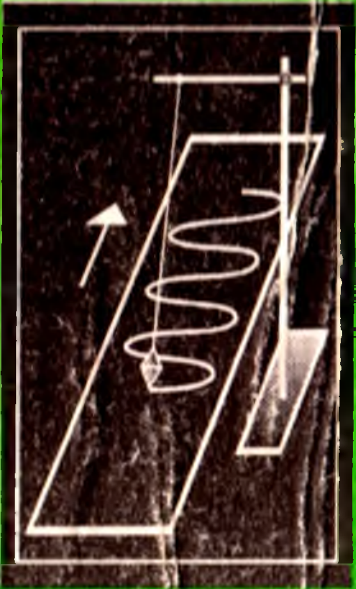
А.ҚОСИМОВ
Х.ЖЎРАҚУЛОВ
А.САФАРОВ

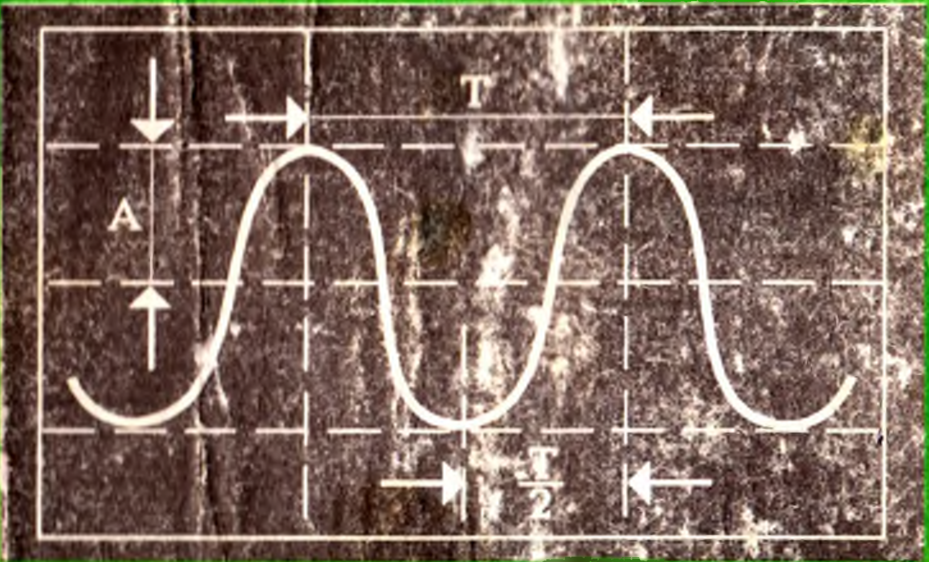
ФИЗИКА КУРСИ

I

МЕХАНИКА



ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН



А.ҚОСИМОВ, Х.ЖЎРАҚУЛОВ, А.САФАРОВ

ФИЗИКА КУРСИ

I

МЕХАНИКА

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги олий техника
ўқув юртлари талабалари учун ўқув
қўлланмаси сифатида тавсия этган

Тошкент
«Ўзбекистон»
1994

22.3
Қ 61

Тақризчилар:
Физика-математика фанлари докторлари,
профессорлар **И. А. МАҒРУПОВ,**
М. Г. ХАЛИУЛИН

Муҳаррир: **Ю. Музаффархўжаев**

ISBN 5-640-01323-0

$$\text{К}\ \frac{1604000000-009}{\text{М}\ 351(04)\ 94}\ 11-94$$

МУҚАДДИМА

Жумҳуриятимизнинг ҳозирги тараққиёт босқичи ва унинг ташқи мамлакатлар билан кенг қамровли алоқаларининг кундан-кунга кенгайиб бориши — бугунги куннинг талаблари даражасида билимли, техника ускуналарини ва технологияни узлуксиз такомиллаштира оладиган, ижодий тафаккур кўникмаларига эга бўлган, фан ютуқларини ишлаб чиқаришнинг турли соҳаларига қўллай оладиган муҳандислар тайёрлашни тақозо қилади. Бу вазифани амалга ошириш учун техниканинг тараққий этишида ҳал қилувчи фанлардан бири ҳисобланмиш физика фанидан унинг энг сўнгги ютуқларини ўзида акс эттирувчи янги дастурлар асосида замонавий ўқув қўлланмаларини яратиш зарурияти пайдо бўлди. Зеро ҳозирги вақтда мавжуд қўлланмаларнинг аксарияти рус тилида чоп этилган, ўзбек тилидаги мавжуд қўлланмалар эса кенг қўлланилаётган бўлса-да, улар эски дастурлар асосида ёзилган.

Юқорида зикр этилган мулоҳазаларга кўра муаллифлар физикадан техника олий илмгоҳлари учун мўлжалланган янги ўқув қўлланмасини яратишга жазм қилдилар.

Қўлланма амалдаги (собиқ СССР Олий таълим вазирлигининг физика бўйича илмий-услубий кенгаши томонидан 1988 йилда тасдиқланган) ўқув дастури асосида, А. Беруний номидаги Тошкент Давлат техника дорилфунунининг Амалий ва назарий физика кафедраси муаллимларининг кўп йиллар давомидаги тўплаган тажрибаларига суянган ҳолда ёзилган. У уч қисмдан иборат бўлиб, I қисми физика курсининг «механика», II қисми «электр ва магнит ҳодисалари ҳамда тўлқин оптикаси», III қисми эса «квант ва статистик физика ҳамда термодинамика» бўлимларини ўз ичига олади.

Қўлланманинг қўлингиздаги мазкур биринчи қисмида физика курсининг «механика» бўлимига оид мавзулар табиат ҳодисаларининг моделлари воситасида баён этилган бўлиб, асосий эътибор механикавий ҳодисаларни тавсифловчи қонун ва тушунчаларнинг моҳиятини ҳамда мазмунини имкон қадар соддароқ баён этишга қаратилган. Физика фанининг кун сайин янги билимлар билан бойиб бораётганлиги ва бинобарин дастурда кўзда тутилган мавзуларнинг ҳаммасини дарс (лекция) мобайнида баён этишнинг имкони бўлмаганлиги туфайли баъзи мавзуларнинг талабалар томонидан мустақил ўзлаштиришлари кўзда тутилган. Шу сабабли ва мазкур қўлланма физика курсининг пойдевори бўлмиш «Механика» бўлимига бағишланганлигини назарда тутиб, барча муҳим формулалар изчиллик билан келтириб чиқарилди. Ҳодисаларни тавсифловчи қонуниятларнинг ўзаро боғлиқ эканлигини эътиборга олган ҳолда мавзуларнинг жойлашишида дастурда кўзда тутилганига нисбатан баъзи ўзгартиришлар киритилди. Айрим дастурдан четланишлар эса дарсни муаммоли баён этиш усули асосида ташкил этиш билан ҳам узвий боғлиқдир.

Тебранма ҳаракат механикавий ҳаракатларнинг турларидан бири бўлганлигидан ва шу билан бирга мазкур ҳодисага оид мавзуларнинг баёнида механикавий энергиянинг сақланиши ва бир турдан иккинчи турга айланиши яққол намоён бўлишини назарда тутиб, бу бўлимга оид мавзулар мазкур қисмга киритилди.

Мавзулар халқаро бирликлар тизими — СИ да баён этилган; СГС тизими ҳақида ҳам қисқача тушунча берилган. Ўзбек тили атамашунослигининг ҳозирги босқичида физика бўйича мукаммал атамалар луғати яратилмаган бўлса-да, муаллифлар мумкин қадар ўзбек тилидаги атамаларни қўллашга интилдилар. Шу боис баъзи бир атамалар баҳсли бўлиши ҳам мумкин.

Қўлланманинг кириш қисми ва VIII — X бобларини А. Қосимов, I, III, IV, VI, VII, XI бобларини Х. Жўрақулов, II, V бобларини эса А. Сафаров ёзган.

Қўлланма техника олий ўқув юртларининг талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан педагогика олий илмгоҳи талабалари ҳамда шу соҳа билан шуғулланаётган мутахассислар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлланмани тайёрлаш жараёнида унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазалари учун кафедрамиз доценти Ж. Муҳитдиновга ҳамда қўлёзмани нашрга тайёрлашдаги ёрдами учун Н. Саидовага ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Қўлланманинг сифатини янада яхшилаш борасида унда кузатилган камчиликларга тааллуқли фикр ва мулоҳазаларни мамнуният билан қабул қиламиз.

Муаллифлар

КИРИШ

Бизни ўраб турган ва онгимизга бевосита ҳамда билвосита таъсир этиши мумкин бўлган объектив борлиқ *материя* деб аталади. Хусусан, юлдузлар, сайёралар, молекула ва атомлар, электр, магнит ҳамда гравитация майдонлари ва бошқалар материянинг турли кўринишларидир. Материянинг мавжудлик шартларидан бири унинг доимий ҳаракатда, аниқроғи, ўзгаришда бўлишидир. Материянинг ҳаракат (ўзгариш) жараёнини ташкил қилувчи алоҳида босқичларни *ҳодисалар* деб аталади.

Физика — табиат ҳодисаларининг кечиш қонуниятлари ва турли ҳодисалар орасидаги боғланишларни ўрганувчи фандир. Шу ўринда жонсиз табиат ҳодисалари билан жонли табиат ҳодисаларини шартли равишда фарқлаш лозимлигини таъкидлаймиз. Ўсимлик ва жонзотларнинг таналарида содир бўлувчи ҳодисаларни биологик ҳодисалар деб аташ қабул қилинган. Гарчи бу мавжудотлар ҳам атом ва молекулаларнинг муайян тарздаги бирикмаларидан ташкил топган бўлсада, биологик ҳаракат физик ҳаракатдан кескин фарқ қилади. Албатта бу ҳаракатларнинг туб моҳияти бир асосга — атом ва молекулаларнинг ўзаро таъсирлашувига асосланган. Шу сабабли ҳозирги замонда биофизика, физикавий химия каби фанлар кўпгина амалий масалаларни ечишда ҳал қилувчи аҳамият касб қилмоқда. Юқорида айтилганлардан физика «жонсиз» табиат ҳодисалари қонуниятларини ўрганувчи фандир, дейиш мумкинлиги келиб чиқади. Демак, физика фанининг ўрганиш соҳаси жонсиз табиат ҳодисаларидир.

Физика табиий фанлар орасида алоҳида фан сифатида шаклланиб, ҳозирги замон физикаси даражасига келгунча бир қанча тараққиёт босқичларини босиб ўтган. Бу босқичларни шартли равишда қуйидаги асосий тўрт даврга бўлиш мумкин: қадимги антик даврдан XVI аср охиригача бўлган давр, физиканинг фан сифатида шаклланиш даври (1600—1700 йиллар), мутақаббил (классик) физиканинг яхлит назария сифатида шаклланиш даври (XVII асрнинг охири — XX асрнинг боши) ва ниҳоят, ҳозирги замон физикаси даври.

Антик даврда табиат ҳодисаларини илмий равишда кузатиш ва текширишлар асосан юнон олимлари томонидан олиб борилган. Улар илк физикавий қонунларни яратдилар.

Демокрит томонидан материянинг майда бўлаклари бошқа кичик бўлакларга бўлинмаслиги тўғрисидаги фикрларнинг олға сурилиши, **Арасту (Аристотель)** томонидан механикавий ҳаракат элементлари (унсурлари), тўғри ва эгри чизиқли механикавий ҳаракатлар, ричаг ва унинг мувозанати қоидаларининг аниқланиши эрамиздан олдинги V — IV асрларга хосдир. Эрамиздан олдинги III асрда оламнинг гелиоцентрик тизими (системаси) тўғрисида фикрлар, Ер билан Қуёш ва Ой орасида ёруғликнинг тўғри чизиқли тарқалиши ҳақидаги қонуниятларнинг аниқланиши (**Евклид**), айниқса, **Архимед** томонидан статика асосларининг — параллел кучларни қўшиш ва ричаглар назариясининг — яратилиши ҳамда унинг номи билан боғлиқ бўлган, жисмларнинг сузиш шартлари асосида гидростатиканинг асосий қонунларининг очилиши физиканинг тараққиётига муҳим ҳисса қўшди. **Батлимус (Птоломей**, I — II асрлар) ёруғликнинг синиш хоссасини тажриба асосида текшириб, атмосферада юз берадиган рефракция жараёнини тушунтирди.

Ўрта асрларга келиб илм-фаннинг ривожланиши Шарқий Араб ва Ўрта Осиё мамлакатларига кўчди. Айниқса, IX — XII асрлардан бошлаб физиканинг геометрик оптика, статика, гидравлика, механика ва бошқа соҳалари бўйича кўплаб илмий кузатишлар ва текширишлар олиб борилди.

Ал Форобий (980—1051 йиллар) Арастунинг табиий фанларга оид «Физика», «Осмон тўғрисида», «Метрология» каби илмий ишларига, Батлимуснинг астрономия соҳасидаги ишларига ва Евклиднинг математика соҳасидаги ишларига шарҳлар ёзди ҳамда кенгайтирди. Шарқнинг буюк алломаси **Ибн Сино** (980—1037) тиббиёт, алхимия, математика ва бошқа соҳалардан ташқари физиканинг ҳаракат, куч, бўшлиқ каби фалсафий масалалари билан шуғулланиб, ўзидан кейинги даврларда яшаб ўтган кўплаб олимларни ҳайратда қолдирди. У геометрик оптика ҳамда инсон кўзининг кўриш сабаблари ҳақида атрофлича маълумотлар берди. Физика фани муаммолари юзасидан Ибн Сино ва Берунийнинг ўзаро савол-жавоблари диққатга сазовордир. Жумладан, Берунийнинг «Агар иссиқлик марказдан узоқлашувчи бўлса, нима учун Қуёшдан бизга иссиқлик келиб туради? Ёруғлик моддами, оразлармн (сифатлармн) ёки бошқа нарсалармн?» деган саволига Ибн Сино шундай жавоб беради: «Билмак керакки, иссиқлик марказдан узоқлашувчи модда эмас, чунки иссиқлик ҳаракат қилувчи нарса эмас; иссиқлик ҳаракат қилувчи жисмда бўлганидан, юриб турган кемадаги инсон каби ораз воситаси билан ҳаракат қилувчи нарсадир». Бундан ташқари Ибн Синонинг Беруний саволларига берган жавоблари, унинг линзаларнинг катталаштириши ва улардан фойдаланиш ҳақидаги маълумотлари, ёруғликнинг синиш қонунлари, моддаларнинг иссиқликдан кенгайиши ва совуқдан торайиши, Ернинг тортиш кучи ва бошқа физикавий ҳодисалар ҳақида илмий мулоҳазалар юритиши Ибн Синонинг физика соҳасида ўз давридан бир неча аср илгарилаб кетганини кўрсатади.

Физика фанининг тараққиётида буюк аллома **Абу Райҳон Беруний**нинг (973—1048) илмий ишлари оламшумул аҳамият касб этади. У табиат ҳодисаларини, жумладан, ёмғир, шудринг, қировларнинг ҳосил бўлишини, чақмоқ, момақалдироқ, Рустам (ёки камалак)нинг пайдо бўлиш сабабини, эрта тонг ва кечки оқшом олдида Қуёш нуридан ҳосил бўладиган шафақ ҳодисасини, жисмларнинг оғирликдан Ер марказига интилишини, Ер шаклининг шарсимонлигини илмий асосда таҳлил қилиб берди. Беруний ўзининг «Тафҳим» номли асарида «Ер юзи ҳаво билан ўралган, сув исиганда буғга айланиб, ҳавога кўтарилади, кейин булут ҳосил бўлади. Унда томчиларга айланиб, ёмғир бўлиб ёғади. Тоғ ва тепаликлардан оққан сув тўпланиб (кўпайиб) дарё ҳосил қилади» — деб ёзади. У булоқ сувининг отилиб чиқиш сабабларини қуйидагича тушунтиради: «Булоқларнинг қайнаши ва сувнинг юқорига кўтарилиши сув манбаининг булоқлардан юқори турганлигидандир». Беруний денгиз сувининг кўтарилиши ва тушишига Ойнинг тортиш кучи сабабчи эканлигини изоҳлайди, Қуёш ва Ойнинг тутилиш сабабларини кўрсатади. «Геодезия» китобида ўзи ясаган асбоблар ёрдами билан осмон ёритқичларининг ҳолати ва ҳаракатини ҳамда жойлар кенгликларини аниқлаганлигини баён қилади.

Бугунда Торричелли номи билан боглаб юритилаётган бўшлиқ — вакуум ҳақидаги маълумотларни Беруний ундан 640 йил муқаддам (!) берган эди. У дунёда биринчи бўлиб жисмларни қаттиқлик, шаффофлик ва солиштирма огирликлари каби хоссаларига қараб турларга ажратди ҳамда 50 та модда (9 металл, 18 суюқлик, 15 та минерал ва бошқа турли жисмлар)нинг ҳозирги замон аниқлик даражасига яқин бўлган солиштирма оғирликларини топди! Булар эса Берунийнинг амалий физикага асос солганлигидан ёрқин далолат беради.

XV — XVI асрларда физика соҳасидаги жадал юксалиш асосан Италия олимлари томонидан амалга оширилди. Бу даврдаги буюк олимлар **Леонардо да Винчи** (1452—1519), **Галилей** (1564—1642) ва бошқалардир.

Галилей астроном, математик, аниқ табиатшуносликнинг асосчиси ва физик бўлиб, физиканинг муайян принципларга асосланган фан сифатида шаклланишида ҳал қилувчи аҳамиятга эга бўлган кашфиётни яратган олимдир. У биринчи телескопни ясади ва шу телескоп ёрдамида Сомон йўлининг жуда кўп юлдузлардан ташкил топганлигини аниқлади.

Физиканинг фан сифатида шаклланиш даври XVII — XVIII асрларни ўз ичига олади. Бу даврда **Кеплер** томонидан кўриш назарияси, ёритилганлик қонунлари ва линза формуласи аниқланди (1604 йил). Бутун олам тортишиш қонуни (**Ньютон**, 1665 й.) ва бошқа кўпгина қонунларнинг кашф этилиши ҳамда ёруғлик тезлигининг аниқланиши (**Рёмер,** 1676 й.), ёруғликнинг қутбланиши ва тўлқин назариясининг яратилиши (**Гюйгенс,** 1678 й.) бу даврнинг асосий ютуқларидан ҳисобланади.

XVII аср охиридан то XX асрнинг бошларигача мутақаббил (классик) физика тўла қуриб бўлинди. XVII асрнинг охирида Ньютон физикавий нуқтаи назардан дунёнинг яхлит манзарасини тасвирлаб берди дейиш мумкин. Ньютондан Максвеллгача (1687—1859), ундан Рентгенгача (1860—1894) ва сўнг Эйнштейнгача (1895—1904 й.) бўлган даврларда мутакаббил физика тараққиётида кескин ўзгаришлар содир бўлиб, бу ўзгаришлар атроф муҳитга муайян тарзда янгича ёндошишга олиб келди. Шундай қилиб мутакаббил физика ҳар томонлама тўлдирилди ва асосланди. Натижада физика табиат ҳақидаги фалсафий фан доирасидан чиқиб амалий назарияга айланди.

Бу даврда зарядли заррачаларнинг ҳаракат ва ўзаро таъсирлашиш қонунлари ҳам кенг миқёсда ўрганилди. 1785 йили **Кулон** зарядларнинг ўзаро таъсирлашиш қонунини таҳлилий (аналитик) усулда баён қилиб берди. **Георг Ом** эса 1826 йили электр токи ва кучланиш тушишининг ўтказгич қаршилигига боғлиқлигини аниқлади.

Ампер, **Эрстед**, **Био** ва **Савар**ларнинг ҳамда **Фарадей** ва **Ленц**ларнинг тажриба ҳамда илмий изланишлари натижасида электромагнетизм соҳасида жуда муҳим кашфиётлар қилинди (1820—1830 йиллар). Хусусан, Фарадей томонидан кашф қилинган электромагнит индукция ҳодисаси кейинчалик физикада инқилобий ўзгаришлар содир бўлишига сабаб бўлди.

Бу даврда фанда ёруғлик майда заррачалар оқимидир деган қараш ҳукмрон эди. 1860 йилларда Максвелл ўша вақтгача ўтказилган тажрибалар натижаларини умумлаштириб ёруғликнинг электромагнит назариясини яратди. Бу назария тез орада тажрибалар воситасида тасдиқланди ва мутакаббил физиканинг энг муҳим ютуқларидан бири сифатида тан олинди. Механикада Ньютон назарияси, электродинамикада эса **Максвелл** назарияси «ҳукмрон» назарияларга айланиб, мутакаббил физиканинг икки мустаҳкам асосини ташкил қилдилар. Бу икки назариядан ташқари моҳияти жиҳатидан бирмунча кенгроқ умумийликка эга бўлган термодинамика мутакаббил физиканинг учинчи муҳим таркибий қисмини ташкил қилади.

Мутлақ қора жисм нурланишининг тажрибаларга тўла мос келувчи назариясини яратиш йўлидаги изланишлар эса мутакаббил физикада ҳукмрон бўлган «энергиянинг узлуксиз ўзгариши (ютилиши, нурлантирилиши)» ҳақидаги тасаввурлардан воз кечишга олиб келди. Немис олими **Макс Планк** ўн йиллик тинимсиз изланишлардан сўнг мутлақ қора жисмнинг нурланиши кичик улушчалар сифатида узлуксиз равишда содир бўлади, деб қаралсагина тажриба натижалари назарий жиҳатдан тушунтирилиши мумкинлигини кўрсатди; у фанга энергиянинг дискретлиги ҳақидаги тасаввурни ва квант тушунчасини биринчи бўлиб киритди. 1911 йили **Резерфорд** атомнинг сайёравий (планетар) моделини тажрибалар воситасида аниқлагач, мутакаббил физика қаршисида яна бир муаммо пайдо бўлди. Бу муаммо атомнинг турғунлиги ҳақидаги муаммодир. Муаммонинг моҳияти шундаки, Максвелл электродинамикаси қонунларига кўра тезланиш билан ҳаракат қилаётган ҳар қандай заряд ўзидан электромагнит тўлқинларни узлуксиз равишда нурлантириб туриши лозим. Бу муаммоларни назарий жиҳатдан ҳал қилиш учун олиб борилган илмий изланишлар натижаси ўларок мутакаббил физикадан асосий коидалари ва тушунчалари билан тубдан фарк килувчи ҳозирги замон физикаси юзага келди.

Ҳозирги замон физикасининг яратилиши ва шаклланишида мутафаккир олимлардан Альберт Эйнштейн (1879—1955 й.), Макс Планк (1858—1947 й.), Эрнест Резерфорд (1871—1937 й.), Нильс Бор (1885—1962 й.), Эрвин Шрёдингер (1887—1961 й.), Вольфганг Паули (1900—1958 й.) ва бошка кўплаб олимларнинг ҳиссалари бекиёсдир. Хусусан, **Эйнштейн** «Ҳаракатланувчи жисмларнинг электродинамикасига оид» номли асарида Ньютон конунларини катта тезликлар ҳоли учун умумлаштирувчи махсус нисбийлик назарияси асосларини ишлаб чикди. Махсус нисбийлик назарияси ҳозирги замон физикасининг дебочаси бўлди.

Шрёдингер, **Паули**, **Дирак** ва бошкалар амалда ҳозирги замон физикасининг назарий асосларини ишлаб чикдилар. Янги тасаввурлар асосида яратилган ҳозирги замон физикаси мутакаббил физикани чегаравий ҳол сифатида ўз ичига олди. Шу билан бирга мутакаббил физика ҳал килиши умуман мумкин бўлмаган микрооламга хос ҳодисаларнинг барчасини ягона нуктаи-назардан караб тушунтириб берди.

Фан ва техника ўзаро узвий богланган. Фаннинг ривожланиши техниканинг, техниканинг ривожланиши эса фаннинг, хусусан физиканинг янги ютукларга эришишига имкон беради. Физиканинг ривожланиши ҳамма вакт бошка табиий фанлар билан чамбарчас боглик бўлиб келди: бу ривожланиш кимёвий физика, астрофизика, геофизика ва бошка фанларни яратишга олиб келди. Электрон микроскоп ва рентгеноструктура таҳлили курилмаларидан фойдаланиш молекулалар ва ҳужайраларни бевосита кузатиш, кристалларнинг тузилишини, мураккаб биологик тузилмаларни ўрганишда кимматбаҳо маълумотлар берди. Квант назарияси кимёвий богланишлар табиатини ва реакциялар кинетикасини ўрганишда муҳим ўрин тутмокда. Радиофизика ва электрониканинг ривожланиши радиоастрономиянинг пайдо бўлишига олиб келди, астрофизикада кўплаб ютуклар кўлга киритилди. Ультратовуш ва лазерларнинг ихтиро этилиши табобат диагностикаси ва терапияда хизмат килмокда. Ядро физикаси геологияда, Ер казилмаларини аниклашда кўлланилмокда. Электротехника, радиотехника, радиоэлектроника, автоматика, космонавтика, гелиотехника, курилиш техникаси ва ҳарбий техника ҳам физика билан чамбарчас боглик. Яримўтказгичларни ўрганиш микроэлектроника ва электрон ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ)нинг юзага келишига сабаб бўлди. ЭҲМ эса физика ва техникада олинган натижаларни таҳлил килишда иш унумдорлигини бениҳоя оширмокда. Шундай килиб, физика ҳозирги замон фани ва техникаси ривожланишининг асосини ташкил килиб, барча мутахассисликлар учун зарур бўлган хусусий фанларни ўзлаштиришда ҳамда ўкувчиларда материалистик дунёкарашни шакллантиришда зарур бўлган асосий фанлардан биридир. Шунинг учун бу фанни хар томонлама ва мукаммал ўрганмасдан туриб ҳозирги замон талабига жавоб берувчи муҳандис бўлиш мумкин эмас.

I БОБ

МЕХАНИКАНИНГ ФИЗИК АСОСЛАРИ

1.1- §. МЕХАНИКА МАВЗУИ

Физиканинг механика бўлимида жисмларнинг ҳаракат ва мувозанат қонунлари ўрганилади. Материянинг ҳар қандай ўзгариши — ҳаракатдир. Материянинг энг содда ҳаракатларидан бири механик ҳаракат бўлиб, механик ҳаракат деганда жисмларнинг ёки жисм қисмларининг бир-бирига нисбатан кўчиши тушунилади. Осмон жисмлари, футбол тўпи, дарёдаги сув, тайёра (учоқ, самолёт), соат мили, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ва бошқаларнинг ҳаракатлари механик ҳаракатга мисол бўла олади.

Механика асосан икки қисмга — *кинематика* ва *динамикага* бўлинади. Кинематикада ҳаракатни уни юзага келтирувчи сабабларни ҳисобга олмаган ҳолда ўрганилади. Динамикада эса жисмлар ҳаракатини ўрганиш мазкур ҳаракатни юзага келтирувчи сабабларга боғлаб олиб борилади, яъни динамика жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида уларнинг тинч ҳолатининг ёки ҳаракатининг ўзгаришини ўрганадиган механиканинг бир бўлимидир.

Физиканинг механика бўлими (ўзининг ҳозирги тараққиёт босқичида) Ньютон механикасини, релятив механикани ва квант механикасини ўз ичига олади. Ньютон механикаси макроскопик жисмларнинг «секин» ҳаракатларини ўрганиш билан шуғулланади. Макроскопик жисмлар деганда ғоят кўп сондаги атом ва молекулалардан ташкил топган жисмларни тушунамиз. «Секин» (ёки норелятив) ҳаракат дейилганда тезликлари ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги ($c=300000$ км/с) дан жуда кичик бўлган ҳаракатларни тушуниш керак.

Қиёс сифатида шуни айтиш керакки, Ернинг сунъий йўлдошларининг ҳаракати (тезликлари ≈ 8 км/с), Ернинг Қуёш атрофида ўз орбитаси бўйлаб қиладиган ҳаракати ($v=30$ км/с), Қуёш тизимидаги сайёралар, думли юлдузлар (кометалар) ҳаракати, тайёра (самолёт)лар ҳамда оддий юк ташиш воситаларининг ҳаракатлари секин ҳаракатларга мисол бўлади. Исталган моддий нуқталар, самовий жисмлар, сунъий йўлдошлар, фазовий кемаларнинг ҳаракатлари ва уларнинг муайян вақтдаги вазиятларини аниқлаш ёки олдиндан айтиб бериш Ньютон механикаси қонунлари асосида олиб борилади.

Жисмларнинг мувозанат шартлари механиканинг *статика* деб аталувчи бўлимида ўрганилади. Мувозанат ҳолат ҳаракатнинг хусусий ҳоли бўлганлиги туфайли статика бўлими динамика билан биргаликда ўрганилади.

Катта тезликларда (ёруғлик тезлигига яқин тезликларда) жисмларнинг (шу жумладан микрозарраларнинг) ҳаракат қонунларини *релятив механика* ўрганади. Релятив механика Эйнштейннинг махсус нисбийлик назариясига асосланган ва у Ньютон механикасига нисбатан анча кенг қамровли соҳадир. У Ньютон механикасининг қонунлари ва қоидаларини инкор қилмайди, фақат унинг қўлланиш чегараларини белгилаб беради; хусусан, кичик тезликлар ($v \ll c$) да релятив механика қонунлари Ньютон механикаси қонунларидан иборат бўлиб қолади.

Маълумки, макрожисмлар микрозарралардан — атомлар, молекулалар, элементар зарралар (протон, нейтрон, электрон ва бошқалар)дан ташкил топган. Микрозарраларнинг хусусиятларини ва ҳаракатларини ўрганиш шуни кўрсатадики, булар учун Ньютон механикасининг қонунларини татбиқ қилиб бўлмас экан, яъни бу қонунларнинг қўлланиш соҳаси чегараланган экан. Масалан, Ньютон механикасида жисмлар (ва микрозарралар)нинг ҳаракатини изоҳлашда уларнинг фазодаги вазияти вақтга боғлиқ ҳолда муайян координаталар ва тезликлар орқали ифодаланади, яъни жисмларнинг ҳаракати унинг аниқ траекторияси орқали берилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, элементар зарраларнинг ҳаракати анча мураккаб табиатга эга бўлиб, траектория ҳақидаги тушунча бу ҳолда аниқ маънога эга эмас экан. Бундан ташқари Ньютон механикаси бир қанча физикавий ҳодисаларни — ферромагнетизм, ўта оқувчанлик ва бошқа қатор ҳодисаларни тушунтира олмади. Бу муаммоларни ҳал қилиш бўйича илмий тадқиқотлар ва тажрибалар натижасида физикада янги йўналиш — *квант механикаси* ва у билан боғлиқ равишда Ньютон механикасидаги тасаввурлардан фарқ қиладиган янги тасаввур ва тушунчалар пайдо бўлди. Квант механикаси микрозарраларнинг ҳаракат қонунларини ва микрозарралардан тузилган тизим (масалан, кристаллар) билан боғлиқ физикавий ҳодисаларнинг қонуниятларини ўрганади ва физиканинг асосий муаммоларидан бири бўлган модда тузилишини тадқиқ қилишда ҳамда аксарият макроскопик ҳодисаларни ўрганишда пойдевор ҳисобланади. Квант механикаси ўз навбатида норелятив ва релятив қисмларга бўлинади. Квант механикаси бизни ўраб олган табиат ҳодисаларини ўрганишда кенг қамровли тасаввурларга асосланган бўлиб, Ньютон механикаси унинг бир хусусий ҳолидир, яъни катта массали жисмларнинг ёруғлик тезлигига нисбатан анча кичик тезликлари билан боғлиқ ҳодисаларни акс эттирувчи квант механикаси қонунлари бевосита Ньютон механикаси қонунларига айланади.

