2}^{1/2} \right\rangle = 1\right.$$

и взаимно ортогональны, и их можно выбрать в качестве базиса в пространстве спиновых функций.

**3. Представление D(1) (векторное).** В этом случае в формулах (1.20)  $j = 1$ ,  $m = 0, \pm 1$  ( $-j \leq m \leq j$ ) размерность представления  $2j + 1$  равна 3. Это представление называется векторным, и его генераторы имеют вид

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Базисные векторы описывают состояния с моментом 1 и его проекциями  $0, \pm 1$ :

$$|1, 0\rangle, \quad |1, 1\rangle, \quad |1, -1\rangle$$

и, будучи собственными функциями диагонального оператора  $J_3$  (см. (1.39)), имеют следующий вид:

$$|1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Эти базисные векторы описывают спиновые состояния векторных частиц (со спином 1). Заметим, что матрицы генераторов (1.39) несколько отличаются от матриц

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

являющихся генераторами группы вращений, определенными в соответствии с (1.3). Так, в частности, генератор поворота вокруг оси  $z$  имеет вид

$$X_3 = \left. \frac{\partial R_z^{(1)}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -i \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Следуя далее формуле (1.3), можно выбрать оператор проекции момента в виде

$$J'_3 = iX_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Нетрудно при этом показать, что  $J'_3$  и  $J_3$  связаны преобразованием подобия:

$$J'_3 = Q^{-1} J_3 Q, \quad (1.44)$$

где

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае собственные функции этого оператора и оператора квадрата момента будут иметь несколько иное (по сравнению с каноническим (1.40)) выражение:

$$|1, 0\rangle = \chi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |1, 1\rangle = \chi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1, -1\rangle = \chi_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

При этом, так же как и в случае (1.40), эти функции ортогональны друг к другу и нормированы на единицу:

$$\langle \chi_m^{(1)} | \chi_{m'}^{(1)} \rangle = \delta_{mm'}. \quad (1.46)$$

Собственные векторы (1.45) удобны при анализе спина фотона: если ось  $z$  направлена по импульсу частицы, то  $m = 1$  соответствует правой спиральности (правая круговая поляризация), а  $m = -1$  — левой спиральности (левая круговая поляризация). При этом условие поперечности электромагнитной волны исключает состояние  $\chi_0^{(1)}$ .

Здесь следует заметить, что обычное понятие спина как собственного момента частицы к фотону ввиду отсутствия у него массы покоя неприменимо, поскольку это связано с проблемой разделения момента количества движения фотона на орбитальную и спиновую части (см. [3]). Однако собственные векторы спина (1.45) могут оказаться полезными при построении волновых функций фотона из простых мультипликативных функций орбитального момента и спина:

$$\Psi(\mathbf{r}, s) = \sum_{m=-1}^1 \Phi_m(\mathbf{r}) \chi_m^{(1)}. \quad (1.47)$$

Мы закончили рассмотрение общей проблемы введения спина и, возвращаясь к формуле (1.10), еще раз подчеркнем, что генератором группы вращений является оператор полного момента  $\mathbf{J} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}$ . В случае частицы в нерелятивистской теории сохраняются обе величины: и орбитальный, и спиновый моменты. Только внешнее поле может изменить это правило. Однако в релятивистской квантовой механике ситуация изменяется: даже в случае свободного движения частицы сохраняется только полный момент количества движения. Сохранение полного момента вытекает из основ теории и заслуживает в силу этого особого рассмотрения.

### §1.5. Сохранение полного момента количества движения в релятивистской теории

Рассмотрим закон сохранения полного момента количества движения, следуя методу Лагранжа, поскольку, как известно, определение динамических инвариантов лагранжевой функции приводит непосредственно к доказательству законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения (теорема Нетер).

Перейдем к четырехмерному описанию пространства-времени на основе метрики, определяемой метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.48)$$

Принцип относительности утверждает инвариантность законов природы относительно преобразований Лоренца. Это означает, что уравнения поля должны оставаться неизменными при преобразованиях группы Лоренца–Пуанкаре, включающих в себя повороты системы координат в пространстве, псевдоповороты в плоскости пространство–время, а также преобразование трансляции. В частности, поворот в пространстве вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  описывается матрицей

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

поворот в плоскости  $(xt)$  (псевдповращение) характеризуется матрицей

$$T_{\tilde{\varphi}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \tilde{\varphi} & \operatorname{sh} \tilde{\varphi} & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \tilde{\varphi} & \operatorname{ch} \tilde{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{th} \tilde{\varphi} = \frac{v}{c} \quad (1.50)$$

и описывает переход к системе отсчета, движущейся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ .

В силу непрерывности этих преобразований можно рассматривать бесконечно малые преобразования, и в этой связи целесообразно ввести генераторы преобразований группы Лоренца в виде

$$X_k = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^k} T_{\varphi^k} \right|_{\varphi^k=0}, \quad \tilde{X}_k = \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}^k} T_{\tilde{\varphi}^k} \right|_{\tilde{\varphi}^k=0} \quad (1.51)$$

( $k = 1, 2, 3$ ) — шесть генераторов.

При этом, в частности, можно ввести более симметричную запись генераторов, если поставить в соответствие одному индексу  $k$  пару индексов  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  по правилу

$$X_{ik} = \varepsilon_{ijk} X_j, \quad X_{i0} = \tilde{X}_i \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.52)$$

(более подробно см. [4]). Тогда бесконечно малое преобразование координат при лоренц-поворотах можно представить в виде

$$\delta x^\nu = x^\mu \delta \omega_\mu^\nu, \quad (1.53)$$

где антисимметричный тензор второго ранга  $\delta \omega_\mu^\nu = -\delta \omega_\nu^\mu$  равен

$$\delta \omega_\mu^\nu = (X_{\alpha\beta})_\mu^\nu \delta a^{\alpha\beta}. \quad (1.54)$$

При этом  $a^{12} = \varphi^3, \dots, a^{10} = \tilde{\varphi}^1, \dots$

$$(X_{\alpha\beta})_\mu^\nu = \delta_\alpha^\nu g_{\mu\beta} - \delta_\beta^\nu g_{\mu\alpha}. \quad (1.55)$$

Здесь  $\delta_\alpha^\nu$  — символ Кронекера,  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор.

Далее необходимо ввести в рассмотрение поле, которое будем характеризовать с помощью волновой функции  $\psi^s(\mathbf{x})$ , где  $s = 1, 2, \dots$  — индекс компоненты функции. Как уже было сказано, наличие нескольких компонент у волновой функции дает возможность описания поляризованных свойств поля и связано со спином соответствующих этому полю частиц.

Функцию Лагранжа  $\mathcal{L}$  предполагаем зависящей от функций  $\psi^s(\mathbf{x})$  и их первых производных  $\psi_{,\nu}^s = \partial_\nu \psi^s$ , а также от четырехмерной координаты  $x$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^s(\mathbf{x}), \psi_{,\nu}^s(\mathbf{x}), \mathbf{x}).$$

Введем, далее, функционал действия

$$S = \int_V \mathcal{L}(\psi^s, \psi_{,\nu}^s, \mathbf{x}) d^4x, \quad (1.56)$$

где  $V$  — область интегрирования, и положим в основу рассмотрения вариационный принцип стационарности действия  $\delta S = 0$ . Вариация действия (1.56) определяется изменением лагранжевой функции за счет изменения функций поля

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}'(\psi'^s, \psi'_{,\nu}{}^s, \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\psi^s, \psi_{,\nu}^s, \mathbf{x}),$$

а также за счет изменения аргумента, входящего явно в лагранжиан

$$\delta \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^\infty(\psi'^J, \psi'_{,\nu}{}^J, \xi') - \mathcal{L}(\psi^J, \psi_{,\nu}^J, \xi),$$

причем  $\delta \mathcal{L}^* = \delta \mathcal{L} + \partial_\nu \mathcal{L} \delta x^\nu$ . Учитывая также изменение 4-объема интегрирования с помощью якобиана

$$d^4x' = d^4x(1 + \partial_\nu \delta x^\nu),$$

получим для вариации действия следующее выражение:

$$\delta S = \int_{V'} \mathcal{L}' d^4x' - \int_V \mathcal{L} d^4x = \int_V \left[ \delta \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right] d^4x.$$

Далее учтем, что вариация лагранжиана имеет вид

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s} \delta \psi^s + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}^s} \delta \psi_{,\nu}^s = \delta \psi^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}^s} \right] + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}^s} \delta \psi^s \right),$$

где  $\delta \psi^s$  — вариация волновой функции. И тогда принцип стационарности действия запишем в виде

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = 0, \quad (1.57)$$

где

$$\delta S_1 = \int_V d^4x \delta\psi^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} \right], \quad (1.58)$$

$$\delta S_2 = \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[ \mathcal{L} \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} \delta \psi^s \right]. \quad (1.59)$$

Будем далее предполагать, что уравнения Лагранжа-Эйлера для поля выполнены для всех точек пространства-времени. Тогда вариация действия  $\delta S_1 = 0$ . Теперь мы потребуем, чтобы  $\delta S_2 = 0$  для таких вариаций координат и функций поля, которые вызваны группой преобразований Лоренца-Пуанкаре. На этом пути можно убедиться в справедливости теоремы Нетер, которая утверждает, что инвариантности действия относительно какой-либо непрерывной группы преобразований соответствует закон сохранения.

Рассмотрим преобразование трансляции четырехмерной координаты  $\delta x^\mu = a^\mu$ . Выражение для вариации действия (1.59) можно привести к виду

$$\delta S_2 = \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left[ \mathcal{L} \delta^\nu_\lambda - \psi^s_{,\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} \right] \delta x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} \delta^* \psi^s \right\}. \quad (1.60)$$

Инвариантность действия относительно преобразования трансляции соответствует физическому свойству однородности пространства-времени. При таком преобразовании волновая функция не меняется вообще:  $\delta^* \psi^s = 0$ , а в силу произвольности  $\delta x^\lambda$  из равенства нулю интеграла (1.60) следует, что  $\partial_\nu T^{\lambda\nu} = 0$ , где

$$T^{\lambda\nu} = \psi^s_{,\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} - \mathcal{L} g^{\lambda\nu}. \quad (1.61)$$

Эта величина получила название канонического тензора энергии-импульса. Таким образом, в соответствии с теоремой Нетер из инвариантности действия относительно трансляций следует закон сохранения энергии и импульса. Тем самым устанавливается связь этих законов с однородностью пространства-времени.

Вернемся далее к вариации

$$\delta S_2 = - \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\lambda\nu} \delta x^\lambda + \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} \delta^* \psi^s \quad (1.62)$$

и рассмотрим бесконечно малое преобразование поворота системы координат, которое характеризуется антисимметричным тензором второго ранга  $\delta\omega^{\mu\rho}$ . В силу антисимметрии тензора получим

$$\delta x^\lambda = (x_\mu \delta^\lambda_\rho - x_\rho \delta^\lambda_\mu) \delta\omega^{\mu\rho}. \quad (1.63)$$

В соответствии с теоремой Нетер инвариантность действия при таком преобразовании соответствует физическому свойству изотропности пространства.

Далее необходимо задать закон преобразования волновой функции при повороте системы координат (внутренние спиновые переменные):

$$\delta^* \psi^s = (Q_{\mu\rho})^s_k \psi^k \delta\omega^{\mu\rho}. \quad (1.64)$$

Тогда из формулы (1.62) с учетом (1.63) и (1.64) получим

$$\delta S_2 = \int_V d^4x \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[ x_\rho T_\mu^\nu - x_\mu T_\rho^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} (Q_{\mu\rho})^s_k \psi^k \right] \delta\omega^{\mu\rho} = 0. \quad (1.65)$$

Введем теперь тензор орбитального момента количества движения (плотность):

$$L_{\mu\rho}^\nu = x_\rho T_\mu^\nu - x_\mu T_\rho^\nu \quad (1.66)$$

и тензор спина (собственного момента), характеризующего поляризационные свойства поля

$$S_{\mu\rho}^\nu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^s_{,\nu}} (Q_{\mu\rho})^s_k \psi^k. \quad (1.67)$$

Закон сохранения полного момента (1.65) можно представить в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции

$$\partial_\nu (L_{\mu\rho}^\nu + S_{\mu\rho}^\nu) = 0. \quad (1.68)$$

В то же время четырехмерная дивергенция орбитального момента количества движения (1.66) обращается в нуль только в том случае, когда канонический тензор энергии-импульса является симметричным, ибо

$$\partial_\nu L_{\mu\rho}^\nu = T_{\mu\rho} - T_{\rho\mu}. \quad (1.69)$$

Отсутствие симметрии тензора связано с поляризационными свойствами поля — со спином сопоставленных полю частиц.

Таким образом, закон сохранения полного момента количества движения вытекает из общих свойств симметрии квантовых систем. Что касается сохранения орбитального и спинового моментов в отдельности, то в случае релятивистских фермионов такое разделение даже в свободном движении не реализуется. Как это будет показано в дальнейшем, невозможность разделения орбитального и спинового моментов релятивистского электрона связана с интерференцией зарядово-сопряженных состояний частицы.

## СПИН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ДИРАКА

§2.1. Эволюция квантового состояния  
в нерелятивистской теории Паули

Введение спина электрона в квантовую механику впервые было осуществлено Паули (1927), реализовавшим идеи Уленбека и Гаудсмита с помощью применения матриц. При этом оператор спина выбирался таким образом, чтобы собственные значения операторов его проекций на любое направление были равны  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . С этой целью, как показал Паули (см. [5]), можно ввести двухрядные матрицы (см. (1.31))

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и выбрать оператор спинового механического и магнитного моментов в виде

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\mu} = -\mu_0\boldsymbol{\sigma},$$

где  $\mu_0 = e_0\hbar/2mc$  — магнетон Бора. Операторы проекций спина подчиняются перестановочным соотношениям, характерным для группы вращений

$$S_1S_2 - S_2S_1 = i\hbar S_3,$$

а матрицы Паули являются ее генераторами (спиновое представление группы  $SO(3)$ ) (см. гл. I).

Волновая функция является теперь обобщением волновой функции в теории Шредингера и несет информацию не только о положении частицы в пространстве, но и о спиновом состоянии. В соответствии с этим волновая функция в теории Паули должна зависеть не только от пространственных координат, но также и от спиновой переменной  $s$ :  $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, s, t)$ . Разложим эту функцию по системе ортогональных векторов состояния, собственных для оператора проекции спина на ось  $z$  (см. (1.38)):

$$\left| \frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Тогда получаем, что

$$\Psi(\mathbf{r}, s, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

т.е. функция становится двухкомпонентной, причем каждая из компонент связана с возможной ориентацией спина (поляризацией электрона).

В соответствии с принципом линейной суперпозиции состояний

$$\psi_1^* \psi_1 = w_1^\dagger, \quad \psi_2^* \psi_2 = w_1^\dagger$$

представляют собой плотность вероятности обнаружить частицу в заданной точке пространства с заданной ориентацией спина. Таким образом, роль спиновой переменной здесь выполняет дискретная переменная, принимающая два значения, соответствующих проекции спина на любое избранное направление (например, на ось  $z$  декартовой системы координат).

Эволюция волновой функции электрона в нерелятивистской теории определяется волновым уравнением Паули

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = [\mathcal{H}^{\text{Шр}} + \mu_0(\sigma \mathbf{H})] \Psi. \quad (2.3)$$

где  $\mathcal{H}^{\text{Шр}}$  гамильтониану Шредингера

$$\mathcal{H}^{\text{Шр}} = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi$$

добавляется феноменологически вводимая энергия взаимодействия магнитного спинового диполя  $\mu$  с внешним магнитным полем  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta E = -\mu \mathbf{H} = \mu_0(\sigma \mathbf{H}).$$

Особенно наглядно эта модель спина — магнитного диполя выступает, если рассмотреть уравнение эволюции для оператора магнитного момента  $\mu$  в представлении Гейзенберга:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}\sigma - \sigma\mathcal{H}) = [\Omega\sigma], \quad (2.4)$$

из которого видно, что спиновый магнитный момент прецессирует вокруг внешнего поля с циклотронной частотой  $\Omega = e_0 \mathbf{H}/mc$ .

При выводе (2.4) следует учесть, что для любых двух операторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , не содержащих матриц, справедливо равенство

$$(\sigma \mathbf{a})(\sigma \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + i\sigma[\mathbf{a}\mathbf{b}]. \quad (2.5)$$

В нерелятивистской теории Паули в случае свободной частицы орбитальный и спиновый моменты являются интегралами движения (каждый в отдельности). В случае движения электрона во внешнем поле положение изменяется, и в общем случае переменные спина и пространства не разделяются.

Однако в частном случае, когда  $\varphi = 0$ , а магнитное поле однородное (не зависит от координат), решение уравнения Паули (2.3) можно представить в разделенных переменных:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = f(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}.$$

Действительно, подставляя это решение в уравнение Паули, найдем, что

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \mathcal{H}^{\text{Шр}} f,$$

а для спиновой функции получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \mu_0(\sigma \mathbf{H}) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

При этом зависимость магнитного поля от  $t$  может быть произвольной. Мы вернемся к этому уравнению при решении проблемы измерения спина (резонансный метод Раби).

Несмотря на свои ограниченные возможности, нерелятивистское уравнение Паули явилось существенным этапом в развитии квантовой теории, положив начало развитию методов исследования одного из важнейших свойств электрона — его спина.

Рассмотрим теперь более подробно метод описания поляризации электронов с помощью спиновой матрицы плотности. Наиболее просто описание поляризации частицы можно провести в системе отсчета, где частица покоится. Тогда переменные пространственные и спиновые разделяются и спиновую матрицу плотности можно ввести по общему правилу, полагая

$$\rho = |s\rangle\langle s|, \quad (2.7)$$

где двухрядные матрицы  $|s\rangle$  характеризуют спиновое состояние:

$$|s\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \langle s| = (\alpha^* \beta^*), \quad \text{т. е.} \quad \rho = |s\rangle\langle s| = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & \beta\beta^* \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Как и любую двухрядную матрицу, (2.8) можно разложить по системе четырех линейно-независимых матриц: единичной и трем матрицам Паули. Тогда с учетом нормировки матрицы плотности  $\text{Sp}\rho = 1$  получим, что ее можно представить в виде

$$\rho = |s\rangle\langle s| = \frac{1}{2}(I + \zeta\sigma), \quad (2.9)$$

где  $I$  — единичная матрица, а вектор поляризации  $\zeta$  характеризует среднее значение вектора спина, в чем нетрудно убедиться, найдя среднее значение  $\frac{\hbar}{2}\langle\sigma\rangle$ :

$$\frac{\hbar}{2}\langle\sigma\rangle = \langle\mathbf{S}\rangle = \text{Sp}(\rho\mathbf{S}) = \frac{\hbar}{2}\text{Sp}(\rho\sigma) = \frac{\hbar}{2}\zeta.$$

Таким образом, вектору  $\zeta$  удобно приписать направление, совпадающее с направлением спина частицы:  $\zeta = \langle\sigma\rangle$ .

Заметим, что описание спина электрона (2.9) имеет аналогию с поляризационной матрицей плотности для фотонов. При этом две возможные ориентации спина в проекции на избранное направление в пространстве соответствуют двум возможным состояниям поляризации фотонов.

В общем случае мы встречаемся со смешанными квантовыми состояниями, которые нельзя, подобно чистому состоянию, описать с помощью одной функции. При этом можно рассматривать смешанное состояние как некогерентную смесь чистых состояний, и матрицу плотности, характеризующую спиновые свойства смешанного состояния, можно представить в виде

$$\rho = \sum_s w_s |s\rangle\langle s|, \quad (2.10)$$

где весовая функция  $w_s$  подчинена условию нормировки  $\sum_s w_s = w_1 + w_2 = 1$ . Тогда при разложении поляризационной матрицы плотности по системе Паули получим, что

$$\rho = \frac{1}{2} [I(w_1+w_2) + (w_1 s_{11} + w_2 s_{12})\sigma_1 + (w_1 s_{21} + w_2 s_{22})\sigma_2 + (w_1 s_{31} + w_2 s_{32})\sigma_3],$$

где  $s_{ij}$  — коэффициенты разложения. Полагая далее  $w_1 s_{11} + w_2 s_{12} = \zeta_1$  и т. д., вновь приходим к формуле (2.9), в которой теперь более наглядно вскрывается смысл степени поляризации частицы  $|\zeta| = \zeta$ :

$$0 \leq \zeta \leq 1,$$

причем  $\zeta < 1$  соответствует смешанному состоянию.

Таковы, если говорить кратко, основные моменты описания спина в нерелятивистской теории. Несмотря, однако, на ряд успехов, теория Паули оказалась далеко не совершенной. Эта теория не смогла дать объяснение целому ряду опытных фактов: экспериментальным данным наблюдения спектральных закономерностей излучения атомов и, в частности, тонкой структуры уровней энергии водородного атома, эффекта Зеемана и др. Становилось очевидным, что спин нельзя рассматривать совершенно изолированно от орбитального движения частицы. Спин представляет собой релятивистское свойство электрона и должен рассматриваться на основе строгой релятивистской теории.

## §2.2. Спин в релятивистском движении.

### Уравнение Дирака

Законченная теория спина была создана Дираком (1928), предложившим релятивистское волновое уравнение, описывающее движение электрона при любых значениях его энергии.

Уравнение Дирака потребовало введения четырех компонент волновой функции: расширение ранга матриц до четвертого связано с возможностью перехода частицы — электрона — в область состояний, характеризующих отрицательными значениями энергии. Такие состояния электрона, как известно, можно интерпретировать как античастицу — позитрон, обладающую положительными значениями энергии. Итак, уравнение Дирака для свободной частицы имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = [c(\alpha \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.11)$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$\sigma$ ,  $0$  и  $I$  — двухрядные матрицы Паули, а также нулевая и единичная матрицы. Для перехода к стандартным матрицам  $\gamma^\mu$  следует положить  $\alpha = \gamma^0 \gamma$ ,  $\rho_3 = \gamma^0$ ,  $\Sigma = \gamma^0 \gamma^5 \gamma$ ,  $\rho_1 = -\gamma^5$ , имея в виду, что  $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ . С помощью этих матриц уравнение Дирака (2.11) можно преобразовать к виду

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \Psi = 0, \quad (2.13)$$

где  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma)$ ,  $p_\mu$  — оператор четырехмерного импульса, причем введена система единиц, в которой  $c = \hbar = 1$ .

Входящая в эти уравнения волновая функция, представляющая вектор состояния, имеет 4 компоненты (биспинор):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Как уже отмечалось, это связано с тем обстоятельством, что в любой релятивистской теории возможны не только состояния с положительными значениями энергии (частица), но и состояния с отрицательными значениями энергии (античастица) — зарядово-сопряженные состояния.

Зарядово-сопряженные состояния в шкале энергии разделены энергетической щелью величиной  $\Delta E = 2mc^2$  (рис. 1), и в силу этого в классической теории отрицательно-энергетические состояния можно не рассматривать, ибо в классической теории дискретных переходов нет. Однако в квантовой теории состояния с отрицательными значениями энергии из рассмотрения исключить нельзя.

Лействительно, в квантовой теории рассматриваются переходы с дискретным изменением энергии, и вероятность перехода электрона в состояния с различным знаком энергии может оказаться не равной нулю: под влиянием внешнего поля вероятность таких переходов становится конечной величиной. Другими словами, электрон может преодолеть энергетическую щель, разделяющую состояния, принадлежащие различным знакам энергии.

Зарядово-сопряженные состояния имеют в квантовой теории существенное значение: они ограничивают возможность одночастичного решения проблемы, их интерференция создает известные трудности в физической интерпретации операторов. На этом мы остановимся в дальнейшем более подробно.

В теории Дирака нет необходимости "вводить" спин частицы, исходя из феноменологических соображений: спиновые свойства электрона заложены уже в исходном уравнении (2.11). Важно отметить, что в релятивистской теории Дирака (вопреки гипотезе Уленбека и Гаудсмита), строго говоря, вообще нельзя разделить свойства электрона, обусловленные орбитальным движением частицы и ее спином. Эти свойства выступают в описании релятивистской частицы как единое целое, в особенности в области высоких энергий частицы.

Рассмотрим орбитальный и спиновый моменты количества движения свободного электрона, когда оператор Гамильтона  $\mathcal{H}$  можно записать в виде

$$\mathcal{H} = c(\alpha p) + \rho_3 mc^2.$$

С этой целью найдем, что в представлении Гейзенберга:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathcal{H}] = c[\alpha p], \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathcal{H}] = -c[\alpha p], \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}], \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\mathbf{\Sigma}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, орбитальный момент количества движения в теории Дирака (даже в отсутствие внешнего поля) теряет свойство интеграла движения. Сохраняется лишь полный момент количества движения  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J} = 0.$$

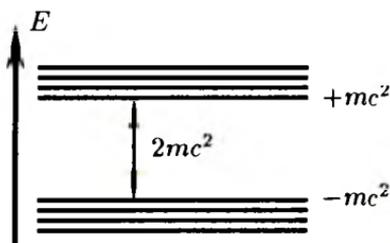


Рис. 1. Схема уровней энергии дираковского электрона

Как уже отмечалось, физическая интерпретация спина электрона и решение задачи о его измерении решаются наиболее просто в случае нерелятивистского электрона. В этих условиях спиновый момент сохраняется во времени и это открывает принципиальную возможность исследования спиновых эффектов независимо от орбитального движения частицы в пространстве.

Положение, однако, существенно меняется в релятивистской теории, где, как только что было показано, теория обнаруживает неразделимость свойств орбитального движения электрона и его спина. Рассмотрим в связи с этим более подробно особенности в физической интерпретации операторов Дирака в релятивистской теории. И прежде всего остановимся на роли интерференции зарядово-сопряженных состояний.

Существование зарядово-сопряженных решений уравнения Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}\Psi(\mathbf{r}, t)$$

(см. формулу (2.11) — рассматривается свободная частица) является автоматическим следствием теории, поскольку решения с положительными и отрицательными значениями энергии составляют полную систему. Действительно, полагая

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\epsilon Et/\hbar} \Psi(\epsilon, \mathbf{r}),$$

где  $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$  и  $\epsilon = \pm 1$ , получим, что положительно- и отрицательно-энергетические части волновой функции удовлетворяют стационарным уравнениям

$$\mathcal{H}\Psi(\epsilon) = \epsilon E \Psi(\epsilon), \quad \Psi^+(\epsilon) \mathcal{H} = \epsilon E \Psi^+(\epsilon),$$

причем эти решения взаимно ортогональны

$$\Psi^+(-)\Psi(+) = 0.$$

Таким образом, общее решение уравнения Дирака следует записать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(+)e^{-iEt/\hbar} + \Psi(-)e^{iEt/\hbar}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь плотность вероятности и плотность тока вероятности. В то время как плотность вероятности постоянна во времени

$$w = \Psi^+(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi(+)|^2 + |\Psi(-)|^2,$$

плотность тока свойством постоянства во времени не обладает:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= c\Psi^+ \boldsymbol{\alpha} \Psi = \\ &= c[\Psi^+(+) \boldsymbol{\alpha} \Psi(+) + \Psi^+(-) \boldsymbol{\alpha} \Psi(-)] + c[\Psi^+(+) \boldsymbol{\alpha} \Psi(-) e^{i\omega t} + \Psi^+(-) \boldsymbol{\alpha} \Psi(+) e^{-i\omega t}]. \end{aligned}$$

Это выражение содержит независимую от времени часть, на которую накладываются быстрые осцилляции с частотой  $\omega = 2E/\hbar$ , являющейся следствием интерференции зарядово-сопряженных состояний. Эти осцилляции Шредингер назвал "дрожанием" (Zitterbewegung).

В одночастичном подходе рассмотрение движения частицы, суперпозиции зарядово-сопряженных состояний. Одним из следствий этого является особый осциллирующий характер поведения значений операторов механических величин.

Действительно, исходя из уравнений в представлении Гейзенберга для произвольного оператора  $Q$

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}Q - Q\mathcal{H}),$$

нетрудно установить связь значения  $Q$  в момент времени  $t$  с начальным значением  $Q(0)$ :

$$Q(t) = e^{i\mathcal{H}t/\hbar}Q(0)e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}.$$

Мы приходим к выводу о том, что если оператор  $Q(0)$  коммутирует с гамильтонианом, то он постоянен во времени:  $Q(t) = Q(0)$ ; если же  $Q(0)$  антикоммутирует с гамильтонианом, его поведение во времени обладает осциллирующим характером, поскольку

$$Q(t) = Q(0)e^{-2i\mathcal{H}t/\hbar}. \quad (2.17)$$

Таким образом, интерференция состояний с различным знаком энергии частицы накладывает характерный отпечаток на операторные величины в теории Дирака, наделяя их, на первый взгляд, необычными свойствами и затрудняя физическое понимание операторов с классическими динамическими переменными. Например, при рассмотрении оператора скорости

$$\dot{x} = \frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}x - x\mathcal{H}) = c\alpha_1 \quad (2.18)$$

видно, что обычная связь между скоростью и импульсом частицы утрачена, ибо собственные значения оператора скорости оказываются равными  $\pm c$ .

Возможность наглядной физической интерпретации операторов в теории Дирака открывается в случае перехода к операторам с четной четностью, т.е. разделения операторов на четную и нечетную части. С целью выделения этих частей операторов введем знаковый оператор

$$\Lambda = \frac{\mathcal{H}}{|\mathcal{H}|} = \frac{\mathcal{H}}{E} = \frac{c(\alpha p) + \rho_3 mc^2}{E}. \quad (2.19)$$

Более простой вид оператор Гамильтона имеет в импульсном представлении. Унитарный оператор  $\Lambda$  коммутирует с оператором Гамильтона, и квадрат его равен 1 ( $\Lambda^2 = 1$ ). Действие этого оператора на волновую функцию в соответствии со знаком энергии имеет вид

$$\Lambda\Psi(\varepsilon) = \varepsilon\Psi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

причем

$$\Psi(+) = \frac{1}{2}(1 + \Lambda)\Psi, \quad \Psi(-) = \frac{1}{2}(1 - \Lambda)\Psi,$$

в силу чего можно определить операторы

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Lambda) \quad (2.20)$$

как проекторы на решения с положительным и отрицательным значениями энергии.

Теперь можно представить произвольный оператор  $Q$  в виде суммы, состоящей из четной  $[Q]$  и нечетной  $\{Q\}$  частей:

$$Q = [Q] + \{Q\}.$$

Четный оператор, по определению, не смешивает состояния с различными знаками энергии, и

$$[Q] = \frac{1}{2}(Q + \Lambda Q \Lambda), \quad (2.21)$$

при этом он коммутирует с гамильтонианом  $\mathcal{H}^*$ . Нечетный оператор меняет энергетический знак состояния

$$\{Q\} = \frac{1}{2}(Q - \Lambda Q \Lambda), \quad (2.22)$$

он антикоммутирует с гамильтонианом и в силу этого характерен осциллирующим поведением во времени (см. (2.17)).

Рассмотрим теперь в качестве  $Q$  матрицу  $\alpha_j$ , связанную с оператором скорости (2.15), и разложим ее на сумму четной и нечетной частей, полагая, что  $\alpha_j = [\alpha_j] + \{\alpha_j\}$ . Тогда в соответствии с определениями (2.21) и (2.22) получим, что четная часть матрицы  $\alpha_j$  сохраняется во времени и имеет классический аналог

$$[\alpha_j] = \frac{cp_j}{E} \Lambda = \frac{cp_j}{E} \frac{\mathcal{H}}{E} \quad (2.23)$$

\* Если  $Q$  не содержит операторов координаты.

(на решениях с положительной энергией — частица —  $\Lambda = 1$  и  $\{\alpha_j\} = cp_j/E$ , для античастицы импульс меняет знак:  $\{\alpha_j\} = -cp_j/E$ ). Поведение нечетной части  $\{\alpha_j\}$  не имеет классического аналога, оно характерно быстрыми осцилляциями

$$\{\alpha_j\} = \{\alpha_j(0)\}e^{-i\omega t}, \quad \omega = 2E/\hbar \quad (2.24)$$

и, таким образом,

$$\alpha_j = cp_j/E + c\{\alpha_j(0)\}e^{-i\omega t} \quad (2.25)$$

(для частицы). Отсюда следует, что скорость дираковской частицы осциллирует около классического значения

$$\dot{x} = c\alpha_1 = c^2p_1/E + c\{\alpha_1(0)\}e^{-i\omega t}. \quad (2.26)$$

Теперь рассмотрим среднее по времени значение оператора скорости. Оно совпадает с классическим выражением. Таким образом, скорость электрона можно представить в виде суммы двух величин: постоянной части  $c^2p/E$ , которая соответствует обычному классическому представлению о равномерном движении частицы (Шредингер назвал это “макроскоростью”), и осциллирующей части (“микроскорость”) с частотой колебаний  $\omega = 2E/\hbar$ .

Интегрируя выражение для скорости по времени, можно получить

$$x_j = x_j^0 + \frac{c^2p_j t}{E} + \{x_j\}, \quad (2.27)$$

где нечетная часть координаты описывает высокочастотные колебания, наложенные на микроскопическое движение:

$$\{x_j\} = \frac{i\hbar c}{2E}\{\alpha_j(0)\}e^{-i\omega t}. \quad (2.28)$$

Эти колебания имеют частоту  $\omega = 2E/\hbar$  и характерную амплитуду  $|\{x_j\}| = \frac{\hbar c}{2E}$ . Это “микродвижение” определяет предел точности в локализации электрона, обусловленный “дрожащим” характером движения частицы (Zitterbewegung): локализация электрона в области меньшей, чем  $\delta r \sim \hbar/mc$ , оказывается невозможной (рис. 2).

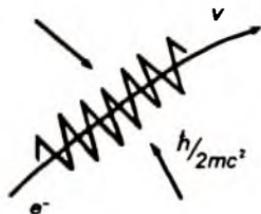


Рис. 2. Движение дираковского электрона (Zitterbewegung)

Вернемся теперь к выражению для орбитального и спинового моментов (2.15). Тогда, воспользовавшись выражением (2.24), получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = c\{\{\alpha(0)\} \times \mathbf{p}\}e^{-i\omega t}, \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = c\{\{\alpha(0)\} \times \mathbf{p}\}e^{-i\omega t}. \quad (2.29)$$

Если рассмотреть теперь поведение  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  в среднем по времени, то вклад осциллирующий исчезнет и эти величины будут сохраняться так же, как и в нерелятивистской теории Паули. Однако реальный физический смысл в строгом понимании квантовой теории имеет только полный момент количества движения. Дело здесь заключается в том, что спиновый механический момент частицы не является в полной мере независимым кинематическим свойством электрона, поскольку он также связан с движением частицы и не сохраняется во времени.

Заметим, что дополнительные степени свободы частицы связаны с внутренней динамикой электрона и проявляются как особое состояние осцилляторного типа в гейзенберговской картине движения. В течение длительного времени детали этого микродвижения не исследовались, однако изучение вопроса о “дрожании” электрона в последнее время стало привлекать внимание в связи с попытками создания физического образа релятивистской дираковской частицы. Zitterbewegung при этом рассматривается как наблюдаемый эффект, проливающий свет на динамику электрона. Дираковский электрон выступает не как точечная частица, а как протяженный объект ( $\delta r \sim \hbar/mc$ ), совершающий сложное движение, обусловленное интерференцией зарядово-сопряженных состояний.

Если встать на точку зрения, что осцилляторный характер микродвижения можно трактовать как движение по окружности радиуса  $\hbar/2mc$  (см. рис. 2), то при этом спин можно рассматривать как появление собственного механического момента частицы в виде

$$\mathbf{L}^{\text{микро}} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]^{\text{микро}}, \quad L \sim mcr = \hbar/2,$$

другими словами, спин можно рассматривать как особое состояние квантовой системы — состояние осцилляторного типа в гейзенберговской картине движения.

### §2.3. Оператор спина. Преобразование Фолди–Вутхайзена

Как было только что установлено, описание спина с помощью оператора  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ , полученного формальным расширением ранга матриц Паули:  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ , не приводит к успеху, поскольку этот оператор не сохраняется во времени, и спин должен рассматриваться в неразрывной связи с орбитальным движением частицы, ибо только полный момент  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  является интегралом движения.

В 1928 г. Дарвин выдвинул идею описания спина релятивистского электрона, положив в основу теории паулиевский оператор спина в системе покоя частицы. В связи с этим рассмотрим сейчас каноническое преобразование волновой функции Дирака, в результате которого осуществляется переход к двухкомпонентной волновой функции (представление Фолди-Вутхайзена, 1950).

Достаточно очевидно, что для описания спиновых состояний реальной частицы достаточно иметь всего две компоненты у волновой функции, однако попытки построения последовательной релятивистской двухкомпонентной теории успеха не имели. Это связано с тем, что, как уже отмечалось, четырехкомпонентная волновая функция уравнения Дирака описывает также зарядово-сопряженные решения, соответствующие античастице — позитрону.

Возникает вопрос: нельзя ли найти с помощью унитарного оператора для уравнения Дирака такое представление, в котором волновая функция разделялась бы на две независимые части, принадлежащие состояниям с различным знаком энергии?

В случае свободной частицы это оказывается возможным — это представление Фолди-Вутхайзена, которое приводит к двухкомпонентным волновым функциям, причем не только в системе покоя, но и в лабораторной системе отсчета. Волновая функция в представлении Фолди-Вутхайзена (ФВ) имеет две компоненты, отвечающие двум альтернативным проекциям спина. Однако точное решение эта задача имеет только в случае свободного движения частицы, если же движение частицы происходит во внешнем поле, подобный подход может быть реализован только приближенно (в квазирелятивистском приближении).

Рассмотрим кратко преобразование Фолди-Вутхайзена, и с этой целью введем оператор-проектор биспинора

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

и пространство “больших”  $\Phi$  и “малых”  $\chi$  компонент. Как известно [1], в нерелятивистском приближении  $\chi \sim \frac{v}{c}\Phi$  становится “малой” величиной. Этот оператор-проектор естественно представить в виде

$$\Gamma_{\pm}^{\Phi} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^0) = \frac{1}{2}(1 \pm \rho_3). \quad (2.30)$$

Из сравнения этого оператора с оператором-проектором на решения с положительными и отрицательными значениями энергии (2.20)

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Lambda)$$

легко установить, что в представлении Фолди-Вутхайзена (ФВ) матрица  $\gamma^0 = \rho_3$  выполняет роль знакового оператора. Действительно,

если представление ФВ реализуется с помощью унитарного оператора  $U$ , то он должен удовлетворять требованию

$$U U^\dagger = \rho_3, \quad (2.31)$$

или

$$U \mathcal{H} U^\dagger = \rho_3 E.$$

Это и является основой преобразования Фолди-Вутхайзена, поскольку уравнение Дирака для биспинора  $\Psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$  распадается на систему для двух двухкомпонентных функций

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi^\Phi = E \Phi^\Phi, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi^\Phi = -E \chi^\Phi \quad (2.32)$$

(свободная частица), поскольку

$$\Psi^\Phi = U \Psi. \quad (2.33)$$

Таким образом, спиноры  $\Phi$  и  $\chi$  оказываются полностью разделенными. Волновая функция теперь становится двухкомпонентной подобно  $\Psi$  в теории Паули, т. е. открывается путь к наглядной физической интерпретации операторов.

Итак, будем искать преобразование, которое устраняет из уравнения Дирака все нечетные операторы ( $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma^5$ ), связывающие между собой "большие" и "малые" компоненты, и сохраним только четные операторы ( $1$ ,  $\rho_3$ ,  $\Sigma$ ), которые таким свойством компонент не обладают.

Рассмотрим оператор

$$Q = \rho_1 Q_1 + \rho_3 Q_3, \quad (2.34)$$

в которой  $\rho_1 = -\gamma^5$  и  $\rho_3$  — матрицы Дирака, а  $Q_1$  и  $Q_3$  — коммутирующие с  $\rho_1$  и  $\rho_3$  операторы. Согласно Фолди-Вутхайзену, существует такое преобразование, что

$$Q^\Phi = U Q U^\dagger = \rho_3 (Q^2)^{1/2}. \quad (2.35)$$

Действительно, рассмотрим оператор поворота

$$U = e^{-i\rho_2 \varphi/2}, \quad (2.36)$$

где  $\varphi$  коммутирует со всеми матрицами  $\rho$ , а также с  $Q_1$  и  $Q_3$ . Тогда нетрудно убедиться в том, что оператор (2.34) в представлении (ФВ) имеет вид

$$Q^\Phi = U Q U^\dagger = \rho_1^\Phi Q_1 + \rho_3^\Phi Q_3,$$

где

$$\rho_1^\Phi = U\rho_1U^+ = \rho_1 \cos \varphi - \rho_3 \sin \varphi, \quad \rho_3^\Phi = U\rho_3U^+ = \rho_3 \cos \varphi + \rho_1 \sin \varphi.$$

И тогда

$$Q^\Phi = \rho_3(Q_3 \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi) + \rho_1 \cos \varphi(Q_1 + Q_3 \operatorname{tg} \varphi).$$

Для устранения нечетных операторов выберем

$$\operatorname{tg} \varphi = -Q_1/Q_3 \quad (2.37)$$

и тогда

$$Q^\Phi = \rho_3(Q_1^2 + Q_3^2)^{1/2}. \quad (2.38)$$

Теперь в качестве оператора  $Q$  рассмотрим гамильтониан Дирака

$$\mathcal{H} = \rho_1 c(\Sigma \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2.$$

В результате преобразования Фолди-Вутхайзена (2.36) он приобретает вид

$$\mathcal{H}^\Phi = \rho_3 E = \rho_3 \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -(\Sigma \mathbf{p})/mc$$

(мы пользуемся импульсным представлением).

Возвращаясь теперь к исходному выражению для унитарного оператора преобразования ( $\Phi$ В), получим

$$U = e^{iW} = \exp \left\{ \frac{i}{2} \rho_2 \operatorname{arctg}(\Sigma \mathbf{p})/mc \right\}. \quad (2.39)$$

После несложных преобразований найдем

$$e^{\pm iW} = \frac{E + mc^2 \pm \rho_3 c(\alpha \mathbf{p})}{\sqrt{2E(E + mc^2)}}. \quad (2.40)$$

Вернемся теперь к вопросу о введении оператора спина свободного электрона в условиях релятивистского движения частицы.

Следуя идее Дарвина, выберем спиновый оператор в системе покоя свободного электрона в виде

$$F_{0\Phi}^\mu = (0, \rho_3 \Sigma), \quad (2.41)$$

где значением  $0\Phi$  отмечено, что оператор записан в представлении  $\Phi$ В, когда физический смысл его наиболее прозрачен, ибо в этом представлении он практически является оператором спина Паули. Далее с

помощью унитарного преобразования (2.40) найдем, что в представлении Дирака этому оператору  $F_{0\Phi}^\mu$  соответствует трехмерный релятивистский оператор спина  $O$

$$O = U^\dagger F_{0\Phi}^\mu U, \quad O = \rho_3 \Sigma + c \rho_1 p / E - \frac{c^2 \rho_3 p (\Sigma p)}{E(E + mc^2)}. \quad (2.42)$$

Оператор  $O$  (впервые введенный Стечем, 1956) коммутирует с гамильтонианом и оказывается очень удобным для разделения решений уравнения Дирака по спиновым состояниям. В отличие от  $\Sigma$  оператор  $O$  описывает спин частицы, обладающей произвольным импульсом  $p$ , но, поскольку оба оператора  $O$  и  $\Sigma$  связаны между собой унитарным преобразованием, они описывают одну и ту же поляризацию частицы. Поэтому определенные с помощью  $O$  состояния поляризации электрона будут теми же самыми, что и в системе покоя частицы. В этом просматривается возможность наиболее последовательной реализации идеи Дарвина об определении состояний поляризации релятивистской свободной частицы.

Рассмотрим кратко свойства релятивистского оператора спина. Оператор  $O$  оказывается очень удобным для описания проекции спина на любое направление, поскольку квадрат его проекции на любое направление  $s$  равен единице ( $|s| = 1$ ):

$$(Os)(Os) = 1 \quad (2.43)$$

и, таким образом,  $(Os) = \pm 1$ , т.е.  $O$  играет роль единичного оператора. Интересно заметить, что проекция  $O$  на направление движения частицы имеет обычный вид

$$(Op)/p = (\Sigma p)/p \quad (2.44)$$

и описывает продольную поляризацию. Вместе с тем проекция  $O$  на перпендикуляр к направлению движения имеет вид

$$\frac{[Op]}{p} = \rho_3 \frac{[\Sigma p]}{p}. \quad (2.45)$$

Поскольку

$$O_i O_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} O_k,$$

оператор спина обладает обычными групповыми свойствами, характерными для оператора момента: если ввести

$$S = \frac{\hbar}{2} O, \quad (2.46)$$

то

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1), \quad s = 1/2, \quad S_i S_j - S_j S_i = i \hbar \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (2.47)$$

Это еще раз подчеркивает “истинность” вектора спина  $\mathbf{O}$  в физическом аспекте понимания его роли в определении спина частицы.

С целью определения спиновых состояний свободной частицы Мишель и Вайтман предложили ввести инвариантный оператор поляризации в виде

$$O_{MW} = -\gamma^5 \gamma^\mu n_\mu, \quad (2.48)$$

где  $n_\mu$  — четырехмерный вектор, компоненты которого в системе покоя частицы равны  $n_0^\mu = (0, \zeta)$ . С помощью преобразований Лоренца

$$n^\mu = a_\nu^\mu n_0^\nu, \quad a_\mu^\nu = \begin{pmatrix} E/m & p/m & 0 & 0 \\ p/m & E/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

в операторном виде  $E \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$  нетрудно получить, что в лабораторной системе отсчета вектор  $n^\mu$  имеет следующее выражение:

$$n^\mu = (n^0, \mathbf{n}) = \left( \frac{\zeta \mathbf{p}}{m}, \zeta + \frac{\mathbf{p}(\zeta \mathbf{p})}{m(E+m)} \right), \quad (2.50)$$

при этом  $n^\mu p_\mu = 0$ . В связи с инвариантным оператором  $O_{MW}$  интересно заметить, что он является полностью эквивалентным проекции трехмерного вектора  $\mathbf{O}$  на направление  $\zeta$ , ибо

$$O_{MW} = -\gamma^5 \gamma^\mu n_\mu = -\gamma^5 (\gamma^0 n_0 - \gamma \mathbf{n}) = \mathbf{O} \zeta. \quad (2.51)$$

Важно подчеркнуть, что оператор  $\mathbf{O}$  описывает проекцию спина на избранное направление в лабораторной системе отсчета, что наиболее удобно для анализа экспериментальных данных, ибо детектор, как необходимый компонент эксперимента, всегда располагается в лабораторной системе отсчета. К тому же следует добавить, что, как уже отмечалось, поляризация электрона, измеренная в лабораторной системе, является той же самой, что и в системе покоя частицы. Иначе говоря, благодаря применению релятивистского оператора спина  $\mathbf{O}$  мы имеем дело с определением поляризации электрона независимо от выбора лоренцевой системы отсчета.

Заметим, что для решения проблемы описания спина в релятивистской теории можно ввести оператор спина  $\mathbf{S}$ , который в полной аналогии с нерелятивистской теорией Паули удовлетворяет следующим требованиям:

а)  $\mathbf{S}_j$  является интегралом движения и коммутирует с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{H} \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_j \mathcal{H} = 0$ ;

б) в системе покоя частицы этот оператор переходит в паулиевский оператор спина;

в) оператор  $\mathbf{S}_j$  удовлетворяет перестановочным соотношениям, характерным для оператора момента:

$$\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i = i \varepsilon_{ijk} \mathbf{S}_k;$$

г) проекция  $\mathbf{S}$  на любое направление принимает значения  $\pm \hbar/2$ .

При этих условиях оператор спина в релятивистской теории определяется единственным образом:  $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \mathbf{O}$ .

Несмотря на перечисленные здесь достоинства оператора спина  $\mathbf{O}$ , он, к сожалению, не обладает ковариантными свойствами, которые были бы необходимы для развития строгой теории спина частицы. Рассмотрим сейчас в связи с этим ковариантные обобщения оператора спина  $\mathbf{O}$  и с этой целью прежде всего уточним физическое содержание преобразования Фолди-Вутхайзена.

Унитарное преобразование ФВ переводит волновую функцию свободной частицы из лабораторной системы отсчета в систему покоя частицы, в которой она становится двухкомпонентной.

При унитарном преобразовании среднее значение оператора не меняется, поэтому для перевода самого оператора в систему покоя необходимо дополнить преобразование Фолди-Вутхайзена операторным преобразованием Лоренца.

Рассмотрим теперь обратное преобразование операторов. Тогда, в частности, выбирая  $F_{0\Phi}^\mu = (0, \rho_3 \Sigma)$  в системе покоя электрона, находим ковариантное обобщение трехмерного вектора  $\mathbf{O}$ :

$$T^\mu = (T^0, \mathbf{T}) = a_\nu^\mu U^\dagger F_{0\Phi}^\nu U = a_\nu^\mu e^{-iW} F_{0\Phi}^\nu e^{iW} \quad (2.52)$$

(операторные коэффициенты преобразования Лоренца определены формулой (2.49)).

На этом пути мы приходим к выражению для четырехмерного вектора поляризации Баргманна-Вигнера (1948)

$$T^\mu = \gamma^5 (\gamma^\mu - p^\mu / mc) = (\Sigma \mathbf{p} / mc, \rho_3 \Sigma + \rho_1 \mathbf{p} / mc). \quad (2.53)$$

Временная компонента этого 4-вектора описывает продольную поляризацию (ср. с формулой (2.44)). Все компоненты  $T^\mu$  коммутируют с гамильтонианом и являются интегралами движения для случая свободной частицы.

Вполне очевидно, что рассмотренное здесь преобразование  $F_{0\Phi}^\nu = (0, \rho_3 \Sigma)$  по закону трансформации четырехмерного вектора не единственно возможное. Вместо этого можно ввести преобразование по закону трансформации тензора 2-го ранга. Тогда в лабораторной системе координат мы приходим к тензорному обобщению  $\mathbf{O}$ :

$$\Pi_{\mu\nu} = a_\mu^\rho a_\nu^\lambda U^\dagger F_{\rho\lambda}^{0\Phi} U, \quad (2.54)$$

где тензор поляризации  $\Pi_{\mu\nu}$ , введенный Хильгевудом и Вутхайзенем (1963), имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{i}{mc} (\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \sigma^{\mu\nu}, \quad (2.55)$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)$$

или, в трехмерной записи\*.

$$\begin{pmatrix} \Pi_{23} & \Pi_{31} & \Pi_{12} \\ \Pi_{01} & \Pi_{02} & \Pi_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma + \rho_2[\Sigma \mathbf{p}]/mc \\ \rho_3[\Sigma \mathbf{p}]/mc \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Пространственные и временные компоненты тензора поляризации также являются интегралами движения, поскольку они коммутируют с гамильтонианом.

Интересно заметить, что операторы четырехмерного вектора поляризации и тензора поляризации связаны соотношениями

$$T^\alpha = \frac{1}{2mc} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} p_\beta, \quad \Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{mc} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha} p_\beta, \quad (2.57)$$

где

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (\alpha \mathbf{p} + \rho_3 mc, -i\hbar \nabla). \quad (2.58)$$

Таким образом, между тремя операторами  $O$ ,  $T^\alpha$ ,  $\Pi_{\mu\nu}$  существует генетическая связь. Важно подчеркнуть, что все они открывают возможность отделения спина от орбитального движения. Это обстоятельство заложено в исходном постулате Дарвина, предложившего определить спин паулиевским оператором в системе покоя частицы, т. е. там, где орбитальное движение отсутствует: в системе покоя орбитальный момент обращается в нуль.

Остановимся кратко на изучении проблемы тензорных свойств операторов спина. Систематическое исследование поляризации частиц в квантовой теории началось только с развитием групповых методов благодаря работам Вигнера, Баргманна, Ф.И. Федорова, Ю.М. Широкова. В результате этих исследований выяснилось, что кинематические свойства спина связаны со структурой группы Лоренца-Пуанкаре, лежащей в основе релятивистской ковариантной теории.

Мы не имеем здесь возможности детально изложить проблему анализа тензорных свойств операторов поляризации и остановимся лишь на его основных моментах.

В результате исследований выяснилось, что кинематические свойства спина связаны со структурой группы преобразований координат. В релятивистской теории такой группой является группа Лоренца-Пуанкаре. В координатном представлении генератор сдвига — трансляции вдоль оси  $x^\mu$  отождествляется с оператором импульса  $p^\mu$ , а

\* Заметим, что “на решениях уравнения Дирака”, т. е. в предположении, что все операторы реализуются, действуя на волновую функцию, удовлетворяющую уравнению Дирака, вместо оператора  $F_{0\Phi}^\mu = (0, \rho_3 \Sigma)$  можно взять

$$F_{0\Phi}^\mu = (0, \Sigma), \quad (2.41a)$$

при этом все операторы  $T^\mu$  и  $\Pi_{\mu\nu}$  после преобразований Лоренца сохраняют свой вид.

генератор четырехмерного вращения отождествляется с оператором полного момента количества движения

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \frac{\hbar}{2} \sigma^{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

где тензор  $\sigma^{\mu\nu}$  определен формулой (2.55).

Существуют два независимых инварианта ( $p^2$  и  $W^2$ ), коммутирующих со всеми операторами  $p^\mu$  и  $M^{\mu\nu}$ . Один из них характеризует массу частицы:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^2,$$

а другой (инвариант Любаньского-Паули)

$$W^2 = - \left( \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2 c^2} M_{\mu\rho} M^{\rho\nu} p^\mu p_\nu \right), \quad (2.60)$$

как оказывается, связан со спином.

Оператор спина в представлении группы Пуанкаре определяет трансляционно инвариантные повороты в плоскости, перпендикулярной четырехмерному импульсу  $p^\mu$ . Физически это обстоятельство связано с тем, что спин является пространственноподобным вектором (тензором) и преобразуется по представлению “малой группы” Лоренца, изоморфной трехмерной группе вращений. Условие пространственной подобности спина задается в виде соотношения

$$T_{\text{сп}}^\alpha p_\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \Pi_{\mu\nu}^{\text{сп}} p^\nu = 0 \quad (2.61)$$

в зависимости от того, какой из операторов используется для описания спина: 4-вектор  $T_{\text{сп}}^\alpha$  или антисимметричный тензор  $\Pi_{\mu\nu}^{\text{сп}}$ . В результате выделения пространственноподобной части в выражении для полного момента (2.59) можно получить, что

$$T_{\text{сп}}^\alpha = \frac{\hbar}{2} T^\alpha, \quad \Pi_{\mu\nu}^{\text{сп}} = \frac{\hbar}{2} \Pi_{\mu\nu}, \quad (2.62)$$

где вектор  $T^\alpha$  и тензор  $\Pi_{\mu\nu}$  поляризации определены формулами (2.53) и (2.55).

Заметим, что из этих формул непосредственно следует, что

$$T_{\text{сп}}^\alpha T_\alpha^{\text{сп}} = \frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu}^{\text{сп}} \Pi_{\text{сп}}^{\mu\nu} = -\frac{3}{4} \hbar^2, \quad (2.63)$$

а инвариант Любаньского-Паули, связанный со спином (2.60), приобретает вид

$$W^2 = -\frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu}^{\text{сп}} \Pi_{\text{сп}}^{\mu\nu} = -T_{\text{сп}}^\alpha T_\alpha^{\text{сп}} = \hbar^2 s(s+1) \quad (2.64)$$

( $s = 1/2$ ). Этим косвенно доказывается, что спин дираковских частиц равен  $\hbar/2$ .

Таким образом, исследование спина методом теории групп приводит к выводу о том, что существует два ковариантных оператора поляризации: в векторной и тензорной форме. Очень важно отметить, что оба оператора в случае свободного движения частицы коммутируют с гамильтонианом и открывают возможность разделения решений уравнения Дирака по спиновым состояниям, т. е. возможность исследования спиновых эффектов независимо от орбитального движения частицы.

Однако вместе с тем применение этих операторов сопряжено с некоторыми трудностями. Действительно, пространственные части оператора  $T^\alpha$  и тензора  $\Pi_{\mu\nu}$  (см. (2.53) и (2.56)) не дают возможности рассматривать  $T_j$  и  $\mu_j$  как единичные операторы спина в духе вектора спина  $\mathbf{O}$  (см. (2.42)). В отличие от (2.43), согласно которой  $O_j^2 = 1$ , получим, что\*

$$T_j^2 = 1 + p_j^2/m^2 c^2, \quad \mu_j^2 = (E^2 - c^2 p_j^2)/m^2 c^2.$$

Конечно, оба оператора можно нормировать на единицу, но тогда характеристики орбитального движения (энергия, импульс) войдут в нормировочный коэффициент. Поэтому определение спиновых состояний с помощью  $T^\alpha$  и  $\Pi_{\mu\nu}$  может оказаться различным, в особенности в процессах квантовых переходов, связанных с изменением импульса и энергии.

Рассмотрим сейчас более детально операторы поляризации  $T^\alpha$  и  $\Pi_{\mu\nu}$ . Как уже отмечалось, оба они представляют величины, сохраняющиеся во времени. В силу этого  $T^\alpha$  и  $\Pi_{\mu\nu}$  должны представлять собой часть некоторых более общих операторов, характеризующих трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака подобно тому, как это имело место в нерелятивистской теории.

Как известно (см., например, [4]), генератором группы преобразований Лоренца в пространстве волновых функций является тензор  $\sigma_{\alpha\beta}$  (см. (2.55)), причем генераторы группы Лоренца в спиновом представлении имеют вид

$$X_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta}.$$

С помощью  $\sigma_{\alpha\beta}$  можно найти также тензор спина

$$S_{\alpha\beta}^\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\nu}} X_{\alpha\beta} \psi - \bar{\psi} \bar{X}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\nu}}, \quad \bar{X}_{\alpha\beta} = -X_{\alpha\beta},$$

где лагранжева функция для дираковского поля имеет известное выражение

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

\* Заметим также, что для этих операторов перестановочные соотношения типа (2.47) не имеют места.

Тогда

$$S_{\alpha\beta}^{\nu} = -\frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\nu})\psi \quad (\hbar = c = 1).$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(L_{\alpha\beta}^{\nu} + S_{\alpha\beta}^{\nu}) = 0,$$

где  $L_{\alpha\beta}^{\nu}$  — тензор орбитального момента, связанный с тензором энергии-импульса  $T_{\alpha}^{\nu}$  соотношением

$$L_{\alpha\beta}^{\nu} = T_{\alpha}^{\nu}x_{\beta} - T_{\beta}^{\nu}x_{\alpha},$$

соответствует сохранению полного момента количества движения, включая спин.

Отличные от нуля компоненты тензора спина равны

$$\int (S_{32}^0, S_{13}^0, S_{21}^0) d^3x = \frac{1}{2} \int \Psi^+ \Sigma \Psi d^3x, \quad (2.65)$$

$$\int (S_{32}^i, S_{13}^2, S_{21}^3) d^3x = \frac{1}{2} \int \Psi^+ \rho_1 \Psi d^3x \quad (2.66)$$

и им соответствует четырехмерный вектор спина частицы

$$S^{\nu} = (\rho_1, \Sigma) = (S^0, \mathbf{S}), \quad \rho_1 = -\gamma^5. \quad (2.67)$$

Соотношение неразрывности утверждает, таким образом, что в теории Дирака сохраняется полный момент количества движения  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ .

Наряду с тензором спина можно рассмотреть также тензор спинового магнитного и электрического моментов:

$$S_{\alpha\beta} = \int \bar{\Psi} \sigma_{\alpha\beta} \Psi d^3x = \int \Psi^+ \rho_3 \sigma_{\alpha\beta} \Psi d^3x.$$

При этом мы приходим к тензору спинового магнитного и электрического моментов частицы:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \gamma^0 \sigma_{\alpha\beta} = \rho_3 \sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.68)$$

Физический смысл этой величины становится наглядным, если рассмотреть свертку с тензором электромагнитного поля

$$-\frac{1}{2} \alpha_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \rho_3 (\Sigma \mathbf{H}) + \rho_2 (\Sigma \mathbf{E}).$$

В нерелятивистском приближении ( $\rho_3 \rightarrow 1, \rho_2 \rightarrow 0$ ) тензор  $\alpha_{\mu\nu}$  переходит в оператор спинового магнитного момента Паули. Операторы  $\alpha_{\mu\nu}$  и  $S^\nu$ , несмотря на их очевидные достоинства (ковариантная форма записи, переход в операторы Паули в нерелятивистском приближении), не могут быть, однако, положены в основу описания спиновых свойств электрона Дирака — они не коммутируют с оператором гамильтона и в силу этого не имеют общих с ним волновых функций. Как уже отмечалось, это обстоятельство связано с интерференцией зарядово-сопряженных состояний частицы.

С целью устранения шредингеровского дрожания перейдем к дефинитной четности операторов и выделим у операторов  $S^\nu$  и  $\alpha_{\mu\nu}$  четную часть. Тогда получим

$$[S^\nu] = \frac{1}{2}(S^\nu + \Lambda S^\nu \Lambda) = \frac{mc^2}{E} T^\nu \Lambda,$$

$$[\alpha_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\alpha_{\mu\nu} + \Lambda \alpha_{\mu\nu} \Lambda) = \frac{mc^2}{E} \Pi_{\mu\nu} \Lambda, \quad (2.69)$$

где 4-вектор поляризации  $T^\nu$  и тензор поляризации  $\Pi_{\mu\nu}$  определены формулами (2.53) и (2.56).

Таким образом, переход к операторам с дефинитной четностью открывает принципиальную возможность ковариантного описания спина релятивистской частицы независимо от ее орбитального движения.

Интересно в связи с этим заметить, что если в выражении для полного момента количества движения перейти к “координате центра инерции”, заменив  $\mathbf{r}$  на его четную часть  $[\mathbf{r}]$  (нелокальный оператор среднего положения частицы, встречающийся в работах В.А. Фока)

$$\mathbf{r}^\Phi = \lim_{p \rightarrow 0} [\mathbf{r}] = \mathbf{r} - \frac{i\hbar}{2E} \alpha \Lambda = \mathbf{r} - \frac{\hbar}{2mc} \rho_2 \Sigma,$$

и положить

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\Phi + \frac{\hbar}{2mc} \rho_2 \Sigma,$$

то получим, что оператор полного момента в новой формулировке имеет вид

$$\mathbf{J} = [\mathbf{r}^\Phi \mathbf{p}] + \mu. \quad (2.70)$$

При этом оператор  $\mu$  (см. (2.56)) возникает автоматически при переходе к одночастичным операторам. В полученном выражении (2.70) сохраняются оба момента количества движения — и орбитальный и спиновый.

И в заключение описания спина свободного релятивистского электрона кратко рассмотрим поляризационную матрицу плотности.

Рассмотрим свободное движение частицы, когда ее волновая функция имеет вид

$$\Psi_p = \frac{1}{\sqrt{2E}} u_p e^{-ipx},$$

где  $p$  — четырехмерный импульс, а биспинор  $u_p$  удовлетворяет уравнению Дирака

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu - m)u_p &= 0, & \bar{u}_p(\gamma^\mu p_\mu - m) &= 0, \\ \bar{u}_p u_p &= 2m & (\hbar = c = 1).\end{aligned}$$

Разделение спиновых и пространственных переменных в этом решении дает возможность построения матрицы плотности в аналогии с нерелятивистской теорией (см. [3]).

Полагаем в чистом состоянии матрицу плотности в виде

$$\rho = |s\rangle\langle s| = u_p \bar{u}_p, \quad \bar{u}_p = u_p^\dagger \gamma^0,$$

причем в силу нормировки  $\text{Sp} \rho = 2m$ .

Поляризационная матрица плотности, как это следует из ее определения, удовлетворяет уравнению

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\rho(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0. \quad (2.71)$$

Подобно нерелятивистской теории будем определять состояние поляризации средним значением вектора спина  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Sigma}$  и, следуя идее Дарвина, удвоенное среднее значение спина в системе покоя частицы обозначим величиной  $\zeta$ . Эта величина для чистого состояния по модулю равна 1 ( $|\zeta| = 1$ ), а для смешанного состояния  $|\zeta| < 1$ . Введем далее четырехмерный псевдовектор  $n_0^\mu = (0, \zeta)$ , который в соответствии с преобразованиями Лоренца (2.49) в лабораторной системе координат имеет выражение (2.50), причем  $n^\mu n_\mu = -\zeta^2$ ,  $n^\mu p_\mu = 0$ .

С целью автоматического выполнения уравнения Дирака (2.71) матрицу плотности необходимо записать в виде

$$\rho = \frac{1}{4m} (\gamma^\mu p_\mu + m)(1 - Q\gamma^5 \gamma^\mu n_\mu)(\gamma^\mu p_\mu + m),$$

где постоянную величину  $Q$  можно определить переходом в систему покоя частицы, когда

$$\rho = \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + Q\gamma^5 \gamma \zeta)(1 + \gamma^0).$$

Вычисляя далее среднее значение спина в этом состоянии

$$2\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Sp}(\rho \boldsymbol{\Sigma}) = Q\zeta,$$

находим, что  $Q = 1$ . Таким образом, устанавливается связь матрицы плотности с инвариантом спина  $O_{MW}$  Мишеля-Вайтмана (2.48):

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu p_\mu + m)(1 - \gamma^5 \gamma^\mu n_\mu) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu p_\mu + m)(1 + O_{MW}) = \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu p_\mu + m)(1 + O\zeta),\end{aligned} \quad (2.72)$$

где  $O$  — трехмерный вектор спина (2.42).

В нерелятивистском приближении это выражение переходит в известную формулу

$$\rho^{\text{нер}} = \frac{1}{2}(1 + \sigma\zeta)$$

(см. (2.9)). В релятивистском случае движения частицы с помощью матрицы плотности (2.72) можно найти в ковариантной записи среднее значение спина по формуле

$$\langle n^\mu \rangle = \frac{1}{2m} \text{Sp}(\rho \gamma^5 \gamma^\mu). \quad (2.73)$$

#### *§2.4. Спиновые состояния электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле*

Ввиду важности исследования спиновых свойств релятивистского электрона в общем случае его движения во внешнем электромагнитном поле необходимо остановиться на методах описания состояний поляризации частицы, дающих возможность наблюдения спиновых закономерностей независимо от орбитального движения частицы. Если при этом частица движется во внешнем поле, то обычный метод применения операторов поляризации имеет сильные ограничения по сравнению со свободной частицей: как правило, таких операторов оказывается недостаточно для той же степени полноты описания поляризации частицы, как это имеет место в случае свободной частицы. Это, в свою очередь, вносит существенные трудности в конструирование поляризационной матрицы плотности.

С целью последовательного описания спиновых свойств частицы оказывается целесообразным разделить решение уравнения Дирака по спиновым состояниям. Это открывает возможность анализа поведения спина методом точных решений уравнения Дирака и расчета спиновых эффектов на их основе.