Пировардида шуни айтиш керакки, Ньютон механикаси ҳозирги вақтда жуда кенг ва муҳим соҳаларда қўлланилаяпти ҳамда аксарият ҳолларда техник жараёнлар ва осмон механикасининг назарий асоси бўлиб қолмоқда. Шунинг учун у ўзининг илмий ҳамда амалий аҳамиятини ҳеч қачон йўқотмайди. Квант механикаси эса физика фани тараққиётининг ҳозирги босқичидаги пойдевор вазифасини ўтамоқда.

1.2- §. КИНЕМАТИКА АСОСЛАРИ

Табиатдаги мавжуд жисмларнинг вазиятини, хусусиятларини ва ҳаракатларини ўрганишда ҳамда улар билан боғлиқ бўлган жараёнларни тасвирлашда қўйилган мақсаднинг моҳиятига кўра физикада ҳар хил соддалаштирилган ўхшатмалардан (моделлардан) фойдаланилади, яъни мавжуд объектларни уларнинг идеаллашган нусхаси — модели билан алмаштирилади. Шу мақсадда физиканинг механика бўлимида моддий нуқта, мутлақ (абсолют) қаттиқ жисм, узлуксиз (яхлит) муҳит деб аталадиган механикавий ўхшатмалардан (моделлардан) фойдаланилади.

Ўрганилаётган шароитда геометрик ўлчамлари ва шакли ҳисобга олинмайдиган ҳамда массаси бир нуқтага тўпланган деб қараладиган ҳар қандай жисм *моддий нуқта* деб аталади. Моддий нуқта тушунчаси илмий абстракция ҳисобланади. Бу тушунчани киритганда биз асосий эътиборни ўрганилаётган ҳодисанинг бош моҳиятини аниқлаб берувчи томонларига қаратиб, бошқа хусусиятлар (жисмнинг геометрик ўлчамлари, таркиби, ички ҳолати ва бу ҳолатнинг ўзгариши каби хусусиятлар)ни инобатга олмаймиз. Физика фанида фақат биргина жисм ўрганилмасдан бир неча жисмлар тўплами ҳам ўрганилади. Бу жисмларни моддий нуқталар тўплами (тизими) деб қараш мумкин. Битта макроскопик жисмни ҳам хаёлан майда бўлакчаларга бўлиб, бу бўлакчаларни ўзаро таъсирлашувчи моддий нуқталар тизими (системаси) деб тасаввур қилиш мумкин.

Ҳар бир жисмнинг ўзи бир шароитда моддий нуқта бўлиши, иккинчи бир шароитда эса моддий нуқта бўлмаслиги мумкин. Бирор жисмни моддий нуқта деб ҳисоблаш масаласи текширилаётган ҳодисанинг моҳиятига боғлиқ бўлади. Масалан, Ернинг ўз орбитаси бўйлаб Қуёш атрофидаги йиллик ҳаракатини олиб қараганимизда Ерни моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин, чунки Ернинг диаметри ($\approx 6{,}4\cdot10^{6}$ м) унинг орбитасининг диаметри ($\approx 3\cdot10^{11}$ м)га нисбатан ҳисобга олмаслик мумкин бўлган даражада кичикдир. Худди шу мулоҳазаларга кўра Ойнинг ўз орбитаси бўйлаб Ер атрофидаги ҳаракатини, бир шаҳардан иккинчи шаҳарга бораётган тайёра ҳаракатини ва ниҳоят, минора тепасидан уфқ текислиги бўйлаб (горизонтал) отилган (ёки тик ташланган) тошнинг ҳаракатини кузатганимизда улар моддий нуқта моделига мисол бўла оладилар. Демак, ҳаракат кўламларига нисбатан жисмнинг ўлчамлари ҳисобга олинмайдиган даражада кичик бўлса, бундай жисмни моддий нуқта деб қаралади. Атом физикасидаги ҳодисаларни ўрганишда геометрик ўлчамлари жуда кичик бўлишига қарамасдан (диаметри бир неча ангстрем ($3\div5\cdot10^{-10}$м), атомларнинг ўлчамлари ҳисобга олинади, демак, бу ҳолда атом моддий нуқта эмас.

Мутлақ (абсолют) қаттиқ жисм деб ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа унинг ҳаракати давомида ўзгармайдиган жисмга айтилади. Табиатда мутлақ қаттиқ жисмнинг ўзи мавжуд эмас. Маълумки, ҳар қандай қаттиқ жисм ташқи куч таъсирида деформацияланади, яъни геометрик ўлчамлари, шакли бирор даражада ўзгаради. Лекин қўйилган масаланинг моҳиятига қараб кўп ҳолларда деформация туфайли бўладиган ўзгаришларни ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Мутлақ қаттиқ жисм ҳар қандай макроскопик жисм каби бир-бири билан қаттиқ боғланган моддий нуқталар тизимидан иборат деб тасаввур қилинади.

Суюқликлар, газлар ва деформацияланадиган жисмларнинг ҳаракатини ҳамда мувозанатини ўрганишда узлуксиз муҳит тушунчаси қўлланилади. Маълумки, ҳар қандай моддий жисм атом ва молекулалардан ташкил топган бўлиб, дискрет тузилишга эга. Лекин масалани соддалаштириш мақсадида моддани узлуксиз яхлит (муттасил) муҳит деб қараб, унинг атом ва молекулалардан тузилганлиги эътиборга олинмайди.

1.3-§. ФАЗО ВА ВАҚТ

Жисмларнинг ҳаракат қонунларини ўрганишда фазо ва вақт тушунчаларини аниқ тасаввур қилиш муҳим аҳамият касб этади. Маълумки, ҳамма моддий жисмлар ҳажмга эга бўлганликлари учун улар муайян жойни эгаллайди ва бир-бирларига нисбатан қандайдир тарзда жойлашган бўлади. Жисм ўз ҳаракати туфайли вазиятларини (ўринларини) ўзгартиради. Бу ўзгариш, табиийки, фазода содир бўлади ва маълум вақт оралиғида амалга ошади. Ҳар қандай механикавий жараён бирор вақт оралиғида фазода содир бўлади. *Вақт* — ҳодисаларнинг кетма-кет ўзгариш тартибини ифодалайдиган физикавий катталикдир. Жисмлар ҳаракатини фазо ва вақтдан ажралган ҳолда тасаввур қилиб бўлмайди. Шунинг учун ҳам жисмларнинг мавжудлиги ва уларнинг ҳаракатлари фазода ва вақт ичида содир бўлади, деб қаралади.

Фазо ва вақт Коинотнинг физикавий манзарасини яратишда ҳал қилувчи, тарихий ривожланиб келаётган тушунчалардир. Ньютоннинг бу ҳақдаги таълимоти қуйидагича: ҳеч қандай жараёнга боғлиқ бўлмаган мутлақ (абсолют) фазо ва мутлақ вақт мавжуддир; фазо — абадий мавжуд бўладиган, чегарасиз (чексиз катта), қўзғалмас бўшлиқ бўлиб, бу бўшлиқда материя ҳар хил шаклда бўлади; фазо бир жинсли бўлиб ҳамма йўналишларда хусусиятлари бир хилдир; бу бўшлиқнинг (фазонинг) хусусиятлари унда моддаларнинг қандай тақсимланишига ҳамда қандай ҳаракатланишига боғлиқ бўлмайди ва вақт ўтиши билан ўзгармайди. Бундай ўзгармас фазода моддаларнинг тақсимланишини ва уларнинг ҳаракатини бутун олам тортишиш қонуни белгилайди.

Ньютоннинг нуқтаи назарича вақт мутлақ бўлиб, ташқи муҳитга ва жисм ҳаракатига боғлиқ бўлмаган ҳолда бир текис ўтади.

Ньютоннинг фазо ва вақт ҳақидаги таълимоти оддий шароитда кузатиладиган механикавий ҳаракатлар (жисмлар, нақлиёт (юк ташиш воситалари), сунъий йўлдошлар, фазовий кемалар, сайёралар ҳаракати) учун амалий жиҳатдан тўғридир; бу таълимот юнон олими Евклид геометриясига асосланган. Евклид геометриясида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг ва икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа тўғри чизиқдир. Кичик кўламларда (масштабларда, масалан, бир варақ қоғоз катталигида) чизилган учбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндисини ўлчаш ҳеч қандай қийинчилик тугдирмайди. Анча катта миқёсларда Евклид геометрияси қай даражада тўғри ёки ундан амалда қанчалик аниқлик билан фойдаланиш мумкин деган саволга жавобни бизга албатта тажриба беради.

Маълумки, тажриба жараёнида физикавий катталиклар бирор аниқлик билан ўлчанади. Бошқача айтганда, олинган натижалар ўлчашдаги хатоликлар чегарасида тўғри бўлади. Юқорида қўйилган савол билан боғлиқ муаммони ечиш мақсадида немис олими Гаусс XIX асрнинг бошида қуйидаги тажрибани ўтказди: бир-биридан анча узоқда жойлашган ($\approx 1 \cdot 10^5$ м га яқин) учта тоғ чўққиси ҳосил қилган учбурчак ички бурчакларининг йиғиндисини мумкин қадар катта аниқлик билан ўлчади. Гаусс тажрибаси шуни кўрсатадики, ўлчаш хатоликларини ҳисобга олганда, тажриба ўтказилган миқёсда Евклид геометриясидан четланишлар кузатилмади. Бундан ташқари, астрономия соҳасида ўтказилган тажриба натижаларининг далолат беришича, бизнинг Галактикамиз миқёсидаги фазо (диаметри тахминан 10^{21} м) да ҳам Евклид геометрияси ўринлидир. Лекин кўлами 10^{26} м бўлган (метагалактика) ўлчамда Евклид геометриясидан четланишлар борлиги аниқланди. Бунга сабаб — жуда катта миқёсдаги масофаларда фазонинг эгриланишидир.

Галактикамиз ўлчамлари ҳақида аниқроқ қиёсий тасаввур ҳосил қилиш учун қуйидаги рақамларни келтирамиз: Қуёшдан Ергача бўлган масофа ($\approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м) ни ёруғлик нури секундига $3 \cdot 10^8$ м тезлик билан 500 с давомида босиб ўтади. Ёруғлик бир йил давомида босиб ўтадиган масофага ёруғлик йили дейилади. Галактикамиз таркибидаги бизга энг яқин юлдузлардан ёруғлик нури Ерга деярли 4 йилда етиб келади.

Катта ўлчамларга эга бўлган Коинот фазосининг Евклид геометриясидан четланишини тасаввур қилиш учун жуда катта радиусли сферани кўз олдимизга келтирайлик. Маълумки, сферанинг эгрилиги унинг радиусига тескари мутаносиб катталик бўлиб, радиус қанчалик кичик бўлса, сферанинг эгрилиги шунча катта бўлади. Сфера сиртининг геометрияси текислик геометриясидан фарқли эканлиги маълум. Евклид геометриясида текисликда жойлашган икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа тўғри чизиқ бўлса, сфера сиртида жойлашган икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа тўғри чизиқ эмас, балки катта айлананинг шу нуқталарини бирлаштирувчи ёйи бўлади. Бундай фазо ноевклид фазодир. Ноевклид фазодаги шаклларнинг хоссалари бошқача. Масалан, учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг эмас; айлана узунлигининг унинг диаметрига нисбати π га тенг эмас ва ҳоказо.

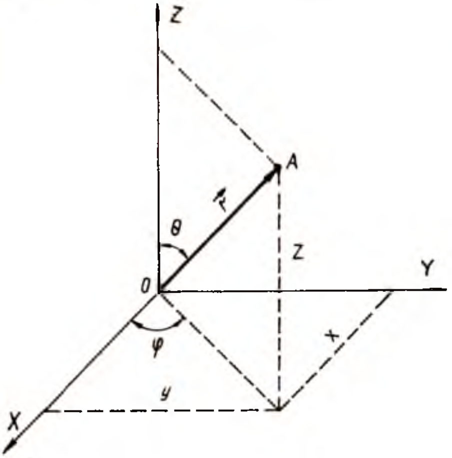
XX аср бошларида А. Эйнштейн нисбийликнинг умумий назариясини яратди. Бу назариядан Коинотнинг ҳақиқий фазоси ноевклид фазо эканлиги келиб чиқади. Мазкур назарияга мувофиқ, фазонинг геометрик хоссалари ҳамда вақтнинг ўтиш тезлиги материянинг фазода тақсимланишига ва унинг ҳаракатига боғлиқ бўлади. Яъни фазо ва материя ҳаракати бир-бирига узвий боғлиқдир. Шунинг учун нисбийликнинг умумий назариясини фазо-вақт назарияси деб ҳам юритилади. Материянинг фазодаги тақсимоти ва ҳаракати бир-бирига боғлиқ бўлган фазо-вакт геометриясини ўзгартиради, фазо-вақт геометриясининг ўзгариши эса унда материянинг тақсимланишини ва ҳаракатини белгилайди.

Нисбийликнинг умумий назарияси Ньютоннинг фазо ва вақт ҳақидаги таълимоти нотўғри деган хулосага олиб келмайди. Тажриба шуни кўрсатадики, Ньютон таълимоти фақат астрономик кўламларда олинган фазонинг кичик соҳаларида ва ўша ўлчовларга нисбатан қисқа вақт оралиқлари учун тўғридир. Катта кўламларда — Метагалактика кўламидаги ($\approx 10^{26}$ м) масофалар билан боғлиқ ҳодисаларда, шунингдек кучли гравитацион майдонлар мавжуд бўлган жойларда Ньютон қонунларидан четланишлар содир бўлади. Шуни айтиш керакки, Коинотнинг айрим унча катта бўлмаган соҳаларида кучли гравитацион майдонлар мавжуд бўлса, бу соҳаларда фазонинг эгриланиши ва вақт ўтиш тезлигининг ўзгариши сезиларли даражада намоён бўлади.

1905 йилда А. Эйнштейн томонидан яратилган нисбийликнинг махсус назариясида худди Ньютон механикасидагидек вақт бир жинсли, фазо эса бир жинсли ҳамда изотроп (барча йўналишларда хусусиятлари бир хил) деб қаралади. Бу назарияда ҳам фазо ва вақтни якка-якка тарзда қараш мумкин эмаслиги, вақт ва фазо бир-бири билан боғлиқ эканлиги, жисмларнинг фазо-вақт тавсифлари уларнинг муайян саноқ тизимига нисбатан аниқланадиган тезликларига боғлиқлиги исбот қилинди. Мазкур назарияга кўра вақт оралиқлари ва кесма узунликлари нисбий бўлиб, улар қандай саноқ тизимларида ўлчанаётганликларига боғлиқ, яъни бирор саноқ тизимига нисбатан тинч турган жисмнинг (кесманинг) узунлиги ҳаракатдаги саноқ тизимидаги узунлигидан фарқ қилади.

1.4-§. ҲАРАКАТНИНГ КИНЕМАТИК ТАВСИФИ

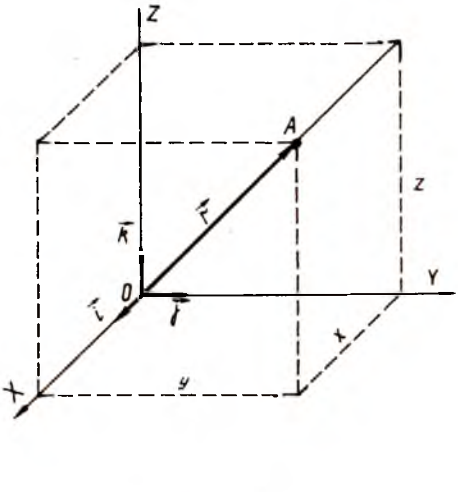
Юқорида айтиб ўтилганидек, механикада ҳаракат деганда берилган жисмнинг фазодаги вазиятининг вақт ўтиши билан бошқа жисмларга нисбатан ўзгариши тушунилади. Ҳаракатдаги жисмни кузатганимизда унинг турли вақтлардаги вазиятини бошқа бирор тинч турган жисмга боғламай унинг қаерда турганлиги ҳақида фикр юритиш маънога эга бўлмайди. Ҳаракатнинг кинематик тавсифи деганда исталган вақтда жисмнинг фазодаги вазиятини бошқа бирор жисмга нисбатан аниқлаш тушунилади. Масалан, минора тепасидан уфқ текислиги (горизонтал) йўналишида отилган жисмнинг ҳаракатини кузатганимизда, у исталган вақтда минорадан қандай масофада ва Ер сатҳидан қандай баландликда эканлигини аниқлаш керак бўлади. Бир шаҳардан иккинчи шаҳарга учиб кетаётган тайёранинг исталган вақтда фазодаги вазиятини аниқлаш учун у тайёрагоҳдан қанча узоқликда ва қандай баландликда учиб кетаяпти, деган саволга жавоб бериш керак бўлади. Бу икки мисолда минора ва тайёрагоҳ (кўналға) қўзғалмас жисмлар бўлиб, саноқ



1.1-расм

тизимининг боши вазифасини ўтайди. Жисмлар ҳаракати ўрганилаётганда саноқ боши сифатида ихтиёрий бошқа қўзгалмас жисмлар олиниши ҳам мумкин. Ҳаракатдаги ёки тинч турган жисмларнинг ихтиёрий пайтда фазодаги вазиятини аниқлаш учун саноқ боши билан боглиқ бўлган координаталар тизими сифатида кўп ҳолларда тўғри бурчакли Декарт координаталари тизимидан фойдаланиш қулай. Ихтиёрий пайтда жисмнинг фазодаги вазиятини аниқлашда қўлланиладиган вақтни ўлчовчи асбоб (масалан, соат) ва саноқ боши (О нукта) билан боглиқ координаталар тизими *саноқ тизими* дейилади (1.1-расм). О нукта ўрнида бир ёки бир нечта жисмлар тўплами бўлиши мумкин.

Ҳаракати кузатилаётган A жисм (айтайлик, юқоридаги мисолимизда тайёра)нинг ихтиёрий пайтдаги вазияти (1.1-расм) учта координата (x, y, z лар) орқали белгиланади. Демак, жисм ҳаракати содир бўлаётган фазо уч ўлчамли фазодир. Бундан ташқари радиус-вектор усули ҳам қўлланилади. Бу усулда жисмнинг вазияти (A нукта) координаталар тизими бошидан ҳаракатдаги жисмга ўтказилган радиус-вектор $\vec{r}$ нинг учи орқали ифода қилинади. Бу усул юқоридаги баён қилинган координаталар саноқ тизими усулини ҳам ўз ичига олади, чунки жисмнинг координаталари x, y, z (саноқ бошидан то YZ, XZ ва XY координата текисликларигача бўлган масофа (1.2-расм)) ўз навбатида $\vec{r}$ радиус-векторнинг ҳам координаталари ҳисобланади. 1.2-расмда кўрсатилган $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ лар координаталар тизимининг ортлари деб аталиб, мос равишда X, Y ва Z ўқлар бўйича йўналган бир бирликка тенг (ўлчамсиз) векторларни ифодалайдилар. Кўриниб турибдики, $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ ва



1.2-расм

$z\vec{k}$ векторлар $\vec{r}$ векторнинг координата ўқлари бўйича ташкил этувчиларидир, яъни

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \tag{1.1}$$

X, Y, Z ўқлар ўзаро тик бўлганликлари туфайли, жисмнинг координаталари бўлган x, y, z катталиклар r векторнинг шу ўқларга бўлган проекциялари r_x, r_y ва r_z га тенгдир:

$$r_x=x,\ r_y=y,\ r_z=z. \tag{1.2}$$

$\vec{r}$ вектор модулининг квадрати унинг x, y, z координаталар квадратларининг йиғиндисига тенг бўлганлиги туфайли

$$r^2=r_x^2+r_y^2+r_z^2=x^2+y^2+z^2$$

ёки

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.3}$$

тенглик ўринлидир. Бу формула жисм (моддий нуқта) радиус-вектори модулининг x, y ва z координаталар орқали ифодаланишидир.

Жисм ҳаракатда бўлса унинг фазодаги вазияти вақт ўтиши билан ўзгаради, яъни $\vec{r}$ радиус-вектор, шунингдек x, y, z координаталар вақтга боғлиқ равишда ўзгаради. Бу ўзгариш қуйидагича ифодаланади:

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \tag{1.4}$$

ёки

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t). \tag{1.5}$$

(1.4) ва (1.5) формулаларни чуқурроқ тушуниш учун жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракатини кўриб чиқайлик. Ҳаракат X ўқи бўйлаб содир бўлаётган ҳол учун $x=x(t)$ ифода

$$x=A+Bt+Ct^2 \tag{1.6}$$

кўринишга эга бўлиши мумкин. Бу формулада A, B ва C лар доимий (ўлчамли) коэффициентлардир. Бу ерда A — узунлик (масофа), B — тезлик, C — тезланиш маъноларига эга. Демак, (1.6) формула умумий ҳолда (1.5) ифода тарзида берилади. (1.4), (1.5) ва (1.6) формулалар жисмнинг ҳаракат тенгламалари дейилади.

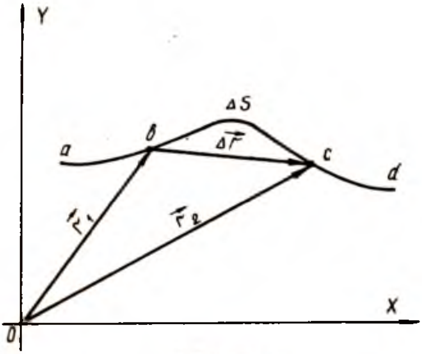
Жисмнинг фазодаги вазиятини белгилашда кўпинча сферик координаталар тизими ҳам қўлланилади. Унда x, y ва z координаталар ўрнига радиус-векторнинг узунлиги (r) ва иккита (θ ҳамда φ) бурчакдан фойдаланилади (1.1- расм); θ ва φ лар мос равишда $\vec{r}$ радиус-вектор билан OZ ўқ орасидаги ва шу радиус-векторнинг XY текислигига туширилган проекцияси билан X ўқи орасидаги бурчаклардир. Сферик координаталар тизимидан Декарт тизимига ўтиш қуйидаги ифода орқали амалга оширилади:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta. \tag{1.7}$$

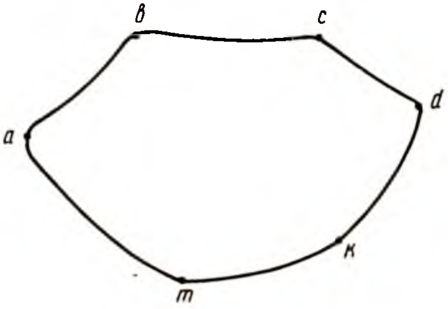
Кинематик жараёнлар ҳақида аниқ тасаввур ҳосил қилиш учун юқоридаги мисолларда жисмнинг ҳаракатини олиб қарадик. Лекин «жисм» ўрнида «моддий нуқта» тушунчасини ишлатиш анча қулайлик туғдиради. Шунинг учун бундан буён «моддий нуқта» ҳақида мулоҳаза юритамиз.

Моддий нуқтанинг ҳаракат давомида фазода чизган чизиғи («қолдирган изи») унинг траекторияси дейилади. Масалан, поезднинг траекторияси рельслардир. Траекториянинг узунлиги моддий нуқта босиб ўтган йўлга тенгдир. Траекториянинг шаклига қараб моддий нуқта ҳаракати тўғри чизиқли ёки эгри чизиқли бўлиши мумкин. Фараз қилайлик, моддий нуқта ихтиёрий *a*, *b*, *c*, *d* траектория бўйлаб ҳаракат қилаётган бўлсин ва унинг ҳаракатини кузатиш траекториянинг *bc* қисмида олиб борилаётган бўлсин (1.3- расм).

Траекториянинг *b* нуқтасида унинг вазияти $\vec{r}_1$ радиус-вектор орқали ифодаланади. Бирор Δt вақтдан сўнг у *c* нуқтада бўлади ва бу нуқтада унинг вазияти $\vec{r}_2$ радиус-вектор билан аниқланади. Траекториянинг «*bc*» қисмида моддий нуқта босиб ўтган йўл Δs га тенг. $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ радиус-векторларнинг айирмаси, яъни *b* ва *c* нуқталарни бирлаштирувчи, *b* нуқтадан *c* нуқта томон йўналган $\Delta\vec{r}$ вектор *кўчиш* дейилади ($\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}$). Кўчиш вектори ($\Delta\vec{r}$) моддий нуқтанинг бошланғич ва охирги вазиятларини ҳамда у қайси йўналишда ҳаракат қилаётганини ифодалайди. Тўғри чизиқли ҳаракатда кўчиш вектори траектория билан бир хил бўлади ва кўчиш векторининг модули ($|\Delta\vec{r}|$) моддий нуқта босиб ўтган йўлга тенг бўлади.



1.3-расм



1.4-расм

Йўл ҳеч қачон нолга тенг бўлмайди, кўчиш эса нолга тенг бўлиши мумкин. Масалан, юқоридаги мисолда моддий нуқта *a* нуқтадан *d* нуқтага *abcd* траектория бўйлаб ҳаракат қилиб (1.4- расм) яна шу траектория бўйлаб *d* нуқтадан *a* нуқтага қайтиб келсин. Бу ҳолда кўчиш нолга тенг, йўл эса *abcd* оралиққа нисбатан икки марта ортиқ бўлади. Айтайлик, моддий нуқта *d* нуқтадан бирор *dkma* траектория бўйлаб қайтиб келсин. Бу ҳолда ҳам кўчиш нолга тенг бўлади, йўл эса нолга тенг эмас. Демак, фақат хусусий ҳоллардагина кўчишнинг модули йўлга тенг бўлиши мумкин, аксарият ҳолларда эса ҳар доим йўл кўчишнинг модулидан катта бўлади.

1.5- §. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

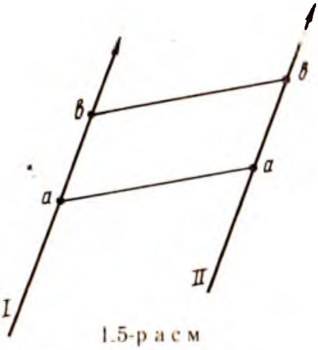
Физикавий ҳодисалар билан танишиш жараёнида биз кўчиш, тезлик, тезланиш, куч ва шунга ўхшаш катталиклар билан иш кўрамиз. Бу катталиклар тегишли ўлчов бирлигида олинган сон қийматлари билан бир қаторда йўналишга ҳам эга. Масалан, жисмнинг (моддий нуқтанинг) муайян пайтдаги ҳаракатини тавсифлаш учун у 15 м/с тезлик билан ҳаракатланмоқда дейишнинг ўзи етарли эмас, яна ҳаракатнинг йўналишини ҳам кўрсатиш керак. Шу мақсадда векторлар деб аталувчи тушунча киритилади. Сон қиймати ва йўналиши билан аниқланувчи катталиклар *векторлар* дейилади. Жисмнинг вазияти бошқа жисмларга нисбатан аниқлангани каби векторларининг йўналиши ҳам муайян бирор йўналишга нисбатан берилади. Фақат сон қиймати билан аниқланадиган катталиклар скаляр катталиклар дейилади. Скаляр катталикларга масса, ҳажм, зичлик, ҳарорат (температура) каби катталиклар мисол бўла олади. Юқорида мисол тариқасида келтирилган кўчиш, тезлик, тезланиш, куч ва шу кабилар вектор катталиклардир.

Векторнинг сон қиймати унинг модули дейилади. Модулни белгилашда ҳарфларда вектор белгиси бўлмайди (масалан, v, a). Баъзан модулни ифодалаш учун вектор катталик белгисини вертикал чизиқлар орасига олинади: чунончи $\vec{A}$ векторнинг модули $|\vec{A}|$ шаклида ёзилади. Векторлар қоғоздаги чизмада йўналиш боши ва охири кўрсатилган тўғри чизиқли кесма билан ифодаланади. Кесманинг узунлиги бирор масштабда векторнинг модулини ифодаласа, йўналиш белгиси эса унинг қайси томонга йўналганини кўрсатади.

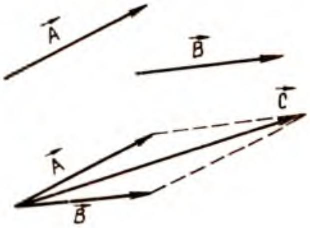
Икки вектор бир-бирига тенг бўлиши учун уларнинг модуллари тенг ва йўналишлари бир хил бўлиши керак. Икки вектор бир-бирига тенг ва қарама-қарши томонга йўналган бўлса, улар қуйидагича ёзилади:

$$\vec{A} = -\vec{B}.$$

Бу ерда $\vec{B}$ ишорасини манфий вектор деб тушунмаслик керак, чунки манфий векторлар мавжуд эмас: манфий ишора $\vec{B}$ векторнинг $\vec{A}$ га нисбатан тескари йўналганини кўрсатади холос.



1.5-расм



1.6-расм

Параллел тўғри чизиқлар бўйлаб бир томонга ёки қарама-қарши томонга йўналган векторлар *коллинеар векторлар* дейилади. Параллел текисликларда ётган векторлар *компланар векторлар* дейилади.

Векторлар яна «эркин» ва «боғланган» векторларга бўлинади. Эркин векторларни ўзига параллел кўчириш мумкин. Параллел кўчиришда векторнинг ихтиёрий икки нуқтаси (1.5- расмда a ва b нуқталар) параллел тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага силжийди. 1.5- расмда кўрсатилгандек, параллел кўчириш натижасида вектор I ҳолатдан II ҳолатга ўтади. «Боғланган» векторлар (масалан, кучни ифодаловчи вектор) уларнинг қўйилиш нуқтаси билан бошқа векторлардан ажралиб туради ва параллел кўчириш усули бу ҳолда ҳамма вақт ҳам ўринли бўлавермайди.

Векторларни қўшиш ва айириш. $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар берилган бўлсин (1.6- расм). Бу икки векторни қўшиш учун параллелограмм қоидасидан фойдаланамиз.

Векторларни ўзига параллел кўчириш қоидасига асосан уларнинг бошини бир нуктага келтириб, улардан параллелограмм ясасак, унинг диагонали натижавий (йиғинди) векторга тенг бўлади ва бу йиғинди қуйидагича ёзилади:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

Векторларни қўшиш коммутативлик хусусиятига эга, яъни

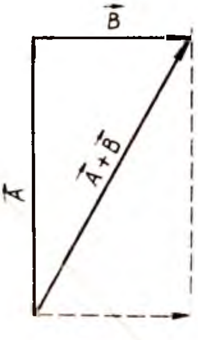
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$$

Масалан, моддий нукта (жисм) бир вактда иккита тўғри чизикли ҳаракатда $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликлар билан иштирок этаётган бўлса, унинг натижавий тезлиги бу тезликларнинг вектор йиғиндисига тенг бўлади (айтайлик, минора тепасидан уфқ текислиги йўналишида $\vec{v}_1$ тезлик билан отилган тош Ернинг тортиш кучи таъсирида маълум вакт ўтгандан кейин $\vec{v}_1$ тезлик билан бир қаторда тик (вертикал) йўналишда $\vec{v}_2$ тезликка ҳам эга бўлади). Қўшилувчи икки векторнинг модуллари ва улар орасидаги бурчак маълум бўлса, натижавий векторнинг қиймати косинуслар теоремасига асосан топилади.

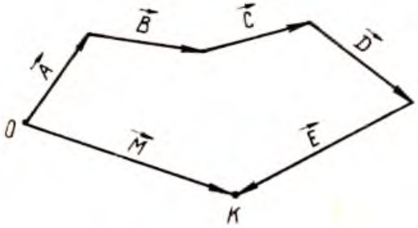
Векторларни қўшишда амалда учбурчак усули кўпрок қўлланилади. Бу усулда $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларни қўшиш учун биринчи векторнинг охирига ўзига параллел равишда кўчирилган иккинчи векторнинг боши жойлаштирилади. Биринчи векторнинг боши билан иккинчи векторнинг охирини туташтирувчи вектор натижавий векторга тенг бўлади, чунки бу натижавий вектор параллелограмм диагоналининг ўзгинасидир (1.7-расм).