Для того чтобы ввести в волновую функцию новое квантовое число, характеризующее спиновое состояние частицы, нужно найти такой спиновый оператор, который коммутировал бы с гамильтонианом (обладал общими с ними волновыми функциями), а также обладал бы необходимыми ковариантными свойствами. В нерелятивистском приближении этот оператор должен переходить в оператор спина Паули и тем самым допускать очевидную физическую интерпретацию.

Рассмотрим обобщение операторов поляризации, введенных для свободной частицы  $\mathbf{O}$ ,  $T^\mu$ ,  $\Pi_{\mu\nu}$  на случай движения частицы в электромагнитном поле  $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ . Производя замену оператора 4-импульса  $p^\mu \rightarrow P^\mu = p^\mu - eA^\mu$  ("удлинение производной"), получим, что вектор спина  $\mathbf{O}$  приобретает вид

$$\mathbf{O} = \rho_3 \boldsymbol{\Sigma} + \rho_1 c \mathbf{P} / E - c^2 \rho_3 \mathbf{P} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}) / (E(E + mc^2)), \quad (2.74)$$

а также приходим к следующим выражениям для операторов поляризации:

$$T^\mu = (T^0, \mathbf{T}) = \gamma^5 \left( \gamma^\mu - \frac{\mathbf{P}^\mu}{mc} \right) = \left( \frac{\Sigma \mathbf{P}}{mc}, \rho_3 \Sigma + \frac{\rho_1 \mathbf{P}}{mc} \right), \quad (2.75)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{i}{mc} (\gamma^\mu \mathbf{P}^\nu - \gamma^\nu \mathbf{P}^\mu) - \sigma^{\mu\nu} = (-\varepsilon, \mu), \quad (2.76)$$

где

$$\varepsilon = \rho_3 \frac{[\Sigma \mathbf{P}]}{mc}, \quad \mu = \Sigma + \rho_2 \frac{[\Sigma \mathbf{P}]}{mc}.$$

Во всех этих выражениях под энергией  $E$  понимается только ее кинетическая часть  $E = |\mathcal{H} - e\Phi|$ . Заметим также, что выражения для операторов (2.74)–(2.76) справедливы “на решениях уравнения Дирака”, когда оператор Гамильтона, записанный справа в этих формулах, реализуется через уравнение Дирака действием на волновую функцию.

Спиновые состояния электрона, движущегося во внешнем поле, можно описать с помощью операторов проекций поляризации, являющихся интегралами движения.

В частности, при движении электрона в постоянном однородном магнитном поле в качестве операторов поляризации можно взять проекции  $\mathbf{T}$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{O}$  на направление движения частицы.

Заметим также, что в известной работе Дирака (см. [6]) можно встретить оператор спина, являющийся интегралом движения в кулоновском центрально-симметричном поле:

$$N^0 = \rho_3 \left[ (\Sigma \mathbf{J}) - \frac{\hbar}{2} \right] \quad (2.77)$$

— “проекция спина на полный момент”. Этот оператор можно представить в ковариантном виде, если ввести векторный оператор поляризации

$$N^\mu = (N^0, \mathbf{N}) = (\hbar \gamma^\mu + mc \chi_\nu \Pi^{\nu\mu}).$$

Тогда временная компонента совпадает с (2.77). Заметим также, что с помощью вектора спина это выражение может быть представлено в виде

$$N^0 = (\mathbf{OJ} - \hbar/2) \quad (2.78)$$

(на решениях уравнения Дирака), причем

$$(N^0)^2 = \mathbf{J}^2 + \hbar^2/4.$$

Для практических целей при описании точных решений спиновых уравнений важно знать спиновые инварианты, которые сохраняли бы

свойства интегралов движения даже при наличии внешнего электромагнитного поля. В качестве таких инвариантов можно взять свертку тензора электромагнитного поля с тензором поляризации (см. [4]):

$$M = \frac{\mu_0}{2} F^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}, \quad (2.79)$$

а также свертку дуального тензора  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

$$M' = \frac{\mu_0}{mc} \tilde{F}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (2.80)$$

Оба спиновых инварианта совпадают на решениях уравнения Дирака и являются интегралами движения по крайней мере для слабонеоднородных полей, постоянных во времени. На решениях уравнения Дирака операторы (2.79) и (2.80) имеют вид

$$M = M' = (\mu\mathbf{H} - \varepsilon\mathbf{E}),$$

где  $\mu$  и  $\varepsilon$  определены формулами (2.76). В системе покоя частицы они описывают проекцию спина на направление магнитного поля.

Таким образом, имеется достаточно широкий выбор операторов поляризации, с помощью которых можно провести разделение решений уравнения Дирака по спиновым состояниям электрона. Подчеркнем здесь, что все эти операторы ( $T^{\mu}$ ,  $\Pi_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{O}$ ) и их комбинации генетически связаны с исходным оператором спина в системе отсчета, где электрон покоится.

Положение, однако, несколько меняется, если перейти к обобщенному гамильтониану уравнения Дирака, учитывающему аномальный магнитный момент электрона. Еще в своих ранних работах Паули показал, что уравнение Дирака можно модифицировать с целью описания движения частицы с произвольным магнитным моментом  $\mu$ . Ковариантность не нарушится, если уравнение Дирака записать в виде

$$(\gamma^{\mu} P_{\mu} - mc - \frac{\mu}{2c} \sigma_{\rho\nu} F^{\rho\nu}) \Psi = 0, \quad (2.81)$$

где  $F^{\rho\nu}$  — тензор электромагнитного поля. Входящий в это уравнение коэффициент  $\mu$  характеризует “врожденную” часть магнитного момента “сверх” величины его кинетической части. Полагая далее (для электрона), что

$$\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 = \frac{g-2}{2} \mu_0,$$

где  $g$  — гиромангнитный фактор,  $\mu_0$  — магнетон Бора, мы приходим к обобщенному уравнению Дирака для электрона, обладающего вакуумным аномальным магнитным моментом:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \{c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 mc^2 + e\Phi + \frac{g-2}{2} \mu_0 [\rho_3(\Sigma\mathbf{H}) + \rho_2(\Sigma\mathbf{E})]\} \Psi. \quad (2.82)$$

Важно здесь подчеркнуть, что включение в рассмотрение аномального магнитного момента электрона изменяет вид гамильтониана и это обстоятельство несколько сужает выбор операторов поляризации — интегралов движения. Так, в частности, рассмотрим оператор продольной поляризации (спиральности) — проекции спина на кинетический импульс:

$$\Gamma^0 = \frac{(\Sigma \mathbf{P})}{mc}.$$

Теперь эта величина теряет свойство интеграла движения, ибо

$$\frac{d}{dt} \Gamma^0 = \frac{e_0}{mc} \frac{g-2}{2} \rho_3 \Sigma [\mathbf{P} \mathbf{H}].$$

Таким образом, аномальный магнитный момент вносит существенный вклад в динамику электрона. К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем.

## §2.5. Квазирелятивистское приближение теории Дирака.

### Физическая интерпретация спиновых взаимодействий

Рассмотрим движение электрона во внешнем электромагнитном поле  $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ . При этом уравнение Дирака можно записать в виде

$$(\gamma^\mu P_\mu - mc)\Psi = 0,$$

где  $P^\mu = p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$ , или в трехмерной записи:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H} \Psi = [c(\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 mc^2 + e\Phi] \Psi. \quad (2.83)$$

Как уже отмечалось, спиновые свойства дираковской частицы удобно рассматривать в представлении Фолди-Вутхайзена (ФВ), когда волновая функция преобразуется к двухкомпонентной с наглядной интерпретацией спиновых состояний. Так было в случае свободной частицы (см. § 2.3), однако при наличии взаимодействия частицы с внешним полем задача становится намного сложнее, поскольку в этих условиях оказывается невозможным точно построить унитарный оператор, учитывающий внешнее поле и преобразующий гамильтониан уравнения Дирака к виду, содержащему операторы с дефинитной четностью.

Однако эту задачу можно решить в виде приближенного разложения преобразования ФВ по степеням  $p/mc = v/c$ , т.е. в условиях нерелятивистского приближения. Интересно заметить, что при этом спиновые взаимодействия электрона, скрытые в уравнении Дирака, выступают в виде конкретных взаимодействий, допускающих наглядную физическую интерпретацию.

Рассмотрим в целях упрощения задачи стационарное внешнее поле, отвлекаясь от возможной его явной зависимости от времени (общность рассмотрения при этом не ограничивается). Обобщим далее унитарный оператор преобразования ФВ (см. (2.39))

$$U = \exp \left\{ \frac{i}{2} \rho_2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\Sigma \mathbf{p}}{mc} \right) \right\},$$

заменяв импульс  $\mathbf{p}$  на кинетический импульс  $\mathbf{P}$ , и будем предполагать, что частица обладает квазирелятивистским характером движения, допускающим возможность разложения оператора  $U$  по величине  $\Sigma \mathbf{P}/mc$ . Практически, как это мы сейчас увидим, это приближение соответствует разложению по параметру, содержащему комптоновскую длину волны  $\hbar/mc$ . Сохраняя во всех разложениях члены, включающие поправки до  $(v/c)^2$ , можно положить, что

$$U = \exp(i\rho_2 \Sigma \mathbf{P}/2mc), \quad (2.84)$$

ибо  $\operatorname{arctg} x \approx x$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдем теперь выражение для гамильтониана уравнения Дирака, описывающего движение электрона во внешнем поле (2.83):

$$\mathcal{H}^{\text{ФВ}} = U \mathcal{H} U^\dagger = e^{i\rho_2(\Sigma \mathbf{P})/2mc} \mathcal{H} e^{-i\rho_2(\Sigma \mathbf{P})/2mc}. \quad (2.85)$$

Далее воспользуемся операторным тождеством, справедливым для двух любых операторов  $A$  и  $B$ :

$$e^A B e^{-A} = B + [AB] + \frac{1}{2}[A[AB]] + \dots,$$

где скобками обозначены коммутаторы соответствующих величин:  $[AB] = AB - BA$ . Этот ряд, построенный из многократных коммутаторов, убывает в нерелятивистском приближении, поскольку содержит члены разложения по  $p/mc \ll 1$ .

Производя разложение по формуле (2.85) путем последовательно применения преобразования ФВ, получим с точностью до членов порядка  $(p/mc)^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{ФВ}} = & \rho_3 [mc^2 + (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2/2m - p^4/8m^3c^2] + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc} \rho_3 (\Sigma \mathbf{H}) - \\ & - \frac{ie\hbar}{8m^2c^2} (\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} (\Sigma [\mathbf{E}\mathbf{p}]) - \frac{e}{8} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \operatorname{div} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

В результате преобразования ФВ можно теперь перейти к двухкомпонентной волновой функции, и тогда, полагая  $\rho_3 = 1$  (проекция на "большие" компоненты), получим

$$\left( E - e\Phi - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) \Psi =$$

$$= \left\{ -\frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{2mc}(\sigma\mathbf{H}) - \frac{i e \hbar}{8m^2c^2}(\sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \sigma[\mathbf{E}p] + \frac{e}{8} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \nabla^2 \Phi \right\} \Psi, \quad (2.86)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Производя последовательные унитарные преобразования достаточное число раз с учетом поправок к унитарному оператору  $U$ , можно построить одночастичную двухкомпонентную теорию в принципе с точностью до любого порядка приближения по  $v/c$ .

Остановимся теперь кратко на физическом смысле дополнительно возникших членов, являющихся в квазирелятивистском приближении поправками к гамильтониану Шредингера. Все эти члены имеют наглядный физический смысл. Действительно, в правой части уравнения (2.86) содержится дополнительная к нерелятивистскому уравнению энергия взаимодействия, описывающая релятивистские и спиновые эффекты. Мы не будем останавливаться сейчас подробно на релятивистской поправке  $W_{\text{рел}} = -p^4/8m^3c^2$ , а также на энергии контактного взаимодействия

$$W_{\kappa} = \frac{e}{8} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \nabla^2 \Phi,$$

которая представляет собой дарвиновскую поправку, связанную со шредингеровским “дрожанием” и обусловленную нелокальностью взаимодействия электрона с электрическим полем. Поскольку вследствие *Zitterbewegung* координата электрона испытывает флуктуации, электрон становится подобным броуновской частице с эффективным радиусом  $\delta r \sim \hbar/mc$ . В силу этой особенности электрон “чувствует” размазанный потенциал  $\Phi$  с поправкой

$$\Delta E = \langle \delta U \rangle = \langle U(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \langle (\delta \mathbf{r} \nabla)^2 U \rangle = \frac{e}{6} \langle \delta r^2 \rangle \langle \nabla^2 \Phi \rangle.$$

Для случая кулоновского поля

$$\Delta E = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 Z e^2 \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle.$$

Энергия контактного взаимодействия отлична от нуля только для  $s$ -состояний электрона, ибо только в этом случае  $|\Psi(0)|^2 \neq 0$ , т. е. контактное взаимодействие проявится наиболее заметным образом там, где электрон и ядро находятся в непосредственной близости — именно здесь наблюдается отступление от закона Кулона, вызванное нелокальностью взаимодействия (см. [1]).

Рассмотрим более подробно поправки к нерелятивистскому гамильтониану, зависящие от спина. Как это следует из (2.86), в первом порядке приближения по  $v/c$  появляется характерное паулиевское взаимодействие спинового магнитного момента электрона с внешним магнитным полем:

$$W^M = -\mu\mathbf{H} = -\frac{e\hbar}{2mc}(\sigma\mathbf{H}). \quad (2.87)$$

Таким образом, теория Дирака содержит спиновый магнитный момент электрона. Однако его наглядная интерпретация оказывается возможной только в нерелятивистском приближении.

Поправка

$$W^{co} = -\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\sigma[\mathbf{E}\mathbf{p}] - \frac{ie\hbar}{8m^2c^2}\sigma\text{rot}\mathbf{E} \quad (2.88)$$

характеризует спин-орбитальное взаимодействие. В случае центрально-симметричного стационарного поля эта поправка имеет вид

$$W^{co} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} (\sigma\mathbf{L}),$$

где  $\mathbf{L}$  — орбитальный момент, а для кулоновского поля это выражение переходит в формулу

$$W^{co} = \frac{Ze_0^2}{2m^2c^2} \frac{(\mathbf{S}\mathbf{L})}{r^3}, \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma. \quad (2.89)$$

Физическая интерпретация этого типа взаимодействия достаточно проста: в атоме электрон, обладающий спиновым магнитным моментом  $\mu = -\mu_0\sigma$ , движется в кулоновском поле ядра со скоростью  $v = p/m$ . В этих условиях электрон приобретает дополнительный электрический момент

$$\mathbf{p}_{эл} = \frac{1}{mc}[\mathbf{p}\mu],$$

и при этом возникает дополнительное (по отношению к кулоновскому) взаимодействие электрона — электрического диполя с ядром

$$W_{к\text{я}}^{co} = -\mathbf{p}_{эл}\mathbf{E} = -\frac{e\hbar}{2m^2c^2}\sigma[\mathbf{E}\mathbf{p}]. \quad (2.90)$$

Это “классическое” выражение в два раза превышает результат, являющийся строгим следствием из теории Дирака (2.88). Коэффициент  $\frac{1}{2}$ , на который необходимо умножить  $W_{к\text{я}}^{co}$  ( $W^{co} = \frac{1}{2}W_{к\text{я}}^{co}$ ) — это поправка Томаса-Френкеля, обусловленная особым характером движения электрона — прецессией Томаса с угловой частотой

$$\Omega_{ТН} = -\frac{1}{c} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} [\beta\ddot{\mathbf{r}}],$$

где  $\ddot{\mathbf{r}}$  — ускорение в лабораторной системе координат,  $\gamma = E/mc^2$ ,  $\beta = v/c$ , и представляющая собой чисто кинематический релятивистский эффект (переход во вращающуюся систему отсчета).

Рассмотренная здесь физическая интерпретация спиновых и релятивистских эффектов оказывается весьма полезной с точки зрения понимания достаточно тонких эффектов взаимодействия частицы с внешнем полем. Однако эта наглядная интерпретация оказывается возможной только в квазирелятивистском приближении, в противном случае формула (2.86) теряет смысл и необходимо полагать в основу точные решения уравнения Дирака.

Напомним, в частности, что точное решение уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле ядра послужило фундаментом для построения теории атома. Одним из выдающихся достижений теории явилось описание естественного расщепления энергетических уровней водородного атома (формула тонкой структуры)

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left[ n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2 \alpha^2} \right]^2} \right\}^{1/2}$$

В этой формуле  $n$  — главное,  $j$  — внутреннее квантовые числа, число  $j$  характеризует полный момент количества движения. Взяв здесь значение  $j = \frac{1}{2}$ , найдем, что устойчивость движения электрона в кулоновском поле ограничена пределом  $Z_{кр} = 1/\alpha = 137$ . При  $Z > Z_{кр}$  одночастичное приближение теряет смысл, ибо в этих условиях в кулоновской потенциальной яме становится возможным рождение электрон-позитронных пар (парадокс Клейна).

Развитие теории атома на основе уравнения Дирака и его квазирелятивистского приближения привело к успешному решению проблемы объяснения аномального эффекта Зеемана — сложному мультиплетному расщеплению энергетических уровней атома во внешнем магнитном поле. Это явление не находило объяснения ни в классической электродинамике, ни в теории Шредингера-Паули.

Решающим моментом в объяснении аномального эффекта Зеемана явилось естественное расщепление уровней энергии атома  $\Delta E_{jj'} = E_{nj} - E_{nj'}$ , на фоне которого происходит дополнительное расщепление, обусловленное магнитным полем,  $\Delta E_m \sim \hbar \Omega$  ( $\Omega = e_0 H/mc$ ).

Исследование спиновых взаимодействий дало возможность предсказания одного из интереснейших эффектов в спектральных закономерностях атома — сверхтонкой структуры спектра, которая связана со взаимодействием спиновых магнитных моментов ядра атома и электрона. Магнитный момент ядра атома создает магнитное поле, действующее на магнитный момент электрона. В результате между электроном и ядром возникает дополнительное спиновое взаимодействие, приводящее к сверхтонкой структуре спектра. При этом в основном состоянии атома водорода сверхтонкое расщепление его уровня  $n = 1$  имеет вид

$$\Delta E^{\text{CT}} = \frac{8\pi}{3} \mu_0 \mu_p [2S(S+1) - 3] |\Psi(0)|^2,$$

где  $S = 0, 1$  — полный спин системы ядро-электрон,  $\Psi(0)$  — волновая функция электрона,  $\mu_0$  и  $\mu_p$  — магнитные спиновые моменты электрона и протона. Значения  $S = 0$  и  $S = 1$  соответствуют случаям антипараллельных и параллельных спинов ядра и электрона.

Разность между этими двумя уровнями характеризует расщепление  $S$ -терма, причем частота перехода имеет вид

$$\Delta\omega = \frac{32}{3} \frac{\mu_0 \mu_p}{\hbar a^3} = 1417 \text{ МГц},$$

что соответствует радиоизлучению атомарного водорода на волне 21,1 см. Радиоизлучение атомарного водорода играет важную роль в радиоастрономии при изучении Вселенной\*.

Вернемся, однако, к проблеме тонкой структуры энергетического спектра водородного атома и кратко остановимся на ее экспериментальном изучении. Необходимо в связи с этим подчеркнуть особое значение точных решений задачи о движении частицы в кулоновском поле, поскольку это открывает перспективу экспериментальной проверки всей квантовой теории Дирака в целом. Атом водорода при этом выступает как краеугольный камень теории, поскольку точные решения задачи об электроне в кулоновском поле могут быть сопоставлены с экспериментом.

Именно это обстоятельство привлекло к себе особое внимание экспериментаторов, поставивших перед собой задачу по проверке спектральных закономерностей водородного атома. При этом оказалось, что тщательный анализ не подтвердил полного согласия теории и опыта. Предметом особого внимания явился вопрос о взаимном расположении уровней энергии  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$ , которые по теории Дирака (точное решение) должны были совпадать друг с другом.

Лэмб и Ризерфорд применили радиоспектроскопический метод исследования к изучению положения уровней  $2S_{1/2}$ ,  $2P_{1/2}$  — это было прямое исследование по проверке теории Дирака. В основе эксперимента лежало особое свойство уровня  $2S_{1/2}$  — это состояние электрона (в отличие от  $2P_{1/2}$ ) является метастабильным, поскольку дипольный период в основное  $1S_{1/2}$ -состояние запрещен правилами отбора. В силу этого обстоятельства оказалось возможным приготовить пучок атомов в метастабильном состоянии  $2S_{1/2}$  и затем подвергнуть их воздействию возмущения, обеспечивая их переход в  $P$ -состояния с последующим переходом в основное энергетическое состояние.

\* Все вопросы тонкой и сверхтонкой структур спектра водородного атома, а также эффект Зеемана детально изложены в [1].

Прецизионное измерение резонансной частоты наложенного электрического поля, индуцирующего квантовые переходы, дало возможность обнаружить сдвиг уровней атомных электронов: в противоположность теории Дирака уровень  $2S_{1/2}$  лежит выше, чем  $2P_{1/2}$ , на величину 1057 МГц. Это казалось бы ничтожное расхождение теории и эксперимента привело к замечательному прогрессу в квантовой теории в направлении последовательного рассмотрения взаимодействия электрона с электромагнитным вакуумом и признания вакуума как реальной физической субстанции, взаимодействие с которой приводит к наблюдаемым физическим явлениям (см. [1]).

В те же годы наблюдалось и другое замечательное физическое явление — аномальный вакуумный магнитный момент электрона:  $\mu = -\mu_0(1 + a_e)$ ,  $a_e = \frac{g-2}{2}$ . Со времени гипотезы Уленбека и Гаудсмита (1925) считалось, что  $g$ -фактор электрона (гиромангнитное отношение) равен 2, и после создания теории Дирака это рассматривалось как твердо установленный факт. В 1947 г. Нейф, Нельсон и Раби, изучая сверхтонкую структуру спектров водорода и дейтерия методом магнитного резонанса, непосредственно измеряли частоту радиоизлучения и установили различие между теоретическим и экспериментальным значениями на 0,26%. Это расхождение, как заметил Брейт, можно было объяснить, если предположить, что электрон обладает “врожденным” магнитным моментом  $a_e = \frac{g-2}{2} = \alpha/2\pi$  — аномальной частью в отличие от теории Дирака. Вскоре после этих экспериментов Каш и Фоли (1948) методом радиоспектроскопии провели исследование зеемановского расщепления энергетических уровней водородного атома в магнитном поле и с уверенной точностью также обнаружили отклонение величин магнитного момента электрона от принятого значения в один магнетон Бора.

Экспериментальные исследования, обнаружившие отклонения от теории Дирака, в основе которых лежало изучение спиновых свойств электрона, стимулировали развитие теории, и вскоре Бете (1947) дал объяснение лэмбовского сдвига уровней водородного атома как результата вакуумного взаимодействия электрона (радиационный сдвиг уровней), а Швингер (1948), исходя из предположения о взаимодействии электрона с вакуумом электромагнитного поля, дал объяснение природы аномального магнитного момента.

Таким образом, точные решения задачи о движении электрона в кулоновском поле ядра сыграли важную роль в исследовании радиационного сдвига уровней энергии водородного атома и аномального магнитного момента электрона, а квазиклассическое приближение теории Дирака дало наглядную физическую интерпретацию наблюдаемым эффектам, связанным со спином электрона.

## §2.6. Эволюция спина электрона в представлении Гейзенберга.

### Уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди

С целью более детального исследования динамики спина электрона при его движении во внешнем электромагнитном поле рассмотрим эволюцию оператора спина в представлении Гейзенберга. Общий подход к такому рассмотрению становится особенно наглядным в случае нерелятивистской частицы, когда гамильтониан Шредингера–Паули определяется выражением (см. (2.3))

$$\mathcal{H} = (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2/2m + \mu_0(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}), \quad (2.91)$$

$\mu_0$  — магнетон Бора,  $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули. Тогда нетрудно получить, что уравнение Гейзенберга для оператора спина  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$  имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S} = \frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathcal{H}) = -\frac{e_0}{mc}[\mathbf{S}\mathbf{H}]. \quad (2.92)$$

Если теперь ввести усредненное по состоянию квазиклассического волнового пакета, движущегося по классической траектории, значение спина ( $\mathbf{S}$ ) =  $\zeta$ , то из (2.92) следует, что эволюция спина заключается в прецессии вектора  $\zeta$  вокруг направления магнитного поля

$$\frac{d}{dt}\zeta = [\boldsymbol{\Omega}\zeta], \quad (2.93)$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = e_0\mathbf{H}/mc$ ,  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$  — циклотронная частота.

Замечательной особенностью этого уравнения является его независимость от постоянной Планка  $\hbar$  — оно имеет, таким образом, “классический” характер и допускает очень наглядное представление о поведении спина электрона во внешнем поле. Так, в частности, сравнивая уравнение (2.93) с классическим законом изменения скорости частицы в магнитном поле:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}]$$

(это уравнение можно получить тем же способом в гейзенберговском представлении и затем положить, что  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}$ ), можно заметить совпадение угловых скоростей вращения вектора спина и вектора скорости, благодаря чему сохраняется постоянным угол между вектором спина и направлением движения частицы. Это свойство проявляется, однако, лишь в том случае, когда  $g$ -фактор электрона, характеризующий гиромагнитное отношение, в точности равен 2. Учет аномальной части магнитного момента  $a_e = \frac{g-2}{2}$  приводит к нарушению равенства частот, ибо теперь  $\Omega^3 = \Omega g/2 = \Omega(1 + a_e)$ , благодаря чему, в частности, продольная поляризация спина теряет свойство интеграла движения.

Действительно, полагая в гамильтониане (2.91) замену  $\mu_0 \rightarrow \mu_0(1+a_e)$ , с помощью уравнений Гейзенберга получим

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{SP}) \right\rangle = -\frac{e_0}{mc} \frac{g-2}{2} \mathbf{P}[\mathbf{SH}].$$

Поскольку уравнение эволюции спина (2.93) является по своему характеру “классическим”, оно допускает довольно простое обобщение на релятивистский случай движения частицы. Именно на этом пути Баргманн, Мишель и Телегди, развивая квазиклассическую теорию спина, получили уравнение эволюции спина релятивистской частицы (1959), которое в настоящее время в силу его простоты и наглядности играет важную роль в рассмотрении весьма тонких особенностей динамики спина электрона во внешнем электромагнитном поле.

Рассмотрим “классический” четырехмерный вектор спина  $S^\nu$ , который в системе покоя электрона (в соответствии с определением Дарвина) характеризует поляризацию частицы  $\zeta$ :

$$S_0^\mu = (0, S_0) = (0, \zeta).$$

С помощью преобразований Лоренца перейдем в лабораторную систему координат. При этом для 4-вектора спина получим

$$S^\mu = \left[ \frac{\zeta \mathbf{P}}{mc}, \quad \zeta + \frac{(\zeta \mathbf{P}) \mathbf{P}}{m(E + mc^2)} \right]. \quad (2.94)$$

В результате несложных преобразований (см. [7]) обобщение нерелятивистского закона эволюции спина (2.93) можно представить в виде

$$\frac{d}{d\tau} S^\mu = \frac{e}{2m} g F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{e}{m} \frac{g-2}{2} u^\mu F^{\alpha\beta} u_\beta S_\alpha, \quad (2.95)$$

где  $\tau$  — собственное время,  $u^\mu$  — четырехмерная скорость:

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (\hbar = c = 1).$$

Если теперь в формуле (2.94) положить, что  $\zeta = \mathbf{O}$  (трехмерный вектор спина), то можно установить связь вектора  $\mathbf{O}$  и пространственных компонент  $S^\mu$ :

$$\mathbf{O} = \mathbf{S} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{S}\mathbf{p})}{E(E+m)} = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \beta(\beta\mathbf{S}),$$

где

$$\gamma = E/m, \quad \beta = \mathbf{p}/E,$$

и тогда, переходя к лабораторному времени  $d\tau = \gamma dt$ , с помощью (2.95) получим для среднего по волновому пакету

$$\frac{d\zeta}{dt} = [\Omega^p \zeta],$$

где

$$\Omega^p = \frac{e^0}{m} \left\{ g\mathbf{H}/2\gamma - \left( g_2 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \right) [\beta\mathbf{E}] - \frac{g-2}{2} \frac{\gamma}{1+\gamma} [\beta[\beta\mathbf{H}]] \right\}. \quad (2.96)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей, а  $E = |\mathcal{H} - e\Phi|$ .

Это классическое уравнение, описывающее эволюцию спина во времени при движении релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

Интересно отметить, что уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди (БМТ) с точностью до несущественных преобразований совпадает с классическим уравнением Я. И. Френкеля, записанным им исходя из релятивистского обобщения модели точечного волчка. Как известно, на раннем этапе создания теории спина модель электрона-волчка, предложенная Уленбеком и Гаудсмитом, подвергалась сильной критике (Паули, Бор). Во-первых, вращение протяженного волчка входило в противоречие с теорией относительности: для создания собственного момента  $\hbar/2$  требовалось движение волчка как шарика со скоростью, превышающей скорость света. Кроме того, расчет спин-орбитального взаимодействия (см. (2.90)) в два раза превышал данные эксперимента. В результате модель волчка была отвергнута. Сама же гипотеза о спине одержала победу, ибо Френкель предложил рассматривать “точечный” волчок, а также нашел поправку к расчету спин-орбитального взаимодействия (поправка Томаса–Френкеля). В дальнейшем модель релятивистского волчка Френкеля вновь подверглась критике, в особенности после создания Дираком квантовой релятивистской теории электрона. Действительно, спин частицы имеет квантовую природу, и в связи с этим казалось бы, что попытки описания спина классическими методами заранее исключены, — это и составляло основу критики гипотезы о спине как о свойстве классического вращающегося волчка. Тем не менее, однако, уравнение эволюции спина БМТ имеет классическое выражение — оно не зависит от постоянной Планка  $\hbar$ .

В этом смысле можно наблюдать возрождение интереса к классической модели спина Френкеля, однако на совершенно новом уровне понимания такого сложного явления, как динамика спина релятивистской частицы. Дело здесь заключается в том, что уравнение БМТ является классическим приближением общего уравнения эволюции спина в представлении Гейзенберга (см. [9]). Рассмотрим сейчас это более подробно, и прежде всего с помощью гамильтониана

$$\mathcal{H} = c(\alpha\mathbf{P}) + e\Phi + \rho_3 mc^2 + \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 [\rho_3(\Sigma\mathbf{H}) + \rho_2(\Sigma\mathbf{E})]$$

(здесь мы положили  $(g - 2)/2 = \alpha/2\pi$ ) найдем в представлении Гейзенберга эволюцию во времени оператора спина  $\mathbf{O}$ . Ограничиваясь для краткости случаем движения электрона в постоянном во времени магнитном поле ( $\mathbf{E} = 0$ ), получим, что четная часть производной по времени от оператора спина имеет вид

$$\left[ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right] = \frac{ec}{E} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \right) [\mathbf{OH}] - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{mc} \frac{c^2 [\mathbf{OP}](\mathbf{PH})}{E(\mathbf{F} + mc^2)}. \quad (2.97)$$

Обратим внимание на то, что точное уравнение Гейзенберга для четной части оператора  $\left[ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right]$  функционально совпадает с классическим уравнением БМТ (2.96).

Если усреднить полученное уравнение (2.97) по волновому пакету, полагая

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \zeta, \quad c\langle \mathbf{P} \rangle = \beta E,$$

то мы приходим к релятивистскому классическому уравнению БМТ (см. (2.96):

$$\left\langle \left[ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right] \right\rangle = \frac{d}{dt} \zeta = \frac{ec}{E} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \right) [\zeta \mathbf{H}] - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{mc} \frac{\gamma}{1 + \gamma} [\zeta \beta](\beta \mathbf{H}). \quad (2.98)$$

Рассмотрим теперь достаточно нетривиальный вопрос о пределах применимости уравнения БМТ. Прежде всего докажем, что для любого оператора  $\mathbf{F}$  справедливо утверждение

$$\{ \mathbf{F} \} = \frac{i\hbar}{2E} \frac{d\mathbf{F}}{dt} \Lambda. \quad (2.99)$$

Здесь символом  $\{ \}$  обозначена нечетная часть оператора, а  $\Lambda = \mathcal{H}/E$  — знаковый оператор. В справедливости этого соотношения можно убедиться с помощью квантовых скобок Пуассона.

С помощью (2.99) нетрудно получить, что

$$\left( \frac{d\mathbf{F}}{dt} - \left[ \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right] \right) \mathcal{H} = \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 \mathbf{F}}{dt^2}, \quad (2.100)$$

где символом  $[ ]$  обозначена четная часть оператора. Из (2.100) видно, что пропорциональная постоянной Планка  $\hbar$  правая часть равенства описывает “шредингеровское дрожание”, которое было рассмотрено ранее. Важно здесь подчеркнуть, что отрицательно-энергетические (зарядово-сопряженные) состояния могут входить лишь в выражение второй производной  $\ddot{\mathbf{F}}$ , ибо при  $\hbar \rightarrow 0$   $\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right]$ , т. е. Zitterbewegung отсутствует.

В соответствии с общей формулой (2.100) для оператора спина получим

$$\left( \frac{d\mathbf{O}}{dt} - \left[ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right] \right) \mathcal{H} = \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 \mathbf{O}}{dt^2}, \quad (2.101)$$

и при  $\hbar \rightarrow 0$  (квазиклассическое приближение) в пренебрежении “шредингеровским дрожанием” мы приходим к уравнению Баргманна-Мишеля-Телегди (2.98)

$$\frac{d\mathbf{O}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right] \frac{ec}{E} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \right) [\mathbf{OH}] + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{mc} \frac{[\beta\mathbf{O}][\beta\mathbf{H}]}{1 + 1/\gamma}, \quad \beta = \frac{c\mathbf{P}}{E},$$

если здесь перейти к среднему  $\langle \mathbf{O} \rangle = \zeta$  по волновому пакету.

Для более точного анализа пределов применимости квазиклассического приближения вернемся к исходному уравнению (2.101), но опустим для упрощения оценки члены, связанные с аномальным магнитным моментом. Тогда рассматривая движение электрона в неоднородном магнитном поле, с помощью (2.101) получим

$$\ddot{\mathbf{O}} + \frac{2i}{\hbar} \dot{\mathbf{O}} \mathcal{H} = \frac{2iec}{\hbar} \left( [\mathbf{OH}] + \frac{\hbar c}{2E} \nabla G \right),$$

где

$$G = (\alpha\mathbf{H}) \left[ 1 - \frac{c\rho_3(\alpha\mathbf{P})}{E + mc^2} \right].$$

Таким образом, квантовые члены в уравнении эволюции спина относятся не только к описанию “шредингеровского дрожания”, они также характеризуют влияние неоднородностей поля. Очевидно, что переход к классическому уравнению БМТ будет справедлив, если

$$\left| \frac{\hbar c \text{grad} H}{E H} \right| \ll 1.$$

Другими словами, это ограничение требует достаточно плавного изменения магнитного поля на расстояниях порядка ширины волнового пакета.

Оценим теперь возможность пренебрежения “шредингеровским дрожанием”. Очевидно, что правой частью уравнения (2.101) можно пренебречь, если

$$\left| \frac{\hbar}{2E} \frac{\ddot{\langle \mathbf{O} \rangle}}{\langle \dot{\mathbf{O}} \rangle} \right| \ll 1, \quad \text{или} \quad \left| \frac{\hbar}{2E} \langle \dot{\mathbf{O}} \rangle \right| \ll 1.$$

Предполагая далее для упрощения, что движение электрона происходит в плоскости вращения ( $\mathbf{P} \perp \mathbf{H}$ ), получим

$$\left| \frac{\hbar}{2E} \frac{ecH}{E} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma \right) \right| = \left| \frac{\omega_{\text{прец}}}{\omega_{\text{дрож}}} \right| \ll 1. \quad (2.102)$$

Таким образом, уравнение Гейзенберга переходит в классическое уравнение БМТ в случае, если частота прецессии спина электрона в магнитном поле значительно меньше частоты “дрожания”. Особенно наглядно этот критерий проявляется в нерелятивистском случае эволюции спина в сильном магнитном поле  $H \rightarrow H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar$ . Действительно, в этом предположении формула (2.102) имеет вид

$$\left| \frac{eH}{mc} \frac{\hbar}{2mc^2} \right| \ll 1, \quad \text{или} \quad H \ll 2H_0.$$

Следовательно, в сильном магнитном поле “шредингеровское дрожание” становится существенным фактором, и переход к классическому уравнению БМТ оказывается невозможным.

Заметим, что в сильном магнитном поле, когда  $H \rightarrow H_0$ , рассмотрение задачи вступает в особую ультраквантовую область, ибо постоянная Планка  $\hbar$ , входящая в выражение для энергии взаимодействия магнитного диполя с магнитным полем

$$(\mu \mathbf{H}) = \frac{e \hbar}{2mc} (\sigma \mathbf{H}),$$

сокращается:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \mu_0 (\sigma \mathbf{H}), \quad |\mu \mathbf{H}| \rightarrow \frac{e_0 \hbar}{2mc} \frac{m^2 c^3}{e_0 \hbar} = \frac{mc^2}{2}.$$

В этой ультраквантовой области спиновые эффекты могут наблюдаться уже в нулевом порядке по  $\hbar$ .

# ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ И ИЗЛУЧЕНИИ ФЕРМИОНОВ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

## §3.1. Метод точных решений. Представление Фарри.

### Точные решения уравнения Дирака

Основа метода точных решений состоит в том, что квантовое состояние частицы во внешнем поле должно описываться волновой функцией, являющейся точным решением уравнения Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = [c(\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 mc^2 + e\Phi] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Теория возмущений, предлагающая путь решения этого уравнения в виде разложения волновой функции в ряд по внешнему полю ( $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$ ), здесь неприемлема, ибо эффекты, связанные с внешним полем, могут быть существенно нелинейными. Таким образом, точный учет внешнего электромагнитного поля обеспечивает выход за рамки теории возмущений, открывая новые возможности в анализе широкого круга физических явлений и, в особенности, в анализе физических процессов, протекающих в условиях экстремально сильных полей.

Квантовые процессы, происходящие с электроном в связанном состоянии, обусловленном его взаимодействием с классическим электромагнитным полем ( $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$ ), можно далее рассматривать по теории возмущений, имея в виду точное определение волновой функции частицы в связанном состоянии.

Ранние исследования в духе этой постановки задачи проводились по расчету излучения водородного атома по теории Дирака, в конце 40-х годов А. А. Соколов положил начало изучению квантовых эффектов в синхротронном излучении электрона, движущегося в магнитном поле [2]; М. Альперин провел первые исследования по комптон-эффекту в условиях движения электрона в поле плоской электромагнитной волны.

Позже Фарри (1951) показал, что формализм Фейнмана–Дайсона можно обобщить на случай, когда электрон не свободен, а находится в связанном состоянии (представление Фарри). Это укладывается в рамки шредингеровской картины, если в качестве невозмущенной функции принимается точное решение уравнения Дирака для частицы во внешнем поле в связанном состоянии.

При этом удобно 4-потенциал в теории Дирака разделить на две части, полагая

$$A^\mu = A_{\text{ext}}^\mu + A_{\text{кв}}^\mu, \quad A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}),$$

где  $A_{\text{ext}}^\mu$  — классическая часть электромагнитного поля — это внешнее поле, которое в решениях уравнения Дирака учитывается точно, а  $A_{\text{кв}}^\mu$  — квантовая часть поля, которая учитывается по теории возмущений. При таком подходе все разложения в методе теории возмущений производятся по полной системе волновых функций  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , учитывающих классическое электромагнитное поле точно (см. также [2; 4]). Заметим, что именно эта схема и лежала в основе ранних работ, выполненных по анализу квантовых эффектов во внешнем поле [2; 4] (см. также [10]). Фарри решил проблему ковариантного подхода к постановке широкого класса задач о взаимодействии связанных систем и задачу об анализе и выделении расходимостей. Картина Фарри дает возможность сохранения диаграммной техники Фейнмана с обобщением на связанные состояния: в начальном и конечном состояниях электрон находится во внешнем классическом поле.

Таким образом, точные решения уравнения Дирака обеспечивают основу всей техники решения задач, составляя своеобразный фундамент — базис в гильбертовом пространстве векторов состояний. Все разложения строятся на основе этого базиса, представляющего собой полную систему функций.

В последние годы в центре внимания оказались проблемы развития квантовой электродинамики в сильном электромагнитном поле, влияние которого на состояние заряженной частицы не может рассматриваться как возмущение и должно учитываться точно. В процессе разработки этого нового направления возникла необходимость отодвинуть границы исследования физических явлений в область таких значений напряженностей полей, которые в недавнем прошлом не только были недоступными, но и казались экзотическими. Было установлено, что изучение взаимодействия вещества с электромагнитным полем в критических условиях позволяет предсказывать и наблюдать новые по своей природе физические явления. Открывается перспектива решения ряда принципиальных вопросов, и в частности проверки существующей теории в условиях экстремальных полей, а также установления границ ее применимости. Этому способствует принципиально новая постановка задачи, в основе которой влияние классического электромагнитного поля учитывается точно и тем самым обеспечивается возможность выхода за традиционные рамки теории возмущений.

Остановившись на примерах существования сверхсильных полей, прежде всего следует обратиться к пульсарам, которые явились неповторимой лабораторией для исследования поведения вещества в экстремальных условиях сверхвысокой плотности материи и сверхсильных магнитных полей.

Наиболее вероятной моделью пульсара является нейтронная звезда — наклонный ротатор. После выгорания существенной части водорода в глубинах звезды и его превращения в гелий путем термоядерного синтеза давление газов не в состоянии уравновесить массу вышележащих слоев звезды. Наступает катастрофическое сжатие с выделением огромной энергии (это наблюдается как вспышка сверхновой), причем часть вещества выбрасывается и образует туманность, а сама звезда резко сжимается до радиуса порядка десятка километров. Так появляется нейтронная звезда с чудовищной плотностью  $10^{15}$  г/см<sup>3</sup>, поскольку масса порядка массы Солнца сосредоточивается в малой области пространства.

Сжатие звезды сопровождается резким ростом напряженности магнитного поля: если мысленно сжать Солнце ( $R = 0,7 \cdot 10^{11}$  см,  $H = 1 \div 1,5$  Гс) до диаметра 10 км, то нетрудно убедиться в том, что при условии постоянства магнитного потока  $HS$ ,  $S = \pi R^2$ , магнитное поле будет достигать значения  $2 \cdot 10^{11}$  Гс. Результаты наблюдения жесткого рентгеновского излучения от пульсара Геркулес X-1 приводят к заключению о том, что магнитное поле у поверхности пульсара имеет значение  $H \sim 5 \div 6 \cdot 10^{12}$  Гс. Это “вмороженное” в нейтронную звезду поле должно усиливаться с ростом плотности вещества по мере приближения к ее центру, и по оценкам индукция поля в центральной части нейтронной звезды достигает огромной величины  $\sim 10^{17}$  Гс.

Несколько неожиданным может показаться, что в лабораторных условиях могут реализоваться магнитные поля, подобные экстремальному магнитному полю пульсара. Такие поля должны наблюдаться при нецентральной столкновении тяжелых ионов. Пусть два ядра с зарядами  $z_1$  и  $z_2$  движутся навстречу друг другу. Тогда, подобрав оптимальный прицельный параметр, можно получить на короткое время поле

$$H = \frac{JR^2}{2c(d^2 + R^2)^{3/2}}, \quad \text{где} \quad J = \frac{(Z_1 + Z_2)ev}{2\pi R}.$$

В этих выражениях  $R$  — радиус “петли с током” (формула Био-Савара-Лапласа),  $d$  — расстояние от оси симметрии до точки наблюдения,  $J$  — ток ионов,  $Z_1$  и  $Z_2$  — их заряды, отнесенные к заряду электрона, а  $v$  — относительная скорость. Полагая  $Z_1 + Z_2 = 174$ ,  $v = 0,1$  с и  $R = 15$  Фм ( $1 \text{ Фм} = 10^{15}$  м), найдем, что на оси симметрии ( $d = 0$ ) напряженность магнитного поля достигает значения  $H \sim 3 \cdot 10^{14}$  Гс.

В настоящее время в США и ФРГ ведутся эксперименты с тяжелыми ионами с целью обнаружения спонтанного рождения электронов и позитронов в электрическом и магнитном полях, возникающих при встречном сближении ионов.

В рассмотренных оценках экстремальных значений магнитного поля мы не принимали во внимание энергию частиц, взаимодействующих

с полем. Вместе с тем этот вопрос является весьма существенным. Известно (см. [2]), что процессы излучения электрона во внешнем электромагнитном поле зависят от характерного квантового динамического параметра

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6} (F_{\mu\nu} p^\nu)^2, \quad (3.1)$$

в котором  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля, а  $p^\nu$  — четырехмерный импульс частицы. В частном случае движения электрона в чисто магнитном поле параметр  $\chi$  принимает вид

$$\chi = \frac{p_\perp}{mc} \frac{H}{H_0}, \quad H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar \simeq 4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}. \quad (3.2)$$

Область значений  $\chi \geq 1$  — существенно квантовая, характерная проявлением новых интересных квантовых эффектов. В этой связи следует упомянуть о недавно выполненных экспериментах на ускорителе SPS в CERN, в которых пучки электронов с энергией 150 ГэВ с очень малым угловым разбросом (0,025 мрад) направлялись вдоль оси кристалла германия. Вдоль этой оси в кристалле действуют сильные макроскопические поля, которые обеспечивают близость параметра  $\chi$  к единице. Другими словами, в системе покоя электрона эффективное магнитное поле достигает значения  $4 \cdot 10^9 \text{ Тл} = 4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$ . Таким образом, не только в условиях пульсаров, но и лабораторной практике современная экспериментальная физика подошла к очень интересному новому рубежу — квантовым эффектам в условиях критических значений внешнего электромагнитного поля. К этому необходимо добавить также, что в современных условиях эксперимента существенную роль начинают играть мощные быстропеременные поля. Как известно, квантовая электроника произвела революцию в электронике и оптике. Открылась возможность с помощью квантового генератора сконцентрировать электромагнитную энергию в малой области пространства и в заданном частотном интервале. Так, в частности, напряженность электромагнитного поля световой волны достигает в рубиновом лазере значения  $10^6 \text{ В/см}$ . Эта величина сравнима с напряженностью внутриатомных полей. Открываются возможности проявления совершенно новых нелинейных эффектов, возможности проверки теории в условиях экстремальных значений статических и быстропеременных полей.

В сильном магнитном поле наблюдается специфика протекания квантово-электродинамических процессов, и в частности образование новых каналов реакций — однофотонного рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар, имеющее принципиальное значение для генерации релятивистской плазмы в пульсарах. Весьма интересным является характерное для сильного поля проявление динамической природы аномального магнитного момента электрона, в особенности его экзотическое поведение в условиях высокой энергии частицы и сильного магнитного поля (т. е. когда  $\chi \geq 1$ ).

В случае сильного поля возникает совершенно новая ситуация с проявлением спиновых эффектов. Действительно, поскольку, как уже отмечалось, в современном физическом эксперименте с ультрарелятивистскими электронами, движущимися в кристалле, динамический инвариантный параметр  $\chi$  приближается к единице, это означает, что в системе покоя электрона магнитное поле может достигать критических значений: по оценкам  $H \sim 4 \cdot 10^9 \text{ Тл} = 4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$ , т. е.  $H \sim H_0$ . В этих условиях энергия спинового взаимодействия электронов с полем становится порядка энергии покоя электрона

$$U_\mu = -\mu\mathbf{H} = \frac{e_0\hbar H_0}{2mc} \sim mc^2.$$

При этом в ряде явлений спиновые эффекты в области ультрарелятивистских значений энергии и экстремальных полей выходят на передний план. Так, в частности (см. [2; 4]), изменяется характер мощности синхротронного излучения: существенный вклад в ее величину начинают вносить квантовые переходы с изменением ориентации спина частиц (спин-флип-переходы), причем их вклад в области ультраквантовых значений энергии становится особенно заметным. Большие поля и ультрарелятивистские значения энергии определяют область существенно квантовых явлений, в которой влияние внешнего поля проявляется наиболее фундаментальным образом, — это новая глава физики.

Специфические закономерности поведения спина частиц проявляются также и в полях, далеких от критических значений. Как известно [2], при длительной циркуляции электронов в магнитном поле накопительного кольца под воздействием синхротронного излучения возникает процесс упорядочения ориентации спинов частиц. При этом магнитное поле играет ведущую роль, полностью определяя основные характеристики процесса. Метод точных решений оказался особенно интересным, ибо с его помощью оказалось возможным предсказать ряд новых, неизвестных ранее физических эффектов квантовой природы задолго до их экспериментального наблюдения.

Остановимся теперь на вопросе о точных решениях уравнения Дирака для частицы, движущейся в электромагнитном поле.

Точных решений уравнения Дирака для движения частицы во внешнем электромагнитном поле известно немного. Наиболее важными из них являются: электрон в поле кулоновского потенциала; электрон в однородном магнитном поле, постоянном во времени; электрон, движущийся в поле плоской электромагнитной волны; электрон, движущийся в комбинированном поле плоской электромагнитной волны и однородном магнитном поле. Эти решения известны в теории достаточно давно, однако последовательное введение спинового квантового числа (“четвертого”) оказалось возможным только после разработки задачи об операторах поляризации.

Для разделения точных решений уравнения Дирака по спиновым состояниям необходимо подчинить волновую функцию требованию быть

собственной для оператора поляризации, коммутирующего с гамильтонианом. В этом случае спиновые состояния могут быть определены независимо от орбитального движения частицы.

Рассмотрим кратко\* некоторые из точных решений уравнения Дирака.

### 1. Свободное движение частицы

Волновая функция, удовлетворяющая стационарному уравнению Дирака

$$\mathcal{H}\Psi = [c(\alpha\mathbf{p}) + \rho_3 mc^2]\Psi = \varepsilon c\hbar\mathcal{K}\Psi, \quad (3.3)$$

может быть записана в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = BL^{-3/2} e^{-i\varepsilon c\mathcal{K}t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где  $E = \varepsilon c\hbar\mathcal{K}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , — энергия электрона,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \hbar k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$  — импульс.

Для введения спинового квантового числа выберем оператор продольной поляризации, проектирующий спин на импульс частицы

$$T^0 = (\mathbf{O}\mathbf{p})/p = (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p})/p.$$

Этот оператор коммутирует с гамильтонианом и имеет общие с ним волновые функции

$$(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p})\Psi = \zeta\hbar k\Psi. \quad (3.4)$$

Здесь  $k = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$ ,  $\zeta = \pm 1$  определяет ориентацию спина по отношению к направлению движения частицы (спиральность),  $\mathcal{K} = (k_0^2 + k^2)^{1/2}$ , а для матрицы  $B$  получим из (3.3) и (3.4):

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta(1 + \varepsilon k_0/\mathcal{K})^{1/2}(1 + \zeta \cos\theta)^{1/2} e^{-i\varphi/2} \\ (1 + \varepsilon k_0/\mathcal{K})^{1/2}(1 - \zeta \cos\theta)^{1/2} e^{i\varphi/2} \\ \varepsilon(1 - \varepsilon k_0/\mathcal{K})^{1/2}(1 + \zeta \cos\theta)^{1/2} e^{-i\varphi/2} \\ \varepsilon\zeta(1 - \varepsilon k_0/\mathcal{K})^{1/2}(1 - \zeta \cos\theta)^{1/2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (k_0 = mc/\hbar), \quad (3.5)$$

причем биспинор  $B$  подчинен условию нормировки

$$B^+(\varepsilon', \zeta', k)B(\varepsilon, \zeta, k) = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\zeta\zeta'}.$$

В этой задаче спиновая часть функции отделяется от орбитальной части (плоской волны). Это обстоятельство упрощает анализ спиновых эффектов, поскольку спиновые и пространственные переменные разделяются.

\* Более детально с методом точных решений можно ознакомиться в монографии [2].

## 2. Электрон в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим электрон, движущийся в постоянном во времени и однородном в пространстве магнитном поле, и вектор напряженности поля для определенности направим по оси  $z$  цилиндрической системы координат, наиболее естественным образом связанной с характером движения электрона. Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  удобнее всего можно выбрать в симметричном виде, полагая, что

$$\mathbf{A} = (-yH/2, xH/2, 0),$$

и тогда, поскольку гамильтониан уравнения Дирака

$$\mathcal{H} = c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 mc^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

не зависит от времени, можно перейти к стационарной задаче, вводя

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\epsilon c\mathcal{K}t}\Psi(\mathbf{r}),$$

где  $\epsilon = \pm 1$  характеризует знак энергии, а  $E = c\hbar\mathcal{K} > 0$ . Как известно (см., например, [2]), решение уравнения Дирака в этой задаче имеет следующий вид:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\epsilon c\mathcal{K}t} \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} \frac{e^{i(l-\frac{1}{2})\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f, \quad (3.6)$$

где

$$f = \sqrt{2\gamma} \begin{pmatrix} C_1 I_{n-1,s}(\rho) e^{-\varphi/2} \\ iC_2 I_{n,s}(\rho) e^{i\varphi/2} \\ C_3 I_{n-1,s}(\rho) e^{-i\varphi/2} \\ iC_4 I_{n,s}(\rho) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

При этом  $\rho = \gamma r^2$ ,  $\gamma = e_0 H/2c\hbar$ , спектр собственных значений энергии зависит от главного квантового числа  $n = l + s = 0, 1, 2, \dots$ :

$$E = c\hbar\mathcal{K} = c\hbar\sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4n\gamma}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

а функции Лагерра связаны с полиномами Лагерра

$$Q_s^{n-s}(\rho) = \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^{s+k} s!(s+l)! \rho^{s-k}}{k!(s-k)!(s+l-k)!} \quad (3.8)$$

соотношением

$$I_{n,s}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n!s!}} e^{-\rho/2} \rho^{(n-s)/2} Q_s^{n-s}(\rho). \quad (3.9)$$

Для спиновых коэффициентов  $C_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) исходя из уравнения Дирака можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned}(\varepsilon\mathcal{K} \mp k_0)C_{1,3} - \sqrt{4n\gamma}C_{4,2} - k_3C_{3,1} &= 0, \\(\varepsilon\mathcal{K} \mp k_0)C_{2,4} - \sqrt{4n\gamma}C_{3,1} + k_3C_{4,2} &= 0,\end{aligned}\quad (3.10)$$

причем в силу нормировки волновой функции  $\Psi$  эти коэффициенты подчинены условию

$$\sum_{m=1}^4 C_m^* C_m = 1.$$

Одно из возможных решений системы уравнений (3.10) имеет достаточно простой вид

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} &= \\&= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \varepsilon k_0/\mathcal{K})} \left[ D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k_3/(\varepsilon\mathcal{K} + k_0) \\ \sqrt{4n\gamma}/(\varepsilon\mathcal{K} + k_0) \end{pmatrix} + D_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{4n\gamma}/(\varepsilon\mathcal{K} + k_0) \\ k_3/(\varepsilon\mathcal{K} + k_0) \end{pmatrix} \right],\end{aligned}\quad (3.11)$$

где

$$|D_1|^2 + |D_{-1}|^2 = 1.$$

С более подробным решением уравнения Дирака можно ознакомиться в [2]. Здесь мы остановимся на введении спина в точные решения (3.6), (3.7). Полученная здесь волновая функция является собственной для оператора Гамильтона

$$\mathcal{H}\Psi = \varepsilon E\Psi,$$

оператора проекции импульса на направление магнитного поля

$$\rho_3\Psi = \hbar k_3\Psi$$

и оператора проекции полного момента на направление магнитного поля

$$J_3\Psi = \hbar \left( l - \frac{1}{2} \right) \Psi.$$

Все эти операторы коммутируют между собой и поэтому имеют общие волновые функции. Однако для полного определения квантового

состояния, как уже отмечалось ранее, необходимо введение четвертого квантового числа, характеризующего спин электрона. Описание спиновых свойств можно в данном случае произвести различными способами, а именно: 1) введением трехмерного оператора спина  $O$ , 2) с помощью 4-вектора поляризации  $T^\mu = (T^0, \mathbf{T})$  и 3) с помощью тензора спина  $\Pi_{\mu\nu}$ .

Выбирая, в частности, оператор поляризации  $O_3$  (поперечная поляризация) и подчиняя волновую функцию требованию быть собственной для этого оператора

$$O_3\Psi = \zeta\Psi, \quad (3.12)$$

где  $\zeta = \pm 1$  определяет ориентацию спина электрона соответственно вдоль магнитного поля и противоположно ему, получаем для коэффициентов  $D_{\pm 1}$  значения

$$D_1 = \sqrt{(1+\zeta)/2}, \quad D_{-1} = \sqrt{(1-\zeta)/2}. \quad (3.13)$$

Как видно из выражения для спиновых коэффициентов (3.11), (3.13), при переходе в систему покоя (3.11) переходит в паулиевские волновые функции, которые соответствуют двум альтернативным ориентациям спина по отношению к внешнему магнитному полю. Заметим, что введение оператора  $O_3$  для описания поляризации может вызвать известное чувство неудовлетворенности, поскольку он не обладает ковариантными свойствами и преобразуется при переходе к новой лоренц-системе по особым правилам. Наряду с этим оператором для описания поперечной поляризации можно ввести также ковариантные операторы

$$\mu_3 = \Sigma_3 + \rho_2[\Sigma P]_3/mc, \quad T_3 = \rho_3\Sigma_3 + \rho_1 P_3/mc.$$

Все эти операторы являются инвариантными обобщениями единичного вектора поляризации  $O$ , и поэтому указанные методы введения четвертого квантового числа полностью эквивалентны.

Тем не менее, однако, оператор "истинного" спина  $O$  более предпочтителен, поскольку он является единичным. Операторы же  $\mu_3$  и  $T_3$  требуют нормировки\*. При этом в нормировочный коэффициент войдут энергия и импульс, которые будут изменяться при квантовых переходах.

\* Это становится очевидным, если вспомнить, что

$$T_\mu T^\mu = \Pi_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = -\frac{3}{4}\hbar^2 = -\hbar^2 s(s+1).$$

Таким образом, пространственные части  $T^\mu$  и  $\Pi_{\mu\nu}$  свойством единичного оператора обладать не могут.

Для описания продольной поляризации можно ввести оператор  $T^0 = \Sigma \mathbf{P}/mc = \mathbf{O} \mathbf{P}/mc$ , коммутирующий с гамильтонианом и характеризующий проекцию спина на направление движения частицы. Тогда, подчиняя волновую функцию требованию быть собственной для оператора  $T^0$ :

$$T^0 \Psi = \zeta \Psi,$$

получим, что

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon k_0/\mathcal{K}} & \sqrt{1 + \zeta k_3/\mathcal{K}} \\ \zeta \sqrt{1 + \varepsilon k_0/\mathcal{K}} & \sqrt{1 - \zeta k_3/\mathcal{K}} \\ \varepsilon \zeta \sqrt{1 - \varepsilon k_0/\mathcal{K}} & \sqrt{1 + \zeta k_3/\mathcal{K}} \\ \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon k_0/\mathcal{K}} & \sqrt{1 - \zeta k_3/\mathcal{K}} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

где  $\zeta = \pm 1$  определяет спиральность, т. е. соответствует проекции спина на направление движения частицы (продольная поляризация).

Таковы волновые функции электрона в однородном магнитном поле, являющиеся точными решениями уравнения Дирака, разделенными по спиновым состояниям.

### 3. Движение электрона в поле плоской электромагнитной волны

Рассмотрим решения уравнения Дирака для электрона движущегося в поле плоской электромагнитной волны, разделенные по состояниям поляризации. Впервые задача о движении электрона в поле плоской волны была рассмотрена Д. Волковым (1935), и им было найдено точное решение в достаточно общем виде. Мы ограничимся случаем линейно поляризованной волны, распространяющейся по оси  $z$ . Тогда вектор-потенциал, входящий в уравнение Дирака

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c(\alpha \mathbf{P}) - \rho_3 mc^2 \right] \Psi = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (3.15)$$

следует выбрать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{cE_0}{\omega} (0, \cos \delta, 0), \quad \delta = t - z/c.$$

В дальнейшем введем систему единиц, в которой  $c = \hbar = 1$ .

Как показал Д. Волков, решение уравнения Дирака (3.15) в этом случае можно записать в виде (см. также [2]):

$$\Psi_{\mathbf{k}, \lambda} = \left[ 1 + \frac{eA_2}{2\lambda} \alpha_2 (1 - \alpha_3) \right] e^{-i(\lambda t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + S(\delta))} \Psi_0, \quad (3.16)$$

где  $S(\delta) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\delta (\pi^2 + k_0^2 - \lambda^2) d\delta$ ,  $\pi = \mathbf{k} - e\mathbf{A}$ ,  $k_0 = m$ ,  $\lambda = k_0 \alpha$ ,  $\alpha = (E - p_z)/m$ , а  $\Psi_0$  — спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака для свободной частицы

$$(\mathcal{K} - \alpha \mathbf{k} - \rho_3 k_0) \Psi_0 = 0. \quad (3.17)$$

Заметим, что в формуле (3.16) вектор  $\mathbf{k}$  — это двумерный вектор, характеризующий движение в плоскости, нормальной к направлению распространения волны. Поэтому  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$ .

Знак энергии в решении (3.16) определяется знаком  $\lambda$  — величиной «квазиэнергии», сохраняющейся в плосковолновом поле. В квантовой теории знак  $\lambda$  определяет частицы, если  $\lambda > 0$ , и античастицы, если  $\lambda < 0$ .

Теперь введем оператор поляризации в виде пространственной компоненты 4-вектора поляризации (см. (2.74)), точнее, в виде проекции  $\mathbf{T}$  на направление магнитного поля волны (т. е. на ось  $z$  в предположении, что волна распространяется по оси  $z$ ):

$$T_1 = \mathbf{T}\mathbf{H}/H = \rho_3 \Sigma_1 + \rho_1 \rho_1 / m. \quad (3.18)$$

Спиновая матрица  $\Psi_0$  может быть определена путем совместного решения уравнения (3.17) и уравнения

$$T_1 \Psi_0 = (\zeta \eta / m) \Psi_0. \quad (3.19)$$

Тогда коэффициенты  $C_m$ , составляющие матрицу

$$\Psi_0 = N \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{1,3} &= \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} \left( A\sqrt{1 - \zeta k_1/\eta} \pm B\sqrt{1 + \zeta k_1/\eta} \right), \\ C_{2,4} &= \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} \left( A\sqrt{1 + \zeta k_1/\eta} \pm B\sqrt{1 - \zeta k_1/\eta} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

причем

$$A = \sqrt{1 - k_3/\eta} e^{i\zeta\Phi/2}, \quad B = \sqrt{1 + k_3/\eta} e^{-i\zeta\Phi/2},$$

$\Phi = \text{arctg} k_2/\eta$ ,  $\eta = \sqrt{k_0^2 + k_1^2}$ , а  $\zeta = \pm 1$  соответствует двум состояниям поляризации электрона. Исходя из условия нормировки функции

$$\int \Psi_{\mathbf{k}}^+ \Psi_{\mathbf{k}} d^3x = 1,$$

можно найти коэффициент  $N$ , который оказывается равным

$$N = L^{-3/2} \left[ \frac{\mathbf{k}^2 + k_0^2 + \lambda^2}{\mathbf{k}^2 + k_0^2(1 + \gamma^2) + \lambda^2} \right]^{1/2}, \quad (3.21)$$

где  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$  — двумерный импульс, а

$$\gamma^2 = \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} A^2 d\delta = e^2 \overline{A^2} / m^2.$$

Заметим, что в выражении (3.21)

$$k_0^* = m^* = m(1 + \gamma^2)^{1/2} = m(1 + e^2 \overline{A^2} / m^2)^{1/2}$$

играет роль “эффективной массы” электрона в поле волны.

В отличие от решений, полученных Волковым, формулы (3.16)–(3.21) дают полное описание состояний поляризации электрона:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\mathbf{k}, \lambda, \zeta}(\mathbf{r}, t).$$

Полученные здесь некоторые точные решения уравнения Дирака, разделенные по спиновым состояниям, в дальнейшем будут положены в основу рассмотрения ряда спиновых явлений, характеризующих движение и излучение релятивистских заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Для полного описания поляризационных явлений сейчас необходимо рассмотреть поляризационные свойства электромагнитного излучения.

### §3.2. Поляризационные свойства

#### электромагнитного излучения. Матрица плотности

Как известно (см., например, [2]), поперечное электромагнитное поле описывается вектор-потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ( $c = \hbar = 1$ ), который подчиняется уравнению Даламбера

$$\square \mathbf{A} = \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (3.22)$$

При этом используется кулоновская калибровка вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  (скалярный потенциал  $\Phi = 0$ ):

$$\text{div} \mathbf{A} = 0, \quad (3.23)$$

что обеспечивает выполнение требования поперечности электромагнитного поля.

Решение уравнения Даламбера (3.22) удобнее всего следует представить в виде фурье-представления электромагнитного поля как совокупности гармонических осцилляторов

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}),$$

где амплитуды  $\mathbf{A}_k(t) = \mathbf{A}_k e^{-i\omega t}$  удовлетворяют уравнению гармонических колебаний

$$\ddot{\mathbf{A}}_k(t) + \omega^2 \mathbf{A}_k(t) = 0.$$

Кулоновская калибровка (3.23) приводит к требованию ортогональности волнового вектора  $\mathbf{k}$  и амплитуды  $\mathbf{A}_k$ :

$$(\mathbf{k} \mathbf{A}_k) = 0.$$

Таким образом, из всех компонент вектора  $\mathbf{A}$  только две являются независимыми — эти две компоненты соответствуют двум состояниям поляризации.

В классической электродинамике поляризационные свойства электромагнитного поля принято характеризовать направлением вектора напряженности электромагнитного поля  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ . Поэтому для описания поляризации вводится репер с единичными векторами  $\mathbf{e}_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) такими, что они лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны

$$\mathbf{n} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]/EH = \mathbf{k}/\omega = \mathbf{k}/k$$

(правая тройка векторов), и удовлетворяет условию ортогональности

$$\mathbf{e}_\lambda \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{e}_\lambda^* \mathbf{e}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'},$$

т. е. они ортогональны друг к другу и направлению распространения волны. И тогда действительные величины  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  соответствуют линейной поляризации, а их линейную комбинацию

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$$

описывают два состояния круговой поляризации:  $l = 1$  — правая,  $l = -1$  — левая круговая поляризация с противоположным направлением вращения вектора  $\mathbf{E}$ .

При этом, переходя к безразмерным амплитудам  $a$ , решения уравнения Даламбера с учетом поляризационных свойств получают окончательный вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (\mathbf{e}_\lambda a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{e}_\lambda^* a_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (3.24)$$

( $\lambda = 1, 2$  для линейной поляризации и  $\lambda = l = \pm 1$  — для круговой).

В связи с рассматриваемым вопросом о поляризационных свойствах электромагнитного поля интересно заметить, что для спина поля (собственного момента) можно получить следующее известное выражение (см. [2]):

$$S = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{A}] d^3x = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}] d^3x = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{n} (a_1^* a_1 - a_{-1}^* a_{-1}), \quad (3.25)$$

из которого следует, что спин ориентирован по волновому вектору  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ , характеризующему выделенное в пространстве направление (направление распространения волны). Из (3.25) следует также, что в состояниях с фиксированной линейной поляризацией ( $e_1$  или  $e_2$ ) проекция спина обращается в нуль. Таковы следствия классической теории поля.

Остановимся кратко на особенностях описания спина методами квантовой теории поля (вторичное квантование). Заметим прежде всего, что представление о фотоне как о частице — кванте электромагнитного поля обладает рядом характерных особенностей, исключающих возможность непосредственной аналогии с электроном и другими частицами. Так, в частности, для фотонов не существует нерелятивистского приближения — их движение в вакууме происходит всегда со скоростью света. Поэтому вся квантовая теория фотонов должна быть принципиально релятивистской.

В связи с этим становится очевидной сложность введения понятия спина фотона, ибо это понятие нельзя ввести по аналогии со спином электрона как собственным моментом покоящейся частицы.

Напомним основную идею квантования электромагнитного поля, которая заключается в его “атомизации”, т.е. сопоставлении этому полю частиц-фотонов (см. [2]). При этом безразмерные амплитуды  $a_{\mathbf{k},l}^+$  и  $a_{\mathbf{k},l}$  (см. (3.24)) поперечного поля становятся операторами рождения  $a_{\mathbf{k},l}^+$  и уничтожения (аннигиляции)  $a_{\mathbf{k},l}$  фотонов и подчиняются перестановочным соотношениям

$$[a_{\mathbf{k},l} a_{\mathbf{k}',l'}^+] = a_{\mathbf{k},l} a_{\mathbf{k}',l'}^+ - a_{\mathbf{k}',l'}^+ a_{\mathbf{k},l} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ll'}$$

При этом операторы, соответствующие одному и тому же импульсу фотонов  $\mathbf{k}$  и поляризации  $l$ , не коммутируют между собой:

$$a_l a_l^+ - a_l^+ a_l = 1.$$

Из выражения для энергии поля

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k},l} \frac{\omega}{2} (a_{\mathbf{k},l} a_{\mathbf{k},l}^+ + a_{\mathbf{k},l}^+ a_{\mathbf{k},l}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega (N_{\mathbf{k},1} + N_{\mathbf{k},-1}) = \sum_{\mathbf{k},l} \omega (N_{\mathbf{k},l} + 1/2),$$

представленного в переменных “числа частиц”, видно далее, что билинейные комбинации операторов  $a_{\mathbf{k},l}^+$  и  $a_{\mathbf{k},l}$  можно связать с числом фотонов с заданным значением поляризации. При этом операторы  $a_1^+$  и  $a_{-1}^+$  соответствуют рождению фотонов с правой и, соответственно, с левой спиральностью.

Мы не станем здесь касаться деталей теории вторичного квантования, полагая этот вопрос известным (см., например, [2]), и остановимся лишь на определении спинового состояния фотона. Как уже отмечалось, фотон не имеет системы покоя — во всех системах отсчета он

движется со скоростью света. Очень важно при этом, что всегда существует выделенное направление в пространстве — это направление распространения волны  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ .

Если теперь рассмотреть проекцию полного момента  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  на это направление, то можно прийти к новому — спиновому интегралу движения — проекции спина на направление импульса фотона:

$$\mathbf{Jn} = \mathbf{Sn} = \mathbf{Sk}/\omega,$$

ибо

$$\mathbf{Ln} = [\mathbf{rk}]\mathbf{k}/\omega = 0.$$

Величина  $\mathbf{Sn}$  (продольная поляризация) называется спиральностью, и очень важно, что она является интегралом движения.

Потребуем далее, чтобы волновая функция  $\chi_\lambda$  (спиновая функция) была собственной функцией для оператора проекции спина на направление импульса фотона

$$(\mathbf{Sn})\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda,$$

и предположим, что волна распространяется вдоль оси  $z$ , т.е.  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Тогда

$$S_z\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda.$$

Вспоминая вид оператора спина фотона

$$S_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим, что  $\lambda = 0, \pm 1$ . При этом

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Эти волновые функции определяют квантовые состояния с заданным значением спиральности. Два значения проекции спина на направление импульса фотона ( $\lambda = \pm 1$ ) имеют фундаментальное значение, все остальные состояния поляризации могут быть найдены в виде разложения по функциям (3.26). Состояния с  $\lambda = 0$  не реализуются при этом в силу поперечности электромагнитных волн.

Итак, установлена связь поляризационных свойств электромагнитной поперечной волны со спином фотона: два возможных состояния круговой поляризации соответствуют двум возможным ориентациям спина. Полное квантовомеханическое описание состояния реализуется заданием волновой функции, определяющей импульс частицы и ее

поляризацию. При этом единичный вектор  $e$ , характеризующий поляризацию (см. (3.24)), может быть представлен в виде разложения по базисным ортам в виде

$$e = \sum_{\lambda=\pm 1} e_{\lambda} \chi_{\lambda},$$

где  $|\chi_1|^2$  и  $|\chi_{-1}|^2$  — вероятности определенной спиральности. Это чистое квантовомеханическое состояние.

В более общем случае, когда квантовомеханическое описание не является полным, фотону нельзя приписать определенную волновую функцию — это может оказаться существенным при рассмотрении задач, связанных со взаимодействием пучков фотонов с другими частицами, например с электронами. В этих случаях мы встретимся с состояниями частичной поляризации (смешанные состояния). При этом эффективным методом исследования является применение поляризационной матрицы плотности  $\rho_{\mu\nu}$  (тензор второго ранга):

$$\rho_{\mu\nu} = |\chi_{\mu}\rangle\langle\chi_{\nu}|.$$

Поляризационная матрица плотности эрмитова и нормирована условием

$$\text{Sp}\rho_{\mu\nu} = 1.$$

Если представить волновую функцию в виде

$$|\chi_{\mu}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \langle\chi_{\mu}| = (\alpha^* \beta^*),$$

то  $\rho_{\mu\nu}$  имеет вид

$$\rho_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & \beta\beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix},$$

и тогда условия эрмитовости и нормировки дают, что

$$\text{Sp}\rho_{\mu\nu} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1, \quad \rho_{21} = \rho_{12}^*,$$

и таким образом матрица плотности зависит от трех вещественных параметров:

$$P_1 = \rho_{12} + \rho_{21}, \quad P_2 = i(\rho_{12} - \rho_{21}), \quad P_3 = \rho_{11} - \rho_{22}.$$

Матрицу плотности можно представить в виде разложения по базису двухрядных матриц Паули  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , включая единичную матрицу  $1$  (см. также (2.9)):

$$\rho = \frac{1}{2}[1 + (\mathbf{P}\sigma)] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

(с помощью матрицы плотности можно определить вероятность  $w$  любой поляризации света, характеризуемой вектором  $e$ :

$$e = e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha e^{i\beta}.$$

Произвольные  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют эллиптической поляризации. Если волна распространяется по оси  $z$ , то при  $\beta = 0$  и  $\alpha = 0$  вектор линейной поляризации направлен по оси  $x$  (соответственно при  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$  — по оси  $y$ ), при  $\beta = \pm\pi/2$  и  $\alpha = \pi/4$  поляризация является круговой, а при  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pi/4$  вектор поляризации направлен под углом  $\pi/4$  к оси  $x$ .

Вероятность поляризации, характеризуемой вектором  $e$ , определяется “проекцией” матрицы плотности  $\rho_{\mu\nu}$  на это направление:

$$w(e) = \rho_{\mu\nu} e_\mu^* e_\nu.$$

Если исходная матрица записана в ортах, характеризующих круговую поляризацию, то ее диагональные элементы  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  непосредственно связаны с вероятностью круговой поляризации:

$$w(\pm) = \frac{1}{2}(1 \pm \rho_3).$$

Величины  $P_1$  и  $P_2$  связаны с вероятностями линейной поляризации вдоль осей  $x$  и  $y$

$$w_1 = (1 \pm P_1)/2$$

и вдоль направления, составляющего угол  $\pi/4$  с осями  $x$  и  $y$ ,

$$w_2 = (1 \pm P_2)/2.$$

Величины  $P = (P_1, P_2, P_3)$  получили название параметров Стокса. Их значения могут быть измерены экспериментально, и они дают полную характеристику поляризации. Как видно из последних формул, параметр  $P_3$  характеризует среднюю спиральность фотона, а  $P_1$  и  $P_2$  связаны с линейной поляризацией.

Поляризационные свойства излучения полностью определяются матрицей (см. (3.27))

$$P = W \begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad W_{\mu\nu} = \frac{W}{2} [I + P\sigma]_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

где  $W$  — полная мощность излучения. В неполяризованном состоянии все три параметра Стокса равны нулю:  $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ , для чистого состояния (с полной поляризацией)  $\sum_i P_i^2 = 1$ . Если же поляризация

частичная (смешанное состояние), то  $\sum_i P_i^2 < 1$ . Таким образом, сумма квадратов параметров  $P_i^2$  удовлетворяет условию  $\sum_i P_i^2 \leq 1$ , и с помощью этой величины можно характеризовать степень поляризации

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}.$$

Параметры (3.28) были введены Стоксом при исследовании плоских электромагнитных волн частично поляризованного света. Задание параметров  $P_1, P_2, P_3$  по Стоксу соответствует точке на сфере Пуанкаре радиуса  $P_0 = W$ . Случай  $P_1 = P_2 = 0, P_3 = 1$  соответствует “северному полюсу” сферы — правая круговая поляризация; если же  $P_1 = P_2 = 0, P_3 = -1$ , то поляризация становится левой. При  $P_3 = 0$  точка находится на экваториальной плоскости, что соответствует линейной поляризации.

Заметим, что вектор  $\mathbf{P}$ , заданный в “пространстве поляризации” (пространстве Пуанкаре), имеет существенное отличие от вектора поляризации спина электрона. В то время как спин фотона всегда ориентирован параллельно или антипараллельно его импульсу, спин электрона может быть ориентирован в любом направлении относительно его импульса, поэтому поляризация электронов характеризуется вектором  $\mathbf{P}$  в реальном физическом пространстве.

Заканчивая на этом рассмотрение общих вопросов теории спина, перейдем к изложению ряда принципиальных задач, иллюстрирующего метод точных решений и включающего описание спиновых эффектов.

### §3.3. Поляризационные и спиновые свойства излучения Черенкова

В 1934 г. П. А. Черенковым в лаборатории С. И. Вавилова наблюдалось слабое свечение, вызванное релятивистскими электронами, двигавшимися в различных средах с высоким показателем преломления ( $n > 1$ ). Физическая природа этого интереснейшего явления связана с взаимодействием атомов диэлектрика с движущимися электронами, и картина этого взаимодействия достаточно сложна. Однако оказывается возможным описать все основные черты излучения Черенкова путем формального введения в теорию (в классическую и в квантовую) некоторого среднего показателя преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Этот феноменологический подход оказался весьма продуктивным и был положен в основу развития теории эффекта (см. [15]).

Классическая теория эффекта Черенкова была рассмотрена И. Е. Таммом и И. М. Франком (1937) на основе гипотезы о “сверхсветовом” электроном — релятивистском заряде, скорость которого превышает скорость света в данной среде. В этих условиях электромагнитное поле, создаваемое электроном, как бы отрывается от него в виде излучения (рис. 3). Заметим, что первое указание на возможность излучения сверхсветовым зарядом, движущимся в диэлектрике, было сделано

Хевисайдом в 1889 г. Им также было получено условие возникновения этого излучения  $\cos \theta = 1/n\beta$ , где угол  $\theta$  характеризует раствор конуса черенковского излучения.

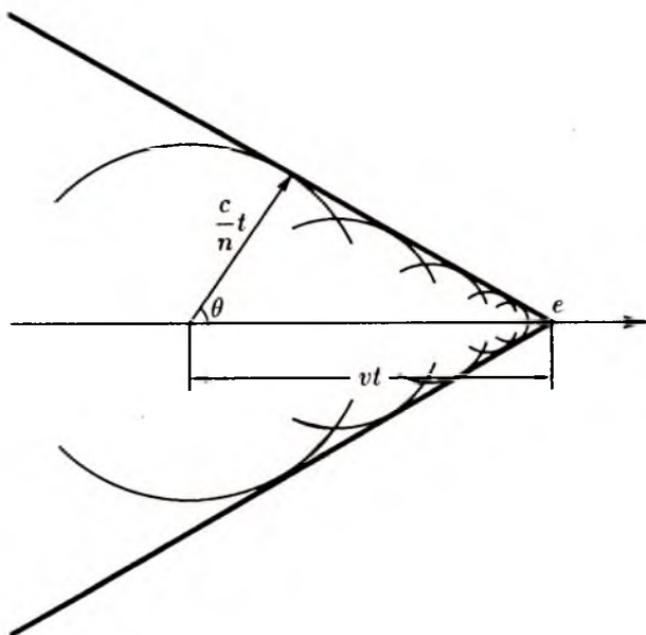


Рис. 3. Излучение Черенкова. На рисунке изображена последовательность волновых фронтов поля частицы. При скорости частицы  $v > c/n$  происходит образование "ударной" электромагнитной волны, распространяющейся в направлении, определяемом углом  $\theta$

Квантовая теория эффекта Черенкова рассматривалась в работах А. А. Соколова и В. Л. Гинзбурга [15], в которых были найдены квантовые эффекты, связанные с явлением отдачи, испытываемой электроном при излучении фотона. Другими словами, впервые была рассмотрена задача о проявлении дискретности в излучении, испускаемом электроном, а также положено начало в изучении спиновых свойств эффекта Черенкова (см. также более поздние исследования [19]).

Итак, рассмотрим квантовый подход к теории эффекта Черенкова. Как известно, простейший вариант классической феноменологической теории электромагнитного поля в диэлектрике основан на уравнениях электродинамики:

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c', \quad \text{div} \mathbf{A} = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0,$$

где феноменологически вводится  $c' = c/n$  — скорость света в диэлектрике. При этом полная энергия поля имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int (n^2 \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \left[ \frac{1}{c'^2} \dot{\mathbf{A}}^2 + (\text{rot} \mathbf{A})^2 \right] d^3x.$$

Таким образом, мы переходим к уравнениям, вид которых совпадает с уравнениями поля в вакууме, в которых, однако, скорость света заменена на фазовую скорость распространения света в среде  $c' = c/n$ .

В связи с этими соображениями в процессе квантования электромагнитного поля в диэлектриках можно воспользоваться формулами, найденными для вакуума, заменив в них скорость  $c$  на фазовую скорость  $c'$ . Тогда для вектора потенциала  $\mathbf{A}$  получим, что

$$\mathbf{A} = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\kappa}} (\mathbf{a} e^{-i c' \kappa t + i \mathbf{k} \mathbf{r}} + \mathbf{a}^+ e^{i c' \kappa t - i \mathbf{k} \mathbf{r}}).$$

Поэтому энергия взаимодействия электрона с полем фотонов может быть записана в виде

$$W^+(\mathbf{r}, t) = e L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\kappa}} (\alpha \mathbf{a}^+) e^{i c' \kappa t - i \mathbf{k} \mathbf{r}} = W_0^+ e^{i c' \kappa t - i \mathbf{k} \mathbf{r}}.$$

Учитывая далее вид волновой функции для случая свободного движения электрона (см. (3.3), (3.5)), для вероятности излучения можно получить, что

$$w = \frac{2\pi}{c \hbar^2} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} R^+ R \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'+\mathbf{k}} \delta(\mathcal{K}' + \kappa/n - \mathcal{K}), \quad (3.29)$$

где

$$R = e L^{-3/2} \sqrt{\frac{2\pi c' \hbar}{\kappa}} B^+ (\alpha \mathbf{a}^+) B,$$

причем в этой формуле полагается  $\varepsilon = \varepsilon' = 1$  — это соответствует электронам в начальном и конечном состояниях. Требование одновременного выполнения законов сохранения энергии и импульса (см. (3.29))

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \kappa, \quad \mathcal{K}' = \mathcal{K} - \kappa/n$$

приводит к формуле

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} + \frac{\kappa}{2\mathcal{K}} (1 - 1/n^2) = \frac{1}{\beta n} + \frac{n \hbar \omega}{2pc} (1 - 1/n^2), \quad (3.30)$$

где  $\theta$  — угол между направлением движения электрона  $\mathbf{k}$  и направлением, по которому излучается фотон  $\kappa$ .

Как это следует из (3.30), излучение возможно, если скорость движения электрона больше, чем скорость движения света в диэлектрике:  $\beta n > 1$ ,  $v > c/n$ . Это условие совпадает с выводами классической теории эффекта Черенкова.

Если теперь выражение для  $R^+R$  просуммировать по конечным спиновым состояниям и усреднить по начальным, то после ряда преобразований можно получить следующее выражение для энергии, излучаемой электроном в единицу времени:

$$W = \frac{e^2\beta}{c} \int_0^{\omega_m} \omega \left[ 1 - \cos^2\theta + \frac{n^2\hbar^2\omega^2}{2c^2p^2}(1 - 1/n^2) \right] d\omega. \quad (3.31)$$

Максимальная частота  $\omega_m$  определяется из условия "порога" излучения  $\cos\theta = 1$ :

$$\omega_m = \frac{2cp}{n\hbar} \frac{1 - 1/\beta n}{1 - 1/n^2}.$$

В классическом приближении ( $\hbar \rightarrow 0$ ) формула (3.31) переходит в хорошо известный результат

$$W^{\text{кл}} = \frac{e^2\beta}{c} \int_0^{\omega_m} \omega (1 - \cos^2\theta) d\omega, \quad \cos\theta = 1/\beta n. \quad (3.32)$$

В этом интеграле  $\omega_m \rightarrow \infty$  и интеграл расходится. Однако показатель преломления  $n$  не остается постоянным, и в области больших частот он уменьшается. Поэтому верхний предел требует уточнения и определяется из условия  $\beta n(\omega_m) = 1$ .

Прежде чем перейти к последовательному описанию спиновых свойств и поляризации излучения Черенкова, несколько забегая вперед, отметим, что "классическая" часть излучения, пропорциональна множителю  $(1 - \cos^2\theta)$ , не зависит от спина частицы и является линейно поляризованной: вектор поляризации (вектор напряженности электрического поля излучения) лежит в плоскости вектора скорости электрона и импульса излучаемого фотона ( $\mathbf{k}$ ,  $\kappa$ ).

Интересно в связи с этим отметить, что расчет по квантовой теории на основе уравнения Клейна-Гордона (бесспиновая частица) приводит к аналогичному результату: излучение полностью линейно поляризовано и на пороге ( $\cos\theta \simeq 1$ ) обращается в нуль. Возвращаясь к формуле (3.31), замечаем, что "квантовая" часть черенковского излучения не обращается в нуль на пороге. Она обязана спину электрона и является неполяризованной.

Теперь обратимся к более детальному анализу поляризационных и спиновых свойств черенковского излучения. С целью такого анализа разложим прежде всего амплитуду вектор-потенциала по компонентам линейной поляризации, выбирая базисные векторы  $\mathbf{e}_\lambda$  в виде

$$\mathbf{e}_2 = \frac{[\kappa^0 \mathbf{j}]}{||[\kappa^0 \mathbf{j}]||}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\kappa^0(\kappa^0 \mathbf{j}) - \mathbf{j}}{||[\kappa^0 \mathbf{j}]||},$$

где  $\mathbf{j}$  следует направить по какому-либо выделенному направлению. Направим далее  $\mathbf{j}$  по движению электрона:  $\mathbf{j} = \mathbf{k}^0$ . Тогда можно положить, что  $\mathbf{a} = q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$ , где

$$\mathbf{e}_2 = \frac{[\kappa^0 \mathbf{k}^0]}{\sqrt{1 - (\kappa^0 \mathbf{k}^0)^2}}, \quad \mathbf{e}_3 = [\kappa^0 \mathbf{e}_2] \quad (3.33)$$

характеризуют два состояния линейной поляризации, а для рассмотрения круговой поляризации введем разложение

$$\mathbf{a} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_{-1} \mathbf{e}_{-1}, \quad (3.34)$$

где

$$\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + i l \mathbf{e}_3), \quad l = \pm 1.$$

Напоминаем, что в этих выражениях  $\kappa^0 = \kappa/\kappa$  — вектор, характеризующий направление импульса фотона. Ориентация спина электрона в начальном ( $\zeta$ ) и конечном ( $\zeta'$ ) состояниях входит в множители  $R$  и  $R'$  (3.29) в соответствии с точными решениями уравнения Дирака для свободной частицы (3.5).

Тогда для мощности излучения (в единицу времени) можно получить следующие выражения (см. [19]):

$$W_3^{\zeta\zeta'} = \frac{e^2 \beta}{2c} \int_{\cos \theta \leq 1} \omega d\omega (1 - \cos^2 \theta)(1 + \zeta\zeta' \Lambda) + W_0,$$

$$W_2^{\zeta\zeta'} = W_0^{\zeta\zeta'} = \frac{e^2 \beta}{4c} \int_{\cos \theta \leq 1} \omega d\omega \xi^2 (1 - 1/n^2) \frac{1 - \zeta\zeta'}{2},$$

$$\Lambda = \frac{1 - \xi/\beta n + \xi^2/2}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi \cos \theta}}, \quad \xi = n\hbar\omega/cp \quad (3.35)$$

(с точностью до членов второго порядка по  $\xi$ ).

Из этих выражений сразу же видно, что наряду с известной классической компонентой  $W_3^{\kappa\kappa}$  ( $W_2^{\kappa\kappa} = 0$ ) появляется также отличная от нуля и другая компонента линейной поляризации, пропорциональная членам второго порядка малости в разложении по квантовому параметру  $\xi$ , содержащему постоянную Планка. Появление компоненты  $W_2 \neq 0$  связано с квантовыми переходами, сопровождающимися переворотом спина ( $\zeta = -\zeta'$ ). Это наиболее наглядно выступает вблизи "порога" излучения, когда  $\cos \theta \sim 1$ . В этом случае

$$W_2 = W_3 = \frac{e^2 \beta \hbar^2}{4c^3 p^2} \int \omega^3 d\omega (n^2 - 1) \frac{1 - \zeta\zeta'}{2}.$$

Таким образом, квантовая поправка к мощности излучения неполяризована, и она отлична от нуля только при переходах с переворотом спина (спин-флип-переходы). В результате суммирования по спину электрона можно прийти к формуле (3.31), характеризующей полную мощность излучения.

Рассмотрим далее круговую поляризацию излучения Черенкова и с этой целью перейдем к базисным ортам поляризации (3.34). Тогда получим, что с точностью членов порядка  $\xi^2$ :

$$W^{\zeta\zeta'} = \frac{1}{2}(W_2 + W_3) + W_l^{\zeta\zeta'}, \quad (3.36)$$

где

$$W_l^{\zeta\zeta'} = -\frac{e^2}{2nc} \int_{\cos\theta \leq 1} \omega d\omega \xi (1 - \beta n \zeta l) (1 + \zeta l \cos\theta) \frac{1 - \zeta\zeta'}{2}.$$

При этом  $l = \pm 1$  соответствует состояниям с разной круговой поляризацией (правой и левой).

Рассмотрим прежде всего околопороговое излучение ( $\cos\theta \sim 1$ ), которое в классической теории полностью отсутствует. С помощью (3.30) получим

$$W_l^{\zeta\zeta'} (\cos\theta \sim 1) = \frac{e^2\beta}{4c} (1 + \zeta l) \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} (1 - 1/n^2) \int_0^{\omega_m} \omega d\omega \xi^2. \quad (3.37)$$

Таким образом, подобно линейной поляризации вблизи порога черенковское излучение сопровождается переворотом спина электрона, и мощность излучения пропорциональна  $\xi^2$ , т. е. квадрату постоянной Планка  $\hbar$ . При этом имеет место корреляция поляризации излучения и ориентации спина частицы, ибо только при  $l\zeta = 1$  формула (3.37) отлична от нуля. Излучение циркулярно поляризовано, и знак поляризации зависит от ориентации спина электрона.

Если просуммировать формулу (3.36) по конечному состоянию спина, полагая  $\zeta' = \pm\zeta$ , то можно получить

$$W_l = \frac{1}{2}(W_2 + W_3) + \zeta l \frac{e^2\beta n \hbar}{2c^2 p} \int_0^{\omega_m} \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\beta n} \cos\theta\right) d\omega. \quad (3.38)$$

Подчеркнем здесь, что в случае черенковского излучения, испускаемого электроном с ориентированным спином, поправки к круговой поляризации пропорциональны первой степени параметра  $\xi$ .

И наконец, рассмотрим параметры Стокса (см. (3.28)). С этой целью введем обозначения

$$B = \frac{e^2\beta}{c} \int \omega d\omega (1 - \cos^2\theta), \quad A = \frac{e^2\beta}{4c} \int \omega d\omega \xi^2 (1 - 1/n^2),$$

$$C = \frac{e^2 \beta}{c} \int \omega d\omega \xi (1 - \cos \theta / \beta n)$$

(здесь  $B$  — классическая величина, а  $A$  и  $C$  имеют характер квантовых поправок). Тогда

$$W_2 + W_3 = 2A + B, \quad W_2 - W_3 = -B, \quad W_1 - W_{-1} = \zeta C$$

и параметры Стокса имеют вид

$$\begin{pmatrix} I \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A + B \\ -B \\ 0 \\ \zeta C \end{pmatrix}.$$

Таким образом, излучение поляризовано в плоскости  $(\mathbf{k}^0, \kappa^0)$  (в плоскости “взаимодействия”). Электрический вектор поля излучения перпендикулярен поверхности конуса черенковского излучения.

Продольно поляризованный электрон становится источником циркулярно поляризованного излучения той же спиральности. Степень круговой поляризации может быть найдена по общей формуле

$$P_c = \frac{W_1 - W_{-1}}{W_1 + W_{-1}} = \frac{\zeta C}{2A + B},$$

причем в классическом приближении ( $\hbar \rightarrow 0$ ) круговая поляризация исчезает. Таковы особенности черенковского излучения, описываемые с помощью квантовой теории.

### §3.4. Поляризационные и спиновые эффекты в синхротронном излучении

Синхротронное излучение — это одно из интересных и важных явлений современной физики (см. [2; 11]), представляющее собой испускание электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом в магнитном поле циклического ускорителя или накопительного кольца. Благодаря сильному центростремительному ускорению релятивистский заряд становится источником мощного излучения. При этом радиационные потери энергии частицы в этих условиях компенсируются за счет внешних источников, так что радиус круговой орбиты частицы при ее движении в магнитном поле остается в среднем постоянным.

Обладая рядом уникальных особенностей (узкая угловая направленность, характерный спектр с резким максимумом энергии излучения на высших гармониках, поляризация), синхротронное излучение привлекает к себе в последние годы особое внимание с точки зрения его широких возможностей применения в физическом эксперименте.

Здесь мы остановимся лишь на поляризационных свойствах синхротронного излучения (СИ) и начнем с краткого изложения классической теории (более детально см. [2; 11]).

## 1. Классическая теория поляризации СИ

Рассмотрим излучение электрона, движущегося в поле циклического ускорителя. При этом для выявления принципиальных характеристик этого излучения можно считать, что хорошей моделью движения электрона в ускорителе является движение заряда в однородном магнитном поле. Радиус орбиты вращения  $R$  связан с энергией частицы  $E$  и напряженностью поля  $H$  соотношением  $\beta E = eHR$ , где  $\beta = v/c$ .

Для исследования поляризационных свойств СИ введем единичные орты  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент линейной поляризации излучения (см. § 3.2):

$$e_{\sigma} = \frac{[\mathbf{n}j]}{|\mathbf{n}j|}, \quad e_{\pi} = [ne_{\sigma}],$$

где  $\mathbf{n} = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  — единичный вектор в направлении вектора импульса фотона  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ , совпадающего с вектором Пойнтинга по своему направлению в классическом рассмотрении задачи. Поскольку в рассматриваемом нами случае движения заряда внешнее однородное магнитное поле создает в пространстве выделенное направление, удобно связать поляризационные характеристики с этим направлением:  $\mathbf{j} = \mathbf{H}/H$ .

Заметим, что векторы линейной поляризации могут быть введены в ковариантном виде

$$e_{\sigma}^{\mu} = \frac{F^{\mu\nu} k_{\nu}}{[-(F^{\alpha\beta} k_{\beta})^2]^{1/2}},$$

$$e_{\pi}^{\mu} = \frac{\tilde{F}^{\mu\nu} k_{\nu}}{[-(F^{\alpha\beta} k_{\beta})^2]^{1/2}},$$

где  $F^{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля,  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$  — дуальный тензор,  $k^{\mu} = (\omega, \mathbf{k})$  — 4-импульс фотона (см. [4]).

Электромагнитное излучение, соответствующее  $\sigma$ -компоненте поляризации, характерно тем, что электрический вектор поля излучения лежит в плоскости орбиты вращения и направлен почти по радиусу к центру орбиты. Электрический вектор  $\pi$ -компоненты излучения

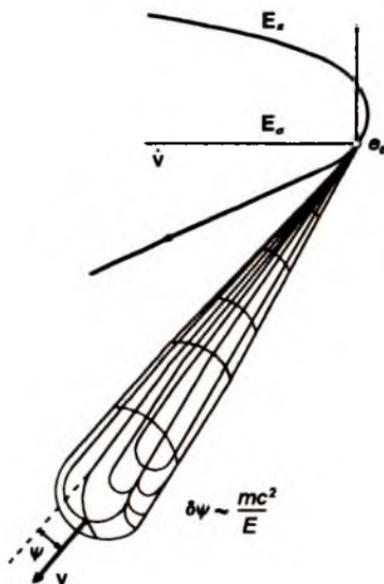


Рис. 4. Угловое распределение мощности синхротронного излучения. Показано направление электрического вектора поля излучения для  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент поляризации

направлен почти по направлению внешнего магнитного поля, поскольку в релятивистском движении  $\mathbf{k}$  почти перпендикулярно к  $\mathbf{H}$ , т. е. к вектору  $\mathbf{j}$  (рис. 4). В сферической системе координат вектор  $\mathbf{e}_\sigma$  совпадает с ортом  $\mathbf{e}_\varphi$ , а вектор  $\mathbf{e}_\pi$  — с ортом  $\mathbf{e}_\theta$ . Поэтому  $\sigma$ -компонента поляризации характеризуется  $E_\varphi$  — составляющей поля излучения, а  $\pi$ -компонента — составляющей поля  $E_\theta$ .

Для исследования круговой поляризации следует сделать переход от  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_\pi$  к другим ортам, полагая (см. § 3.2)

$$\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\sigma + i l \mathbf{e}_\pi),$$

при этом  $l = \pm 1$  соответствует левой (+) и правой (−) круговой поляризации. Обычный метод расчета мощности СИ на основе классической теории приводит к следующему обобщению известной формулы Шотта, учитывающему поляризацию излучения:

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = W = \sum_{\nu, \lambda} \oint d\Omega W_\lambda(\nu, \theta), \quad (3.39)$$

где спектрально-угловое распределение мощности СИ имеет вид (А. А. Соколов, И. М. Тернов)

$$W_\lambda = \frac{e^2 \beta^2 \nu^2 c}{2\pi R^2} [l_\sigma \beta J'_\nu(x) + l_\pi \text{ctg} \theta J_\nu(x)]^2, \quad x = \nu \beta \sin \theta, \quad \lambda = \sigma, \pi.$$

Здесь  $J_\nu(x)$  и  $J'_\nu(x)$  — функция Бесселя и ее производная по всему аргументу, а постоянные  $l_\sigma$  и  $l_\pi$  дают возможность описания как линейной, так и круговой поляризации. Если в этой формуле положить  $l_\sigma = 1, l_\pi = 0$ , то мы получим  $\sigma$ -компоненту линейной поляризации, случай  $l_\sigma = 0, l_\pi = 1$  соответствует  $\pi$ -компоненте излучения. Компоненты круговой поляризации излучения можно получить, полагая  $l_\sigma = l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  для левой и  $l_\sigma = -l_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  для правой круговой поляризации. Здесь, как это принято в оптике, под терминами “левая” и “правая” понимается нарезка буравчика, при “звинчивании” которого вращение рукоятки совпадает с вращением электрического вектора поля излучения. Вращение определяется наблюдателем, к которому движется луч.

Суммирование по состояниям поляризации (с учетом того, что произведение  $l_\sigma l_\pi = 0$ ) приводит нас к хорошо известной формуле Шотта

$$W(\nu, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2 \nu^2}{2\pi R^2} [\beta^2 J'^2_\nu(x) + \text{ctg}^2 \theta J^2_\nu(x)]. \quad (3.40)$$

Из этих формул следует, что при фиксированном номере гармоники  $\nu$  в общем случае синхротронное излучение эллиптически поляризовано. Действительно, отношение амплитуд, характеризующих линейную поляризацию, имеет вид

$$W_\pi / W_\sigma = \text{ctg}^2 \theta J^2_\nu(x) / \beta^2 J'^2_\nu(x).$$

При  $\theta = \pi/2$  (плоскость орбиты вращения) СИ полностью линейно поляризовано: компонента  $W_\pi$  обращается в нуль. При  $0 < \theta < \pi/2$  (над плоскостью орбиты вращения) излучение обладает левой, а при  $\pi/2 < \theta < \pi$  — правой эллиптической поляризацией. При переходе через плоскость орбиты вращения знак циркулярной поляризации меняется на обратный.

После интегрирования по углу  $\theta$  и суммирования по номеру гармоники  $\nu$  (см. [2]) можно получить, что

$$W_\sigma = \frac{6 + \beta^2}{8} W^{\text{кл}}, \quad W_\pi = \frac{2 - \beta^2}{8} W^{\text{кл}}, \quad W^{\text{кл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \beta^4 (E/mc^2)^4. \quad (3.41)$$

Сильно выраженная линейная поляризация излучения является, таким образом, характерной особенностью СИ, особенно в ультррелятивистском случае движения ( $\beta \rightarrow 1$ ):  $W_\pi/W_\sigma = \frac{1}{7}$ .

В наиболее важном ультррелятивистском случае максимум в спектре излучения приходится на высшие обертоны частоты обращения  $\omega = \nu c/R$ ,  $\nu_{\text{max}} \cong (E/mc^2)^3$ . Поэтому формула Шотта (3.40) становится неудобной для ее практического применения. В этом случае разумно применить аппроксимацию (А. А. Соколов, Д. Д. Иваненко)

$$J_\nu(x) = \frac{\sqrt{1 - (x/\nu)^2}}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3} \left[ \frac{\nu}{3} \left( 1 - \left( \frac{x}{\nu} \right)^2 \right)^{3/2} \right], \quad (3.42)$$

где  $K_{1/3}(x)$  — функция Макдональда (см. [2]). Тогда можно получить

$$W_\lambda(\nu, \theta) = \frac{e^2 \nu^2}{6\pi^3 R^2} \left[ l_\sigma \varepsilon K_{2/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) + l_\pi \cos \theta \sqrt{\varepsilon} K_{1/3} \left( \frac{\nu}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right]^2, \quad (3.43)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta.$$

Поскольку в ультррелятивистском случае движения электрона все излучение сосредоточено практически в плоскости орбиты вращения (т. е.  $\theta \sim \pi/2$ ), можно ввести малый угол между плоскостью орбиты и направлением излучения. Тогда, полагая  $\psi = (\frac{\pi}{2} - \theta)/\sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0 = 1 - \beta^2$ , и заменяя сумму по номеру гармоники интегралом по переменной  $y = \frac{2}{3} \nu \varepsilon^{3/2}$ , получим

$$W_\lambda = \frac{27}{16\pi^2} W^{\text{кл}} \int_0^\infty y^2 dy \int_{-\infty}^\infty d\psi \left[ l_\sigma (1 + \psi^2) K_{2/3}(\eta) + l_\pi \psi \sqrt{1 + \psi^2} K_{1/3}(\eta) \right]^2, \quad (3.44)$$

где

$$\eta = \frac{y}{2} (1 + \psi^2)^{3/2} = \frac{\nu}{3} \varepsilon_0^{3/2} (1 + \psi^2)^{3/2}.$$

Спектрально-угловое распределение степени поляризации обычно характеризуют величиной

$$P = \frac{W_\sigma - W_\pi}{W_\sigma + W_\pi} = \frac{K_{2/3}^2 - \frac{\psi^2}{1+\psi^2} K_{1/3}^2}{K_{2/3}^2 + \frac{\psi^2}{1+\psi^2} K_{1/3}^2}. \quad (3.45)$$

Важной характеристикой является и степень круговой поляризации

$$Q = \pm \frac{2\sqrt{W_\sigma W_\pi}}{W_\sigma + W_\pi} = \pm \frac{\psi}{(1+\psi^2)^{3/2}} K_{2/3} K_{1/3} / \left( K_{2/3}^2 + \frac{\psi^2}{1+\psi^2} K_{1/3}^2 \right), \quad (3.46)$$

причем знаки “+” и “-” соответствуют наблюдению выше (+) и ниже (-) плоскости орбиты вращения электрона.

Для анализа угловой зависимости поляризации синхротронного излучения в формуле (3.43) следует произвести суммирование по номеру гармоники  $\nu$  или заменить эту сумму интегралом по  $y = (2/3)\nu\epsilon_0^{3/2}$ . Тогда с помощью известных интегралов (см. [2]) можно получить, что

$$dW_\lambda(\theta) = \frac{3}{2} W^{\kappa n} f_\lambda(\xi) d\xi,$$

где  $\xi = \cos \theta / \sqrt{\epsilon_0}$ , а функция  $f_\lambda$ , характеризующая угловое распределение поляризационных компонент, имеет вид

$$f_\lambda(\xi) = \frac{7}{16} \frac{1}{(1+\xi^2)^{5/2}} l_\sigma^2 + \frac{5}{16} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{7/2}} l_\pi^2 - \frac{4\xi}{\pi\sqrt{3}(1+\xi^2)^3} l_\sigma l_\pi.$$

Заметим, что полученные здесь результаты можно непосредственно связать с параметрами Стокса (3.28). Действительно, имея в виду смысл величин  $P$ , входящих в матрицу плотности, мы непосредственно получаем

$$P = W \begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} W \begin{pmatrix} f_\sigma + f_\pi \\ f_\sigma - f_\pi \\ 0 \\ f_c \end{pmatrix},$$

где

$$f_\sigma = \frac{7}{16} (1+\xi^2)^{-5/2}, \quad f_\pi = \frac{5}{16} \xi^2 (1+\xi^2)^{-7/2}, \quad f_c = -\frac{4\xi}{\pi\sqrt{3}} (1+\xi^2)^{-3}.$$

Таким образом, все параметры Стокса находят свое определение. Заметим, что в этом выражении параметр  $P_2$  равен нулю, ибо предполагается, что главная ось эллипсоида поляризации привязана к плоскости орбиты вращения электрона. Эта плоскость в рассматриваемом случае является плоскостью максимальной линейной поляризации.

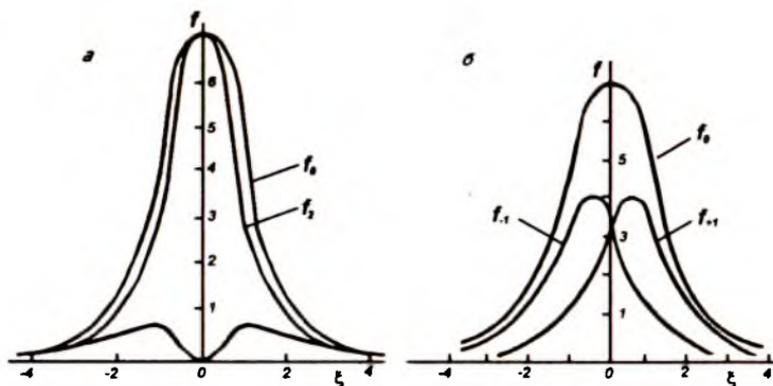


Рис. 5. Зависимость линейной (а) и круговой (б) поляризации от угла наблюдения

Характер углового распределения компонент поляризации представлен на графиках рис. 5. Эти графики показывают, что функции  $f_{\pm 1}$ , характеризующие круговую поляризацию, имеют максимум при  $\xi = \pm 0,34$ ,  $f_0$  имеет один максимум при  $\xi = 0$  (в плоскости орбиты), а  $f_{\pi}$  — два максимума при  $\xi = \pm 2/5$ .

Остановимся кратко на экспериментальном исследовании поляризационных свойств СИ. Несмотря на то, что сильно выраженная линейная поляризация излучения была обнаружена уже в первых наблюдениях СИ в 1948 г. (Поллок, США), систематическое исследование было проведено группой физиков МГУ под руководством Ф. А. Королева на синхротроне ФИАН (1956). Позже эти результаты были подтверждены Йосом (США), им же было проведено наблюдение эллиптической поляризации. В дальнейшем поляризационные свойства СИ исследовались в рентгеновском диапазоне (Фраскати, Италия и DESY, ФРГ) и было получено хорошее согласие теории и эксперимента.

Таким образом, поляризационные свойства синхротронного излучения к настоящему времени хорошо изучены и теоретически, и экспериментально.

Поляризация синхротронного излучения представляет интерес не только с точки зрения применения этого излучения в физическом эксперименте в лабораторных условиях. Около 50 лет назад Альфвен и Герлофсон выдвинули гипотезу объяснения нетепловой природы радиоизлучения галактики механизмом магнитотормозного (синхротронного) излучения электронов, движущихся в магнитном поле. В нашей стране этой проблемой занимались также В. Л. Гинзбург и И. С. Шкловский. Разработка теории СИ и эксперименты обусловили выдающиеся успехи этого направления в радиоастрономии. Первостепенное значение в астрофизических наблюдениях имеют поляризационные свойства СИ в силу их специфики: поляризация может служить точным критерием при проверке гипотез о природе излучения, приходящего к нам от

внеземных источников. Наблюдая специфические особенности линейной и круговой поляризации неизвестного типа излучения, можно сделать весьма обоснованный вывод о его синхротронной природе. Так, в частности, поляризационные свойства СИ сыграли решающую роль в разгадке природы излучения, приходящего к нам из Крабовидной туманности — газовой оболочки, оставшейся после взрыва сверхновой.

Измерение поляризационных характеристик этого излучения выявило сильно выраженную линейную поляризацию — это и явилось основой для подтверждения гипотезы о том, что излучение, приходящее из Крабовидной туманности, имеет синхротронную природу.

На основе измерения поляризации синхротронная природа излучения Крабовидной туманности в настоящее время твердо установлена во всем диапазоне — от радио до оптического, рентгеновского и  $\gamma$ -излучения (от  $10^7$  до  $10^{23}$  Гц). В дальнейшем выяснилось, что Крабовидная туманность не является исключением, она имеет широкий класс аналогов — остатков сверхновых, получивших название плерионов (Crab-like). На том же пути исследования поляризации была установлена синхротронная природа излучения также и плерионов, причем главным источником этого излучения являются регулярно пульсирующие нейтронные звезды — пульсары. В настоящее время излучение пульсаров привлекает к себе неослабевающее внимание.

Таким образом, поляризационные свойства синхротронного излучения зарекомендовали себя в качестве важного фактора в астрофизических исследованиях. Большое значение поляризация синхротронного излучения имеет также в прикладных задачах при использовании СИ в физическом эксперименте. Однако мы не имеем возможности на этом здесь останавливаться сколь-нибудь детально и отсылаем читателя к монографии [11].

## 2. Синхротронное излучение электрона с ориентированным спином

Рассмотрим далее задачу о синхротронном излучении электрона с ориентированным спином (поляризованного электрона).

Эту задачу можно решить, применяя метод точных решений, о котором уже говорилось в начале этой главы. Напомним в связи с этим, что точный учет взаимодействия электрона с внешним полем открывает возможность построения квантовой теории СИ при любых значениях динамического инварианта  $\chi$  (см. (3.1)), который для случая магнитного поля имеет простой вид:

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6} (F_{\mu\nu} p^\nu)^2 = \left( \frac{p_\perp}{m} \frac{H}{H_0} \right)^2,$$

где

$$H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar \simeq 4 \cdot 10^{13} \text{ Гс.}$$

Решение задачи об излучении электрона в магнитном поле нельзя ограничивать случаем малости  $\chi \ll 1$ , или  $E < E_{1/2} = mc^2 (mcR/\hbar)^{1/2}$ .

В этих условиях квантовые особенности в излучении проявляются как малые квантовые поправки на фоне классических закономерностей. Такое приближение с точки зрения возможностей экспериментального наблюдения является вполне удовлетворительным, поскольку критическое значение энергии  $E_{1/2}$  — весьма большая величина, превосходящая современные возможности эксперимента в лабораторных условиях. Однако построение полной теории излучения с учетом корреляции электронного и фотонного спинов требует выхода за рамки указанного ограничения. Дело здесь заключается в том, что основное и принципиальное различие в спектрах излучения бозона и фермиона начинает проявляться в области больших значений параметра  $\chi \geq 1$  ( $E \geq E_{1/2}$ ), когда излучение “светящегося” электрона в высшей степени отличается от классического (см. [2]). Поскольку такое различие в спектрах наблюдается в ультраквантовой области энергий, можно ожидать, что именно в области энергий  $E_{1/2}$  роль корреляции спинов фотона и электрона будет особенно принципиальной. Поэтому в дальнейшем изложении мы постараемся развить теорию поляризационных свойств синхротронного излучения электрона с ориентированным спином, применимую во всей области релятивистских энергий электронов и свободную от ограничения  $\chi \ll 1$ .

В дальнейшем мы будем следовать традиционным методам квантовой электродинамики, согласно которым мощность излучения при спонтанных переходах электрона из состояния  $n, s, k_3, \zeta$  в состояние  $n' = n - \nu, s', k'_3, \zeta'$

$$W_i = \frac{e^2 c}{2\pi} \int d^3 \kappa \delta(\mathcal{K} - \mathcal{K}' - \kappa) S_i$$

связана с величинами  $S_i$ , характеризующими поляризацию излучаемых фотонов. Волновые функции электрона, разделенные по спиновым состояниям (продольная и поперечная поляризации), были даны ранее (см. (3.7), (3.11), (3.14)). В частности, для  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент линейной поляризации можно получить  $S_\sigma = |\bar{\alpha}_1|^2$ ,  $S_\pi = |\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta|^2$ , а для исследования круговой поляризации излучения величину  $S_l$  следует положить равной

$$S_l = \frac{1}{2} (S_\sigma + S_\pi + i l [(\bar{\alpha}_1^+ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2^+ \bar{\alpha}_1) \cos \theta - (\bar{\alpha}_1^+ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_3^+ \bar{\alpha}_1) \sin \theta]),$$

причем  $l = \pm 1$  соответствует правой или левой циркулярной поляризации (спин фотона направлен по движению или против движения). Матричные элементы матрицы Дирака  $\bar{\alpha}_m$  имеют вид

$$\bar{\alpha}_m = \int \Psi_{n's'k'_3\zeta'}^+ e^{-i\kappa r} \alpha_m \Psi_{n s k_3 \zeta} d^3 x \quad (m = 1, 2, 3),$$

и их следует вычислять с помощью волновых функций электрона, являющихся точными решениями уравнения Дирака для частицы в

магнитном поле (3.7). Для упрощения расчетов можно положить в начальном состоянии импульс вдоль поля равным нулю ( $k_3 = 0$ ) и ограничиться состояниями, принадлежащими положительным значениям энергии:  $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (C'_1 C_4 + C'_3 C_2) I_{n, n'-1} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} (C'_4 C_1 + C'_2 C_3) I_{n-1, n'} \right] \times \\ \times I_{ss'} \delta_{k'_3, -\kappa \cos \theta},$$

$$\bar{\alpha}_3 = [(C'_1 C_3 + C'_3 C_1) I_{n-1, n'-1} - (C'_4 C_2 + C'_2 C_4) I_{nn'}] I_{ss'} \delta_{k'_3, -\kappa \cos \theta}.$$

В этих формулах функции Лагерра  $I_{nn'}$  и  $I_{ss'}$  зависят от аргумента  $x = \kappa^2 \sin^2 \theta / 4\gamma$ , а значения спиновых коэффициентов в начальном  $C_m$  и конечном  $C'_m$  состояниях определяются способом задания поляризации электрона: продольной (3.14) или "поперечной" (3.11) (вдоль магнитного поля).

Из закона сохранения энергии следует, что частота излучаемых фотонов равна

$$\kappa = \frac{\mathcal{K}}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 - \beta^2 \nu \sin^2 \theta / n}), \quad n - n' = \nu.$$

И наконец, последнее замечание. Как известно (см., например, [2]), функции Лагерра  $I_{nn'}(x)$  могут быть аппроксимированы с помощью функций Макдональда  $K_\mu$  равномерно по всей области спектра

$$I_{nn'}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{1/2} K_{1/3} \left[ \frac{2}{3} \sqrt[3]{nn'} \sqrt{x_0} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2} \right],$$

где

$$x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2.$$

Полная мощность излучения будет, очевидно, равна сумме по всем конечным состояниям

$$W_i^{\text{tot}} = \sum_{n', k'_3, s, s'} W_i,$$

при этом необходимо учесть, что квадраты всех матричных элементов  $|\alpha_m|^2$  будут содержать множитель  $I_{s's'}^2(x)$  и квантовые числа  $s$  и  $s'$  в другие члены входить не будут. Поэтому при суммировании по  $s'$  можно воспользоваться соотношением

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I_{s's'}^2(x) = 1,$$

и далее суммирование по  $n'$  целесообразно заменить суммой по числу  $\nu$ , принимающему целые значения от 0 до  $n$ . Принимая во внимание, что

мы имеем квазидискретный спектр, можно заменить суммирование по  $\nu$  интегрированием, и тогда получим

$$W_i^{\text{tot}} = \frac{e^2 c}{2\pi} \int_0^n d\nu \int_0^\infty \kappa^2 d\kappa \oint d\Omega \delta(\kappa - \mathcal{K} + \mathcal{K}') S_i.$$

Далее можно снять интеграл по  $\nu$  с помощью дельта-функции и, вводя новую переменную

$$y = \frac{\mathcal{K} \kappa \varepsilon^{3/2}}{3\gamma(1 - \kappa/\mathcal{K})}, \quad \varepsilon_0 = 1 - \beta^2 = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2,$$

которая при переходе к классическому случаю ( $\hbar \rightarrow 0$ ) переходит в известное из теории СИ значение  $y = \frac{2}{3}\nu\varepsilon_0^{3/2}$ , характеризующее спектральный состав излучения, прийти к следующему выражению:

$$W_i^{\text{tot}} = \frac{27}{16\pi} \frac{e^2 c}{R^2 \varepsilon_0^{9/2}} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(1 + \xi y)^4} \oint d\Omega S_i. \quad (3.47)$$

Здесь появляется характерный квантовый параметр

$$\xi = \frac{3}{2}\chi = \frac{3}{2} \frac{H}{H_0} \frac{E}{mc^2},$$

где  $H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс — так называемое швингеровское магнитное поле, численно равное напряженности электрического поля на границе вакуумного радиуса электрона  $r_{\text{вак}} = \sqrt{\frac{\hbar}{mc} \frac{e^2}{mc^2}}$ . И наконец, снимая интеграл по телесному углу  $d\Omega$ , приведем выражение для поляризационных компонент СИ с учетом спина электрона к виду

$$W_i^{\text{tot}} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \frac{e^2 c}{R^2 \varepsilon_0^2} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi y)^4} F_i(y), \quad (3.48)$$

где  $F_i(y)$  зависит от выбора ориентации спина электрона.

Прежде всего рассмотрим продольную поляризацию, когда матрица коэффициентов  $C_m$  определена формулой (3.14). В этом случае мы получаем:

**а) Продольная поляризация**,  $\zeta = \pm 1$  характеризует проекцию спина на направление движения. При этом

$$F_{\sigma, \pi} = \frac{1 + \zeta \zeta'}{2} \left[ (1 + \xi y) \left( \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx \pm K_{2/3}(y) \right) + \frac{\xi^2 y^2}{2} \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx \right] +$$

$$+ \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{\xi^2 y^2}{2} \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx,$$

причем верхний знак относится к  $\sigma$ , а нижний — к  $\pi$ -компоненте линейной поляризации излучения ( $K_\mu$  — функция Макдональда).

Существенно здесь подчеркнуть, что при интегрировании по углу  $\theta$  зависимость мощности излучения от начальной ориентации спина исчезает. Окончательные выражения зависят лишь от взаимной ориентации спинов  $\zeta\zeta'$ . Однако иная картина наблюдается для компонент круговой поляризации  $l = \pm 1$ :

$$F_l = \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} [1 + (1 + l\zeta)(\xi y + \xi^2 y^2/2)] \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx + \\ + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} (1 + l\zeta) \xi^2 y^2/2 \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx.$$

Отсюда видно, что при переходе к классическому случаю ( $\hbar \rightarrow 0$ ) круговая поляризация исчезает, а с учетом квантовых членов должна наблюдаться преимущественно круговая поляризация, совпадающая по знаку со спиральностью первичных электронов.

Рассмотрим теперь интегральную величину мощности излучения в двух предельных случаях, когда соответственно

$$\xi \ll 1 \quad (\text{или } \chi \ll 1) \quad \text{и} \quad \xi \gg 1 \quad (\text{или } \chi \gg 1),$$

учитывая, что все полученные нами формулы равномерно применимы для любых значений инвариантного параметра  $\chi$ . Тогда, разлагая все формулы в ряд по  $\xi$  и интегрируя по спектру, получим для мощности излучения (А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов):

$$W_\sigma^{\text{tot}} = \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} W^{\text{кл}} \left( \frac{7}{8} - \frac{25\sqrt{3}}{12} \xi + \frac{163}{9} \xi^2 - \dots \right) + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{5}{9} \xi^2 W^{\text{кл}},$$

$$W_\pi^{\text{tot}} = \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} W^{\text{кл}} \left( \frac{1}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{24} \xi + \frac{16}{9} \xi^2 - \dots \right) + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{5}{9} \xi^2 W^{\text{кл}},$$

где  $W^{\text{кл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4$ ,  $\xi \ll 1$ . Из этих формул следует, что мощность излучения линейно поляризованных  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонент не зависит от начальной ориентации спина электрона (его спиральности), переворот спина скажется лишь в членах, пропорциональных квадрату постоянной Планка  $\hbar$ , причем вероятность изменения проекции спина на направление движения также не зависит от начальной ориентации спина. Таким образом, спиновые эффекты при излучении линейно

поляризованных компонент могут оказаться лишь в членах порядка  $\hbar^2$ .

Рассматривая далее в том же приближении круговую поляризацию

$$W_l^{\text{tot}} = \frac{1}{2} W^{\text{кл}} \left\{ \frac{1 + \zeta \zeta'}{2} \left[ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{24} \left( 1 - \frac{1}{3} l \zeta \right) \xi + \dots \right] + \frac{1 - \zeta \zeta'}{2} \frac{10}{9} (1 + l \zeta) \xi^2 \right\},$$

мы видим, что существует наглядно выраженная корреляция спинов электрона и фотона, причем корреляционный член входит в выражение для мощности излучения уже в первом порядке по постоянной Планка  $\hbar$ . В классическом приближении круговая поляризация исчезает.

Рассмотрим далее случай, когда параметр  $\chi$  принимает большие значения, т.е. когда  $\chi \gg 1$  (случай экстремального поля и высоких энергий). Тогда интегрирование можно провести с учетом асимптотического поведения функций Макдональда  $K_\mu(y) \cong \cong 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) / y^\mu$  при  $y \ll 1$ . Тогда мы получим, что

$$W_\sigma = W^{\text{глоб}} \left( \frac{1 + \zeta \zeta'}{2} \frac{41}{64} + \frac{1 - \zeta \zeta'}{2} Q \right), \quad W_\pi = W^{\text{глоб}} \left( \frac{1 + \zeta \zeta'}{2} \frac{23}{64} + \frac{1 - \zeta \zeta'}{2} Q \right),$$

$$W_l = \frac{1}{2} W^{\text{глоб}} \left[ \frac{1 + \zeta \zeta'}{2} \left( 1 + \frac{11}{16} l \zeta \right) + \frac{1 - \zeta \zeta'}{2} Q \right],$$

где

$$W^{\text{глоб}} = \frac{8}{27} \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4 \frac{2^{2/3} \Gamma(2/3)}{\xi^{4/3}}, \quad Q = \frac{871}{256} \frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \frac{\ln \xi}{\xi^{2/3}}.$$

Интересно в связи с этим заметить, что в области очень высоких значений энергии и экстремально больших значений магнитного поля роль спина в излучении фотонов с циркулярной поляризацией резко возрастает: корреляционный член  $l \zeta$  вносит основной вклад в выражение для мощности излучения. Синхротронное излучение электрона, обладающего продольно ориентированным спином, оказывается циркулярно поляризованным, причем знак круговой поляризации зависит от спиральности электрона. Возрастающая роль спиновых эффектов в излучении электронов высокой энергии подчеркивается также и тем, что квантовые переходы с переворотом спина становятся равноправными с переходами без изменения проекции спина.

Заметим, что в соответствии с законом эволюции спина в магнитном поле аномальный магнитный момент электрона способен разрушить продольную поляризацию (см. уравнение БМТ (2.95)). Однако, как это будет показано в дальнейшем, в сверхсильном магнитном поле  $H \sim H_0$  АММ электрона резко убывает и даже обращается в нуль. В этих условиях продольная поляризация электрона (спиральность) восстанавливает свойство интеграла движения.

Наблюдение корреляции  $I\zeta$  при исследовании излучения, приходящего к нам из космоса, могло бы служить подтверждением динамической природы аномального магнитного момента электрона.

Теперь остановимся на особенностях синхротронного излучения, испускаемого электроном с "поперечной" поляризацией — когда спин частицы ориентирован в направлении внешнего магнитного поля.

**б) Поперечная поляризация**,  $\zeta = \pm 1$  характеризует проекцию спина "по" и "против" направления магнитного поля. При этом расчет коэффициентов в матричных элементах  $\bar{\alpha}_m$  следует проводить с помощью формул (3.13). Тогда мы получим, что полная мощность излучения по-прежнему будет определяться выражением (3.48), однако для компонент  $F_i(y)$  получим

$$\begin{aligned}
 F_{\sigma} &= \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}\xi y\right)^2 \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\xi^2 y^2}{2} \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx - \zeta(2 + \xi y)\xi y K_{1/3}(y) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{1}{4} \xi^2 y^2 \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right], \\
 F_{\pi} &= \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\xi y\right)^2 \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right] + \\
 &\quad + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{1}{4} \xi^2 y^2 \left[ \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) + 2 \int_y^{\infty} K_{1/3}(x) dx + 4\zeta K_{1/3}(y) \right].
 \end{aligned}$$

И наконец, подобно случаю продольной поляризации рассмотрим интегральную величину:

$$\begin{aligned}
 W_{\sigma} &= W^{\kappa\lambda} \left\{ \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left[ \frac{7}{8} - \left( \frac{25\sqrt{3}}{12} + \zeta \right) \xi + \dots \right] + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} 118\xi^2 \right\}, \\
 W_{\pi} &= W^{\kappa\lambda} \left\{ \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \left[ \frac{1}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{24} \xi + \dots \right] + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{23}{18} \xi^2 \left( 1 + \frac{105\sqrt{3}}{84} \zeta \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Обратим здесь внимание на следующий важный момент: мощность излучения  $\sigma$ -компоненты зависит от ориентации спина электрона вдоль

поля. Эта зависимость проявляется уже в членах первой степени постоянной Планка  $\hbar$  и может (при современных возможностях физического эксперимента) лечь в основу методики измерения поляризации пучков электронов. Эта идея была высказана и реализована в Новосибирском институте ядерной физики группой ученых под руководством академика А. Н. Скринского (см. §5.5).

Вторая важная особенность формулы (3.49), характеризующей мощность излучения поляризованного электрона, связана с зависимостью  $\pi$ -компоненты излучения от ориентации спина. Это относится к излучению, сопровождающемуся переворотом спина:

$$W_{\pi}^{II} = W^{\text{кп}} \frac{23}{18} \xi^2 \left( 1 + \frac{105\sqrt{3}}{184} \zeta \right).$$

Из этого выражения видно, что электрон, спин которого направлен вдоль магнитного поля ( $\zeta = 1$ ), излучает несколько больше, чем электрон, спин которого ориентирован против поля.

Анализ этой особенности мощности излучения поляризованного электрона послужил автору этой книги основой для предсказания, а затем и установления эффекта радиационной поляризации электронов и позитронов при их движении в накопительных кольцах.

На этом явлении, а также на проблеме измерения поляризации мы остановимся несколько позже, а пока рассмотрим случай экстремально больших полей и высоких энергий, когда динамический инвариантный параметр  $\xi$  принимает большие значения:  $\xi = \frac{3}{2}\chi \gg 1$ . При этом по аналогии с (3.53) получим, что

$$W_{\sigma}^{\text{tot}} = W^{\text{глоб}} \left( \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \frac{75}{128} + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{7}{128} \right),$$

$$W_{\pi}^{\text{tot}} = W^{\text{глоб}} \left( \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \frac{25}{128} + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{21}{128} \right).$$

Таким образом, при больших значениях  $\chi$  (ультраквантовый случай) переходы с изменением ориентации спина (спин-флип-переходы) вносят существенный вклад в полную мощность излучения. Спиновые закономерности входят в нее в органическом единстве с орбитальным движением. И в заключение отметим еще одну особенность излучения дираковской частицы в ультраквантовом случае. Если вычислить полную мощность излучения скалярной частицы с помощью точных решений уравнения Клейна-Гордона (см. [2]), то мы получим, что

$$W^{\text{КГ}} = \frac{9}{16} W^{\text{глоб}},$$

т. е. почти в два раза меньше, чем по теории Дирака. Это вновь подчеркивает существенную роль спина в излучении электронов в области ультраквантовых значений энергии и магнитного поля.

### 3. Спиновый свет

Остановимся кратко на квантовом эффекте, непосредственно связанном со спиновым магнитным моментом электрона — “спиновом свете”.

В соответствии с квантовой теорией выражение для мощности синхротронного излучения поляризованного электрона может быть представлено в виде [2; 38]

$$W_{\sigma}^{кп} = \frac{27}{16\pi^2} \varepsilon_0^{-5/2} \int_0^{\infty} y^2 (1-\xi y) \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \{ \varepsilon^2 K_{2/3}^2(z) - \zeta \xi y \sqrt{\varepsilon_0} \varepsilon^{3/2} K_{1/3}(z) K_{2/3}(z) \}. \quad (3.50)$$

В этой формуле для  $\sigma$ -компоненты линейной поляризации излучения (см. (3.47)) приняты обозначения:

$$z = \frac{1}{2} y \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{3/2}, \quad \varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta, \quad \varepsilon_0 = 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

и  $K_{\mu}(z)$  — функции Макдональда. Здесь сохранены квантовые поправки к классической величине мощности излучения релятивистского электрона с точностью до линейных членов разложения по квантовому инвариантному параметру  $\xi = \frac{3}{2} \chi$  (см. (3.47)).

Как это следует из (3.50), мощность излучения поляризованного электрона существенно зависит от ориентации спина частицы по отношению к направлению внешнего магнитного поля:  $\zeta = \pm 1$ . Эта зависимость наглядно проявляется в выражении для полной мощности излучения

$$W_{\sigma} = W_1^{кп} \left\{ \frac{7}{8} - \left( \frac{25\sqrt{3}}{12} \right) \xi + \dots \right\} \quad (3.51)$$

(см. также (3.49); здесь не рассматривается  $pi$ -компонента линейной поляризации СИ, поскольку она не имеет линейной зависимости по  $\xi$  от спина).

Хотя формула (3.50) была получена еще в 1964 г. [38], интерес к ней возник лишь в 1982 г. в связи с новой возможностью измерения поляризации пучка электронов в накопительном кольце методом визуального наблюдения спиновой зависимости мощности синхротронного излучения [35]. Вскоре был проведен эксперимент [41], показавший хорошее совпадение с теорией. Это явилось существенным вкладом в инженерную физику спина, решающую задачи получения поляризованных пучков частиц, измерение степени поляризации и управление ею (более подробно см. гл. V).

Вместе с тем физический смысл квантовых поправок к классической теории СИ длительное время оставался неясным, поскольку наглядная интерпретация квантовых эффектов является непростой задачей. Существенный прогресс в этом направлении был достигнут

В. А. Бордовициным [39] (см. также [40]): квантовая поправка, зависящая от спина электрона (3.51), представляет собою интерференцию — смешанное излучение электрона-заряда ( $W_3$ ) и электрона-спинового магнитного момента ( $W_{м.д}$ ).

С целью классической интерпретации этого квантового явления рассмотрим излучение спинового магнитного момента электрона, прецессирующего во внешнем магнитном поле:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{e_0}{mc} [\mu \mathbf{H}_R]$$

(магнитное поле  $H_R$  отнесено к покоящейся системе координат). Воспользуемся далее известной классической формулой для мощности магнитно-дипольного излучения

$$W_{м.д} = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} (\ddot{\mathcal{M}}^2),$$

в которой величину  $\mathcal{M}$  будем полагать равной спиновому магнитному моменту электрона  $\mathcal{M} = \mu = -\mu_0 \zeta$ , где  $\mu_0 = \frac{e_0 \hbar}{2mc}$  — магнетон Бора, а спин  $\zeta$  будем понимать как “классический вектор”  $\zeta = \sqrt{\zeta_{\parallel}^2 + \zeta_{\perp}^2}$  (классическая модель).

При этом в системе покоя

$$\bar{W}_{п.д} = \frac{2}{3} \frac{(\dot{\mu})^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0^2}{c^3} \omega_R^4 \zeta_{\perp}^2,$$

здесь  $\omega_R = e_0 H_R / mc$  — частота прецессии спина электрона во внешнем поле,  $\zeta_{\perp}$  — поперечная составляющая классического вектора спина.

Вместе с тем мощность излучения электрона-заряда в той же системе координат описывается известной формулой Лармора

$$W_3 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_R^2,$$

причем отношение  $W_{м.д} / W_3$  имеет вид

$$\frac{W_{м.д}}{W_3} = \left( \frac{1}{2} \frac{H_R}{H_0} \right)^2 \zeta_{\perp}^2,$$

где  $H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar$  — швингеровское магнитное поле. При переходе в лабораторную систему координат следует положить  $H_R = \gamma H$  и тогда можно получить, что

$$W_{м.д} = W_3 \frac{1}{4} \chi^2 \zeta_{\perp}^2 = W^{\text{кп}} \frac{1}{4} \chi^2 \zeta_{\perp}^2.$$

Таким образом, собственное излучение спинового магнитного момента пропорционально квантовым поправкам порядка  $\hbar^2$  и поэтому в нашем рассмотрении линейного по  $\chi$  приближения это излучение не участвует. Однако, поскольку полная мощность СИ пропорциональна билинейной комбинации электрических векторов поля излучения заряда и магнитного диполя:  $E^2 = (\mathbf{E}_z + \mathbf{E}_{м.д})^2$ , очевидно, что мощность смешанного излучения можно характеризовать выражением

$$W_{\text{смеш}} = 2\sqrt{W_z W_{м.д}} W^{\text{кл}} \xi \zeta_{\perp},$$

которое качественно согласуется с (3.49) и (3.51).