Иккитадан ортиқ векторларни қўшишда, амалда қуйидаги усулдан фойдаланилади: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ ва $\vec{E}$ векторлар берилган бўлсин. Натижавий векторни топиш учун ўзига параллел кўчирилган ҳар бир векторнинг боши аввалги векторнинг охири билан туташтирилади. Натижада синиқ чизиқ ҳосил бўлади (1.8-расм). Биринчи векторнинг бошидан охирги векторнинг охирига ўтказилган O ва K нукталарни туташтирувчи $\vec{M}$ вектор натижавий векторга тенг бўлади, яъни:

$$\vec{M} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}.$$



1.7-расм



1.8-расм

Натижавий векторнинг сон қиймати ва йўналиши қўшилувчи векторларнинг қайси кетма-кетликда жойлаштирилишига боғлиқ эмас.

Ихтиёрий йўналган $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар берилган бўлсин (1.9-расм). $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларининг айирмаси деб шундай $\vec{C}$ векторга айтиладики, унинг $\vec{B}$ вектор билан йиғиндиси $\vec{A}$ векторга тенг бўлади:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C} \text{ (яъни } \vec{B} + \vec{C} = \vec{A}).$$

Векторни сонга кўпайтириш. Векторни бирор n сонга (яъни векторни бирор скаляр катталикка) кўпайтириш деганда мазкур векторнинг модулини шу сонга кўпайтириш тушунилади: $\vec{B}=n\vec{A}$. Ҳосил бўлган янги $\vec{B}$ векторнинг йўналиши n нинг ишорасига боғлиқ. Агар у мусбат ($n>0$) бўлса, $\vec{B}$ нинг йўналиши $\vec{A}$ билан бир хил, манфий ($n<0$) бўлса, бу векторлар қарама-қарши йўналган бўлади.

Векторни скалярга кўпайтириш қоидасига кўра ихтиёрий $\vec{A}$ векторни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\vec{A}=A\vec{e}_A,$$

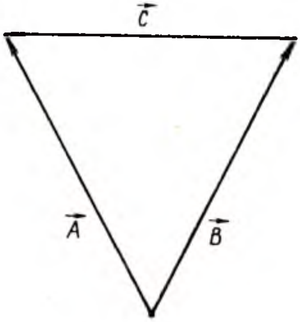
бунда A берилган векторнинг сон қиймати; $\vec{e}_A$ — бирлик вектор дейилади ва унинг сон қиймати бир бирликка тенг бўлиб, йўналиши $\vec{A}$ бўйича йўналган. Бу формулани $1/A$ га тенг скалярга кўпайтирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{e}_A=\frac{\vec{A}}{A},$$

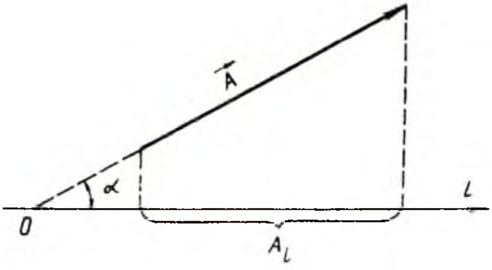
Бундан кўриниб турибдики, бирлик вектор ўлчамсиз катталикдир.

Векторнинг бирор йўналишга бўлган проекцияси. Берилган $\vec{A}$ вектор бирор l йўналишдаги ўқ билан α бурчак ташкил қилсин (1.10- расм). Унинг шу йўналишга проекцияси 1.10- расмда кўрсатилгандек, A_l узунликка тенг бўлади ва қуйидагича ифодаланади:

$$A_l=A\cos\alpha,$$



1.9-расм



1.10-расм

бу ерда A_l — векторнинг модули, α — берилган йўналиш билан вектор орасидаги бурчак. Бурчак ўткир ($\cos\alpha>0$) бўлса, проекция мусбат бўлади ва аксинча, ўтмас ($\cos\alpha<0$) бўлса, проекция манфий бўлади. Векторнинг бирор йўналишга проекцияси ҳамма вақт скаляр катталикдир; унинг ишораси берилган йўналишга нисбатан векторнинг қандай йўналганини билдиради.

Векторларни кўпайтириш. Векторлар бир-бирига икки хил усулда кўпайтирилади: а) векторни векторга вектор кўпайтириш, б) векторни векторга скаляр кўпайтириш. Иккита ($\vec{A}$ ва $\vec{B}$) векторнинг скаляр кўпайтмаси деб шу векторларнинг модуллари ва улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасидан ҳосил бўлган скаляр катталикка айтилади:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})=AB\cos\alpha \quad \text{ёки} \quad \vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\alpha.$$

Бу формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})=A_n\cdot B=A\cdot B_n,$$

бу ерда A_n — $\vec{A}$ нинг $\vec{B}$ йўналиши бўйича олинган проекцияси; B_n — $\vec{B}$ нинг $\vec{A}$ йўналиши бўйича олинган проекцияси. Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{B}\cdot\vec{A}).$$

Векторларнинг скаляр кўпайтмасидан шу хулоса келиб чиқадики, векторнинг ўзини ўзига скаляр кўпайтмаси (бу ҳолда $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$) шу вектор модулининг квадратига тенг, яъни

$$(\vec{A}\cdot\vec{A})=(\vec{A}^{2})=A^{2}. \qquad (1.8)$$

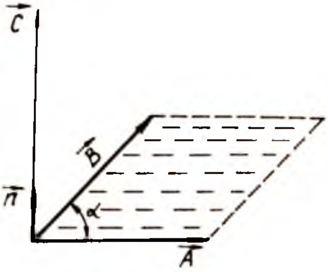
Иккита ($\vec{A}$ ва $\vec{B}$) векторнинг вектор кўпайтмаси деб, қуйидагича аниқланадиган $\vec{C}$ векторга айтилади (икки векторнинг вектор кўпайтмаси, одатда, ўрта қавс ичига олинади):

$$\vec{C}=[\vec{A}\cdot\vec{B}] \quad \text{ёки} \quad [\vec{A}\,\vec{B}]=AB\sin\alpha\cdot\vec{n}. \qquad (1.9)$$

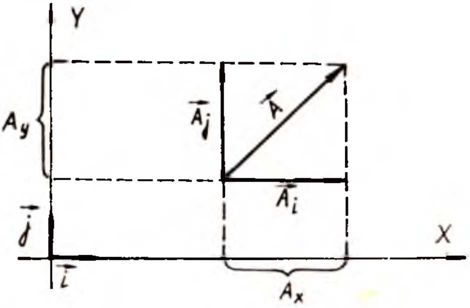
Унинг модули $C=AB\sin\alpha$. Бу ерда $\vec{n}$ — натижавий вектор ($\vec{C}$) йўналишидаги бирлик вектордир. $\vec{C}$ вектор $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлар жойлашган текисликка тик бўлиб, унинг йўналиши парма қоидаси билан аниқланади: парма дастасини $\vec{A}$ дан $\vec{B}$ га томон бурасак, унинг илгариланма ҳаракати $\vec{C}$ векторнинг йўналишини кўрсатади (1.11-расм). $\vec{C}$ вектор сон жиҳатдан $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторлардан тузилган параллелограммнинг юзига тенг. Бу қоидадан шу хулоса келиб чиқадики, $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларнинг ўринларини алмаштирсак, натижавий $\vec{C}$ векторнинг йўналиши қарама-қарши томонга ўзгаради, яъни:

$$[\vec{A}\cdot\vec{B}]=-[\vec{B}\cdot\vec{A}].$$

Шундай қилиб, вектор кўпайтма ўрин алмаштириш хусусиятига эга эмас.



1.11-расм



1.12-расм

Векторларнинг вақт бўйича ҳосиласи. Бирор $\vec{A}$ вектор берилган бўлсин. Бу вектор вақт бўйича бирор қонуният билан ўзгарса, мазкур вектордан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила — $d\vec{A}/dt$, унинг ҳам сон қиймати ҳамда йўналиши бўйича ўзгаришини ифодалайди.

Вектор катталикнинг бирор скаляр катталик (φ) га кўпайтмасидан вақт бўйича ҳосила олиш қоидаси одатдаги икки скаляр кўпайтмадан ҳосила олиш қоидаси кабидир. Масалан, $\vec{A}$ векторнинг скаляр катталик (φ) га кўпайтмасидан олинган ҳосила қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{d}{dt}(\varphi\cdot\vec{A})=\varphi\cdot\dot{\vec{A}}+\dot{\varphi}\cdot\vec{A}, \qquad (1.10)$$

бунда $\dot{\vec{A}}$ ва $\dot{\varphi}$ — мазкур катталиклардан вақт бўйича олинган ҳосиланинг қискача ёзилиши. Худди шунингдек, $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторла[illegible] [illegible] купайтмасидан вақт бўйича олинган ҳосила

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \text{ [illegible]} \tag{1.11}$$

тарзида ифодаланади. Икки векторнинг вектор кўпайтмасидан вақт бўйича олинган ҳосила қуйидагига тенг:

$$\frac{d}{dt}[\vec{A}\cdot\vec{B}]=[\dot{\vec{A}}\cdot\vec{B}]+[\vec{A}\cdot\dot{\vec{B}}]. \tag{1.12}$$

Векторларни уларнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаш. Фазода берилган бирор $\vec{A}$ векторнинг Декарт координата ўқлари (X, Y, Z) даги проекциялари мос равишда A_x, A_y ва A_z бўлса, уни шу проекциялар орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}, \tag{1.13}$$

бу ерда $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ — координата ўқлари X, Y, Z бўйича йўналган бирлик векторлардир. Бу формуладаги ҳар бир қўшилувчи ҳад вектор катталикни ифодалагани учун $\vec{A}$ векторни унинг ташкил этувчилари $\vec{A}_i$, $\vec{A}_j$, ва $\vec{A}_k$ орқали ҳам ифодалаш мумкин:

$$\vec{A}=\vec{A}_i+\vec{A}_j+\vec{A}_k. \tag{1.14}$$

1.12- расмда $\vec{A}$ векторнинг X, Y ўқлардаги проекциялари ва унинг шу ўқлар бўйича ташкил этувчилари кўрсатилган (расмда Z ўқига мос келувчи бирлик вектор ($\vec{k}$) кўрсатилмаган, чунки у чизмага тик йўналган). $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ векторлар ўзаро тик йўналганлигини эътиборга олсак, вектор кўпайтма қоидасига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$[\vec{i}\cdot\vec{j}]=\vec{k},\quad [\vec{j}\cdot\vec{k}]=\vec{i},\quad [\vec{k}\cdot\vec{i}]=\vec{j}; \tag{1.15}$$

$$[\vec{i}\cdot\vec{i}]=0,\quad [\vec{j}\cdot\vec{j}]=0,\quad [\vec{k}\vec{k}]=0. \tag{1.16}$$

Бирор векторнинг квадрати берилган бўлса, бу ҳар доим векторнинг ўзига ўзини скаляр кўпайтмаси бўлади, яъни унинг модулининг квадратига тенг бўлади ((1.8) га қ.):

$$(\vec{i}\cdot\vec{i})=i^2,\ (\vec{j}\cdot\vec{j})=j^2,\ (\vec{k}\cdot\vec{k})=k^2. \tag{1.17}$$

1.6- §. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ҲАРАКАТИ

Тезлик. Моддий нуқтанинг (жисмнинг) ҳаракат траекторияси ҳар хил — тўғри чизиқли, эгри чизиқли, хусусий ҳолда айлана шаклида бўлиши мумкин. Тўғри чизиқли ҳаракатда траектория тўғри чизиқдан иборат бўлади. Тўғри чизиқли ҳаракатни алоҳида ажратиб ўрганишимизнинг боиси шундаки, амалда жуда кўп ҳаракатлар тўғри чизиқли ҳаракатдир. Масалан, бир шаҳардан иккинчи шаҳарга бораётган нақлиёт воситалари (тайёра, поезд, автомобиль)нинг ҳаракати деярли тўғри чизиқли ҳаракат бўлади.

Моддий нуқта тенг вақтлар оралиғида тенг масофаларни босиб ўтса, бундай ҳаракат *текис ҳаракат* дейилади. Қуйида фақат тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳақида мулоҳаза юритамиз. Моддий нуқтанинг ҳаракати қандай жадаллик билан содир бўлаётганини тавсифлаш учун тезлик деган тушунча киритилади. *Тезлик — сон жиҳатидан вақт бирлиги давомида босиб ўтилган йўлга тенг бўлган катталикдир.* Моддий нуқта Δt вақт оралиғида Δs йўлни босиб ўтса текис ҳаракатдаги тезлик сон жиҳатдан қуйидагига тенг бўлади:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1.18)$$

Бирор t вақт давомида моддий нуқта текис ҳаракат қилиб s йўлни босиб ўтса, тезлик қуйидагича ифодаланади:

$$v=\frac{s}{t}. \qquad (1.19)$$

Моддий нуқтанинг қандай тезлик билан ҳаракат қилишини билишдан ташқари, у саноқ тизимига нисбатан қайси йўналишда кетаётганини ҳам билиш зарур. Демак, тезлик йўналишга ҳам эга бўлган катталикдир, яъни у вектор катталикдир. Ҳаракат тўғри чизиқли бўлганлиги туфайли моддий нуқта $\vec{r}$ радиус-вектор бўйлаб ҳаракат қилаяпти, деб қараш мумкин (1.13- расм).

1.13-расм

Саноқ бошини O нуқтада оламиз. Айтайлик, кузатишнинг дастлабки пайтида моддий нуқта A нуқтада бўлсин ва Δt вақт давомида у текис ҳаракат қилиб B нуқтага келсин. Сон жиҳатдан AB кесмага тенг бўлган ва A дан B га томон йўналган $\Delta\vec{r}$ вектор кўчишни ифодалайди. У ҳолда моддий нуқтанинг текис ҳаракатдаги тезлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.20)$$

Агар моддий нуқтанинг ҳаракати давомида унинг тезлиги ўзгариб турса ўртача тезлик деган тушунча киритилади. Масалан, поезд бир шаҳардан иккинчи шаҳарга боришда йўлнинг бир қисмини 20 м/с, иккинчи қисмини 30 м/с, учинчи қисмини эса 25 м/с тезлик билан босиб ўтган бўлса, унинг ўртача тезлиги сон жиҳатдан икки шаҳар орасидаги масофанинг шу масофани босиб ўтиш учун кетган вақтга нисбатига тенг бўлади. Шундай қилиб, *ўртача тезлик* деб кўчиш вектори $\Delta\vec{r}$нинг шу кўчиш содир бўлиши учун кетган вақтга нисбати билан ифодаланадиган вектор катталикка айтилади:

$$v_{\text{ў}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.21)$$

Бу ифода Δt нинг ҳар қандай қиймати учун ($t=0$ бўлган ҳолдан ташқари) тўғридир. Бу тўғри чизиқли ҳаракатда (1.21) формуладаги

$\Delta\vec r$ кўчиш сон жиҳатдан босиб ўтилган йўлга тенгдир. Шунинг учун бу ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{ў} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ёки} \quad v_{ў} = \frac{s}{t}.$$

Моддий нуктанинг тезлиги ўзгариб турса, одатда оний тезлик деган тушунча киритилади. *Оний тезлик* вакт оралиғи чексиз кичик олинганда ўртача тезликнинг муайян t пайтдаги кийматига тенг бўлади, яъни оний тезлик Δt нолга интилганда (1.21) ифода интиладиган қуйидаги лимитга тенг:

$$\vec v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}, \tag{1.22}$$

бу ерда $\dot{\vec r}$ радиус-вектор $\vec r$ дан вакт бўйича олинган биринчи тартибли хосила белгисининг кисқача ёзилишидир. Демак, моддий нуктанинг оний тезлиги (муайян пайтдаги тезлиги) радиус-вектордан вакт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. $\vec v$ векторнинг йўналиши $\vec r$ нинг йўналиши билан бир хил бўлади. (1.22) формула кенг қамровли маънога эга бўлиб, у эгри чизиқли ҳаракат учун ҳам қўлланилади. Шунинг учун уни оний тезлик ёки ҳақиқий тезлик деб ҳам аталади.

Тўғри чизиқли ҳаракатда $d\vec r$ векторнинг модули босиб ўтилган йўлга тенг бўлганлиги туфайли (1.22) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot s, \tag{1.23}$$

яъни тезликнинг модули йўлдан вакт бўйича олинган биринчи даражали ҳосилага тенгдир.

Моддий нуктанинг тўғри чизиқли ҳаракати уч ўлчовли фазода ихтиёрий йўналишга эга бўлса $\vec r$ векторнинг Декарт координаталар системасидаги X, Y, Z ўқларга бўлган проекциялари орқали ифодаси $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ бўлишини ҳисобга олсак, (1.22) га асосан тезлик вектори унинг координата ўқларидаги проекциялари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\vec v = \dot x\vec i + \dot y\vec j + \dot z\vec k = v_x\vec i + v_y\vec j + v_z\vec k,$$

бу ерда $\vec i$, $\vec j$ ва $\vec k$ — координата ўқлари X, Y ва Z бўйлаб йўналган бирлик векторлар; $\dot x = v_x$, $\dot y = v_y$, $\dot z = v_z$ — тезлик векторларининг ўша ўқлардаги проекциялари. Демак, тезликнинг координата ўқларига проекциялари $\vec r$ векторнинг шу ўқларга проекцияларидан вакт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг экан. (1.20), (1.21) ва (1.22) формулалардан кўриниб турибдики, СИ тизимида тезлик метр таксим секунд (м/с)ларда ўлчанади.

Тезланиш. Ҳаракат давомида тезлик вакт ўтиши билан ўзгариб турса, бундай ҳаракат нотекис ҳаракат бўлади. Нотекис ҳаракат тезланиш деган физикавий катталик билан тавсифланади. *Тезланиш* деб, тезликнинг бирлик вакт давомида ўзгаришини кўрсатувчи вектор катталикка айтилади. Агар Δt вакт давомида моддий нуқтанинг тезлиги $\Delta\vec{v}$ га ўзгарса юқорида келтирилган мулоҳазаларга кўра, муайян пайтдаги тезланиш

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad (1.24)$$

тарзида ифодаланади. $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ эканлигини ҳисобга олсак, охирги тенглик қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \qquad (1.25)$$

яъни тезланиш вектори тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки кўчишдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг экан.

Охирги икки формуладан кўриниб турибдики, СИ тизимида тезланиш метр тақсим секунд квадрат (м/с^2) ларда ўлчанади.

Тезланувчан ҳаракатда $a>0$ (яъни $dv/dt>0$), секинланувчан ҳаракатда эса $a<0$ бўлади. Тўғри чизиқли ҳаракатда $a>0$ бўлса, $\vec{a}$ нинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан мосдир, $a<0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор ҳаракат йўналишига нисбатан қарама-қарши томонга йўналган бўлади. $\vec{a}=0$ бўлса, $\vec{v}=\text{const}$ бўлади, бу ҳол моддий нуқтанинг тезланишсиз, яъни текис ҳаракат қилаётганлигини ифодалайди.

Тезланиш векторини координата ўқларига проекциялари орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (1.26)$$

ёки

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

яъни тезланишнинг координата ўқлари бўйича олинган проекциялари $\vec{r}$ векторнинг шу ўқларга мос келган проекцияларидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг экан.

Текис ҳаракат v тезлик билан содир бўлаётган бўлса, моддий нуқтанинг dt вақт давомида босиб ўтган йўли (1.23) формулага асосан $ds=vdt$ бўлади. Бундан:

$$s = \int_0^t v\,dt. \qquad (1.27)$$

Текис тезланувчан ҳаракатда $t=0$ пайтдаги бошланғич тезлик маълум бўлса, қандайдир t вақт ўтгандан кейинги тезлик қуйидагича ифодаланади:

$$v = v_0 \pm at. \qquad (1.28)$$

(1.28) формулани (1.27) га қўйиб, уни $t=0$ дан t гача интегралласак, текис ўзгарувчан ҳаракатда босиб ўтилган йўл формуласига эга бўламиз:

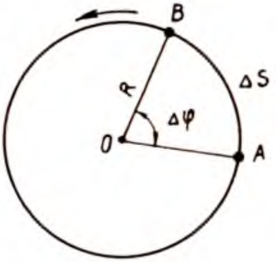
$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0 \pm at)\,dt = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (1.29)$$

(1.28) ва (1.29) формулаларда мусбат ишора текис тезланувчан ҳаракатни, манфий ишора эса текис секинланувчан ҳаракатни ифодалайди.

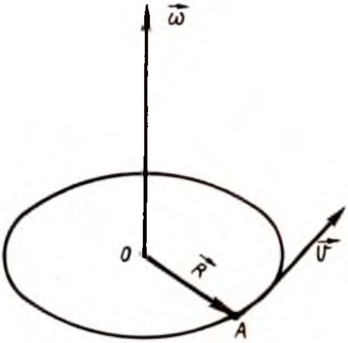
1.7- §. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ АЙЛАНА БЎЙЛАБ ҲАРАКАТИ. БУРЧАК ТЕЗЛИК ВА БУРЧАК ТЕЗЛАНИШ

Моддий нуқта радиуси R бўлган айлана бўйлаб ҳаракат қилаётган бўлсин. Унинг ҳаракатини тавсифлаш учун бурчак тезлик ва бурчак тезланиш деган тушунчалар киритилади. Ўзининг айланма ҳаракатида моддий нуқта Δt вақт давомида A нуқтадан B нуқтага кўчса (1.14- расм), у ўз траекторияси бўйлаб Δs масофани ($AB=\Delta s$) босиб ўтади; шу вақт оралиғида айлананинг (OA) радиуси $\Delta\varphi$ бурчакка бурилади. Қуйидаги

$$\omega_{\varphi}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1.30}$$



1.14-расм



1.15-расм

катталик Δt вақт оралиғидаги ўртача бурчак тезлик дейилади. Умуман, *бурчак тезлик* деб бурилиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлган вектор катталикка айтилади:

$$\vec{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\dot{\vec{\varphi}}. \qquad .(1.31)$$

$d\vec{\varphi}$ вектор $\vec{\omega}$ вектор билан бир томонга йўналган бўлиб, уларнинг йўналиши парма қоидаси бўйича аниқланади: пармани моддий нуқтанинг айланиш йўналишида бурасак, унинг илгариланма ҳаракат йўналиши $\vec{\omega}$ векторнинг йўналишини кўрсатади (1.15- расм). Шуни айтиш керакки, элементар бурчак $d\vec{\varphi}$ вектор катталик бўлиб, муайян φ бурчак эса скаляр катталикдир. $d\varphi$ бурчакни бурчак [illegible] ҳам юритилади. Бурчак тезлик вектори ($\vec{\omega}$) нинг йўналиши шартли равишда аниқланганни учун бу векторни псевдовектор дейилади. Агар бурчак тезлик вақт ўтиши билан ўзгармаса ($\omega = \text{const}$) айланиш **текис айланиш** дейилади ва бу ҳаракат айланиш даври (T) ҳамда айланиш частотаси (ν) билан ифодаланади. *Айланиш даври* — моддий нуқтанинг айлана бўйлаб тўла бир марта айланиши учун кетган вақтдир. Тўла айланишда (яъни $\Delta t = T$ бўлганда) моддий нуқта O нуқта атрофида $\varphi = 2\pi$ радиан ($360°$) бурчакка бурилади. Шундай қилиб, тўла айланишда (1.30) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.32}$$

Текис айланишда ω катталик айланишнинг **доиравий** (ёки циклик) **частотаси** дейилади. Бирлик вақт давомидаги айланишлар сонига **айланиш частотаси** (ν) дейилади, яъни

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Бундан кўринадики, айланишнинг доиравий частотаси билан айланиш частотаси қуйидаги боғланишга эга:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{1.33}$$

Текис айланишда муайян t вақт оралиғида моддий нуқта аниқ бирор φ бурчакка бурилса, бу бурчак (1.30) га асосан қуйидагича ифодаланади:

$$\varphi = \omega t. \tag{1.34}$$

Бурилиш бурчаги $\Delta\varphi$ радианларда ўлчанганлиги учун бурчак тезлик (1.30) га асосан радиан тақсим секунд (рад/с)ларда ўлчанади. Айланиш частотаси ν эса бир тақсим секунд (1/с) ларда ўлчанади.

Моддий нуқтанинг маълум вақт оралиғида ўз траекторияси (айлананинг ёйи) бўйлаб ўтган йўли чизиқли тезлик ва чизиқли тезланиш билан ифодаланади. 1.14- расмдан кўриниб турибдики, $\Delta\varphi \to 0$ бўлганда $\Delta S = R\Delta\varphi$ бўлади. Δs масофани моддий нуқта Δt вақт давомида ўтган бўлса, унинг чизиқли тезлигининг модули

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega R \tag{1.35}$$

бўлади.

Демак, айлана бўйлаб текис ҳаракатда чизиқли тезлик айлананинг радиусига мутаносиб (пропорционал) экан. Чизиқли тезлик вектор катталик бўлиб, унинг йўналиши қуйидагича аниқланади: Δt вақт оралиғини чексиз кичик қилиб олсак, A нуқта B нуқтага чексиз яқинлашади (1.14- расм) ва айлана бўйлаб ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг кўчиш вектори ($\Delta\vec{r}$) бу нуқталарга ўтказилган уринма билан устма-уст тушади. Демак, чизиқли тезлик ($\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$) нинг йўналиши 1.15- расмда кўрсатилгандек траектория (айлана)га уринма равишда ҳаракат томонга йўналган (1.35) формула вектор кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \mathrm{R}], \tag{1.36}$$

яъни айланма ҳаракатдаги чизиқли тезлик бурчак тезлик вектори билан радиус-вектор $\vec{R}$ нинг вектор кўпайтмасига тенгдир.

Вақт ўтиши билан ω нинг қиймати ўзгариб борса (нотекис ҳаракат), бу ўзгариш бурчак тезланиш деган вектор катталик билан ифодаланади:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega}. \tag{1.37}$$

Бу ифодани (1.31)га асосан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}, \tag{1.38}$$

яъни бурчак тезланиш бурчак тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки бурилиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг.

Чизиқли тезланиш чизиқли тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлгани учун (1.36) ва (1.38)га асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\varepsilon. \tag{1.39}$$

Демак, чизиқли тезланиш ($\varepsilon = \mathrm{const}$ бўлганда) айланиш радиусига мутаносиб катталикдир.

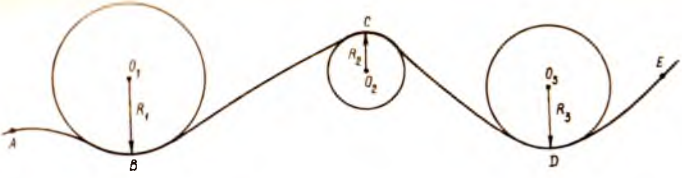
Айлана бўйлаб содир бўлаётган текис тезланувчан ҳаракатда Δt вақт давомида моддий нуқта φ бурчакка бурилади ва бу бурчак (1.29)га кўра қуйидагича ифодаланади:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.40}$$

бу ерда ω_0 — бошланғич бурчак тезлик.

1.8- §. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ҲАРАКАТДА ТЕЗЛИК ВА ТЕЗЛАНИШ. МАРКАЗГА ИНТИЛМА ВА УРИНМА ТЕЗЛАНИШЛАР

Юқорида айтиб ўтилганидек, моддий нуқтанинг траекторияси эгри чизиқдан иборат бўлса, бу ҳаракат эгри чизиқли дейилади. Эгри чизиқли ҳаракатда тезлик векторининг модули ўзгариши билан бир қаторда унинг йўналиши ҳам ўзгаради. Тезлик вектори йўналишининг ўзгариши «траекториянинг эгрилиги» деб аталувчи катталик билан узвий боғлиқдир. «Траекториянинг эгрилиги» деган тушунчани аниқроқ тасаввур қилиш учун моддий нуқтанинг бирор



1.16-расм

ABCDE дан иборат эгри чизиқли траекториясини кўриб чиқайлик (1.16- расм).

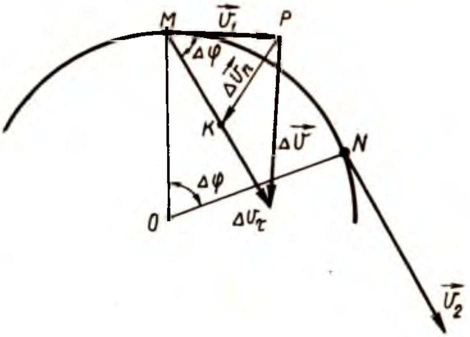
Траекториянинг ҳамма нуқталари бир текисликда (расм текислигида) ётган бўлсин. Ҳамма нуқталари бир текисликда ётган траектория *ясси траектория* дейилади. Расмдан кўриниб турибдики, траекториянинг B, C ва D нуқталар атрофидаги алоҳида қисмлари радиуслари мос равишда R_1, R_2 ва R_3 бўлган айланаларнинг ёйлари билан устма-уст тушаяпти. Бинобарин, траекториянинг B нуқтаси атрофидаги жуда кичик қисмининг эгрилиги R_1 радиус билан, C нуқтаси атрофидаги қисмининг эгрилиги R_2 радиус билан (ва ҳ. к.) аниқланади ва мазкур R_1, R_2 ҳамда R_3 катталиклар траекториянинг мос нуқталаридаги эгрилик радиуслари дейилади.

Шуни қайд қилиш керакки, траектория айланадан иборат бўлган ҳолда унинг эгрилик радиуси айлананинг радиуси демакдир. Траекториянинг мос соҳаларидан R_1, R_2, R_3 ва ҳоказо масофада ётган O_1, O_2, O_3 ва ҳоказо нуқталар траекториянинг шу соҳаларидаги эгрилик марказлари деб аталади.

Эгрилик радиусига тескари бўлган катталик $C=\frac{1}{R}$ траекториянинг шу радиусга мос келган қисмининг эгрилиги деб аталади. Демак, эгрилик радиуси қанчалик кичик бўлса траекториянинг шу қисмининг эгрилиги шунчалик катта бўлади.

Келтирилган мулоҳазалардан шундай хулоса келиб чиқадики, ихтиёрий шаклдаги траекториянинг алоҳида қисмларини R радиусга мос келувчи айлананинг ёйи бўйлаб бўлаётган ҳаракат траекторияси деб қараш мумкин.

Умумий ҳолда ихтиёрий шаклдаги эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тезлиги сон қиймати бўйича ҳам, йўналиши бўйича ҳам ўзгариши мумкин. Тажрибаларнинг кўрсатишича, эгри чизиқли ҳаракатда тезлик вектори ҳамма вақт траекторияга уринма равишда ҳаракат томонга йўналган бўлади. Фараз қилайлик, моддий нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракат қилиб, Δt вақт давомида Δs масофани ўтиб, M нуқтадан N нуқтага келсин ва шу вақт оралигида унинг тезлиги, 1.17- расмда кўрсатилганидек, $\vec{v}_1$ дан $\vec{v}_2$ га ўзгарган бўлсин. Δt вақт давомида тезликнинг сон қиймати ва йўналиши бўйича ўзгаришини аниқлаб олиш учун қуйидагича иш кўрамиз: $\vec{v}_1$ векторни ўзига параллел равишда M нуқтага кўчирамиз ва $\vec{v}_1$ ҳамда $\vec{v}_2$ векторларнинг учларини $\Delta\vec{v}$ вектор билан туташтирамиз. Векторларни айириш қоидасига асосан $\Delta\vec{v}$ вектор $\vec{v}_2$ ва $\vec{v}_1$ векторларнинг айирмасидан иборат. Унинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан мос эмас. Уни траекторияга уринмалар ($\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ йўналишлар бўйича) ва унга тик (нормал) йўналишларга мос келувчи иккита ташкил этувчиларга ажратамиз. Бунинг учун кўчирилган $\vec{v}_2$ вектор бўйлаб узунлиги $\vec{v}_1$ векторнинг модулига тенг бўлган MK кесмани ажратамиз ва P нуқтадан K нуқтага $\Delta\vec{v}_n$ векторни ўтказамиз.