Заметим, однако, что рассмотренная нами классическая модель излучения спинового магнитного момента является весьма приближенной и не полностью отражает сам характер излучения. В соответствии с квантовой теорией излучение спинового магнитного момента дискретно и сопровождается изменением ориентации спина по отношению к магнитному полю (спин-флип). Поэтому приведенное здесь рассмотрение смешанного излучения методом классической модели только приближенно соответствует истинной картине этого квантового явления.

Будем далее под "спиновым светом" понимать разность выражений для мощности излучения поляризованного и деполаризованного (усредненного по спину) пучков электронов, выделяя тем самым излучение, непосредственно связанное со спином:

$$\begin{aligned} W_{\sigma}^{\text{спин}} &= W_{\sigma}^{\text{пол}} - W_{\sigma}^{\text{деп}} = -\zeta \xi W^{\text{кл}} = \\ &= -\zeta \xi W^{\text{кл}} \frac{27}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \int_0^{\infty} y^3 dy \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \varepsilon^{3/2} K_{1/3}(z) K_{2/3}(z). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Рассмотрим особенности спектрально-углового распределения мощности спинового света.

**а) Угловое распределение мощности спинового света.** Производя интегрирование в формуле (3.52), по спектру и вводя угол  $\psi = \cos \theta / \sqrt{\varepsilon_0}$ , получим угловое распределение мощности в виде

$$W_{\sigma}^{\text{спин}} = -\zeta \xi W_{\sigma}^{\text{кл}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{\text{сп}}(\psi) d\psi, \quad \text{где} \quad \phi^{\text{сп}}(\psi) = \frac{35}{32} \frac{1}{1 + \psi^2}^{9/2}. \quad (3.53)$$

Аналогичная формула для мощности  $\sigma$ -компоненты синхротронного излучения имеет вид

$$W_{\sigma}^{\text{СИ}} = \frac{7}{8} W^{\text{кл}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{\text{СИ}}(\psi) d\psi, \quad \text{где} \quad \phi^{\text{СИ}}(\psi) = \frac{3}{4} \frac{1}{(1 + \psi^2)^{5/2}}. \quad (3.54)$$

Таким образом, подобно синхротронному излучению спиновый свет также направлен вперед по движению электрона и сосредоточен в узком конусе с угловым раствором  $\delta\psi \sim 1/\gamma$ , но сам конус излучения является более острым (см. рис. 6,а).

**б) Спектральное распределение мощности излучения.** Интегрируя в формуле (3.52) по углу  $\theta$ , получим спектральный состав спинового света:

$$W_{\sigma}^{\text{спин}} = -\zeta\xi W^{\text{кл}} \int_0^{\infty} \phi^{\text{сп}}(y) dy, \quad \text{где} \quad \phi^{\text{сп}}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y^2 K_{1/3}(y). \quad (3.55)$$

В этой формуле переменная  $y = \omega\omega_{\text{кр}}$ ,  $\omega_{\text{кр}} = \frac{3}{2} \frac{c}{R} \gamma^3$ . Соответствующая формула для мощности СИ имеет вид, несколько отличающийся от этого выражения:

$$W^{\text{сп}} = W^{\text{кл}} \int_0^{\infty} \phi^{\text{СИ}}(y) dy, \quad \phi^{\text{СИ}}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (3.56)$$

(см. рис. 6,б).

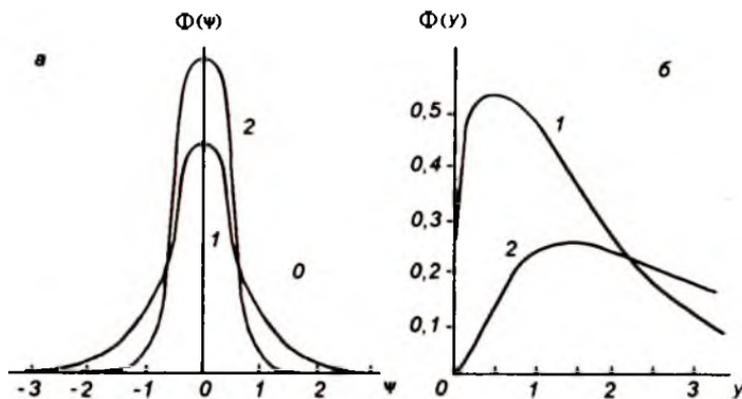


Рис. 6: а) угловое распределение синхротронного излучения  $\Phi^{\text{сп}}(\phi)$  — 1 и спинового света  $\Phi^{\text{сп}}(\phi)$  — 2; б) спектральное распределение синхротронного излучения  $\Phi^{\text{сп}}(y)$  — 1 и спинового света  $\Phi^{\text{сп}}(y)$  — 2

Максимум кривой спектрального распределения спинового света смещен в область высоких частот и достигается при  $y_{\text{max}}^{\text{сп}} \cong 1,7$ , в то время как  $y_{\text{max}}^{\text{СИ}} \cong 0,3$ . Это создает благоприятные условия для экспериментального наблюдения излучения спинового магнитного момента электрона (см. §5.5).

В заключение заметим, что наблюдавшиеся в новосибирском эксперименте [35] квантовые поправки к классическому выражению для мощности синхротронного излучения, как это теперь очевидно, явились первым визуальным наблюдением спинового света.

### §3.5. Квантовая теория

#### эффекта радиационной поляризации электронов

Развитие квантовой теории синхротронного излучения на основе точных решений уравнения Дирака дало возможность наиболее последовательного рассмотрения динамики спина электрона и, в частности, привело к предсказанию и установлению эффекта радиационной поляризации электронов и позитронов в накопительных кольцах. Этот эффект заключается в направленном процессе ориентации спинов частиц под влиянием СИ при их длительной циркуляции в магнитном поле в условиях компенсации энергетических потерь, связанных с излучением. Именно такая ситуация и реализуется в накопительных кольцах, где электроны и позитроны движутся десятки часов в магнитном поле, практически однородном вдоль траектории частицы, причем их радиационные потери энергии компенсируются за счет внешних источников.

Эффект радиационной поляризации электронов и позитронов был строго установлен автором настоящей книги совместно с А. А. Соколовым (1963). В дальнейшем этот эффект был зарегистрирован в государственном реестре открытий за номером 131 (см. [12]).

Рассмотрим более подробно вероятность спонтанных квантовых переходов, сопровождающихся изменением ориентации спина. С этой целью разделим подынтегральное выражение (3.48) на

$$\hbar\omega = c\hbar\kappa = E\xi y / (1 + \xi y),$$

и тогда вероятность переходов примет вид

$$w = \frac{9}{8\pi} \frac{e^2}{\hbar R} \frac{1}{\varepsilon_0^3} \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi y)^4} \oint d\Omega [|\bar{\alpha}_1|^2 + |\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta|^2]. \quad (3.57)$$

Матричные элементы матриц Дирака  $\bar{\alpha} = \langle \alpha \rangle$  рассмотрим для случая квантовых переходов электрона с переворотом спина (спин-флип-переходы):

$$|\bar{\alpha}_1|^{\uparrow\downarrow} = |\bar{\alpha}_2|^{\uparrow\downarrow} = \left| \frac{k'_3}{\mathcal{K}} \right| \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(z) I_{ss'}(x) \delta_{k'_3, -\kappa \cos \theta},$$

$$|\bar{\alpha}_3|^{\uparrow\downarrow} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi\sqrt{3}} \xi y [\sqrt{\varepsilon} K_{2/3}(z) + \zeta \sqrt{\varepsilon_0} K_{1/3}(z)] I_{ss'}(x) \delta_{k'_3, -\kappa \cos \theta},$$

причем в этих формулах

$$z = (y/2)(\varepsilon/\varepsilon_0)^{3/2}, \quad \xi = 3\chi/2, \quad k'_3/K = -\xi y \cos \theta,$$

$$\varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2 \theta, \quad \varepsilon_0 = 1 - \beta^2.$$

Радиальный фактор  $I_{ss'}$  в дальнейшем выпадает из рассмотрения, поскольку, как это уже отмечалось, сумма по всем радиальным переходам равна единице:  $\sum_{s,s'=0}^{\infty} I_{ss'}(x) = 1$ .

Заметим сейчас одно интересное обстоятельство: матричный элемент  $|\bar{\alpha}_1|$ , характеризующий  $\sigma$ -компоненту излучения, полностью определяется эффектом отдачи при излучении, ибо он пропорционален  $k'_3 = -\kappa \cos \theta$  (импульс  $k_3$  в начальном состоянии равен нулю — движения вдоль поля нет). Отдача, испытываемая электроном при излучении, вносит характерные флуктуации в полную вероятность перехода.

С помощью выражений (3.57) для матричных элементов матриц Дирака  $\bar{\alpha}_m$  вероятность переходов с изменением ориентации спина можно получить в виде

$$\frac{dw}{d\Omega dy} = \frac{3}{32} \frac{e^2}{\pi^3 \hbar R} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^3} \xi^2 y^3 [\cos^2 \theta K_{1/3}^2(z) + (\sqrt{\varepsilon} K_{2/3}(z) + \zeta \sqrt{\varepsilon_0} K_{1/3}(z))^2]. \quad (3.58)$$

Как видно из этого выражения, вероятность зависит от начальной ориентации спина. Эта зависимость остается и в интегральной вероятности после интегрирования по телесному углу  $\Omega$  и по спектру — по  $dy$ . Действительно, в предположении, что  $\xi \ll 1$ , получаем окончательное выражение, которое лежит в основе описания эффекта радиационной поляризации

$$w^{11} = \frac{1}{2\tau} \left( 1 + \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad (3.59)$$

где время поляризации  $\tau$  равно

$$\tau = \frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{\hbar^2}{mce^2} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \left( \frac{H_0}{H} \right)^3 = \left[ \frac{15\sqrt{3}}{16} \left( \frac{E}{mc^2} \right) \frac{\hbar}{mcR} \frac{W^{kn}}{E} \right]^{-1}. \quad (3.60)$$

Зависимость от спина, явно входящая в выражение для вероятности спонтанных переходов, показывает, что вероятность переходов из состояния  $\zeta = 1$  (спин ориентирован вдоль магнитного поля) будет больше, чем при обратном переходе. Таким образом, в результате излучения электроны будут проявлять тенденцию перехода в состояния с преимущественной ориентацией спина противоположно магнитному полю. Для позитронов процесс поляризации будет приводить к преимущественной ориентации спина вдоль поля (см. [12]).

Заметим, что состояние преимущественной ориентации спина электронов и позитронов соответствует минимальной энергии частиц, обладающих магнитным моментом  $\mu$  во внешнем поле:

$$U_{\text{маг}} = -\frac{e}{|e|}\mu\mathbf{H}, \quad \mu = \frac{e_0\hbar}{2mc}\zeta.$$

Укажем в связи с этим, что в случае продольной поляризации в обоих состояниях  $\zeta = 1$  и  $\zeta = -1$   $U_{\text{маг}}=0$ , поэтому вероятность перехода должна зависеть лишь от взаимной ориентации начального и конечного спинов.

Эффект радиационной поляризации электронов существенно квантовый, ибо вероятность (3.59) пропорциональна  $\hbar$ , однако этот эффект реализуется в макромасштабе и в условиях, когда яркостная температура электронного пучка достигает  $10^7$  К: это пример перехода хаотического движения — хаотической ориентации спина — в упорядоченное состояние в условиях высокой температуры.

Обратимся теперь к кинетике процесса поляризации и с этой целью рассмотрим статистическое изменение числа электронов с заданной ориентацией спина. Пусть  $n_1^\dagger$  — число электронов, спин которых направлен противоположно магнитному полю ( $\zeta = -1$ ), вероятность перехода из этого состояния обозначим  $w_{12}$ . Пусть далее  $n_2^\dagger$  — число электронов со спином, ориентированным вдоль поля ( $\zeta = 1$ ), вероятность перехода из этого состояния  $w_{21}$ . Тогда для изменения числа электронов в единицу времени запишем кинетические уравнения

$$\frac{dn_1^\dagger}{dt} = n_2^\dagger w_{21} - n_1^\dagger w_{12}, \quad \frac{dn_2^\dagger}{dt} = n_1^\dagger w_{12} - n_2^\dagger w_{21},$$

справедливые при условии постоянства полного числа частиц  $n_0 = n_1^\dagger + n_2^\dagger$ . Интегрируя эту систему, найдем, что изменение относительного числа частиц следует закону

$$N^\dagger = \frac{n_1^\dagger}{n_0} = \frac{w_{21}}{w_{12} + w_{21}} - Ce^{-t/\tau}, \quad N^\dagger = \frac{n_2^\dagger}{n_0} = \frac{w_{12}}{w_{12} + w_{21}} + Ce^{-t/\tau}.$$

Полагая, что в начальный момент времени пучок был неполяризован, для степени поляризации получим

$$P(t) = N^\dagger - N^\dagger = \frac{8\sqrt{3}}{15}(1 - e^{-t/\tau}), \quad (3.61)$$

где время поляризации  $\tau$  определено формулой (3.60). При этом предельная степень поляризации достигает значения

$$P(\infty) = 8\sqrt{3}/15 = 0,924 \quad (3.62)$$

(см. также [2; 12]).

Оценка времени поляризации (см. (3.60)) показывает, что при типичных для ускорителей значениях магнитного поля  $H \sim 10^4$  Гс эффект радиационной поляризации может оказаться доступным для наблюдения лишь при условии длительной циркуляции частиц в магнитном поле, причем радиационные потери энергии должны быть компенсированы за счет внешнего источника, который способен сохранять постоянство энергии частицы в среднем на каждом ее обороте в магнитном поле. Такой случай движения реализуется в накопительных кольцах — в системах, предназначенных для осуществления реакций на встречных пучках. При энергии электрона порядка 1 ГэВ и напряженности магнитного поля  $10^4$  Гс время поляризации  $\tau$  имеет порядок одного часа.

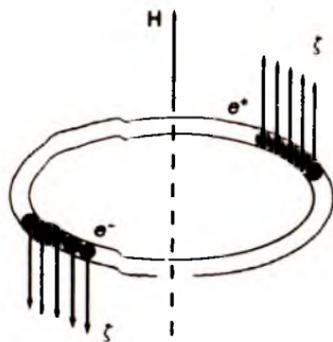


Рис. 7. Эффект радиационной поляризации электронов и позитронов в накопительном кольце (для времени  $t > \tau$ , где  $\tau$  — эффективное время поляризации)

Результаты, полученные здесь для электронов, распространяются также и на позитроны. При этом оказывается, что поляризация позитронов характеризуется той же степенью (3.62), но спин позитрона ориентируется преимущественно вдоль магнитного поля (рис. 7).

В целях наглядного физического объяснения эффекта радиационной поляризации рассмотрим классическую модель этого явления, хотя, конечно, эта модель достаточно спорна, поскольку само явление является существенно квантовым. Рассмотрим излучение магнитного диполя, связанное с изменением его ориентации, как переход системы к более устойчивому энергетическому состоянию с минимально возможным значением потенциальной энергии

$$U_0 = -\mu H,$$

$\mu = -\mu_0 \zeta$ ,  $\mu_0 = e_0 \hbar / 2mc$  — магнетон Бора. В соответствии с классической электродинамикой в системе покоя частицы излучение магнитного диполя характеризуется изменением энергии

$$\frac{dE}{d\tau} = -\frac{2}{3} \frac{\mu_0^2}{c^3} (\ddot{\zeta})^2 = -\frac{2}{3} \frac{\mu_0^2}{c^3} \omega_0^4 \zeta_{\perp}^2.$$

При выводе учтено, что в силу прецессии магнитного диполя во внешнем поле  $\zeta$  изменяется по закону

$$\dot{\zeta} = -\frac{2\mu_0}{\hbar} [\zeta \mathbf{H}_0], \quad \omega_0 = \frac{2\mu_0 H_0}{\hbar} = \frac{e_0 H_0}{mc},$$

где  $\tau$  и  $H_0$  взяты в системе покоя электрона, точкой обозначена производная по собственному времени  $\tau$ .

Воспользуемся далее уравнением энергетического баланса

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{dU_0}{d\tau} = \mu_0 \frac{d}{d\tau} (\zeta H_0),$$

и тогда можно получить закон эволюции вектора спина, рассматривая его как классическую величину, равную по модулю единице, т. е.  $\zeta^2 = \zeta_{\parallel}^2 + \zeta_{\perp}^2 = 1$ :

$$\frac{d\zeta_{\parallel}}{d\tau} = \frac{1}{2T_0} (1 - \zeta_{\parallel}^2).$$

Решение этого уравнения не вызывает сложностей:

$$\zeta_{\parallel} = \frac{e^{-\tau/T_0} - 1}{e^{-\tau/T_0} + 1} = -\text{th} \tau / 2T_0,$$

и из него следует, что  $T_0 = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{mce^2} \left( \frac{H_{\text{кр}}}{H} \right)^3$ , где  $H_{\text{кр}} = m^2 c^3 / e_0 \hbar$ , имеет смысл времени поляризации, причем через время  $\tau \gg T_0$  поляризация пучка должна стать полной (100%):  $\zeta_{\parallel} = -1$  — спин всех частиц пучка станет ориентированным против направления внешнего поля.

При переходе к лабораторной системе координат следует произвести обычные преобразования, полагая  $H_0 = \gamma H$ ,  $T_0 = T/\gamma$ , где  $\gamma = E/mc^2$  — лоренц-фактор. И тогда, считая, что электрон движется в плоскости, перпендикулярной к внешнему магнитному полю, для времени поляризации  $T$  можно получить следующее выражение:

$$T = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{mce^2} \left( \frac{H_{\text{кр}}}{H} \right)^3 \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2,$$

отличающееся от точного выражения (3.60) только численным множителем ( $3/2$  вместо  $8\sqrt{3}/15$ ).

Несмотря на известную привлекательность рассмотренной нами упрощенной полуклассической модели явления радиационной поляризации, попытки обоснования этого существенно квантового физического явления на ее основе оказались иллюзорными. Эта модель приводит к неверному результату — 100%-ной поляризации пучка и дает неверное значение времени поляризации.

Причина ограниченности классической модели достаточно очевидна: она не учитывает квантово-флуктуационного характера синхротронного излучения — дискретности в испускании фотонов электронами. В то же время квантовые флуктуации синхротронного излучения вносят существенный вклад в выражение для вероятности квантовых переходов электрона, сопровождающихся изменением ориентации спина. В принципе, конечно, можно дополнить классическую модель

явления поляризации особенностями дискретности излучения, но тогда изложенный здесь классический метод полностью теряет его наглядность и простоту [12].

В этой связи целесообразно более детально рассмотреть квантовые переходы электрона, сопровождающиеся изменением ориентации спина (спин-флип), и оценить вклад квантовых флуктуаций в вероятность таких переходов. Одним из важных факторов проявления дискретности синхротронного излучения является эффект отдачи при излучении фотона: при этом траектория движения частицы испытывает квантовые флуктуации (см. [2]) и, в частности, радиус орбиты движения электрона испытывает "квантовое уширение" в соответствии с законом (А. А. Соколов, И. М. Тернов)

$$\frac{d}{dt}[\overline{\Delta R^2}] = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e^2}{mc} \frac{\hbar}{mcR} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^5.$$

Это квантовое явление вносит существенный вклад в динамику движения электронов в накопительном кольце и проявляется при высоких энергиях частиц:  $E \geq 10^3$  МэВ.

Вернемся, однако, к интересующему нас вопросу о роли квантовых флуктуаций в процессе поляризации пучка электронов. Если в начальном состоянии импульс электрона вдоль поля равнялся нулю, то в конечном состоянии, вследствие эффекта отдачи при излучении, электрон приобретает в соответствии с формулой (3.57) импульс  $k'_3 = -\kappa \cos \theta$ . Эта флуктуация существенно влияет на величину матричного элемента матрицы  $|\bar{\alpha}_1|$  (см. (3.57)), входящего в выражение для  $\sigma$ -компоненты мощности СИ.

Если вернуться теперь к общему выражению для вероятности квантовых переходов с переворотом спина, то, ограничиваясь основными членами в разложении по величине  $\varepsilon_0 = 1 - \beta^2 = (mc^2/E)^2$ , это выражение можно записать в виде

$$\frac{dw^{11}}{d\Omega dy} = \frac{9}{8\pi} \frac{e^2}{\hbar R} \frac{y}{\varepsilon_0^3} (|\bar{\alpha}_1|^2 + |\bar{\alpha}_3|^2).$$

Заметим, что в это выражение наряду с  $\pi$ -компонентой излучения, пропорциональной  $|\bar{\alpha}_3|^2$ , и в силу ее явной зависимости от ориентации спина  $\zeta$ , вносящей направленность в процесс его ориентации, входит также и  $\sigma$ -компонента СИ, представленная слагаемым  $|\bar{\alpha}_1|^2$ . Эта компонента не имеет явной зависимости от ориентации спина (см. (3.57)), но она также вносит вклад в кинетику явления: матричный элемент  $\bar{\alpha}_1$  полностью обусловлен эффектом отдачи. Как видно из (3.57), эффект отдачи оказывается минимальным в плоскости орбиты вращения, когда  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , ибо  $\cos \theta = 0$  в этом случае. Чтобы более наглядно оценить роль эффекта отдачи — квантовых "встрясок", — проинтегрируем (3.58) по спектру (по  $dy$ ), сохраняя зависимость вероятности переворота спина от угла наблюдения  $\theta$ . При этом в ультрарелятивистском

приближении, когда  $\varepsilon_0 = 1 - \beta^2 \ll 1$ , получим, что

$$\frac{dw^{11}}{d\Omega} = \frac{2\sqrt{3} e^2 \xi^2}{9 \hbar R \pi^2 \varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \psi^2)^4} \left[ 1 + \frac{35\sqrt{3}}{192} \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1 + \psi^2}} \right],$$

где  $\psi = \cos\theta/\varepsilon_0$ . Отсюда с совершенной очевидностью следует, что содержащий начальную ориентацию спина  $\zeta$  член принимает наибольшее значение при  $\psi = 0$ , т.е. строго в плоскости орбиты вращения. При этом вероятность спин-флип-переходов максимальна, а радиационная поляризация достигает высокой степени  $P_{\max} = 3\pi\sqrt{3}/192 = 0,99$ . Таким образом, максимальное значение эффекта поляризации достигается в отсутствие явления отдачи.

Квантовые флуктуации СИ выступают, с одной стороны, как причина квантовых переходов, вызывая процесс упорядочения ориентации спина, а с другой стороны, как деполяризующий фактор, обусловленный эффектом отдачи, испытываемой электроном при излучении фотона. Флуктуационный характер излучения делает возможным не только односторонние переходы, ведущие к упорядочению спина (как это имеет место в классической модели), но также обратные переходы. Таким образом, классическая модель явления радиационной поляризации, не учитывающая дискретного характера излучения, является крайне ограниченной в своих возможностях.

Заметим, что в общем случае произвольных значений инвариантного параметра  $\chi = \frac{H}{H_0} \frac{E}{mc^2}$  задача может быть также решена точно (см. [13]), однако мы здесь приведем результаты только для двух предельных случаев

$$P(\infty) = \begin{cases} 8\sqrt{3}/15, & \text{если } \chi \ll 1, \\ \frac{5}{2} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)(3\chi)^{1/3}}, & \text{если } \chi \gg 1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Таким образом, в экстремально сильном магнитном поле эффект радиационной поляризации подавлен.

В случае сверхсильных магнитных полей (типа поля пульсаров  $H \sim 10^{12} \div 10^{13}$  Гс) задача об излучении электрона приобретает существенную особенность: электрон в таком экстремально сильном поле даже на первом возбужденном уровне  $n = 1$  является релятивистским, ибо его энергия равна  $E = mc^2(1 + 2nH/H_0)^{1/2}$ , где  $H_0 = m^2c^3/e_0\hbar$ . К сожалению, проведение расчетов в случае таких полей ( $H \geq H_0$ ) возможно лишь численными методами. При этом оказывается (И. М. Тернов, В. Г. Багров, О. Ф. Дорофеев), что вероятность спонтанных переходов перестает зависеть от ориентации спина частицы, причем переходы с изменением ориентации спина становятся равновероятными с переходами без спин-флипа:

$$w = 0,421 \frac{mce^2}{\hbar} \sqrt{1 + 2nH/H_0}.$$

Через время  $\tau \sim 1/w$  все электроны перейдут в основное состояние  $n = 0$ , в котором спин ориентирован строго против поля. Наступит полная поляризация.

На этом мы закончим рассмотрение эффекта радиационной поляризации электронов на основе квантовой теории.

### §3.6. Спиновые эффекты

#### в процессах однофотонной аннигиляции и рождения электрон-позитронных пар в магнитном поле

Как известно, один гамма-квант с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  не может спонтанно превратиться в пару электрон-позитрон, поскольку при однофотонном рождении пары не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии ( $\kappa = \mathcal{K}^+ + \mathcal{K}^-$ ) и импульса ( $\mathbf{\kappa} = \mathbf{k}^- + \mathbf{k}^+$ ) ( $E = c\hbar\mathcal{K}$ ,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ). Поэтому для образования пары необходимо наличие внешнего поля, принимающего на себя избыток импульса. Задача об однофотонном рождении и аннигиляции электрон-позитронных пар (Н. П. Клепиков, 1954) в настоящее время приобрела особую актуальность, поскольку процесс однофотонного рождения пар является основным механизмом генерации релятивистской плазмы в магнитосфере пульсаров.

В ранних работах, посвященных анализу нового канала рождения и аннигиляции пар, в основном изучалась полная вероятность процессов, просуммированная по спинам рождающихся и аннигилирующих частиц. Вместе с тем можно предполагать, что присутствие внешнего магнитного поля, создающего выделенное направление в пространстве, может оказать существенное влияние на ориентацию спина частиц.

Рассмотрим сейчас оба процесса — однофотонное рождение пары и ее аннигиляцию в магнитном поле, уделяя главное внимание роли спина.

#### 1. Однофотонное рождение пары

Наиболее простой подход к решению этой задачи — “дырочный” вариант теории Дирака, в котором появление пары рассматривается как индуцированный переход электрона в состояние с отрицательным значением энергии. Такие состояния соответствуют, как известно, античастице — позитрону. В волновых функциях частицы в магнитном поле, являющихся собственными для оператора поперечной поляризации  $O_z$ , необходимо учитывать, таким образом, оба знака энергии:  $\varepsilon = \pm 1$ .

Выберем теперь оператор энергии взаимодействия электрона с фотоном в виде

$$U = e_0 L^{-3/2} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} (\alpha \mathbf{a}) e^{-i\kappa t + i\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$$

И тогда с помощью обычных операций мы получим, что вероятность процесса однофотонного рождения пары имеет вид

$$w = \frac{4\pi^2 e^2}{L^3 \hbar} \sum_{\kappa} \frac{(\bar{\alpha}^* \mathbf{a}^+)(\bar{\alpha} \mathbf{a})}{\kappa} \delta(\mathcal{K} + \mathcal{K}' - \kappa) \delta_{k_3, k'_3 + \kappa_3}$$

(здесь штрих относится к позитрону), причем матричный элемент матриц Дирака

$$\bar{\alpha} = \int \Psi_{n's'k'_3\zeta'}^{+i} e^{i\kappa r} \alpha \Psi_{nsk_3\zeta} d^3x$$

содержит квантовые числа, относящиеся как к электрону ( $nsk_3\zeta$ ), так и к позитрону ( $n's'k'_3\zeta'$ ), причем  $\zeta' = -\zeta^+$ . Производя далее необходимое суммирование, можно прийти к выражению для вероятности рождения только лишь как к функции от спиновых квантовых чисел рождающихся частиц.

В процессе достаточно громоздких расчетов (см. [2]) следует ввести возможные упрощения, не влияющие на окончательный результат. Прежде всего заметим, что если фотон движется строго вдоль поля, то вероятность процесса рождения обращается в нуль. В силу этого можно выбрать такую систему отсчета, в которой расчет будет наиболее простым, так как окончательные формулы всегда можно преобразовать с помощью преобразований Лоренца. В частности, целесообразно взять систему отсчета, в которой  $k_3 = k'_3 = 0$ , а фотон движется ортогонально полю, и далее предположить, что рождающиеся электрон и позитрон движутся по своим орбитам с релятивистскими скоростями. Другими словами, будем считать, что энергия падающего фотона  $\hbar\kappa$  достаточно велика.

Опуская детали расчета, приведем выражение для вероятности однофотонного рождения пары  $e^+e^-$ , просуммированное по всем конечным состояниям, кроме спиновых:

$$w(\zeta, \zeta^+) = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} q \int_0^\infty dy S, \quad (3.64)$$

где

$$q = \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} \frac{mc^2}{E_\gamma}, \quad a = 2qch^2y$$

и

$$S = \frac{1 + \zeta\zeta^+}{2} [\text{th}^2 y K_{2/3}(a) + 2qsh^2 y K_{1/3}(a) - \zeta \text{th} y K_{1/3}(a)] + \\ + \frac{1 - \zeta\zeta^+}{2} (K_{2/3}(a) - \zeta K_{1/3}(a)).$$

Здесь, как обычно,  $K_\mu(a)$  — функции Макдональда, спин  $\zeta$  относится к электрону, а  $\zeta^+$  — к позитрону. Заметим, что состояние поляризации  $\zeta = 1$  для электрона эквивалентно состоянию  $\zeta^+ = -1$  для позитрона, поскольку позитрон является античастицей.

Интересно заметить, что расчет, проведенный по аналогии с рассмотренным для бозона (уравнение Клейна-Гордона), показал, что в формуле (3.64) следует положить

$$S^{603} = \frac{1}{\text{ch}^2 y} K_{2/3}(a) - 2q \text{ch}^2 y K_{1/3}(a). \quad (3.65)$$

Дальнейшее интегрирование оказывается возможным лишь приближенно. Рассмотрим случай сравнительно малых энергий гамма-кванта:

$$E_\gamma \ll \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} mc^2, \quad q \gg 1, \quad \text{или} \quad \chi \ll 1.$$

Тогда с помощью асимптотического выражения для функций Макдональда

$$K_\mu(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad \text{при} \quad z \gg 1$$

можно найти, что

$$\int_0^\infty \text{sh}^2 y K_{1/3}(2q \text{ch}^2 y) dy \simeq \frac{\pi e^{-2q}}{8\sqrt{2}q^2}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{\text{ch}^{2s} y} K_\mu(2q \text{ch}^2 y) dy \simeq \frac{\pi\sqrt{2}}{8q} e^{-2q}$$

и, следовательно, вероятность однофотонного рождения пар в магнитном поле имеет следующий вид:

$$w(\zeta, \zeta^+) = w_0 \left[ \frac{1 + \zeta\zeta^+}{12} + \frac{(1 - \zeta)(1 - \zeta\zeta^+)}{6} \right], \quad (3.66)$$

где просуммированная по спинам полная вероятность  $w_0$  равна

$$w_0 = \sum_{\zeta, \zeta^+} w(\zeta, \zeta^+) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} e^{-2q}, \quad (3.67)$$

причем

$$w^{603} = \frac{1}{6} w_0.$$

Из этих формул следует, что вероятность рождения пары бесспиновых частиц в шесть раз меньше, чем вероятность рождения фермионной пары. Этим подчеркивается общее значение спиновых эффектов: спин оказывает существенное влияние на величину вероятности однофотонного рождения пары.

Наиболее вероятным процессом, как это следует из (3.66), будет рождение пары с противоположно ориентированными спинами, причем спин электрона должен быть ориентирован против направления внешнего магнитного поля ( $\zeta = -1$ ):

$$w^{11} = \frac{1-\zeta}{3} w_0 = \frac{2}{3} w_0.$$

Таким образом, наиболее вероятным является появление пары, у которой спин электрона ориентирован против поля, а спин позитрона — по полю. Заметим, что эта ситуация напоминает характер направленности рассмотренного ранее процесса радиационной поляризации. Физически это можно объяснить минимальной энергией, которую приобретает электрон и позитрон во внешнем магнитном поле. При этом следует иметь в виду, что пара со спинами, ориентированными против поля для позитрона ( $\zeta^+ = -1$ ) и по полю для электрона ( $\zeta = 1$ ), вообще не рождается. Процесс рождения пары с параллельно ориентированными спинами также вероятен, как и процесс рождения бозонов.

В другом предельном случае, когда

$$E_\gamma \gg \frac{4}{3} \frac{H_0}{H} mc^2, \quad q \ll 1, \quad \text{или} \quad \chi \gg 1$$

(сверхсильное магнитное поле, большие энергии фотонов), можно воспользоваться асимптотическим поведением функции Макдональда от малого аргумента:

$$K_\mu(q) \cong \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{q^\mu} \quad \text{при} \quad q \ll 1.$$

Тогда с помощью значения интеграла

$$\int_0^\infty K_{2/3}(2qch^2 y) dy = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(7/6) 2^{4/3}} \frac{1}{q^{2/3}}$$

получим

$$w(\zeta, \zeta^+) = w_1 \left[ \frac{3}{40} (1 + \zeta \zeta^+) + \frac{7}{40} (1 - \zeta \zeta^+) \right] = \frac{w_1}{4} \left( 1 - \frac{2}{5} \zeta \zeta^+ \right),$$

где

$$w_1 = \sum_{\zeta, \zeta^+} w(\zeta, \zeta^+) = \frac{5}{7} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(7/6)} \frac{1}{2^{4/3}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} q^{-1/3}.$$

Из этих формул следует, что и в случае очень больших значений энергии фотона рождение фермионной пары с противоположно ориентированными спинами наиболее вероятно. Таким образом, вероятность однофотонного рождения пар существенно зависит от спина частиц и его ориентации.

В заключение заметим, что экспоненциальный множитель в формуле (3.67) сильно подавляет величину вероятности процесса рождения пары; при  $q \gg 1$ , т. е. при сравнительно малых энергиях фотона,

$$\frac{E_\gamma}{2mc^2} \ll \frac{2}{3} \frac{H_0}{H} \quad (\chi \ll 1),$$

вероятность практически равна нулю. И только в случае больших энергий фотона,

$$\frac{E_\gamma}{2mc^2} \gg \frac{2}{3} \frac{H_0}{H} \quad (\chi \gg 1)$$

эта вероятность становится ощутимой величиной. Максимум вероятности достигается при  $q = 0,1$ .

Таким образом, в экстремально сильных магнитных полях возможно заметное поглощение фотонов вследствие рождения пар с вероятностью, зависящей от спиновых свойств частиц.

## 2. Однофотонная аннигиляция электронов и позитронов с ориентированным спином в магнитном поле

Рассмотрим далее обратный процесс — однофотонную аннигиляцию пары в магнитном поле. Аннигиляцию пары будем рассматривать также по “дырочной” теории, согласно которой квантовый переход электрона из состояния с положительным значением энергии ( $\varepsilon = 1$ ) в состояние с отрицательным значением энергии ( $\varepsilon = -1$ ) сопровождается излучением фотона. Процесс однофотонной аннигиляции пары, так же как и процесс ее рождения, не может происходить в случае свободных частиц: необходимо присутствие внешнего магнитного поля, принимающего на себя часть импульса.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда электрон и позитрон движутся по одной и той же орбите с равными энергиями ( $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ ), причем импульсы обеих частиц вдоль поля равны нулю ( $k_3 = k'_3 = 0$ ) (штрих относится к позитрону, т. е. к состоянию электрона с  $\varepsilon = -1$ ). Из закона сохранения импульса вдоль поля  $k_3 + k'_3 = \kappa \cos \theta$  получаем, что  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , т. е. фотон излучается в плоскости орбиты вращения частиц.

Вероятность аннигиляции в этом случае равна

$$w = \frac{4\pi^2 e^2}{L^3 \hbar} \sum_{\kappa} \frac{1}{\kappa} (\bar{\alpha}^* \mathbf{a})(\bar{\alpha} \mathbf{a}^+) \delta(\mathcal{K} + \mathcal{K}' - \kappa),$$

где матричные элементы матриц Дирака определены, как и ранее. Из закона сохранения энергии следует, что в сделанных предположениях фотон будет излучаться с энергией  $E_\gamma = 2E$  ( $\kappa = 2\mathcal{K}$ ).

Повторяя расчеты, аналогичные случаю однофотонного рождения пары, найдем, что

$$w(\zeta, \zeta^+) = \frac{2}{3\pi \hbar L} \left( \frac{k_0}{\mathcal{K}} \right)^4 I_{ss'}^2 \left[ \frac{1 - \zeta \zeta^+}{2} (\zeta K_{1/3}(q) + K_{2/3}(q))^2 + \frac{1 + \zeta \zeta^+}{2} K_{1/3}^2(q) \right], \quad (3.68)$$

где

$$q = \frac{2}{3} \frac{H_0}{H} \frac{mc^2}{E} = \left( \frac{3}{2} \chi \right)^{-1}.$$

Для того чтобы получить результат, не зависящий от выбора системы координат, усредним (3.68) по квантовым числам  $s$  и  $s'$ . Для этой цели прежде всего учтем, что сумма  $\sum_{s'} I_{ss'}^2(x) = 1$ , и далее суммирование по  $s$  ограничим некоторым максимальным значением, полагая, что

$$\sum_{s, s'} I_{ss'}^2(x) = s_{\max} = \gamma a_{\max}^2,$$

где  $a_{\max}$  — величина, характеризующая разброс центров круговых траекторий электрона, — связана с максимальным значением радиального квантового числа соотношением  $a_{\max} = \sqrt{s_{\max}/\gamma}$ .

Предполагая далее, что площадь разброса центров орбит электрона определяется площадью грани нормировочного куба периодичности волны (усреднение по радиальным квантовым числам соответствует равновероятному распределению центров орбит),

$$\pi a_{\max}^2 = L^2,$$

получим, что

$$\sum_{ss'} I_{ss'}^2(x) = s_{\max} = \frac{\gamma L^2}{\pi},$$

но тогда для среднего значения  $\overline{I_{ss'}^2}$ , мы получим

$$\overline{I_{ss'}^2} = \frac{\sum_{ss'} I_{ss'}^2}{s_{\max}^2} = \frac{1}{s_{\max}^2} = \pi/\gamma L^2$$

(см. [2]). Поэтому для вероятности однофотонной аннигиляции можно получить следующее выражение:

$$w = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar \gamma L^3} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^4 \Phi(\zeta, \zeta^+, q), \quad (3.69)$$

где

$$\Phi(\zeta, \zeta^+, q) = \frac{1 - \zeta \zeta^+}{2} (\zeta K_{1/3}(q) + K_{2/3}(q))^2 + \frac{1 + \zeta \zeta^+}{2} K_{1/3}^2(q).$$

Заметим, что если умножить вероятность (3.69) на число электронов среды  $N$  и ввести плотность электронов  $\rho = N/L^3$ , то можно получить обратное время жизни позитрона относительно аннигиляции с электронами среды

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \rho \frac{e^2}{\hbar \gamma} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^4 \Phi(\zeta, \zeta^+, q).$$

В случае, когда  $q \gg 1$ , т. е. в случае малых полей и не слишком высоких энергий ( $\chi \ll 1$ ),

$$\Phi^{II}/\Phi^{II} = (1 + \zeta)^2 \left( 1 + \frac{1}{6q} - \frac{5}{72} \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \frac{1}{36q^2}. \quad (3.70)$$

Это непосредственно следует из асимптотического поведения функций Макдональда  $K_{2/3}$  и  $K_{1/3}$ . Таким образом, вероятность аннигиляции пары в случае антипараллельных спинов возрастает, если спин электрона ориентирован по направлению магнитного поля. В условиях длительного пребывания пары в магнитном поле, как уже отмечалось, преимущественное состояние спина электрона будет  $\zeta = -1$ .

В другом крайнем случае, когда  $q \ll 1$ , можно получить, имея в виду асимптотическое поведение  $K_\mu(q)$  ( $\chi \gg 1, q \rightarrow 0$ ), что,

$$\Phi^{II}/\Phi^{II} = \left[ \frac{2^{4/3} \pi}{3^{1/2} \Gamma^2(1/3)} + \zeta \right]. \quad (3.71)$$

Отсюда следует, что вероятность аннигиляции пары с противоположно ориентированными спинами намного больше, чем в случае параллельных спинов. Таким образом, в процессе однофотонной аннигиляции спин выступает как существенный фактор.

Если теперь усреднить общее выражение (3.69) по спинам обеих частиц, мы придем к формуле аннигиляции в виде

$$w = \frac{e^2}{3\hbar\gamma L^3} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^4 \Phi(q), \quad (3.72)$$

где

$$\Phi(q) = 2K_{1/3}^2(q) + K_{2/3}^2(q) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2q} e^{-2q} & q \gg 1, \chi \ll 1, \\ \frac{\Gamma^2(2/3)}{2^{2/3}} \frac{1}{q^{4/3}} & q \ll 1, \chi \gg 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что в сверхсильном магнитном поле могут создаваться условия, благоприятные для рассматриваемого процесса.

### §3.7. Рассеяние света на электроне,

#### движущемся в поле плоской электромагнитной волны

В последние годы задача о комптон-эффекте (рассеянии света на электронах) вновь приобрела известный интерес в связи с возможностью экспериментального исследования рассеяния лазерных фотонов на релятивистских электронах, движущихся в циклических ускорителях. Интересно заметить, что в условиях высокой энергии электронов при их встречном соударении с пучком фотонов максимальная энергия рассеянных квантов приближается к энергии электронов. При этих условиях комптон-эффект может рассматриваться в качестве нового метода получения гамма-квантов при взаимодействии света с релятивистскими электронами (см. [14]).

С помощью метода точных решений можно последовательно рассмотреть спиновые и поляризационные свойства рассеяния света на поляризованном электроне, движущемся в поле электромагнитной волны. В подобной постановке задача о рассеянии света на движущемся электроне впервые решалась М. Альпериним (1944), и при этом оказалось возможным рассмотреть эффект Комптона при одновременном поглощении электроном нескольких фотонов и испускании одного кванта света. В частном случае, когда поглощается один фотон и электрон покоится, результат для дифференциального сечения рассеяния должен переходить в известную формулу Клейна-Нишины (1929). С помощью точных решений уравнения Дирака (3.16–3.20) можно включить в рассмотрение спин электрона, т. е. решить полностью задачу о рассеянии света на поляризованном фермионе.

Напомним далее (см. (3.16)–(3.20)), что квантовое состояние электрона в плоской линейно поляризованной электромагнитной волне характеризуется квантовыми числами  $\lambda = \mathcal{K} - k_3$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$  и  $\zeta$ :  $\Psi_{\lambda, \mathbf{k}, \zeta}$ , и рассмотрим вероятность спонтанных переходов из состояния  $\lambda, \mathbf{k}, \zeta$  в состояние  $\lambda', \mathbf{k}', \zeta'$ . При этом для вероятности переходов в единицу времени можно получить

$$\frac{dw}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \delta(\lambda' - \lambda + \kappa - \kappa_3) S, \quad (3.73)$$

где величина  $S = S_1 + S_2$  соответствует двум компонентам линейной поляризации излучения.

С целью определения компонент поляризации рассеянного света, как и ранее (см. (3.33)), разобьем амплитуду вектор-потенциала  $\mathbf{a}$  квантованного поля излучения на составляющие  $\mathbf{a} = g_2\beta_2 + g_3\beta_3$ , в которых единичные векторы  $\beta_2$  и  $\beta_3$  ортогональны друг к другу и к направлению распространения фотона  $\kappa^0 = \kappa/\kappa$ ; при таком выборе компонент линейной поляризации можно получить, что

$$S_2 = (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{-1} |\bar{\alpha}_2 \cos \theta - \bar{\alpha}_3 \sin \theta \sin \varphi|^2,$$

$$S_3 = (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{-1} |\bar{\alpha}_3 \sin \theta \cos \varphi + \bar{\alpha}_2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - \bar{\alpha}_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)|^2. \quad (3.74)$$

В этих формулах для волнового вектора  $\kappa$  выбрана сферическая система координат  $(\kappa, \theta, \varphi)$ .

Матричные элементы матриц Дирака  $\bar{\alpha}_m$  имеют вид

$$\bar{\alpha}_m = \int \Psi_{\lambda', \mathbf{k}', \zeta'}^\dagger e^{-i\kappa \mathbf{r} - i\kappa_3 \eta} \Psi_{\lambda, \mathbf{k}, \zeta} d^3 x, \quad (3.75)$$

причем под  $\kappa = (\kappa \sin \theta \cos \varphi, \kappa \sin \theta \sin \varphi, 0)$  понимается двумерный вектор, лежащий в плоскости  $z = 0$ ;  $\eta = z - ct$ .

Для определения круговой поляризации рассеянного света мы также получим

$$S_l = \frac{1}{2}(S_2 + S_3) - i l S^{(l)}, \quad l = \pm 1,$$

$$S^{(l)} = (\bar{\alpha}_1^\dagger \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2^\dagger \bar{\alpha}_1) \cos \theta + (\bar{\alpha}_3^\dagger \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1^\dagger \bar{\alpha}_3) \sin \theta \sin \varphi + (\bar{\alpha}_2^\dagger \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_3^\dagger \bar{\alpha}_2) \sin \theta \cos \varphi. \quad (3.76)$$

Расчет матричных элементов матриц Дирака связан с интегралами следующего типа:

$$\langle B \rangle = \int \Psi_{\lambda', \mathbf{k}', \zeta'}^\dagger B e^{-i\kappa \mathbf{r} - i\kappa_3 \eta} \Psi_{\lambda, \mathbf{k}, \zeta} d^3 x,$$

где  $B$  — некоторый оператор. В дальнейшем удобно положить, что в начальном состоянии электрон двигался по оси  $z$ :  $k_1 = k_2 = 0, k_3 \neq 0$ . (Внешняя электромагнитная волна распространяется также по оси  $z$ .) При этом мы получим

$$\langle B \rangle = \delta'_{k_1, -\kappa_1} \delta'_{k_2, -\kappa_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \Psi_0^\dagger B \Psi_0 e^{-iG}, \quad (3.77)$$

где

$$G = (k'_3 - k_3 + \kappa_3)\eta + f' - f,$$

а функция  $f$  имеет вид

$$f = \frac{e^2}{2\lambda} \int_0^\eta A^2 d\eta.$$

Исходя из закона сохранения импульса получаем, что  $k'_1 = \kappa \sin \theta \times \cos \varphi, k'_2 = -\kappa \sin \theta \sin \varphi$ , причем  $\lambda = \mathcal{K} - k_3$ .

Из условия кратности изменения  $G$  целому числу при возрастании переменной  $\eta$  на  $2\pi/\kappa$  (падающая волна — монохроматическая с частотой  $\kappa$ )

$$(k'_3 - k_3 + \kappa_3) \frac{2\pi}{\kappa} + f' \left( \frac{2\pi}{\kappa} \right) - f \left( \frac{2\pi}{\kappa} \right) = 2\pi n$$

получим выражение для частоты излучаемых фотонов:

$$\kappa' = \frac{2n\kappa}{1 + \cos \theta + \left[ 2n \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{m^2(1+\gamma^2)}{\lambda^2} \right] (1 - \cos \theta)}, \quad (3.78)$$

где

$$\gamma^2 = \frac{e^2}{m^2} \overline{A^2} = \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{L} \int_{L/2}^{L/2} A^2 d\eta.$$

Величина  $n = 1, 2, \dots$ , входящая в это выражение, характеризует количество падающих фотонов. В случае  $n = 1$  для угла  $\theta = \pi + \psi$  в предположении достаточно слабого поля электромагнитной волны ( $\gamma \rightarrow 0$ ) можно получить известный результат для изменения частоты при рассеянии света на движущемся электроне (“обратный” комптон-эффект) (см. [14]):

$$\epsilon'_{\max} = \frac{\epsilon}{\epsilon/E + \left(\frac{m}{E}\right)^2 + \psi^2}. \quad (3.79)$$

Отсюда видно, что максимальная энергия рассеянных фотонов ( $\epsilon'_{\max}$ ) будет наблюдаться при встречном движении электрона и фотона, причем рассеянный фотон движется в направлении движения электрона ( $\theta = \pi$ ). При этом пучок фотонов, рассеянных электроном, обладает острой направленностью и достаточно моноэнергетичен. В случае  $\omega/m > m/E$  наступает полная конверсия: электрон передает всю свою энергию рассеянным электронам:  $\epsilon'_{\max} \cong E$  (полная конверсия).

Опуская довольно громоздкие, хотя и не сложные, выкладки, запишем выражение для дифференциальной вероятности квантовых переходов:

$$\frac{dw_n}{d\Omega} = \frac{e^2 \kappa' (\lambda^2 + m^2 q^2) S^0}{4\pi m^2 \lambda^2 [m^2(1 + \gamma^2) + \lambda'^2] (1 + \gamma^2 + q^2)},$$

где  $S^0 = (m^2 + \lambda^2)(\kappa'^2 \sin^2 \theta + m^2 + \lambda'^2)S$ , а  $S$  определено формулами (3.74) и (3.76). При этом  $q = \frac{\lambda}{m} \text{ctg} \theta/2$ . Если далее разделить это выражение на плотность падающих фотонов

$$j_z = \frac{\gamma^2 m^2 \kappa n (1 - v)}{4\pi e^2}$$

( $v$  — начальная скорость электрона), мы получим окончательную формулу для дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{r_0^2 (\kappa'/n\kappa)^2 S^0}{\gamma^2 (1-v) [m^2 (1+\gamma^2) + \lambda^2] \lambda \lambda'}, \quad (3.80)$$

где  $r_0 = e^2/m$  — классический радиус электрона,  $\lambda = m\sqrt{\frac{(1-v)}{(1+v)}}$ ,  $m^* = m\sqrt{1+\gamma^2}$  — эффективная масса электрона в поле волны.

Эта формула дифференциального сечения комптоновского рассеяния дает полное решение задачи с учетом спиновых и поляризационных свойств. Заметим, что внешнее поле электромагнитной волны здесь входит через классический параметр  $\gamma = (e/m)(\overline{A^2})^{1/2}$ , который можно представить с помощью комбинации двух инвариантных параметров:

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6} (F_{\mu\nu} p^\nu)^2, \quad \Lambda = \frac{2kp}{m^2}.$$

В этом выражении  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$  — волновой вектор плоской монохроматической волны,  $p^\mu$  — 4-импульс электрона. Для поля плоской электромагнитной волны параметр  $\chi$  принимает вид

$$\chi = \frac{kp}{m\omega H_0} (\overline{E^2})^{1/2},$$

где чертой обозначено среднее по времени. Отсюда следует, что

$$\gamma = \frac{e}{m} (\overline{A^2})^{1/2} = 2 \frac{\chi}{\Lambda}.$$

Этот “классический” параметр представляет собой работу поля на длине волны, выраженную в единицах энергии покоя электрона. В случае слабого поля волны, когда  $\gamma \ll 1$ , наиболее вероятны процессы взаимодействия электрона с одним квантом волны. При увеличении этого параметра возрастает роль многоквантовых процессов, и достижение значений  $\gamma \geq 1$  является критерием нелинейной зависимости мощности излучения от внешнего поля.

Возвращаясь к выражению для дифференциального сечения рассеяния (3.80), заметим, что в общем случае дальнейший анализ полученных результатов затруднителен, поскольку интегралы, входящие в (3.80), требуют численного анализа. Однако очень важной является интересная закономерность: процессы, связанные с поглощением нескольких фотонов, не вносят изменений в характеристики спиновых эффектов по сравнению со случаем слабого поля, когда электрон взаимодействует с одним фотоном.

Далее мы предположим, что интенсивность волны не слишком велика ( $\gamma \ll 1$ ), и ограничимся случаем поглощения одного фотона ( $n = 1$ ). Рассмотрим рассеяние в плоскости  $xz$  ( $\varphi = 0, \theta = \pi$ ).

Тогда для дифференциального сечения рассеяния можно получить следующие формулы [16]:

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right) \left(\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda}\right)^2 \frac{1 + \zeta\zeta'}{2}; \quad \frac{d\sigma_3}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right) \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda}\right)^2 \frac{1 - \zeta\zeta'}{2}. \quad (3.81)$$

Отсюда следует, что преимущественно будет излучаться та же компонента линейной поляризации, что и в исходной падающей плоской волне, — направление электрического вектора поля излучения совпадает с начальным. Уточним, что формулы (3.81) записаны для случая излучения наиболее жестких квантов вперед по движению электрона ( $\theta = \pi$ ). При этом излучение  $\sigma_2$ -компоненты происходит без изменения ориентации спина электрона. Напротив, излучение  $\sigma_3$ -компоненты реализуется только в случае обращения спина ( $\zeta = -\zeta'$ ).

Отношение дифференциальных сечений рассеяния

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_2} = \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'}\right)^2 = \left(\frac{\kappa'/2E}{1 - \kappa'/2E}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + m\sqrt{1 - v^2}/2\kappa}\right)^2 = \mu^2$$

показывает, что для нерелятивистских электронов величина  $\mu \rightarrow 1$ , только если  $\kappa \gg m$ , т. е. только для очень жестких падающих квантов света. Для релятивистских электронов при  $2\kappa = m\sqrt{1 - v^2} = m(m/E)$  величина  $\mu \rightarrow 1/2$ , т. е. проявление квантовых переходов с обращением спина становится существенным.

Если просуммировать выражения (3.81) по состояниям поляризации, то можно получить известную формулу Клейна-Нишины:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_2}{d\Omega} + \frac{d\sigma_3}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\kappa}{\kappa'}\right)$$

(имея в виду, что угол  $\theta = \pi$ ).

Рассмотрим теперь круговую поляризацию, выбирая значения углов  $\theta = \pi/2$  и  $\varphi = \pi/4$ . При таком выборе углов зависимость круговой поляризации от спинов электрона и фотона приближается к максимальной. При этом

$$S_0^{(1)} = i\sqrt{2}\zeta m\kappa' \left[ \frac{q}{1 + q^2} (\lambda\kappa' + m^2 - \lambda\lambda') - m\lambda \right] \frac{q}{1 + q^2},$$

где  $q = \lambda/m$ . В зависимости от скорости электрона величина круговой поляризации меняется. В частности, если электрон покоится ( $q = 1$ ), то

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 \left[ \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} - 1 \right] \left[ 1 + \frac{\zeta(\kappa'/\kappa - 1)}{\sqrt{2}(\kappa'/\kappa + \kappa/\kappa' - 1)} \right], \quad (3.82)$$

где  $l = -1$  соответствует правой, а  $l = +1$  — левой круговой поляризации. В случае электронов, движущихся с большой скоростью,  $q \gg 1$ , и тогда

$$\frac{d\sigma^{(l)}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \frac{\lambda}{\lambda'} \left( 1 - \frac{\zeta l m \kappa}{\sqrt{2} \lambda^2} \right). \quad (3.83)$$

Поскольку отношение  $m\kappa/\lambda \ll 1$ , вклад членов, зависящих от  $l\zeta$ , очень мал.

### §3.8. Спиновая структура бета-распада нейтрона в сильном магнитном поле

Бета-распад привлекает к себе внимание уже около ста лет — со времени открытия естественной радиоактивности (Беккерель, 1896) как весьма своеобразная проблема, связывающая ядерную физику и физику элементарных частиц. Как известно, под бета-распадом понимается обусловленный слабым взаимодействием процесс, при котором ядро испускает электрон (позитрон) и антинейтрино (нейтрино):

$$N(A, Z) \rightarrow N'(A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}, \quad N(A, Z) \rightarrow N'(A, Z - 1) + e^+ + \nu.$$

Здесь  $A$  — массовое число,  $Z$  — число протонов. Простейшим примером такого процесса является превращение свободного нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ .

Основой изучения бета-распада явилась теория Ферми (1934), рассматривающая бета-распад как результат локального четырехфермионного взаимодействия, которое выбиралось по аналогии со взаимодействием заряда и электромагнитного поля. Теория Ферми нашла хорошее подтверждение в эксперименте.

Новый этап в исследовании бета-распада ядер был связан с открытием несохранения четности в слабых взаимодействиях (Ли и Янг, 1956). Появилось новое направление в изучении бета-распада — распад ядер с ориентированным спином. Как отмечали Ли и Янг, существенная роль в экспериментах принадлежит изучению углового распределения бета-электронов, испускаемых поляризованными ядрами: асимметрия в распределении электронов распада имеет прямую связь с несохранением пространственной четности — нарушением зеркальной симметрии.

Пионерским экспериментом в этом направлении явились опыты Ву (1957), в которых наблюдалась угловая асимметрия вылета бета-электронов: электроны вылетали преимущественно против направления спина распадающегося ядра. Так было доказано несохранение четности в слабых взаимодействиях (рис. 8).

После первых опытов по бета-распаду поляризованных ядер стал проявляться особый интерес к изучению спиновой зависимости явлений как к новому источнику информации о механизме взаимодействия частиц.

Рассмотрим сейчас вопрос о влиянии внешнего постоянного однородного магнитного поля на процесс бета-распада поляризованного нейтрона. Известно, что спектр энергии электронов распада свободного нейтрона определяется объемом фазового пространства, соответствующего распределению энергии между электроном и антинейтрино. Внешнее магнитное поле существенно изменяет характер движения заряженных частиц, что должно сказаться на структуре фазового пространства и тем самым оказать влияние на характер бета-распада. Кроме того, магнитное поле создает в пространстве выделенное преимущественное направление, это может изменить спиновую структуру распада и привести к открытию новых спиновых закономерностей. Особый интерес в связи с этим представляют поля порядка критического:  $H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс, существование которых в настоящее время установлено вблизи нейтронных звезд.

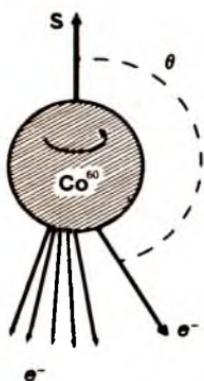


Рис. 8. Схема опытов Ву по наблюдению несохранения четности при  $\beta$ -распаде ядра  $Co^{60}$  с ориентированным спином

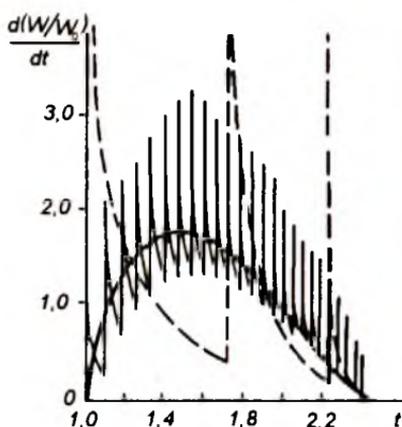


Рис. 9. Спектр энергии электронов при  $\beta$ -распаде нейтрона в магнитном поле с напряженностью:  
 $H = 0$  (жирная линия),  
 $H = 0,1 H_c$  (сплошная линия),  
 $H = H_0$  (штриховая линия)

В первых же работах, посвященных распаду нейтрона в магнитном поле и проведенных на основе метода точных решений, удалось установить резонансный характер энергетического спектра бета-электронов (И. М. Тернов, Б. А. Лысов, Л. И. Коровина; см. обзорную статью [17]).

Остановимся, однако, более детально на спиновой структуре процесса бета-распада. Ограничиваясь обычным вариантом универсального  $V-A$ -слабого взаимодействия, амплитуду распада нейтрона в первом порядке теории возмущений можно представить в виде

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 + \alpha_0 \gamma^5) \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi_\nu] \quad (\hbar = c = 1), \quad (3.84)$$

где  $\psi_n$ ,  $\psi_p$ ,  $\psi_e$ ,  $\psi_{\bar{\nu}}$  — волновые функции соответственно нейтрона, протона, электрона и антинейтрино, являющиеся точными решениями уравнения Дирака. Здесь  $\alpha_0$  характеризует отношение аксиальной и векторной констант взаимодействия,  $\alpha_0 = G_A/G_V$ , а постоянная Ферми  $G$  связана с массой векторного бозона  $M_W$  и углом Вайнберга  $\theta_W$  соотношением

$$G = \frac{\sqrt{2}e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_W} = 1,4149 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

Напомним, что в случае свободного (в отсутствие внешнего поля) бета-распада вероятность процесса имеет вид  $W^{\text{своб}} = W_0 \Phi_0$ , где

$$W_0 = G^2 (1 + 3\alpha_0^2) \frac{m_e^5}{4\pi^3}, \quad (3.85)$$

а функция Ферми

$$\Phi_0 = 2 \int_1^{\epsilon_0} \epsilon (\epsilon^2 - 1)^{1/2} (\epsilon_0 - \epsilon)^2 d\epsilon$$

связана с величиной максимального энерговыделения

$$\epsilon_0 = \frac{[M(Z, N) - M(Z + 1, N - 1)]}{m_e}.$$

Весь расчет вероятности распада основывается на методе точных решений уравнения Дирака и ведется по теории возмущений в представлении Фарри. Как уже упоминалось, было установлено, что квантовые свойства магнитного поля приводят к резонансному характеру спектра электронов, образующихся в процессе бета-распада. Этот резонанс имеет место в том случае, если электрон после распада нейтрона захватывается на плоскую орбиту вращения в магнитном поле (рис. 9).

В полях, близких по напряженности к критическому значению  $H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar$ , движение электрона сильно локализовано: частица движется по окружности “квантового” радиуса  $R_{\text{кв}} \cong \frac{\hbar}{mc}$ , ибо  $\overline{R^2} = (2n+1) \frac{\hbar}{H_0} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$  и в условиях слабозвужденных состояний ( $n = 1, 2, \dots$ )  $R \rightarrow R_{\text{кв}}$ .

Заметим, что в этих условиях энергетический спектр электрона становится существенно нелинейным:  $E = mc^2 (1 + 2nH/H_0)^{1/2}$  ( $p_z = 0$ ), причем в “основном” состоянии  $n = 0$  спин электрона ориентирован строго против направления магнитного поля.

Обратимся теперь к спиновой структуре процесса бета-распада поляризованного нейтрона в магнитном поле. Используя стандартную схему расчета, выражение для вероятности процесса можно представить в виде

$$\frac{W}{W_0} = \frac{2H}{H_0} \frac{1}{1+3\alpha_0^2} \left\{ \left[ \frac{1+\zeta_n\zeta_p}{2} + \frac{2\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2} \frac{1-\zeta_n\zeta_p}{2} \right] + \left[ \sum_{n=1}^{[N]} f(n) + \frac{1}{2}f(0) \right] + \zeta_n f(0) \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0^2} \left[ \frac{1+\zeta_n\zeta_p}{2} - \alpha_0 \frac{1-\zeta_n\zeta_p}{2} \right] \right\}, \quad (3.86)$$

где

$$f(n) = \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_0} \varepsilon(\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon_n^2)^{1/2} d\varepsilon, \quad \varepsilon = p_0/m,$$

$$p_0 = [m^2 + p_3^2 + 2nm^2(H/H_0)]^{1/2}, \quad \varepsilon_n = (1 + 2nH/H_0)^{1/2},$$

$[N]$  — целая часть числа  $N = H_0(\varepsilon_0^2 - 1)/2H$ ,  $\zeta_p = \pm 1$  и  $\zeta_n = \pm 1$  — проекции спинов конечного и исходного нуклонов на направление магнитного поля (на ось  $z$ ),  $W_0$  определено формулой (3.85) (свободный бета-распад). По спину электрона в формуле (3.86) произведено суммирование.

В рассматриваемом приближении описание ядерного бета-распада соответствует переходу нейтрона в протон, а также с хорошей точностью справедливо для переходов между зеркальными ядрами таких, как  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}$ , при которых взаимно обмениваются числа протонов и нейтронов. Для определенности в дальнейшем рассматривается переход  $n \rightarrow p$  в предположении, однако, что величина энергосвободия в распаде  $\varepsilon_0$  является произвольной.

Просуммируем прежде всего (3.86) по спину протона, полагая  $\zeta_p = 1, -1$ . Тогда получим, что

$$\sum_{\zeta_p} \frac{W}{W_0} = \frac{2H}{H_0} \frac{1}{1+\alpha_0^2} \left[ \sum_{n=1}^{[N]} f(n) + \frac{1}{2}f(0) - \zeta_n f(0) \frac{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}{1+3\alpha_0^2} \right]. \quad (3.87)$$

Отсюда следует важный вывод: для нейтронов с ориентированным спином зависимость от поляризации нейтрона сохраняется в выражении для полной вероятности процесса. В свободном бета-распаде подобная зависимость проявляется только в дифференциальной вероятности углового распределения электронов (угловая асимметрия):

$$dW_0 = \frac{G^2(1+3\alpha_0^2)m^5}{8\pi^4} (1 - \zeta_n a \cos \theta), \quad (3.88)$$

где

$$a = 2\alpha_0 \frac{\alpha_0 - 1}{1 + 3\alpha_0^2}.$$

Таким образом, проявление эффекта несохранения четности при бета-распаде во внешнем магнитном поле обладает заметной спецификой.

В случае магнитного поля достаточно слабого ( $H \ll H_0$ ) вероятность бета-распада поляризованного нейтрона линейно зависит от  $H$ :

$$W/W_0 = \Phi_0 - \zeta_n a(H/H_0)[\delta^3/3 + \delta - \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0 + \delta)],$$

где  $\delta = (\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2}$ .

Заметим, что линейная по полю поправка к вероятности бета-распада открывает возможность экспериментальной проверки влияния магнитного поля на этот процесс.

Рассмотрим далее преимущественную ориентацию ядер, возникающую в процессе бета-распада в постоянном магнитном поле [17]. С этой целью вернемся к формуле (3.86), характеризующей вероятность процесса с учетом проекций спинов нейтрона  $\zeta_n$  и протона  $\zeta_p$  на направление магнитного поля.

В наиболее интересном с точки зрения возможных экспериментов случае малого энерговыделения ( $\varepsilon_0 - 1 \ll 1$ ) из выражения (3.86) с точностью до членов квадратичных по напряженности поля  $H$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{W}{W_0} = & \left[ \frac{4(\varepsilon_0^2 - 1)^{7/2}}{105} \right] \left\{ \frac{1 + \zeta_p \zeta_n}{2} \left[ 1 + \zeta_n \frac{7\alpha_0}{1 + \alpha_0^2} \chi + \frac{35}{12} \chi^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1 - \zeta_n \zeta_p}{2} \frac{2\alpha_0}{1 + \alpha_0^2} \left[ 1 - \zeta_n \frac{7}{2} \chi + \frac{35}{12} \chi^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Здесь  $\chi = \frac{H}{H_0(\varepsilon_0 - 1)}$ . Из этой формулы следует, что в отличие от свободного бета-распада, полная вероятность которого не зависит от начальной ориентации спина ядра, в магнитном поле появляется асимметрия, обусловленная явной зависимостью  $W$  от спина. Разные вероятности переходов из состояний  $\zeta_n = \pm 1$  могут привести к тому, что даже если материнские ядра в целом неполяризованы:  $n_{\uparrow}^{(1)} = n_{\downarrow}^{(1)} = n/2$  (где  $n_{\uparrow}^{(1)}$ ,  $n_{\downarrow}^{(1)}$  — числа частиц со спином, ориентированным по полю и против поля), дочерние ядра могут приобрести преимущественную ориентацию:  $n_{\uparrow}^{(2)} \neq n_{\downarrow}^{(2)}$  [17].