1.17-расм

Векторларни қўшиш қоидасига асосан $\Delta\vec{v}$ вектор $\Delta\vec{v}_\tau$ ва $\Delta\vec{v}_n$ векторларнинг вектор йиғиндисидан иборат бўлади, яъни

$$\Delta\vec{v}=\Delta\vec{v}_\tau+\Delta\vec{v}_n. \qquad (1.41)$$

Юқоридаги расмдан кўриниб турибдики, $\Delta\vec{v}$ векторнинг $\Delta\vec{v}_\tau$ ташкил этувчиси Δt вақт давомида тезликнинг сон қийматининг ўзгаришини кўрсатади. Маълумки, вақт бирлиги ичида тезликнинг ўзгариши тезланишни ифодалайди. Тезликнинг сон қийматининг бирлик вақт давомида ўзгариши *уринма (тангенциал) тезланиш* дейилади ва a_τ билан белгиланади. Уни Δt нолга интилган ҳол учун қуйидагича аниқлаймиз:

$$\vec{a}_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}_\tau}{dt}. \qquad (1.42)$$

Δt нолга интилганда унинг йўналиши $\vec{v}_1$ векторнинг M нуқтадаги йўналишига мос келади.

Энди (1.41) формуладаги $\Delta\vec{v}$ векторнинг иккинчи ташкил этувчиси Δv_n нимани ифодалашини батафсил қараб чиқайлик. Бунинг учун юқорида мулоҳаза юритганимиздек Δt вақт оралиғини жуда қисқа оламиз, яъни уни нолга интилтирамиз. Δt нолга интилса MN ёйга таяниб турувчи марказий бурчак ҳам нолга интилиб, бу ёй M ва N нуқталарни туташтирувчи ватар (ватар расмда кўрсатилмаган) билан устма-уст тушади. Бу ватар тенг ёнли учбурчак ΔMON нинг асосидир. Шунингдек, PMK учбурчак ҳам тенг ёнлидир. Бу учбурчаклар ўхшаш учбурчаклардир, чунки уларнинг мос томонлари ўзаро тик. Δt вақт оралиғи нолга интилган ҳол учун $\vec{v}_1\approx\vec{v}_2=\vec{v}$ деб қабул қиламиз ва учбурчакларнинг ўхшашлигидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{|MN|}{R}=\frac{\Delta v_n}{v}. \qquad (1.43)$$

$MN=\Delta s=v\Delta t$ эканлигини ҳисобга олиб, (1.43)ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{v\Delta t}{R}=\frac{\Delta v_n}{v} \quad \text{ёки} \quad \frac{\Delta v_n}{\Delta t}=\frac{v^2}{R};$$

бу ифодани вектор кўринишида ёзамиз:

$$\frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}=\frac{v^2}{R}\vec{n},$$

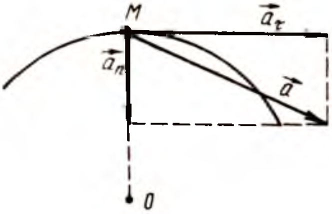
бу ерда $\vec{n}$ вектор $\Delta\vec{v}_n$ йўналишдаги бирлик вектор. Δt нолга интилганда $\vec{n}$ вектор (ва $\Delta\vec{v}_n$ вектор) $\vec{v}_1$ векторга тик равишда траекториянинг эгрилик марказига томон йўналади. Шунинг учун бу ифоданинг лимити

$$\vec{a}_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t}$$

марказга интилма тезланиш дейилади ва у

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad (1.34)$$

тарзда ҳам ифодаланади. Юқорида айтилганидек, бу тезланиш эгри чизиқли ҳаракатда вақт бирлиги ичида тезлик векторининг йўналиш бўйича ўзгаришини ифодалайди. Демак, марказга интилма тезланиш сон жиҳатдан чизиқли тезликнинг квадратига мутаносиб ва траекториянинг эгрилик радиусига тескари мутаносибдир.



1.18-расм

Мисол тариқасида шуни айтиш керакки, тўғри чизиқли ҳаракат траекториясининг эгрилиги нолга тенг (эгрилик радиуси чексиз) бўлганлиги учун бундай ҳолда марказга интилма тезланиш нолга тенг бўлади. Агар моддий нуқта ўзгармас бурчак тезлик билан, яъни айлана бўйлаб ўзгармас чизиқли тезлик билан ҳаракат қилаётган бўлса, бу ҳаракат фақат марказга интилма тезланиш билан аниқланади, чунки бу ҳолда уринма тезланиш нолга тенг.

Тўлиқ тезланиш (1.41) формулага асосан уринма ва марказга интилма тезланишларнинг вектор йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n. \qquad (1.45)$$

1.18- расмдан кўриниб турибдики

$$a^2=a_\tau^2+a_n^2, \qquad (1.46)$$

яъни тўла тезланиш модулининг квадрати уринма ва марказга интилма тезланишлар модуллари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлади.

1.9-§. ҲОСИЛА ВА ИНТЕГРАЛНИНГ ФИЗИКАВИЙ МАСАЛАЛАРГА ТАТБИҚИ

Ҳосила тушунчаси соф математикавий нуқтаи назардан фақатгина узлуксиз функциялар учун, аниқроғи, функцияларнинг узлуксизлик соҳасидагина мазмунга эга. Физикада ихтиёрий физикавий катталик бир ёки бир неча катталикларнинг функцияси сифатида қаралиши мумкин. Масалан, жисм босиб ўтган йўл вақтнинг функцияси, яъни ҳаракатдаги жисмнинг босиб ўтган йўли ҳаракатланиш вақтига боғлиқ бўлади. Бу боғланиш ошкор бўлмаган кўринишда $s=s(t)$ шаклда ёзилади. Шунингдек, ҳаракат тезлиги ва тезланиши ҳам вақтнинг функцияси сифатида $\vec{v}=\vec{v}(t)$ ва $\vec{a}=\vec{a}(t)$ кўринишда ёзилиши мумкин. Баъзи физикавий катталикларни, жумладан, тезлик ва тезланишни ҳам координаталарнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин. Бундай катталикларга энг оддий мисол — жисм зичлигидир. Ҳақиқатан ҳам, умумий ҳолда жисм зичлиги ҳажмнинг турли бўлакларида турлича бўлиши мумкин. Масалан, ҳаво молекулаларининг зичлиги оддий шароитда Ер сиртига яқин жойлашган қатламларда каттароқ бўлиб, баландлик ортган сари камая боради. Агар координаталар тизимининг Ер сиртига тик йўналган ўқини Z орқали белгиласак, бу боғланиш функционал кўринишда

$$\rho=\rho(z)$$

каби ёзилади. Жисмларнинг зичлиги ҳажмга боғлиқ бўлгани учун умумий ҳолда $\rho=\rho(x, y, z)$ функция ёрдамида аниқланади.

Энди зичлик тушунчаси воситасида физикавий масалаларда ҳосила тушунчасининг ишлатилиш мазмунини қараб чиқайлик. Таърифга асосан, жисмнинг ўртача зичлиги унинг ҳажм бирлигига тўғри келувчи массасига сон жиҳатдан тенг, яъни

$$\rho_{ў}=\frac{m}{V}.$$

Агар бизни бирор элементар ҳажмдаги зичлик қизиқтирса,

$$\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

формуладан фойдаланамиз; бунда Δm — элементар ҳажм (ΔV) даги масса.

Математикавий нуқтаи назардан жисмнинг бирор бир «нуқта»даги зичлиги

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV}$$

формула билан, яъни жисм массасидан ҳажм бўйича олинган ҳосила сифатида аниқланиши лозим. Зичликнинг ҳосилага асосланган бу таърифидан фойдаланиш учун қаралаётган жисмни «узлуксиз муҳит» деб қараш, яъни жисм массаси унинг ҳажми бўйича узлуксиз тақсимланган деб қараш керак бўлади. Жисм тузилишининг «узлуксиз муҳит» моделидан фойдаланиб физиканинг кўпгина (масалан, аэродинамика, қаттиқ жисмларнинг қайишқоқлик асослари ва ш.к.) масалаларини муваффақиятли ҳал қилиш мумкин. Аслида эса жисмлар узлуксиз эмас, жисмларни ҳосил қилувчи заррачалар орасидаги ўртача масофа шу зарраларнинг геометрик ўлчамларидан бир неча марта катта бўлиши мумкин. Математикавий тил билан айтганда, масса ҳажмнинг узлуксиз функцияси эмас. Ҳақиқатан, ҳатто қаттиқ жисмларда ҳам асосий масса кристалл панжаранинг «тугунлари»да жойлашган бўлиб, панжаранинг ичи амалда «бўшлиқ»дан иборат бўлади. Шунинг учун агар биз қараётган ҳажм элементи ΔV кристалл панжара тугунлари орасидаги фазода жойлашган бўлса, бу ҳажмдаги Δm масса нолга тенг бўлади. Газлар ва суюқликларда эса масала янада мураккаблашади. Бу ҳолда молекулаларнинг бетартиб иссиқлик ҳаракати туфайли муайян ҳажм элементидаги молекулалар сони ва демак масса ҳам, вақт давомида ниҳоятда тез ҳамда бетартиб ўзгариб туради. Шу сабабли

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

лимит умуман ҳеч қандай физикавий мазмунга эга бўлмайди. $\Delta m/\Delta V$ катталик физикавий мазмунга эга бўлиши учун ΔV ҳажм етарли даражада кичик бўлиши билан бирга ундаги молекулалар (ёки атомлар) сони етарли даражада кўп бўлиши керак, бинобарин, бу ҳажмдаги массанинг ўртача қиймати ҳақида муайян фикр юритиш мумкин бўлиши керак. Амалда шундай бўлиши, яъни бир-бирига зид икки талабнинг бир вақтда қондирилиши мумкинми? Бу саволга жавоб бериш учун зичлиги нисбатан кам бўлган оддий шароитдаги газни олиб қарайлик. Маълумки, оддий шароитда 1 см^3 ҳажмда $3\cdot10^{19}$ тага яқин газ молекуласи бўлади. Агар $\Delta V=10^{-10}$ см^3 бўлса, бу ҳажмда тахминан $3\cdot10^{9}$ та молекула жойлашган бўлади ва бу ҳажмдаги массанинг ўртача қиймати ҳақида бемалол аниқ мулоҳаза юритиш мумкин.

Иккинчи томондан, 10^{-10} см^3 ҳажм одатдаги макроскопик жисм ҳажмига нисбатан «нуқта» деб қаралиши мумкин. Шунга кўра, физикада зичлик математикадаги каби

$$\rho=\frac{dm}{dV}$$

кўринишда ифодаланар экан, бунда dV катталикнинг юқорида баён қилинган мазмундаги чекли катталик эканлиги назарда тутилади.

Математикавий нуқтаи назардан жисмнинг бирор ҳажм элементидаги зичлигини $\rho(\Delta V_i)=\dfrac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ кўринишида ёзиш тўғри бўлади. Юқорида айтганимиздек, бу ҳолда $\Delta V_i\to0$ бўлганда $\Delta m_i/\Delta V_i$ нисбат аниқ бир қийматга интилмайди (лимит мавжуд эмас).

Агар ΔV ни чекли кичик катталик десак, $\Delta m/\Delta V$ катталик берилган жисм учун шу ҳажм элементида вақт давомида ўзгармай қолувчи хоссаларидан бири бўлган зичликни ифодалайди.

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, массадан ҳажм бўйича (физикавий мазмунда) ҳосила олишда ҳажмнинг чексиз кичик орттирмаси ўрнига чекли кичик орттирмасидан фойдаланиш ҳисоблашда хатоликларга олиб келмайди, аксинча, $\Delta V\to0$ деб қаралганда келиб чиқувчи қатор хатоликларни бартараф қилиб, математикавий ифодага физикавий мазмун беради.

Энди ҳосила ва механикавий тезлик тушунчалари орасидаги боғланишни қараб чиқайлик. Таърифга асосан $V_{\text{ў}}=\dfrac{s}{t}$. Агар бирор Δt вақт давомидаги ўртача тезликни ҳисоблаш керак бўлса, $V_{\text{ў}}=\Delta s/\Delta t$ формуладан фойдаланилади. Агар Δt вақт етарли даражада кичик бўлиб, бу вақт оралиғида тезликни ўзгармас деб қараш мумкин бўлса, тезликнинг бу қийматини Δt вақт оралиғида ётувчи ихтиёрий t_0 пайтдаги оний тезлик деб қараш мумкин. Шу сабабли математикада тезликнинг оний қиймати учун

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$$

лимит қабул қилинади. Аммо амалда бу лимит мавжудми? Буни аниқлаш учун физикавий катталикларнинг умумий хусусиятларини қараб чиқиш кифоя. Маълумки, ҳар қандай физикавий катталик ўлчашлар воситасида аниқланади. Хусусан, тезликнинг бирор вақт оралиғидаги ўртача қийматини аниқлаш учун ҳаракат давом этган вақт оралиғи ва шу вақт ичида босиб ўтилган йўлни ўлчаш лозим. Ҳар қандай ўлчаш эса ўлчаш асбобларининг хусусиятлари ва ўлчаш шароити билан белгиланувчи хатоликлардан холи бўлиши мумкин эмас. Хусусан, $\Delta t\to0$ бўлган вақт оралигини исталган усул билан аниқ ўлчаб бўлмайди, чунки геометрик нуқта фазовий ўлчамларга эга бўлмаганидек, вақт пайти (моменти) вақт оралиғи ўлчамига эга эмас. Демак, математикавий нуқтаи назардан қатъий қаралса $\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ мавжуд эмас. Агар Δt етарли даражада кичик, аммо чекли деб қаралса $\Delta s/\Delta t$ нисбат муайян физикавий мазмунга эга бўлган тезлик тушунчасини аниқ ифодалайди.

Ихтиёрий катталик $f(y)$ ва аргумент y нинг чекли орттирмалари (Δf ва Δy лар) нинг $\Delta f/\Delta y$ нисбати f' ҳосилани етарли даражада аниқ ифода қилса, физиклар Δf ва Δy

катталикларни чексиз кичик деб, аниқроғи физикавий чексиз кичик миқдорлар деб атайдилар.

Маълумки, дифференциал тушунчаси чексиз кичик орттирма мазмунига эга. Модомики, физикавий катталикларнинг математикавий мазмундаги чексиз кичик орттирмаси мавжуд эмас экан, демак уларнинг математикавий мазмундаги дифференциали ҳақида гапириш мумкин эмас. Аммо физикада физикавий нуқтаи назардан чексиз кичик деб қараш мумкин бўлган орттирмалар учун ҳам df ва dy белгилашлардан фойдаланилади. Худди шунингдек, физикавий катталикларни ифодаловчи функция ва аргументлар орттирмалари нисбатининг аргумент орттирмаси нолга интилгандаги лимити деярли барча ҳолларда мавжуд бўлмаганлигидан физикада ҳосила сифатида етарли даражада кичик қилиб олинган орттирмалар нисбатидан фойдаланилади ва бу ҳосила

$$f' = \frac{df}{dy}$$

каби белгиланади. Бу ўринда физикавий катталиклар учун

$$\frac{df}{dy} \neq \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta y}$$

эканлигини ёдда тутиш лозим.

Математика ва физика фанларида ишлатилувчи ҳосила тушунчалари мазмун жиҳатидан фарқ қилганлари каби интеграл тушунчаси ҳам ҳар икки ҳолда турлича мазмунга эгадир. Математикада интеграллаш амали

$$\lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)\Delta y_i$$

лимитга ўтиш сифатида таърифланади, яъни

$$\lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)\Delta y_i = \int_a^b f(y)\,dy.$$

Аммо физикада $\Delta y \to 0$ катталикни аниқлаш (ўлчаш) мумкин эмас. Қолаверса, $f(y_i)$ қиймат умуман мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Шу сабабли $f(y)$ бирор физикавий катталикни ифодалаганда қаралаётган лимит кўп ҳолларда мавжуд бўлмайди.

Агар Δy_i етарли даражада кичик, лекин аргументнинг шу қийматлари оралиғида $f(y)$ функциянинг ўртача қиймати ҳақида фикр юритиш мумкин бўлган даражада катта бўлса $\sum_{i=1}^{\infty} f(y)\Delta y_i$ йиғинди муайян физикавий мазмунга эга бўлади. Шунга кўра физикада интеграл йиғиндининг лимити сифатида эмас, балки етарли даражада кичик бўлган жуда кўп қўшилувчиларнинг йиғиндиси сифатида аниқланади, яъни:

$$\int_a^b f(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta y_i.$$

Хусусан, агар $f(y)$ функция тезликнинг вақтга боғлиқлигини ифодаласа, $f(y) = v(t)$ бўлади; у ҳолда таърифга асосан Δt вақт оралиғида босиб ўтилган йўл

$$\Delta s_i = v_i \Delta t_i$$

формула билан аниқланади. Агар бирор етарли даражада катта вақт оралиғида босиб ўтилган йўлни ҳисобламоқчи бўлсак, табиий равишда, элементар вақтлар оралиқларида босиб ўтилган йўлларнинг йиғиндисини олишимиз керак, яъни*

$$s = \sum_i s_i = \sum_i v_i \Delta t_i.$$

---

* Бу ва бундан кейинги ўринларда йиғинди $\sum_i$ кўринишда берилган бўлса, $\sum_{i=1}^{n}$ мазмунида тушунилсин.

Умумий ҳолда тезлик вақт давомида ўзгариб борганлигидан, ҳисоблаш тўғри бўлиши учун Δt_i вақт оралиғини шундай танлашимиз керакки, бу оралиқда тезлик деярли ўзгармай қолсин. Бу ҳолда

$$\sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

тенглик ўринли бўлади. Демак,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Физикада интеграллаш амалидан физикавий катталикларнинг ўртача қийматларини ҳисоблашда ҳам фойдаланилади. Ҳақиқатан ҳам маълумки, ўртача тезлик юқорида кўрсатилгандек

$$v_{\text{ў}} = \frac{s}{t_2 - t_1}$$

формула билан ҳисобланади. Аммо s нинг ифодасини интеграл ёрдамида ёзсак, бу формула

$$v_{\text{ў}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

кўринишга ўтади. Ихтиёрий $f(y)$ физикавий катталикнинг $(y_2 - y_1)$ оралиқдаги ўртача қиймати $f_{\text{ў}} = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} f(y)\,dy$ формула билан ҳисобланади. Масалан, $f = \rho$, $y = V$ бўлсин. У ҳолда $\rho_{\text{ў}} = \frac{1}{V} \int_0^V \rho(v)\,dV$ бўлади.

Шундай қилиб, математика амалларини физика масалаларига расман қўллашда формулаларнинг шакли ўзгармаса ҳам, уларнинг мазмуни маълум даражада ўзгаради. Бундай ўзгаришлар физикавий масалани ечишни қулай кўринишга келтириш учун сунъий равишда эмас, балки физика қонунлари ва ҳодисаларининг моҳиятидан келиб чиқиб, табиий равишда амалга оширилади.

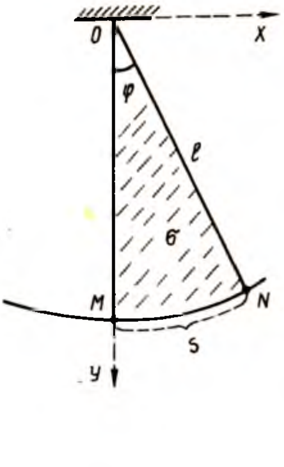
1.10- §. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАЛАРИ СОНИ. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР

Моддий нуқта (жисм)ларнинг ҳаракатини ва исталган пайтда уларнинг фазодаги вазиятини тавсифлашда эркинлик даражалари сони деган тушунча киритилади. Моддий нуқтанинг фазодаги ҳолатини тўлиқ аниқлашга имкон берувчи бир-бирига боғлиқ бўлмаган (мустақил) катталиклар сони унинг *эркинлик даражалари сони* дейилади.

Қуйидаги мисоллар эркинлик даражалари сонининг моҳиятини очишга имкон беради: моддий нуқтанинг фазодаги вазияти унинг учта координатаси (x, y, z) орқали аниқланиши мумкин. Демак, моддий нуқтанинг эркинлик даражалари сони 3 га тенг. Муайян шароитда моддий нуқтанинг кўчиши чекланган бўлиши ҳам мумкин. Бильярд шарининг ҳаракатини олиб қарасак, у фақат текисликда ҳаракат қилади ва унинг исталган пайтдаги вазияти иккита катталик — x, y координаталар орқали ифодаланади (учта — x, y, z координатадан фақат 2 таси x ва y мустақилдир), яъни бу шарнинг эркинлик даражалари сони 2 га тенг. Жисмнинг олдиндан берилган траектория бўйлаб ҳаракатини олиб қарасак, унинг исталган пайтдаги вазияти шу траектория бўйлаб ўтилган йўл узунлиги билан аниқланади (масалан, поезд ёки трамвайнинг ҳаракати); бу ҳолда эркинлик даражалари сони 1 га тенг. Моддий нуқтанинг фазодаги ҳаракатини чекловчи воситалар *боғловчилар* деб аталади.

Умумий ҳолда N та моддий нуқтадан иборат тизимни олиб қарайлик. Бу моддий нуқталар бир-бирига нисбатан ихтиёрий йўналишда кўча олсалар бундай тизимнинг вазиятини аниқлаш учун $3N$ та координаталар (x_1, x_2,..., x_N, y_1, y_2,..., y_N, z_1, z_2, ..., z_N) ни билиш керак бўлади, яъни унинг эркинлик даражалари сони $3N$ га тенгдир. N чексиз катта сон билан ифодаланса тизимнинг вазиятини координаталар воситасида чекли равишда аниқлаб бўлмайди. Бундан ташқари, тизимнинг вазиятини координаталар орқали ифодалаш ҳамма вақт ҳам қулай бўлавермайди. Лекин кўпчилик ҳолларда тизимнинг фазодаги вазиятини бир-бирига боғлиқ бўлмаган чекли катталиклар ёрдамида аниқлаш мумкин. Бунинг сабаби (юқоридаги мисолларда кўрганимиз каби) шундаки, ҳаракат эркинлиги чекланганда эркинлик даражаларининг сони камаяди ва тизимдаги барча моддий нуқталарнинг вазиятини аниқлаш учун камроқ координаталарни (ёки катталикларни) билиш етарли бўлади. Масалан, тизимдаги N та моддий нуқтанинг K таси ўзаро бир-бири билан боғланишда бўлса, бундай тизимнинг эркинлик даражалари сони K тага камаяди ва $S=3N-K$ бўлади. Бундай координаталар ўрнида исталган ўлчамга эга бўлган ва мақсадга мувофиқ равишда танланган катталиклар қўлланиши учун «умумлашган координаталар» деган тушунча киритилади. Тизимнинг фазодаги вазиятини аниқлайдиган ва мақсадга мувофиқ равишда танлаб олинган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган катталиклар тизимнинг *умумлашган координаталари* дейилади. Умумлашган координаталар $q_i (i=1,2,3...)$ билан белгиланади.

Эркинлик даражалари сони $S=3N-K$ бўлган тизим (система)нинг вазияти S та умумлашган координаталар орқали ифодаланади. Умумлашган координаталар сифатида ихтиёрий физикавий катталиклар олиниши мумкин (кесма узунлиги, ёй узунлиги, оғиш бурчаги, юзанинг сатҳи ва ҳоказолар). Масалан, ясси математикавий тебрангич (маятник, бир текисликда тебранувчи тебрангич)нинг ихтиёрий пайтдаги вазиятини (1.19- расм) битта умумлашган координата орқали бериш мумкин. Бу ерда XY текислик ва ипнинг узунлиги (l) ҳара-



1.19-расм

катни чекловчи воситалардир. q сифатида бурилиш бурчаги ёки ёй узунлиги $MN=S$ ёхуд $OMNO$га тенг юза (σ) олиниши мумкин. Ҳар ҳолда тебрангичнинг мусбат ва манфий (ўнг ва чап) томонга четланиши кўрсатилиши керак, акс ҳолда q катталик бир маъноли бўлмай қолади.

Умумлашган координаталарнинг вақт бўйича ҳосилалари — $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ умумлашган тезликлар дейилади. Масалан, q — чизиқли катталик бўлса, $\dot{q}$ — чизиқли тезлик, q—бурилиш бурчаги бўлса, $\dot{q}$ — бурчак тезлик ва ҳ. к. бўлади.

Мутлақ қаттиқ жисмнинг фазодаги вазиятини тавсифлаш учун унинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасининг вазиятини аниқлаш кифоя. Бу нуқталарни фикран A, B ва C деб белгиласак, уларнинг исталган пайтдаги вазиятлари 9 та (x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C) координаталар орқали берилади. Лекин нуқталар орасидаги мос равишда олинган AB, BC ва AC кесмаларнинг узунликлари ўзгармасдир. Яъни A, B ва C нуқталарнинг бир-бирига нисбатан ҳаракатини чекловчи боғланишлар қўйилган AB, BC ва AC кесмалардан иборат боғланишлар сони 3 га тенг бўлиб, ҳаракатланаётган қаттиқ жисмнинг эркинлик даражалари сонини учтага камайтиради. Демак, мутлақ қаттиқ жисмнинг эркинлик даражалари сони 6 га тенг.

II БОБ

МОДДИЙ НУҚТАЛАР ДИНАМИКАСИ

2.1-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ВАЗИФАСИ. НЬЮТОН МЕХАНИКАСИДА ҲОЛАТ ТУШУНЧАСИ

Механиканинг кинематика қисмида ҳаракат қонунларини ўрганишни бу ҳаракатларни юзага келтирган сабаблар билан боғламаган ҳолда олиб борилди. Механиканинг динамика бўлимида эса жисмлар ҳаракатини мазкур ҳаракатни юзага келтирувчи сабаблар моҳияти билан боғлаб ўрганилади. Динамиканинг вазифаси асосан икки қисмдан иборат:

1) жисм ҳаракати маълум бўлса унга таъсир этувчи кучни аниқлаш;

2) жисмга таъсир этувчи куч маълум бўлган тақдирда ҳаракат қонунини аниқлаш.

Бу мулоҳазалардан ҳар қандай ҳаракат куч таъсири остида мавжуд бўлиши мумкин, деган хулоса келиб чиқмаслиги лозим. Тажриба шуни кўрсатадики, куч таъсири остида жисмларнинг тезлиги ўзгаради, яъни улар тезланиш оладилар.

Ҳаракат жараёнида моддий нуқта (ёки моддий нуқталар тизими)нинг* координаталари, яъни радиус-вектори ўзгаради.

Тажриба кўрсатадики, моддий нуқтанинг берилган вақтдаги ҳолати унинг радиус-вектори r ва тезлиги v билан, яъни унинг x, y, z координаталари ҳамда координата ўқлари бўйича тезликнинг

---

* Жисм тушунчаси ўрнида моддий нуқта тушунчасини ишлатамиз. Кўп ҳолларда ҳодисанинг моҳиятини ойдинлаштириш мақсадида жисм тушунчасидан ҳам фойдаланамиз.

проекциялари v_x, v_y, v_z билан тўла аникланади. N та моддий нуктадан иборат тизимнинг берилган вақтдаги ҳолати тизимдаги моддий нуқталарнинг радиус-векторлари $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... , $\vec{r}_N$ ва уларнинг тезликлари $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ... , $\vec{v}_N$ билан ифодаланади. Демак, ҳар бир моддий нуқтанинг ҳолати бир-бирига боғлиқ бўлмаган иккита катталик — $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ билан аниқланади. Ҳар бир моддий нуқта фазода 3 тадан эркинлик даражасига эга бўлганлиги учун N та моддий нуқтадан иборат тизимнинг ҳаракатини аниқловчи катталиклар сони $6N$ га тенг бўлади.

Моддий нуктанинг ҳолатини изоҳлашда унинг тезлигининг аҳамияти йўқдек кўринади. Шу туфайли моддий нуктанинг вазияти ва ҳолати ҳақидаги тушунчалар билан боғлиқ бўлган мулоҳазаларда чалкашлик вужудга келиши мумкин. Моддий нуқтанинг берилган вақтдаги вазияти унинг координаталари билан аниқланиши ўз-ўзидан равшан; унинг ҳолати ҳақида тўла тасаввур ҳосил қилиш учун қуйидаги мисолни келтирамиз. Фараз қилайлик, биз тахтага болға ёрдамида мих қоқмоқчимиз. Болғани етарли даражада кичик тезлик билан михга тегизсак, мих тахтада ҳатто из қолдирмаслиги ҳам мумкин. Лекин, болғага етарли даражада катта тезлик берсаккина биз хоҳлаган натижамизга эришамиз. Иккала ҳолда ҳам болғанинг михга теккандаги вазияти (унинг радиус-вектори ёки координатлари) бир хил, аммо иккала ҳолда болғанинг тезлиги ҳар хил бўлгани учун унинг ҳолати ҳар хилдир. Шу туфайли болғанинг ҳар хил ҳолати ҳар хил натижага олиб келади.

2.2-§. КУЧ. МАССА. ИМПУЛЬС

Жисмларнинг ҳаракат қонунларини ўрганар эканмиз, ҳаракатнинг сабабини аниқлаб олишимиз керак. Тахта устидаги бильярд шарини олиб қарайлик. Тахта жуда катта аниқлик билан уфқ текислигида ўрнатилган бўлса, унинг устидаги шар қўзғалмай тураверади. Агар шарни туртиб юборсак, у тахта бўйлаб юмалай бошлайди. Бу ҳолда туртки шар ҳаракатининг сабабчиси бўлади. Шунинг учун бирор жисм ўз ҳолатини ўзгартириб ҳаракатга келса, унинг ҳаракатининг сабабчиси бошқа жисмнинг таъсири деб қарашимиз керак. Тинч турган жисмни бошқа жисм таъсири билан ҳаракатга келтирсак, унинг тезлиги нолдан қандайдир муайян қийматгача ошади, яъни у тезланиш олади. Худди шунинг каби, бирор тезлик билан ҳаракат қилаётган жисмга бошқа жисм таъсир қилса, уларнинг ҳаракат тезликлари ўзгаради. Тезликнинг ўзгариши деганда унинг қийматининг ошиши, камайиши ёки ҳаракат йўналишининг ўзгариши тушунилади. Бошқача айтганда, жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида уларнинг ҳаракати ўзгаради, натижада улар тезланиш билан ҳаракат қиладилар. Шундай қилиб, жисмларга бериладиган тезланишнинг сабабчиси — кучдир.

Демак, куч тезликнинг сабабчиси бўлмай, балки у жисмнинг тинч ёки ҳаракат ҳолатини ўзгартувчи сабабдир. Галилей (1564—1642) гача яшаган олимлар кучни ҳаракатнинг сабабчиси деган нотўғри фикрда бўлганлар.

Лекин шу нарсани алоҳида қайд қилиш керакки, кучни жисмга узатилган тезланишнинг сабабчиси деб қараш кучнинг моҳиятини тўла ифодалаб бермайди, чунки таъсир этувчи куч жисмга тезланиш бермай, балки унинг шаклини ёки ҳажмини ўзгартириши, яъни уни деформациялаши ҳам мумкин. Масалан, металлдан ясалган пружина ёки ҳаво тўлдирилган резина шар ташқи куч таъсирида деформацияланади. Эталон сифатида қабул қилинган пружинанинг ташқи куч таъсирида чўзилиши (ёки сиқилиши)дан кучнинг сон қийматини ўлчашда фойдаланилади. Кучни ўлчаш учун қўлланиладиган динамометр деган асбобнинг ишлаши шу принципга асосланган.

Бу мулоҳазалардан биз шундай хулосага келамизки, *куч* — жисмни деформацияловчи ҳамда унга тезланиш берувчи сабабдир.

Куч моддий жисмлардан ажратилган ҳолда мустақил моҳият касб этмайди, чунки ўзаро таъсир фақат моддий жисмлар орқали содир бўлади. Аммо куч турли физикавий манбаларга эга бўлиши мумкин: қайишқоқлик (эластиклик) кучини юзага келтирувчи деформация; оғирлик кучини юзага келтирувчи гравитация майдони; электр кучини юзага келтирувчи электр майдон; токли ўтказгичга таъсир этувчи кучни юзага келтирувчи магнит майдон ва ш. к. Ҳамма кучларнинг асосий манбаи эса жисмлардир. Жисмларнинг бир-бирига бевосита тегиши туфайли вужудга келадиган таъсир кучлари билан уларга майдон томонидан таъсир этувчи кучлар орасида моҳият жиҳатидан фарқ йўқ: жисмлар атомлардан ташкил топган; атомлардаги электронлар қобиғи эса ўз майдонини ҳосил қилади. Жисмларнинг бир-бирига бевосита тегиши туфайли юзага келадиган ўзаро таъсир кучлари аслида атомлардаги электронлар томонидан ҳосил қилинган майдонлар таъсирининг натижасидир. Лекин жисмларнинг бир-бирига тегиши туфайли юзага келадиган кучларнинг асосий хусусиятлари шундан иборатки, улар атомларнинг диаметрлари билан таққосланарли даражадаги кичик масофанинг ортиши билан кескин камайиб кетади, чунки атом ядросини ўраб олган электрон қобиғининг ҳосил қилган майдони масофанинг ортиши билан худди шу тарзда кескин камаяди. Бундай кичик масофадаги ўзаро таъсирни биз амалий жиҳатдан жисмлар бир-бирига тегишининг натижаси деб қараймиз. Шундай қилиб жисмларнинг ўзаро таъсири майдон воситасида содир бўлади. Майдон эса ўз навбатида материянинг бир туридир. Умуман куч қаралаётган жисмга бошқа жисмларнинг механикавий таъсирининг ўлчовидир.

Бирор жисмни ташқи куч таъсири остида ҳаракатга келтирмоқчи бўлсак ёки ҳаракатдаги жисмнинг тезлигини ўзгартирмоқчи бўлсак у «қаршилик» кўрсатади. Бу «қаршилик» турли жисмларда турлича бўлади. Масалан, стол устида турган китобни ёки ойнаи жаҳонни жойидан силжитмоқчи бўлсак, уларнинг бу силжитишимизга кўрсатадиган «қаршиликлари» бир хил бўлмаслиги ўз-ўзидан аён, яъни ойнаи жаҳонни силжитиш учун китобни силжитиш учун лозим бўлганидан анча катта куч билан таъсир қилишимиз керак. Шунингдек, тенг кучлар таъсирида ҳар хил жисмлар олган тезланишлари ҳар хил бўлади. Масалан, диаметрларни бир-биридан бир неча мартага фарқ қиладиган иккита пўлат шарнинг ҳар бирига бир хил куч билан таъсир қилсак, уларнинг олган тезланишлари турлича бўлади: диаметри катта бўлган шарнинг олган тезланиши диаметри кичик шарнинг олган тезланишига нисбатан кичик бўлади. Ташқи куч таъсирида жисмларни ҳаракатга келтирмоқчи бўлганимизда уларнинг кўрсатган «қаршилиги» ва бир хил куч таъсирида уларнинг олган ҳар хил тезланишлари ҳар бир жисмнинг ўзига хос хусусияти билан аниқланади. Жисмларнинг бу хусусиятини инертлик дейилади. Жисм инертлигининг ўлчови масса деб аталади. Демак, жисмнинг массаси нақадар катта бўлса, унинг инертлиги ҳам шу қадар ошади. Масса жисмнинг энг асосий хоссаларидан биридир.

Тажрибаларнинг кўрсатишича шакллари бир хил, массалари эса m_1 ва m_2 бўлган жисмларнинг ҳар бирига бир хил ташқи куч билан таъсир этсак, улар олган тезланишлар (a_1 ва a_2) мазкур жисмларнинг массаларига тескари мутаносибдир, яъни

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}. \tag{2.1}$$

Ҳар қандай жисмнинг массаси эталон сифатида қабул қилинган жисм массаси билан таққослаш орқали ўлчанади. Бу усулда жисмларнинг эркин тушиш қонуниятидан фойдаланилади. Эркин тушиш эса жисмларга Ер тортиш кучи таъсирининг натижасидир. Ер юзининг ҳар бир нуқтаси учун жисмларнинг эркин тушишидаги тезланиши ўзгармас катталик бўлиб, $\vec{g}$ га тенг ва массаси m бўлган жисмга $\vec{\mathscr{P}}=m\vec{g}$ катталикдаги куч таъсир этади. Тарози палласига қўйилган жисм паллани оғирлик кучига тенг куч билан босади. Шу туфайли икки жисм массаларининг нисбати улар оғирликларининг нисбати кабидир:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\vec{\mathscr{P}}_1}{\vec{\mathscr{P}}_2}. \tag{2.2}$$

Жисм массаси скаляр катталик бўлиб, унинг оғирлиги эса вектор катталикдир. Бу вектор эркин тушиш тезланиши йўналишида Ернинг маркази томон йўналган.

Тажрибаларнинг кўрсатишича, *масса аддитив катталикдир*, яъни жисм массаси унинг айрим бўлаклари массаларининг йиғиндисига тенг. Механикавий тизимнинг массаси тизимнинг таркибига кирувчи барча жисмлар массаларининг йиғиндисига тенг.

Ҳаракатдаги жисм массаси билан тезлигининг кўпайтмаси жисмнинг импульси дейилади (эски адабиётларда «импульс» тушунчаси ўрнида «ҳаракат миқдори» ишлатилган):

$$\vec{p}=m\vec{v}. \tag{2.3}$$

Жисм импульси — тезлик вектори йўналишидаги вектор катталикдир. n та моддий нуқта (ёки n та жисм) дан иборат механикавий тизимни олиб қарасак, унинг импульси ундаги моддий нуқталар импульсларининг вектор йиғиндисига тенг:

$$\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i=\sum m_i\vec{v}_i, \tag{2.4}$$

бунда $\vec{p}_i$, m_i ва $\vec{v}_i$ лар тизимга кирувчи i нчи моддий нуқтанинг мос равишда импульси, массаси ва тезлигидир.

Импульсни ифодаловчи (2.3) ва (2.4) формулалар «секин» ҳаракатлар учун тўғридир. «Секин» ҳаракат деганда жисмнинг тезлиги (v) ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги ($c=3\cdot10^8$ м/с) га нисбатан жуда кичик ($v\ll c$) тезлик билан содир бўлаётган ҳаракатни тушунамиз.

«Тез» ҳаракат қонуниятларини, яъни релятив механикага оид ҳодисаларни, биз VII ва VIII бобларда қараб чиқамиз. Бошқа бобларда биз фақат «секин» ҳаракатларга оид ҳодисалар ҳақида мулоҳаза юритамиз.

2.3- §. НЬЮТОН МЕХАНИКАСИНИНГ ҚЎЛЛАНИШ ЧЕГАРАЛАРИ

Олдинги бандда айтилганидек, Ньютон механикаси макроскопик жисмларнинг секин ҳаракатлари учун, яъни ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик ($v\ll c$) тезликлар учун тўғридир. Кундалик ҳаётимизда одатда секин ҳаракатлар билан иш кўрамиз. Ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигига яқин бўлган тезлик билан ҳаракат қилаётган жисмларга Ньютон механикасининг қўлланилиши мумкин эмаслиги нисбийлик назарияси ва тажриба натижалари асосида аниқланди. Ёруғлик тезлигига яқин тезликлар билан ҳаракатланувчи жисмларнинг ҳаракати нисбийлик назариясига асосланган релятив механика қонунларига бўйсунади (VII бобга қ.).

Ньютон механикасининг қўлланилишини белгилаб берувчи иккинчи чегара микрозарра (молекула, атом, протон, нейтрон, электрон ва ҳ. к.) ларнинг ҳаракат қонунларини ўрганиш натижасида намоён бўлди. Ньютон механикасида ҳаракатдаги жисмнинг исталган пайтдаги ҳолати унинг аниқ координаталари (уч ўлчовли ҳаракатда — x, y, z; бир ўлчовли ҳаракатда — x) ва тезлиги орқали аниқланади; тезлик ўрнида импульс ($\vec{p}=m\vec{v}$) ифодасидан фойдаланиш мумкин. Равшанки, ҳаракатдаги жисмнинг исталган пайтдаги координаталари ва тезлиги аниқланган бўлса, унинг фазодаги траекторияси ҳам маълум демакдир.

Квант механикаси тасаввурларига кўра ҳаракатдаги микрозарраларнинг ҳолатини унинг координаталари ва тезликларининг аниқ қийматлари орқали аниқлаб бўлмайди: ихтиёрий олинган бирор пайтда ҳаракатдаги микрозарраларнинг координатаси қанча кичик хатолик билан аниқланса, унинг импульсини аниқлашдаги хатолик Δp шунча катта бўлади. Бу ерда зикр этилган ноаниқликлар (хатоликлар)

$$\Delta x\cdot\Delta p\gtrsim h \text{ ёки } \Delta x\cdot m\Delta v_x\gtrsim h \qquad (2.5)$$

муносабат билан боғланган ва у **Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабати** дейилади (бунда $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Ж·с — Планк доимийси). Бу муносабат микрозарра координатаси ва импульсини бир вақтнинг ўзида ўлчаш аниқлигини белгилайди ва ўлчов асбобларини ҳамда ўлчаш усулларини такомиллаштириш йўли билан мазкур аниқликни орттириш мумкин эмаслигини кўрсатади. Бошқача айтганда, ўлчашдаги ноаниқликлар микрозарралар табиатининг ўзидан келиб чиққан бўлиб, ўлчашларда йўл қўйилган хатоларга хеч қандай алоқаси йўқ. Микрозарраларнинг ҳаракати Ньютон механикасидаги «моддий нуқта» ҳаракати тушунчасига нисбатан анча мураккаб бўлиб, ундаги «траектория бўйлаб ҳаракат» тушунчасини микрозарраларга ҳамма вакт ҳам татбиқ қилиб бўлмаслиги аниқланди.

Гейнзенбергнинг ноаниқлик муносабатини макрожисмларга татбиқ қилиб кўрайлик. Бунинг учун макрожисмлар ичида энг кичик жисмнинг ҳаракатини олиб қарайлик. Фараз қилайлик, биз массаси 1 грамм (10^{-3} кг) бўлган шарчанинг ҳаракатини кузатаётган бўлайлик ва унинг координаталарини жуда катта аниқлик билан — бир микрон (10^{-6} м) аниқлик билан ўлчаган бўлайлик. У ҳолда (2.5) га кўра тезликни ўлчашдаги ноаниқлик (хатолик)

$$\Delta v \gtrsim \frac{h}{\Delta x m} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \cdot 10^{-3}} \approx 10^{-24} \text{ м/с}$$

ни ташкил этади, яъни бир вақтнинг ўзида Δx ва Δv ноаниқликларнинг жуда кичик қийматга эга бўлишлари макроскопик жисмлар ҳаракатини тавсифлашда Ньютон механикаси қонунларини қўллаш мумкинлигини кўрсатади.

Энди (2.5) муносабатни микрозарраларга татбиқ қилиб кўрайлик. Бунинг учун атом кўламидаги ҳодиса — ядро атрофида айланаётган электроннинг ҳаракатини ўрганаётган бўлайлик. Атомларнинг ўлчамлари (эффектив диаметрлари) бир неча ангстремга тенг (1 ангстрем (Å)$=10^{-10}$ м) бўлганлиги туфайли ҳаракатдаги электроннинг координатаси кам деганда 1 Å аниқлик билан ($\Delta x \approx \approx 1 \text{Å} = 10^{-10}$м) ўлчанаётган бўлсин. Электроннинг массаси $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг эканлигини назарда тутсак, атом қобиғида ҳаракатланаётган битта электроннинг тезлигини ўлчашдаги ноаниқлик (йўл қўйилган хато)

$$\Delta v \gtrsim \frac{h}{\Delta x m} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 9 \cdot 10^{-31}} \approx 7 \cdot 10^{6} \text{ м/с}$$

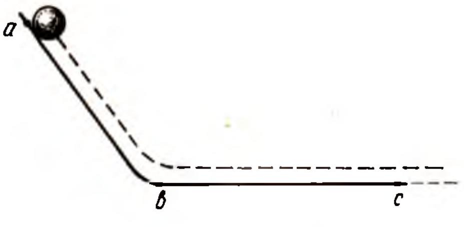
ни ташкил этади. Электрон тезлигини ўлчашдаги бу ноаниқлик ($\approx 7 \cdot 10^{6}$ м/с) ўз орбитаси бўйлаб ҳаракатидаги тезлиги ($\approx 10^{6}$ м/с) дан ҳам катта экан, яъни электроннинг ядро атрофидаги тезлиги аниқ эмас. Бундан шу хулоса келиб чиқадики, электроннинг (ва бошқа микрозарраларнинг) ҳаракат манзарасини яратишда Ньютон механикасидаги тасаввурларни қўллаб бўлмайди.

2.4-§. НЬЮТОННИНГ БИРИНЧИ ҚОНУНИ. ИНЕРЦИАЛ САНОҚ ТИЗИМЛАРИ

Динамиканинг асосини Ньютоннинг учта қонуни ташкил этади. **Ньютоннинг биринчи қонуни** қуйидагича таърифланади: *жисмга бошқа жисмлар таъсир этмаса, у тинч ҳолатда бўлади ёки ўзининг тўғри чизиқли текис ҳаракатини сақлайди.*

Бу қонуннинг таърифи икки қисмдан иборат. Биринчи қисм агар жисмга бошқа жисмлар (яъни ташқи куч) таъсир этмаса у ўзининг тинч ҳолатини сақлайди деган қисми билан боғлиқ ҳодисалар кундалик ҳаётимизда учраб туради: тинч турган жисмга ташқи куч таъсир этмаса, у тинч тураверади. Таърифнинг иккинчи қисмидаги «тўғри чизиқли ҳаракат» ва «текис ҳаракат» тушунчаларига алоҳида эътибор бериш керак. Текис ҳаракат деганда жисмнинг ўзгармас тезлик билан (яъни тезланишсиз) ҳаракати кўзда тутилади. Тўғри чизиқли ҳаракатнинг таъкидланишининг сабаби шундаки, умуман олганда жисм эгри чизиқли траектория бўйлаб, хусусан, айлана бўйлаб текис ҳаракат қилиши мумкин. Лекин бу ҳолда ҳаракат текис (бурчак тезлик ўзгармас) бўлса ҳам жисм ўз ҳаракат йўналишини узлуксиз ўзгартириб боради — у марказга интилма тезланиш билан ҳаракат қилади. Демак, тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги жисмга бошқа жисмлар таъсир этмаса у тезланишсиз ҳаракат қилади, яъни жисм ўз инерцияси билан тўғри чизиқли текис ҳаракатини абадий давом эттиради. Шунинг учун Ньютоннинг биринчи қонуни инерция қонуни дейилади.

Жисмга бошқа жисмлар таъсир этмаса уни эркин жисм дейилади. Лекин табиатда эркин жисмлар мавжуд эмас, чунки табиий шароитда ҳар қандай жисм бошқа жисмлар таъсирида бўлади. Масалан, Ер сиртида ҳаракат қилаётган жисмга Ернинг тортиш кучи, ишқаланиш кучи, ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади. Шунинг учун Ньютоннинг 1-қонунининг иккинчи қисмини тажрибада текшириб кўришнинг имкони йўқ. Лекин кузатишлардан олинган натижаларни умумлаштириб Ньютоннинг биринчи қонунининг тўғрилиги ҳақида ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Бу қонунга дастлаб Галилей асос солган. У жисмларнинг ҳаракатини ўрганиш бўйича қатор тажрибалар ўтказган ва тажриба натижаларини умумлаштириб, юқорида келтирилган Ньютоннинг биринчи қонунининг таърифи берилган тарздаги хулосага келган (Ньютон бу қонунни динамиканинг бошқа қонунлари билан бир тизимга киритган). Ньютоннинг биринчи қонуни ҳақида тўлароқ тасаввур ҳосил қилиш учун Галилей тажрибаларидан бирини баён қиламиз: шар шаклидаги жисм дастлаб ab қия текислик бўйлаб, сўнгра эса ўз инерцияси билан уфқ текислигида жойлашган bc текислик бўйлаб ҳаракат қилади (2.1-расм). Кўриниб турибдики, траекториянинг ab қисмида жисм тезланиш билан ҳаракат қилади, чунки траекториянинг бу қисмида унга оғирлик кучининг қия текислик бўйлаб йўналган ташкил этувчиси таъсир этади. Ҳаракатнинг bc қисмида эса жисмга бундай куч таъсир этмайди, бинобарин, траекториянинг бу қисмида у ўз инерцияси билан ҳаракатини давом эттиради. Галилей ўз тажрибаларида шу нарсани кузатдики, жисм билан текислик орасида мавжуд бўлган ишқаланиш кучи қанчалик камайтириб борилса ҳаракатнинг bc қисми шунчалик узайган. Бундан у қуйидаги хулосага келади: ишқаланиш ва ҳавонинг қаршилик кучи бўлмаса эди, жисмнинг тўғри чизиқли текис ҳаракати тўхтовсиз давом этган бўлар эди.



2.1-расм

Жисмнинг ҳар қандай ҳолати нисбий бўлгани туфайли Ньютоннинг биринчи қонунида жисмнинг тинч ҳолати ёки тўғри чизиқли текис ҳаракати қайси саноқ тизимига нисбатан аниқланаяпти, деган савол ўртага қўйилади. Кинематикада жисмнинг ҳаракатини тавсифлаш учун координаталар тизими билан боғланган ихтиёрий жисмни қабул қилиш мумкин эди. Динамикада эса бундай эмас. Бу ерда турли саноқ тизимлари ўртасида муайян фарқ борлиги равшан бўлиб қолади. Масалан, бир-бирига нисбатан бирор тезланиш билан ҳаракатланаётган икки саноқ тизимининг бирида тинч ҳолатини сақлаётган жисм иккинчи саноқ тизимида тезланиш билан ҳаракатланаётган бўлади. Ньютоннинг биринчи қонуни тўғри чизиқли текис (тезланишсиз) ҳаракатни кўзда тутгани туфайли бу қонун барча саноқ тизимларида бажарилавермайди. Ньютоннинг биринчи қонунини қаноатлантирадиган саноқ тизимлари инерциал саноқ тизимлари дейилади. Бошқача айтганда, *инерциал саноқ тизими деб шундай саноқ тизимига айтиладики, унда эркин жисм тинч ҳолатда бўлади ёки ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилади.* Ўз-ўзидан равшанки, агар бирор инерциал тизимни танлаб олган бўлсак, у ҳолда унга нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган бошқа саноқ тизимлари ҳам инерциал саноқ тизими бўлади.

Инерциал саноқ тизимини қандай танлаш мумкин? Бунинг учун биз танлаган саноқ тизими билан боғланган жисмга бошқа ҳеч бир жисм таъсир қилмаслиги керак. Бундай жисмнинг мавжуд эмаслиги ҳақида юқорида айтиб ўтилган эди. Лекин, маълум аниқлик билан инерциал тизимга яқин бўлган координаталар тизимини танлаш мумкин. Ер билан (ёки Ердаги бирорта жисм билан) боғланган координаталар тизимини етарли даражада аниқлик билан инерциал саноқ тизими деб қабул қилиш мумкин.

Нима учун етарли даражада-ю, буткул эмас? Сабаби — Ернинг ўз ўқи атрофида ва шу билан бир вақтда Қуёш атрофида айланма ҳаракат қилиши туфайли унинг ҳаракати марказга интилма тезланиш билан содир бўлади. Шуниси ҳам борки, бу иккала ҳаракат секин юз беради. Шунинг учун Ер билан боғланган саноқ тизимлари кўп ҳолларда амалий жиҳатдан инерциал тизим бўлиб хизмат қилади. Ер билан боғланган инерциал саноқ тизимларини лаборатория саноқ тизими деб ҳам юритилади. Механикавий ҳодисаларни тавсифлашда барча инерциал саноқ тизимлари тенг ҳуқуқлидир.

Коинотнинг биз кузатишимиз мумкин бўлган соҳасидаги юлдузлари ва бошқа самовий жисмларнинг ҳаракат қонунларини ўрганишда Ер билан боғланган тизим инерциал тизим бўла олмайди. Тажрибаларнинг кўрсатишича, бундай ҳолларда боши Қуёш марказида жойлашган, ўқларининг йўналиши эса учта узоқда жойлашган ва бир текисликда ётмайдиган юлдузларга қараб йўналган тўғри чизиқлардан иборат бўлган саноқ тизими жуда катта аниқлик билан инерциал тизим вазифасини ўтайди.

2.5-§. НЬЮТОННИНГ ИККИНЧИ ҚОНУНИ. ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАСИ

Ньютоннинг иккинчи қонуни динамиканинг асосий қонуни ҳисобланади ва қуйидагича таърифланади: *ташқи куч таъсирида жисмнинг олган тезланиши шу кучга мутаносиб (пропорционал) ва унинг массасига тескари мутаносибдир*, яъни

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.5}$$

Бу ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.6}$$

Тезланиш вектори ($\vec{a}$) таъсир этувчи куч ($\vec{F}$) йўналиши томонга йўналган. Бу формуладан кўриниб турибдики, массаси m бўлган жисмнинг олган тезланиши таъсир этувчи кучга мутаносибдир.

Бир вақтнинг ўзида жисмга бир неча кучлар таъсир этаётган бўлса, натижавий куч таъсир этувчи барча кучларнинг вектор йиғиндиси сифатида аниқланади (масалан, оғирлик кучи таъсирида қия текислик бўйлаб ҳаракат қилаётган жисмга таъсир этувчи натижавий куч оғирлик кучининг қия текислик бўйлаб ташкил этувчиси билан ишқаланиш кучининг вектор йиғиндисига тенг бўлади):

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{2.7}$$

(2.7) ифода кучларни қўшиш (суперпозиция) қоидасининг мазмунини ифодалайди. Бу қоида қуйидагичадир: *жисмга қўйилган кучлардан ҳар бирининг таъсири жисмнинг тинч ҳолатда ёки ҳаракатда эканлигига, унга таъсир этувчи бошқа кучларнинг сони ва табиатига боғлиқ эмас*. Бу қоида кучлар таъсирининг мустақиллиги қонуни деб ҳам юритилади.

Агар $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ эканлигини эътиборга олсак, Ньютоннинг иккинчи қонунини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.8}$$

Жисмнинг массаси ўзгармас катталик бўлгани учун уни дифференциал ишораси остига киритамиз ва $m\vec{v}$ жисм импульсининг ифодаси эканини назарда тутиб (2.8)ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2.9}$$

Бу ифода иккинчи қонуннинг асосий кўринишларидан бири бўлиб, қуйидагича таърифланади: *жисм импульсининг ўзгариш тезлиги таъсир этувчи кучга тенг ва у билан бир хил йўналишга эга*. Бошқача айтганда, жисм импульсининг вақт бўйича ҳосиласи унга таъсир этаётган кучга тенг.

Массаси m бўлган жисмга бир вақтнинг ўзида бир неча ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$) куч таъсир этаётган бўлса, унинг олган тезланиши қуйидагига тенг бўлади:

$$\vec{a} = \sum_i \vec{a}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.10}$$

бу ерда $\vec{F}$ — жисмга таъсир этаётган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлиб, у параллелограмм қоидаси бўйича аниқланади. Шу нарсага алоҳида эътибор бериш керакки, (2.5), (2.6), (2.8) ва (2.9) формулаларда келтирилган $\vec{F}$ куч амалда жисмга таъсир этувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисини акс эттиради, мазкур формулалардаги тезлик ва тезланишлар эса инерциал саноқ тизимига нисбатан аниқланади.

Ньютоннинг иккинчи қонунини акс эттирувчи (2.6) ва (2.8) ифодалардан қуйидаги хусусий ҳол келиб чиқади: агар жисмга ташқи куч таъсир этмаётган ($\vec{F}=0$) бўлса, $\vec{a}=0$ ва $\vec{v}=\text{const}$ бўлади, яъни у ҳолда жисм тинч ҳолатда бўлади (бу ерда $\vec{v}=\text{const}=0$ эканлиги кўзда тутилади) ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган бўлади. Лекин бундан Ньютоннинг биринчи қонуни унинг иккинчи қонунининг хусусий ҳоли экан ва демак, биринчи қонун мустақил қонун эмас экан, деган хулоса келиб чиқмаслиги керак. Бунинг сабаби шундаки, Ньютоннинг биринчи қонуни инерциал саноқ тизими ҳақидаги қонун бўлиб, ҳар қандай механик ҳаракат (шу жумладан иккинчи қонун ҳам) инерциал саноқ тизимига нисбатан аниқлангандагина аниқ маънога эга бўлади. Шундай қилиб, биринчи ва иккинчи қонунлар тажрибадан олинган далилларни умумлаштириш натижасида юзага келган бўлиб, уларнинг ҳар қайсиси мустақил қонун кучига эгадир.

Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (2.9) формула (ҳамда унга тенг маъноли бўлган (2.8) формула) жисмнинг ҳаракат тенгламаси дейилади.

Моддий нуқта (жисм)нинг ҳаракат тенгламаси деганда исталган вақтда унинг фазодаги вазиятини аниқловчи тенгламани тушунамиз. Моддий нуқтанинг исталган вақтда фазодаги вазияти радиус-вектор $\vec{r}$ орқали аниқланади. Аниқроғи унинг радиус-вектори вақтнинг функцияси тарзида ифодаланади:

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

ёки унинг координаталарининг вақт бўйича ўзгаришини акс эттирувчи

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

функциялар билан ифодаланади.

Юқорида (2.1 §) айтиб ўтган эдикки, динамиканинг асосий вазифаси икки қисмдан иборат бўлиб, бири — моддий нуқтага таъсир этувчи куч маълум бўлса ҳаракат тенгламасини аниқлаш, иккинчиси — моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаси берилган бўлса, унга таъсир этувчи кучни аниқлашдир.

Моддий нуқтанинг ҳаракати Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (2.6) тенглама ёки унинг бошқача кўриниши бўлган (2.8) ва (2.9) тенгламалар орқали тавсифланади. Бу тенгламалардан фойдаланаётганда шуни назарда тутиш керакки, тезлик вектори ҳаракатдаги моддий нуқтанинг радиус-векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг, тезланиш вектори эса тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки радиус-вектордан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг, яъни:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{ва} \quad \vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Охирги формулага асосланиб (2.6) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{F}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (2.11)$$

Бу иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Кўриниб турибдики, (2.8) ва (2.11) формулалар моддий нуқтага таъсир этувчи кучни ва мазкур куч таъсирида унинг ҳолати ҳамда фазодаги вазиятининг вақтга боглиқ равишда ўзгариши орасидаги боғланишини ифодалайди. Бошланғич пайтда ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳолати (координаталари ва тезлиги) маълум бўлса, кейинги исталган пайтдаги унинг ҳолатини аниқлаш (2.8) ва (2.11) тенгламаларни интеграллаш йўли билан амалга оширилади.

Интеграллашни соддалаштириш мақсадида қуйидаги хусусий ҳолни қараб чиқамиз: ўзгармас куч ($\vec{F}=\text{const}$) таъсирида моддий нуқта радиус-вектор йўналишида тўгри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин ва бошланғич ($t=0$) пайтда $\vec{r}(0)=\vec{r}_0$ ва $\vec{v}(0)=\vec{v}_0$ бўлсин. Яъни бошланғич пайтда моддий нуқта саноқ бошидан $\vec{r}_0$ масофада бўлиб, унинг бошлангич тезлиги ($\vec{v}_0$) радиус-вектор билан бир томонга йўналган бўлсин. Бу шартлар бошланғич шартлар дейилади.

(2.8) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$m d\vec{v}=\vec{F}dt \text{ ёки } d\vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}dt.$$

Бу тенгликни интеграллаб моддий нуқтанинг исталган t вақтдаги тезлиги учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\vec{v}(t)=\frac{\vec{F}}{m}t+\text{const}.$$

Бошланғич пайтда, яъни $t=0$ бўлганда $\vec{v}=\vec{v}_0$ эканлигини назарда тутсак, охирги формуладан $\text{const}=\vec{v}_0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб:

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t \tag{2.12}$$

кўринишдаги ечимга эга бўламиз. Маълумки бу формула бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ бўлган текис ўзгарувчан ҳаракатни ифодалайди ва исталган t вақтдаги тезликни топишда қўлланилади. Энди, $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$ эканлигини назарда тутиб, (2.12) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{m}t \text{ ёки } d\vec{r}=\vec{v}_0\,dt+\frac{\vec{F}}{m}+dt.$$

Охирги тенгликни интеграллаш натижасида

$$\vec{r}(t)=\vec{v}_0t+\frac{\vec{F}}{2m}t^2+\text{const}$$

га эга бўламиз ва ниҳоят, $t=0$ бўлганда интеграллаш доимийси $\text{const}=\vec{r}_0$ эканлигини ҳисобга олиб, бу тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t)+\frac{\vec{F}}{2m}t^2. \tag{2.13}$$

$t=0$ бўлганда саноқ бошини $\vec{r}_0=0$ деб қабул қилсак, охирги тенглик соддалашади:

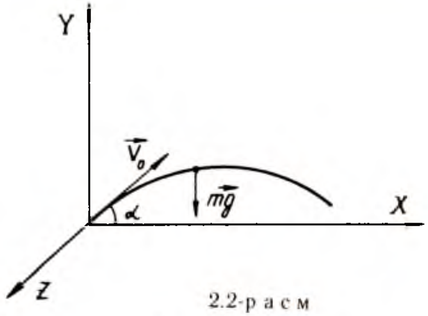
$$\vec{r}(t)=\vec{v}(t)+\frac{\vec{F}}{2m}t^2. \tag{2.14}$$

(2.13) ва (2.14) формулалар тўғри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракатда йўл формуласини ифодалайди. Бу формулалар массаси m ва бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ бўлган моддий нуқтанинг ўзгармас ташқи куч таъсирида бўлаётган ҳаракат қонунини ифодалайди

Иккинчи мисол тариқасида Ер сиртидан уфққа (горизонтга) нисбатан α бурчак остида $\vec{v}_0$ тезлик билан отилган m массали моддий нуқта (снаряд)нинг фақат оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракатини қараб чиқайлик (2.2-расм). Моддий нуқтага $\vec{F} = -\vec{P} = -m\vec{g}$ оғирлик кучи таъсир этади ($\vec{v}_0$ ва $\vec{g}$ векторларнинг йўналишлари бир-бирига тескари бўлгани туфайли манфий ишора қўйилди). (2.12) ва (2.14) формулалардан $\vec{F}$ куч ўрнига $-m\vec{g}$ ни қўйсак, улар мос равишда

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{g}t,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



2.2-расм

тарзда ёзилади. Бу катталикларни уларнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодаласак, яъни

$$v_x = v_0\cos\alpha \text{ ва } v_y = v_0\sin\alpha$$

эканини ҳисобга олсак, улар мос равишда

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \; v_y = v_0\sin\alpha - gt, \; v_z = 0; \tag{2.15}$$

$$x = v_0 t\cos\alpha, \; y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \; z = 0 \tag{2.16}$$

кўринишга келади. Бу формулалар моддий нуқта ҳаракати қонунининг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди. Моддий нуқтанинг ҳаракат траекториясини топиш учун (2.16) ифоданинг биринчи тенгламасидан топилган

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

ифодани шу тенгламанинг иккинчисига қўямиз, яъни ҳаракат қонунидан вақтни чиқарамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{2.17}$$

Бу парабола тенгламасидир. Демак, бу ҳолда моддий нуқта XOY текисликда парабола шаклидаги траектория бўйича ҳаракатланади. Келтирилган мисолдан кўринадики, бошлангич шартларнинг қийматларига қараб моддий нуқта ҳаракати бир-биридан анча фарқ қилиши мумкин. Хусусан, бошланғич тезлик векторининг уфққа (горизонтга) нисбатан ҳар хил бурчак ташкил қилиши турли натижаларга олиб келади. Масалан, бурчак 90°га тенг бўлганда моддий нуқтанинг траекторияси юқорида келтирилган параболадан тубдан фарқ қилиб, уфққа тик йўналган тўғри чизиқдан иборат бўлади.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг ихтиёрий вақтдаги $\vec{r}(t)$ ҳолати унинг бошланғич вақтдаги ҳолатини аниқловчи радиус-вектори $\vec{r}_0$ ва бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ маълум бўлгандагина аниқланиши мумкин, яъни бошланғич шартларни ифодаловчи $r_0 = r_0(t)$ ва $v_0 = v_0(t)$ катталиклар берилган бўлиши шарт. Бошлангич шартларнинг муҳимлиги ана шундадир. Моддий нуқтанинг бошлангич пайтдаги ҳаракат ҳолатининг берилиши унинг кейинги пайтлардаги ҳаракат ҳолатларини тўлиқ аниқлашга имкон беради.