Для определения изменения со временем числа частиц в конечном состоянии составим кинетические уравнения

$$\frac{dn_{\uparrow}^{(2)}}{dt} = n_{\uparrow}^{(1)} W_{11} + n_{\downarrow}^{(1)} W_{21}, \quad \frac{dn_{\downarrow}^{(2)}}{dt} = n_{\downarrow}^{(1)} W_{12} + n_{\uparrow}^{(1)} W_{22},$$

решение которых приводит к следующему предельному значению поляризации при  $t \gg \tau$  ( $\tau = 1/W_0$  — характерное время распада в отсутствие поля)

$$P = \frac{n_{\uparrow}^{(2)} - n_{\downarrow}^{(2)}}{n_{\uparrow}^{(2)} + n_{\downarrow}^{(2)}} = \frac{2\alpha_0^2}{1 + 3\alpha_0^2} \left[ \frac{1 + \Lambda}{1 + 2\Lambda \frac{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}{1 + 3\alpha_0^2}} - \frac{1 - \Lambda}{1 - 2\Lambda \frac{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}{1 + 3\alpha_0^2}} \right], \quad (3.90)$$

где

$$\Lambda = f(0)/2Q, \quad Q = \sum_{n=1}^{[N]} f(n) + \frac{1}{2}f(0).$$

В случае слабого магнитного поля, когда  $H \ll H_0$ , величина  $\Lambda \ll 1$ , и тогда сумма в формуле (3.90) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{[N]} f(n) \cong [N] = \frac{H_0}{2H}(\epsilon_0^2 - 1).$$

При этом степень поляризации протонов пропорциональна напряженности магнитного поля  $H$ :

$$P = \left[ 2\alpha_0 \frac{1 + \alpha_0}{1 + 3\alpha_0^2} \right]^2 \frac{H}{H_0(\epsilon_0^2 - 1)}.$$

В магнитных полях с напряженностью, достижимой в современных лабораториях, эффект ориентации спинов ядер весьма мал, однако по порядку величины он сравним со значениями, характеризующими явление ядерного парамагнетизма, наблюдение которого в настоящее время эффективно осуществляется с помощью методов ядерного магнитного резонанса.

В сверхсильных магнитных полях, когда  $H \geq H_0(\epsilon_0^2 - 1)/2$ , величина  $\Lambda = 1$ , так как сумма в выражении (3.90) равна нулю, поскольку в силу определения целой части  $[N]$  эта величина обращается в нуль. Тогда степень поляризации

$$P = \frac{4\alpha_0^2}{(1 - \alpha_0)^2 + 4\alpha_0^2} \quad (3.91)$$

для реалистических значений  $\alpha_0 \sim 1$  близка к 100%. Например, при бета-распаде нейтрона ( $\alpha_0 = 1,25$ ) в магнитном поле  $H = 2,7H_0$  примерно у 99,5% протонов в процессе бета-распада спин будет ориентирован по полю.

### §3.9. Динамическая природа

#### аномального магнитного момента электрона

Развитие теории аномального магнитного момента электрона началось сразу же после впечатляющих экспериментов Нейфа, Нельсона и Раби (1947), которые с помощью метода магнитного резонанса исследовали величину сверхтонкого расщепления энергетических уровней атомов водорода и дейтерия. Как известно, величина сверхтонкого расщепления прямо пропорциональна магнитному моменту электрона

$$\Delta\omega = \frac{8\pi}{3} \frac{2I + 1}{I} \mu_n \mu_e |\psi(0)|^2,$$

где  $I$  — спиновое квантовое число, равное  $1/2$  для ядра водорода и  $1$  для ядра дейтерия,  $\mu_n$  и  $\mu_e$  — магнитные моменты ядра и электрона,  $\psi(0)$  — волновая функция электрона в центре атома. В эксперименте Нейфа, Нельсона и Раби были получены значения частоты, отличающиеся от предсказанных теорией на одну и ту же величину ( $\sim 0,25\%$ ) для обоих атомов. Это послужило базой для предположения, выдвинутого Брейтом (1947, 1948), о том, что расхождение с теорией можно объяснить в предположении, что электрон обладает “врожденным” магнитным моментом, дополнительно к магнетону Бора — кинематическому значению, которое следует из теории Дирака.

Вслед за тем Каш и Фоли (1948) с помощью магнитно-резонансного метода провели высокоточное исследование зеемановского расщепления спектральных линий атомов натрия, индия и галлия и также подтвердили расхождение с теорией.

В 1948 г. Швингер опубликовал свои результаты теоретических исследований, в которых он показал, что магнитный момент электрона изменяется при взаимодействии частицы с электромагнитным вакуумом, так что его значение приобретает аномальную часть  $a_e$ :

$$\mu = -\mu_0(1 + a_e), \quad a_e = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

Опыты по обнаружению аномального магнитного момента электрона (АММ), так же как и опыты по наблюдению радиационного сдвига энергетических уровней атома, явились фундаментальным вкладом в науку и стимулировали развитие теории: электромагнитный вакуум получил признание как физическая реальность [1].

Остановимся кратко на вопросе о том, почему считается важным изучение аномального магнитного момента электрона. Прежде всего заметим, что в настоящее время магнитный момент рассчитан с высокой точностью в высших приближениях по квадрату заряда и теория хорошо согласуется с экспериментом, достигающим сейчас удивительной точности (более подробно см. § 4.2). Все эти вычисления проведены в линейном приближении по величине внешнего магнитного поля, а поэтому открывается возможность проверки теории на пути установления возможной нелинейной зависимости АММ от напряженности внешнего поля, а также зависимости от энергии электрона. Другими словами, возникает вопрос о динамической природе АММ, что особенно интересно для случая движения электрона в экстремально сильном магнитном поле, например в магнитосфере пульсаров.

Бесспорно интересным является также сильное, а иногда и решающее влияние АММ на динамику спина частицы при ее движении во внешнем поле. Как показывает анализ (см. § 2.6), под влиянием аномального магнитного момента возникают деполаризующие силы, способные разрушить поляризацию пучка частиц. Так, в частности, весьма сильно влияет АММ электрона на проекцию спина частицы на вектор ее скорости (на направление движения). В силу того, что

частота обращения электрона в магнитном поле и частота прецессии (в условиях учета АММ) не совпадают, продольная поляризация (спиральность) не сохраняется во времени.

Вакуумный аномальный магнитный момент электрона играет также важную роль в анализе устойчивости электромагнитного вакуума. Рассмотрим обобщенное уравнение Дирака-Паули

$$\left[ i\gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu^{\text{ext}} \right) - m + \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \Psi = 0, \quad (3.92)$$

где  $\sigma^{\mu\nu}$  — тензор спинового магнитного и электрического моментов (см. § 2.4),  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля. Это уравнение, как оказывается, допускает точное решение для случая электрона, движущегося в однородном магнитном поле. При этом энергетический спектр имеет вид (И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. Ч. Жуковский)

$$E = \pm mc^2 \left\{ \left[ 1 + \frac{H}{H_0} (2n + \zeta + 1) \right]^{1/2} + \zeta \frac{\alpha}{4\pi} \frac{H}{H_0} \right\}. \quad (3.93)$$

Мы опускаем здесь движение вдоль магнитного поля, полагая  $k_3 = 0$ : значение  $\zeta = \pm 1$  соответствует двум возможным значениям проекции спина на направление магнитного поля.

В основном состоянии  $n = 0$ ,  $\zeta = -1$  (вырождение по спину снято, ибо в основном состоянии спин всегда ориентирован против поля). Поэтому

$$E = \pm mc^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{H}{H_0} \right).$$

Отсюда можно было бы сделать вывод о том, что при  $\frac{\alpha}{4\pi} (H/H_0) = 1$  энергетическая щель между состояниями с положительным и отрицательным значениями энергии может захлопнуться: электромагнитный вакуум становится неустойчивым.

Однако более полный анализ ситуации показывает обратное: в сильном магнитном поле энергетическая щель между состояниями  $\pm mc^2$  не только не уменьшается, но даже увеличивается. Вакуум в магнитном поле остается устойчивым даже при  $H \rightarrow H_0$ . Итак, знание величины аномального магнитного момента электрона необходимо, исходя из интересов и теории, и эксперимента.

В основу рассмотрения задачи об аномальном магнитном моменте электрона положим интегродифференциальное уравнение Дирака-Швингера

$$\left[ i\gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu^{\text{ext}} \right) - m \right] \Psi(x) = \int M(x, y) \Psi(y) dy \quad (c = \hbar = 1), \quad (3.94)$$

правая часть которого, содержащая взаимодействие электрона с электромагнитным вакуумом, включает в себя эффекты собственной энергии и поправки, связанные с поляризацией вакуума внешним полем. Массовый оператор в первом порядке по  $e^2$  теории возмущений квантовой электродинамики

$$M(x, y) = -4\pi i e^2 \gamma^\mu S^c(x, y) \gamma^\nu D_{\mu\nu}^c(y - x)$$

содержит пропагатор электрона с учетом внешнего магнитного поля  $S^c(x, y)$ :

$$\left[ i\gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu^{\text{ext}} \right) - m \right] S^c(x, y) = -\delta^{(4)}(x - y),$$

а также пропагатор фотона  $D_{\mu\nu}^c(y - x)$ .

Воспользуемся далее фейнмановским представлением для пропагаторов электрона и фотона:

$$S^c = \begin{cases} i \sum_{E_n > 0} \psi_n(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}') e^{-iE_n(t-t')}, & t > t', \\ -i \sum_{E_n < 0} \psi_n(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}') e^{-iE_n(t-t')}, & t < t', \end{cases}$$

причем  $\bar{\psi}_n = \psi_n^\dagger \gamma^0$ ,

$$D_{\mu\nu}^c(x - x') = -\frac{i}{2} \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\kappa}{\omega} e^{i\kappa(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega|t-t'|}.$$

В этих формулах  $\Psi_n = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t}$  — стационарные функции электрона, удовлетворяющие невозмущенному радиационными поправками уравнению Дирака. Сумма по  $n$  при  $t > t'$  включает состояния только с положительной энергией, а при  $t < t'$  причинная функция равна той же сумме с обратным знаком, взятой по состояниям с отрицательной энергией (позитронные состояния).

Интегрирование по времени (3.94) приводит к стационарному уравнению

$$(E - \mathcal{H})\psi = \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = R\psi(\mathbf{r}), \quad (3.95)$$

где ядро  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  имеет следующий вид:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{e^2}{4\pi^2} \sum_{n', \epsilon} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \frac{1}{\mathcal{K}_n - \epsilon(\mathcal{K}_{n'} + \kappa)} e^{i\kappa\mathbf{r}} \alpha^\mu \psi_{n'}(\mathbf{r}) \psi_{n'}^\dagger(\mathbf{r}') e^{-i\kappa\mathbf{r}'} \alpha_\mu,$$

$E = c\hbar\mathcal{K}$  — энергия электрона,  $\epsilon = \pm 1$  — знак энергии в промежуточных состояниях, причем  $\epsilon = 1$  для электронных и  $\epsilon = -1$  для позитронных состояний;  $\alpha^\mu = (I, \alpha)$ .

Заметим здесь, что наиболее простой путь расчета массового оператора — это линейное приближение по величине магнитного поля и нерелятивистское приближение. Тогда можно без особого труда получить, что

$$\int M(x, y)\Psi(y) dy = -\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi(x), \quad (3.96)$$

и мы приходим к уравнению Дирака–Паули (3.92). В этом уравнении дополнительное взаимодействие магнитного момента с полем проявляется локально, а динамическая природа величины  $\mu$  остается скрытой. Для того чтобы выяснить динамическое происхождение АММ электрона, а также обнаружить нелокальность порождающего его взаимодействия, необходимо обратиться к уравнению (3.95) в его полном виде, отвлекаясь от предела слабого поля. Тем самым будет установлен и предел применимости уравнения Дирака–Паули для электрона в линейном по полю приближении, ибо иногда динамическая природа АММ игнорируется и дополнительное взаимодействие вида  $\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  автоматически включается в уравнение Дирака–Паули (3.93) также и в случае сильного электромагнитного поля. Это и приводит к трудностям в объяснении стабильности вакуума.

Прежде всего следует заметить, что величина магнитного момента электрона в общем случае является довольно сложной функцией, зависящей от напряженности внешнего магнитного поля. Впервые на эту особенность обратил внимание Гупта, который в первом порядке теории возмущений по  $\alpha = e^2/\hbar c$  рассмотрел не только линейный, но и высшие члены разложения величины магнитного момента по характерному параметру  $a^{-1}$ , где  $\frac{a}{2\hbar} = \frac{H_0}{2H}$ , а  $H_0 = m^2 2c^3/\epsilon_0 \hbar = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс. Это обстоятельство — нелинейность взаимодействия АММ с магнитным полем — может вызвать интерес в связи с прецизионной техникой измерения величины аномального момента, ибо отброшенные в теоретических расчетах нелинейные по полю члены могут оказаться заметными на фоне более высоких степеней разложения по квадрату заряда.

Далее необходимо подчеркнуть, что во всех ранних работах рассматривалось только нерелятивистское приближение задачи. Электрон, находящийся во внешнем поле, рассматривался в “основном” состоянии (Латинжер), в котором энергия орбитального движения частицы и энергия взаимодействия магнитного момента с внешним полем взаимно скомпенсированы.

В связи с этим можно ожидать, что в случае релятивистского движения электрона величина его магнитного момента не только будет являться функцией напряженности поля, но может оказаться также зависящей и от энергии электрона.

Наконец отметим, что во всех упомянутых работах (Гупта, Латинжер [12]) рассматривался случай слабого поля, когда напряженность поля ограничена пределами изменения  $0 < H \ll H_0$ . В свете последних

открытий экстремально высоких значений напряженности магнитного поля вблизи пульсаров, а также и в лабораторных условиях (о чем уже кратко упоминалось), представляет интерес исследование величины АММ в сильном магнитном поле.

Рассмотрим теперь задачу об аномальном магнитном моменте электрона в первом порядке теории возмущений по  $\alpha = e^2/\hbar c$  методом, свободным от отмеченных здесь ограничений.

Вернемся к уравнению Дирака (3.95). Рассматривая правую часть этого уравнения как возмущение, можно заметить, что радиационные поправки к энергии полностью определяются матричными элементами оператора  $R$ , характеризующего эффективную энергию вакуумного взаимодействия. Как известно, радиационные поправки к движению электрона во внешнем поле проявляются в изменении массы частицы и существенно определяются особенностями движения самих частиц и величиной напряженности магнитного поля. Нам необходимо рассмотреть полевую поправку к массе электрона, зависящую от спина: именно эта часть массы связана с существованием у электрона вакуумного магнитного момента. Вычисление матричных элементов оператора  $R$  (см. (3.95)) можно провести с помощью точных волновых функций электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле.

Заметим, что массовый оператор  $R$  содержит бесконечную полевую массу  $\delta m$ . Эту бесконечность можно устранить с помощью обычной процедуры — перенормировки массы. Однако в дальнейших расчетах аномального момента полевая масса выпадает из рассмотрения, и результаты, касающиеся аномального магнитного момента, оказываются конечными без перенормировки.

Радиационная поправка к энергии электрона определяется диагональным матричным элементом оператора  $R$ :

$$W_{\zeta\zeta'} = \int \psi_{n\zeta'}^+(\mathbf{r}) R \psi_{n\zeta}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int \psi_{n,\zeta'}^+(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{n\zeta}(\mathbf{r}') d^3x d^3x',$$

причем индексы  $\zeta, \zeta' = \pm 1$  характеризуют зависимость энергии вакуумного взаимодействия электрона от начальной ( $\zeta$ ) и конечной ( $\zeta'$ ) ориентации спина. В результате вычислений для радиационной поправки к энергии можно получить выражение

$$\begin{aligned} \Delta m &= W_{\zeta\zeta'} = \Delta m^{(1)} + \Delta m^{(2)} = \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \sum_{n,\varepsilon=\pm 1} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\kappa d\kappa \sin\theta d\theta}{\mathcal{K} - \varepsilon(\mathcal{K}' + \kappa)} [F_1(\kappa, \theta) + F_2(\kappa, \theta)], \end{aligned} \quad (3.97)$$

в котором  $F_1$  и  $F_2$  выражаются с помощью функций Лагерра [2] от аргумента  $y = \kappa^2 \sin^2 \theta / 4\gamma$ :

$$I_{nn'}(y) = \frac{1}{\sqrt{n!n'}} e^{-y/2} y^{(n-n')/2} Q_{n',-n'}^n(y)$$

(здесь  $n$  — главное квантовое число, определяющее энергию электрона:  $K = \sqrt{k_0^2 + 4n\gamma + k_3^2}$ ). При этом

$$F_1(\kappa, \theta) = (D_1 D'_1 + D_{-1} D'_{-1}) \Phi_1, \quad F_2(\kappa, \theta) = (D_{-1} D'_{-1} - D_1 D'_1) \Phi_2,$$

где функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  от ориентации спина не зависят, а спиновые коэффициенты  $D_1$  и  $D_{-1}$  удовлетворяют условию нормировки

$$|D_1|^2 + |D_{-1}|^2 = 1.$$

Эти коэффициенты можно определить с помощью оператора проекции спина  $O$  на магнитное поле

$$O_3 \Psi = \zeta \Psi, \quad \zeta = \pm 1$$

(см. точные решения в § 3.1). Исходя из вида спиновых коэффициентов  $D_\zeta$  можно прийти к заключению, что непосредственно с наличием аномального магнитного момента электрона следует связать величину  $\text{Re} \Delta m^{(2)}$ . Действительно, именно эта величина, пропорциональная множителю  $(D_{-1} D'_{-1} - D_1 D'_1)$ , в зависимости от выбора поляризационного оператора либо явно зависит от ориентации спина (поперечная поляризация — вдоль поля), либо вызывает переходы с изменением этой ориентации (продольная поляризация).

Как известно, часть вакуумного оператора  $R$ , связанная с аномальным магнитным моментом, в нерелятивистском приближении и в случае слабого магнитного поля имеет вид  $R' = \mu_0 \frac{\alpha}{2\pi} \rho_3 (\sigma \mathbf{H})$ . Действительно, из (3.92) следует, что в магнитном поле уравнение Дирака-Паули включает в себя аномальный магнитный момент, причем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ c(\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 m c^2 + \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \rho_3 (\sigma \mathbf{H}) \right] \Psi.$$

Как было отмечено Паули, такое обобщение уравнения Дирака является ковариантным (см. (3.92)), поэтому можно предполагать, что и в общем случае замена оператора  $R \rightarrow R'$  остается справедливой, однако величина магнитного момента может теперь оказаться зависящей от напряженности магнитного поля и энергии электрона. Это и будет означать, что аномальный магнитный момент электрона обладает динамической природой.

Сравним далее матричные элементы оператора  $R'$

$$W'_{\zeta\zeta'} = \int \psi_{\zeta'}^+(\mathbf{r}) R' \psi_\zeta(\mathbf{r}) d^3x = \mu H (D_1 D'_1 - D_{-1} D'_{-1})$$

с энергией вакуумного взаимодействия  $\text{Re} \Delta m^{(2)}$  (см. формулу (3.97)). Тогда можно прийти к выводу о том, что действительно замена оператора  $R \rightarrow R'$  оказывается возможной, если  $\mu$  выбрать в виде

$$\mu = \frac{\text{Re} \Delta m^{(2)}}{H (D_1 D'_1 - D_{-1} D'_{-1})} = -\frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \zeta f(n, a). \quad (3.98)$$

Учтем при этом, что функция  $\Phi_2(\kappa, \theta)$ , входящая в это выражение (см. (3.97)), имеет вид

$$\Phi_2(\kappa, \theta) = \frac{k_0}{\mathcal{K}} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon \mathcal{K}}{\mathcal{K}'} \right) \frac{n' - n}{y} - \frac{\varepsilon \mathcal{K}}{\mathcal{K}'} \right] [I_{n, n'}^2(y) - I_{n-1, n'-1}^2(y)].$$

Производя далее суммирование в (3.95) по знаковому множителю  $\varepsilon = E_n/|E_n| = \pm 1$ , для функции  $f(n, a)$  получим выражение

$$f(n, a) = -8a \sum_{n'} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{x dx \sin \theta d\theta}{(\sqrt{\eta + x^2 \cos^2 \theta + x})^2 - 1} \times \\ \times \left( 1 + \frac{\eta - 1 + x^2 \sin^2 \theta}{x \sin^2 \theta \sqrt{\eta + x^2 \cos^2 \theta}} \right) [I_{n, n'}^2(z) - I_{n-1, n'-1}^2(z)], \quad (3.99)$$

причем

$$a = \frac{k_0^2}{4\gamma} = \frac{H_0}{2H}, \quad \eta = \frac{n' + a}{n + a}, \quad z = (n + a)x^2 \sin^2 \theta.$$

Это выражение для функции  $f(n, a)$  не содержит расходимостей и является конечным во всей области изменения энергии и внешнего поля.

Далее необходимо иметь в виду, что случай основного состояния ( $n = 0$ ) является особым, поскольку это состояние является невырожденным: спин электрона строго направлен антипараллельно полю  $H$  ( $\zeta = -1$ ). Поэтому разделение энергии на две части, как это было нами предпринято в соответствии с (3.97), не представляется возможным: для этого состояния имеет смысл рассматривать полную поправку к массе  $\Delta m$  ( $n = 0$ ). Однако на этом вопросе мы специально останавливаться не будем.

Подчеркнем здесь, что выражение (3.99) дает полное описание аномального магнитного момента для любых значений энергии электрона. Далее рассмотрим частные случаи задачи.

### *Случай слабого магнитного поля $H \ll H_0$*

Обратимся теперь непосредственно к аномальному магнитному моменту, и прежде всего рассмотрим случай слабого магнитного поля  $H \ll H_0$ , когда параметр  $a = H_0/2H \gg 1$ . В этом случае можно считать, что и  $(n + a) \gg 1$ , в силу чего возможно разложение по величине  $(n + a)^{-1}$ . В результате разложения и интегрирования получаем

$$f(n, a) = 1 - \frac{7}{3a^2} \left( \ln a - \frac{576 \ln 2 - 83}{420} \right), \quad (3.100)$$

и, таким образом, в случае слабого магнитного поля  $H \ll H_0$  аномальный магнитный момент электрона имеет поправки к швингеровскому значению, зависящие от напряженности поля

$$\mu = -\mu_0(1 + a_e), \quad a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ 1 + \frac{28}{3} \left( \frac{H}{H_0} \right)^2 \ln \frac{H}{H_0} + \dots \right]. \quad (3.101)$$

Таким образом, в случае слабого поля поправки к швингеровскому значению АММ имеют квадратично-логарифмический характер и не зависят от энергии электрона. Но даже и в этом наиболее простом случае проявляется динамическая природа АММ.

Однако это оказывается справедливым только для не слишком возбужденных квантовых состояний, когда энергетическое квантовое число  $n \ll a = H_0/2H$ . Если же поле остается слабым ( $a \gg 1$ ), но электрон релятивистский,  $n/a = E/mc^2 \gg 1$ , то поведение аномального магнитного момента резко меняется.

### Случай больших квантовых чисел

Вернемся к формуле (3.99) и проанализируем ее в предположении, что  $a \gg 1$  и  $n \gg 1$ . Основной вклад в этом случае будут давать переходы на возбужденные промежуточные уровни  $n' \gg 1$ . Поэтому от суммирования по  $n'$  можно перейти к интегрированию, выбирая переменную интегрирования в виде  $u = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})/\sqrt{n'}$ . При этом для функций Лагерра  $I_{n,n'}(z)$  следует применить аппроксимацию с помощью функций Макдональда  $K_{1/3}$  и  $K_{2/3}$ . Тогда  $\text{Ref}(n, a)$  можно представить в виде [2]

$$\text{Ref}(n, a) = 2 \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^3} \int_0^\infty \sin(t + \chi^2 t^3/3u^2) dt, \quad (3.102)$$

где  $\chi^2 = -\frac{e^2}{m^2 c^2} (F_{\mu\nu} p^\nu)^2 = \frac{1}{4} \frac{n}{a^2} = \left( \frac{E}{mc^2} \frac{H}{H_0} \right)^2$  — известный инвариантный параметр.

Дальнейшее интегрирование в точном виде затруднительно, однако при  $\chi \ll 1$  и  $\chi \gg 1$  интегралы можно взять приближенно [2]. Тогда мы получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } \chi \ll 1 \quad f(n, a) &= 1 - 12\chi^2 \left( \ln \frac{1}{\chi} + C + \frac{1}{2} \ln 3 - 37/12 \right), \\ \text{при } \chi \gg 1 \quad f(n, a) &= \frac{\Gamma(1/3)}{9\sqrt{3}(3\chi)^{2/3}} + O(\chi^{-4/3}) \end{aligned} \quad (3.103)$$

( $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера).

Таким образом, в области  $\chi \ll 1$  (квазиквантовая область) поправки к швингеровскому значению АММ по-прежнему малы, однако если инвариантный параметр  $\chi \gg 1$ , то возникает совершенно иное поведение АММ: его величина резко убывает с ростом поля или с ростом энергии электрона и радикально отличается от швингеровского значения  $\alpha/2\pi$  (ультраквантовый случай) [2; 18].

Характерно, что к значениям АММ (3.103) приводит также модель скрещенного поля [18], однако все эти результаты оказываются справедливыми только в условиях больших квантовых чисел  $n \gg 1$ , когда энергетический спектр электрона имеет квазинепрерывный характер. Если же магнитное поле становится "квантовым", или, другими словами, если проявляется дискретность энергетического спектра, случай требует особого рассмотрения. В скрещенном магнитном поле подобная особенность не возникает, ибо энергетический спектр электрона в таком поле всегда непрерывен.

Совершенно новая ситуация с полевыми добавками к аномальному магнитному моменту электрона проявляется в случае, если частица находится в сверхсильном магнитном поле  $H \gg H_0$ .

Рассмотрим сейчас этот случай, поскольку он представляет особый интерес.

#### *Случай экстремально сильного магнитного поля*

Вернемся к выражению (3.93). Путем замены переменной  $x \rightarrow \frac{x}{\sin^2 \theta}$  и точного интегрирования приведем его к виду

$$f(n, a) = \frac{a \ln a}{n + a} - 8a \int_0^\infty \sum_{n'=0}^\infty \frac{x^2(1 + \eta) - (1 - \eta)^2}{x\sqrt{s}} \times \\ \times \{ I_{n, n'}^2[(n + a)x^2] - I_{n-1, n'-1}^2[(n + a)x^2] \} \Phi(x, \eta) dx, \\ \eta = \frac{n' + a}{n + a},$$

причем  $s = |[(x - \sqrt{\eta})^2 - 1][(x + \sqrt{\eta})^2 - 1]|$ , а разрывная функция  $\Phi$  равна

$$\Phi(x, \eta) = \begin{cases} \arctg[\sqrt{s}/[(x + \sqrt{\eta})^2 - 1]] & \text{для } |\sqrt{\eta} - 1| \leq x \leq |\sqrt{\eta} + 1|, \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + \eta - 1 + \sqrt{\eta}}{2x\sqrt{\eta}} \right| & \text{для прочих } x. \end{cases} \quad (3.104)$$

В случае асимптотики при  $a \rightarrow 0$  из всей суммы остается лишь один член  $n' = 0$  (эффект локализации функции Грина), интегрирование которого дает

$$f(1, a) = -2a(\ln a - 1,08), \quad f(n, a) = \frac{2a \ln a}{n}, \quad a_e = \frac{\alpha}{2\pi} f. \quad (3.105)$$

Таким образом, в пределе  $H \gg H_0$  реальный вклад в АММ электрона вносят промежуточные состояния с  $n' = 0$ . Это обстоятельство еще раз подчеркивает, что и реальные и виртуальные состояния в сверхсильном магнитном поле являются сильно локализованным в поперечном к магнитному полю направлении, причем размер области локализации в этом направлении ограничен площадью круга  $\pi R^2 \sim \pi(\hbar/mc)^2(H_0/H)$ . Как это следует из (3.105), функция  $f(n, a)$  при  $a \rightarrow 0$  отрицательна и, следовательно, величина АММ стремится к нулю с уменьшением  $a$  (с ростом поля) со стороны отрицательных значений. Но поскольку при  $a \gg 1$  функция  $f(n, a)$  положительна и, кроме того, она непрерывна во всей области изменения своего аргумента  $a$  (при фиксированном значении  $n$ ), в этой области имеется по крайней мере две характерные точки, в одной из которых  $f(n, a)$  обращается в нуль, а в другой достигает своего минимального значения, которое очевидно отрицательно. Ясно также, что обе точки находятся вблизи значений  $a \sim 1$ , т.е.  $H \sim H_0$ . На рис. 10 изображен график функции  $f$  для квантового состояния  $n = 1$ , рассчитанный по асимптотической формуле (3.105). Характерным здесь является обращение АММ в нуль вблизи  $H \sim H_0$  с последующим переходом в область отрицательных значений. Впервые это было показано автором совместно с В. Г. Багровым, В. А. Бордовицыным и О. Ф. Дорофеевым (1968), позже к этому же результату пришел В. Н. Байер.

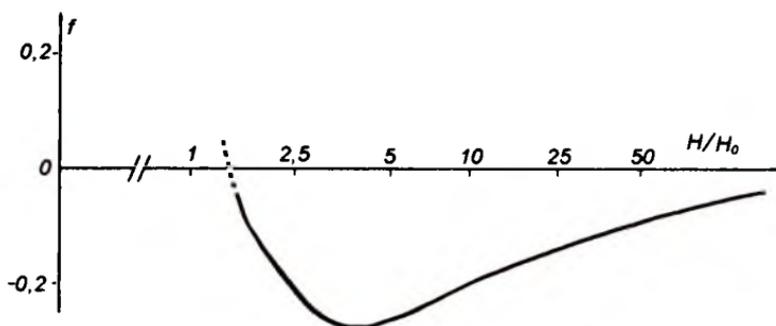


Рис. 10. Зависимость величины аномального магнитного момента электрона (АММ) от напряженности квантуемого внешнего магнитного поля. Рассмотрен случай экстремально сильного поля и слабовозбужденных состояний электрона ( $n = 1$ )

Заметим, что в случае экстремально сильного магнитного поля даже при условии слабо возбужденных состояний ( $n \sim 1$ ) задача становится существенно релятивистской, ибо энергетический спектр электрона в этих условиях имеет нелинейный характер:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2nH}{H_0}}, \quad \frac{nH}{H_0} \gg 1.$$

Таким образом, аномальный магнитный момент электрона проявляет ярко выраженную динамическую природу, являясь сложной нелинейной функцией энергии частицы и напряженности магнитного поля.

До недавнего времени нелинейные поправки к величине АММ электрона, а также его поведение в экстремально сильном магнитном поле представляли в основном академический интерес, поскольку поля, приближающихся к критическому значению  $H_0$ , не было известно. В настоящее время, как уже отмечалось, ситуация изменилась в связи с открытием сильных магнитных полей вблизи пульсаров, а также в связи с развитием техники ускорителей, позволяющей достичь высоких энергий для ускоряемых частиц.

Как это следует из (3.102), поведение АММ электрона зависит от инвариантного параметра  $\chi = \frac{E}{mc^2} \frac{H}{H_0}$ . Поэтому наблюдение динамической природы АММ возможно при условии  $\chi \geq 1$ , а это связано не только с экстремально сильными полями, но и с высокой энергией электрона.

В 1987 г. на ускорителе SPS (CERN) были выполнены эксперименты, в которых пучки электронов, ускоренных до энергии  $\sim 150$  ГэВ, направлялись с очень малым угловым разбросом вдоль оси кристалла германия, охлажденного до низких температур. В условиях сильных макроскопических полей, действующих вдоль оси кристалла, параметр  $\chi$  для таких электронов достигает порядка единицы. Это может привести к наблюдению ряда интересных квантовых эффектов, и в частности динамической природы АММ.

Представляет также интерес возможность наблюдения аномального магнитного момента электрона, в условиях сверхсильного магнитного поля пульсаров. При этом возможно проявление квантовых свойств поля, поскольку электроны в этих условиях находятся в слабозбужденном состоянии.

И в заключение общей проблемы, связанной с динамической природой АММ электрона, остановимся на попытке дать наглядную физическую интерпретацию этому явлению, исходя из полуклассической модели — взаимодействия электрона с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля.

Прежде всего исследуем вопрос о точном соотношении вкладов в АММ электрона, возникающих от переходов частицы в промежуточные состояния с положительными и отрицательными значениями энергии. С этой целью необходимо вернуться к исходной формуле (3.97) и произвести все расчеты, сохранив сумму по  $\epsilon = \pm 1$  с тем, чтобы разделить вклад позитронных и электронных промежуточных состояний. Тогда мы получаем, в частности, для случая слабого поля ( $a = H_0/2H \gg 1$ ), что аномальная часть магнитного момента  $\mu = -\mu_0(1 + a_e)$  имеет вид

$$a_e^3 = -\frac{1}{6} \frac{\alpha}{2\pi}, \quad a_e^n = \frac{7}{6} \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \text{для } n \ll a,$$

$$a_e^3 = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad a_e^n = \frac{1}{n} \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \text{для } a \ll n \ll a^3,$$

где  $a_e^3$  и  $a_e^n$  — вклад соответственно от электронных и позитронных состояний.

Обратим внимание на то, что только в квазиклассической области  $a \ll n \ll a^3$  вклад позитронных состояний подавлен как  $1/n$ , при  $n \ll a$  этот вклад имеет тот же порядок величины, что и для электронных промежуточных состояний (см. также [19]). Таким образом, учет зарядово-сопряженных промежуточных состояний электрона (позитронных состояний) необходим для понимания и объяснения его аномального магнитного момента.

Попытка полуклассического описания рассматриваемого нами аномального магнитного момента электрона восходит к работе Кобы (1949), которому удалось обобщить известный полуклассический метод Вельтона (см. [1]). Как известно, Вельтон дал физически наглядное объяснение лэмбовскому сдвигу уровней энергии водородного атома как результату взаимодействия релятивистского электрона с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Метод Вельтона основан на интуитивной модели воздействия вакуумных флуктуаций электромагнитного поля на траекторию электрона. При этом меняется характер локализации частицы в пространстве, флуктуации вакуума индуцируют “вакуумный радиус” электрона: частица совершает “броуновское движение” с эффективным смещением  $r_{\text{вак}} = \sqrt{\frac{\hbar}{mc} \frac{e^2}{mc^2}}$ . Эта нелокальность и выступает как причина возникновения дополнительного к кулоновскому вакуумного взаимодействия, приводящего к лэмбовскому сдвигу. Развивая метод Вельтона, Коба предложил новую интуитивную модель спина электрона-волчка, основанную на особом характере движения дираковского электрона — шредингеровском дрожании (Zitterbewegung).

В соответствии с общими правилами разделения оператора на четную и нечетную части (см. § 2.2) найдем для оператора скорости дираковской частицы  $\dot{x}_j = \alpha_j$  следующее выражение:

$$\dot{x}_j = c[\alpha_j] + c\{\alpha_j\},$$

в котором

$$[\alpha_j] = \frac{cP_j}{E}, \quad \{\alpha_j\} = \{\alpha_j(0)\}e^{-2iEt/\hbar},$$

поэтому получаем

$$[x_j] = \frac{c^2 p_j t}{E}, \quad \{x_j\} = \frac{i\hbar}{2E} \{\alpha_j(0)\} e^{-2iEt/\hbar}. \quad (3.106)$$

Четная часть оператора координат имеет, как это следует из (3.106), классический характер. Это соответствует “макродвижению” частицы. Нечетная часть оператора быстро осциллирует с частотой шредингеровского дрожания  $\Omega = 2E/\hbar = 2mc^2/\hbar$  (в нерелятивистском приближении) — это можно назвать микродвижением, обусловленным физической интерференцией зарядово-сопряженных состояний.

Как отмечалось Шредингером, Zitterbewegung дираковского электрона можно рассматривать как причину возникновения собственного момента количества движения (или спина). Для этого необходимо представить себе, что колебательное движение (3.106) имеет кругообразный характер, благодаря чему траектория электрона приобретает форму винтовой линии (см. рис. 2).

Поскольку  $|\{x_j\}| = \frac{c\hbar}{2E} \sim \frac{\hbar}{2mc}$ , согласно модели вращающегося волчка его магнитный момент оказывается равным магнетону Бора:  $\mu = \frac{e}{mc} L^{\text{спин}} = -\mu_0$ , ибо  $|L^{\text{спин}}| = \hbar/2$ . Таким образом нечетную часть оператора координаты можно связать непосредственно со спиновым магнитным моментом, если его трактовать как момент кругового тока, ассоциированный с внутренними степенями свободы электрона. Разумеется, что подобные рассуждения следует рассматривать как не более чем интуитивную модель спина.

Напомним здесь, что в модели Вельтона предполагалось, что электромагнитный вакуум действует на макроскопическую траекторию электрона (на четную часть координаты). При этом электрон совершает броуновское движение с отличным от нуля квадратом смещения. Это является причиной возникновения эффективного вакуумного радиуса электрона, и нелокальность взаимодействия “размазанного” электрона с кулоновским полем ядра приводит к сдвигу уровня энергии электрона в атоме.

Идея обобщения метода Вельтона состоит в том, что антикоммутирующая с гамильтонианом нечетная часть координаты также подвергается воздействию вакуумных флуктуаций. Это теперь проявляется как воздействие электромагнитного вакуума на микродвижение частицы, непосредственно связанное со спином.

Итак, рассмотрим влияние вакуумных флуктуаций на траекторию частицы — на четную и нечетную части оператора координаты (3.106). Пусть электрон испытывает воздействие электрического и магнитного полей вакуума:  $\mathbf{E}^{\text{вак}} = -\dot{\mathbf{A}}/c$ ,  $\mathbf{H}^{\text{вак}} = \text{rot}\mathbf{A}$ . Тогда в представлении Гейзенберга можно получить, что

$$\frac{d}{dt}[x_j] = -eA_j/mc, \quad \frac{d}{dt}\{x_j\} + \frac{2imc^2}{\hbar}\{x_j\} = \frac{eA_j}{mc}.$$

Разлагая далее электрическое поле вакуумного состояния  $\mathbf{E}^{\text{вак}}$  в ряд Фурье:  $\mathbf{E}^{\text{вак}} = \sum_{\omega} \mathbf{E}^B(\omega)e^{i\omega t}$ , получим

$$[x_j] = -\frac{e}{m} \sum_{\omega} \frac{E_j^B(\omega)e^{i\omega t}}{\omega^2}, \quad \{x_j\} = \frac{\hbar}{2mc} e^{-i\Omega t} + \frac{e}{m} \sum_{\omega} \frac{E_j^B(\omega)e^{i\omega t}}{\omega(\omega + \Omega)},$$

(3.107)

где частота шредингеровского дрожания  $\Omega = 2mc^2/\hbar$ , а  $\omega = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ . Вводя теперь фурье-разложение этих величин

$$[x_j] = \sum_{\omega} [x_j(\omega)] e^{i\omega t}, \quad \{x_j\} = \sum_{\omega} \{x_j(\omega)\} e^{i\omega t} + \frac{\hbar}{2mc} e^{-i\Omega t}, \quad (3.108)$$

для четной и нечетной частей амплитуд Фурье получим

$$[x_j(\omega)] = -\frac{e}{m} \frac{E_j^B(\omega)}{\omega^2}, \quad \{x_j(\omega)\} = \frac{e}{m} \frac{E_j^B(\omega)}{\omega(\Omega + \omega)}.$$

Замечая далее, что среднее по времени для четной и нечетной части (3.108) обращается в нуль:  $\overline{[x_j]^4} = \overline{\{x_j\}^4} = 0$ , рассмотрим квадратичную флуктуацию оператора координаты в общем виде:

$$\{\overline{\Delta x_j^2}\}^4 = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \left( |[x_j(\omega)]|^2 + |\{x_j(\omega)\}|^2 + 2 |[x_j^*(\omega)] \{x_j(\omega)\}| \right).$$

Первые два члена соответствуют четной части квадратичной флуктуации, и их следует отнести к лэмбовскому сдвигу уровней: влияние флуктуаций вакуума на макроскопическое движение электрона и вклад от интерференции зарядово-сопряженных состояний.

Найдем, однако, антикоммутирующую (нечетную) часть квадратичной флуктуации оператора координаты

$$\{\overline{\Delta x_j^2}\}^4 = \sum_{\omega} |[x_j^*(\omega)] \{x_j(\omega)\}| \quad (3.109)$$

и сопоставим ее с влиянием флуктуаций электромагнитного вакуума на “микродвижение” частицы. Тогда для “микрокоординаты”  $\{x_j\}$  получим

$$\begin{aligned} \{x_j\} &= \left[ \left( \frac{\hbar}{2mc} \right)^2 + \{\overline{\Delta x_j^2}\}^4 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{\hbar}{2mc} \left[ 1 + \frac{4m^2 c^2}{\hbar^2} \sum_{\omega} [x_j^*(\omega)] \{x_j(\omega)\} \right]^{1/2} = \frac{\hbar}{2mc} (1 + \delta), \end{aligned} \quad (3.110)$$

где

$$\delta = \frac{2e^2 c^2}{\hbar^2} \sum_{\omega} \frac{(E_j^B(\omega))^2}{\omega^3(\omega + \Omega)}.$$

И теперь приравняем энергию электромагнитного поля, сосредоточенного в объеме  $L^3$ ,

$$\varepsilon = \frac{L^3}{8\pi} \sum_{\omega} (\mathbf{H}^2(\omega) + \mathbf{E}^2(\omega))$$

к энергии вакуума (нулевых колебаний)

$$\varepsilon_0 = 2 \sum_{\omega} \hbar \omega / 2.$$

Коэффициент 2 перед знаком суммы учитывает, что каждой гармонике соответствуют два различных состояния поляризации. Переходя далее от суммирования к интегрированию:

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\omega} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int k^2 dk d\Omega = \int \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3},$$

получим

$$\sum (\mathbf{E}^B(\omega))^2 \rightarrow \int \frac{4\hbar \omega^3 d\omega}{\pi c^3}.$$

И тогда

$$\delta = \frac{8e^2}{3\pi\hbar c} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega + \Omega},$$

причем коэффициент 1/3 здесь введен из соображений полной изотропности вакуумных флуктуаций:  $E_j^2(\omega) = \frac{1}{3} \mathbf{E}^2(\omega)$ . Интегрируя это выражение в предположении, что  $\omega_{\max} = mc^2/\hbar = \Omega/2$ , получим

$$\delta = \frac{8}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \ln \frac{3}{2} \cong \frac{\alpha}{\pi}, \quad (3.111)$$

и тогда поправка к аномальному магнитному моменту электрона, обусловленная влиянием квантовых флуктуаций на микродвижение частицы, имеет вид

$$\mu = -\mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{\pi} \right) = -\mu_0 (1 + \delta).$$

Однако здесь пока не исчерпано влияние квантовых флуктуаций вакуума на магнитный момент электрона. Необходимо учесть кроме этого прямое воздействие вакуума на магнитный диполь. Поскольку магнитный диполь в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  обладает энергией  $U = -\mu\mathbf{H}$ , взаимодействие его с флуктуациями вакуума вызывает дрожание спинового магнитного момента — повороты на угол  $\Delta\theta$ . Это вызывает своеобразную редукцию величины  $\mu$ , и эффективный момент становится равным

$$\mu_{\text{эфф}} = \mu \cos \theta_{\text{эфф}}.$$

Рассмотрим нерелятивистское уравнение движения Гейзенберга для спинового магнитного момента  $\mu = -\mu_0 \sigma$

$$\frac{d}{dt} \sigma = -\frac{e_0}{mc} [\sigma \mathbf{H}]$$

и предположим, что на спин действует магнитное поле вакуумных флуктуаций  $\mathbf{H}^{\text{вак}} = \sum_{\omega} \mathbf{H}^B(\omega) \cos \omega t$ . Другими словами, рассмотрим влияние вакуумных флуктуаций электромагнитного поля на прецессию спинового магнитного момента. При этом возникает флуктуирующая добавка

$$\Delta \sigma = -\frac{e_0}{mc} \sum_{\omega} \frac{[\sigma \mathbf{H}^B(\omega)]}{\omega} \sin \omega t,$$

и тогда

$$\frac{\overline{\Delta \sigma^2}^t}{\sigma^2} = \overline{\Delta \theta^2}^t = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{mc} \right)^2 \sum_{\omega} \frac{(\mathbf{H}^B(\omega))^2}{\omega^2}.$$

Поскольку

$$\sum_{\omega} (\mathbf{H}^B(\omega))^2 \rightarrow \int \frac{4\hbar}{\pi} \frac{\omega^3 d\omega}{c^3},$$

получим

$$\overline{\Delta \theta^2}^t = \left( \frac{e}{mc} \right)^2 \frac{2}{\pi} \frac{\hbar}{c^3} \int_0^{\omega_{\text{max}}} \omega d\omega.$$

В этом расходящемся интеграле можно выделить конечную (наблюдаемую) часть, если его ограничить подобно предыдущему случаю частотой  $\omega_{\text{max}} = mc^2/\hbar$ , т. е. частотой, соответствующей энергии покоя электрона. Это вполне очевидное предположение, ибо весь расчет сделан в нерелятивистском приближении. Таким образом, мы получаем, что под влиянием вакуумных флуктуаций происходит броуновское движение прецессирующего магнитного момента, которое индуцирует квадратичную флуктуацию угла  $\theta$ , характеризующую его величину:

$$\overline{\Delta \theta^2}^t = \frac{\alpha}{\pi}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

Возвращаясь далее к потенциальной энергии магнитного диполя

$$\mu_0(\sigma \mathbf{H}) = \mu_0 |\sigma| |\mathbf{H}| \cos \theta,$$

заметим, что с учетом вакуумных флуктуаций угла

$$\cos \theta \rightarrow \cos \theta_{\text{эфф}} = \cos(\theta + \Delta \theta) = \left( 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \cos \theta.$$

А поэтому эффективная величина магнитного момента уменьшается по закону

$$\mu = -\mu_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) = -\mu_0 (1 + \delta_1). \quad (3.112)$$

Тогда, учитывая также (3.111), получаем, что величина полной поправки совпадает со швингеровским значением аномального магнитного момента

$$\mu = -\mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (3.113)$$

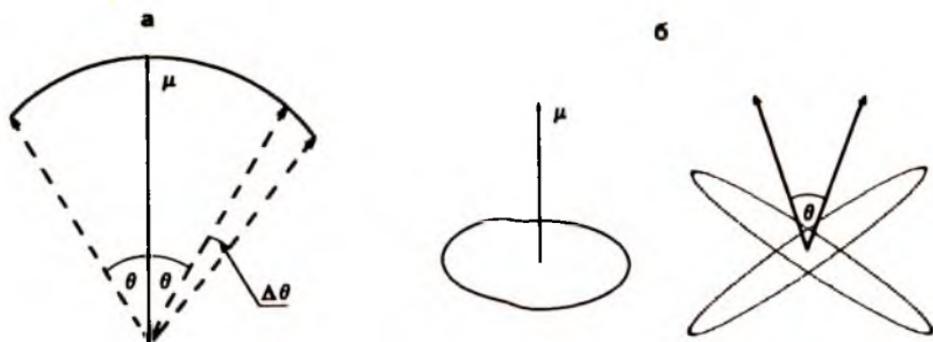


Рис. 11. Возникновение АММ электрона: воздействие флуктуаций вакуума на магнитный момент (а) и на траекторию частицы (б)

Воздействию вакуумных флуктуаций на магнитный спиновый момент электрона можно дать наглядную интерпретацию (рис. 11). Рассмотрим эквивалентный магнитному моменту диполь (1). Если электрон взаимодействует с вакуумными флуктуациями, то плоскость тока качается так, что эквивалентный диполь отклоняется со средним квадратом отклонения, отличным от нуля (2). Это приводит к эффективному уменьшению момента — поправке  $\delta_1$  (3.112). Но в то же самое время кольцо вибрирует в своей плоскости, поскольку взаимодействие с вакуумом вызывает флуктуации центра кольца. В результате этого появляется увеличение диаметра кругового тока и увеличение эффективного магнитного момента — поправка  $\delta$  (3.111). Этот эффект превышает предыдущую поправку  $\delta_1$ , и в целом получается положительная поправка Швингера (3).

Несмотря на полученный здесь правильный результат, рассмотренный метод Вельтона–Кобы представляет интерес лишь с точки зрения интерпретации чисто качественного характера. Этот метод не может никоим образом претендовать на серьезные количественные результаты. Вместе с тем необходимо отметить, что интерес к модели “дрожания” (Zitterbewegung) не исчезает и в настоящее время наблюдается новое пробуждение внимания к этому любопытному явлению.

## ПРОБЛЕМА ИЗМЕРЕНИЯ СПИНА ЭЛЕКТРОНА

## §4.1. Классический эксперимент Штерна и Герлаха.

## Резонансный метод Раби

Как известно, в пионерских опытах Штерна и Герлаха (1920) изучалось поведение пучков атомов водорода, лития и серебра при их движении в неоднородном магнитном поле постоянного направления  $\mathbf{H} = \beta(\mathbf{r})\mathbf{H}_0$  (рис. 12). Вследствие того что магнитное поле обладало большой неоднородностью, на магнитный диполь атома действовала сила в направлении поля (вдоль оси  $z$ ). Величина этой силы пропорциональна градиенту поля

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}U = \frac{\partial}{\partial z}\mu_z H_0 \lambda(\mathbf{r}) = -\mu_0 m H_0 \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

где  $\mu_z$  — проекция магнитного момента, а  $m$  — число, характеризующее ее квантование. Если частица проходит расстояние  $L = vt$ , то ее смещение по оси  $z$  будет равно

$$\delta z = \left(\frac{L}{v}\right)^2 \frac{\mu_0 H_0}{M} \frac{\partial \lambda}{\partial z} m,$$

где  $M$  — масса атома, а  $v$  — его скорость. Таким образом, в неоднородном магнитном поле пучок атомов претерпевает пространственное разделение, причем число компонент расщепления определяется квантованием проекции магнитного момента на направление поля (квантовое число  $m$ ).

В опытах Штерна и Герлаха использовались пучки атомов в  $S$ -состоянии, и поэтому наблюдавшееся в эксперименте расщепление пучка на две компоненты можно было интерпретировать только как результат взаимодействия спинового магнитного момента электрона с магнитным полем, ибо орбитальный момент в  $S$ -состоянии равен нулю. Результаты опытов показали, что величина наблюдаемого магнитного момента равна магнетону Бора.

Рассмотрим более детально механизм квантового измерения в опытах Штерна и Герлаха. Как уже отмечалось, сила со стороны неоднородного магнитного поля придает частице импульс “вверх-вниз”

в зависимости от ориентации ее спина. Поэтому величину проекции спигового магнитного момента можно определить по измерению координаты  $z$ , ибо положение атома  $z$  является вместе с тем координатой аппаратуры — детектора. Измерительная аппаратура в этом опыте состоит из двух элементов: неоднородного магнитного поля, которое производит декомпозицию пучка атомов, приготавливая его к измерению, и детектора, на экране которого фиксируют отклонение пучка после прохождения им неоднородного магнитного поля (см. рис. 12).

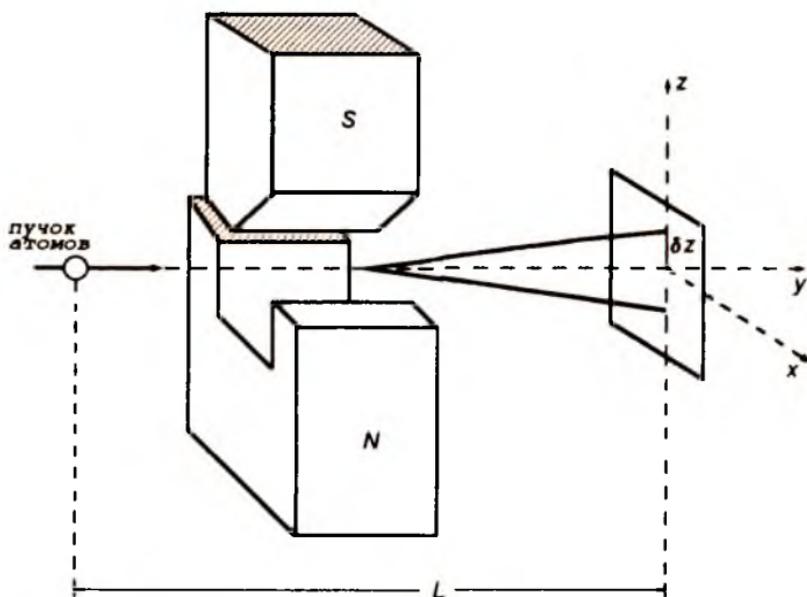


Рис. 12. Схема опытов Штерна и Герлаха

До прохождения атомом неоднородного поля (до измерения) волновая функция  $\Psi(x, t)$  характеризовала чистое состояние: объект был полностью отделен от измерительного прибора. Взаимодействие с прибором описать на языке волновой функции нельзя, ибо здесь может иметь место неконтролируемое возмущение эволюции системы при ее взаимодействии с прибором. Это “некаузальное” изменение (переход системы в смешанное состояние) представляет собой редукцию волнового пакета: при осуществлении измерения система переходит в смешанное состояние. Таким образом, неоднородное магнитное поле разрушает исходное состояние, происходит так называемый “коллапс” волновой функции (рис. 13). Очень важно заметить, что в данном подходе к измерению — в неоднородном магнитном поле происходит расщепление пучка и по спину, и по координате, измерение спина оказывается в этом методе органически связанным с разделением пучка частиц в пространстве — спин измеряется по координатному расщеплению.

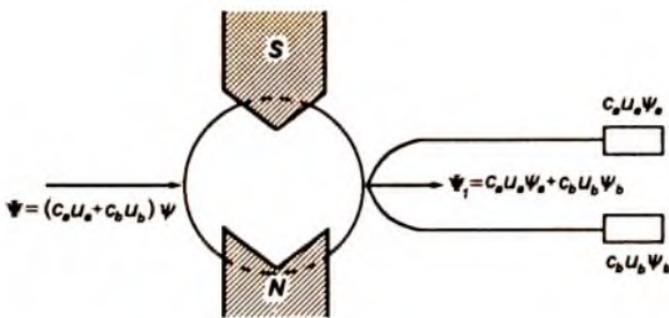


Рис. 13. Редукция волнового пакета в опытах Штерна и Герлаха

Вместе с тем с точки зрения поставленной задачи коллапс координатной функции не является необходимым. Мало того, он влечет за собой сильные ограничения самой возможности измерения спина. С точки зрения свойств уравнения Паули

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = [\mathcal{H}^0 + \mu_0(\sigma \mathbf{H})] \Psi, \quad \mathcal{H}^0 = \frac{p^2}{2m} + e\varphi, \quad (4.1)$$

в опытах Штерна и Герлаха коллапс координатной функции при измерении

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

неизбежен, поскольку в случае неоднородного магнитного поля отсутствует возможность разделения переменных пространства и спина. В процессе этапа приготовления пучка исходное чистое состояние разрушается.

Коллапс волновой функции отражается не только на точности, но и на принципиальной возможности измерения спина. Это обстоятельство препятствует, в частности, измерению спина свободного (не связанного в атоме) электрона методом магнитных измерений (Бор). Проиллюстрируем это, исходя из основных принципов квантовой механики. Допустим, что измеряется величина магнитного поля, создаваемого спиновым магнитным моментом частицы. Измерение производится в точке  $A$  (рис. 14). Это поле является полем диполя и имеет вид  $H^s = \mu/r^3$ . Очевидно, что этому измерению будет соответствовать поле, создаваемое орбитальным движением заряда:

$$H^{\text{орб}} = \frac{ev}{cr^2} = \frac{ep}{mcr^2} \cong \frac{e\hbar}{(mcr^2\delta r)}$$

(здесь импульс  $p$  заменен его минимальным значением, исходя из соотношения неопределенностей  $p\delta r \sim \hbar$ ). Очевидно далее, что для реализации опыта необходимо, чтобы  $H^s \gg H^{\text{орб}}$ , или  $\mu/r^3 \gg e\hbar/mcr^2\delta r$ ,

откуда  $\delta r \gg e\hbar r/mc\mu$ . Другими словами, чтобы можно было наблюдать поле спинового магнитного момента электрона, необходимо, чтобы оно было больше неопределенности поля, связанного с орбитальным движением частицы. Но тогда оказывается, что  $\delta r > e\hbar r/mc\mu$ , и это противоречит постановке опыта, ибо при подстановке  $\mu = \mu_0$  отсюда следует, что  $\delta r > r$ , т. е. область локализации электрона не может быть малой в то время, как для определения поля  $H^s$  необходимо, чтобы  $\delta r \ll r$ , т. е. электрон был бы локализован.

Очевидно, что все эти противоречия снимаются, если электрон не свободен, а связан в атоме. В этом случае в формуле для  $\delta r$  необходимо провести замену  $m \rightarrow M$ , где  $M$  — масса атома, и тогда в двух неравенствах  $\delta r \ll r$ ,  $\delta r > r \frac{m}{M}$  противоречия нет. Атом за счет большой балластной массы ядра резко снижает степень влияния орбитального движения на измерение спина. Анализ показал, что вообще измерение спина электрона, основанное на его представлении как о магните, для свободной частицы представляет собой особую задачу.

Положение, однако, меняется, если в эксперименте участвуют пучки поляризованных электронов, т. е. пучки частиц, спины которых имеют преимущественное направление ориентации. Так, в частности, наблюдение поляризации свободных электронных пучков может быть реализовано в экспериментах по “двойному рассеянию”. Как это было установлено Моттом [20], при рассеянии поляризованного пучка электронов он может частично поляризоваться, приобретая поперечную поляризацию в направлении, перпендикулярном к плоскости рассеяния.

Если далее поляризованный пучок электронов претерпевает вторичное рассеяние, то можно наблюдать угловую асимметрию рассеяния: частицы как бы “запоминают” историю своего первичного рассеяния. Наблюдение угловой асимметрии в рассеянии открывает возможность суждения о поляризации пучка и ее измерения (детектор Мотта).

Совершенно другие методы измерения спина, отличающиеся высокой прецизионностью, открываются, однако, на ином пути. Вернемся к уравнению Паули. Из вида этого уравнения (4.1) с достаточной очевидностью следует, что оно допускает разделение переменных пространства и спина, если внешнее магнитное поле является однородным в пространстве, хотя во времени оно может изменяться по произвольно-

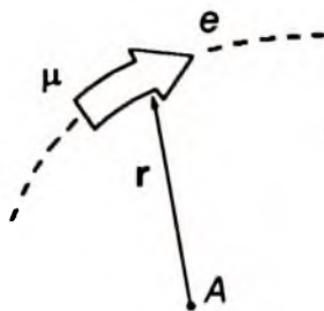


Рис. 14. Измерение спинового магнитного момента. В точке  $A$  изменяется одновременно магнитное поле электрона-диполя, а также поле, создаваемое орбитальным движением электрона-заряда

му закону. Тогда решение уравнения Паули (4.1) можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где  $F(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера, а спиновая функция подчиняется не зависящему от координат уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = -\mu_0(\sigma \mathbf{H}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

причем (и это очень существенно) спиновая часть функции не зависит от координат. Это обстоятельство открывает новые возможности в решении общей задачи измерения спина: метод резонансного поглощения энергии внешнего высокочастотного поля, сопровождающегося квантовыми переходами с изменением ориентации спина частицы (Раби, 1938 — исследование магнитных моментов ядер, атомов и молекул — ядерный магнитный резонанс, или ЯМР метод; Е. К. Завойский, 1944 — электронный парамагнитный резонанс, или ЭПР метод).

Рассмотрим сейчас для наибольшей наглядности нерелятивистское уравнение (4.3) в предположении, что внешнее магнитное поле задано в виде

$$\mathbf{H} = (H_1 \cos \omega_0 t, H_1 \sin \omega_0 t, H_0), \quad H_1 \ll H_0,$$

т. е. сильное постоянное поле, наложенное по оси  $z$  ( $H_0$ ), и тангенциальное высокочастотное поле с напряженностью  $H_1 \ll H_0$  достаточно слабое.

В этом случае матричное уравнение (4.3), записанное для произвольного магнитного момента  $\mu$ , представляет собой систему двух уравнений

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{f} + \mu H_0 f &= -\mu H_1 e^{-i\omega_0 t} g, \\ i\hbar \dot{g} - \mu H_0 g &= -\mu H_1 e^{i\omega_0 t} f. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Решение этой системы в предположении, что в начальный момент времени спин был ориентирован по оси  $z$ , т. е.  $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , имеет вид

$$\Psi(t) = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & (\Omega \cos \Omega t + i\gamma_0 \sin \Omega t) \\ e^{i\omega_0 t/2} & i\gamma_1 \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

где

$$\Omega = \sqrt{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}, \quad \gamma_0 = \frac{(\omega_0 - \omega)}{2}, \quad \gamma_1 = -\frac{\omega H_1}{2H_0}, \quad \omega = -\frac{2\mu H_0}{\hbar}.$$

С помощью этих точных решений можно получить закон эволюции спина под действием внешнего ВЧ поля:

$$\langle \sigma_z \rangle = \langle ff^* - gg^* \rangle = \frac{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 \cos 2\Omega t}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}, \quad (4.5)$$

а для вероятности перехода с обращением спина (спин-флип) получим

$$P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = gg^* = \frac{\left(\frac{\omega H_1}{H}\right)^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\omega H_1}{H_0} t}\right)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega H_1}{H_0}\right)^2}, \quad (4.6)$$

откуда следует, что резонансное значение этой величины реализуется, если  $\omega_0 = \omega$ . Для электронов это значение  $\omega_0 = e_0 H / mc$  совпадает с циклотронной частотой вращения электрона в магнитном поле. Резонансная частота  $\omega_0 = -2\mu H_0 / \hbar$  определяется величиной магнитного момента частицы, и это открывает возможность его прецизионного измерения. Резонанс  $\omega_0 = \omega$ , соответствующий процессу переориентации спина частицы, наблюдается по спаданию интенсивности пучка на детекторе с последующим его восстановлением.

С помощью резонансного метода Раби были проведены фундаментальные исследования по измерению магнитных моментов и спинов ядер, магнитных моментов атомов, расщепления сверхтонкой структуры, изучался магнитный момент протона. Исследования по сверхтонкому расщеплению уровней энергии водорода привели к открытию аномального магнитного момента электрона.

Резонансный метод измерения спина лежит в основе ЯМР — ядерного магнитного резонанса — поглощения электромагнитной энергии поля в веществе, обусловленного магнетизмом ядер. Метод ЯМР обладает высокой степенью точности измерения, и его применение дало возможность развития новой прецизионной техники, широко используемой в физике.

Близко к ЯМР примыкает электронный парамагнитный резонанс (ЭПР), представляющий собой резонансное поглощение энергии радиочастотного поля в веществе, содержащем парамагнитные частицы, в частности частицы с чисто спиновым магнетизмом.

Не имея здесь возможности сколь-нибудь детально углубляться в теорию методов ЯМР и ЭПР, заметим только, что с точки зрения теории квантовых измерений в резонансном методе исследования воздействие измерительного прибора сказывается непосредственно на спиновую часть волновой функции и измерение спина тем самым отделяется от орбитального движения.

Резонансный метод исследования спина тем самым явился существенным шагом вперед по сравнению с экспериментами Штерна и Герлаха — этот метод открыл принципиальную возможность наблюдения спина свободного электрона — не связанного в атоме.

## §4.2. Прецизионное измерение

спинового магнитного момента электрона и позитрона

(Вашингтонский эксперимент)

Спин-резонансный метод исследования получил дальнейшее развитие в работах группы ученых Вашингтонского университета под руководством Демельта.

В связи с разработкой новых экспериментальных методов особенно важным и интересным оказался вопрос о прямом измерении аномального магнитного момента электрона, позитрона и других частиц. Как уже отмечалось, в соответствии с уравнением Баргманна-Мишеля-Телегди (БМТ) при движении электрона в плоскости его орбиты вращения в однородном магнитном поле закон эволюции спина имеет вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{ec}{E}(1 + \gamma a_e)[\zeta \mathbf{H}] = [\omega_s \zeta], \quad \zeta = \langle \mathbf{O} \rangle,$$

$$\beta \perp \mathbf{H}, \quad a_e = \frac{(g-2)}{2}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \omega_s = \frac{(1 + \gamma a_e)e_0 c \mathbf{H}}{E}. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что частота углового вращения спина в лабораторной системе координат  $\omega_s = |\omega_s| = (a_e + 1/\gamma)\omega_0$  несколько превышает частоту вращения электрона  $\omega_c = e_0 c \mathbf{H}/E$ , причем разность этих частот не зависит от скорости частицы:

$$\omega_s - \omega_c = a_e \omega_0 = \omega_a = \frac{(g-2)\omega_0}{2}, \quad \omega_0 = \frac{e_0 H}{mc}.$$

Рассмотрим теперь эволюцию продольной поляризации — проекции спина на вектор скорости частицы  $\beta = c\langle \mathbf{P} \rangle/E$ . Принимая во внимание, что  $\dot{\beta} = [\omega_c \beta]$ , а также (4.7), находим

$$\frac{d}{dt}(\zeta \beta) = \beta \dot{\zeta} + \zeta \dot{\beta} = [\zeta \omega_a] \beta.$$

Таким образом, продольная компонента спина осциллирует с частотой  $\omega_a = (g-2)\omega_0/2$  в магнитном поле, совершая прецессию вокруг вектора скорости частицы. Это обстоятельство открывает новую принципиальную возможность прямого исследования  $g$ -фактора свободных частиц. Наблюдая за прецессией продольной компоненты спина, можно непосредственно измерить величину аномального магнитного момента электрона.

Возможны два подхода в эксперименте, связанных с проблемой измерения спина. Один из них — уже упоминавшийся спин-резонансный метод Раби, с помощью которого можно исследовать частоту переходов между энергетическими уровнями частицы в магнитном поле (по

аналогии с эффектом Зеемана), а другой — так называемый прецессионный метод — заключается в наблюдении изменения продольной поляризации первичного пучка поляризованных частиц.

Остановимся прежде всего на развитии спин-резонансного метода Раби, с помощью которого удалось провести прецизионные измерения величины гиромагнитного  $g$ -фактора свободного электрона, т.е. решить задачу, недоступную ранее для метода Штерна-Герлаха, в котором измерение спина свободного (не связанного в атоме) электрона встречало принципиальные трудности.

Большой интерес к прецизионным измерениям  $g$ -фактора электрона был вызван ярким успехом теории, поскольку с помощью методов квантовой электродинамики (КЭД) удалось с очень высокой точностью рассчитать теоретическую величину аномалии гиромагнитного  $g$ -фактора электрона, т.е. величину  $a_e = (g - 2)/2$ .