Моддий нуқтанинг ҳаракат қонунига биноан унга таъсир этаётган кучларни аниқлаш муаммоси моддий нуқта ҳаракатини ифодаловчи тенгламадан ҳосила олишга келтирилади. Бошқача айтганда, агар моддий нуқтанинг $\vec{r}(t)$ радиус-вектори ёки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координаталарининг вақт бўйича ўзгаришини ифодаловчи тенгламалар маълум бўлса, улардан вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосила олиш билан моддий нуқтага таъсир этувчи куч осонгина топилади. Натижада таъсир этувчи куч учун

$$\vec{F} = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

ёки

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

кўринишдаги ифодага эга бўламиз. Равшанки, бу ерда F_x, F_y, F_z лар моддий нуқтага таъсир этувчи натижавий $\vec{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди, яъни:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}.$$

2.6- §. НЬЮТОННИНГ УЧИНЧИ ҚОНУНИ

Ньютоннинг иккинчи қонунида битта жисм (моддий нуқта)нинг ҳаракати ҳақида гап боради ва бу қонунга асосан жисмнинг олган тезланиши унга таъсир этувчи ташқи кучга мутаносибдир. Ташқи куч дейилганда муайян жисмга бошқа бирор жисмнинг таъсири тушунилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, муайян жисмнинг олган тезланиши икки жисмнинг ўзаро таъсири натижасидир; бошқача айтганда, бирор *A* жисм *B* жисм таъсирида қандайдир тезланишга эришган бўлса, *B* жисм ҳам ўз навбатида муайян тезланиш олади — ўзининг таъсиргача бўлган тезлигини ўзгартиради. Демак, *A* жисмнинг олган тезланиши иккита жисмнинг ўзаро таъсирлашиши натижасидир.

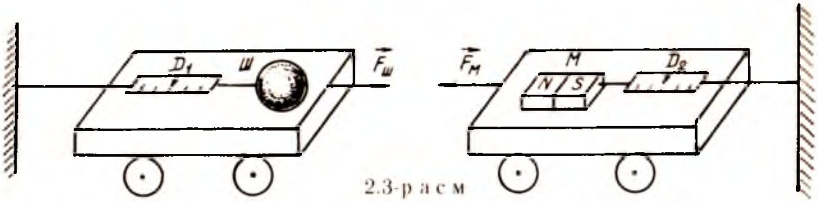
Маълумки, механикада ҳар қандай таъсир куч орқали ифодаланади. Шунинг учун *B* жисм бирор *A* жисмга қандайдир куч билан таъсир қилса, *A* жисм *B* жисмга муайян куч билан таъсир этади.

Ньютоннинг учинчи қонуни унинг биринчи ва иккинчи қонунлари сингари тажриба натижаларига асосланган бўлиб, қуйидагича таърифланади: *икки жисмнинг ўзаро таъсирлашиш кучлари сон жиҳатдан ўзаро тенг ва йўналиши бўйича қарама-қарши томонларга йўналган.* Бу қонуннинг аналитик ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \tag{2.18}$$

бу ерда $\vec{F}_{12}$ ва $\vec{F}_{21}$ кучлар иккита алоҳида-алоҳида жисмларга қўйилгандир; хусусан $\vec{F}_{12}$ иккинчи жисм томонидан биринчи жисмга таъсир этувчи куч, $\vec{F}_{21}$ эса биринчи жисм томонидан иккинчи жисмга таъсир этувчи куч бўлиб, бу кучни одатда, акс таъсир кучи дейилади. Бу ифодадаги манфий ишора кучларнинг қарама-қарши томонларга йўналишини акс эттиради. Шу нарсани алоҳида таъкидлаш лозимки, кучларни таъсир ва акс таъсир кучларига шартли равишда ажратилади, аслида эса иккала кучнинг табиати бир хил бўлиб, улар ўзаро таъсир кучларидир.

Ўзаро таъсир кучлари ҳар бир муайян ҳолда турли физикавий табиатга эга бўлиши мумкин: жисмлар бир-бирига бевосита текканда ёки улар тўқнашганда юз берадиган ўзаро таъсир кучлари (контакт кучлари); гравитация майдонига киритилган жисмларга таъсир



2.3-расм

этувчи кучлар; электр майдонга киритилган зарядланган жисмларга таъсир этувчи кучлар; магнит майдонга киритилган токли ўтказгичга таъсир этувчи кучлар ва ҳоказо.

Ньютоннинг учинчи қонунига мисол тариқасида магнит майдонга киритилган пўлат шарчани олиб қарайлик. Ишқаланиш кучини камайтириш мақсадида магнит *М* ва шарча *Ш* ролик устидаги тахтачаларга маҳкамланган (2.3-расм). Магнит майдоннинг таъсири туфайли пўлат шарча магнит томонга ҳаракат қилади. Таъсир ва акс таъсир кучлари туфайли магнит ҳам ўз навбатида шарча томонга силжийди. Магнит ва шарчага таъсир этувчи кучларни ўлчаш учун уларнинг ҳар бири D_1 ва D_2 динамометрлар билан таъминланган. Тажриба жараёнида магнит ва шарчага таъсир этувчи $\vec{F}_м$ ва $\vec{F}_ш$ кучлар (динамометрларнинг кўрсатишича) ўзаро тенг эканлигини кўрамиз. Агар пўлат шарчани бошқа каттароқ ёки кичикроқ шарча билан ёки бошқа бирор пўлатдан ясалган магнитланадиган жисм билан алмаштирилса, динамометрларнинг кўрсатиши ўзгаради, лекин иккала динамометрнинг кўрсатиши ҳамма вақт ўзаро тенг эканлиги намоён бўлади. Бу тажриба жисмларнинг ўзаро таъсир кучлари сон жиҳатидан бир-бирига тенг ва йўналиши бўйича қарама-қарши эканлигини кўрсатади.

Шуни ёдда тутиш керакки, Ньютоннинг учинчи қонуни барча саноқ тизимларида ҳам бажарилавермайди. Бу қонун Ньютоннинг биринчи ва иккинчи қонунлари каби фақат инерциал саноқ тизимларига нисбатангина тўғридир. Ноинерциал саноқ тизимларида, яъни тезланиш билан ҳаракат қилаётган саноқ тизимларида бу қонун бажарилмайди.

2.7-§. ФИЗИКАВИЙ КАТТАЛИКЛАР БИРЛИКЛАРИ ВА ЎЛЧАМЛАРИ

Физикада жуда кўп физикавий катталиклар билан иш кўришга тўғри келади. Узунлик, ҳажм, тезлик, тезланиш, масса, куч, иш, энергия, босим ва бошқалар шулар жумласидандир. Бирор физикавий катталикларни ўлчаш — ўлчов бирлиги қилиб қабул қилинган бир жинсли катталик билан таққослаш демакдир. Катталикни ўлчаш натижасида унинг қабул қилинган бирликларда ифодаланган сон қийматини оламиз. Физикавий катталикларнинг ҳар бири учун ўзига хос алоҳида бирлигини (бошқа катталикларнинг бирликлари билан мутлақо алоқадор бўлмаган бирлигини) белгилаш ҳам мумкин. Аммо, бундай қилинганда физикавий катталикларни ўлчаш учун қўлланиладиган бирликларнинг сони физикавий катталикларнинг сонига тенг бўлади ва натижада бирликлар сони жуда кўпайиб кетиб, уларни қўллаш анча ноқулайликларга олиб келган бўлар эди. Бу ноқулайликлардан халос бўлиш учун аксарият физикавий катталикларнинг бир-бирига узвий боғлиқларидан ва уларнинг бири иккинчиси орқали ифода қилиниши мумкинлигидан фойдаланилади. Шу туфайли бирликлар сонини камайтириш имконияти туғилади. Бу имконият шундан иборатки, баъзи бир физикавий катталикларни асосий деб қабул қилиб, улар орқали қолган физикавий катталикларни ифода қилиш мумкин, яъни муайян формула ва қонуниятлардан фойдаланган ҳолда асосий физикавий катталиклар орқали бошқа физикавий катталикларни ифодалаш мумкин. Умуман олганда, асосий физикавий катталикларни танлаш ихтиёрий бўлиб, мақсадга мувофиқ равишда келишиб олиш йўли билан амалга оширилади. Чунки барча физикавий катталикларнинг биридан иккинчисининг устунлиги йўқ. Амалий жиҳатдан, исталган физикавий катталикни асосий катталик ар тарзида танлаш мақсадга мувофиқ бўлавермас экан. Танлаб олинган асосий катталикларни ўлчаш бирор муҳим қийинчилик туғдирмаслиги ва кўзда тутилган шароитларда уларнинг сон қийматлари ҳамма вақт бир хил натижа бериши лозим.

Асосий бирликлар тўплами бирликлар тизими дейилади.

Асосий бирликлар билан бир қаторда бир-биридан фарқ қиладиган бир неча бирликлар тизимлари ҳам мавжуд. 1963 йилдан бошлаб бизда Халқаро бирликлар тизими (СИ) жорий қилинган. Мазкур тизимда асосий бирликлар қуйидагилар: узунлик бирлиги — метр (м), масса бирлиги — килограмм (кг), вақт бирлиги — секунд (с). Бу учта бирликдан ташқари (СИ) даги асосий бирликларга модда миқдорининг бирлиги — моль (моль), ток кучининг бирлиги — ампер (А), ҳарорат (температура)нинг ўлчов бирлиги кельвин (К), ёруғлик кучининг бирлиги — кандела (кд) киради. Узунлик бирлиги — 1 метр сифатида ёруғликнинг бўшлиқда 1/299792458 секунд давомида босиб ўтган масофаси қабул қилинган. Массанинг бирлиги — килограммдир. Бир килограмм массанинг эталони сифатида цилиндр шаклидаги (диаметри ва баландлиги 39 мм бўлган) платина-иридий қотишмасидан ясалган жисм массаси қабул қилинган бўлиб, бу эталон Севра (Франция)даги Халқаро ўлчовлар ва тош-тарозилар бюросида сақланади. Унинг массаси 4°С температурада 1000 см^3 ҳажмга эга бўлган тоза сувнинг массасига тенг. Вақт бирлиги 1 секунд — цезий (133) атоми асосий ҳолатининг ўта нозик структурасидаги электроннинг бир сатҳдан иккинчи сатҳга ўтишида содир бўладиган нурланишнинг 9192631770 даврига тенг. Қолган асосий бирликларнинг таърифи тегишли бўлимларда берилади.

Физикада СИ тизимидан ташқари СГС тизими ҳам қўлланилади, бунда узунлик бирлиги — сантиметр (см), масса бирлиги грамм (г), вақт бирлиги — секунд (с).

Асосий бирликлари узунлик, масса ва вақтдан иборат бўлган тизим мутлақ бирликлар тизими дейилади.

Асосий бўлмаган катталиклар ҳосилавий катталиклар дейилади. Улар учун бирликлар тегишли катталикларнинг таърифи билан боғлиқ физика қонунлари асосида аниқланади. Масалан, тезлик бирлиги қилиб текис ҳаракат қилаётган ва бир бирликка тенг вақт давомида бир бирликка тенг масофани ўтадиган жисмнинг тезлиги қабул қилинади. Бинобарин, СИ да тезлик бирлиги — текис ҳаракат қилиб 1 секунд давомида 1 метр масофани босиб ўтадиган жисм тезлигидир. Бу бирлик 1 м/с тарзида ёзилади.

Эталон сифатида қабул қилинган масса бирлиги маълум бўлган ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонуни куч бирлигини аниқлашга имкон беради. Куч бирлиги сифатида шундай куч олинадики, унинг таъсирида массаси бир бирликка тенг бўлган жисм бир бирликка тенг бўлган тезланиш олади. СИ да куч бирлиги *Ньютон* (Н) бўлиб, у массаси 1 кг бўлган жисмга 1 м/с^2 тезланиш берадиган кучдир:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot 1\ \text{м/с}^2 = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}.$$

СИ асосий бирликлар тизими ҳисоблансада, баъзи ҳолларда СГС тизими ҳам қўлланилади. Бу тизимда куч бирлиги *дина* деб аталади ва у массаси 1 г бўлган жисмга 1 см/с^2 тезланиш берувчи кучдир. СИ ва СГС тизимларидаги куч бирликлари орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot 1\text{м/с}^2 = (10^3\text{г})\cdot(10^2\text{см})/\text{с}^2 = 10^5\ \text{дина}.$$

Асосий катталиклар орқали ҳосилавий катталикларни аниқловчи ифода физикавий катталикнинг ўлчами дейилади. Физикавий катталик қандай ҳарфлар билан белгиланса, унинг ўлчами ҳам ўрта қавс ичига олинган худди ўша ҳарфлар билан белгиланади:$[a]$ — тезланишнинг, $[F]$ — кучнинг ўлчами ва ҳоказо. Асосий ҳисобланган бирликлар — узунлик $[l]$, масса $[m]$ ва вақт $[t]$ лар учун махсус белгилашлар қабул қилинган: $[l]=L$; $[m]=M$; $[t]=T$. Масалан, асосий бирликлар орқали тезлик — вақтга бўлинган узунлик ўлчамига эга: $[v]=[l]/[t]=L/T=LT^{-1}$. Кучнинг ўлчами:

$$[F]=[m]\cdot[a]=[m][l]/[t^2]=MLT^{-2}.$$

Умумий ҳолда ихтиёрий катталик (q) нинг ўлчами формуласи

$$[q]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$$

тарзида ёзилади. Бу ерда α, β, γ ўлчам кўрсаткичлари дейилади ва улар бутун ёки каср сон бўлиши ҳамда мусбат ёки манфий ишорага эга бўлиши мумкин.

III БОБ

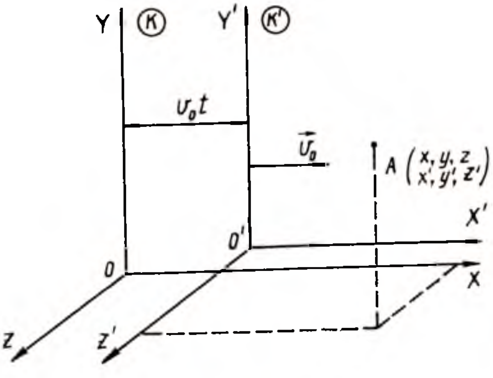
МЕХАНИКАДА НИСБИЙ ҲАРАКАТ

3.1-§. ГАЛИЛЕЙ АЛМАШТИРИШЛАРИ

Ньютон механикаси асосан «секин» ҳаракатлар ($v \ll c$; c — ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги) механикасидир. Шу туфайли ҳаракатдаги жисмларнинг ўлчамлари ва бу ҳаракатлар содир бўлаётган вақт оралиғи мутлақ ҳисобланади, яъни жисмларнинг ўлчамлари ва вақт оралиғи ўзгармас бўлиб, ҳаракат тезлигига боғлиқ эмас деб қаралади.

Жисмнинг ҳаракатини ўрганишда юқорида (2.3-§) биз инерциал саноқ тизимидан фойдаланган эдик. Турли инерциал саноқ тизимларида бирор механик ҳодисанинг қандай кечишини қараб чиқайлик. Масалан, бирор жисм (моддий нуқта)нинг ҳаракатини иккита инерциал K ва K' Декарт координаталар тизимларида олиб қарайлик. Соддалаштириш мақсадида мазкур тизимлар ўқларининг йўналишини 3.1-расмда кўрсатилгандек танлайлик (яъни X, Y, Z ва X', Y', Z' ўқлари бир-бирига мос равишда параллел йўналган бўлиб, фақат X ва X' ўқлар устма-уст тушган бўлсин)*.

Бу саноқ тизимларидан бирини, масалан, K тизимни шартли равишда қўзғалмас деб ҳисоблайлик; иккинчи саноқ тизими K' эса биринчисига нисбатан OX йўналишда ўзгармас $\vec{v}_0$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин. Равшанки, K ва K' лар инерциал саноқ тизимларидир. Моддий нуқтанинг бу тизимлардан биридаги, масалан K' даги ҳаракати маълум бўлсин; шу моддий нуқтанинг K даги ҳаракатини топайлик, бошқача айтганда, бир инерциал тизимдан иккинчисига ўтганда моддий нуқта координаталарининг ўзгаришини аниқлайлик. Масалан, K' ти-



3.1-расм

---

* Яққол кўриниб туриши учун X ва X' ўқлар атайлаб расмда Z ўқи йўналишида бир бирига нисбатан бир оз силжитиб кўрсатилган.

зимига нисбатан ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг бирор пайтдаги координаталари x', y', z' бўлса, унинг айни ўша пайтдаги вазиятини K системадаги x, y, z координаталари орқали ифодаловчи формулаларни топиш керак.

K' тизим OX йўналишида $\vec{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланаётгани туфайли бошланғич пайт ($t=0$) да K тизимнинг координата боши (O нуқта) K' тизимнинг координата боши (O' нуқта) билан устма-уст тушади деб қабул қиламиз. Ихтиёрий t вақтда ҳаракатланаётган моддий нуқта расмда кўрсатилгандек қандайдир A ҳолатда бўлсин; айни пайтда K' тизимнинг саноқ боши (O' нуқта) K нинг саноқ бошига нисбатан $x=v_0t$, $y=y'$, $z=z'$ координаталар билан аниқланувчи нуқтада жойлашган бўлади (чунки $OO'=v_0t$). Фазо ва вақт ҳақидаги Ньютон механикаси тасаввурларига кўра ҳар иккала тизимда ҳам вақт бир хилда кечади, яъни $t=t'$ бўлади.

Расмдан кўринишича моддий нуқта (A) нинг ихтиёрий t пайтда K системадаги ҳолати қуйидаги муносабатлар билан аниқланади:

$$x=x'+v_0t,\ y=y',\ z=z',\ t=t'. \qquad (3.1)$$

Худди шунингдек, моддий нуқтанинг айни ўша t пайтда K' тизимдаги ҳолати қуйидагича ифодаланади:

$$x'=x-v_0t,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t. \qquad (3.2)$$

(3.1) ва (3.2) формулалар Галилей алмаштиришлари дейилади. Галилей алмаштиришлари бирор инерциал саноқ тизимида ҳаракатланаётган моддий нуқта координаталаридан бошқа инерциал саноқ тизимидаги координаталарга ўтишга ($t=t'$ вақт учун) имкон беради.

Шуни таъкидлаш лозимки, Галилей алмаштиришлари узунлик ва вақт оралиқларининг мутлақлиги (ўзгармаслиги) ҳақидаги Ньютон механикаси тасаввурларига асосланади. Бундай тасаввур «секин» ҳаракатлар, яъни $v_0 \ll c$ бўлган ҳоллар учун тўғридир. «Тез» ҳаракатларда (релятив механикада, VII бобга қ.) Галилей алмаштиришлари ўрнида Лоренц алмаштиришлари қўлланилади.

Галилей алмаштиришлари ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг бирор инерциал саноқ тизимидаги тезлиги билан бошқа инерциал тизимдаги тезлиги орасидаги боғланишни топишга имкон беради. (3.1) ифодалардан вақт бўйича ҳосила олсак, K ва K' системалардаги моддий нуқта тезликларининг проекциялари орасидаги боғланишни топган бўламиз ($t=t'$ эканлигини кўзда тутамиз):

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt'}+\frac{d}{dt}(v_0t)=v_x'+v_0, \qquad (3.3)$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt'}=v'_y, \quad v_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt'}=v_z', \qquad (3.4)$$

бу ерда $v_x=\frac{dx}{dt}$ — моддий нуқта тезлигининг X ўққа бўлган проекцияси: $v_x'=\frac{dx'}{dt}=\frac{dx'}{dt'}$ — унинг X' ўққа бўлган проекцияси (X ва X' ўқлар устма-уст тушганликлари туфайли $v_0=v_{ox}=v'_{ox}$ эканлиги эътиборга олинди).

(3.3) ва (3.4) ифодаларни умумлаштириб, уларни вектор шаклида қуйидаги битта тенглик орқали ифодалаш мумкин:

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_0. \tag{3.5}$$

Бу тенглик Ньютон механикасида тезликларни қўшиш қонунини ифодалайди ва қуйидагича таърифланади: моддий нуқтанинг K саноқ тизимидаги тезлиги (тезлик вектори) унинг K' тизимдаги тезлиги билан K' тизимнинг K га нисбатан тезлигининг вектор йиғиндисига тенг. Масалан, дарёдаги кеманинг қирғоққа нисбатан тезлиги унинг сувга нисбатан тезлиги билан сувнинг қирғоққа нисбатан тезликларнинг вектор йиғиндисига тенг.

Моддий нуқтанинг тезлигидан вақт бўйича олинган ҳосила унинг тезланишига тенг эканлигини назарда тутиб, (3.5)ни дифференциалласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\vec{a}'$$

ёки

$$\vec{a}=\vec{a}' \tag{3.6}$$

((3.3) ва (3.5) формулаларда $v_0=\text{const}$ бўлгани учун унинг вақт бўйича ҳосиласи нолга тенг эканлиги ўз-ўзидан равшандир); бу ерда $\vec{a}$ — моддий нуқтанинг K тизимдаги тезланишини, $\vec{a}'$ эса унинг K' тизимдаги тезланишини ифодалайди. Демак, ҳамма жисмлар ҳар хил инерциал саноқ тизимларига нисбатан бир хил тезланиш билан ҳаракат қилар эканлар.

3.2-§. НИСБИЙЛИК ПРИНЦИПИ. ГАЛИЛЕЙ АЛМАШТИРИШЛАРИНИНГ ИНВАРИАНТЛАРИ

Юқорида келтирилган (3.5) ва (3.6) тенгликлардан кўриниб турибдики, агар жисм бирор инерциал саноқ тизимида тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган бўлса ($v=\text{const}$; $\vec{a}=0$), бу саноқ тизимига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлган бошқа саноқ тизимига нисбатан ҳам мазкур жисм тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади. Тажрибалар натижаларини умумлаштириб, Галилей қуйидаги хулосага келади: *инерциал саноқ тизимида ўтказилган механикавий тажрибалар воситаси билан мазкур саноқ тизимининг тинч турганлигини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатланаётганлигини аниқлаб бўлмайди.* Бу Галилейнинг нисбийлик қоидаси (принципи) дейилади. Масалан, кеманинг ичидаги киши кеманинг тинч турганлигини ёки унинг тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётганлигини аниқлай олмайди. Худди шунингдек тўхтаб турган поезд вагонининг деразасидан қараганимизда биз турган вагон юраётгандек туюлади, ваҳоланки, маълум бўлишича қўшни темир йўлдаги поезд юра бошлаган бўлиб чиқади. Бу икки мисолда нисбийлик принципи намоён бўлаяпти.

Барча инерциал саноқ тизимларида бир хил сон қийматига эга бўлган катталиклар *инвариант катталиклар* дейилади («инвариант» лотинча сўз бўлиб «ўзгармас» демакдир). Юқорида (3.1-§ да) кўрдикки, ҳаракатдаги моддий нуқтанинг иккита инерциал саноқ тизими (K ва K') даги тезланиши бир хил, яъни $\vec{a}=\vec{a}'$. Демак, моддий нуқтанинг тезланиши Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.

Моддий нуқтага таъсир этувчи куч ўзаро таъсирлашувчи моддий нуқта (жисм)лар орасидаги масофага (қайишқоқлик кучлари ва тортишиш кучлари), уларнинг нисбий тезликларига (ишқаланиш кучлари) боғлиқ. Ньютон механикасида бу масофалар ва нисбий тезликлар барча инерциал саноқ тизимларида ўзгармас ҳисобланади. Шунинг учун бир инерциал тизимдан иккинчисига ўтилганда моддий нуқтага таъсир этувчи куч ҳам ўзгаришсиз қолади. Демак, куч — Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир. Шунингдек, масса ҳам барча инерциал саноқ тизимларида бир хил сон қийматига эга ($m=m'$), яъни жисм массаси Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариант катталикдир.

Маълумки, физикавий қонунлар ҳар хил катталикларнинг миқдорий муносабатлари тарзида ифода қилинади, яъни бу қонунлар математикавий формулалар орқали ёзилади. Бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда муайян физикавий қонуниятни ифодаловчи тенгламага тегишли катталикларнинг қийматлари ўзгарсада, унинг умумий кўриниши ўзгармаса, бундай тенглама қаралаётган алмаштиришларга нисбатан инвариант дейилади.

K ва K' инерциал саноқ тизимларида $\vec{a}=\vec{a}'$, $m=m'$ ва $\vec{F}=\vec{F}'$ эканини эътиборга олсак, Ньютоннинг иккинчи қонунининг мазкур саноқ тизимларидаги ифодалари бир хил бўлишини кўрамиз: K тизимда

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

тенглик ўринли бўлса, K' тизимда

$$\vec{F}'=m\vec{a}'$$

тенглик ўринли бўлади, яъни бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда Ньютоннинг иккинчи қонуни ўз кўринишини ўзгартирмас экан.

Демак, *динамиканинг асосий қонуни Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.*

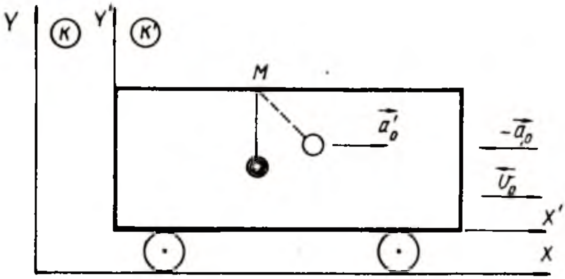
Юқорида айтилганларни умумлаштириб, Галилейнинг нисбийлик принципини қуйидагича таърифлаш мумкин: *механика қонунлари барча инерциал саноқ тизимларида бир хил ифодаланади.*

3.3- §. НОИНЕРЦИАЛ САНОҚ ТИЗИМЛАРИ. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИ

Ҳозиргача биз механикавий ҳаракатларни ўрганишда инерциал саноқ тизимларидан фойдаландик. Юқорида айтиб ўтилдики, Ньютон қонунлари инерциал саноқ тизимларидагина ўринлидир ва Галилейнинг нисбийлик принципига асосан инерциал саноқ тизимида ўтказиладиган кузатишлар ёрдамида мазкур саноқ тизими тинч турганлигини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётганлигини аниқлаб бўлмайди. Табиат ходисаларини ўрганишда инерциал саноқ тизимларига нисбатан тезланиш билан ҳаракатланаётган саноқ тизимлари ҳам қўлланилади.

Бирор инерциал саноқ тизимига нисбатан тезланиш билан ҳаракатланаётган тизим ноинерциал саноқ тизими дейилади.

Инерциал саноқ тизимларида жисмнинг тезланиш билан ҳаракатланишининг сабабчиси — унга таъсир этувчи ташқи кучдир, яъни бу саноқ тизимларида жисмга бирор бошқа жисм бевосита таъсир этсагина у тезланиш билан ҳаракатланади. Ноинерциал саноқ тизимларида эса жисмнинг тезланишга эришиш табиати бошқачадир; жисмга бошқа бирор жисм бевосита таъсир қилмаган ҳолда ҳам мазкур саноқ тизимининг ҳаракат ҳолатини ўзгартириш орқали жисмга тезланиш бериш мумкин.



3.2-расм

Ноинерциал саноқ тизимлари ҳақидаги тасаввурни ойдинлаштириш мақсадида K ва K' саноқ тизимларини олиб қарайлик. K саноқ тизими Ер сирти билан боғланган бўлиб, у K' га нисбатан тинч турган бўлсин, K' саноқ тизимини эса темир йўл вагони билан боғлайлик (3.2-расм). Массаси m бўлган металл шарча ингичка ип билан вагоннинг шипига (M нуқтага) осилган. Дастлаб вагон K системага нисбатан ўзгармас v_0 тезлик билан расмда кўрсатилган йўналишда тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин.

Шарчанинг ҳолатини K ва K' саноқ тизимларида турган икки кузатувчи (вагон ичидаги киши ва темир йўл ёнидаги киши) нигоҳи билан кузатайлик. Вагон тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётганлиги сабабли K ва K' саноқ тизимларидаги кузатувчиларнинг фикри айнан бир хил бўлади: шарча ўзининг тинч ҳолатини сақлаяпти — у осилган ип тик ҳолда турибди (шарчанинг оғирлик кучи ипнинг таранглик кучи билан мувозанатдадир). Равшанки, бу ҳолда иккала (K ва K') тизим инерциал саноқ тизимлари бўлиб хизмат қилади.

Текис ҳаракатда бўлган вагон энди тезлигини кескин ўзгартирсин; фараз қилайлик у тезлигини кескин камайтирсин. Вагоннинг бу пайтдаги ҳаракати текис секинланувчан ҳаракат бўлгани туфайли у v_0 га тескари йўналган тезланиш $(-a_0)$ билан ҳаракатланади. Бинобарин, K' тизим энди ноинерциал саноқ тизими бўлиб қолди. K ва K' саноқ тизимларида туриб шарчанинг ҳолатини кузатувчилар энди икки хил манзарани қайд этадилар. Вагондаги (K' тизимдаги) кузатувчининг нуқтаи назарича шарча расмда кўрсатилган йўналишда $\vec{a}'_0$ тезланиш билан ҳаракатга келади. Темир йўл ёнида (K тизимда) турган кузатувчига шарча ўзининг текис ҳаракатини давом эттираётгандек, вагон эса шарчага нисбатан ўзининг аввалги тезлигини ўзгартириб, орқада қолаётгандек бўлиб туюлади. Шундай қилиб, K ва K' тизимларидаги икки кузатувчига айнан бир механикавий ходиса ҳар хил намоён бўлади.

Демак, ноинерциал саноқ тизими (K' тизим)да шарча тезланиш билан ҳаракатланади ва бу тезланиш K' саноқ тизимининг тезланишига сон жиҳатдан тенг бўлиб, йўналиш бўйича унга тескаридир:

$$\vec{a}' = -\vec{a}_0 . \qquad (3.7)$$

Келтирилган мулоҳазалардан биз шу хулосага келамизки, шарчага бошқа жисмлар таъсир қилмаётган бўлсада, у K' саноқ тизимида қандайдир ташқи куч таъсирида $\vec{a}'_0$ тезланиш билан ҳаракатга келади. Бу куч K' саноқ тизимининг K саноқ тизимига нисбатан тезланувчан илгариланма ҳаракати туфайли вужудга келади ва у «одатдаги» кучлардан фарқ қилади; бу куч ***инерция кучи*** дейилади.

Инерция кучлари айниқса айланма ҳаракат қилаётган жисм билан боғлиқ бўлган саноқ тизимларида намоён бўлади, чунки ҳар қандай айланма ҳаракатда марказга интилма тезланиш мавжуд. Бинобарин, тезланиш билан ҳаракатланаётганликлари туфайли бундай саноқ тизимлари ноинерциал саноқ тизимларидир.

3.4-§. ИЛГАРИЛАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛАЕТГАН НОИНЕРЦИАЛ САНОҚ ТИЗИМИДА ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИ

Илгариланма ҳаракатдаги инерция кучлари кундалик ҳаётимизда кўп учраб туради. Йўловчиларни ташувчи воситалар (автобус, трамвай, троллейбус ва ҳ. к.)да содир бўладиган ҳодисаларни кузатганимизда инерция кучлари бевосита намоён бўлади. Масалан, бирор ўзгармас тезлик билан кетаётган автобус ўз тезлигини кескин оширса йўловчилар инерция кучи таъсирида орқага тисариладилар ва аксинча, автобус ўз тезлигини кескин камайтирса (ёки бирдан тўхтаса) улар илгарига томон интиладилар. Йўловчиларга таъсир этаётган куч — автобус билан боғланган ноинерциал саноқ тизимининг тезланувчан ҳаракати туфайли вужудга келаётган инерция кучидир.

Юқорида (3.2-расм) зикр қилинган мисолда шарчага таъсир этувчи куч илгариланма ҳаракатланаётган ноинерциал саноқ тизимида вужудга келадиган инерция кучларининг намоён бўлишидир. Инерция кучларининг жисмларга таъсирининг натижалари амалда мавжуд бўлганлиги туфайли улар табиатда мавжуд кучлар деб қаралади ва бу кучлар фақат ноинерциал саноқ тизимларидагина мавжуддир.

Бизга маълумки, жисмларнинг бир-бирига таъсири туфайли вужудга келадиган кучлар Ньютоннинг иккинчи қонуни билан ифодаланади ва бу кучлар инерциал саноқ тизимига нисбатан аниқланади. Ноинерциал саноқ тизимларида, умуман олганда, Ньютон қонунлари бажарилмайди, чунки бошқа жисмга қўйилган акс таъсир кучи мавжуд бўлмайди. Лекин жисмларнинг бир-бирига таъсир кучлари билан бир қаторда инерция кучларини ҳам ўзида акс эттирувчи ифодани Ньютоннинг иккинчи қонуни тарзида ёзиш мумкин. Шундай қилиб, ноинерциал саноқ тизимида Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}, \qquad (3.8)$$

бу ерда $\vec{F}$ — жисмларнинг бир-бири билан ўзаро таъсири туфайли мазкур жисмга таъсир этувчи «одатдаги» кучларнинг вектор йиғиндиси; $\vec{F}_{ин}$ — инерция кучлари; $\vec{a}'$ — мазкур жисмнинг $\vec{F}$ ва $\vec{F}_{ин}$ кучлари таъсирида ноинерциал саноқ тизимида эришган тезланиши. Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, инерция кучлари ($\vec{F}_{ин}$) ноинерциал саноқ тизимининг инерциал саноқ тизимига нисбатан тезланишли ҳаракати билан аниқланади. Ўзаро таъсир кучлари ($\vec{F}$) эса иккала саноқ тизимида ҳам бир хилдир, яъни

$$\vec{F} = m\vec{a}, \qquad (3.9)$$

бу ерда $\vec{a}$ — жисмнинг инерциал саноқ тизимига нисбатан тезланиши бўлиб, мазкур жисмга бошқа жисмларнинг бевосита таъсири натижасидир. (3.7) ифодага асосан ноинерциал саноқ тизимида жисмга таъсир этувчи инерция кучи қуйидагича ифодаланади:

$$\vec{F}_{ин} = m\vec{a}'_0. \qquad (3.10)$$

Бу кучни ноинерциал саноқ тизимининг тезланиши орқали ифодаласак, қуйидаги кўринишга келади:

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}'_0. \qquad (3.11)$$

Бу ифодадаги манфий ишора инерция кучи ноинерциал саноқ тизимининг тезланиш вектори йўналишига қарама-қарши томонга йўналганлигини билдиради.

(3.8) ва (3.9) тенгликлардан инерция кучи учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$F_{ин} = m(a' - a). \qquad (3.12)$$

Агар ноинерциал саноқ тизимида ўзаро бир-бири билан таъсирлашувчи жисмлар бўлмаса ёки таъсир этувчи кучлар ўзаро мувозанатлашса ($\vec{F}=0$ ва $\vec{a}=0$ бўлса), $\vec{a}'=\vec{a}'_0$ бўлиши равшандир, у ҳолда $\vec{a}'_0 = -\vec{a}_0$ тенгликка эга бўламиз, бу эса (3.7) билан мос тушади: яъни қаралаётган жисмга бошқа жисмлар бевосита таъсир этмаса инерция кучи (3.10) формула тарзида ифодаланади.

Тезланиш билан ҳаракатланувчи лифтдаги одам томонидан тагликка таъсир этувчи оғирлик кучи лифт кўтарилаётганида ортиши («сунъий оғирлашиш»), лифт тушаётганда эса камайиши каби ҳодисалар ҳам инерция кучлари асосида тушунтирилади (хусусан, лифт пастга томон $a=g$ тезланиш билан тушса «вазнсизлик» ҳолати юзага келади).

Инерция кучларининг қуйидаги хусусиятларини таъкидлаб ўтамиз:

1. Инерция кучлари жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида эмас, балки саноқ тизимининг тезланишли ҳаракати натижасида вужудга келади.

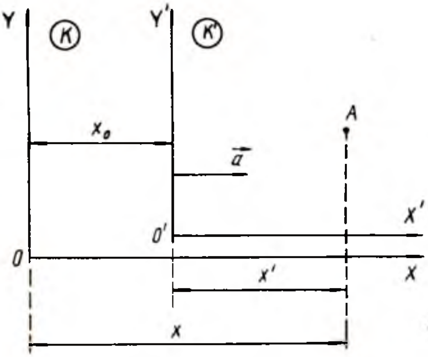
2. Инерция кучлари ҳар хил ноинерциал саноқ тизимларида ҳар хилдир, яъни бошқача тезланиш билан ҳаракатланаётган тизимга ўтишда инерция кучлари ҳам ўзгаради. Инерция кучлари бундай ўтишга нисбатан инвариант эмас.

3. Инерция кучлари Ньютоннинг учинчи қонунига бўйсунмайди, яъни бирор жисмга инерция кучи таъсир қилаётган бўлса, бошқа жисмга қўйилган акс таъсир кучи мавжуд бўлмайди.

4. Инерция кучлари жисмнинг массасига мутаносиб бўлиб, бу хусусда улар гравитация (оғирлик) кучларига ўхшашдир.

3.5-§. МУТЛАҚ ҲАМДА НИСБИЙ ТЕЗЛИКЛАР ВА ТЕЗЛАНИШЛАР

Ҳар қандай ҳаракат нисбий бўлганлиги туфайли жисмнинг бирор пайтдаги фазодаги вазияти шартли равишда қўзғалмас деб ҳисобланган бошқа бирор саноқ тизимига нисбатан аниқланади. Ҳар қандай ҳаракат нисбий бўлсада, ноинерциал саноқ тизимларидаги ҳаракатларни ўрганишда «мутлақ ҳаракат», «мутлақ тезлик» ва «мутлақ тезланиш» деган шартли равишда киритилган тушунчалардан фойдаланилади.



3.3-расм

Бирор ихтиёрий танлаб олинган саноқ тизимини қўзғалмас деб ҳисоблаб, уни K билан белгилайлик (3.3-расм). Бу тизимга нисбатан K' тизим ўзгармас $\vec{a}$ тезланиш билан X ўқи йўналишида ҳаракатлансин (3.3-расмда Z ва Z' ўқлари кўрсатилмаган). Равшанки, K — инерциал, K' — ноинерциал саноқ тизимларидир. Ҳаракатланувчи саноқ тизимининг қўзғалмас саноқ тизимига нисбатан ҳаракати *кўчирма ҳаракат* дейилади. K' саноқ тизимида A жисм тинч турган ҳолда ҳам у шу саноқ тизимининг K саноқ тизимига нисбатан бўлган ҳаракатида қатнашади. Жисмнинг бу ҳаракати кўчирма ҳаракат бўлади ва табиийки, жисмнинг K' тизимига нисбатан ҳаракати *нисбий ҳаракатдир*. Жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари унинг мутлақ ҳаракатини ташкил қилади; бошқача айтганда, жисмнинг K тизимга нисбатан ҳаракати шартли равишда мутлақ ҳаракат дейилади.

Расмдан кўриниб турибдики, K ва K' тизимларга нисбатан ҳаракатланаётган A жисмнинг ихтиёрий t пайтдаги координаталари орасидаги боғланиш қуйидагича бўлади:

$$x = x_0 + x', \; y = y', \; z = z', \; t = t'. \tag{3.13}$$

Жисмнинг K ва K' тизимлардаги тезликлари орасидаги боғланишни топиш учун (3.13)дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_0}{dt}+\frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt},$$

бу ерда $\frac{dx}{dt}=v_x$, $\frac{dx_0}{dt}=v_{0x}$, $\frac{dx'}{dt}=v'_x$. Бу ифодалардан

$$v_x=v_{0x}+v'_x, \; v_y=v'_y, \; v_z=v'_z$$

эканлиги келиб чиқади. Бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб, натижани вектор кўринишда ёзсак,

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}' \tag{3.14}$$

бўлади, бу ерда $\vec{v}$ — мутлақ тезлик, $\vec{v}_0$ — кўчирма тезлик, $\vec{v}'$ — нисбий тезлик. Охирги формуладан кўриниб турибдики, мутлақ тезлик кўчирма тезлик билан нисбий тезликнинг йиғиндисидан иборат.

(3.14) ифодадан вақт бўйича ҳосила олсак ҳаракатдаги жисмнинг иккала саноқ тизимидаги тезланишлари орасидаги боғланишни топамиз:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\frac{d\vec{v}\,'}{dt}$$

ёки

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}', \tag{3.15}$$

бу ифодадаги $\vec{a}$ — мутлақ тезланиш, $\vec{a}_0$ — кўчирма тезланиш дейилади. Демак, мутлақ тезланиш кўчирма ва нисбий тезланишларнинг йиғиндисига тенг.

(3.15) формуладан $a'-a=-a_0$ эканлиги келиб чиқади ва бу тенгликни (3.12) ифодага қўйсак, K саноқ тизимига нисбатан тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган ноинерциал саноқ тизимида инерция кучи қуйидагига тенг бўлади:

$$F_{\text{ин}}=m(a'-a)=-ma_0.$$

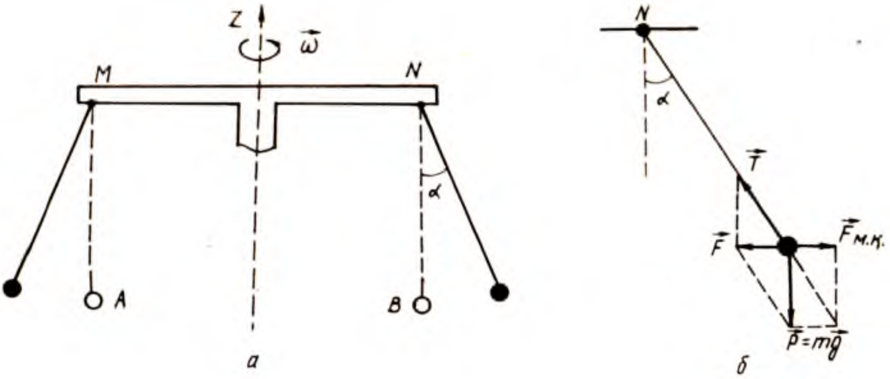
Олинган натижани вектор шаклида ёзсак, у

$$\vec{F}_{\text{ин}}=-m\vec{a}_0 \tag{3.16}$$

кўринишга эга бўлади, яъни бундан инерция кучи ноинерциал тизимнинг кўчирма тезланишига нисбатан қарама-қарши томонга йўналганлигини кўрамиз.

3.6-§. АЙЛАНУВЧИ САНОҚ ТИЗИМИДА ИНЕРЦИЯ КУЧИ. КОРИОЛИС КУЧИ

Ҳар қандай айланма ҳаракатда марказга интилма тезланиш мавжуд, шу сабабли айланма ҳаракат билан боғланган саноқ тизими ноинерциалдир. Айланувчи саноқ тизимидаги инерция кучлари ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун қуйидаги қурилмани олиб қарайлик. Тик ўққа ўрнатилган таёқчанинг M ва N нуқталарига ингичка ип орқали A ва B металл шарчалар 3.4- расмда кўрса-



3.4-расм

тилгандек осилган. Таёқча тинч ҳолатда бўлганида шарчалар осилган ип тик ҳолатда бўлади (ипларнинг тик ҳолати узуқ чизиқлар билан кўрсатилган) ва ҳар бир шарчанинг оғирлик кучи ипнинг таранглик кучи билан мувозанатлашади. Энди таёқчани унга тик йўналган ва унинг ўртасидан ўтувчи Z ўқи атрофида бирор ω бурчак тезлик билан айланма ҳаракатга келтирайлик. Табиийки, таёқча билан шарчалар ҳам Z ўқи атрофида айланма ҳаракатга келади ва натижада шарчалар улар осилган ип билан бирор бурчакка оғади. Айланиш жараёнида ҳар бир шарча радиуси R бўлган айлана бўйлаб ҳаракат қилади.

Инерциал саноқ тизимида (масалан, қурилма ёнидаги кузатувчи назарича) ҳар бир шарча R радиусли айлана бўйича ҳаракатланаяпти ва у Z ўқи атрофида

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \qquad (3.17)$$

га тенг марказга интилма тезланиш билан айланаяпти (бу формулада $v = \omega R$ эканлиги кўзда тутилди), бинобарин, шарчага

$$F = -m\omega^2 R \qquad (3.18)$$

бўлган марказга интилма куч таъсир этаяпти (бу куч шарчанинг четланиши йўналишига нисбатан қарама-қарши йўналгани учун манфий ишора қўйилади). 3.4, б-расмдан кўриниб турибдики, бу куч ипнинг таранглик кучи $\vec T$ билан шарчанинг оғирлик кучи $\vec P$ нинг тенг таъсир этувчисидир:

$$\vec F = \vec P + \vec T.$$

Четланиш бурчаги $\vec F$ ва $\vec P$ кучлар билан қуйидагича боғланган (3.4,б- расм):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g},$$

яъни шарчаларнинг оғиш бурчаги бурчак тезлигининг ва уларнинг айланиш радиусининг ортиши билан ортиб боради.

Айланувчи қурилма билан боғланган ноинерциал саноқ тизимида (тизим билан бирга айланаётган кузатувчи назарича) шарчаларга қандайдир куч таъсир этаяпти ва бу куч таъсирида улар α бурчакка четланаяпти. Таъсир этаётган куч айланиш ўқидан радиус бўйлаб ташқарига йўналганлиги туфайли у марказдан қочма инерция кучи дейилади.

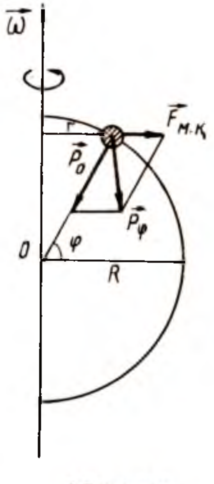
Марказдан қочма инерция кучи ($F_{мк}$) сон жиҳатдан марказга интилма (F) кучга тенг бўлиб, йўналиши жиҳатдан унга қарама-қаршидир (3.4, б-расм):

$$F_{мк} = m\omega^2 R. \qquad (3.19)$$

Шундай қилиб, айланувчи саноқ тизимидаги жисмга таъсир этадиган марказдан қочма инерция кучи жисмнинг массасига, айланаётган қурилманинг бурчак тезлигининг квадратига ва айланиш радиусига мутаносибдир. Марказдан қочма инерция кучлари фақат ноинерциал саноқ тизимларидагина мавжуддир. Инерциал саноқ тизимларида эса бундай кучлар йўқ.

Эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланаётган тизимдаги жисмга ҳамма вакт марказдан қочма инерция кучи таъсир этади. Масалан, бирор тезлик билан ҳаракатланаётган автобус ёки бошқа нақлиёт (транспорт) воситаларидаги йўловчилар бурилиш жойларида уларга қандайдир куч таъсир этаётганини ҳис этадилар ва бу куч таъсири остида улар бурилишга нисбатан ташқари томонга оғадилар. Кўргазмали учишларда учувчилар уфққа (горизонтга) нисбатан тик жойлашган айлана шаклидаги траектория бўйлаб учганларида уларга марказдан қочма инерция кучи таъсир этади ва бу куч туфайли улар айлана шаклидаги траекториянинг энг юқори нуқтасида ўтирган жойдан пастга томон тушиб кетмайдилар (траекториянинг энг юқори нуқтасида учувчининг боши паст (Ер) томонда бўлади). Фазовий кемалар ва Ернинг сунъий йўлдошлари Ер атрофида айланага яқин траектория бўйлаб ҳаракатланадилар. Фазовий кемаларнинг ҳаракат тезликларида фазогирларнинг оғирлик кучи марказдан қочма инерция кучи билан тенглашади ва улар «вазнсизлик» ҳолатида бўладилар. Марказдан қочма инерция кучларига доир бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

Биз яшаб турган Ер ҳам айланувчи саноқ тизимидир; у бир кеча-кундуз давомида ўз ўқи атрофида 360° бурчакка бурилади. Ер сиртида турган ҳар бир жисм Ер билан бирга айланма ҳаракатда қатнашади. Ернинг ўз ўқи атрофида айланишини назарда тутсак, уни ноинерциал саноқ тизими деб қаралади ва унинг сиртидаги жисмларга 3.5-расмда кўрсатилгандек марказдан қочма инерция кучи таъсир этади (инер-



3.5-расм

ция кучлари жисмларга таъсир этувчи ташқи кучларга нисб ҳисобга олмаслик даражада кичик бўлган ҳоллардагина Ер би боғланган саноқ тизимини инерциал саноқ тизими деб қара мумкин). Натижада бизнинг тарозиларимиз расмдаги $\vec{P}_0$ оғирлик кучи ўрнига $\vec{P}_\varphi$ оғирлик кучини кўрсатади. Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши билан боғлиқ бўлган марказдан қочма инерция кучи ($\vec{F}_{\text{мк}}$) билан φ кенгликдаги жисмнинг оғирлик кучи ($\vec{P}_\varphi$) нинг вектор йиғиндиси $\vec{P}_0$ векторга тенг (3.5-расм):

$$\vec{P}_0=\vec{P}_\varphi+\vec{F}_{\text{мк}}.$$

Ҳисоблашлар шуни кўрсатадики $\vec{F}_{\text{мк}}$ куч $\vec{P}_0$ га нисбатан жуда кичик экан. Ҳақиқатан ҳам Ер ўз ўқи атрофида ω бурчак тезлик билан айланаётган бўлса, массаси m бўлган жисмга таъсир этувчи марказдан қочма инерция кучи қуйидагига тенг:

$$F_{\text{мк}}=m\omega^2r=m\omega^2R\cos\varphi. \tag{3.20}$$

Ер марказига йўналган оғирлик кучи:

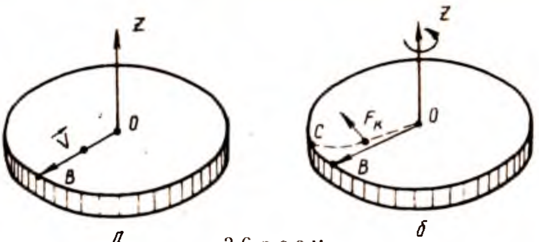
$$\vec{P}_0=m\vec{g}_0.$$

Охирги икки тенгликнинг нисбати

$$\frac{F_{\text{мк}}}{P_0}=\frac{m\omega^2R\cos\varphi}{mg_0}=\frac{\omega^2R\cos\varphi}{g_0}. \tag{3.21}$$

(3.20) формуладан кўриниб турибдики, $\vec{F}_{\text{мк}}$ экваторда энг катта ($\cos\varphi=1$) қийматга эга бўлиб, қутбда эса бу куч нолга тенг. Ўрта кенгликларда $\varphi=45°$ деб ҳисоблаб, (3.21) формулага ω, g_0, R ларнинг қийматларини қўйсак $\frac{F_{\text{мк}}}{P_0}\approx\frac{1}{400}$ га тенг бўлади, яъни $F_{\text{мк}}$ куч P_0 нинг 0,25 фоизини ташкил этади. Демак, Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши туфайли жисм оғирлик кучининг ўзгариши жуда кичик экан.

Биз юқорида айланаётган саноқ тизимида тинч турган жисмга таъсир этувчи марказдан қочма инерция кучлари билан танишдик. Агар жисм шу айланаётган тизимга нисбатан ҳаракатда бўлса, унга марказдан қочма инерция кучидан ташқари яна қўшимча куч таъсир этади. Бу кучга Кориолис кучи ёки Кориолис инерция кучи дейилади. Кориолис кучи билан танишиш учун қуйидаги қурилмада тажриба ўтказайлик: уфқ текислигида (горизонтал) ўрнатилган диск олайлик ва у тик йўналишдаги Z ўқ атрофида айлана олсин. Дастлаб диск тинч ҳолатда бўлсин (3.6, *а*-расм); унинг марказидан бирор шарчани $\vec{v}$ тезлик билан OB радиус бўйича йўналтирсак, табиийки, у радиал чизиқ бўйлаб ҳаракат қилиб, B нуқтага келади. Энди дискни Z ўқи атрофида ω бурчак тезлик билан 3.6, *б*-расмда кўрсатилган йўналишда айланма ҳаракатга келтирамиз. У ҳолда шарча OC эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилиб, B нуқтага эмас, балки C нуқтага келади, шу билан бирга у дискка нисбатан

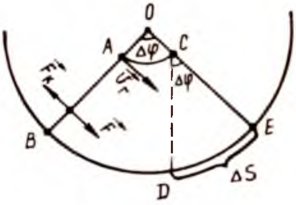


3.6-расм

ўз тезлиги йўналишини ҳам ўзгартиради. Айланаётган диск билан богланган ноинерциал тизимда (у тизимдаги кузатувчи нуқтаи назарича) шарчага $\vec{v}$ векторга тик йўналишда қандайдир $\vec{F}_к$ куч таъсир этаяпти.

Инерциал саноқ тизимида (диск ёнида турган кузатувчи назарича) шарча диск тинч турган ҳолдаги каби тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаяпти, диск эса шарчанинг аввалги траекториясига нисбатан силжиди, деган натижа келиб чиқади.

Ноинерциал саноқ тизимида шарчага таъсир этаётган кучнинг табиатини аниқлаш мақсадида шарчани тўғри чизиқ бўйлаб (*OB* радиус бўйлаб) ҳаракатланишга мажбур қилайлик. Бунинг учун *OB* бўйлаб тўсиқ (деворча) ўрнатайлик ва бу тўсиқча туфайли шарча дискка нисбатан *OB* бўйлаб $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин (3.7-расм). Диск билан боғланган ноинерциал саноқ тизимида шарча *OB* бўйлаб $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланиб, Δt вақт оралигида



3.7-расм

$$\Delta l = AB = v\cdot\Delta t$$

масофани босиб ўтиб, *B* нуқтага келади.

Инерциал саноқ тизимида дискнинг *OB* радиуси Δt вақт оралигида

$$\Delta\varphi=\omega\cdot\Delta t \qquad (3.22)$$

бурчакка бурилади ва *A* нуқтадан бошлаб ҳаракатланаётган шарча шу вақт оралиғида *B* нуқтага эмас, балки *E* нуқтага келиб қолади. Бунинг сабаби, шарча шу Δt вақт оралигида иккита ҳаракатда иштирок этади — дискка нисбатан $\vec{v}$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракатда ва диск билан бирга айланма ҳаракатда қатнашади.

Шарча $\vec{v}$ тезлик билан *AB* тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилмаганда эди, у фақат дискнинг айланма ҳаракатида иштирок этиб, $\vec{v}_r$ тезлик билан Δt вақт оралиғида *AC* ёй бўйлаб *A* нуқтадан *C* нуқтага келган бўлар эди. Айни шу вақт оралиғида шарча $\vec{v}$ ва $\vec{v}_r$ тезликлар билан ҳаракатланиб *D* нуқтага келиши керак эди (чунки *AB* йўл *CD* га параллелдир), лекин у *E* нуқтага келади. Бунинг сабаби — дискнинг ҳар хил нуқталарида $\vec{v}_r$ тезликнинг ҳар хиллигидир. Шунинг учун инерциал саноқ тизимига нисбатан шарча тезланиш билан ҳаракатланиб, Δt вақт оралигида қўшимча $\Delta S = DE$ масофани босиб ўтади. Расмдан кўриниб турибдики,

$$\Delta s = |CD| \cdot \Delta\varphi, \qquad (3.23)$$

лекин

$$|CD| = |AB| = \Delta l = v\Delta t. \qquad (3.24)$$

(3.22) ва (3.24)ни (3.23)га қўйсак,

$$\Delta s = v\Delta t\omega\Delta t \text{ ёки } \Delta s = 2v\omega\frac{\Delta t^2}{2}. \qquad (3.25)$$

Бу формулани текис тезланувчан ҳаракатда жисмнинг ўтган йўли

$$\Delta s = \frac{at^2}{2}$$

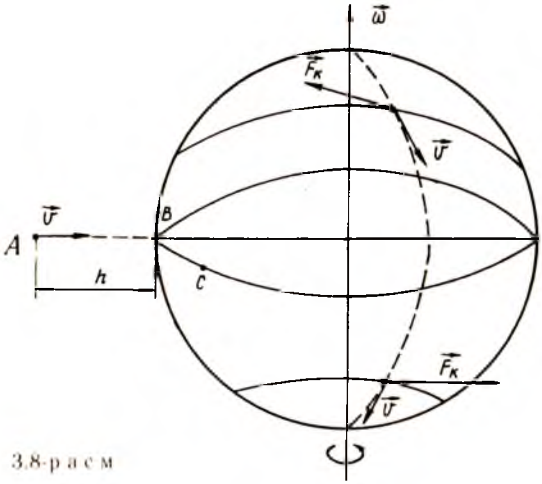
билан таққосласак, шарча

$$a = 2v\omega$$

тезланиш билан ҳаракатланаётганлиги аниқланади. Бу тезланишга эришиш учун массаси m бўлган шарчага қўйилган тўсиқ томонидан $\vec{F} = m\vec{a}$ куч таъсир этиши керак. Ньютоннинг учинчи қонунига асосан шарча ўз навбатида ўша тўсиққа Кориолис кучи ($\vec{F}_к$) билан акс таъсир этади (бу кучларнинг йўналиши 3.7-расмда кўрсатилган). Демак,

$$\vec{F}_к = 2m[\vec{v}\vec{\omega}]. \qquad (3.26)$$

Кориолис инерция кучининг йўналиши $\vec{v}$ ва $\vec{\omega}$ векторларнинг вектор кўпайтмасининг йўналиши билан аниқланади.



3.8-расм

Маълумки, Ер шари ўз ўқи атрофида айланади ва уни ноинерциал саноқ тизими деб қараш мумкин. Ер сиртида ҳаракатланаётган ҳар қандай жисмга Кориолис кучи таъсир этади ва кузатиладиган қатор ҳодисалар шу куч билан боғлиқдир. 3.8-расмда жанубдан шимол томон $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган жисмга таъсир этувчи Кориолис кучининг йўналишлари кўрсатилган. Бу куч таъсирида шимолий ярим шарда дарёнинг ўнг қирғоқлари чап қирғоқларига нисбатан кўпроқ ювилади ва тикроқ бўлади; худди шунингдек, шу ярим шарда темир йўлнинг ҳаракатга нисбатан ўнг томондаги рельси кўпроқ ейилади. Жисмларнинг эркин тушишида Кориолис кучи уларни шарқ томонга оғдиради, яъни h баландликдан (масалан, миноранинг тепасидан) тушаётган A жисм Ернинг B нуқтасига тушмасдан C нуқтасига тушади (3.8-расм). Тажрибаларнинг кўрсатишича, экваторда 30 м баландликдан тушган жисм тик йўналишда шарққа томон 3,6 мм масофага оғади. (3.8-расмда Кориолис кучи $\vec{v}$ ва $\vec{\omega}$ векторларга тик равишда А нуқтадан ўқувчи томонга ёки Ер шарига нисбатан шарқ томонга йўналган.)

IV БОБ

ИМПУЛЬС ВА ИНЕРЦИЯ МАРКАЗИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

4.1-§. САҚЛАНИШ ҚОНУНЛАРИ. ИМПУЛЬСНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Физикада шундай катталиклар мавжудки, муайян шартлар бажарилганда уларнинг қийматлари вақт ўтиши билан ўзгармай қолади ва улар сақланиш қонунларининг асосини ташкил этади. Механикавий ҳодисалар билан боғлиқ бўлган қуйидаги сақланиш қонунлари мавжуд: 1) импульснинг сақланиш қонуни, 2) импульс моментининг сақланиш қонуни, 3) энергиянинг сақланиш қонуни. Бу сақланиш қонунлари механикавий ҳаракат ва жисмларнинг ўзаро таъсири ҳақидаги таълимотнинг негизини ташкил этади.

Юқорида зикр этилган механикавий ҳодисаларга тааллуқли сақланиш қонунларидан ташқари яна бир неча сақланиш қонунлари ҳам мавжуд бўлиб, улар билан биз физика курсининг тегишли бўлимларида танишамиз. Барча сақланиш қонунлари табиат қонунларининг пойдевори ҳисобланади ва бу қонунлар тажрибаларда тасдиқланган.

Сақланиш қонунлари тадқиқотчилар қўлида ўзига хос қудратли қурол бўлиб хизмат қилмоқда. Масалан, энергиянинг сақланиш қонунидан шу хулоса келиб чиқадики, энергия истеъмол қилмасдан ишлайдиган қурилмани (абадий двигателни) яратиш мумкин эмас ва бу соҳада иш олиб бориш — тадқиқотчи вақтини ҳамда маблағни беҳуда сарфлаш демакдир. Импульс моментининг сақланиш қонунига асосланиб Қуёш тизими таркибидаги сайёраларнинг ҳаракати билан боғлиқ муаммолар бевосита ҳал этилади. Масалан, Қуёш ва Ой тутилиш вақтини олдиндан айтиб бериш мазкур муаммоларни ечиш натижаси ҳисобланади. Кейинги вақтларда физиклар мураккаб ҳисоблашларнинг қўлланишини талаб қиладиган муаммоларни ҳал этиш мақсадида электрон ҳисоблаш машиналаридан фойдаланмоқ даларки, мазкур машиналар учун дастурлар тузишда тегишли сақланиш қонунларига амал қилинади. Импульснинг, импульс моментининг ва энергиянинг сақланиш қонунлари фазо ва вақтнинг хусусиятлари билан узвий боглиқ эканлиги кейинчалик маълум бўлди. Бу ҳақда VI бобнинг охирида батафсил гапирилади.

Импульснинг сақланиш қонуни табиатнинг асосий қонунларидан биридир. Ҳаракатдаги жисм массасининг унинг тезлигига кўпайтмаси ($\vec{p}=m\vec{v}$)ни юқорида (2.2-§ да) биз жисм импульси деб атаган эдик. Ньютоннинг биринчи қонунига асосан, тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги жисмга бошқа жисмлар (ташқи куч) таъсир этмаса, у ўзининг тўғри чизиқли ҳаракатини давом эттиради, яъни унинг тезлигининг сон қиймати ва йўналиши ўзгармайди. Бинобарин, жисмга ташқи куч таъсир қилмаса, унинг импульси ўзгармайди (сақланади). Бу хулоса битта жисм учун импульснинг сақланиш қонунини ифодалайди.

Импульснинг сақланиш қонуни жисмлар тизими учун муҳим аҳамият касб этади. Жисмлар (ёки моддий нуқталар) тизими ёки соддагина «тизим» деганда ўзаро таъсирлашувчи бир нечта жисмлар тўпламини тушунамиз. Тизимга ташқи кучлар таъсир этмаса, бундай тизим берк тизим дейилади. Қуёш тизими жуда катта аниқлик билан берк тизим бўла олади. Биз яшаб турган табиий шароитларда эса берк тизимлар мавжуд эмас, чунки Ер сиртидаги ҳар қандай тизимга ҳеч бўлмаганда Ернинг тортиш кучи таъсир этади. Лекин тизимдаги жисмларнинг таъсир кучларига нисбатан ташқи кучлар ҳисобга олинмаса ёки ҳисобга олинмаслик даражасида кичик бўлса, бундай тизимни берк тизим деб қараш мумкин. Тизимдаги жисмларнинг ўзаро таъсир кучларини *ички кучлар* дейилади.