В 1948 г. Швингер, разрабатывая теорию АММ, определил его величину в линейном по магнитному полю приближении в первом порядке теории возмущений (однопетлевое приближение):  $a_e = \alpha/2\pi$ . В настоящее время с помощью традиционных методов КЭД рассчитаны и высшие члены приближения по величине  $\alpha = e^2/\hbar c$ :

$$a_e = (g - 2)/2 = \sum_n a_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$$

до  $n = 3$  (трехпетлевое приближение), хотя есть и отдельные сообщения о величине вклада четвертого порядка ( $n = 4$ ). Получено

$$a_e = 0,5 \frac{\alpha}{\pi} - 0,328478445 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,1765(13) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - \dots,$$

причем предполагаемый вклад четвертого порядка  $(\alpha/\pi)^4 \sim 29 \cdot 10^{-12}$ . Задача вычисления аномального магнитного момента технически достаточно сложна — аналитически можно рассчитать только коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ . Кроме того, для сравнения теоретических формул с экспериментом необходимо знать возможно точное значение постоянной тонкой структуры. В последнее время такие данные о величине  $\alpha$  были получены с применением в технике измерения нестационарного эффекта Джозефсона, и теоретическое значение величины АММ электрона имеет вид

$$a_e^{\text{теор}} = 1159652133(22) \cdot 10^{-12}.$$

Интересно в связи с этим заметить, что в этом результате даже только в трехпетлевом приближении необходим анализ всех фейнмановских графов шестого порядка, число которых равно 72. Быстро нарастающая сложность вычислений, а также необходимость прецизионного измерения величины  $\alpha$  создают серьезные трудности в дальнейшем

увеличении точности расчета (вклад в четвертый порядок по  $\alpha$  — коэффициент  $a_4$  — дает 891 диаграмма Фейнмана).

Теоретические данные находятся в уверенном согласии с экспериментом, последние достижения которого (Демельт) приводят к значению\*

$$a_e^{\text{экс}} = 1159652200(40) \cdot 10^{-12}.$$

Это является убедительным доказательством достоверности предсказаний КЭД в высших порядках теории возмущений в области достаточно слабого магнитного поля и низких энергий электрона.

Вернемся, однако, к экспериментам по прецизионному измерению  $g$ -факторов свободных электронов и позитронов, и в связи с этим остановимся на непревзойденных на сегодня опытах, проведенных учеными группы спектроскопии Вашингтонского университета под руководством Демельта [21]. В этих опытах с беспрецедентной точностью были измерены магнитные моменты электрона и позитрона, причем опыты были проведены с многократным повторением измерения над индивидуальными частицами, не связанными в атоме (continuons — штернгерлах-эксперимент).

Спин-резонансный метод Раби, получивший развитие в работах группы ученых Вашингтонского университета, открыл возможность проведения “неразрушающего” эксперимента — без коллапса волновой функции. Во всех классических опытах Штерна и Герлаха, как уже отмечалось, спин частицы детектировался по классической траектории: для измерения спина использовалась траектория центра масс атома, причем  $\pm\mu_z$  измерялось по отклонению пучка (см. рис. 12). Здесь же измеряются частоты обращения частицы и прецессии спина в условиях длительного наблюдения за частицей в накопителе — ловушке. Длительное наблюдение дает возможность шаг за шагом проследить динамику спина, и в силу этого эксперимент приближается к предельному наблюдению — чистому опыту.

Второй важной особенностью этих экспериментов явилось принципиально новое начало: измерению подвергался не весь фактор, а непосредственно его аномальная часть. Это открывало новые возможности в экспериментальной технике по измерению спина, обеспечивало резкий скачок в повышении точности опыта. Первое измерение аномальной части магнитного момента электрона было проведено Демельтом в 1957 г. [21], и хотя точность эксперимента была еще недостаточно велика, было очевидно, что метод наблюдения имеет хорошую перспективу.

Дальнейшее развитие техники эксперимента было связано с созданием искусственного метастабильного квазиатома “геония”, т.е. с решением задачи локализации электрона в конечной области лабораторного пространства и обеспечения его финитного движения (ловушка Пеннинга). Это и имело решающее значение в прогрессе эксперимента: можно было повторять измерение сколько угодно раз и даже проводить его непрерывно.

Локализация электрона в конечной области лабораторного пространства в описываемых экспериментах достигалась с помощью “ловушки Пеннинга” — комбинации поля электрического квадрупольного, наложенного на магнитное поле таким образом, чтобы вся система обладала аксиальной симметрией. В отличие от атома, где электрон находится в относительно сильном кулоновском поле ядра, в ловушке Пеннинга его движение ограничивается неглубоким захватывающим потенциалом. В силу этого эффекты, обусловленные захватом, малы и их можно без труда рассчитать.

Электрический потенциал выбирается в виде, симметричном относительно оси  $z$ :

$$V = -\frac{e_0^2 a}{2}(r^2 - 2z^2), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (4.8)$$

а однородное магнитное поле ( $2 \div 5 T$ ), как и обычно, выбирается в виде  $\mathbf{A} = (-yH/2, xH/2, 0)$ . Решение задачи о движении электрона в таком поле приводит к следующему энергетическому спектру:

$$E = \hbar \left[ \omega'_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right) - \omega_m \left( n_m + \frac{1}{2} \right) + \frac{gm_s \Omega}{2} \right], \quad (4.9)$$

где  $n$ ,  $n_z$ ,  $n_m$  — целые числа, а  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Такой энергетический спектр включает в себя энергию циклотронного орбитального движения с модифицированной частотой  $\omega'_c = \Omega - \omega_m$ , энергию аксиальных гармонических колебаний с частотой  $\omega_z = \sqrt{2e^2 a/m}$ , зависящей только от электростатического поля, и энергию магнетронных колебаний, частота которых равна  $\omega_m = (\Omega - \Omega')/2$ , где  $\Omega' = \Omega \sqrt{1 - 2\omega_z^2/\Omega^2}$ ,  $\Omega = e_0 H/mc$ . В аксиально-симметричной ловушке центр циклотронной орбиты прецессирует вокруг оси  $z$  с частотой  $\omega_m$ . Последний член в формуле (4.9) определяет энергию, обусловленную взаимодействием спинового магнитного момента с магнитным полем  $H$ .

Движение электрона в ловушке будет одновременно устойчивым и в радиальном, и в аксиальном направлении, если  $\Omega'^2 > 0$  и  $0 < a < H^2/4mc^2$ ; при этом электрон не покидает ловушку. В пределе слабоудерживающего потенциала ( $a \rightarrow 0$ ) уровни энергии  $2D$ -электрона переходят в энергетический спектр Ландау–Раби

$$E = \hbar \Omega \left( n + \frac{1}{2} + \frac{gm_s}{2} \right). \quad (4.10)$$

Заметим, что релятивистское обобщение этой формулы методом точного решения уравнения Дирака

$$E^{\text{рел}} = mc^2 \left\{ \left( \frac{p_z}{mc} \right)^2 + \left[ \sqrt{1 + (2n + \zeta + 1) \frac{H}{H_0}} + \frac{\zeta a_e H}{2H_0} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.10a)$$

где  $a_e = (g - 2)/2$ , а  $\zeta = \pm 1$  характеризует проекцию спина на направление магнитного поля, дает возможность непосредственного определения частоты обращения электрона  $\omega_c$  и прецессии спина  $\omega_s$ . Полагая в (4.10а)  $p_z = 0$  (2D-электроны) и дифференцируя спектр энергии по адиабатическим инвариантам  $n$  и  $m_s = \zeta/2$ , получим, что

$$\omega_c = \frac{\partial E}{\partial n} = \frac{e\epsilon H}{E}, \quad \omega_s = \frac{\partial E}{\partial m_s} = \frac{eH}{mc} \left( a_e + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Однако в условиях эксперимента (низкие температуры) релятивистские эффекты не проявляются.

Остановимся кратко на схеме экспериментов Вашингтонского университета, имея в виду лишь главные ее черты.

Как уже отмечалось, с помощью удержания электрона в ловушке удалось измерить аномалию  $g$ -фактора с беспрецедентной и непревзойденной до настоящего времени точностью. Этого удалось достичь благодаря тому, что измерения велись над одним-единственным электроном в ловушке: была создана искусственная модель атома — единственный электрон локализован в ловушке. Такая структура представляет собой метастабильный квазиатом, получивший название “геоний”.

При низких температурах (эксперимент шел при 4 К — ванна из жидкого гелия) и в условиях ультравысокого вакуума энергетический спектр геония характеризуется малыми квантовыми числами — квазиатом близок к своему “основному” состоянию:  $n \cong 0$ . Заметим, что радиус орбиты электрона  $R^2 = (2n+1)\hbar^2/m_e H$  в основном состоянии  $n = 0$  минимален:  $R_{\min} \cong 10^{-6}$  см, в то время как средняя амплитуда колебаний в аксиальном направлении составляет  $(\overline{z^2})^{1/2} = (\hbar/2m\omega_z)^{1/2} \cong 2 \cdot 10^{-2}$  см. Таким образом, в геонии реализуется движение моноосциллятора: электрон движется только параллельно магнитному полю вдоль оси симметрии электродов.

Ловушка для электрона представляла собой комбинацию постоянного магнитного поля (рис. 15) и цилиндрически-симметричного электрического поля. Электроны рождались в результате ионизации атомов остаточного газа электронным пучком. Регистрация электронов производилась с помощью высокочастотного напряжения, подаваемого на нижний фокусирующий электрод, и детектированием сигнала, наведенного аксиальным движением электрона в верхнем электроде. Соответствующим подбором ВЧ напряжения обеспечивался захват одного электрона и его пребывание в ловушке в условиях низких температур в течение нескольких дней. Это открывало возможность длительного (непрерывного) эксперимента.

Для определения величины гиромагнитного отношения и его аномальной части  $a_e = (g - 2)/2$  для электрона было необходимо осуществить измерение его циклотронной и спин-резонансной частот, разность которых пропорциональна АММ:  $\omega_c - \omega_s = a_e eH/mc$ .

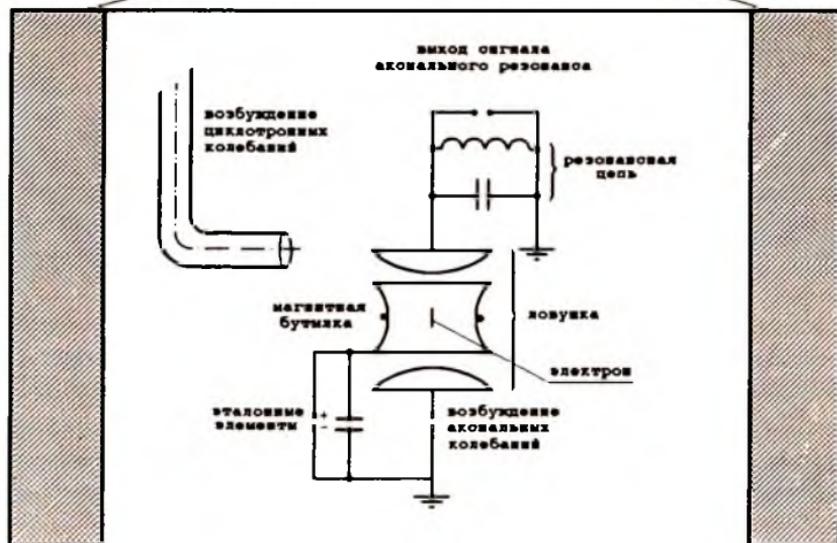


Рис. 15. Схема экспериментов Вашингтонского университета по измерению аномального магнитного момента электрона

Существенным элементом всей схемы измерения являлась “магнитная бутылка” (рис. 15), обеспечивающая связь между спиновым и орбитальным движением (спин-орбитальная связь). Магнитное поле бутылки, действующее на электрон, создавалось с помощью кольца тонкой никелевой проволоки с током, намотанной вокруг кольцевого электрода.

Магнитное поле бутылки

$$\mathbf{b} = [-\beta z x, -\beta z y, \beta(z^2 - r^2/2)], \quad (4.11)$$

где  $\beta \cong 120 \text{ Гс/см}^2$ , обеспечивает дополнительную энергию взаимодействия магнитного момента электрона  $U_m = -\mu_z \beta z^2$ , при этом возникает дополнительная фокусирующая сила  $F_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z} = 2\mu_z \beta z$  и частота аксиальных колебаний получает смещение, зависящее от ориентации спина  $\omega_z = \omega_{z0} - \beta \mu_z / m \omega_{z0}$ . В силу этого частота аксиальных колебаний оказывается зависящей от ориентации спина электрона:  $\omega_z^\uparrow = \omega_z + \delta/2$ ,  $\omega_z^\downarrow = \omega_z - \delta/2$  и тогда наблюдение малого смещения частоты

$$\omega_z^\uparrow - \omega_z^\downarrow = \delta$$

дает непосредственную информацию о величине аксиальной составляющей магнитного момента. Это и является базисом для наблюдения методом непрерывного штерн-герлах-эксперимента. В этом можно

усмотреть известный аналог: в опытах Штерна и Герлаха ориентация спина была связана со смещением центра масс атома, т. е. с траекторией. В новом варианте спин-резонансной методики ориентация спина связана с изменением частоты аксиальных колебаний. Таким образом, в новом подходе меняется не траектория, а частота колебаний электрона в ловушке в присутствии магнитного поля со слабой неоднородностью. Сильное увеличение чувствительности детектора смещения частоты позволило получить данные о величине проекции спина на направление оси симметрии магнитного поля. При этом траектория движения частицы в силу действия восстанавливающей силы остается финитной: движение вдоль поля сохраняется.

В результате сочетания циклотронных и аксиальных колебаний в системе геония возбуждаются квантовые переходы с изменением ориентации спина (спин-флип). Действительно, благодаря магнитному полю бутылки электрон оказывается подверженным воздействию компоненты поля, перпендикулярной к скорости частицы. Эта компонента, меняющая знак при переходе электрона через плоскость  $z = 0$ , возбуждает переворот спина.

Для определения аномальной части гиромагнитного отношения необходимо экспериментальное измерение частот орбитального движения и прецессии спина:

$$\frac{\omega_s - \omega_0}{\omega_c} = a_e = \frac{g - 2}{2} = \frac{\omega_a}{\omega_c}.$$

Важным шагом в развитии техники прецизионного измерения явилась ее автоматизация, позволяющая максимально устранить влияние субъективных факторов в процессе измерения. Это имеет большое значение для теории квантовых измерений, при обсуждении вопроса о влиянии наблюдателя на измерения АММ электрона и позитрона:

$$a_{e-} = (1159652200 \pm 40)10^{-12},$$

$$a_{e+} = (1159652222 \pm 50)10^{-12}.$$

Таким образом, разность  $|a_{e+} - a_{e-}|$  была определена с очень высокой степенью точности:

$$\left| \frac{a_{e+} - a_{e-}}{a_{e-}} \right| < 10^{-7}.$$

Значения  $a_{e+}$  и  $a_{e-}$  (4.11) превосходят по точности теоретические вычисления и требуют учета вклада членов  $(\alpha/\pi)^4$ , что, как уже отмечалось, связано с расчетом вклада 891 диаграммы Фейнмана с ожидаемым результатом  $30 \cdot 10^{-12}$ .

Интерес к этим исследованиям обусловлен необходимостью экспериментальной проверки известной теоремы Людерса-Паули о *CPT*-инвариантности — одного из основных положений КЭД. Согласно

этой теореме квантовая теория поля должна быть инвариантной относительно совместного действия трех операторов — зарядового сопряжения  $C$ , четности  $P$  и обращения времени  $T$ . Одним из следствий  $CPT$ -теоремы является необходимость равенства  $g$ -факторов частиц и античастиц. Действительно, поскольку  $g$ -фактор входит в гамильтониан в комбинации  $g(e\hbar/2mc)(\mathbf{S}\mathbf{H})$ , при  $CPT$ -преобразовании  $g \rightarrow g$ ,  $m \rightarrow m$ ,  $e \rightarrow -e$ ,  $\mathbf{S} \rightarrow -\mathbf{S}$ , вследствие чего  $g = \bar{g}$ , так как  $m = \bar{m}$ . Таким образом, экспериментальное сравнение  $g$ -факторов электрона и позитрона имеет важное значение для подтверждения основ КЭД.

Заканчивая анализ спин-резонансного метода измерения спина — непрерывного штерн-герлах-эксперимента, — еще раз подчеркнем, что в этом методе спиновые состояния электрона определяются практически без коллапса координатной функции (неразрушающий эксперимент)\*, что открывает возможность последовательного анализа всех стадий опыта. Непрерывный штерн-герлах-эксперимент является примером почти идеального квантового измерения, когда возможность неконтролируемого воздействия прибора на объект практически устранена.

### §4.3. Прецизионный метод измерения поляризации.

#### Аномальный магнитный момент мюона

Прецизионный метод исследования спина частиц связан с наблюдением эволюции продольной поляризации во времени для первично-поляризованного ансамбля частиц. Как уже отмечалось, изменение продольной поляризации частицы имеет непосредственную связь с ее аномальным магнитным моментом, поскольку

$$\frac{d}{dt}(\zeta\beta) = a_e\beta[\omega_0\zeta], \quad (4.12)$$

где  $a_e = (g-2)/2$  — аномальная часть  $g$ -фактора электрона,  $\omega_0 = \frac{e_0\mathbf{H}}{mc}$ , а  $\beta = c(\mathbf{P})/E$ . Важно подчеркнуть, что вакуумная аномалия спинового магнитного момента здесь проявляется не как поправка на фоне общей динамики спина. Напротив, аномалия  $a_e$  обуславливает особый эффект прецессии спина вокруг направления движения частицы.

В случае, если  $g = 2$ , проекция спина на направление движения частицы сохраняется во времени.

Эффект прецессии спина вокруг направления вектора скорости частицы, пропорциональный величине  $a_e$ , открывает путь непосредственного исследования именно этой величины, а не всего  $g$ -фактора в целом — путь “атаки” на аномальный магнитный момент (АММ).

\* Вопрос о квантовых невозмущающих измерениях подробно анализируется в работах В. Б. Брагинского (см. его обзорную статью [22]).

Остановимся сейчас на прецизионных измерениях АММ мюона, проведенных на накопительном мюонном кольце CERN (Европейский центр ядерных исследований, Швейцария) прецессионным методом. Исследования АММ мюона — частицы, во многом являющейся аналогом электрона, — представляют собой известный интерес с точки зрения вклада в эту величину сильных и слабых взаимодействий. Действительно, в силу предполагаемой универсальности электронов, мюонов и  $\tau$ -лептонов относительно электромагнитных взаимодействий ( $e\mu\tau$ -универсальность) в АММ мюона будут вносить вклад те же графы Фейнмана, что и для электронного АММ. Но поскольку масса мюона заметно превышает электронную массу ( $m_\mu \cong 206m_e$ ), будет заметным также вклад в АММ мюона адронной поляризации вакуума. Вклад слабых взаимодействий при существующей точности измерения можно пока не рассматривать.

Теоретическое исследование величины АММ мюона приводит к его значению

$$a_\mu^{\text{теор}} = (1165920(10))10^{-9}. \quad (4.13)$$

Заметим, что адронный вклад здесь имеет существенное значение, поскольку только с его учетом можно получить теоретический результат, согласующийся с экспериментом. Теоретическое значение (4.13) представляет собой сумму  $a_\mu^{\text{теор}} = a_\mu^{\text{КЭД}} + a_\mu^{\text{АДР}}$ , где

$$a_\mu^{\text{КЭД}} = 0,5 \frac{\alpha}{\pi} + 0,765782 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + O\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 = 1165852(24) \cdot 10^{-9},$$

$$a_\mu^{\text{АДР}} = 66,7(9,4) \cdot 10^{-9}, \quad a_\mu^{\text{сл}} = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Сравнение этой величины аномалии с АММ электрона, имеющего чисто квантово-электродинамическую природу,

$$a_e = 0,5 \frac{\alpha}{\pi} - 0,328478445 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + O\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$$

подчеркивает различие в величинах АММ из-за разного вклада поляризации вакуума в членах начиная с  $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$

Основная идея, лежащая в основе экспериментов CERN по измерению АММ мюона, заключается в измерении пространственной асимметрии вылета электронов в процессе распада поляризованных мюонов. Как известно [23], в трехчастичном распаде поляризованного мюона

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

дифференциальная вероятность распада в единицу времени в системе покоя мюона имеет вид

$$\frac{d\omega}{d\Omega_e dE_e} = \frac{\pi G_F^2 m_\mu^2 E_e^2}{3(2\pi)^5} (1 - \zeta_e \mathbf{n}) \left[ 3 - \frac{2E_e}{E_{\text{max}}} + \zeta_\mu \mathbf{n} \left( 1 - \frac{2E_e}{E_{\text{max}}} \right) \right], \quad (4.14)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении движения электрона:  $\mathbf{p}_e \cong \cong E_e \mathbf{n}$ ,  $\zeta_e$  — поляризация электрона в системе покоя,  $\zeta_\mu$  — поляризация мюона. Члены  $\zeta_e \mathbf{n}$  и  $\zeta_\mu \mathbf{n}$  меняют знак при пространственной инверсии, их появление является результатом несохранения пространственной четности. Электрон обладает максимальной энергией, если оба нейтрино испускаются в одном и том же направлении, а электрон — в противоположном. Тогда

$$E_m = E_{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \cong \frac{m_\mu}{2},$$

ибо  $m_\mu = 206m_e$ .

Выражение (4.14) для вероятности распада мюона получено в контактном пределе теории Вайнберга-Салама.

Полагая далее, что  $E_e/E_m = \varepsilon$ ,  $\zeta_\mu \mathbf{n} = \cos \theta$  и вводя полную вероятность распада

$$W = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3},$$

приведем дифференциальную вероятность распада мюона (4.14) к виду

$$\frac{dw}{d\Omega_e d\varepsilon} = W \frac{\varepsilon^2(3-2\varepsilon)}{4\pi} (1 - \zeta_e \mathbf{n}) \left( 1 + \frac{1-2\varepsilon}{3-2\varepsilon} \cos \theta \right),$$

где

$$d\Omega_e = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В этом выражении представляет сейчас интерес последний член в круглых скобках, описывающий угловую асимметрию в испускании электронов по отношению к направлению спина мюона. Вероятность распада — вероятность вылета электронов — достигает максимума при  $\theta = 0$ , т.е. в случае, если  $\mathbf{n}$  направлено по  $\zeta_\mu$ . Другими словами, электроны с наибольшей вероятностью будут вылетать в направлении ориентации спина мюона. Заметим также, что вылетающие электроны будут полностью продольно поляризованы.

Первые экспериментальные наблюдения АММ мюона были проведены в CERN в 1961 г. Основными элементами эксперимента являлись источник поляризованных мюонов, однородное магнитное поле и поляриметр (рис. 16). Поляриметром измеряли продольную поляризацию мюонов как функцию времени их пребывания в магнитном поле. Поскольку спин мюона поворачивается в  $(1 + \gamma a_\mu)$  раз быстрее, чем вектор импульса частицы при циклическом движении мюона в магнитном поле, через время  $T$  угол между спином мюона и его импульсом будет равен

$$(\omega_s - \omega_c)T = \omega_c \gamma T = a_\mu e_0 \overline{H} / mc = \omega_a T, \quad (4.15)$$

где  $\omega_a$  — частота прецессии спина относительно орбитального движения — величина, не зависящая от энергии частицы  $\gamma = E/mc^2$ ,  $\bar{H}$  — здесь среднее по времени значение напряженности магнитного поля.

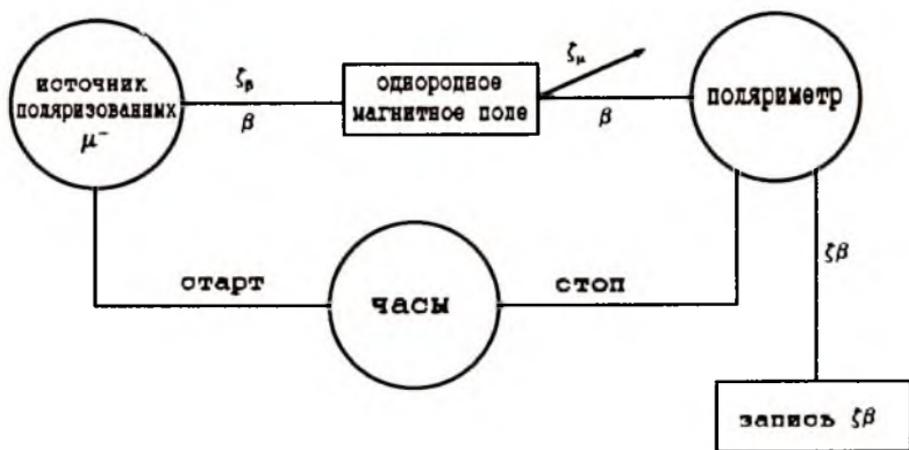


Рис. 16. Схема наблюдения аномального магнитного момента мюона

Детектирование изменения мюон-электронного распределения во времени позволило определить изменение поляризации мюонов, так как вылет электронов распада зависел от состояния поляризации мюонного пучка. В идеальной схеме эксперимент представлял собой измерение частоты прецессии спина  $\omega_a$  относительно вектора скорости мюона путем наблюдения электронной асимметрии распада.

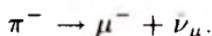
Для дальнейшего анализа деталей эксперимента важно иметь в виду, что мюон — нестабильная частица. Вместе с тем очевидно, что чем больше периодов осцилляций мюона можно наблюдать, тем точнее можно определить частоту  $\omega_a$ . Однако для мюонов время их пребывания в условиях проводимого эксперимента ограничено их временем жизни. Поэтому было необходимо «растянуть» эффективное время жизни мюона, используя релятивистское растяжение времени распада, переходя к высоким энергиям пучков мюонов. Поскольку частота  $\omega_a = a_\mu e_0 H/mc$  не зависит от энергии частицы, релятивистское увеличение времени жизни мюона (в опытах  $\gamma = 12$ ) давало возможность воспроизводить измерения над большим числом периодов относительной прецессии спина.

В дальнейших экспериментах CERN (технические детали можно найти в оригинальных работах и обзорах, см. [21]) измерение АММ мюонов проводилось над частицами в накопительном мюонном кольце (CERN-Darsbury-Mainz) (см. схему на рис. 17).



Рис. 17. Эксперимент по наблюдению АММ мюона

Пионный пучок, полученный в результате облучения мишени протонами с энергией 11 ГэВ, ускоренными в протонном синхротроне, инжектировались в объем накопительного кольца, в котором накапливались мюоны распада



Вследствие несохранения четности мюоны распада, обладая энергией 1,28 ГэВ, были полностью продольно поляризованными. Слабофокусирующее магнитное поле накопительного кольца обеспечивало устойчивое движение частиц по замкнутым орбитам. Электроны, получающиеся в результате распада поляризованных мюонов на лету ( $\bar{\mu} \rightarrow e^- + \bar{\nu} + \nu_\mu$ ), регистрировались с помощью ливневых счетчиков, способных измерять энергию и размещенных по кругу кольца (см. рис. 17). При обработке результатов эксперимента частота  $\omega_a$  переводилась в значение аномального магнитного момента мюона с использованием тщательного измерения магнитного поля. Не имея здесь возможности останавливаться на деталях эксперимента, подчеркнем высокую точность измерения:

$$a_{\mu^-}^{\text{эксп}} = (1165938 \pm 12) \cdot 10^{-9}; \quad a_{\mu^+}^{\text{эксп}} = (1165912 \pm 11) \cdot 10^{-9}.$$

При этом среднее экспериментальное значение  $a_{\mu}^{\text{эксп}}$  находится в хорошем согласии с теорией:

$$a_{\mu}^{\text{эксп}} = (1165924 \pm 8) \cdot 10^{-9}; \quad a_{\mu}^{\text{теор}} = (1165920 \pm 10) \cdot 10^{-9}.$$

Эксперименты, проведенные в CERN, явились по существу началом развития новой техники измерения спина релятивистских частиц. Как уже отмечалось, наблюдение спиновых свойств релятивистских частиц имеет свои существенные особенности, в силу чего прогресс эксперимента в этом направлении имеет принципиальное значение.

# ВОПРОСЫ ИНЖЕНЕРНОЙ ФИЗИКИ СПИНА

Этот раздел физики появился сравнительно недавно в связи с развитием нового научного направления — спиновой физики высоких энергий. Для исследования спиновой зависимости физических процессов, развивающихся при взаимодействии частиц высокой энергии, потребовалось решение ряда инженерно-технических задач.

В число этих задач включаются: проблема создания релятивистских пучков частиц с ориентированным спином; проблема устойчивости поляризации, и в частности исследование влияния орбитального движения частицы на состояние ее поляризации; решение задачи об управлении поляризацией, превращение поляризации из поперечной в продольную и, наконец, проблема измерения поляризации релятивистских пучков частиц. Остановимся кратко на этих основных вопросах.

## §5.1. Источники поляризованных частиц.

### *Проблема создания пучков релятивистских частиц с ориентированным спином*

В связи с развитием исследований поляризационных явлений — одного из новых разделов физики высоких энергий — стала особенно актуальной проблема разработки источников быстрых поляризованных частиц. Эта задача оказалась непростой, ибо существующие и давно известные способы получения поляризованных пучков частиц перекрывали лишь нерелятивистскую область энергий. Действительно, рассмотрим, например, легкие частицы — электроны. Известные методы получения поляризованных электронов немногочисленны. Это прежде всего электроны, возникающие при бета-распаде ядер; вследствие несохранения четности в слабых взаимодействиях эти электроны продольно поляризованы. Поляризация электронов наблюдается также и в других случаях распада, обусловленного слабым взаимодействием:  $\mu^\pm$ -,  $\pi^\pm$ -,  $K$ -мезонов, а также при бета-распаде гиперонов.

Следует также упомянуть о том, что источником поляризованных электронов является процесс их рассеяния на тяжелых ядрах (Мотт), когда у рассеянных неполяризованных вначале частиц возникает преимущественная поляризация, причем вектор спина ориентируется перпендикулярно к плоскости рассеяния (поперечная поляризация).

Все эти методы, однако, ограничены в своих возможностях: они применимы только в нерелятивистской области энергий и, кроме того, для них характерна слабая интенсивность пучков частиц и не всегда достаточная степень их поляризации.

Примерно такова же ситуация и с получением пучков тяжелых частиц, в частности, протонов. Как известно, медленные поляризованные протоны можно получить методом пространственного разделения неполяризованного пучка с помощью неоднородного магнитного поля (метод Штерна-Герлаха). Подобно электронам, протоны поляризуются также в процессе моттовского рассеяния: при рассеянии неполяризованного пучка протонов на бесспиновых ядрах пучок поляризуется, приобретая поперечную поляризацию.

В последнее время эффективно развиваются методы получения поляризованных протонов в реакциях распада  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гиперонов. Так, в частности, в лаборатории Ферми (Fermilab) в США созданы релятивистские пучки поляризованных протонов, полученных в результате  $\Lambda$ -распада. Однако интенсивность таких поляризованных пучков протонов оказывается недостаточной. Это обстоятельство стимулирует развитие других методов получения пучков релятивистских частиц с ориентированным спином.

Проблема получения поляризованных протонов высокой энергии возникла уже давно и, в частности, искали пути ускорения поляризованных нерелятивистских частиц до высоких энергий. Теоретическое и экспериментальное изучение этого вопроса в Аргонской национальной лаборатории (США) показало принципиальную возможность ускорения поляризованных протонов. При этом был выяснен весьма важный момент: ориентация спина частицы теряет свою стабильность в случае, когда частота прецессии спина, обусловленная аномальным магнитным моментом, совпадает с характерными частотами орбитального движения частицы. В результате этих исследований открылись возможности удерживать в течение длительного времени поляризованные протоны и антипротоны в накопительном кольце. Успешное ускорение поляризованных протонов в аргонском синхротроне ZGS и преодоление деполаризующих резонансов рассеяли все сомнения в возможности ускорения поляризованных частиц в синхротронах высокой энергии.

На пути развития квантовой теории синхротронного излучения был довольно неожиданно достигнут прогресс в проблеме получения поляризованных электронов и позитронов высокой энергии. Предсказание и установление квантового эффекта радиационной поляризации электронов и позитронов при их циркуляции в накопительных кольцах (см. § 3.5) открыли новый источник поляризованных частиц и обозначили новые возможности физического эксперимента. Как было показано в § 3.5, эффект радиационной поляризации электронов и позитронов заключается в упорядоченном процессе ориентации спинов частиц в процессе синхротронного излучения.

При движении и излучении электронов в накопительном кольце в условиях длительного времени их циркуляции при достижении времени  $t$ , превышающего время поляризации  $\tau_{\text{пол}}$  ( $t > \tau_{\text{пол}}$ ), пучок частиц приобретает поперечную поляризацию: спин ориентируется против направления магнитного поля, спин позитронов ориентируется в противоположном направлении. Эффект радиационной поляризации в настоящее время является уникальным источником получения релятивистских частиц с ориентированным спином, этот эффект вошел в инженерную практику крупнейших лабораторий мира.

И наконец, об источниках фотонов высокой энергии. Хорошо известны такие источники поляризованных фотонов, как синхротронное и лазерное излучение, ондулятор и лазер на свободных электронах. Однако наиболее ярким достижением в этой области следует все же считать получение мощных  $\gamma$ -квантов при так называемом "обратном" комптон-эффекте. Обратный комптон-эффект (см. § 3.7) реализуется при рассеянии лазерных поляризованных фотонов на релятивистских электронах, движущихся в циклическом или линейном ускорителе и обладающих большой энергией  $E$ . Это позволяет получить поляризованные  $\gamma$ -кванты с энергией  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0/E + (1/2\gamma)^2} \rightarrow E$  (где  $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0$  — энергия падающих фотонов,  $\gamma = E/mc^2$ ), практически совпадающей с энергией электрона (полная конверсия). Интересные возможности получения высокоэнергетических поляризованных фотонов методом обратного комптон-эффекта открываются в связи с проектом коллайдера ВЛЭПП (ИЯФ СОАН) — установки, состоящей из двух линейных ускорителей, в которых сгустки частиц движутся навстречу друг другу. За счет обратного комптон-эффекта энергию встречных частиц перед их соударением можно почти полностью конвертировать в энергию квантов и тем самым открыть путь в физику фотон-фотонных поляризованных встречных пучков сверхвысокой энергии.

Таким образом, ускорители и накопители заряженных частиц высокой энергии имеют важное значение в качестве источников поляризованных частиц. Остановимся сейчас кратко на особенностях движения заряда в магнитном поле ускорителя и накопительного кольца, ограничиваясь лишь сведениями, необходимыми для понимания особенностей динамики спина движущихся частиц.

В циклическом ускорителе (а также накопителе) релятивистские заряженные частицы движутся в вращающемся магнитном поле, выполняющем две основные функции: управление движением частиц (движение по круговой стационарной орбите) и фокусировку — устойчивость движения частицы по орбите. В процессе ускорения заряженная частица совершает очень много оборотов, находясь в движении по окружности радиуса  $R$ , связанного с энергией частицы  $E$  и напряженностью поля  $H$  соотношением  $\beta E = eHR$ . Случайные возмущающие факторы могут вызвать отклонение частицы от равновесной орбиты, поэтому для обеспечения устойчивости ее движения необхо-

можно обеспечить фокусировку — возврат частицы на равновесную орбиту. Обычно фокусировка достигается специальным распределением аксиально-симметричного магнитного поля вблизи равновесной орбиты  $R$  по закону  $H = H_0(R/r)^n$ , где показатель спада магнитного поля равен  $n = -(r/H)\partial H/\partial r$ .

При этом на частицу действуют фокусирующие гармонические силы и ее движение становится устойчивым: заряд совершает свободные бетатронные колебания — радиальные и вертикальные (вдоль оси симметрии поля) гармонические колебания с частотами  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-n}$ ,  $\omega_z = \omega_0\sqrt{n}$ , где  $\omega_0 = \beta c/R = ecH/R$  — релятивистская циклотронная частота кругового движения.

Условие одновременной стабилизации движения частицы по радиусу и вдоль оси симметрии поля (в направлении, перпендикулярном к плоскости равновесной орбиты) обеспечивается выбором показателя спада магнитного поля в пределах  $0 < n < 1$  — это так называемая мягкая, или слабая фокусировка. Возникающие при этом фокусирующие силы пропорциональны  $F = -Kx$ , где  $K_r = (\frac{eH}{R})(1-n)$ ,  $K_z = (\frac{eH}{R})n$ .

Однако при переходе к конструкции ускорителей на большие энергии фокусирующие силы, основанные на мягкой фокусировке, оказываются недостаточными: продвижение вверх по шкале энергии ускоренных частиц требует возрастания их радиуса орбиты вращения, ибо в соотношении  $\beta E = eHR$  магнитное поле для железных (несверхпроводящих) магнитов ограничено пределом  $10^4$  Гс. Но тогда, как это следует из выражения для фокусирующих сил, неизбежным оказывается и рост амплитуды колебаний, ибо величина фокусирующей силы обратно пропорциональна радиусу орбиты вращения частицы.

Критическая ситуация преодолевается переходом к жесткой, или сильной фокусировке (более подробно см. [11]) — к знакопеременному магнитному полю с высокими значениями градиента  $|n| \gg 1$ . При этом частица переходит через совокупность магнитных секторов, испытывая поочередно фокусирующее и дефокусирующее влияния магнитного поля. Непрерывная последовательность чередующихся секторов магнита с положительным  $n > 0$  и отрицательным градиентом поля  $n < 0$  обеспечивает фокусировку пучка в обоих направлениях: и в радиальном, и в вертикальном. Такая система магнитной фокусировки способна обеспечить резкое уменьшение амплитуды бетатронных колебаний — сильное сжатие орбит. Таким образом, жесткая фокусировка сильно сокращает размеры пучка.

Увеличение энергии частиц при ускорении, а также компенсация радиационных потерь легких заряженных частиц (электронов и позитронов) осуществляется воздействием на заряд ускоряющего вихревого электрического поля, действующего по касательной к траектории частицы синхронно с ее движением. Частица захватывается в режим ускорения, совершая медленные фазовые колебания около равновесной фазы (принцип автофазировки). Фазовое движение оказывается стабильным, при этом частота фазовых колебаний  $\Omega =$

$= (V_0 k \omega_0^3 \sin \varphi_0 / 2\pi c H_0)^{1/2}$  зависит от  $V_0$  — разности потенциалов на ускоряющем промежутке;  $\varphi_0$  характеризует точку равновесной фазы, а коэффициент  $k = 1 + n/(1+n)\beta^2$  (в дальнейшем мы ограничиваемся случаем слабой фокусировки).

Таким образом, стабилизация орбитального движения заряженных частиц в циклическом ускорителе (или в накопительном кольце) обеспечивается воздействием на заряд фокусирующих сил магнитного поля, приводящих к гармоническим бетатронным колебаниям частицы около равновесной орбиты (быстрые колебания), а также к медленным фазовым колебаниям.

Рассмотренная здесь картина орбитального движения частицы в циклическом ускорителе в случае легких частиц — электронов и позитронов — должна быть дополнена влиянием сил реакции излучения. В результате синхротронного излучения, испускаемого электронами и позитронами, частицы испытывают влияние сильного радиационного затухания, которое можно охарактеризовать декрементами  $\Gamma_r, \Gamma_z, \Gamma$ , связанными со средним значением мощности синхротронного излучения  $\bar{W}$ :  $\Gamma_r = \frac{n}{1-n} \frac{\bar{W}}{E}$  (радиальные колебания),  $\Gamma_z = \frac{\bar{W}}{E}$  (вертикальные колебания),  $\Gamma = \frac{3-4n}{1-n} \frac{\bar{W}}{E}$  (фазовые колебания),  $\bar{W} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4$ . Таким образом, силы реакции излучения приводят к дополнительной стабилизации движения частицы, вызывая экспоненциальное затухание амплитуды бетатронных и фазовых колебаний (радиационное “охлаждение” пучка).

Развитие квантовой теории синхротронного излучения [2] привело к открытию нового эффекта: квантовых флуктуаций траектории движения частицы, обусловленных дискретностью СИ. Заметим прежде всего, что электрон проходит в циклическом ускорителе путь  $L$ , “свободный” от испускания фотонов с энергией  $\varepsilon_\Phi = \frac{\hbar c}{R} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^3$  (максимум излучения):

$$L = \frac{c\varepsilon_\Phi}{\bar{W}} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m e^2} \frac{H_0}{H} = \frac{34,9 \cdot 10^4}{H} \text{ см,}$$

где  $H_0 = m^2 c^3 / e_0 \hbar$ , а  $H$  выражено в гауссах. Это довольно большое ( $L \sim 40$  см) макроскопическое расстояние. Возникающий при испускании фотона квантовый эффект отдачи вызывает флуктуации траектории — ее среднее уширение. В частности, уже в области энергий порядка 500 МэВ ( $E \sim E_{1/5} = mc^2 (mcR/\hbar)^{1/5}$ ) квантовые флуктуации радиуса орбиты электрона вызывают радиальное уширение траектории: электрон движется подобно броуновской частице, испытывая квантовое возбуждение бетатронных колебаний. Таким образом, одновременно с классическим радиационным “охлаждением” пучка электронов и позитронов одновременно проявляется квантовое возбуждение бетатронных и фазовых колебаний.

Анализ квантовых флуктуаций, проведенный на основе метода точных решений, приводит к следующей формуле для среднего квадрата смещения электрона относительно стационарной орбиты  $\rho = R - r$ :

$$\rho_{уст}^2 = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{1}{n(1-n)} \frac{R\hbar}{mc} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2$$

(установившийся режим). Таким образом, с течением времени пучок электронов приобретает свои естественные макроскопические квантовые размеры, обусловленные балансом между квантовым возбуждением и классическим радиационным затуханием. Этот существенно квантовый макроскопический эффект, предсказанный автором совместно с А. А. Соколовым, получил признание лишь после его экспериментального наблюдения Ф. А. Королевым [2].

Таковы в очень кратком изложении особенности орбитального движения заряженных частиц в циклических ускорителях и накопителях. Все изложенное в равной мере относится и к протонам, и к электронам, за исключением радиационных эффектов, поскольку излучение тяжелых частиц вследствие их большой массы ничтожно мало.

В ускорителе для протонов поляризованный исходный нерелятивистский пучок ускоряется затем до высоких энергий. В электронном накопительном кольце электроны приобретают поляризацию под воздействием синхротронного излучения. И в том, и в другом случае мы встречаемся с источниками получения релятивистских пучков частиц с ориентированным спином. Рассмотрим, как влияют особенности орбитального движения частиц на стабильность ориентации их спина.

## §5.2. Стабильность поляризации частиц

*при их движении в фокусирующем магнитном поле циклического ускорителя и накопительного кольца.*

### *Резонансная деполаризация*

Проблема устойчивости состояния поляризации пучка заряженных частиц при их движении в магнитном поле ускорителя или накопительного кольца имеет первостепенное значение в решении общей задачи ускорения и накопления частиц с ориентированным спином — задачи получения релятивистских поляризованных частиц.

Рассмотрим влияние фокусирующего магнитного поля

$$\mathbf{H} = \left[ -\frac{nxz}{R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^n H_0, -\frac{nyz}{R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^n H_0, \left( 1 - \frac{nz^2}{2R^2} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^n H_0 \right]$$

( $0 < n < 1$  — мягкая фокусировка) на динамику спина частицы. С этой целью воспользуемся уравнением Баргманна-Мишеля-Телегди (БМТ) в пренебрежении шредингеровским дрожанием (см. §2.6):

$$\frac{d\zeta}{dt} = [\Omega\zeta], \quad (5.1)$$

где под  $\zeta = \langle \mathbf{O} \rangle$  понимается средний спин в системе покоя: оператор  $\mathbf{O}$  в системе отсчета, связанной с частицей, описывает “истинный” спин (Дарвин). Величина  $\Omega$  имеет следующий вид:

$$\Omega = \frac{e_0 H_0}{mc\gamma} \left[ \left( 1 - \frac{g-2}{2}\gamma \right) \frac{\mathbf{H}}{H_0} - \frac{g-2}{2}\gamma\beta \frac{\beta\mathbf{H}}{H_0} \right] = (\omega_R + \omega_a) \frac{\mathbf{H}}{H_0} - \omega_a \frac{\beta\mathbf{H}}{H_0}. \quad (5.2)$$

В этом выражении  $\beta = \frac{c\mathbf{P}}{E}$ ,  $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ ,  $\omega_R = \frac{e_0 H_0 c}{R}$  — релятивистская циклотронная частота,  $\omega_a = \frac{g-2}{2} \frac{e_0 H_0}{mc}$  — частота прецессии спина, обусловленная аномальным магнитным моментом частицы,  $H_0$  — напряженность магнитного поля на равновесной орбите. Уравнение БМТ записано для электрона, и в этом случае  $\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}$  (в линейном по  $\mathbf{H}$  приближении). Если же речь идет о протоне, необходимо внести поправку к  $g$ -фактору в предположении, что  $\frac{g}{2} = 2,8$ . Введем далее для удобства цилиндрическую систему координат:

$$\mathbf{H} = (H_\rho, H_\varphi, H_z) = \left( -\frac{nzH_0}{R}, 0, H_0 \right); \quad \zeta' = \begin{pmatrix} \zeta_\rho \\ \zeta_\varphi \\ \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta \quad (5.3)$$

и ограничимся рассмотрением только вертикальных бетатронных колебаний, когда

$$\frac{z(t)}{R} = a_z^0 \cos(\omega_z t + \alpha), \quad \omega_z = \sqrt{n}\omega_R.$$

При этом в целях упрощения общей картины эволюции спина мы отвлекаемся от рассмотрения влияния радиальных бетатронных, а также фазовых колебаний. С учетом сделанных предположений нетрудно получить с помощью (5.2), что

$$\Omega_z = \omega_R + \omega_a, \quad \Omega_\rho = -n(\omega_R + \omega_a)a_z^0 \cos(\omega_z t + \alpha), \\ \Omega_\varphi = -\sqrt{n}\omega_a a_z^0 \sin(\omega_z t + \alpha).$$

Далее оказывается удобным перейти к движущейся системе отсчета, полагая, что она вращается с угловой скоростью  $\omega_R$ :

$$\dot{n}_\rho = \dot{\varphi}n_\varphi, \quad \dot{n}_\varphi = -\dot{\varphi}n_\rho, \quad \dot{\varphi} = \frac{e_0 H c}{E} = \omega_R.$$

Тогда уравнение БМТ можно привести к виду

$$\dot{\zeta} = [\mathbf{H}^{\text{эфф}}\zeta], \quad (5.4)$$

где

$$\mathbf{H}^{\text{эфф}} = [-n(\omega_R + \omega_a)a_z^0 \cos(\omega_z t + \alpha), -\sqrt{n}\omega_a a_z^0 \sin(\omega_z t + \alpha), \omega_a]. \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.4) можно искать методом последовательных приближений, полагая, что амплитуда бетатронных колебаний  $a_z^0 = z_0/R$  — малая величина. Тогда без учета бетатронных колебаний решение

$$\zeta_\rho^0 = \zeta_\perp \cos(\omega_a t + \alpha_1), \quad \zeta_\varphi^0 = \zeta_\perp \sin(\omega_a t + \alpha_1), \quad \zeta_z^0 = \zeta_\parallel$$

показывает, что в системе отсчета, связанной с электроном, спин частицы прецессирует благодаря аномальному магнитному моменту вокруг направления магнитного поля, сохраняя при этом постоянной свою проекцию на это направление. Полное решение уравнения (5.4) имеет вид (фазы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  опущены)

$$\zeta_z = \zeta_\parallel - \frac{na_z^0 \zeta_\perp}{2} \left[ \left( \omega_R + \omega_a \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \frac{\cos(\omega_z - \omega_a)t}{\omega_z - \omega_a} - \left( \omega_R + \omega_a \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \frac{\cos(\omega_z + \omega_a)t}{\omega_z + \omega_a} \right], \quad (5.6)$$

$$\zeta_\varphi = \zeta_\perp \sin \omega_a t + \sqrt{n}a_z^0 \zeta_\parallel [\omega_a^2 + n(\omega_R^2 + \omega_R \omega_a)] \frac{\sin \omega_z t}{\omega_z^2 - \omega_a^2},$$

$$\zeta_\rho = \zeta_\perp \cos \omega_a t + na_z^0 \zeta_\parallel [\omega_a^2 + 2\omega_R \omega_a] \frac{\cos \omega_z t}{\omega_z^2 - \omega_a^2}.$$

Обратим внимание на резонансный характер этих выражений: все три компоненты спина терпят разрыв при  $\omega_z = \omega_a$ . Заметим, что несмотря на это, модуль  $\zeta$  остается постоянным по величине:

$$\sum_{m=1}^3 \zeta_m^2 = \zeta_\parallel^2 + \zeta_\perp^2 = 1.$$

Таким образом, влияние аномального момента электрона начинает проявляться уже в однородном магнитном поле. В случае фокусирующего магнитного поля частица совершает бетатронные колебания и, пока отсутствует резонанс частот  $\omega_z \neq \omega_a$ , эти колебания накладываются на стабильное движение спина лишь как малое возмущение. Однако в случае совпадения частоты прецессии спина с частотой вертикальных бетатронных колебаний  $\omega_z$  или ее гармониками

$$\omega_z = \omega_a, \quad \frac{E}{mc^2} = \sqrt{n} \frac{2\pi}{\alpha}$$

возникает характерный резонанс, который может вызвать деполяризацию пучка.

Резонансные явления деполяризации пучка могут быть вызваны также радиальными бетатронными колебаниями и колебаниями фазы. Впервые анализ деполяризации пучка, происходящей вследствие резонансных эффектов при движении поляризованных частиц, был проведен Фруассаром и Стора (1960) для случая движения поляризованных протонов при решении задачи применительно к синхротрону "Сатурн" (Франция). В дальнейшем вопрос о резонансном влиянии орбитального движения на поляризацию рассматривался Коэном (США) в связи с ускорением поляризованных протонов в Аргоннском синхротроне. Была разработана программа одновременного вычисления траектории частицы и релятивистской прецессии спина, и с помощью численного анализа детально выяснена роль резонансов. Условия резонансного влияния орбитального движения частицы на состояние ее поляризации не зависят от массы частицы и имеют вид

$$\omega_a = N_0\omega_R + N_1\omega_z + N_2\omega_\rho + N_3\omega_s, \quad (5.7)$$

где  $N_0, N_1, N_2, N_3$  — целые числа, а  $\omega_R, \omega_z, \omega_\rho, \omega_s$  — частоты, характеризующие орбитальное движение частицы:  $\omega_R$  — частота обращения,  $\omega_z$  и  $\omega_\rho$  — частоты бетатронных и  $\omega_s$  — частота фазовых колебаний.

Таким образом, движение спина теряет устойчивость, когда частота прецессии спина (в лабораторной системе отсчета частота прецессии спина равна  $\omega_R + \omega_a$ ) близка к комбинации частот орбитального движения. Это создает опасность деполяризации пучка и требует специального рассмотрения.

Рассмотрим более подробно пересечение электроном изолированного одиночного резонанса, и с этой целью воспользуемся уравнением Баргманна-Мишеля-Телегди

$$\dot{\zeta} = [\mathbf{H}^{\text{эфф}}\zeta], \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{H}^{\text{эфф}}$  определено формулой (5.5). Заметим, что конфигурация магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{эфф}}$  и его зависимость от времени характерны для задач, связанных с явлением ядерного магнитного резонанса (метод Раби) — сильное магнитное поле по оси симметрии и синусоидальное достаточно слабое поле ( $a_z^0 \ll 1$ ) в перпендикулярном к этой оси направлении (см. § 4.1). Для анализа эволюции спина при прохождении резонанса удобно сделать переход к эффективному гамильтониану — аналогу гамильтониана Паули

$$\mathcal{H}^{\text{эфф}} = \mathcal{H}^0 + \mu_0(\sigma\mathbf{H}), \quad \mu_0 = e_0\hbar/2mc, \quad (5.9)$$

где  $\mathcal{H}^0$  не зависит от спиновых матриц. При этом магнитное поле, входящее в выражение  $\mathcal{H}^{\text{эфф}}$ , можно связать с  $\mathbf{H}^{\text{эфф}}$  (5.5), если перейти к уравнению Гейзенберга для спина

$$\frac{d}{dt}\sigma = \frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}^{\text{эфф}}\sigma - \sigma\mathcal{H}^{\text{эфф}}) = -2\mu_0 \frac{[\sigma\mathbf{H}]}{\hbar}$$

и сравнить полученный результат с (5.8), полагая, что  $\zeta = \langle \mathbf{O} \rangle$  — средний спин. Тогда  $\mathbf{H} = -(\hbar/2\mu_0)\mathbf{H}^{\text{эфф}}$ .

Далее можно с помощью (5.9) записать уравнение для двухкомпонентной функции  $\Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  в разделенных пространственных и спиновых переменных, и тогда, отделяя пространственную часть, получим аналог уравнения Паули

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} (\sigma \mathbf{H}^{\text{эфф}}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Это нерелятивистское уравнение, однако входящее в него выражение для  $H^{\text{эфф}}$  содержит релятивистские члены, и в частности релятивистскую энергию электрона, поскольку  $\omega_R = \frac{e_0 H c}{E}$  является релятивистской циклотронной частотой.

Переходя далее к цилиндрическим координатам для вектора спина, скалярное произведение  $(\sigma \mathbf{H}^{\text{эфф}})$  можно привести к виду

$$(\sigma \mathbf{H}^{\text{эфф}}) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\chi} \\ e^{i\chi} & 0 \end{pmatrix} - \omega_a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda = [n(\omega_R + \omega_a) - \sqrt{n\omega_a}] a_z^0 / 2$ ,  $\chi = \varphi - \omega_z t$ , причем с целью упрощения мы отвлекаемся от рассмотрения нерезонансных членов. Тогда для компонент волновой спиновой функции  $f$  и  $g$  можно получить следующую систему уравнений:

$$i \dot{f} + \omega_a f = -\frac{\lambda}{2} e^{-i\chi} g, \quad i \dot{g} - \omega_a g = -\frac{\lambda}{2} e^{i\chi} f,$$

которая с помощью замены функций  $f = e^{i\omega_a t} f_1$  и  $g = e^{-i\omega_a t} g_1$  приводится к виду

$$i \dot{f}_1 = -\frac{\lambda}{2} e^{-i\bar{\chi}} g_1, \quad i \dot{g}_1 = -\frac{\lambda}{2} e^{i\bar{\chi}} f_1, \quad (5.10)$$

где

$$\bar{\chi} = (\omega_a - \omega_z)t, \quad \dot{\varphi} = -\omega_a.$$

При этом среднее значение проекции спина на ось симметрии поля (ось  $z$ ) имеет вид [30].

$$\zeta_z = \langle \sigma_z \rangle = |f|^2 - |g|^2 = 1 - 2|g|^2, \quad |f|^2 + |g|^2 = 1. \quad (5.11)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений для спиновой функции (5.10). Эта система имеет точное решение и является очень удобной для анализа эволюции спина при пересечении резонанса ( $\omega_a = \omega_z$ ). Действительно, исключая из системы уравнений (5.10) функцию  $f_1$ , получим

$$\ddot{g}_1 - i \dot{\bar{\chi}} \dot{g}_1 + \frac{\lambda^2}{4} g_1 = 0.$$

Вводя далее в рассмотрение новую величину — скорость пересечения резонанса (скорость приближения к резонансу)

$$\dot{\bar{\chi}} = \omega_a - \omega_z = \Gamma t,$$

можно перейти к новой переменной  $z = i\bar{\chi} = i\Gamma \frac{t^2}{2}$ . И тогда для компоненты  $g_1$  получим

$$zg_1'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)g_1' - \frac{i\lambda^2}{8\Gamma}g_1 = 0,$$

где штрихом обозначена производная по переменной  $z$ . Решение полученного уравнения типа  $zg_1'' + (c - z)g_1' - ag_1 = 0$  представляет собой вырожденную гипергеометрическую функцию

$$g_1 = A\Phi(a, c, z) + Bz^{1-c}\Phi(a - c + 1, 2 - c, z),$$

причем при  $c = \frac{1}{2}$  решения  $\Phi(a, c, z)$  и  $z^{1-c}\Phi(a - c + 1, 2 - c, z)$  являются линейно независимыми. Функция  $f_1$  при этом находится простым дифференцированием:

$$f_1 = \sqrt{\frac{z}{a}}e^{-z}\frac{\alpha g_1}{\alpha z}.$$

В наших обозначениях  $a = i\lambda^2/8\Gamma$ ,  $c = \frac{1}{2}$ .

Заметим, это необходимо для дальнейшего анализа, что при изменении переменной времени  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$  комплексная переменная  $z = it^2/2$  требует изменения знака у  $\sqrt{z}$  при обходе точки 0, поскольку это сопровождается переходом на другой лист римановой поверхности, где функция  $z$  отличается значением фазы на  $2\pi$ . Поэтому при переходе через точку ветвления 0 переменная  $\sqrt{z}$  меняет знак:  $\sqrt{z} \rightarrow \sqrt{ze^{2\pi i}} \rightarrow -\sqrt{z}$ .

Введем теперь начальные условия, полагая, что до пересечения резонанса спин был ориентирован по оси  $z$ :  $|g(-\infty)| = 0$ ,  $|f(-\infty)| = 1$ . С помощью асимптотического выражения для вырожденной гипергеометрической функции при большом значении аргумента

$$\Phi(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \left[ \Gamma(c-a)|z|^{a-c}e^{i\frac{\pi}{2}(a-c)}e^z + \Gamma(a)|z|^{-a}e^{i\frac{\pi}{2}a} \right]$$

при  $|z| \rightarrow \infty$ ,

выделяя главную ветвь, получим

$$g_1 = |z|^{-a} \left[ \alpha \Gamma(a) + i\beta \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \right],$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} |z|^a \left[ \alpha \Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) + \beta \Gamma(1 - a) \right].$$

Требование выполнения начальных условий

$$|g_1(-\infty)| = 0, \quad |f_1(-\infty)| = 1$$

дает возможность определить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = -i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \sqrt{a}}{\Gamma(a)\Gamma(1 - a) - i\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)},$$

$$\beta = \frac{\Gamma(a)\sqrt{a}}{\Gamma(a)\Gamma(1 - a) - i\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}.$$

Учитывая далее, что после пересечения резонанса при  $t \rightarrow \infty$  у коэффициента  $\beta$  следует изменить знак ( $\sqrt{z} \rightarrow -\sqrt{z}$ ), находим, что

$$g_1 = |z|^{-a} \left[ \alpha \Gamma(a) - i\beta \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \right],$$

и тогда

$$g(\infty) = \frac{2i\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\sqrt{a}}{i\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) - \Gamma(a)\Gamma(1 - a)} |z|^{-a}.$$

Отсюда следует:

$$|g(\infty)|^2 = 1 - e^{-4\pi|a|}.$$

И тогда

$$\zeta_z(\infty) = \left(2e^{-\pi\lambda^2/2\Gamma} - 1\right) \zeta_z(-\infty). \quad (5.12)$$

При этом мы воспользовались формулой

$$|\Gamma(iQ)|^2 = \frac{\pi}{Q_{\text{sh}}\pi Q}, \quad \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iQ\right) \right|^2 = \frac{\pi}{Q_{\text{ch}}\pi Q}.$$

Входящая в это выражение величина  $\Gamma$  характеризует “расстройку” частоты  $\varepsilon = \omega_a - \omega_z = \Gamma t$ ,  $\Gamma = \dot{\varepsilon}$ , и в рассматриваемой модели остается постоянной,  $\lambda = [n(\omega_R + \omega_a) - \sqrt{n\omega_a}]a_z^0/2$  — “мощность” резонанса — имеет существенное значение, ибо от отношения  $\lambda^2/\Gamma$  зависит характер эволюции спина при пересечении резонанса. В общей формуле (5.12), описывающей поворот спина, можно рассмотреть два предельных случая:

а) *Быстрое прохождение резонанса*, когда  $\lambda^2/\Gamma \ll 1$ . Это соответствует большим значениям  $\Gamma = \dot{\epsilon}$ , в силу чего пересечение резонанса наблюдается при малых  $t$ . Тогда, как это следует из (5.12), поляризация частицы не меняется — после пересечения пучок остается поляризованным, сохраняя ориентацию спина.

б) *Медленное прохождение резонанса*, когда  $\lambda^2/\Gamma \gg 1$ . В этом случае  $\Gamma = \dot{\epsilon} \rightarrow 0$  — происходит адиабатическое изменение знака поляризации, однако после пересечения резонанса пучок остается поляризованным, хотя и имеет противоположную ориентацию спина. Рассматриваемый случай имеет связь с ядерным магнитным резонансом, при котором спин частицы резонансно меняет свою ориентацию.

Рассмотренные здесь два предельных случая пересечения резонанса не вскрывают, однако, полной картины эволюции спина; полный анализ (5.12) требует численных методов, поскольку общий вид (5.12) является достаточно сложным.

### §5.3. Радиационная поляризация электронов и позитронов в накопительных кольцах

Открытие эффекта радиационной поляризации электронов и позитронов в накопительных кольцах явилось существенным прогрессом в решении задачи о создании пучков легких поляризованных частиц высокой энергии. Действительно, в процессе движения электронов и позитронов в накопителе частицы становятся поляризованными, уже имея при этом высокую энергию. Более того, сам процесс поляризации становится эффективным только в области релятивистских значений энергии частиц. В связи с этим отпадает необходимость в решении задачи об ускорении нерелятивистских частиц с ориентированным спином до больших значений энергии. Следует также обратить внимание на то, что процесс радиационной поляризации не вносит каких-либо изменений в свойства пучков частиц: не влияет на плотность частиц в пучке, не вызывает разброса энергетических параметров. В процессе радиационной поляризации электронные и позитронные пучки приобретают ориентированный спин практически без изменения своих характеристик орбитального движения.

Через несколько лет после теоретического установления эффект радиационной поляризации электронов был подтвержден экспериментально. Экспериментальное подтверждение эффекта радиационной поляризации послужило импульсом к изучению и развитию теории этого явления применительно к реальным условиям движения частиц в накопительных кольцах.

В рассмотренной автором совместно с А. А. Соколовым [2; 12] задаче эффект радиационной поляризации был установлен и изучен количественно для случая движения частиц в постоянном и однородном магнитном поле: среднее значение проекции спина на направление магнитного поля (удвоенное среднее значение оператора спина в системе покоя электрона) подчиняется закону

$$\zeta(t) = \frac{e}{|e|} \frac{8\sqrt{3}}{15} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (5.13)$$

где

$$\tau = \frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{\hbar^2}{mce^2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(\frac{H_0}{H}\right)^3 = \left[\frac{15\sqrt{3}}{16} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \frac{\hbar}{mcR} \left(-\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t}\right)\right]^{-1}.$$

При этом энергия, излучаемая электроном, принимается в классическом приближении

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = W = \frac{2e^2c}{3R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4.$$

Постановка задачи о движении и излучении заряда в постоянном и однородном магнитном поле является неплохой моделью движения электронов и позитронов в накопительном кольце, поскольку частицы движутся в магнитном поле кольца, практически однородном вдоль траектории заряда и постоянном во времени, ибо радиационные потери энергии компенсируются в среднем по времени. Однако в условиях движения частиц в реальных накопительных установках возникает ряд дополнительных факторов, влияющих на устойчивость ориентации спина частиц и способных вызвать деполаризацию пучка. В частности, одним из таких факторов является резонанс прецессии спина, обусловленной аномальным магнитным электроном с колебаниями, характерными для орбитального движения (см. (5.7)).

В ряде работ, выполненных в ИЯФ СОАН под руководством А. Н. Скринского [24], был развит метод квазиклассического описания явления радиационной поляризации на основе обобщения квазиклассического уравнения Баргманна-Мишеля-Телегди на случай учета сил реакции излучения. С помощью этого метода был проведен детальный анализ влияния конкретных условий движения заряда в накопительном кольце на процесс поляризации.

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования показали, что при выполнении определенных условий можно обеспечить действие механизма радиационной поляризации пучков электронов и позитронов и в реальных накопителях частиц. При этом итог исследований оказался весьма оптимальным: вплоть до энергий электронов

порядка 100 ГэВ оказывается возможным получить поляризацию пучков частиц, близкую к рассчитанной по модели однородного поля. В 1990 г. поляризованный пучок электронов наблюдался в накопительном электронно-позитронном кольце LEP в Женеве (CERN).

Рассмотрим теперь обобщение уравнения Бергманна-Мишеля-Теллеги (БМТ) с учетом сил реакции синхротронного излучения. Для вероятности квантовых переходов с учетом не только поперечной, но и продольной ориентации спина можно записать выражение [31]

$$W = \frac{1}{2\tau} \left[ 1 - \frac{2}{9}(\zeta\beta)^2 + \frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{\zeta[\beta\dot{\beta}]}{|\dot{\beta}|} \right], \quad (5.14)$$

где среднее по волновому пакету  $\beta = c\langle \mathbf{P} \rangle / E$ . Если теперь вектору  $\zeta$  придать смысл спина, отнесенного к ансамблю электронов, то для его эволюции со временем получим обобщенное уравнение БМТ с учетом силы реакции излучения — уравнение кинетики поляризации:

$$\frac{d}{dt}\zeta = [\Omega\zeta] - \frac{1}{\tau}\mathbf{Q},$$

где

$$\mathbf{Q} = \zeta - \frac{2}{9}(\zeta\beta)\beta + \frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{[\beta\dot{\beta}]}{|\dot{\beta}|}, \quad \Omega = \frac{e_0}{mc\gamma} \left\{ \left( 1 + \frac{g-2}{2}\gamma \right) \mathbf{H} - \frac{g-2}{2}\gamma \frac{\beta[\beta\mathbf{H}]}{1+\gamma} \right\}, \quad (5.15)$$

$\gamma = E/mc^2$  (для случая чисто магнитного поля).

Заметим, что если в выражении для мощности синхротронного излучения продольно поляризованного электрона (см. § 3.4) перейти к вероятности, то для переходов с переворотом спина (спин-флип) по аналогии с поперечной поляризацией можно получить [2]

$$w^{11} = \frac{1}{2\tau} \left( 1 + \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad w^{-} = \frac{1}{2\tau} \frac{7}{9}.$$

Оба этих выражения содержатся в обобщенной формуле (5.14). Зависимость от спина здесь входит только в поперечную поляризацию, продольная поляризация изменяется равновероятно при спин-флип-переходах, и поэтому преимущественной продольной поляризации не возникает. Это обстоятельство является следствием сохранения четности в квантовой электродинамике.

Рассмотрим решение уравнения кинетики поляризации (5.14) в простейшем случае движения электрона в однородном магнитном поле  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ . Вводя для вектора спина  $\zeta$  цилиндрические координаты, с помощью (5.14) получим

$$\ddot{\zeta}_\rho + \frac{8}{9} \frac{1}{\tau} \dot{\zeta}_\rho + \omega_a^2 \left[ 1 + \frac{7}{9} \frac{1}{(\tau\omega_a)^2} \right] \zeta_\rho = 0, \quad (5.16)$$

где

$$\omega_a = \frac{g - 2}{2} \frac{e_0 H}{mc} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e_0 H}{mc},$$

а также

$$\dot{\zeta}_z = -\frac{1}{\tau} \left( \zeta_z + \frac{8\sqrt{3}}{15} \right), \quad \dot{\zeta}_\varphi = \omega_a \zeta_\rho - \frac{17}{9} \zeta_\varphi.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\zeta_\rho = \zeta_\perp \cos \omega_a t e^{-8t/9\tau}, \quad \zeta_\varphi = \zeta_\perp \sin \omega_a t e^{-8t/9\tau},$$

$$\zeta_z = -\frac{8\sqrt{3}}{15} + \left[ \zeta_{\parallel} + \frac{8\sqrt{3}}{15} \right] e^{-t/\tau}. \quad (5.17)$$

Из этих выражений видно, что с течением времени поперечная поляризация (вдоль поля) стремится к своему предельному значению независимо от начальной ориентации спина

$$|\zeta_z(\infty)| = 8 \frac{\sqrt{3}}{15} = 0,924.$$

Важно подчеркнуть, что радиационное затухание, как это видно из (5.17), меняет не только ориентацию спина, внося направленность в процесс его ориентации, но также и абсолютное значение

$$(\zeta_\rho^2 + \zeta_\varphi^2 + \zeta_z^2)_{t \rightarrow \infty} = 0,85.$$

Это наглядно показывает, что конечное квантовое состояние электрона вследствие его взаимодействия с полем излучения становится смешанным в отличие от исходного чистого состояния:  $\zeta^2(0) = \zeta_\perp^2 + \zeta_\parallel^2 = 1$ . Поэтому в квантовой теории строгое описание кинетики поляризации требует введения матрицы плотности. Задача о введении матрицы плотности для описания спиновых состояний релятивистского электрона, движущегося во внешнем магнитном поле, достаточно сложна.

В упрощенном понимании, однако, можно предположить, что, поскольку электрон имеет только две возможные проекции спина по отношению к выделенному в пространстве направлению — магнитному полю (ось квантования), степень поляризации пучка частиц можно определить как

$$P = N \left( \frac{1}{2} \right) - N \left( -\frac{1}{2} \right), \quad N \left( \frac{1}{2} \right) + N \left( -\frac{1}{2} \right) = 1,$$

где  $N \left( \frac{1}{2} \right)$  и  $N \left( -\frac{1}{2} \right)$  — относительное число частиц, присутствующих в пучке и обладающих спином, ориентированным вдоль магнитного

поля и в противоположном направлении. При этом поляризацию пучка электронов можно описать с помощью матрицы плотности

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\sigma),$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации с компонентами  $P_i = \langle O_i \rangle$ , полученный усреднением по частицам пучка, причем в качестве оператора поляризации можно взять проекцию трехмерного вектора спина, коммутирующую с гамильтонианом. Тогда матрица плотности

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix}$$

после ее приведения к диагональному виду (ось квантования направлена по  $\mathbf{P}$ ) принимает вид

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & 0 \\ 0 & 1 - P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & N \left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

причем ее диагональные элементы характеризуют населенность спиновых состояний.

Как было показано в § 3.5, кинетическое уравнение, характеризующее изменение ориентации спина частиц в пучке электронов (уравнение статистического баланса), приводит к следующему выражению для числа электронов с ориентированным спином по полю  $n^\uparrow$  и против поля  $n^\downarrow$  при условии постоянства  $n = n^\uparrow + n^\downarrow$  (двухуровневая система):

$$\begin{pmatrix} n^\downarrow \\ n^\uparrow \end{pmatrix} = \frac{15 \pm 8\sqrt{3} (1 - e^{-t/\tau})}{30}$$

(в начальный момент времени  $t = 0$  пучок не поляризован). Тогда, учитывая выражение для населенности спиновых состояний

$$N \left(-\frac{1}{2}\right) = n^\downarrow / (n^\uparrow + n^\downarrow), \quad N \left(\frac{1}{2}\right) = n^\uparrow / (n^\uparrow + n^\downarrow),$$

получим, что степень поляризации  $P$  имеет вид

$$P = N \left(-\frac{1}{2}\right) - N \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{15} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Таким образом, мы вновь приходим к (5.13), подчеркивая, однако, что “средний спин” пучка  $\zeta(t) = \langle \zeta \rangle$  непосредственно связан со степенью поляризации  $P(t)$ .

Вернемся сейчас к обобщению уравнения эволюции спина БМТ (см. (5.14)), учитывающему взаимодействие с полем излучения. Как уже отмечалось, это обобщение было получено путем введения релаксационных членов с переворотом спина, исходя из вероятности спин-флип-переходов электрона в магнитном поле. После исключения магнитного поля через уравнения движения частицы остается уравнение эволюции спина в зависимости от траектории частицы. Может показаться при этом, что имеет место очень широкое обобщение (5.14) и что эффект радиационной поляризации является чисто траекторным: достаточно знать траекторию частицы и тогда анализ явления радиационной поляризации электронов является следствием (5.14).

Однако подобный подход требует осторожности: попытки расширить применимость уравнения эволюции спина (5.14) за пределы чисто магнитного поля могут привести к ошибочным результатам, поскольку вид траектории необязательно однозначно соответствует движению заряда в магнитном поле, а сам эффект преимущественной ориентации спина является существенно полевым эффектом. Так, в частности, характер движения частицы в магнитном поле и в поле плоской волны одинаков: частица в волне движется по спирали с постоянной скоростью вдоль направления распространения волны. Несмотря на одинаковый характер движения электрона, эффект радиационной поляризации, аналогичный (5.13), отсутствует — к этому выводу приводит метод точных решений. Несмотря на аналогию траектории в случае плоской волны, выделенное направление в пространстве задается кинематически направлением распространения волны. В однородном магнитном поле таким направлением является направление магнитного поля — физически эти две задачи имеют существенное различие: по характеру классической траектории нельзя судить о возможности радиационной самополяризации. Магнитное поле вносит направленность в процесс ориентации спина, воздействуя на спиновый магнитный момент частицы.

В связи с открытием эффекта радиационной поляризации электронов и позитронов при их движении и излучении в магнитном поле накопительные кольца стали рассматриваться как естественные и уникальные источники релятивистских легких частиц с ориентированным спином. Однако эффект радиационной поляризации был предсказан и установлен для модели однородного поля, а в реальном накопительном кольце фокусирующее магнитное поле неоднородно. В неоднородном магнитном поле накопительного кольца изменение состояния поляризации частицы может происходить не только в результате действия синхротронного излучения непосредственно на спиновый магнитный момент электрона, но также и в результате возмущения синхротронным излучением орбитального движения частицы.

В ряде работ, выполненных в ИЯФ СОАН под руководством А. Н. Скринского [24], квазиклассическим методом исследования было показано, что в произвольном магнитном поле накопителя, обеспечивающем существование замкнутой орбиты электрона, радиационная поляризация пучка частиц оказывается такой же устойчивой, как и в случае однородного магнитного поля.

### 1. Мгновенная ось прецессии

На основе уравнения Баргманна-Мишеля-Телегди

$$\frac{d}{dt}\zeta = [\Omega\zeta], \quad (5.18)$$

где

$$\Omega = \frac{e_0 c}{E} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{E}{mc^2} \right) \mathbf{H} - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e_0}{mc} \frac{(\beta \mathbf{H})\beta}{1 + mc^2/E}$$

при условии замкнутости орбиты:

$$\Omega(t) = \Omega(t + T), \quad \text{или} \quad \Omega(\theta) = \Omega(\theta + 2\pi),$$

можно показать, что спин электрона сохраняет свою проекцию на некоторое направление  $\mathbf{n}(\theta)$  — ось прецессии, являющуюся периодической функцией азимута частицы  $\theta = \omega t$ . Новым шагом в таком подходе является введение понятия о подвижной оси квантования — это дает возможность наглядного физического описания динамики поляризации электронов в неоднородном поле.

В целях определения вектора  $\mathbf{n}$  — вектора прецессии — умножим левую и правую части (5.18) на  $\mathbf{n}$ :

$$\dot{\zeta} \mathbf{n} = [\Omega\zeta] \mathbf{n} = -\zeta [\Omega \mathbf{n}].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \zeta \mathbf{n} = \zeta \left( \frac{d\mathbf{n}}{dt} - [\Omega \mathbf{n}] \right).$$

По своему смыслу введения подвижной оси квантования вектор  $\mathbf{n}$ , таким образом, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = [\Omega \mathbf{n}]. \quad (5.19)$$

Далее следует воспользоваться свойствами периодичности решений этого уравнения. Эти решения можно разложить по ортогональному базису  $\mathbf{X}_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{n}(t) = \sum_m n_m \mathbf{X}_m(t), \quad (5.20)$$

причем в силу ортогональности базиса  $\mathbf{X}_k \mathbf{X}_m = \delta_{km}$ , умножая (5.20) на  $\mathbf{X}_k(t)$ , имеем

$$\sum_m (\delta_{km} - \Lambda_{km}) n_k = 0,$$

где

$$\Lambda_{km} = \mathbf{X}_k(t) \mathbf{X}_m(t + T).$$

Существование и единственность решений этой системы доказываются тем, что ее определитель равен нулю всегда:

$$\det[I - \Lambda] = 0,$$

ибо постоянная матрица  $\Lambda$  соответствует реальным вращениям:  $\det \Lambda = 1$ . Доказанная теорема вытекает из общей теории о решениях системы однородных уравнений с периодическими коэффициентами.

Таким образом, спин электрона прецессирует вокруг оси прецессии — периодического вектора  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n}(\theta) = \mathbf{n}(\theta + 2\pi), \quad |\mathbf{n}|^2 = 1,$$

сохраняя свою проекцию на эту ось.

Независимо от места наблюдения через время, равное периоду движения по орбите, спин поворачивается вокруг оси прецессии на один и тот же угол (с более детальным изложением можно ознакомиться в [24] и цитируемой там литературе).

Проведенный анализ эволюции спина устанавливает, что в магнитном поле, обеспечивающем существование замкнутой стабильной орбиты электрона, существуют по аналогии с орбитальным движением замкнутые спиновые траектории, устойчивые в той же степени, что и в однородном магнитном поле. Тем самым доказано, что введением необходимой конфигурации полей можно получить в любой точке траектории частицы заданную ориентацию ее спина — это открывает путь к управлению поляризацией — важнейшему моменту в проблеме получения поляризованных пучков частиц в реальном накопительном кольце.

Как уже упоминалось ранее, движение спина теряет устойчивость в случае прохождения через резонансную область — когда частота прецессии спина оказывается близкой к какой-либо комбинации частот орбитального движения (см. (5.7)). Это явление имеет важное значение для движения поляризованных частиц в накопительном кольце: оно представляет собой опасность для сохранения стабильности поляризации пучка, а с другой стороны, может служить основой метода искусственной деполяризации частиц для различного рода прецизионных измерений, и в частности для измерения масс частиц.

## 2. Прохождение через резонанс

В § 5.2 мы рассмотрели задачу об однократном прохождении резонанса для постоянной скорости прохождения. Полное решение задачи, включая многократное прохождение поляризованной частицы через резонансную область, представляет собой достаточно трудоемкую задачу, и на деталях ее решения мы останавливаться не будем, заметим только, что вблизи резонансов становится неустойчивым положение оси прецессии.

Влияние резонансов на устойчивость состояния поляризации тесно связано со скоростью их прохождения [24]:

$$\zeta_z^{\text{кон}} = (2e^{-2J} - 1) \zeta_z^{\text{нач}} + 2e^{-J} (1 - e^{-2J})^{1/2} (\zeta^2 - \zeta_z^2)^{1/2} \cos(\varphi + \psi(0)),$$

где

$$J = \frac{\pi |\Omega_k|^2}{4 |\dot{\epsilon}_k|}$$

(ср. с (5.12)),  $\dot{\epsilon}_k$  — скорость прохождения резонанса, полагаемая постоянной:  $\dot{\epsilon}_k = \text{const}$ ;  $\psi(0)$  — фаза прецессии спина в момент, когда  $\epsilon = \Gamma t = 0$ ;  $\Omega_k$  — мощность резонанса (в (5.12) эта величина пропорциональна амплитуде вертикальных бетатронных колебаний).

Поскольку движение спина сопровождается быстрым “размешиванием” по фазам, в среднем остается лишь первый член:

$$\langle \zeta_z^{\text{кон}} \rangle = \langle (2e^{-2J} - 1) \zeta_z^{\text{нач}} \rangle \quad (5.21)$$

(угловыми скобками обозначено среднее по фазам). Отсюда сразу же следуют два предельных случая прохождения резонанса. Если  $J \ll 1$  — быстрое прохождение резонанса ( $\dot{\epsilon}_k$  имеет большое значение), то поляризация не меняется вообще. В другом крайнем случае, когда прохождение резонанса происходит медленно ( $\dot{\epsilon}_k \rightarrow 0$ ,  $J \gg 1$ ,  $\zeta_z^{\text{кон}} = -\zeta_z^{\text{нач}}$ ) поляризация адиабатически меняет знак, но ее степень практически сохраняется. Изменение степени поляризации (деполяризация пучка) оказывается существенным, если  $J$  имеет порядок единицы — это промежуточный и наиболее неблагоприятный случай. Этот случай должен быть исключен, ибо он заведомо приведет к потере поляризации. Для подавления вредного влияния резонансной деполяризации высказывался ряд рекомендаций, общая идея которых состоит в компенсации опасных гармоник полей возмущения, а также в увеличении скорости прохождения резонанса. Так, в частности, интересная идея перестройки спинового движения была предложена в ИЯФ СО-АН (Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко): в прямолинейный промежуток накопительного кольца вводится магнитное поле специальной конфигурации (“сибирская змейка”), рассчитанное так, чтобы ориентация спина после прохождения резонанса оказалась повернутой на  $180^\circ$

(рис. 18). Тогда частота прецессии спина становится “полуцелой” и резонансы практически не действуют на стабильность поляризации. В настоящее время идея перестройки спинового движения реализована в США группой ученых под руководством А. Криша [27].

Итак, эффект радиационной поляризации электронов и позитронов существует и в реальных накопительных кольцах при любой конфигурации замкнутой траектории. Главная опасность разрушения поляризации — резонанс частоты прецессии спина с частотами орбитального движения (бетатронные и синхротронные колебания орбиты) — оказывается преодолимой путем выбора параметров фокусирующего поля, энергии частиц, а также с помощью специальных магнитов, способных локально изменять частоту прецессии спинового магнитного момента.

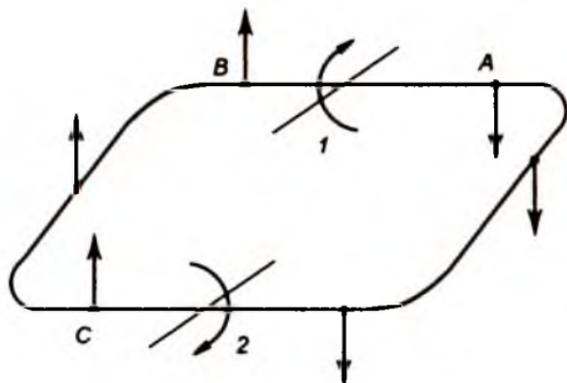


Рис. 18. “Сибирская змеяка”

На основе уравнения эволюции спина Баргманна–Мишеля–Телегди можно провести более детальный анализ влияния синхротронного излучения на процесс радиационной поляризации. При этом следует учесть прямое воздействие излучения на состояние ориентации спина, которое вызывает направленность в процессе ориентации спина, а также воздействие реакции излучения на ось прецессии, включая стохастическое влияние квантовых флуктуаций. Эти факторы могут оказать деполаризирующее воздействие излучения на процесс ориентации спина. Однако, как показывает анализ, принципиальных препятствий для реализации эффекта радиационной поляризации пучка частиц при этом не возникает (более подробно эти вопросы изложены в обзоре [12]).

Как уже отмечалось, эффект радиационной поляризации был предсказан и установлен теоретически задолго до экспериментального наблюдения (А. А. Соколов, И. М. Тернов, 1963). Вначале явление самополяризации казалось необычным и было встречено с осторожным пессимизмом, поскольку движение электронов и позитронов в накопительных кольцах обладает, как известно, рядом существенных особенностей, которые могут отрицательно влиять на стабильность спиновых состояний. В свете этого модель накопительного кольца в виде однородного магнитного поля вместе с предположением о компенсации потерь энергии на излучение представлялась слишком простой.

Через семь лет после предсказания эффект радиационной поляризации был обнаружен экспериментально на накопительном кольце АСО (536 МэВ) группой физиков в Орсе (Франция). После первого физиче-

ского наблюдения эффект радиационной поляризации был экспериментально подтвержден в ИЯФ СОАН на накопительном кольце ВЭПП-2 (625 МэВ), а также во Франции.

Вскоре наблюдения эффекта радиационной поляризации были продолжены на накопительных кольцах следующего поколения — при энергии электронов и позитронов  $\sim 1-15$  ГэВ: в США на накопителях SPEAR II и CESR, в ФРГ на накопителе DORIS II и PETRA, в нашей стране на накопительном кольце ВЭПП-4, а также в Японии. В 1990 г. эффект наблюдался в Швейцарии (CERN) в большом электрон-позитронном коллайдере LEP при энергии частиц 50 ГэВ. Все эти наблюдения не только доказали существование эффекта в реальных накопительных кольцах, но и установили хорошее совпадение с теорией в отношении степени поляризации и времени ее установления.

#### §5.4. Управление поляризацией.

##### *Создание пучков частиц с заданной ориентацией спина*

Как мы уже отмечали, полное исследование эффекта радиационной поляризации на базе квазиклассического метода описания эволюции спина в условиях движения частицы в реальном магнитном поле накопительного кольца показало существование замкнутых траекторий оси прецессии спина: спин прецессирует вокруг оси  $\mathbf{n}(t)$  так же, как в однородном магнитном поле происходит прецессия спина вокруг направления магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Это не только доказывает существование эффекта радиационной поляризации в реальном накопителе, но и открывает путь к управлению поляризацией.

В последние годы большой интерес был проявлен к задаче преобразования поперечной поляризации в продольную — “поворот спина”. Вертикальная поляризация, которую приобретает частица вследствие асимметрии синхротронного излучения, преобразуется в продольную в прямолинейном промежутке накопителя в области взаимодействия пучков и после прохождения области взаимодействия ориентация спина восстанавливается путем его поворота в исходное состояние (рис. 19). Эти повороты спина реализуются без внесения искажений в орбитальное движение частицы.

Рассмотрим возможность получения пучков продольно поляризованных электронов и позитронов, имея в виду, что в накопительном кольце частицы приобретают поперечную поляризацию.

Как известно, ускорение продольно поляризованных электронов встречает серьезные трудности: продольная поляризация быстро разрушается вследствие аномального магнитного момента частицы. Более эффективным в связи с этим оказывается другой метод: преобразование поперечной поляризации в продольную с помощью системы магнитов, поворачивающих спин в малой области пространства вблизи равновесной орбиты.

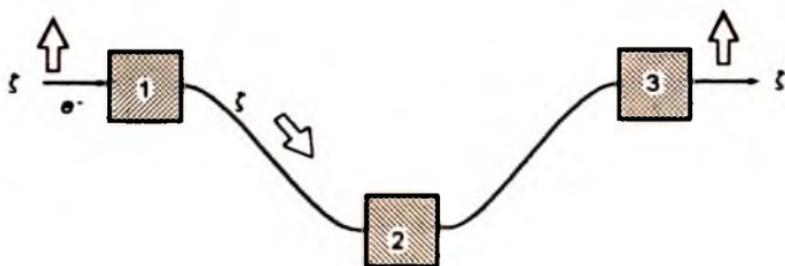


Рис. 19. Преобразование поперечной поляризации электрона в продольную

Простейший путь реализации этого метода заключается во введении дополнительного радиального магнитного поля в прямолинейный промежуток накопительного кольца. Выбирая должным образом конфигурацию магнитного поля, можно создать в заданной точке орбиты необходимое направление спина.

Рассмотрим дополнительное магнитное поле  $\mathbf{B}(t)$ , включаемое во время прохождения электроном прямолинейного промежутка. Тогда из уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди следует, что изменение проекции спина на направление импульса электрона подчиняется формуле

$$\frac{d}{dt}(\zeta \mathbf{p}) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e_0}{mc} \mathbf{B}[\zeta \mathbf{p}]$$

(в прямолинейном промежутке). Введя далее угол  $\theta$  между вектором спина  $\zeta$  и импульсом электрона  $\mathbf{p}$ , а также угол  $\varphi$  между  $[\zeta \mathbf{p}]$  и  $\mathbf{B}$ , получим, что

$$\theta = -\frac{e_0}{mc} \frac{\alpha}{2\pi} \cos \varphi \int_0^t B dt. \quad (5.22)$$

Таким образом, введением радиального магнитного поля в прямолинейный промежуток можно повернуть спин на угол  $\frac{\pi}{2}$  относительно скорости, т.е. в плоскость орбиты электрона. При этом поперечная поляризация, обусловленная радиационными эффектами, перейдет в продольную.

Практически задача преобразования поперечной поляризации электрона в продольную была решена в 1994 г. на электронно-позитронном коллайдере ГЕРА [33] в ФРГ.

С точки зрения возможного влияния деполаризующихся факторов является выгодным сохранить большую часть времени естественную поперечную поляризацию, кроме малого участка траектории, где должна происходить встреча пучков. Этого можно достичь, восстанавливая поперечную поляризацию из продольной методом включения дополнительного поля на выходе из прямолинейного промежутка.

Введение дополнительных, управляющих поляризацией магнитных полей открывает перспективу создания пучков частиц с любой заданной ориентацией спина. В частности, можно даже получить встречные электрон-позитронные пучки с одинаковым направлением спина, что представляет интерес для экспериментов с пучками  $e^+e^-$  одинаковой спиральности, ибо в данном случае оказывается запрещенным электродинамический однофотонный канал и тем самым усиливается роль других аннигиляционных процессов.

В последние годы большой прогресс в экспериментальной физике высоких энергий оказался связан с созданием накопительных колец для электронов и позитронов, а также для тяжелых частиц — протонов и антипротонов. В таких кольцах частицы разного знака заряда движутся навстречу друг другу и приходят в столкновение. При этом, как известно [25], в отличие от столкновения с неподвижной мишенью вся энергия сталкивающихся частиц будет переходить в энергию реакции при их встречном столкновении. Эффективная энергия при этом равна  $E^{\text{эфф}} = 2E^2/mc^2$ , где  $E$  — энергия сталкивающихся частиц.

Эффективность соударения встречных пучков характеризуется светимостью  $L$ , которая определяется из соотношения  $N = L\sigma$ , где  $N$  — число событий физического процесса, наблюдаемых в 1 секунду, а  $\sigma$  — его эффективное сечение. Таким образом, светимость не зависит от природы самого процесса. Очевидно, что повышение скорости реакций между частицами, т. е. величины  $N$ , требует увеличения светимости. Заметим, что для двух встречных пучков с числом частиц соответственно  $n_1$  и  $n_2$  светимость выражается зависимостью  $L = (n_1 n_2 / s) f$ , где  $s$  — площадь поперечного сечения пучка,  $f$  — частота соударения сгустков частиц.

Остановимся кратко на особенностях устойчивости поляризации встречных пучков. Движение встречных пучков обладает рядом особенностей: оно сопровождается сильной нелинейностью коллективного поля встречных частиц и увеличением мощности спиновых резонансов — усилением зависимости стабильности поляризации от бетатронных и синхротронных колебаний: встречный пучок оказывает деполаризирующее действие на спин. В этих условиях плотность резонансов оказывается связанной с плотностью частиц в пучках, и в силу этого возникает вопрос, возможно ли одновременно обеспечить высокую степень поляризации и светимость?

Анализ стабильности поляризации встречных пучков  $e^+e^-$  предусматривает исследование влияния на процесс радиационной поляризации частиц деполаризирующего воздействия квантовых флуктуаций либо любого другого возмущения стохастического характера, приводящих к “диффузии” спинов. С целью количественной оценки такого влияния вводится время деполаризации (величина, обратная к вероятности)

$$\tau_g = (w_g)^{-1} = \left( \sum_k w_k \right)^{-1}, \quad \text{где} \quad w_k = \pi(|U_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)).$$

Здесь  $\omega$  — частота прецессии спина вокруг оси поляризации,  $\omega_k = k_0\omega_0 + k_\alpha\omega_\alpha$  — целочисленная комбинация частот орбитального движения,  $U_k$  — мощность гармоник резонансов,  $\delta$ -функция характеризует воздействие на спин стохастического источника.

Уравнение эволюции спина с учетом сил поляризации-деполяризации можно представить в виде

$$\dot{\zeta} = -\zeta w_n - \zeta w_d, \quad \text{где} \quad w_n = \frac{1}{2\tau} \left( 1 - \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15} \right).$$

Это уравнение имеет очевидное решение:

$$\zeta = -\frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{T}{\tau_n} \left( 1 - e^{-t/T} \right),$$

где характерное время (время установления равновесной поляризации)

$$T = \frac{\tau_d \tau_n}{\tau_d + \tau_n}.$$

Через время  $t > T$  устанавливается равновесная поляризация

$$\zeta_{\text{равн}} = -\frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{1}{1 + \tau_n/\tau_d}. \quad (5.23)$$

В этой формуле можно видеть итог двух конкурирующих процессов: радиационная поляризация — процесс “затухания” — ориентации спинов частиц пучка конкурирует с процессом “диффузии” спинов, приводящим к деполяризации. В итоге устанавливается некоторая равновесная степень поляризации. В этой связи можно заметить известную аналогию с орбитальным движением электронов в накопителе: траектория частиц испытывает конкурирующее воздействие двух типов сил — радиационного затухания и квантового возбуждения. В результате пучок частиц приобретает характерные оптимальные размеры [2]. В дальнейших исследованиях равновесной поляризации Я. С. Дербенев и А. М. Кондратенко рассмотрели влияние неоднородного магнитного поля и получили обобщение фундаментальной формулы (5.13). Наиболее полное исследование в этом направлении было проведено Д. Барбером и С. Мане [34] (см. также обзор Дж. Джексона [34]).

Возвращаясь к анализу равновесной поляризации (5.23), обратим внимание на зависимость мощности резонанса  $U_k$  от амплитуды бетатронных (в первую очередь вертикальных) колебаний. При лобовом столкновении двух встречных пучков установившаяся амплитуда вертикальных колебаний может измениться, причем это изменение зависит от числа частиц в сгустке. Таким образом, можно проследить связь между временем деполяризации пучка  $\tau_d$  и числом частиц в сгустке  $N$ .

Проведенные оценки [24] показали, что условия, ограничивающие допустимое число частиц  $N$  в сгустке, т. е. условия, лимитирующие светимость, совпадают с обычными требованиями к пучку, обеспечивающими устойчивость пучков в орбитальном движении. Поэтому оказывается вполне возможным столкновение поляризованных частиц без разрушения поляризации пучков вследствие их взаимодействия; тем самым доказана возможность обеспечения достаточно высокой степени поляризации пучков при хорошей светимости. Эксперименты со встречными пучками, проведенные на накопительных кольцах SREAR и PEP (Стенфорд, США), PETRA (ФРГ) и LEP (CERN), подтвердили эти выводы теории.

Таким образом, развитие теории и физического понимания влияния резонансов, возникающих при взаимодействии спина с орбитальным движением, на стабильность спиновых состояний частиц открыло возможность продвижения в создании поляризованных пучков в область высоких энергий частиц порядка 100 ГэВ.

Кратко остановимся теперь на задаче получения поляризованных тяжелых частиц (протонов и др.) с помощью ускорительной техники.

Поскольку синхротронное излучение при движении в магнитном поле протонов и других тяжелых частиц практически отсутствует, поляризованные пучки таких частиц могут быть получены только посредством инжекции поляризованных частиц малой энергии с последующим их ускорением. Процесс ускорения поляризованных частиц обладает своими особенностями: помимо решения обычной проблемы устойчивости пучка в процессе его ускорения (орбитальная устойчивость) возникает не менее сложная задача обеспечения устойчивости спинового состояния пучка. Стабильность ориентации спина частиц в процессе их ускорения является необходимым условием получения поляризованных частиц высокой энергии.

Решение задачи сохранения поляризации в процессе ускорения имеет свои сложности. В частности, особое значение имеет пересечение резонансов (см. §7.3), вносящих деполяризацию в ориентацию спина. Проявление вредного воздействия деполяризующих резонансов при этом зависит от особенностей магнитного поля ускорителя и требует специальной конструктивной компенсации, обеспечивающей стабильность спина частиц при их ускорении и при их последующем движении в накопителе.

Принципиальное значение в решении задачи ускорения поляризованных частиц имели исследования задачи о пересечении резонансов

применительно к протонному синхротрону "Сатурн" (Фруассар и Стора), а также детальное изучение деполяризующих эффектов в Аргонском ускорителе протонов ZGS и в Брукхейвенском ускорителе AGS (Козн и Курант).

Эти исследования открыли возможность реализации идеи об ускорении поляризованных тяжелых частиц, и в 1973–1977 г. в Аргонском ускорителе ZGS был получен поляризованный пучок протонов, ускоренных до энергии 12,5 ГэВ. При этом технически удалось успешно преодолеть 29 деполяризующих резонансов с минимальными потерями поляризации. Это была успешная реализация теоретических исследований, положившая начало новому важному методу получения поляризованных тяжелых частиц. Интересные результаты были получены на ускорителе "Сатурн-II", где впервые удалось провести поляризованный протонный пучок через сеть резонансов путем полного адиабатического обращения спина с очень малой деполяризацией. В дальнейшем поляризованные пучки протонов были получены в Японии на протонном синхротроне КЕК, а также в CERN на синхротронах PS и SPS.

Имеются оптимистические надежды на то, что борьба с деполяризацией пучка ускоряемых тяжелых частиц с помощью "сибирских змеек" даст возможность решить проблему получения поляризованных пучков и в области тэвнских энергий ( $1 \text{ ТэВ} = 10^3 \text{ ГэВ}$ ).

### *§5.5. Измерение поляризации пучков релятивистских частиц*

Одним из классических методов измерения поляризации пучка свободных электронов (не связанных в атоме) является моттовское рассеяние. Существенное значение в этой теории имеют работы Мотта (1929), в которых впервые было показано, что рассеяние поперечно поляризованных пучков электронов обладает характерной особенностью, выражающейся в азимутальной асимметрии сечения рассеяния [20].

В основе модели рассеяния, предложенной Моттом, лежит спинорбитальное воздействие, возникающее при движении электрона в поле рассеивающегося потенциала, и в частности в поле ядра.

Перейдем в систему отсчета, связанную с движущимся электроном. В этой системе отсчета возникает магнитное поле, обусловленное движением ядра вокруг покоящегося электрона. В соответствии с преобразованиями Лоренца статическое электрическое поле кулоновского взаимодействия электрона с ядром создает магнитное поле в направлении, перпендикулярном к плоскости рассеяния. Это магнитное поле воздействует на спиновый магнитный момент электрона и ориентирует его в направлении поля, т.е. перпендикулярно к плоскости рассеяния. Так возникает поперечная поляризация вначале неполяризованного пучка электронов.

Как уже отмечалось, в этом интересном явлении рассеяния можно заметить аналогию с поляризацией света, наблюдавшейся Малюсом в 1808 г. Экспериментально поляризация электронов при их рассеянии наблюдалась лишь в 1943 г. — более ста лет разделяют эти два события.

Решающее значение для анализа поляризации пучков электронов методом их рассеяния имела установленная Моттом азимутальная асимметрия в рассеянии поперечно поляризованных пучков частиц, падающих на рассеивающийся центр. Дифференциальные сечения рассеяния электронов с противоположно ориентированными спинами различаются между собой, что и лежит в основе нарушения симметрии резерфордского сечения рассеяния на углы  $\theta$  и  $-\theta$ , причем возникающая асимметрия

$$A = \frac{\sigma(\theta) - \sigma(-\theta)}{\sigma(\theta) + \sigma(-\theta)}$$

зависит от степени поляризации пучка, и в силу этого может быть положена в основу определения спинового состояния.

### *Моттовское рассеяние*

Остановимся кратко на основных моментах теории моттовского рассеяния, в основе которой лежит обычный метод теории рассеяния, модифицированный с учетом спиновых состояний электронов в квазирелятивистском приближении теории Дирака (подробное изложение можно найти в монографии Кесслера [20]).

Полагая, что пучок электронов распространяется вдоль оси  $z$  и частицы описываются плоской волной, асимптотическое решение уравнения Дирака для компонент волновой функции  $\psi_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, 4$ ) на бесконечно большом расстоянии можно представить в виде суперпозиции плоской волны (падающая частица) и расходящейся сферической волны, т. е.

$$\psi_{\lambda z \rightarrow \infty} = a_\lambda e^{ikz} + a'_\lambda(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (5.24)$$

При этом дифференциальное сечение упругого рассеяния определяется соотношением

$$\frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} = \sigma(\theta, \varphi) = \frac{\sum_\lambda |a'_\lambda(\theta, \varphi)|^2}{\sum_\lambda |a_\lambda|^2}, \quad (5.25)$$

поскольку эта величина представляет собой отношение числа частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$ , к плотности потока падающих частиц.

Учтем далее спиновые состояния частицы. В квазирелятивистском приближении теории Дирака волновая функция электрона становится двухкомпонентной, и тогда для двух возможных ориентаций спина асимптотическая форма решения (5.24) имеет очевидное выражение

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} + \begin{pmatrix} s_{11}(\theta, \varphi) \\ s_{21}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \frac{e^{ikr}}{r}; \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikz} + \begin{pmatrix} s_{12}(\theta, \varphi) \\ s_{22}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (5.26)$$

В этом выражении компоненты  $s_{12}$  и  $s_{21}$  соответствуют изменению ориентации спина (спин-флип), которое может произойти вследствие спин-орбитального взаимодействия.

Решение уравнения Дирака для случая рассеяния в поле потенциала, обладающего сферической симметрией, приводит к следующему выражению для амплитуд при их разложении по парциальным волнам:

$$s_{11} = s_{22} = f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(e^{2i\eta_l} - 1) + l(e^{2i\eta_{l+1}} - 1)] P_l(\cos \theta), \quad (5.27)$$

$$s_{12} = -s_{21} e^{2i\varphi} = g(\theta) e^{i\varphi} = \frac{1}{2ik} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{2i\eta_{l+1}} - 2e^{2i\eta_l}) P'_l(\cos \theta) e^{i\varphi}.$$

Здесь  $P_l(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра,  $\varphi$  — азимутальный угол.

Для произвольной ориентации спина частиц в падающей волне можно воспользоваться когерентной суперпозицией базисных состояний (5.26), полагая, что рассеянная волна имеет асимптотику

$$\left[ A \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} \right] \frac{e^{ikr}}{r} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5.28)$$

где спиновые коэффициенты  $A$  и  $B$  определяют направление спина в системе покоя электрона. При этом дифференциальное сечение рассеяния в соответствии с общей формулой (5.25) имеет следующий вид:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (|f|^2 + |g|^2) \left[ 1 + S(\theta) \frac{A^* B e^{i\varphi} - A B^* e^{-i\varphi}}{i(|A|^2 + |B|^2)} \right], \quad (5.29)$$

где функция

$$S(\theta) = i \frac{f^* g - g^* f}{|f|^2 + |g|^2} = - \frac{2\text{Im}(fg^*)}{|f|^2 + |g|^2} \quad (5.30)$$

(см. [20]). Вид этой функции определяется конкретным выбором рассеивающего потенциала. Отсюда следует, что в случае, если падающий пучок частиц поперечно поляризован, дифференциальное сечение рассеяния обладает азимутальной (лево-правой) асимметрией — зависимостью от угла  $\varphi$ . В этом и заключается замечательный вывод теории рассеяния Мотта. Действительно, полагая, что падающий пучок электронов поперечно поляризован вдоль оси  $x$ , т. е.  $A = B = 1$  (рис. 20), получим с помощью (5.29), что

$$\sigma(\theta, \varphi) = (|f|^2 + |g|^2) [1 - S(\theta) \sin \varphi]. \quad (5.31)$$

Это равенство можно записать в более компактной форме, если ввести единичный вектор  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный к плоскости рассеяния:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}{|[\mathbf{k}\mathbf{k}']|} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния можно записать в виде, не зависящем от выбора координат:

$$\sigma(\theta, \varphi) = I(\theta)[1 + S(\theta)\mathbf{P}\mathbf{n}], \quad (5.32)$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации падающего пучка,  $I(\theta) = |f|^2 + |g|^2$  — интенсивность рассеяния. Если пучок не обладает поперечной поляризацией, то азимутальная асимметрия в рассеянии исчезает. Эти свойства лежат в основе методов измерения поляризации электронов (анализатор, или детектор Мотта). Заметим, что максимум проявления поляризации соответствует минимуму интенсивности рассеяния.

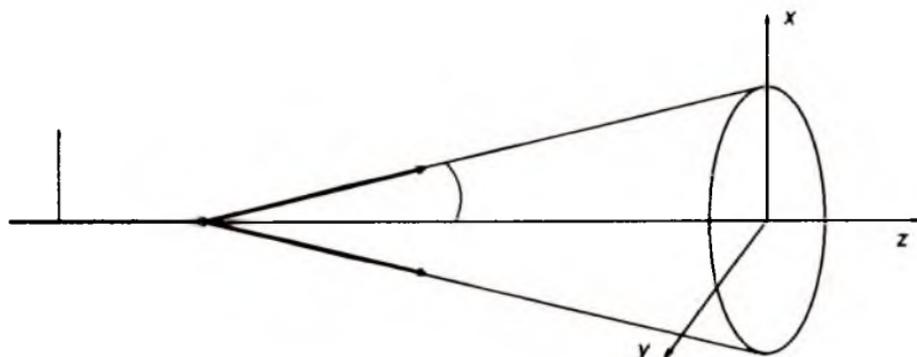


Рис. 20. Лево-правая асимметрия рассеяния полностью поляризованного (вдоль оси  $x$ ) пучка электронов

Обратим далее внимание на весьма интересный вывод, который следует из теории Мотта: если пучок падающих электронов вначале не был поляризован, то в процессе рассеяния он приобретает поперечную поляризацию. Чтобы в этом убедиться, обратимся к матрице плотности спиновых состояний

$$\rho = |\chi\rangle\langle\chi|,$$

где спинор  $\chi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ . Тогда, имея в виду преобразование (5.28):

$$\chi' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & -ge^{-i\varphi} \\ ge^{i\varphi} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = S\chi,$$

для матрицы плотности после рассеяния можно записать, что

$$\rho' = \chi'\chi'^{\dagger} = S\chi\chi^{\dagger}S^{\dagger} = \frac{1}{2}S(1 + \mathbf{P}\sigma)S^{\dagger}\text{Sp}(\rho).$$

Тогда поляризация, приобретенная электроном в процессе рассеяния, может быть выражена как

$$\mathbf{P}' = \frac{1}{2} \frac{\text{Sp}(SS^+\sigma)}{\text{Sp}(\rho')} \text{Sp}(\rho) \quad (5.33)$$

при условии, что вначале пучок был неполяризован, т. е. в формуле (5.32) следует положить  $\mathbf{P} = 0$ . После вычисления получим, что

$$\mathbf{P}' = S(\theta)\mathbf{n}. \quad (5.34)$$

Таким образом, функция  $S(\theta)$  характеризует не только степень асимметрии в рассеянии поляризованного пучка электронов, но и величину поляризации, приобретаемой пучком при рассеянии. Очень важно заметить, что возникающая поляризация может быть только поперечной, т. е. перпендикулярной к плоскости рассеяния (см. (5.34)). Это является следствием закона сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях: возникающая поляризация не может иметь продольной компоненты, ибо тогда она не обладала бы свойством инвариантности по отношению к зеркальному отражению.

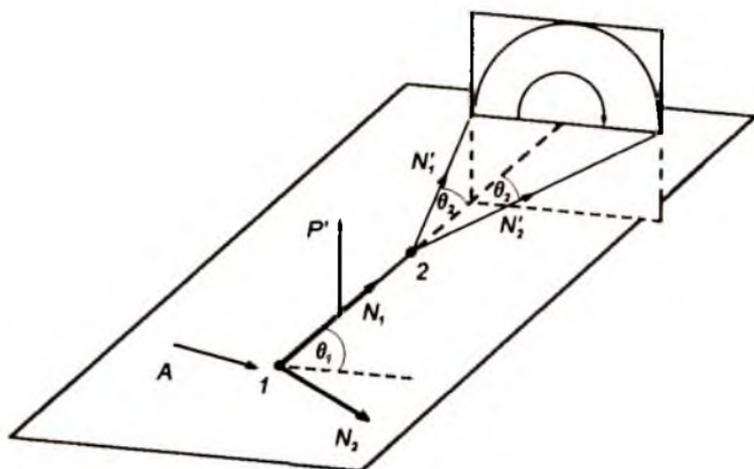


Рис. 21. Двойное моттовское рассеяние ( $N_1 = N_2$ ,  $N_1' \neq N_2'$ )

Поляризацию пучка электронов, возникающую в процессе их рассеяния, можно обнаружить в экспериментах по “двойному рассеянию”. Обратимся к схеме эксперимента Мотта по двойному рассеянию (рис. 21). Неполяризованный вначале первичный пучок электронов рассеивается на первой мишени с равной вероятностью ( $N_1 = N_2$ ). Вторичное рассеяние, однако, происходит при этом иначе: частицы как бы “запоминают” историю своего первоначального рассеяния и во время вторичного рассеяния несут информацию о рассеянии на первой мишени. Очевидно, что это явление ( $N_1' \neq N_2'$ ) может быть связано

только с внутренней степенью свободы — спином.

Итак, если падающий пучок электронов был неполяризован, то в результате процесса рассеяния на рассеивающем центре 1 он приобретает поляризацию

$$\mathbf{P}' = S(\theta_1)\mathbf{n}_1$$

(см. (5.34)). Но тогда дифференциальное сечение вторичного рассеяния имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= I(\theta_2)[1 + S(\theta_2)\mathbf{P}'\mathbf{n}_2] = I(\theta_2)[1 + S(\theta_2)S(\theta_1)\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2] = \\ &= I(\theta_2)[1 + S(\theta_1)S(\theta_2)\cos\varphi],\end{aligned}$$

где  $\varphi$  — угол между нормальными к плоскости рассеяния. Таким образом, измерение лево-правой асимметрии рассеяния

$$A = S(\theta_1)S(\theta_2) = \frac{\sigma_2(\varphi = 0) - \sigma_2(\varphi = \pi)}{\sigma_2(\varphi = 0) + \sigma_2(\varphi = \pi)}$$

дает непосредственную информацию относительно функции  $S(\theta)$ . В случае одинаковых мишеней 1 и 2 и равенства углов рассеяния  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  получим  $A = S^2(\theta)$ . Тем самым открывается возможность экспериментального определения функции  $S(\theta)$ , характеризующей угловую асимметрию и возникающую при рассеянии поляризацию пучка частиц.

В связи с развитием техники физического эксперимента с поляризованными пучками частиц возникла необходимость разработки методов анализа состояний поляризации релятивистских частиц, включая ультрарелятивистскую область их энергий. Остановимся сейчас на некоторых экспериментальных методах измерения поляризации релятивистских частиц, в основе которых лежит спиновая зависимость ряда процессов.

### 1. Метод внутрипучкового рассеяния частиц (эффект Тушека)

В первых экспериментах по исследованию состояния поляризации электронов и позитронов использовался метод измерений, основанный на упругом меллеровском рассеянии частиц друг на друге в одном и том же сгустке.

Это рассеяние, связанное с поперечными бетатронными колебаниями частиц, может привести к преобразованию радиального импульса в продольный, т. е. к различным значениям энергии двух частиц, отличающихся от средней энергии пучка. Ведущее магнитное поле выделяет эти электроны из сгустка, в силу чего внутрипучковое рассеяние (эффект Тушека) приводит к выбыванию пар частиц из пучка. Действительно, если добавочный продольный импульс, приобретаемый частицей при рассеянии, будет превышать некоторое (максимально

допустимое условиями стабильности орбитального движения) значение  $\Delta p_{\max}$ , то это приведет к потере частиц, ибо радиус траектории электрона меняется:  $\beta E = e_0 H R$ ,  $\Delta R = c \Delta p / e_0 H$  и при  $\Delta p > \Delta p_{\max}$  частицы не могут удержаться на орбите.

Весьма важной в этом процессе является зависимость сечения меллеровского рассеяния электронов от ориентации спинов частиц. Действительно, дифференциальное сечение упругого электрон-электронного рассеяния в системе центра масс пучка с учетом поляризационных состояний взаимодействующих частиц можно представить в виде

$$d\sigma_c = \frac{r_0^2}{4} \frac{d\varphi d\theta}{p^4 (1+p^2) \sin^3 \theta} [F(p, \theta) - \zeta \zeta' G(p, \theta)],$$

где

$$F(p, \theta) = (2p^2 + 1)^2 (4 - 3 \sin^2 \theta) + p^4 \sin^2 \theta (4 + 3 \sin^2 \theta),$$

$$G(p, \theta) = 2p^2 + 1 - p^4 (4 + 3 \sin^2 \theta), \quad (5.35)$$

где  $r_0 = e^2 / mc^2$  — классический радиус электрона,  $p = p_c / mc$  — импульс в системе центра масс пучка (СЦМ),  $\theta$  — угол рассеяния,  $\zeta$  и  $\zeta'$  — состояния поляризации сталкивающихся частиц, причем выбрана поперечная поляризация:  $\zeta_{\mathbf{p}} = 0$ .

В этом выражении первые слагаемые в фигурных скобках не зависят от ориентации спинов частиц — они соответствуют хорошо известной формуле Меллера, которая следует из (5.35) при суммировании по спиновым состояниям.

В реальном накопительном кольце в СЦМ двух электронов взаимодействующих частиц существует квантовое возбуждение радиальных колебаний, связанное с флуктуационным характером синхротронного излучения [2]. И следовательно, каждый из электронов представляет собой квантовый осциллятор в некотором состоянии  $n$  с заданным для данного  $n$  распределением вероятности различных значений импульса

$$f(p_i^\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta q} \frac{1}{2^n n!} e^{-(p_i^\perp / \delta q)^2} H_n^2(p_i^\perp / \delta q),$$

где  $H_n$  — полином Эрмита, причем  $f$  — функция, нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p) dp = 1.$$

Рассмотрим теперь вероятность выбывания из пучка двух взаимодействующих электронов. Соответствующее выражение для дифференциальной вероятности имеет вид

$$dw = \frac{2c p_r}{V} \frac{mc^2}{E} \sigma(p_r) f(p_1^\perp) f(p_2^\perp) dp_1 dp_2,$$

где  $p_r$  — радиальная компонента импульса в лабораторной системе отсчета, а  $\sigma(p_r)$  — полное сечение процесса выбывающих из пучка частиц, которое можно получить интегрированием исходной величины (5.35).

Опуская детали расчета, для случая слабозбужденных квантовых осцилляторов ( $n = 0, 1$ ) приведем выражение для времени жизни пучка  $\tau_0$ :

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\pi r_0^2 c \rho}{(\Delta p_{\max})^2} \frac{3}{2\sqrt{2}\pi} (1 - 0,22 \zeta_1 \zeta_2), \quad (5.36)$$

где  $\rho = N_0/V$  — плотность частиц в пучке,  $V$  — объем пучка,  $\Delta p_{\max}$  — максимально допустимый продольный импульс.

Таким образом, для поляризованных электронов ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ) время жизни пучка увеличивается, что соответствует уменьшению интенсивности рассеяния электронов через время  $t > \tau_0$  на 22%, что и наблюдалось в эксперименте.

Как известно, время радиационной самополяризации электронов в накопительном кольце определяется формулой (см. § 3.5.)

$$\tau^{-1} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{m c e^2}{\hbar^2} \gamma^2 \left( \frac{H}{H_0} \right)^3, \quad H_0 = \frac{m^2 c^3}{e_0 \hbar}.$$

Применительно к условиям эксперимента выражение для “скорости счета” выбывающих частиц можно записать в виде

$$Y = Y_{\max} - b \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)^2, \quad (5.37)$$

где  $Y_{\max}$  и  $b$  — положительные коэффициенты,  $\tau$  — время поляризации. Вначале, когда пучок неполяризован ( $t = 0$ ), число выбывающих пар максимально:  $Y = Y_{\max}$ ; затем, по мере установления радиационной поляризации, скорость их выбывания экспоненциально падает и стремится к предельному значению  $Y = Y_{\max} - b$ . Вслед за тем с помощью включения дополнительного магнитного поля энергию пучка изменяют так, чтобы частота прецессии спина совпала с одной из собственных частот орбитального движения, — это вызывает деполяризацию пучка и, как следствие, резкое возрастание счета выбывающих пар до своего максимального значения.

Резонансная деполяризация пучка открывает возможность определения основных характеристик эффекта радиационной поляризации: сравнивая скачок в счете выбывающих пар электронов с формулой для определения времени (5.37), можно найти коэффициенты  $Y_{\max}$  и  $b$ , а следовательно, степень поляризации пучка и время  $\tau$ .

Метод наблюдения поляризации пучка, основанный на рассмотренном здесь внутривпучковом рассеянии, применяется в ИЯФ СОАН на ВЭПП-2М, в Стенфорде (США), а также в Орсе (Франция) и в ФРГ (DESY).

## 2. Метод аннигиляции

Метод измерения аннигиляции, основанный на эффекте Тушека, оказывается непригодным для измерения поляризации встречных пучков частиц, и кроме того, он очень чувствителен к деталям структуры пучка, что снижает необходимую точность измерения поляризации.

Метод аннигиляции, свободный от этих недостатков, основан на взаимодействии частиц высокой энергии, поскольку сечение двухчастичных реакций оказывается чувствительным к ориентации спинов сталкивающихся частиц — электронов и позитронов. Так, в частности, при аннигиляции электрона и позитрона могут образовываться пары мюонов, причем сечение этого процесса ( $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ) имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\mu\mu}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 [1 + \cos^2 \theta + P^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi], \quad (5.38)$$

где  $P = |\zeta_1| = |\zeta_2|$  — степень поляризации электронов и позитронов;  $\theta$  — полярный угол  $\mu^+$ -мезона по отношению к падающему позитрону;  $\varphi$  — азимутальный угол, который составляет плоскость рождения (плоскость, проходящая через импульсы начальной и конечной частиц) с горизонтальной плоскостью. Таким образом, процесс рождения мюонной пары, зависит от поляризации электронов и позитронов, что и должно наблюдаться в эксперименте в зависимости процесса от угла  $\varphi$ . Азимутальная асимметрия должна также наблюдаться в процессах аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  с дифференциальным сечением

$$\frac{d\sigma_{ee}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \left( \frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\sin^2 \theta}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 P^2 \cos 2\varphi \right]. \quad (5.39)$$

Как это следует из (5.38) и (5.39), угловая асимметрия совершенно очевидна: например, для случая полной поляризации  $p^2 = 1$  из (5.38) следует

$$\frac{d\sigma_{\mu\mu}}{d\Omega}(\theta = \varphi = \pi/2) = 0,$$

$$\frac{d\sigma_{\mu\mu}}{d\Omega}(\theta = \pi/2, \varphi = 0) = \frac{r_0^2}{8} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2.$$

В экспериментах, проведенных на накопительном кольце SPEAR (США), при энергии электронов и позитронов 3,7 ГэВ наблюдалась анизотропия рождения мюонных пар в хорошем совпадении результатов с теорией. При этом определялась степень азимутальной асимметрии процесса — параметр анизотропии  $\lambda = (V - H)/(V + H)$ , где  $H$  — число “горизонтальных событий”  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , т.е. событий, лежащих в пределах угла  $\varphi: -45^\circ < \varphi < 45^\circ$  и  $135^\circ < \varphi < 225^\circ$ , а  $V$  — число “вертикальных событий” с углом  $\varphi$ , лежащим в остальных областях. Исходя из формулы (5.38) при интегрировании по подходящим

областям можно установить связь степени поляризации частиц  $P$  и постоянной  $\lambda$ , взятой из эксперимента, и далее методом максимального правдоподобия произвести необходимое сопоставление данных эксперимента и теории. Интересно заметить, что при энергии электронов и позитронов  $E = 1,55$  ГэВ частота прецессии спина совпадала с гармониками орбитальной частоты, и поэтому из-за деполаризующего резонанса никакой поляризации в пучке отмечено не было.

В хорошем согласии с теорией поляризация исследовалась тем же методом на накопителе ВЭПП-2М (Новосибирск).

### 3. Метод комптоновского рассеяния

Появление мощных лазеров наряду с существованием циклических ускорителей, ускоряющих заряженные частицы до высоких энергий, открыло реальные возможности экспериментального исследования процесса комптоновского рассеяния света на ультрарелятивистских электронах.

Интересной и важной особенностью эффекта Комптона является зависимость процесса рассеяния от циркулярной поляризации фотонов и поперечной поляризации электронов: дифференциальное сечение процесса имеет вид

$$d\sigma = d\sigma_0 + d\sigma_1 P_\phi P_\perp \sin \varphi,$$

где  $d\sigma_0$  — сечение рассеяния для неполяризованных частиц,  $P_\phi$  — степень циркулярной поляризации фотонов,  $P_\perp$  — степень поперечной поляризации электронов,  $\varphi$  — угол между плоскостью, перпендикулярной вектору поляризации электронов, и плоскостью рассеяния. Таким образом, при рассеянии циркулярно-поляризованных фотонов на поперечно-поляризованных электронах должна наблюдаться асимметрия в угловом распределении “вверх-вниз”.

Заметим далее, что в случае рассеяния на движущемся электроне энергия падающего  $\varepsilon$  и рассеянного  $\varepsilon_p$   $\gamma$ -квантов имеет вид

$$\varepsilon_p = \varepsilon \frac{1 - \beta \cos \theta_1}{1 - \beta \cos \theta_2 + \frac{\varepsilon}{E}(1 - \cos \theta_3)},$$

где  $\theta_1$  — угол между импульсом падающего фотона и импульсом движущегося электрона,  $\theta_2$  — угол между импульсом рассеянного фотона и импульсом электрона,  $\theta_3$  — угол между импульсами падающего и рассеянного фотонов. При лобовом столкновении электрона и фотона ( $\theta_1 = \pi$ ) максимум энергии рассеянного фотона  $\varepsilon_{p \max}$  достигается в том случае, если рассеянный фотон движется в направлении электрона, угол вылета  $\theta_2 \cong \frac{n}{\gamma} \ll 1$ , а  $\theta_3 = \pi$ . Тогда энергия рассеянного кванта

$$\varepsilon_p = \frac{2E\lambda}{1 + n^2 + 2\lambda} \quad (c = \hbar = 1),$$

где  $E$  — энергия электрона,  $\lambda = 2\epsilon E/m$ . Заметим далее, что для со-  
временных накопителей и лазеров коэффициент  $\lambda \ll 1$ . В этом пред-  
положении формулу для дифференциального сечения рассеяния можно  
привести к виду

$$d\sigma = \frac{4r_0^2 n(1+n^4)}{(1+n^2)^4} [1 - AP_\phi P_s \sin \varphi] dnd\varphi.$$

Максимальное значение коэффициента асимметрии  $A = 2\lambda n/(1+n^4)$ ,  
достигается при  $n = 0,76$  и равно  $A_{\max} = 1,14$ . По величине азиру-  
тальной асимметрии, обнаруженной в эксперименте, можно судить о  
степени поляризации электронов.

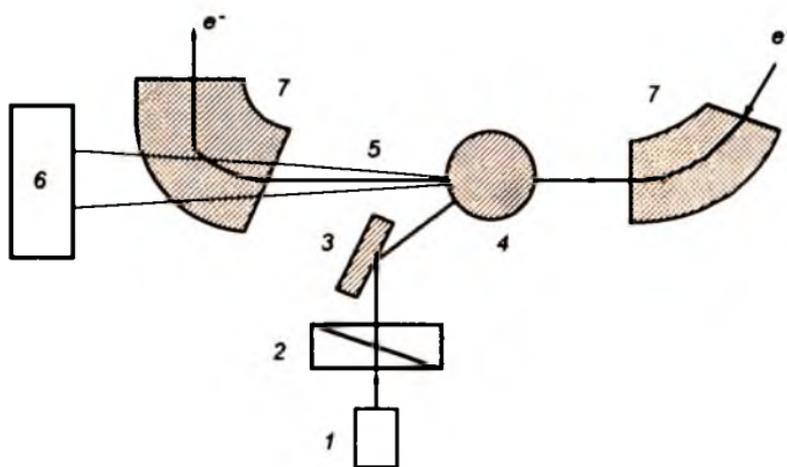


Рис. 22. Эксперимент по комптоновскому рассеянию циркулярно поляризованных фотонов на электронах: 1 — лазер; 2 — поляризатор; 3 — зеркало; 4 — область соударения фотонов с электронами; 5 — обратно рассеянные фотоны; 6 — счетчик фотонов; 7 — отклоняющий магнит

Измерение методом комптоновского рассеяния не разрушает поляризацию пучка: при взаимодействии фотонов с электронами исследуется ориентация спинов отдельных электронов и по отдельным испытаниям-тестам делается вывод о пучке. Поляризованный луч лазера при измерениях направляется против пучка электронов (рис. 22). Отдельные лазерные фотоны взаимодействуют с электронами и отражаются назад (“обратный комптон-эффект”), получая очень большую энергию. Затем они попадают в счетчики. Характеристическое распределение рассеянных фотонов дает возможность определения степени поляризации электронов.

Методика, разработанная на накопителе PETRA (ФРГ), была усовершенствована так, что процесс измерения поляризации занимает

около 10 мин, поэтому степень поляризации электрон-позитронных пучков можно измерять непрерывно без нарушения ориентации спина.

#### 4. Метод наблюдения спиновой зависимости синхротронного излучения

Все рассмотренные нами методы по наблюдению и измерению поляризации релятивистских электрон-позитронных пучков являются в известной мере косвенными: они дают возможность судить об ориентации спина частиц в результате тех или иных взаимодействий (столкновение частиц, аннигиляция, воздействие на пучок электронов и позитронов лазерными фотонами). В результате таких экспериментов начальное состояние поляризации частицы разрушается.

В этой связи интересно упомянуть еще об одной возможности измерения — наблюдении поляризации электронов и позитронов по спиновой зависимости испускаемого ими синхротронного излучения. Этот способ наблюдения, предложенный в ИЯФ СОАН, является в каком-то смысле прямым — он не требует воздействия на пучок электронов со стороны других частиц: этот метод основан на наблюдении зависимости мощности синхротронного излучения от ориентации спина частицы, другими словами, от состояния поляризации пучка электронов или позитронов [35].

Как было показано в § 3.4, выражение для мощности СИ поляризованного электрона имеет вид

$$W_i = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \frac{e^2 c}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4 \int_0^\infty \frac{y dy}{(1 + \xi y)^4} F_i(y),$$

где  $F_i(y)$  характеризует спектральный состав  $\sigma$ - и  $\pi$ - компонент линейной поляризации:

$$F_\sigma = (1 + \xi y) \left[ \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y) \right] - 2\xi \xi y K_{1/3}(y),$$

$$F_\pi = (1 + \xi y) \left[ \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx - K_{2/3}(y) \right]. \quad (5.40)$$

Поскольку в накопителях электронов и позитронов существует естественный процесс радиационной поляризации, спины электронов выстраиваются преимущественно против направления магнитного поля, а спины позитронов — в направлении по полю. Тем самым открывается возможность воспользоваться спиновой зависимостью СИ для

измерения поляризации электронов и позитронов в накопителях. Действительно, исходя из формул (5.40) можно получить, что поправка к спектру мощности СИ, связанная с ориентацией спина, имеет вид

$$F_{\sigma}^{\text{сп}} = F_{\sigma}(\xi = 0) \cdot \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{2\xi y |\zeta| K_{1/3}(y)}{\int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3}(y)}. \quad (5.41)$$

Очевидно, далее, что наиболее благоприятной с точки зрения постановки эксперимента является коротковолновая область спектра, соответствующая большим значениям спектральной переменной  $y$ . Имея далее ввиду асимптотику функций Макдональда

$$K_{\mu}(y)_{y \rightarrow \infty} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y},$$

получим из (5.41)

$$\Delta = |\zeta| y \xi. \quad (5.42)$$

Здесь мы заметим, что максимально достижимая величина поляризации пучков в накопителе  $|\zeta| = 0,92$ .

На накопительном кольце ВЭПП-4 были проведены измерения поляризации пучков позитронов с помощью рассматриваемого метода. В силу того, что спиновая поправка к мощности излучения  $\Delta \leq 10^{-4}$  весьма мала, для избежания трудностей в ее измерении сравнивали мощности излучения двух сгустков позитронов: поляризованных и неполяризованных, одновременно вращающихся в накопителе. При этом с помощью специального деполяризатора один из сгустков подвергался селективной деполяризации при сохранении поляризации второго сгустка. По измерению скачка энергии излучения, вызванного поляризацией частиц, методом Монте-Карло определяли поляризацию пучков позитронов.

Таким образом, наблюдение спиновой зависимости синхротронного излучения показало себя как эффективный метод исследования поляризованных пучков в накопителе. Поскольку эффект растет с увеличением энергии частиц, этот метод представляет особый интерес для накопителей, рассчитанных на очень высокие значения энергии 50–100 ГэВ.

В заключение заметим, что измерение поляризации электронов и позитронов методом наблюдения спиновой зависимости СИ вносит новое слово в принципиальную проблему измерения спина свободного электрона (квантовая теория измерений). Здесь источником информации о спиновой ориентации служит сам электрон, свободный — не связанный в атоме. При этом наблюдение поляризации не связано непосредственно с воздействием макроприбора на микрообъект.

Интересно заметить, что эксперименты по оптическому наблюдению спиновой зависимости мощности синхротронного излучения являются по существу первым опытом по визуальному наблюдению спина электрона. В ранних экспериментах группы Поллока в США (1947) наблюдался “электронный свет” — это было визуальное наблюдение электрона, “светящийся электрон”. Теперь речь идет о визуальном наблюдении вклада спинового момента в полную мощность синхротронного излучения:

$$W^{\text{spin}} = -\zeta \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{e^2 c}{R^2} \frac{\hbar}{mcR} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^6 \int_0^\infty y^2 K_{1/3}(y) dy.$$

Это является своеобразным “спиновым светом”.

“Спиновый свет” линейно поляризован (излучается только  $\sigma$ -компонента линейной поляризации), максимум в спектре смещен в сторону коротких волн (функция  $y^2 K_{1/3}(y)$  достигает максимума при  $y_m \simeq 1,78$  в отличие от СИ, где  $y_m \simeq 0,33$ ,  $y = \frac{\omega}{\omega_c}$ ,  $\omega_c = \omega_0 \frac{3}{2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^3$ ). Как и следовало ожидать, мощность спинового излучения пропорциональна постоянной Планка  $\hbar$ , ибо излучение, связанное со спином, — это существенно квантовый эффект (более подробно см. [32]).

## ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ПУЧКИ ЧАСТИЦ И НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Развитие техники ускорителей и коллайдеров, а также создание поляризованных пучков частиц привели к экспериментальному открытию ряда неожиданных и принципиально новых спиновых эффектов, которые не находили объяснения в теории. Так, в частности, одним из загадочных явлений, необъяснимых в полной мере и до настоящего времени, явилось наблюдение сильной поляризации  $\Lambda$ -гиперонов, рождающихся в инклюзивных реакциях при  $pp$ -столкновениях (Fermilab).

Применение в эксперименте поляризованных пучков протонов (CGS, AGS) в области энергий  $\sim 1$  ГэВ обнаружило сильно выраженную энергетическую структуру ряда зависящих от спина параметров в полном сечении  $pp$ -рассеяния. Это событие также явилось полной неожиданностью [26; 27], а дальнейшие исследования с поляризованными пучками выявили характерную спин-спиновую зависимость в процессах упругого рассеяния поляризованных протонов:  $p^\uparrow + p^\uparrow \rightarrow p + p$ , причем встретились серьезные трудности в согласовании этого наблюдения с квантовой хромодинамикой (КХД).

В экспериментах по измерению поперечных сечений рассеяния продольно поляризованных протонов на ядрах было обнаружено несохранение четности: полное сечение оказалось зависящим от состояния спиральности протона, что свидетельствовало о вкладе в процесс рассеяния слабых взаимодействий. И наконец, в рассеянии  $p^\uparrow + p \rightarrow p + p$ , при энергии 70 ГэВ (ИФВЭ, Серпухов) на поляризованной мишени было найдено убедительное доказательство противоречия эксперимента и модели сильных взаимодействий Редже. Все эти экспериментальные данные говорили о том, что спиновые эффекты не только не исчезают при высоких энергиях, но, напротив, начинают играть возрастающую роль как изящного и убедительного метода проверки существующей стандартной модели (СМ) сильных и электрослабых взаимодействий, а также поисков новых частиц и взаимодействий за ее пределами. Эксперименты с поляризованными пучками частиц стимулируют дальнейшую разработку теории с целью объяснения ряда принципиально новых явлений природы, ибо, как образно сказал А. Криш, руководитель работ в Брукхейвенской национальной лаборатории, "спиновые эксперименты, по-видимому, пытаются нам что-то сказать, но мы еще не знаем, что именно".

Исследования спиновых эффектов с применением поляризованных электрон-позитронных пучков подтвердили ряд закономерностей, вытекающих из основ современной теории слабых и электромагнитных

взаимодействий Глэшоу–Вайнберга–Салама. В Стенфорде (США) на накопительном кольце SPEAR исследовалась струйная структура в рождении адронов в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции. Спиновая зависимость процесса рождения адронов позволила определить спин кварков (1/2) и подтвердить теорию сильных взаимодействий. Фундаментальное экспериментальное подтверждение объединенной теории электрослабых взаимодействий было получено при исследовании процесса рождения мюонов в  $e^+e^-$ -аннигиляции. Оно было проведено на поляризованных  $e^+e^-$ -пучках в накопителе PETRA (ФРГ). Поляризация электрон-позитронных пучков дала возможность провести эксперимент в условиях относительного усиления асимметрии в угловом распределении мюонов, обусловленного слабыми взаимодействиями, за счет подавления реакции в электромагнитном канале.

Большое внимание привлекли к себе эксперименты по изучению процесса глубоконеупругого рассеяния поляризованных электронов и мюонов на поляризованных протонах. При этом исследовалось распределение спина протона между его конститuentами [28].

Таким образом, исследование спиновых закономерностей в процессах взаимодействий частиц высокой энергии не только расширяет нашу информацию о природе взаимодействий, но и является необходимым элементом на пути построения современной теории. Поэтому становится вполне объяснимым и понятным то внимание, которое уделяется физике спина и экспериментам с поляризованными пучками частиц — одному из наиболее современных методов исследования.

### §6.1. Действующие коллайдеры — источники поляризованных частиц

Ускорители заряженных частиц в наши дни являются важнейшим инструментом экспериментальных исследований в области физики высоких энергий. Развитие техники ускорителей и продвижение в области все более высоких энергий частиц внесло на протяжении последних лет большой вклад в наши представления о природе взаимодействия элементарных частиц. Достаточно привести в связи с этим пример выдающегося открытия на коллайдере Sp $\bar{p}$ S (CERN) переносчиков слабых взаимодействий промежуточных  $W^\pm$ - и  $Z^0$ -бозонов. Это был очень сложный и тонкий эксперимент, блестяще подтвердивший объединенную теорию электрослабых взаимодействий.

Особое значение в современной физике элементарных частиц приобретают эксперименты с поляризованными пучками, и в свете этого одним из важных направлений развития физики ускорителей является разработка и сооружение ускорителей и накопительных колец для получения поляризованных пучков частиц высокой энергии.

Остановимся сейчас прежде всего на накопительных кольцах — коллайдерах для легких частиц — электронов и позитронов.

В табл. 1 приведены данные о действующих коллайдерах — источниках электронов и позитронов с ориентированным спином.

## Накопительные кольца

Наименование	Местоположение	$E$ , ГэВ	$R_{\text{орбиты}}$ , м
ACO	Орсе, Франция	1,1	1,1
ВЭПП-2М	Новосибирск, Россия	1,34	2
SPEAR	Стенфорд, США	8	12,7
DORIS	Гамбург, ФРГ	10	12,1
CESR	Итака, США	12	32,5
ВЭПП-4	Новосибирск, Россия	15	33
PEP	Стенфорд, США	30	170
PETRA	Гамбург, ФРГ	45	200
TRISTAN	Цукуба, Япония	60	
LEP-I	CERN, Швейцария	100	27 км (периметр)
SLC	Стенфорд, США	100	линейный, $L = 3$ км

Все эти коллайдеры являются источниками поляризованных электронов и позитронов — частицы приобретают ориентированный спин в результате воздействия синхротронного излучения — стандартная для накопителей поляризация. Эффект радиационной поляризации завоевал, таким образом, прочное положение в физическом эксперименте. В коллайдере SLC синхротронное излучение отсутствует. Электроны должны быть предварительно (на стадии инжекции) поляризованы и в дальнейшем ускоряются, сохраняя поляризацию, до высоких энергий.

Интересно заметить, что электрон-позитронный коллайдер SLC (Стенфорд, США) с энергией 100 ГэВ в системе центра масс является в известной степени конкурентом LEP-I, ибо он компактен (его длина всего 3 км), в нем отсутствуют энергетические потери, связанные с излучением. В этом коллайдере происходит столкновение поляризованных электронов с неполяризованными электронами. В перспективе дальнейшего роста энергии частиц, при переходе к коллайдерам для частиц сверхвысоких энергий ( $\sim 1$  ТэВ в СЦМ) возникает экономическая проблема: создание колец-гигантов становится нереальным и переход к технике линейных коллайдеров и ускорителей в будущем становится, по-видимому, неизбежным.

Далее остановимся на протонных ускорителях — источниках поляризованных протонов.

Таблица 2

## Протонные ускорители

Наименование	Местоположение	$E$ , ГэВ
SATURNE-II	Сакле, Франция	$p^+$ — 3, $d^+$ — 1,15
PS (КЕК)	Цукуба, Япония	12
AGS	Брукхейвен, США	26
HERA	Гамбург, ФРГ	30 ГэВ $e^-$ и 820 ГэВ $p$
( $e^- p$ -коллайдер)		$\sqrt{s} = 350$ ГэВ

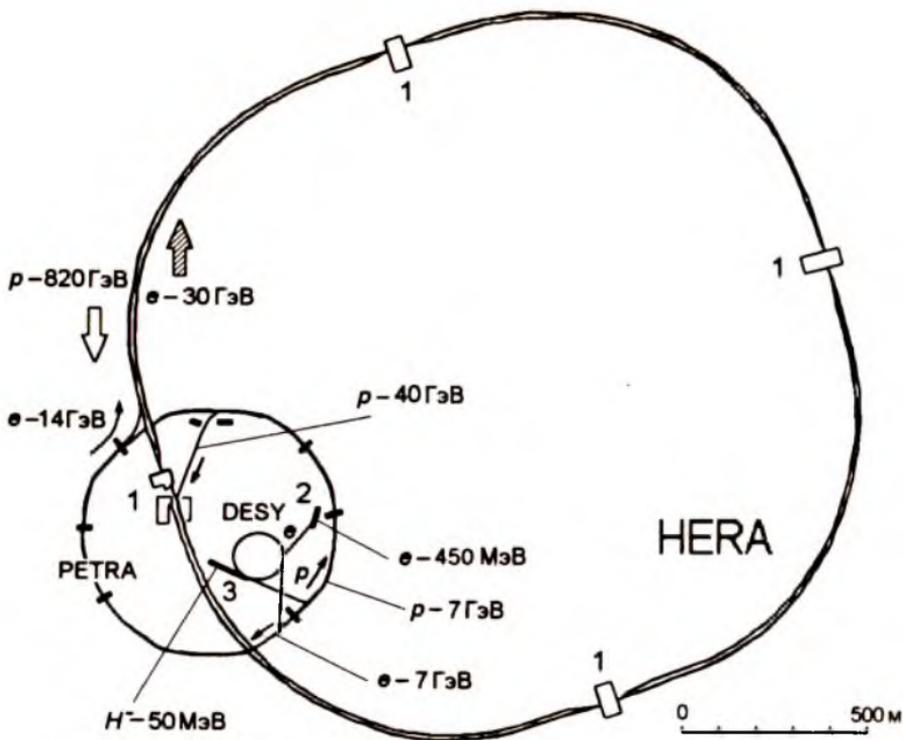


Рис. 23. Электрон-протонный коллайдер ГЕРА:

- 1 — экспериментальные залы; 2 — инжектор электронов;  
3 — инжектор  $H^-$  (линейные ускорители)

Остановимся более подробно на коллайдерах нового поколения. В 1989 г. был произведен физический запуск большого электрон-позитронного коллайдера LEP (CERN), рассчитанного в первую очередь на пучки  $e^-e^+$  с энергией  $2 \times 55$  ГэВ и светимостью  $1,6 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . В дальнейшем предполагается увеличить энергию до  $2 \times 100$  ГэВ. Напомним, что эквивалентная энергия при облучении неподвижной мишени равна  $E_0 = 2E^2/mc^2 = 6$  ТэВ. Научная общественность рассматривает запуск коллайдера как важное событие для научной и культурной жизни Европы. Как сообщалось на конференции по спиновой физике высоких энергий в Бонне в 1990 г., ученым удалось успешно преодолеть деполяризующие воздействия на спин частиц и получить поляризованные пучки электронов с энергией 45,5 ГэВ. В целях достижения максимальной поляризации разработаны специальные методы борьбы с деполяризующими эффектами, и в частности с деполяризацией при прохождении резонансов. Сама резонансная деполяризация будет применяться как рабочий метод измерения масс частиц и абсолютной калибровки энергии коллайдера.

Предполагаются широкие исследования по проверке модели электрослабых взаимодействий Глэшоу–Вайнберга–Салама, с этой целью создаются продольно поляризованные пучки электронов и позитронов с помощью преобразования естественной поперечной поляризации.

Программа физических исследований на LEP очень широка, она открывает путь к “новой” физике: поиску хиггсовских бозонов, суперчастиц, лептокварков, поискам нарушений динамических симметрий, поиску свидетельств составной модели кварков. Отмечаются широкие возможности применения LEP в качестве “фабрики  $Z^0$ -бозонов”, а это открывает путь к проведению прецизионной проверки теории электрослабых взаимодействий в высоких порядках теории возмущений.

Недавно вошел в строй другой, очень перспективный коллайдер нового поколения HERA (Гамбург, ФРГ), в котором сталкиваются пучки протонов (820 ГэВ) и электронов (30 ГэВ), причем пучки электронов поступают из накопителя PETRA с поляризацией  $\sim 80\%$ .

Первый в мире электрон-позитронный коллайдер HERA сооружен в ФРГ в Гамбурге в научном центре DESY при коллективном участии и сотрудничестве Великобритании, США, Франции, Италии, Канады, Китая, Нидерландов, Израиля, Польши. Он состоит из двух накопительных колец для накопления протонов (820 ГэВ) и электронов (30 ГэВ) с последующим столкновением пучков в четырех точках главного кольца. Энергия в системе центра масс равна  $\sqrt{s} = 314$  ГэВ, и светимость достигает  $1,6 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  (рис. 23).

Важным моментом в конструкции коллайдера HERA является поляризация электронного пучка, предварительно накопленного в накопительном кольце PETRA. Вследствие радиационной поляризации в течение 28 мин пучок электронов с энергией 30 ГэВ приобретает поперечную поляризацию и инжектируется в большое кольцо с поляризацией до 80%. Предусмотрены возможность поворота спина и преобразование поперечной поляризации в продольную [33].

HERA представляет собой уникальный коллайдер, который в отличие от других, сравнимых по энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, дает возможность исследования лептон-кварковых столкновений в области высоких энергий частиц. HERA — это прецизионный инструмент в изучении глубоко-неупругих процессов  $e^-p$ -рассеяния — изучении кварков и их взаимодействия.

Коллайдер HERA открывает широкие перспективы в исследовании структуры материи вплоть до расстояний  $\sim 10^{-18}$  см. Это дает возможность исследования явлений, выходящих за пределы стандартной модели и открывает перспективу получения новых неожиданных результатов. Особое значение при этом приобретают эксперименты с участием продольно-поляризованных электронов — это важно для исследования слабых взаимодействий, суперсимметрии, а также для расширения информации в целом ряде других принципиальных исследований.

## §6.2. Экспериментальное наблюдение спиновой зависимости процессов на встречных пучках поляризованных электронов

### 1. Резонансная деполяризация — высокопрецизионный метод измерения энергии частиц в накопителе

Этот метод ИЯФ СОАН основан на точном измерении частоты прецессии спина с помощью резонансной деполяризации пучка частиц. Действительно, как уже отмечалось, частота прецессии спина вокруг поперечного магнитного поля  $\Omega$  связана с энергией частицы  $E = mc^2\gamma$  соотношением (см. § 2.6)

$$\Omega = \omega_0(1 + \alpha\gamma/2\pi), \quad (6.1)$$

где  $\gamma = E/mc^2$  — релятивистский фактор,  $\omega_0 = e_0c\bar{H}_z/E$  — релятивистская циклотронная частота. При этом предполагается, что в формуле (6.1) произведено усреднение по быстрым бетатронным колебаниям. Синхротронные медленные колебания энергии частицы вблизи среднего значения  $\gamma_0$  с частотой  $\omega_\gamma$  приводят к тому, что частота прецессии спина оказывается модулированной, вследствие чего частотный спектр прецессии спина обладает основной частотой  $\Omega$  и смещенными боковыми частотами  $\Omega \pm n\omega_\gamma$ , где  $n$  — целое число. В практически важных случаях, однако, эти боковые частоты вносят экспоненциально малый вклад, который может быть учтен при окончательной интерпретации результатов. Также может быть учтен и вклад нелинейности магнитного поля, вносящий известный разброс в измеренные частоты.

Соотношение (6.1) можно записать в более общем виде, если ввести величину  $a_e$ :  $\mu = -\mu_0(1 + a_e)$ , характеризующую аномальную часть магнитного момента:

$$E = mc^2 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} - 1 \right) \frac{1}{a_e}. \quad (6.2)$$

Таким образом, измерение энергии частицы непосредственно связано с измерением частот  $\Omega$  и  $\omega_0$ . Это соотношение, являющееся следствием общих уравнений динамики спина Баргманна–Мишеля–Телегди, нарушается в случае включения продольного магнитного поля. Резонансная деполяризация пучка производится с помощью введения продольного магнитного поля на прямолинейном участке траектории. Это может быть реализовано с помощью деполяризатора (токовая петля), создающего высокочастотное переменное поле, изменяющееся с частотой  $\omega_d = \omega_0(a_e\gamma - 1)$ . При выполнении условия резонанса  $\omega_d \pm k\omega_0 = \Omega$  ( $k$  — целое число) поляризация разрушается, что и фиксируется любым чувствительным способом измерения, в частности методом внутривидеопучкового рассеяния — регистрации на совпадение попарно выбывающих из пучка частиц (эффект Тушека). Этот метод применяется, в частности, на накопителе ВЭПП-2М; при более высоких энергиях более перспективен метод комптоновского рассеяния циркулярно поляризованных фотонов на электронах.

## 2. Прецизионное определение масс частиц

Метод резонансной поляризации дает возможность решить задачу калибровки энергии пучка в накопителе с точностью до  $10^{-5}$ . Это имеет большое значение для измерения масс частиц, участвующих в реакциях на встречных пучках. С помощью метода прецизионного измерения в ИЯФ СОАН был проведен эксперимент на коллайдере ВЭПП-2М по определению масс  $\varphi$ -,  $\omega$ -,  $K^{\pm}$ -,  $K^0$ -мезонов и на накопителе ВЭПП-4 масс  $\psi$ -,  $\psi'$ -, а также  $\Upsilon$ -,  $\Upsilon'$ - и  $\Upsilon''$ -резонансов.

Одной из первых методом резонансной деполяризации была измерена масса  $\varphi$ -мезонного резонанса на накопителе ВЭПП-2. Распад  $\varphi$ -мезона детектировался по двум каналам:

$$e^+e^- \rightarrow \varphi \rightarrow K_S^0 K_L^0 \quad \text{и} \quad e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0.$$

Калибровка абсолютной шкалы энергии осуществлялась методом резонансной деполяризации, при этом максимальная поляризация пучка электронов  $\zeta = 80\%$  достигалась в течение  $\tau = 50$  мин при максимальной энергии накопителя. Оптимальная резонансная кривая числа событий с учетом необходимых поправок приводит к значению массы  $M_\varphi = 1019,52 \pm 0,13$  МэВ — это намного выше по точности, чем усредненное табличное значение. Таким образом, метод резонансной деполяризации утвердился сразу же как прецизионный метод измерения масс частиц.

В экспериментах, проведенных на накопителе ВЭПП-4, с помощью метода резонансной деполяризации с высокой точностью была измерена масса  $J/\psi$ -мезонов, а также  $\Upsilon$ (ипсилон)-резонансов. Напомним, что само открытие  $J/\psi$ -частиц в 1974 г. в Стенфорде было связано с экспериментами на накопительном кольце SPEAR. При изучении  $e^+e^-$ -аннигиляции на встречных пучках  $e^+e^- \rightarrow$  адроны,  $\mu^+\mu^-$ ,  $e^+e^-$  был обнаружен узкий резонанс при значении массы  $\simeq 3,1$  ГэВ/ $c^2$ , получивший название  $J/\psi$ -частицы. Одновременно открытие этой частицы произошло также в Брукхейвене (этим объясняется двойное название). Обнаружение на корнельском накопительном кольце CESR ипсилон-частицы  $\Upsilon$  также имело очень большое значение: семейство этих частиц явилось сильным подтверждением реальности кварков как фундаментальных частиц адронной материи.

Вскоре  $J/\psi$ -частица была обнаружена также в экспериментах и на других накопительных кольцах во Фраскати (Италия), в Гамбурге (ФРГ). Само открытие  $J/\psi$  было неожиданным, ибо не было никаких предсказаний относительно ее существования. Новая частица (в дальнейшем, как выяснилось, семейство частиц), относится к группе нестабильных сильно взаимодействующих бозонов (адронов) с массами в диапазоне 3–4 ГэВ. Распад псионов ( $J/\psi$ -частиц) на обычные адроны оказался сильно подавленным, что и нашло объяснение на основе введения новых квантовых чисел со своими правилами отбора. В связи с этим было предложено расширить кварковую модель за счет введения четвертого “очарованного”  $c$ -кварка, несущего новое квантовое

число — “очарование” (“шарм”, или “чарм”). В этой модели  $J/\psi$ -частицу можно отождествлять с основным состоянием чармония — квазисвязанной  $c\bar{c}$ -пары чармированных кварков. Так было положено начало физике “новых” частиц — тяжелых кварков.

Прецизионное измерение масс  $\psi$ - и  $\psi'$ -частиц (обозначаем  $J/\psi$  как  $\psi$ ) было проведено в ИЯФ СОАН в 1981 г. на накопителе ВЭПП-4 тем же методом резонансной деполяризации ( $e^+e^- \rightarrow$  адроны) и привело к значению масс  $M_\psi = 3096,93 \pm 0,09$  МэВ и  $M_{\psi'} = 3686,00 \pm 0,10$  МэВ.

В дальнейших экспериментах, проведенных на накопительном кольце ВЭПП-4, с помощью метода резонансной деполяризации были измерены массы частиц, принадлежащих семейству ипсилон  $\Upsilon$ -мезонов ( $\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon''$ ) в инклюзивных реакциях  $e^+e^- \rightarrow$  адроны. В результате точной калибровки энергии и обработки экспериментальных данных по кривой Брейта-Вигнера для массы  $\Upsilon$ -мезона было получено значение  $M_\Upsilon = 9460,59 \pm 0,12$  МэВ.

Метод резонансной деполяризации применялся также с успехом в экспериментах на корнельском накопительном кольце CESR, а также в ФРГ (DESY) на накопительном кольце DORIS. Открытие семейства  $\Upsilon$ -частиц было сделано группой ученых США (Колумбийский университет) при исследовании спектра масс  $\mu^+\mu^-$ -пары, рожденной в соударениях высокоэнергетических протонов (400 ГэВ), с ядрами Be, Cu, Pb:

$$p + \text{ядро} \rightarrow \mu^+\mu^- + X.$$

Позже при увеличении энергии встречных пучков эти же частицы наблюдались на накопительном кольце CESR в  $e^+e^-$ -аннигиляции.

По аналогии с  $\psi$ -частицами  $\Upsilon$ -частицы интерпретируются как связанное состояние еще более тяжелых b-кварков. Подчеркнем здесь, что изучение  $\psi$ - и  $\Upsilon$ -частиц связано с проблемами квантовой хромодинамики (КХД) и поэтому эксперименты с поляризованными  $e^+e^-$ -пучками высокой энергии играют важную роль с точки зрения проверки ряда ее основных положений.

### 3. Прецизионное измерение аномального магнитного момента электрона и позитрона

Как известно, одним из фундаментальных экспериментов по проверке основных положений КЭД является исследование равенства аномальных магнитных моментов (АММ) электрона и позитрона, которое является следствием СРТ теоремы Людерса-Паули и принципа релятивистской инвариантности. Интересные эксперименты по прецизионному определению АММ электрона и позитрона были проведены в ИЯФ СОАН с помощью метода резонансной деполяризации на накопительном кольце ВЭПП-2. Принципиальное отличие от ранее известных измерений в этих опытах состояло в том, что АММ частиц измерялись в одном и том же накопительном кольце — это обеспечивало наилучшие условия для их сравнения.

В 1987 г. на накопительном кольце ВЭПП-2М производилось сравнение АММ циркулирующих  $e^+e^-$  с энергией 650 МэВ. В течение 1 ч

устанавливалась стандартная поляризация пучков вследствие эффекта радиационной поляризации — пучки поляризовались на 80%. Поскольку частота прецессии спина  $\Omega$  непосредственно связана с величиной аномального магнитного момента

$$\Omega = \omega_0(1 + a_e \gamma), \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad (6.3)$$

оказывается возможным определить с помощью метода резонансной деполяризации непосредственно  $\Omega^-$ - и  $\Omega^+$ -частоты, соответствующие прецессии спина электрона и позитрона, и тем самым определить величину АММ этих частиц. Степень поляризации пучков определялась методом внутривидеопроводимого рассеяния (эффект Тушека).

В экспериментах было получено, что на уровне достоверности 95% отклонение аномальных моментов электрона и позитрона ( $\Delta\mu = \mu^- + \mu^+$ ) ограничено величиной  $\Delta\mu/\mu_0 < 10^{-8}$ . Таким образом, с высокой точностью подтверждается справедливость СРТ теоремы — одной из основных теорем квантовой электродинамики (КЭД).

В последнее время обсуждается возможность проверки выводов теории о динамической природе АММ электрона и позитрона (см. § 3.9). Высказываются предложения, что уже в настоящее время зависимость  $a_e$  от инвариантного параметра  $\chi = \frac{H}{H_0} \frac{E}{mc^2}$  может быть экспериментально проверена с помощью явления прецессии спина частицы, канализированной в монокристалле. Для проведения эксперимента необходим высокоэнергетичный пучок электронов ( $E \sim 200$  ГэВ), падающий на кристалл. В экспериментах, проведенных на ускорителе SPS (CERN), пучки электронов с энергией 150 ГэВ направлялись с очень малым угловым разбросом вдоль оси кристалла германия при низкой температуре ( $\sim 100$  К). При этом инвариантный параметр  $\chi$  приближался к единице. В этих условиях открывается возможность проверки КЭД в области экстремальных значений внешнего поля: в области энергий  $\chi \geq 1$  АММ электрона должен проявить свою динамическую природу:  $a_e = a_e(\chi)$ .

#### 4. Наблюдение интерференции слабых и электромагнитных взаимодействий

Экспериментальная проверка новых фундаментальных идей в физике является одним из главных моментов в исследованиях — это ключ к пониманию законов природы. В настоящее время в программу научных исследований ведущих лабораторий мира входят эксперименты по проверке теории электрослабых взаимодействий Глэшоу–Салама–Вайнберга, явившейся весьма впечатляющим достижением науки.

Как известно, эта теория представляет собой объединение электромагнитных и слабых взаимодействий, причем различие между этими взаимодействиями связывается со спонтанным нарушением калибровочной симметрии, приводящим к появлению массовых членов

для промежуточных бозонов  $W^\pm$ ,  $Z^0$  за счет механизма Хиггса. Калибровочная модель электрослабых взаимодействий Глэшоу–Салама–Вайнберга, основанная на  $SU(2) \times U(1)$ -симметрии, уверенно описывает широкую совокупность экспериментальных данных по электрослабым процессам, используя по существу лишь один параметр — угол Вайнберга  $\theta_W$ , с помощью которого вводится связь между электрическим зарядом  $e$  и слабой константой связи  $g$ :

$$e = g \sin \theta_W, \quad g^2 = 4\sqrt{2}G_F M_W^2, \quad \sin^2 \theta_W = 0,23 \pm 0,01.$$

1983 год был ознаменован выдающимся достижением в физике высоких энергий: в CERN (Женева) на  $Sp\bar{p}S$  протон-антипротонном коллайдере при полной энергии в СЦМ  $\sqrt{s} = 540$  ГэВ были открыты  $W^\pm$ - и  $Z^0$ -бозоны и установлены их масса и спин (равен единице в хорошем согласии с теорией). Тем самым были подтверждены основные принципы теории электро-слабых взаимодействий и созданы стимулирующие предпосылки к ее дальнейшему развитию. Следует заметить, что электро-слабые процессы при высоких энергиях взаимодействующих частиц обнаруживают сильную спиновую зависимость — зависимость от поляризации взаимодействующих частиц. Поэтому особое значение приобретают эксперименты по проверке теорий, способные дать “вызов” стандартной  $SU(2) \times U(1)$ -модели электрослабых взаимодействий. Прецизионная проверка  $SU(2) \times U(1)$ -модели особенно интересна, поскольку параллельно с ней успешно развиваются традиционные эксперименты по проверке КЭД. Это создает благоприятную почву для стремления к истинному пониманию электро-слабых процессов, поскольку их изучение происходит на уровне наших знаний о процессах электродинамики.

Остановим внимание на одном из экспериментов — опыте по интерференции слабых и электромагнитных взаимодействий. Как известно, электромагнитные взаимодействия не всегда можно отделить от слабых взаимодействий.

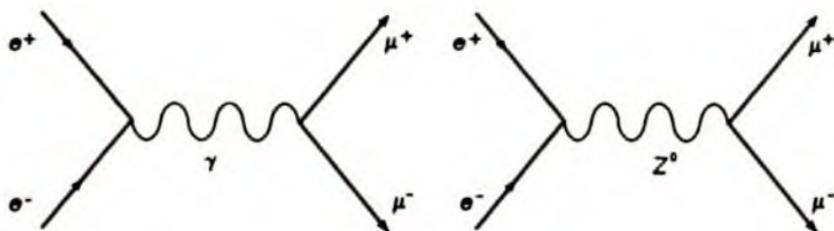


Рис. 24. Схема аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Так, в частности, процесс рождения мюонов в  $e^+e^-$ -аннигиляции уже давно привлекал к себе внимание с точки зрения возможности наблюдения интерференции слабых и электромагнитных взаимодействий. Согласно единой калибровочной модели  $SU(2) \times U(1)$  Глэшоу-Салама-Вайнберга аннигиляция  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  может идти через виртуальный фотон или через промежуточный  $Z^0$ -бозон (слабый нейтральный ток) (рис. 24). Оба процесса интерферируют между собой. Поскольку бозонная вершина содержит и аксиальное, и векторное взаимодействие, рождение мюонов через  $Z^0$ -бозон приводит к наличию зарядовой асимметрии в угловом распределении  $\mu^+\mu^-$ . Наблюдение зарядовой асимметрии распределения мюонов дает возможность установить существование эффекта нейтральных токов. Важно в связи с этим подчеркнуть, что зависимость рассмотренных процессов от поляризации электронов и позитронов дает возможность проведения экспериментов в условиях относительного усиления асимметрии в угловом распределении мюонов, обусловленной слабым взаимодействием, за счет подавления реакции в электромагнитном канале.

Такие эксперименты были поставлены на накопительном кольце PETRA на встречных  $e^+e^-$ -пучках  $2 \times 29$  ГэВ. При энергии 15 ГэВ поляризация пучка достигала 60% в течение 20 мин. Наблюдавшаяся асимметрия рождения мюонов подтвердила модель Глэшоу-Салама-Вайнберга. Эти эксперименты явились одним из выдающихся достижений экспериментальной физики высоких энергий.

С точки зрения теории электро-слабых взаимодействий весьма интересной является перспектива проведения экспериментов с поляризованными частицами в электрон-протонных столкновениях (HERA-DESY: электроны с энергией 30 ГэВ и протоны — 820 ГэВ). В этих условиях спиновые эффекты приобретают особое значение, причем при таких энергиях обмен фотоном становится столь же вероятен, как и  $Z^0$ -бозонный обмен.

Большой интерес в области высоких энергий (LEP) представляют исследования  $e^+e^-$ -аннигиляции в  $W^\pm$ -бозоны:  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ . Этот процесс полностью предсказывается стандартной  $SU(2) \times U(1)$ -моделью электрослабых взаимодействий, он дает возможность получения информации о трехбозонной векторной связи для  $W^+\gamma W^-$ - и  $W^+Z^0W^-$ -вершин, непосредственно связанных с аномальным магнитным и электрическим квадрупольным моментами  $W^\pm$ -частиц:

$$\Delta\mu = \frac{e\lambda_W}{2M_W}, \quad Q_W = \frac{ek_W}{M_W^2}.$$

В любой калибровочной теории эти взаимодействия должны подчиняться требованию СРТ инвариантности, но значения аномального магнитного и квадрупольного электрического моментов, полученные из общетеоретических соображений:  $\lambda_W = 1$ ,  $k_W = 0$ , пока не имеют экспериментального подтверждения.

Наблюдение рождения пар  $W^\pm$ -бозонов дает возможность определить эти величины, что может явиться одним из прецизионных испытаний стандартной  $SU(2) \times U(1)$ -модели. Экспериментальные возможности наблюдения рассмотренных процессов связаны с достижением высокой энергии  $e^+e^-$ -пучков. Оценки показывают, что это будет реально для LEP-II: коллайдера  $2 \times 100$  ГэВ — при этом представляется возможность получать  $10^4$   $W^+W^-$ -пар в год при светимости  $5 \cdot 10^{31}$  см $^{-2}$  с $^{-1}$ . Интересно, что в процессах аннигиляции  $e^+e^-$  поляризационная зависимость может быть изучена в деталях и для начального, и для конечного состояний. В анализе экспериментов большое значение приобретает асимметрия процесса в зависимости от поляризации пучков. Рождающиеся  $W^\pm$ -бозоны обладают характерной спиральностью, что является отражением природы слабых взаимодействий. Поскольку продольная поляризация  $W^\pm$ -бозонов имеет непосредственную связь с хиггсовским механизмом генерации массы, есть уверенность, что LEP-II даст возможность изучить продольную поляризацию  $W^\pm$ -бозонов и тем самым пролить свет на механизм Хиггса.

Еще несколько слов о поляризационных эффектах, возникающих в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции вблизи порога рождения  $Z^0$ . Некоторые интересные особенности возникают при взаимодействии продольно поляризованных пучков электронов с неполяризованными позитронами — такая ситуация может быть реализована наиболее просто в линейном коллайдере, в случае накопительного кольца пучок позитронов может быть предварительно селективно деполаризован.

Существенным моментом в такой аннигиляции является возникновение поляризации у  $Z^0$ -бозона, даже если пучок позитронов не был поляризован (следствие сохранения спиральности в вершине). При этом продольно поляризованные электроны “отбирают” из неполяризованного пучка позитронов частицы в таком спиновом состоянии, которое дает возможность рождения  $Z^0$ -бозона со спином 1, поляризованного в направлении исходной поляризации электрона. Аннигиляция с позитронами противоположной поляризации не реализуется.

Как уже отмечалось в начале этой главы, электронные процессы связаны с поляризацией начальных пучков. Так, в частности, поляризацию  $Z^0$ -бозона можно связать с продольной поляризацией электрона при помощи соотношения

$$(P_{Z^0}) = \frac{2g_V g_A + P_e(g_V^2 + g_A^2)}{g_V^2 + g_A^2 + 2P_e g_V g_A}, \quad (6.4)$$

где постоянные  $g_V \equiv g_V^e$  и  $g_A \equiv g_A^e$  для электронов в стандартной модели Глэшоу–Салама–Вайнберга связаны с углом Вайнберга  $\theta_W$  соотношением

$$g_V^e = \frac{e(4 \sin^2 \theta_W - 1)}{\sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad g_A^e = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad (6.5)$$

причем для полностью продольно поляризованного пучка электронов ( $P_e = \pm 1$ ) поляризация  $P_{Z^0}$  также приобретает значение  $\pm 1$  — соответственно правая и левая круговая поляризация. Из формулы (6.4) следует также, что поляризация  $Z^0$ -бозона возникает в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции даже для неполяризованных пучков: если  $P_e = 0$ , то  $\langle P_{Z^0} \rangle = -0,16$  (если  $\sin^2 \theta_W = 0,23$ ). Это говорит о том, что в процессе аннигиляции более вероятно аннигиляция с левополяризованными электронами.

Приведенные примеры иллюстрируют ведущую роль экспериментов с поляризованными  $e^+e^-$ -пучками в физике электрослабых взаимодействий, поскольку эксперименты с поляризованными частицами могут быть положены в основу прецизионной проверки стандартной модели электро-слабых взаимодействий, а также исследования возможного выхода за ее пределы.

## 5. Струйная структура рождения адронов

Как известно, основной трудностью в экспериментах по проверке КХД (или объединенной стандартной модели  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  сильных и электрослабых взаимодействий) является полная невозможность производить эксперименты непосредственно с базисными конститuentами — кварками и глюонами. В этом плане большой интерес представляют струи адронов, рождающиеся в жестких процессах аннигиляции  $e^+e^-$ ,  $p\bar{p}$ , — эти струйные события содержат интересную и принципиально важную информацию о справедливости наших физических представлений о природе сильных взаимодействий.

В соответствии с кварк-партонной моделью (КХД) адроны состоят из двух- (мезон) или трех- (барион) валентных кварков  $q$  и глюонов — безмассовых частиц — переносчиков сильного взаимодействия между кварками. Взаимодействие частиц в рассматриваемой модели сводится к взаимодействию их конститuentов — партонов, причем при высокой энергии в силу асимптотической свободы КХД можно рассматривать кварки как квазисвободные частицы.

Таковы особенности физического содержания кварк-партонной модели. Как известно [29], в кварк-партонной модели элементарных частиц адроны рождаются в  $e^+e^-$ - (а также в  $p\bar{p}$ -) аннигиляции путем последовательного превращения пары в виртуальный фотон, фотона — в кварк-антикварковую пару с последующим преобразованием каждого кварка в отдельную струю адронов. При этом вся энергия столкновения  $e^+e^-$  переходит в энергию струй адронов. Струи — это группы адронов, у которых поперечный импульс значительно меньше продольного. Причина ограничения поперечного импульса остается пока неизвестной [29], однако если поперечный импульс адронов ограничен, то распределение рождающихся адронов должно соответствовать начальному направлению вылета кварков. При таких условиях адроны в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции будут образовываться в виде протиположно направленных струй (рис. 25): лидирующие адроны как бы “запоминают” направление, в котором были испущены кварки.

В соответствии с изложенными здесь соображениями угловое распределение струй должно иметь вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} [1 + \alpha(\cos^2 \theta + P^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi)]. \quad (6.6)$$

Здесь  $\theta$  — полярный угол оси струи с соответствующим направлением падающего позитрона;  $\varphi$  — азимутальный угол с плоскостью накопительного кольца;  $P$  — поперечная поляризация каждого пучка электронов и позитронов;  $\alpha = (\sigma_T - \sigma_L)/(\sigma_T + \sigma_L)$ , где  $\sigma_T$  и  $\sigma_L$  — структурные функции сечения для инклюзивных адронов, рождающихся через поперечно ( $\sigma_T$ ) и продольно ( $\sigma_L$ ) поляризованные фотоны.

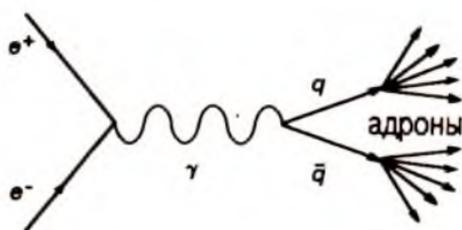


Рис. 25. Струйное рождение адронов (Угол  $\varphi$  отсчитывается от плоскости накопительного кольца)

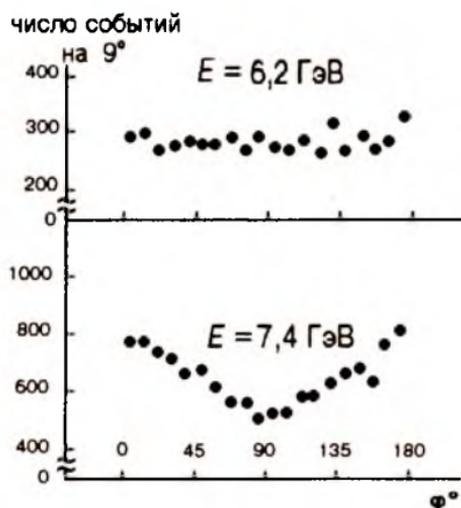


Рис. 26. Наблюдение азимутальной зависимости распределения осей струй в процессе аннигиляции  $e^+e^-$

Весьма существенным моментом струйной модели является зависимость сечения рождающихся адронов от ориентации спинов  $e^+e^-$ , что открыло возможность определения спинов кварков исходя из углового распределения струй.

В пионерской экспериментальной работе — впечатляющем эксперименте, проведенном на накопительном кольце SPEAR при энергии 7,4 ГэВ, — адронное инклюзивное распределение обнаружило отчетливо выраженную азимутальную асимметрию. Таким образом, была подтверждена кварк-протонная модель, и было установлено, что спин кварков имеет более вероятно значение  $1/2$ , а не нуль. Для контроля проводились также измерения при энергии 6,2 ГэВ, когда вследствие резонанса поляризация пучков терялась. В этом случае азимутальная асимметрия не наблюдалась (рис. 26).

Повышение энергии сталкивающихся пучков  $e^+e^-$  до значения более 10 ГэВ открывает возможность наблюдения роли глюонов в качественном изменении поведения струй. В 1979 г. в DESY (ФРГ) на коллайдере PETRA впервые наблюдались трехструйные события, свидетельствующие об экспериментальном открытии глюонов и явившееся убедительным подтверждением основных представлений квантовой хромодинамики (КХД).

Квантовая хромодинамика предсказывает возможность наблюдения трехструйных событий образования адронов в  $e^+e^-$ -аннигиляции в результате процесса

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g \rightarrow 3 \text{ струи адронов,}$$

в котором виртуальный глюон излучается кварком или антикварком на малых расстояниях. В дальнейшем эти партоны материализуются в виде струй адронов с ограниченным поперечным импульсом.

Трехструйные события указывают прямой путь к изучению свойств глюонов, включая определение константы кварк-глюонной связи. Наблюдение трехструйных событий в рождении адронов дает возможность обосновать значение спина глюона путем измерения расположения осей струй и выявления азимутальной асимметрии, обусловленной поперечной поляризацией подобно тому, как это было сделано в случае двухструйных событий. Изучение аннигиляции продольно поляризованных пучков электронов и позитронов позволит расширить информацию об этих интересных явлениях.

### §6.3. Поляризационные эффекты при взаимодействии пучков протонов с ориентированным спином

Как уже отмечалось, в последние годы возрастает интерес к исследованию спиновых эффектов в динамике взаимодействия частиц, и в частности адронов. Это связано не только с фундаментальными достижениями в виде открытия ряда неожиданных спиновых эффектов, но также и с тем важным обстоятельством, что квантовая хромодинамика в ее современном состоянии испытывает ряд затруднений в полном описании сильных взаимодействий, в том числе и спиновых явлений. Особое значение приобретают проблемы исследования поляризованных пучков  $ep$ ,  $pp$ ,  $\bar{p}p$  высоких энергий, поскольку новое положение коллайдеров открывает для эксперимента хорошие перспективы. Фронт исследований поляризационных явлений сейчас очень широк, остановимся кратко на некоторых вопросах.

#### 1. Поляризация в упругом $p^\uparrow + p \rightarrow p + p$ -рассеянии

Интересный и неожиданный результат был получен в эксперименте с поляризованными пучками протонов в упругом рассеянии  $p^\uparrow + p \rightarrow p + p$ , проведенном в ИФВЭ в Протвино [26]. При анализе мезон-нуклонного рассеяния было установлено, что зависимость поляризации от энергии при фиксированном  $t$  в полном согласии с экспериментом до 150 ГэВ описывается степенным законом

$$\zeta(s, t) = \zeta_0 s^{\alpha_{\text{эфф}}(t)}, \quad (6.7)$$

где  $\alpha_{\text{эфф}}(t)$  – эффективная траектория Редже,  $\zeta_0$  – константа, а  $t$  и  $s$  – инварианты Мандельштама:  $s = (p_1 + p_2)^2$  характеризует эффективную массу системы ( $p_1$  и  $p_2$  – четырехмерные импульсы),  $t = (p_1 - p_2)^2$  дает информацию о передаче энергии и импульса.

Эксперименты с мезон-нуклонным рассеянием подтвердили справедливость (6.7), а также ряд других следствий асимптотического подхода к проблеме рассеяния. Однако в опытах с поляризованными  $p^\uparrow$ -пучками ( $p^\uparrow p$ - и  $p^\uparrow \bar{p}$ -рассеяние) были получены данные, противоречащие простой полюсной модели Редже. В частности, в  $t$ -зависимости в области  $t \geq 0,5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> наблюдалось неизвестное ранее явление: отрицательное значение поляризации вместо стремления к нулю сверху, как это предсказывалось теоретически. Впервые это было установлено в ИФВЭ [26] и в дальнейшем нашло подтверждение в других исследованиях. Более точные измерения поляризации в  $pp$ -рассеянии подтвердили заметное изменение знака поляризации вблизи  $|t| \sim 0,5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>.

Это новое явление было одним из серьезных аргументов, противоречащих точке зрения об исчезающе малом вкладе спина при высоких энергиях. Исследование поляризационных эффектов в упругом рассеянии адронов на малые и большие углы оказывается важным и в дальнейшей перспективе экспериментальной физики, ибо это может дать ценную информацию о динамике спиновых взаимодействий и структуре адронов. Это тем более важно, что, как известно, исследование спиновых явлений в КХД встречает трудности, ибо теория возмущений как традиционный метод квантовой теории здесь оказывается неприменимой – при рассеянии на малые углы в условиях адронных взаимодействий на расстояниях порядка  $1 \text{ Ф}$  теория возмущений приводит к неверным результатам.

Таким образом, исследование  $p^\uparrow p$ - и  $p^\uparrow \bar{p}$ -рассеяния может стимулировать новые подходы к динамике спиновых явлений, отражающие непертурбативность спиновых эффектов.

## 2. Эффекты спин-спинового взаимодействия в процессах $p^\uparrow + p^\uparrow \rightarrow p + p$ -рассеяния при высоких энергиях

Первые эксперименты, неожиданно обнаружившие большие значения для спиновых корреляций в  $p^\uparrow p^\uparrow$ - упругом рассеянии, были проведены с поляризованными пучками протонов при их рассеянии на поляризованной мишени (ускоритель ZGS, США). Эти первые наблюдения нашли подтверждение в работах, выполненных с помощью пучков поляризованных протонов на ускорителе AGS (30 ГэВ) Брукхейвенской национальной лаборатории США. Исследования проводились при энергиях 13; 16,5 и 18,5 ГэВ – это было продолжением серии экспериментов, начало которым было положено в Аргонской национальной лаборатории на ускорителе ZGS. Исследование корреляционного параметра

$$A_{NN} = \frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{\uparrow\uparrow} - (\frac{d\sigma}{d\Omega})^{\downarrow\downarrow}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{\uparrow\uparrow} + (\frac{d\sigma}{d\Omega})^{\downarrow\downarrow}}$$

21. Филд Д, Пикассо З., Комбли Ф. Проверка фундаментальных физических теорий в опытах со свободными заряженными лептонами// УФН. 1979. Т. 127, вып. 4. С. 553–592.
22. Брагинский В. Б. Разрешение в макроскопических измерениях: достижения и перспективы// УФН. 1988. Т. 156, вып. 1. С. 93–115.
23. Комминс Ю., Буксбаум Ф. Слабые взаимодействия лептонов и кварков. М.: Энергоатомиздат, 1987.
24. Скринский А. Н. Ускорительные и детекторные перспективы физики элементарных частиц// УФН. 1982. Т. 138, вып. 1. С. 3–43.
25. Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р. Синхротронное излучение и его применения. М.: Изд-во МГУ, 1985.
26. Нурушев С. Б. Основные результаты и перспективы исследования поляризационных эффектов на ускорителях высокой энергии// Труды междунар. семинара по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино. 14–17/IX-1983. Серпухов, 1984. С. 5–83; Труды V рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино, 20–24/IX-1993. Серпухов, 1994. С. 5.
27. Криш А. Д. First Test of the Sibirian Snake Concept// Труды III рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. “Спин 89”, Протвино, 5–8/IX-1989. Серпухов, 1990.
28. Rollnik H. Ideas and Models for the Proton Spin. Proceedings of the 9th International Symposium Held at Bonn. 6–15/IX-1990. Berlin, 1991.
29. Исаев П. С. Квантовая электродинамика в области высоких энергий. М.: Энергоиздат, 1984.
30. Froissart M., Stora R.// Nucl. Instr. and Methods. 1960. V. 7.
31. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
32. Тернов И. М. Синхротронное излучение// УФН. 1995. Т. 165, N 4. С. 429–256.
33. Barber D. D. Böge M., Bremer H. D. et al. The first achievement of longitudinal spin polarization in a high energy electron storage ring // Phys. Lett. B. 1995. V. 343. P. 436–443.
34. Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. Кинетика поляризации частиц в накопителях // ЖЭТФ. 1973. Т. 37. 64. С. 1918–1923; Barber D. D., Mane S. R. Calculations of Bell and Leinaas and Derbenev and Kondratenko for radiative electron polarization // Phys. Rev. A. 1988. V. 37, N 2. P. 456–463; Jackson J. D. On understanding spin-flip synchrotron radiation and transverse polarization of electrons in storage rings // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48, N 3. P. 417–433.
35. Bondar A. E., Saldin E. L. On the possibility of using synchrotron radiation for measuring the electron beam polarization in a storage ring // Nucl. Instr. and Meth. 1982. V. 195. P. 577–580.
36. Terrien Y. New experimental results on the neutron spin structure function  $G_1^n(x)$  // Труды V рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино, 20–24/IX-1993. Серпухов, 1994. С. 203–211.

$$\zeta(s, t) = \zeta_0 s^{\alpha_{\Phi\Phi}(t)}, \quad (6.7)$$

где  $\alpha_{\Phi\Phi}(t)$  – эффективная траектория Редже,  $\zeta_0$  – константа, а  $t$  и  $s$  – инварианты Мандельштама:  $s = (p_1 + p_2)^2$  характеризует эффективную массу системы ( $p_1$  и  $p_2$  – четырехмерные импульсы),  $t = (p_1 - p_2)^2$  дает информацию о передаче энергии и импульса.

Эксперименты с мезон-нуклонным рассеянием подтвердили справедливость (6.7), а также ряд других следствий асимптотического подхода к проблеме рассеяния. Однако в опытах с поляризованными  $p^\uparrow$ -пучками ( $p^\uparrow p$ - и  $p^\uparrow \bar{p}$ -рассеяние) были получены данные, противоречащие простой полюсной модели Редже. В частности, в  $t$ -зависимости в области  $t \geq 0$ ,  $5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> наблюдалось неизвестное ранее явление: отрицательное значение поляризации вместо стремления к нулю сверху, как это предсказывалось теоретически. Впервые это было установлено в ИФВЭ [26] и в дальнейшем нашло подтверждение в других исследованиях. Более точные измерения поляризации в  $pp$ -рассеянии подтвердили заметное изменение знака поляризации вблизи  $|t| \sim 0,5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>.

Это новое явление было одним из серьезных аргументов, противоречащих точке зрения об исчезающе малом вкладе спина при высоких энергиях. Исследование поляризационных эффектов в упругом рассеянии адронов на малые и большие углы оказывается важным и в дальнейшей перспективе экспериментальной физики, ибо это может дать ценную информацию о динамике спиновых взаимодействий и структуре адронов. Это тем более важно, что, как известно, исследование спиновых явлений в КХД встречает трудности, ибо теория возмущений как традиционный метод квантовой теории здесь оказывается неприменимой – при рассеянии на малые углы в условиях адронных взаимодействий на расстояниях порядка  $1$  Ф теория возмущений приводит к неверным результатам.

Таким образом, исследование  $p^\uparrow p$ - и  $p^\uparrow \bar{p}$ -рассеяния может стимулировать новые подходы к динамике спиновых явлений, отражающие непertурбативность спиновых эффектов.

## 2. Эффекты спин-спинового взаимодействия в процессах $p^\uparrow + p^\uparrow \rightarrow p + p$ -рассеяния при высоких энергиях

Первые эксперименты, неожиданно обнаружившие большие значения для спиновых корреляций в  $p^\uparrow p^\uparrow$ - упругом рассеянии, были проведены с поляризованными пучками протонов при их рассеянии на поляризованной мишени (ускоритель ZGS, США). Эти первые наблюдения нашли подтверждение в работах, выполненных с помощью пучков поляризованных протонов на ускорителе AGS (30 ГэВ) Брукхейвенской национальной лаборатории США. Исследования проводились при энергиях 13; 16,5 и 18,5 ГэВ – это было продолжением серии экспериментов, начало которым было положено в Аргонской национальной лаборатории на ускорителе ZGS. Исследование корреляционного параметра

$$A_{NN} = \frac{(d\sigma/d\Omega)^{\uparrow\uparrow} - (d\sigma/d\Omega)^{\downarrow\downarrow}}{(d\sigma/d\Omega)^{\uparrow\uparrow} + (d\sigma/d\Omega)^{\downarrow\downarrow}},$$

где стрелками указана взаимная ориентация спинов сталкивающихся частиц, показало, что при переходе от импульсов 6 ГэВ/с к 12,5 ГэВ/с параметр спин-спиновой корреляции обнаруживает рост [26]. Экспериментально найденное значение  $A_{NN}(90^\circ) = 0,6$  означает доминирующий вклад в упругое рассеяние состояний с параллельными спинами

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\uparrow\uparrow} = 4 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\downarrow\downarrow}$$

Можно допустить, что при таких передачах импульса проявляется кварк-кварковое взаимодействие. Надо заметить, что, поскольку пертурбативная КХД встречает серьезные трудности в объяснении спиновых эффектов при упругом рассеянии  $pp$ , существует ряд моделей, в которых большая величина  $A_{NN}$ -коэффициента корреляции рассматривается в духе обобщения кварк-партонной модели и связывается с оболочечной структурой протона. Однако единой модели, способной описать поляризационные эффекты в упругом адронном взаимодействии, пока нет.

### 3. Поляризационные эффекты в инклюзивных реакциях

Около 20 лет тому назад в инклюзивной реакции



была обнаружена сильная поляризация  $\Lambda^0$ -гиперонов. При исследовании этого необычного явления было установлено, что все гипероны, рождающиеся в инклюзивных реакциях, поляризованы перпендикулярно к плоскости рождения. Пертурбативная КХД, рассматривая эффект поляризации гиперонов в инклюзивных процессах, приходит к отрицательному выводу: поляризации должна отсутствовать, по крайней мере в рамках линейной теории. До настоящего времени окончательной модели, описывающей это явление, нет — есть лишь ряд гипотез, которые требуют дальнейшего изучения. Это обстоятельство подчеркивает важность экспериментальных исследований поляризации гиперонов, ибо данные опыта могут пролить свет на механизм, лежащий в основе рождения кварков в сильных взаимодействиях.

Существует предположение о том, что поляризация гиперона возникает при моттовском рассеянии морского странного кварка в  $s$ -состоянии (КХД обобщение рассеяния Мотта). Такой кварк поляризуется в процессах многократного перерассеяния и, будучи поляризованным, комбинируется с конститuentным кварком падающего протона. В результате рождающийся гиперон оказывается поляризованным. Обобщение идеи поляризации при моттовском рассеянии представляет определенный интерес, ибо оно хотя бы частично объясняет феноменологически поляризацию гиперонов.

Поляризация  $\Lambda^0$ -гиперонов, возникающих в процессе рождения в инклюзивных реакциях  $p^{\uparrow} + \text{Be} \rightarrow \Lambda^0 + X$ , исследовались с помощью поляризованных протонных пучков на ускорителе AGS (США) при импульсах протонов 13 и 18,5 ГэВ/с.

Исследование поляризации  $\Lambda^0$  и других гиперонов в ряде других экспериментов выявило независимость величины поляризации  $\Lambda^0$  от энергии протонов: результаты измерения при  $p_{\perp} = 12, 400, 2000$  ГэВ/с показали достаточно универсальную картину.

#### §6.4. Исследование спиновой структуры нуклона

В последние годы особое внимание привлекли к себе эксперименты по измерению сечений глубоконеупругого рассеяния поляризованных электронов и мюонов на поляризованных протонах. В этих экспериментах, выполненных в SLAC, а также в CERN (Европейская мюонная коллаборация) исследовалось распределение спина протона между его конститuentами.

В соответствии с принятой в настоящее время кварк-партоновой моделью нуклон представляет собой связанное состояние, состоящее из конститuentных кварков, “одетых” облаком виртуальных глюонов и “морских” кварков. Спин нуклона  $1/2$  принимается равным полному угловому моменту системы:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Sigma + \Delta g + L_q + L_g, \quad (6.8)$$

где  $\frac{1}{2}\Sigma$  и  $\Delta g$  — суммарный спиновой момент кварков и глюонов, а  $L_q$  и  $L_g$  — орбитальные моменты кварков и глюонов.

Традиционным методом изучения структуры нуклонов явилось исследование глубоконеупругих процессов рассеяния на них мюонов и электронов с большой передачей импульса к одной из конститuentных частиц. Именно на этом пути зондирования нуклона удалось подтвердить предположение о его базисной структуре: нуклон состоит из трех валентных кварков ( $u, d$ ) вместе с морем кварков и антикварков, а также глюонов (рис. 27). В процессах глубоконеупругого рассеяния электроны и мюоны взаимодействуют непосредственно с конститuentами нуклона-партонами, несущими часть ( $x$ ) четырехмерного импульса:  $p_{\text{парт}} = xp_{\text{прот}}$ .

Исследования спина нуклона, в особенности его распределения между партонами, длительное время не привлекали к себе внимания, и в обычном интуитивном понимании спин нуклона воспринимался как сумма спинов кварков. Изменение ситуации в последние годы оказалось связанным с успешным применением в эксперименте поляризованных пучков электронов и мюонов, а также поляризованных мишеней.

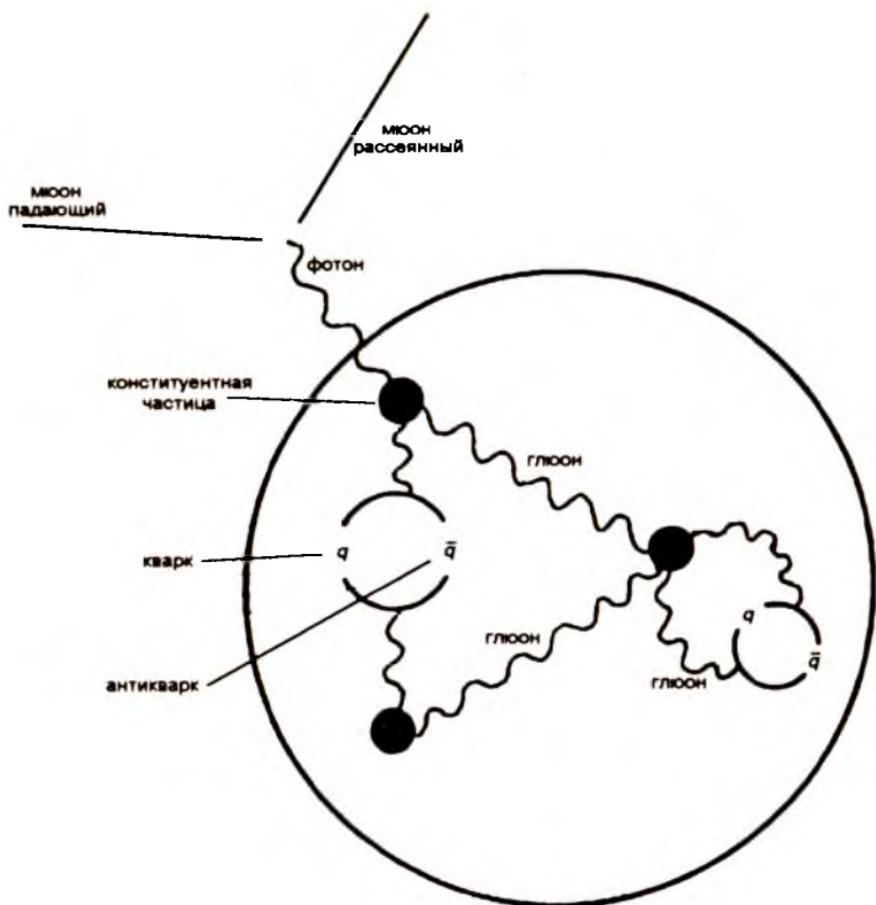


Рис. 27. Схема исследования спиновой структуры нуклона

Это в значительной степени расширяет возможности эксперимента, поскольку дифференциальное сечение процесса рассеяния можно связать с продольной поляризацией частиц. Взаимодействие частиц в инклюзивных процессах  $e^{-1} + p^{\uparrow} \rightarrow e^{-} + X$ ,  $\mu^{\uparrow} + p^{\uparrow} \rightarrow \mu + X$  оказывается различным в случаях, если спины лептона  $l = (e^{-}, \mu)$  и нуклона параллельны ( $\uparrow\uparrow$ ) и антипараллельны ( $\uparrow\downarrow$ ). При этом в случае продольной поляризации лептонов и нуклонов разность дифференциальных сечений рассеяния для параллельно и антипараллельно направленных спинов пучка частиц и мишени можно представить в виде [36]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \left( \left( \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \right) = \frac{4\alpha^2 E'^2}{EQ^2} \{ (E + E' \cos \theta) M G_1(v, Q^2) - Q^2 G_2(v, Q^2) \}. \quad (6.9)$$

В этом выражении функции  $G_1$  и  $G_2$  зависят от значений переданных энергии  $\nu$  и импульса  $Q$ ,  $E$  и  $E'$  — энергии падающей и рассеянной частицы, а  $\theta$  — угол рассеянного лептона (рассматриваются процессы глубоко неупругого рассеяния — DIS).

Если спины частиц и мишени перпендикулярны, аналогичное выражение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \left( \begin{pmatrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \uparrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \right) = \frac{4\alpha^2 E'^2}{EQ^2} E' \sin \theta \{MG_1(\nu, Q^2) + 2EG_2(\nu, Q^2)\}. \quad (6.10)$$

Весьма существенно, что в пределе больших значений переданных энергии и импульса ( $Q \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $Q^2/\nu = \text{const}$ ) устанавливается связь  $G_1$  и  $G_2$  со спиновыми структурными функциями нуклона  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ , содержащими информацию о спине:

$$M^2 \nu G_1(\nu, Q^2) \rightarrow g_1(x), \quad M \nu^2 G_2(\nu, Q^2) \rightarrow g_2(x),$$

где  $x = Q^2/2M\nu$  — скейлинговая переменная, характеризующая долю импульса нуклона, уносимую взаимодействующим кварк-протоном,  $M$  — масса нуклона.

Заметим, что измеряемая в эксперименте величина интеграла от структурной функции  $\Gamma = \int_0^1 g_1(x) dx$ , характеризующая рассеяние на поляризованном нуклоне, непосредственно связана с вкладом кварков в общей сумме (6.8).

Действительно, для протона и нейтрона измеряемые в поляризационных экспериментах интеграла  $\Gamma_1^p$  и  $\Gamma_1^n$  могут быть представлены в виде сумм вкладов от различных кварковых ароматов:

$$\Gamma_1^p = \int_0^1 g_1^p(x) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9} \Delta u + \frac{1}{9} \Delta d + \frac{1}{9} \Delta s \right), \quad (6.11)$$

$$\Gamma_1^n = \int_0^1 g_1^n(x) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{9} \Delta u + \frac{4}{9} \Delta d + \frac{1}{9} \Delta s \right). \quad (6.12)$$

При этом должно выполняться правило Бьёркена

$$\Gamma_1^p - \Gamma_1^n = \int (g_1^p(x) - g_1^n(x)) dx = \frac{1}{6} \frac{G_A}{G_v}, \quad (6.13)$$

где  $G_A$  и  $G_v$  — аксиальная и векторная константы в задаче о бета-распаде нейтрона.

Значения вкладов различных ароматов можно получить из данных эксперимента по рассеянию поляризованных лептонов на поляризованных протонах, а также исходя из информации о бета-распаде гиперонов, содержащих странные кварки:

$$\Delta u - \Delta d = F + D,$$

$$\Delta u + \Delta d - 2\Delta s = 3F - D.$$

При этом величины  $F$  и  $D$  становятся известными при анализе процесса бета-распада, а  $\Gamma_1^p$  и  $\Gamma_1^n$  измеряются в процессах рассеяния. Это открывает путь к определению полного вклада кварков в спин нуклона  $\Delta\Sigma = \Delta u + \Delta d + \Delta s$ .

В весьма впечатляющих экспериментах, проведенных в SLAC, а также Европейской мюонной коллаборацией (EMC) в CERN [28], для процессов

$$e^{-1} + p^{\uparrow} \rightarrow p + X, \quad \mu^{\uparrow} + p^{\uparrow} \rightarrow \mu + X$$

были получены столь неожиданные результаты, что возникшая ситуация была охарактеризована как “спиновый кризис”. В этих экспериментах было убедительно показано, что в пределах ошибок опыта спиновый момент кварков оказался менее 12% от спина протона. Другими словами, оказалось несостоятельным существовавшее до сих пор “наивное” представление о том, что спин нуклона аддитивно складывается из спинов кварков.

На рис. 27 приведена схема экспериментов EMC. Высокоэнергетичный мюон взаимодействует с конституентной частицей в нуклоне и отклоняется в сторону, передавая большой импульс партону. В эксперименте устанавливается зависимость вероятности рассеяния от передаваемого импульса и поляризации. На рисунке изображены три валентных кварка ( $uud$ ), а также процесс превращения глюонов в виртуальные кварк-антикварковые пары.

Продолжение исследований спиновой структуры нуклона в экспериментах по глубоко неупругому рассеянию поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах привело к новым данным [37]. Оказалось, что вклад конституентных кварков в спин нуклона составляет примерно 1/3:

$$\Delta\Sigma = \Delta u + \Delta d + \Delta s = 0,33 \pm 0,04$$

(см. [37]). При этом отмечается, что правило сумм Бьёркена (6.13) находит хорошее экспериментальное подтверждение.

Проблема спиновой структуры нуклона в настоящее время не может считаться решенной. Однако стало совершенно очевидно, что спинового кризиса не существует: необходимо лишь расширение наших представлений о возможности дополнительных вкладов в спин нуклона, которые могут вносить, например, поляризация глюонов, поляризация моря странных кварков. Обсуждаются сейчас также модели взаимодействия кварков в нуклоне и, в частности, возможность их коррелированного движения. Рассматривается взаимодействие кварков с хромагнитным полем, а также ряд других гипотез.

Продолжаются и экспериментальные исследования процессов глубоко неупругого рассеяния поляризованных лептонов. Эти работы ведутся в США (SLAC), в Швейцарии (CERN) и в ФРГ (DESY) — на уникальном электрон-протонном коллайдере HERA.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М.: Наука, 1979.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
4. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовая электродинамика. М.: Изд-во МГУ, 1983.
5. Паули В. Общие принципы волновой механики. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
6. Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
7. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. Н. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
8. Тернов И. М., Бордовицын В. А. О современной интерпретации классической теории спина Я. И. Френкеля// УФН. 1980. Т. 132, вып. 2. С. 345-352.
9. Тернов И. М. Уравнение эволюции спина релятивистского электрона в представлении Гейзенберга// ЖЭТФ, 1990. Т. 98, вып. 4(10). С. 1169-1172.
10. Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: Изд-во МГУ, 1989.
11. Тернов И. М., Михайлин В. В. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. М.: Энергоатомиздат, 1986.
12. Тернов И. М. Радиационная поляризация электронов и позитронов при их движении в накопительных кольцах// ЭЧАЯ, 1986. Т. 17, вып. 5. С. 884-928.
13. Тернов И. М., Родионов В. Н., Халилов В. Р. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во МГУ, 1982.
14. Куликов О. Ф. Экспериментальное исследование излучения и рассеяния света релятивистскими электронами// Труды ФИАН, 1975. Т. 80. С. 4-99.
15. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М.: Физматлит, 1958.
16. Тернов И. М., Хапаев А. М., Клименко Ю. И. К вопросу о движении электронов в поле плоской электромагнитной волны// Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1967. Т. 8, N 1. С. 35-42.
17. Тернов И. М., Родионов В. Н., Дорофеев О. Ф. Влияние сильного электромагнитного поля на бета-распад// ЭЧАЯ, 1989. Т. 20, вып. 1. С. 51-96.
18. Ритус В. И. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле// Труды ФИАН, 1979. Т. 111. С. 5-151.
19. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М.// ЖЭТФ, 1957. Т. 32. С. 630-632; Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. и др.// Вест. Моск. Ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия, 1990. Т. 31, N 3. С. 23-28.
20. Кесслер И. Поляризованные электроны. М.: Мир, 1988.

21. Филд Д, Пикассо З., Комбли Ф. Проверка фундаментальных физических теорий в опытах со свободными заряженными лептонами// УФН. 1979. Т. 127, вып. 4. С. 553–592.
22. Брагинский В. Б. Разрешение в макроскопических измерениях: достижения и перспективы// УФН. 1988. Т. 156, вып. 1. С. 93–115.
23. Комминс Ю., Буксбаум Ф. Слабые взаимодействия лептонов и кварков. М.: Энергоатомиздат, 1987.
24. Скринский А. Н. Ускорительные и детекторные перспективы физики элементарных частиц// УФН. 1982. Т. 138, вып. 1. С. 3–43.
25. Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р. Синхротронное излучение и его применения. М.: Изд-во МГУ, 1985.
26. Нурушев С. Б. Основные результаты и перспективы исследования поляризационных эффектов на ускорителях высокой энергии// Труды междунар. семинара по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино. 14–17/IX-1983. Серпухов, 1984. С. 5–83; Труды V рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино, 20–24/IX-1993. Серпухов, 1994. С. 5.
27. Криш А. Д. First Test of the Sibirian Snake Concept// Труды III рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. “Спин 89”, Протвино, 5–8/IX-1989. Серпухов, 1990.
28. Rollnik H. Ideas and Models for the Proton Spin. Proceedings of the 9th International Symposium Held at Bonn. 6–15/IX-1990. Berlin, 1991.
29. Исаев П. С. Квантовая электродинамика в области высоких энергий. М.: Энергоиздат, 1984.
30. Froissart M., Stora R.// Nucl. Instr. and Methods. 1960. V. 7.
31. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
32. Тернов И. М. Синхротронное излучение// УФН. 1995. Т. 165, N 4. С. 429–256.
33. Barber D. D. Böge M., Bremer H. D. et al. The first achievement of longitudinal spin polarization in a high energy electron storage ring // Phys. Lett. B. 1995. V. 343. P. 436–443.
34. Дербенев Я. С., Кондратенко А. М. Кинетика поляризации частиц в накопителях // ЖЭТФ. 1973. Т. 37. 64. С. 1918–1923; Barber D. D., Mane S. R. Calculations of Bell and Leinaas and Derbeney and Kondratenko for radiative electron polarization // Phys. Rev. A. 1988. V. 37, N 2. P. 456–463; Jackson J. D. On understanding spin flip synchrotron radiation and transverse polarization of electrons in storage rings // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48, N 3. P. 417–433.
35. Bondar A. E., Saldin E. L. On the possibility of using synchrotron radiation for measuring the electron beam polarization in a storage ring // Nucl. Instr. and Meth. 1982. V. 195. P. 577–580.
36. Terrien Y. New experimental results on the neutron spin structure function  $G_1^n(x)$  // Труды V рабочего совещания по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино, 20–24/IX-1993. Серпухов, 1994. С. 203–211.

37. Нурушев С. Б. Status and Trends in spin physics. VI // International Workshop on Spin Phenomena in high energy Physics. 18-23 Sept. 1995. Protvino. (In press.)
38. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. Излучение быстрых электронов с ориентированным спином в магнитном поле // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 374.
39. Бордовицын В. А. Спиновые свойства релятивистских частиц в классической и квантовой теории с внешним электромагнитным полем / Дисс... докт. физ.-мат. наук. Москва — Томск, 1983.
40. Тернов И. М., Бордовицын В. А. О спиновых поправках в квазиклассической теории синхротронного излучения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1987. Т. 28, N 2. С. 21.
41. Belomestnikh S. A., Bondar A. E., Yegorychev M. N. An observation of the spin dependence of synchrotron radiation intensity // Nucl. Inst. a Meth. in Phys. research. 1984. V. 227. P. 171.

*Учебное издание*

**Тернов Игорь Михайлович**  
**ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ СПИНА**  
**РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ**

Зав. редакцией *Л. А. Николова*. Редактор *Р. А. Бунатян*.  
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*  
Технический редактор *З. С. Кондрашова*  
Корректоры *Г. В. Сибирцева, Н. М. Жидкова*

ИБ № 8301

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97

Сдано в набор 13.03.95. Подписано в печать 14.08.97. Формат 60x90/16  
Бумага кн.-журн. Офсетная печать. Усл. печ. л. 15,00. Уч.-изд.л. 14,29  
Тираж 1000 экз. Изд. № 5630. Заказ № 3461

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета  
103009, Москва, Большая Никитская ул., 5/7

Отпечатано на Производственно-издательском комбинате ВИНТИ,  
140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403  
Тел. 554-21-86