Тизим учун импульснинг сақланиш қонуни Ньютоннинг иккинчи ҳамда учинчи қонунларига асосланади ва бу ҳақдаги мулоҳазаларимиз инерциал саноқ тизимига нисбатан олиб борилади. Дастлаб n та жисмдан иборат берк тизимни олиб қарайлик. Тизим берк бўлганлиги туфайли унга таъсир этувчи ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг, яъни тизимда фақат ички кучларгина мавжуд. Тизимдаги n та жисмнинг ҳар бирининг импульсини p_1, p_2, ... , p_n деб белгиласак, тизим импульси

$$p=\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i$$

тарзида ифодаланади ((2.4) ифодага қ.); бу ерда $\vec{p}_i=m_i\vec{v}_i$ — i-жисмнинг импульси. Берк тизимдаги ҳар бир жисм учун Ньютоннинг иккинчи қонунини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1)=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1n}, \\ \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2)=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ldots+\vec{F}_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n)=\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{n2}+\ldots+\vec{F}_{n,\,n-1}, \end{cases} \qquad (4.1)$$

бунда $\vec{F}_{12}$ — биринчи жисмга иккинчи жисм томонидан таъсир этувчи куч; $\vec{F}_{21}$ — иккинчи жисмга биринчи жисм томонидан таъсир этувчи куч ва ҳоказо. Равшанки, тизимдаги ҳамма жисмлар ўзаро таъсирлашадилар. Умумий ҳолда (4.1) ифодани

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i \vec{F}_{ik}\quad (i\neq k;\ i,\ k=1,2,\ \dots\ ,\ n) \tag{4.2}$$

тарзида ёзамиз, бу формуланинг ўнг томони тизимдаги ички кучларнинг вектор йиғиндисини акс эттиради. Тизимдаги бирор жисмнинг шу тизимдаги бошқа ҳар бир жисм билан ўзаро таъсири Ньютоннинг иккинчи қонунига бўйсунади: $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13}=-\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{23}=-\vec{F}_{32}$ ва ҳоказо. Умуман олганда, i-жисм j-жисмга $\vec{F}_{ji}$ куч билан таъсир этса, j-жисм ҳам i-жисмга $\vec{F}_{ij}$ куч билан таъсир этади:

$$\vec{F}_{ji}=\vec{F}_{ij}.$$

Бинобарин, (4.2) тенгликнинг ўнг томонида ифодаланган ички кучларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum_i \vec{F}_{ik}=0\quad (i\neq k,\ i,\ k=1,2,\ \dots\ ,\ n). \tag{4.3}$$

Демак, берк тизим учун

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0\qquad \text{ёки}\qquad \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i=0$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ифодадан

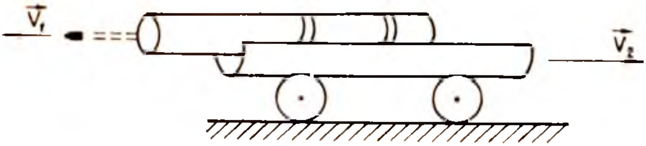
$$\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\text{const} \tag{4.4}$$

деган хулосага келамиз. (4.4) ифода берк тизим учун импульснинг сақланиш қонунини ифодалайди: *берк тизимнинг импульси вақт ўтиши билан ўзгармайди.* Бошқача айтганда, берк тизим айрим жисмларининг импульслари вақт ўтиши билан ўзгарса-да, унинг импульси ўзгармай қолади. Бу ерда зикр этилган ўзгаришлар шундай содир бўладики, масалан, тизимдаги бирор жисмнинг импульси камайса, шу тизимдаги бошқа жисмнинг (ёки жисмларнинг) импульси шунчага ошади.

Берк тизимда импульснинг сақланиш қонунига мисол тариқасида иккита жисмдан иборат тизимни олиб қарайлик. Масалан, милтиқ ҳамда унинг ичидаги ўқ берк тизимни ташкил қилсин ва милтиқ ишқаланишсиз ҳаракатланувчи кичкина аравачага маҳкам ўрнатилган бўлсин (4.1-расм). Бу тизим учун импульснинг сақланиш қонуни қуйидагича ёзилади:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\text{const},$$

бунда m_1 ва m_2 — мос равишда ўқнинг ҳамда милтиқнинг аравача билан биргаликдаги массалари; v_1 ва v_2 — ўқнинг ва аравачанинг



4.1-расм

тезликлари. Дастлаб тизим тинч турганлиги туфайли ундаги жисмлар испульсларининг вектор йиғиндиси нолга тенг, яъни:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0.$$

Ўқ $\vec{v}_1$ тезлик билан отилиб чиққач, аравачанинг орқага тисарилиш тезлиги

$$\vec{v}_2=-\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$$

бўлади; бунда (—) ишора $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ векторлар қарама-қарши томонга йўналганлигини кўрсатади. Энди m_1, m_2, $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ ларни сонли қийматлар орқали ифодалайлик, масалан $m_1=10$ гр$=10^{-2}$ кг, $m_2=$ $=5$ кг, $v_1=600$ м/с бўлсин. Бу қийматларни юқоридаги формулага қўйсак, аравачанинг (милтиқ билан бирга) ўқ йўналишига нисбатан орқага $v_2=1{,}2$ м/с тезлик билан ҳаракатланиши аён бўлади.

Тизимга ташқи кучлар таъсир этаётган бўлса, у берк тизим бўла олмайди ва бундай тизим учун импульснинг сақланиш қонуни бажарилмайди. Бундай тизим учун Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i\vec{F}_{ik}+\vec{F}_т\quad(i=k;\ i,k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

бу ерда $\sum\limits_i\vec{F}_{ik}$ — ички кучларнинг вектор йиғиндиси; $\vec{F}_т$ — ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси. (4.3) га асосан ички кучларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг эканлигини эътиборга олсак, бу тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i=\vec{F}_т.\tag{4.5}$$

Бу тенглама механикавий тизим импульсининг ўзгариш қонунини ифодалайди: *тизим импульсидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила тизимга таъсир этувчи ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг.* (4.5) тенглама вектор тенглама бўлгани учун уни координата ўқларидаги ташкил этувчилари бўйича қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_{ix}=\vec{F}_{тx},\quad\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_{iy}=\vec{F}_{тy},\quad\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_{iz}=\vec{F}_{тz}.\tag{4.6}$$

Бу ерда $\vec{F}_{\tau x}$, $\vec{F}_{\tau y}$, $\vec{F}_{\tau z}$ — ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисининг X, Y, Z ўқлар бўйича ташкил этувчилари. Агар берк бўлмаган тизимда бирор йўналиш бўйича, масалан Z ўқи бўйича ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлса, бу йўналиш бўйича (4.6) ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_{iz}=0.$$

Бундан

$$\sum_i m_i\vec{v}_{iz}=\text{const} \qquad (4.7)$$

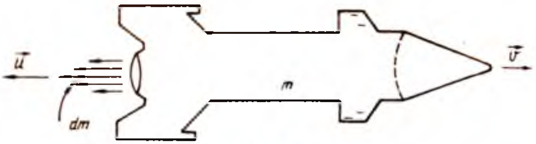
эканлиги келиб чиқади. Демак, ташқи кучлар таъсири бўлмаган йўналиш бўйича тизим импульси ўзгармай қолади. Бундан шундай хулосага келамизки, берк бўлмаган тизимни ташқи кучлар таъсири бўлмаган йўналиш бўйича берк тизим деб қараш мумкин.

Юқорида импульснинг сақланиш қонунига доир бир неча мисоллар келтирган эдик. Ўша мисолларда жисмларга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучини (бу ташқи куч) ҳисобга олмай, тизимни берк деб ҳисоблаган эдик. Ҳақиқатан ҳам, жисмлар импульсларининг ўзгариши уфқ текислигида, масалан, XOY текислигида, содир бўляпти деб қаралган эди; ваҳоланки Ернинг тортиш кучи бу текисликка тик (масалан, z ўқи бўйича) йўналгандир, яъни уфқ текислигида ётган йўналиш бўйича Ер тортиш кучининг таъсири нолга тенгдир. Шунинг учун ўша мисолларимиз (4.7) тенгликни тўла қаноатлантирар эди.

4.2-§. РЕАКТИВ ҲАРАКАТ. МАССАСИ ЎЗГАРАЁТГАН ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТИ

Реактив ҳаракат импульснинг сақланиш қонунига асосланади. Юқорида (4.1-§) импульснинг сақланиш қонунига мисол тариқасида милтиқ ва ундан отилиб чиққан ўқнинг ҳаракати ҳақида гапирилган эди: ўқ бир томонга $\vec{v}_1$ тезлик билан отилиб чиқса, милтиқ отилиб чиққан ўқнинг таъсирида тескари томонга $\vec{v}_2$ тезлик билан ҳаракатланади. Мазкур таъсир реактив ҳаракатнинг асосини ташкил қилади. Реактив ҳаракат деганда ракеталар ва реактив тайёра (самолёт)ларнинг ҳаракатини тушунамиз. Шуни ҳам айтиш керакки, қайиқ, кема, парракли тайёра каби нақлиёт воситаларининг ҳаракати ҳам моҳияти жиҳатидан реактив ҳаракатдир, чунки қайиқ ва кемаларда эшкак ва парраклар ёрдамида сув бир томонга бирор $\vec{v}_1$ тезлик билан ҳаракатга келтирилса, қайиқ ва кема қарама-қарши томонга $\vec{v}_2$ тезлик билан ҳаракатланади. Парракли тайёраларда ҳам шу ҳодиса кузатилади. Аммо «реактив ҳаракат» тушунчаси одатда анча тор маънода қўлланилиб, бунда ракета ва реактив тайёраларнинг ҳаракатигина кўзда тутилади.

Ракета ва реактив тайёралар ҳаракатининг асосий хусусиятларидан бири шундан иборатки, бу ерда берк тизимнинг массаси ҳаракат давомида узлуксиз ўзгариб боради: ракетада ёнган ёнилғидан ҳосил бўлган газ ракетадан узлуксиз отилиб чиқиб туради ва бинобарин, ракетанинг массаси ҳам узлуксиз камайиб боради. Ёнилғининг ёниш жараёнида ҳосил бўлган газ қандайдир $\vec{u}$ тезлик билан ракетадан отилиб чиқиши туфайли ракета $\vec{u}$ га тескари



4.2-расм

йўналишда бирор $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланади (4.2- расм). Умуман олганда, ҳаракат жараёнида ракетанинг массаси билан бир қаторда унинг тезлиги ҳам ўзгариб боради, яъни у тезланиш билан ҳаракатланади. Ракетага тезланиш берадиган куч — газнинг отилиб чиқиши туфайли вужудга келадиган **реактив кучдир**. Бу куч **ракетанинг ҳаракат тенгламаси** орқали ифодаланади.

Ҳаракат давомида ракетага реактив кучдан ташқари Ернинг тортиш кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи ҳам таъсир этади. Реактив ҳаракат тенгламасини келтириб чиқаришни соддалаштириш учун дастлаб ракетанинг оғирлик кучи билан муҳитнинг қаршилик кучини ҳисобга олмай турайлик.

Ер билан боғланган инерциал саноқ тизимида ҳаракатланаётган ракетанинг t пайтдаги массаси m ва тезлиги $\vec{v}$ бўлса, унинг шу пайтдаги импульси $m\vec{v}$ га тенг бўлади. Сўнгра dt вақт давомида ракетадан массаси dm га тенг газ отилиб чиқиши натижасида унинг массаси $m-dm$ га, тезлиги эса $v+d\vec{v}$ га тенг бўлди, яъни dt вақтдан сўнг ракетанинг импульси $(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v})$ га тенг бўлади. Ракетага нисбатан $\vec{u}$ тезлик билан ҳаракатланаётган dm массали газнинг импульси эса

$$(\vec{v}+d\vec{v}-\vec{u})dm$$

(ракетага нисбатан унинг импульси $-\vec{u}dm$ га тенг!) бўлади. Мазкур берк тизим учун импульснинг сақланиш қонуни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v})+(\vec{v}+d\vec{v}-\vec{u})dm=m\vec{v}.$$

Бундан

$$md\vec{v}-\vec{u}dm=0$$

ёки

$$md\vec{v}=\vec{u}dm$$

га эга бўламиз. Тизим тезлигининг ($d\vec{v}$) ўзгариши dt вақт давомида содир бўлгани туфайли (газнинг тезлиги $\vec{u}$ ни ўзгармас деб ҳисоблаб), охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}\frac{dm}{dt}. \qquad (4.8)$$

Бу тенгликнинг ўнг томони тизимга таъсир этувчи реактив кучни ифодалайди; бу тенглик ташқи кучлар (ракетанинг оғирлик кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи) ҳисобга олинмаган ҳол учун **ракетанинг ҳаракат тенгламаси** деб аталади. Демак, ракетага таъсир этувчи реактив куч газнинг тезлигига ва вақт бирлиги давомида сарф бўлган ёнилғи массасига мутаносибдир.

Агар ракетага ташқи кучлар ҳам таъсир этса, унинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_{\text{т}}+\vec{u}\frac{dm}{dt}, \tag{4.9}$$

бу ерда $\vec{F}_{\text{т}}$ — ракетага таъсир этувчи оғирлик кучи ва муҳитнинг қаршилик кучларининг вектор йиғиндисидир.

$\vec{u}$ нинг йўналиши $\vec{v}$ нинг йўналиши билан қарама-қарши бўлса, ракета тезланиш билан ҳаракатланади; агар $\vec{u}$ нинг йўналиши $\vec{v}$ билан бир хил бўлса, ракета ҳаракати секинланувчан ҳаракат бўлади. Шунинг учун (4.8) тенгликни ракетанинг ҳаракат йўналишига бўлган проекцияси орқали ифодаласак, уни қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt}$$

ёки

$$dv=-u\frac{dm}{m}. \tag{4.10}$$

Агар тизим (ракета+ёнилғи)нинг бошланғич массаси m_0 ва тизим ишининг охирида унинг массаси $m_{\text{ф}}=m_0-m_{\text{ё}}$ бўлса, ракетанинг охирги энг катта тезлиги (4.10) тенгликни интеграллаш орқали топилади ($u=\text{const}$):

$$v=-u\int\limits_{m_0}^{m_{\text{ф}}}\frac{dm}{m}=u\ln\frac{m_0}{m_{\text{ф}}},$$

яъни:

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_{\text{ф}}}, \tag{4.11}$$

бу ерда $m_{\text{ф}}=m_0-m_{\text{ё}}$ фойдали юк дейилади ($m_{\text{ё}}$ — ишлатилган ёнилғининг массаси). (4.11) тенглик **Циолковский формуласи** деб аталади. Кўриниб турибдики, ракетанинг эришган энг катта тезлиги ракетадан чиқаётган газнинг тезлигига ва ишлатилган ёнилғининг массасига мутаносибдир. Бошқача айтганда, Циолковский формуласи ракетага муайян $\vec{v}$ тезлик бериш учун зарур бўлган ёнилғи массаси ($m_{\text{ё}}$) ни ҳисоблашга имкон беради.

4.3-§. ИНЕРЦИЯ МАРКАЗИ

Кўп ҳолларда бир неча жисм (моддий нуқталар)дан иборат механикавий тизимнинг ҳаракат қонунларини ўрганиш билан иш кўришга тўғри келади. Бундай тизимнинг ҳаракат қонунларини ўрганишда мазкур тизим таркибидаги жисмларнинг унда қандай тақсимланганлигини ёки бу жисмлар бир-бирига нисбатан тизимда қандай жойлашганлигини билиш зарурияти туғилади. Шу муносабати билан инерция маркази (масса маркази) деган тушунча киритилади*.

---

* Инерция маркази ва масса маркази атамалари айнан бир маънода ишлатилади, чунки жисмнинг массаси унинг инерция ўлчовидир.

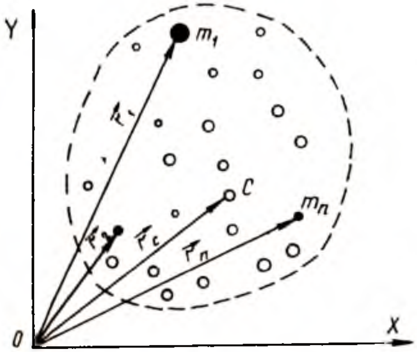
Инерция маркази ва оғирлик маркази деган тушунчалар орасида қуйидаги фарқ борлигини эсдан чиқармаслик керак: оғирлик маркази — бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган қаттиқ жисмлар учунгина маънога эга; инерция маркази эса ҳеч қандай майдон билан боғлиқ эмас ва ихтиёрий механикавий тизим учун ўринлидир. Оғирлик кучи майдонида жойлашган қаттиқ жисмлар учун инерция маркази ва оғирлик маркази бир-бири билан мос тушади, яъни бир нуқтада жойлашган бўлади. Инерция маркази массанинг тақсимланишини тасвирловчи геометрик нуқта бўлиб, унинг вазияти координаталар бошига нисбатан $\vec{r}_c$ радиус-вектор билан қуйидагича аниқланади (4.3-расм).

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

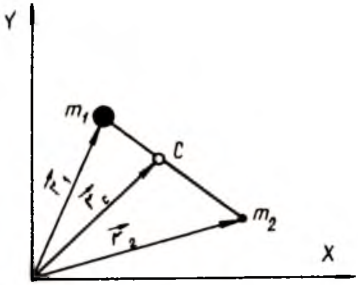
яъни:

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}=\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i, \tag{4.12}$$

бу ерда m_i — тизимга мансуб i-жисмнинг массаси; $\vec{r}_i$ — координаталар боши O га нисбатан i-жисмнинг вазиятини аниқловчи радиус-вектор; $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ — тизимнинг умумий массаси.



4.3-расм



4.4-расм

Соддалаштириш мақсадида иккита жисмдан иборат тизимни олиб қарайлик (4.4-расм). Массалари m_1 ва m_2 бўлган жисмларнинг вазиятлари координата боши O га нисбатан мос равишда $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ радиус-векторлар билан берилган бўлса, бу икки жисмдан иборат тизимнинг инерция маркази

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

формула орқали ифодаланиб, икки жисмнинг геометрик марказларини бирлаштирувчи тўғри чизиқда ётади.

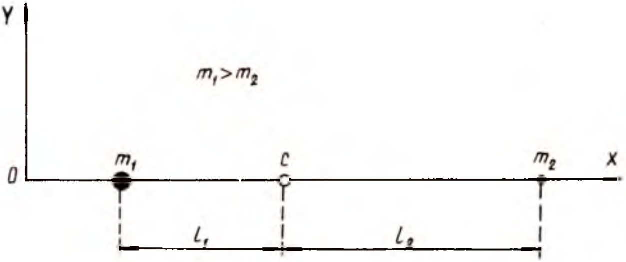
(4.12) тенглама вектор орқали ифодаланган тенгламадир, лекин инерция марказларининг вазиятини аниқловчи мазкур радиус-векторни унинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ҳам ифодалаш мумкин:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i, \qquad (4.13)$$

бунда m — тизимнинг умумий массаси; x_i, y_i, z_i — тизим таркибидаги i-жисмнинг координаталари. Хусусий ҳолда, агар тизим массалари m_1 ва m_2 бўлган иккита жисмдан иборат бўлса ва уларни X ўқи бўйича жойлаштирсак, инерция марказининг координатаси

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

бўлади (4.5-расм).



4.5-расм

Равшанки, $m_1 = m_2$ бўлса, инерция маркази икки жисмнинг геометрик марказларини туташтирувчи тўгри чизиқнинг ўртасида ётади; агар $m_1 \neq m_2$ бўлса, инерция маркази икки жисмнинг геометрик марказлари орасидаги масофани массалар нисбатига тескари мутаносиб бўлган кесмаларга ажратади (4.5-расмга қ.), яъни

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Тизим учта жисмдан иборат бўлса, унинг инерция маркази ихтиёрий иккита жисмнинг инерция марказидан учинчи жисмгача бўлган оралиқни шундай икки бўлакка бўладики, бу бўлаклар узунликларининг нисбати икки жисм массалар йиғиндисининг учинчи жисм массасига нисбатига тескари мутаносиб бўлади. Учтадан ортиқ (n та) жисмдан иборат тизимнинг инерция марказини топишда шу усул кетма-кет қўлланилади.

4.4-§. ИНЕРЦИЯ МАРКАЗИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ. МАССАНИНГ АДДИТИВЛИГИ

Фараз қилайлик, n та жисм (моддий нуқта)дан иборат тизим фазода ҳаракатланаётган бўлсин. Тизим инерция марказини аниқловчи радиус-вектор $\vec{r}_c$ дан вақт бўйича олинган ҳосила (r_c нинг бирлик вақт давомида ўзгариши) инерция марказининг тезлигини ифодалайди:

$$\vec{v}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt}. \qquad (4.14)$$

(4.12) формулани (4.14) га қўйиб, инерция марказининг тезлиги учун

$$\vec{v}_c=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i\right)=\frac{1}{m}\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{v}_i=\frac{1}{m}\sum_i\vec{p}_i \qquad (4.15)$$

га эга бўламиз; бу ерда $\vec{v}_i$ ва $\vec{p}_i$ мос равишда i-жисмнинг тезлиги ва импульси; равшанки

$$\vec{p}=\sum_i\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i \qquad (4.16)$$

тизимнинг тўла импульси бўлиб, кўпинча $\vec{p}$ — инерция марказининг импульси ҳам дейилади; m — тизимнинг умумий массаси, яъни:

$$m=m_1+m_2+...+m_n=\sum_i m_i. \qquad (4.17)$$

Энди (4.16) ни кўзда тутиб, (4.15) ифодани куйидагича ёзамиз:

$$\vec{v}_c=\frac{\vec{p}}{m} \quad \text{ёки} \quad \vec{p}=m\vec{v}_c. \qquad (4.18)$$

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан тизимнинг тўла импульсидан вакт бўйича олинган ҳосила шу тизимга таъсир этаётган ташқи кучларнинг вектор йиғиндисига тенг:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{v}_c}{dt}=m\vec{a}_c=\vec{F}_т, \qquad (4.19)$$

бу ерда $\vec{a}_c$ — инерция марказининг тезланиши, $\vec{F}_т$ — тизимга таъсир этаётган ташқи кучларнинг вектор йиғиндиси. Берк тизимда унга таъсир этувчи ташқи кучлар мавжуд эмас ёки ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг ($\vec{F}_т=0$). У ҳолда охирги тенгликдан инерция марказининг тезланиши

$$\vec{a}_c=\frac{d\vec{v}_c}{dt}=0$$

бўлади. Бундан $\vec{v}_c=\text{const}$ эканлиги келиб чиқади. Бу хулоса инерция марказининг сақланиш қонунини ифодалайди ва у куйидагича таърифланади: *берк тизимнинг инерция маркази тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат қилади ёки тинч ҳолатда бўлади.*

Тизим импульсининг сақланиш қонунидан массанинг аддитивлик қонуни * келиб чиқади.

(4.18) ифодадан кўриниб турибдики, тизим импульси билан унинг инерция маркази тезлиги орасидаги боғланиш шакл жиҳатидан битта жисм (моддий нуқта)нинг импульси билан тезлиги орасидаги боғла-

---

* Тизимни яхлит тарзда ифодаловчи катталик тизим таркибий қисмларини ифодаловчи айнан ўша катталикларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, бу катталик аддитив катталик дейилади.

нишнинг ўзгинасидир. Шу билан бирга, бу ифодадаги мутаносиблик коэффициенти ўрнида турган m катталик тизим таркибига кирувчи айрим жисмлар массаларининг йиғиндиси деган маънога эга. Шундай қилиб, массанинг аддитивлик қонуни қуйидагича ифодаланади: *тизимнинг массаси унинг таркибидаги айрим жисмлар массаларининг йиғиндисига тенг.* Масалан, йўлда кетаётган вагонни йўловчилари билан бирга тизим деб қарасак, унинг умумий массаси, равшанки, унинг ичидаги айрим йўловчилар массалари ва вагоннинг ўзининг айрим қисмлари массаларининг йиғиндисига тенг.

4.5-§. ИНЕРЦИЯ МАРКАЗИНИНГ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА. М-ТИЗИМ

Инерция маркази тушунчаси бир неча жисмдан иборат бўлган тизим ҳаракатини тавсифлашда анча қулайликларга эга. Шу мақсадда (4.19) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}}, \qquad (4.20)$$

маълумки, бу ерда $m=m_1+m_2+\ldots+m_n=\sum\limits_i m_i$ — тизим таркибидаги барча жисмларнинг умумий массаси, $\vec{v}_c$ — инерция марказининг тезлиги, $\vec{F}_{\text{Т}}$ — тизимга таъсир этаётган барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси (ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг). Демак, тизим инерция марказининг олган тезланиши, яъни dv_c/dt ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига мутаносиб ва тизим таркибидаги жисмлар массаларининг йиғиндисига тескари мутаносибдир.

Кўриниб турибдики, бу формула шаклан массаси m ва тезлиги $\vec{v}$ бўлган битта моддий нуқтанинг ташқи $\vec{F}_{\text{Т}}$ куч таъсирида қилаётган ҳаракатини ифодаловчи тенгламага ўхшашдир. Шунинг учун бу формула инерция марказининг ҳаракат тенгламасини ифодалайди ва у қуйидаги хулосага олиб келади: *тизимнинг инерция маркази ташқи кучлар таъсирида массаси тизим таркибидаги барча жисмларнинг массасига тенг бўлган моддий нуқта каби ҳаракатланади.* Бу хулоса инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема деб аталади.

(4.20) формуладан кўринадики, инерция марказининг тезлигини ўзгартириш учун тизимга ташқи кучлар таъсир этиши керак; тизим таркибидаги жисмларнинг ўзаро таъсири туфайли вужудга келадиган ички кучлар ўша жисмларнинг инерция марказига нисбатан тезликларини ўзгартирса-да, бу кучлар инерция марказининг ҳолатини, ҳаракат йўналишини ва тезлигини ўзгартира олмайди. Масалан, ҳаракатланаётган снаряд ҳавода портлаб бир неча бўлакларга парчаланиб кетса, бу бўлакчалар ички кучлар таъсирида ҳар томонга ҳар хил тезлик билан ҳаракатланади. Лекин портлаш натижасида ҳосил бўлган бўлакчаларнинг инерция маркази ҳеч қандай портлаш содир бўлмагандек, ўз ҳаракатини аввалгидек давом эттиради.

Бу ерда келтирилган мулоҳазаларимиз инерция марказининг ҳаракатига тааллуқлидир. Аммо кўп ҳолларда тизимнинг яхлит (бир бутун) ҳаракатидан ташқари унинг таркибидаги жисмларнинг бир-бирига нисбатан (нисбий) ҳаракатини таҳлил қилиш зарурияти ҳам туғилади. Шунинг учун механикавий тизимнинг ҳаракатини ҳамма вақт икки қисмга — тизимнинг бир бутун ҳолдаги ҳаракатига ва унинг таркибидаги жисмларнинг бир-бирига нисбатан ҳаракатига ажратиш мумкин. Тизимдаги жисмларнинг нисбий ҳаракатини таҳлил қилишда инерция маркази билан боғланган саноқ тизимидан фойдаланилади. Бу тизимдаги барча жисмларнинг исталган пайтдаги вазияти инерция марказига нисбатан аниқланади, яъни тизимдаги жисмларга нисбатан инерция маркази қўзғалмас деб қаралади. Бу саноқ тизимини инерция маркази саноқ тизими дейилади. У қисқача *М*-тизим деб номланган. *М*-тизим инерциал саноқ тизимидир, чунки у бошқа инерциал саноқ тизимларига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади ёки ўзининг тинч ҳолатини сақлайди. Бошқача айтганда, *М*-тизимга ташқи кучлар таъсир этмайди, бинобарин, у берк тизимдир.

М-тизимнинг бошқа тизимлардан фарқли хусусиятларидан бири шундан иборатки, унинг бир бутун ҳолдаги импульси ($\vec{p}=m\vec{v}_c$) нолга тенг [(4.18) формулага қ.], чунки $\vec{v}_c=0$.

Элементар заррачаларнинг ўзаро таъсирлашиш жараёнини таҳлил этишда ва қаттиқ жисмларнинг ҳаракатини ўрганишда *М*-тизим кенг қўлланилади.

V БОБ

ИМПУЛЬС МОМЕНТИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

5.1-§. ИМПУЛЬС МОМЕНТИ

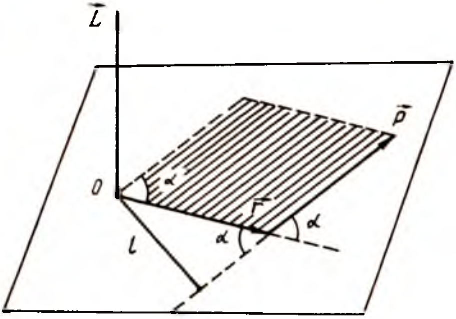
Моддий нуқтанинг импульси $\vec{p}=m\vec{v}$. Фараз қилайлик, массаси m бўлган ҳаракатдаги моддий нуқта (заррача)нинг ихтиёрий пайтдаги вазияти O нуқтага нисбатан аниқланаётган бўлсин (5.1-расм).

Моддий нуқтанинг O нуқтага нисбатан импульс моменти деб қуйидагича ифодаланган векторга айтилади:

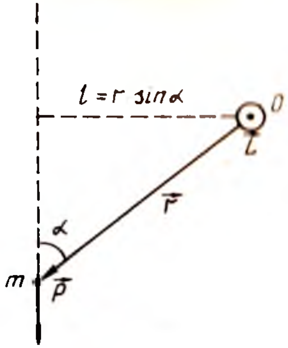
$$\vec{L}=[\vec{r},\ \vec{p}]=[\vec{r},\ m\vec{v}], \tag{5.1}$$

бунда $\vec{r}$ — саноқ боши ҳисобланган O нуқтадан моддий нуқтага ўтказилган радиус-вектор. (5.1)дан кўриниб турибдики, $\vec{L}$ нинг йўналиши $\vec{r}$ ва $\vec{p}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси тарзида аниқланади, яъни импульс моменти вектори $\vec{r}$ ва $\vec{p}$ векторлардан ясалган параллелограмм текислигига тик равишда O нуқтадан ўтган бўлиб, унинг йўналиши парма (ўнг винт) қоидаси билан аниқланади. Импульс моментининг сон қиймати, маълумки,

$$L=rp\sin\alpha. \tag{5.2}$$



5.1-расм



5.2-расм

Бу тенгликда $r\sin\alpha = l$ — моддий нуқта импульсининг O нуқтага нисбатан елкаси дейилади. Елка тушунчасини киритиб (5.2)ни

$$L = lp = mv\,l \tag{5.3}$$

кўринишда ёзиш мумкин (5.2- расмда $\vec{L}$ вектор расм текислигига тик равишда биз томонга йўналган). Охирги икки тенгликдан кўринадики, импульс моменти моддий нуқта ҳаракат йўналишининг ва тезлигининг сон қиймати ўзгариши билан ўзгаради; агар моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса O нуқтага нисбатан унинг импульс моменти ўзгармай қолади.

Моддий нуқта радиуси $\vec{r}$ бўлган айлана бўйлаб ўзгармас тезлик ($|\vec{v}| = \text{const}$) билан ҳаракатланаётган бўлса (Ернинг Қуёш атрофидаги ҳаракати ва мутақаббил (классик) физика тасаввурларига кўра электронларнинг ядро атрофидаги ҳаракати бунга мисол бўла олади), унинг айлана марказига нисбатан (5.3- расм) импульсининг сон қиймати:

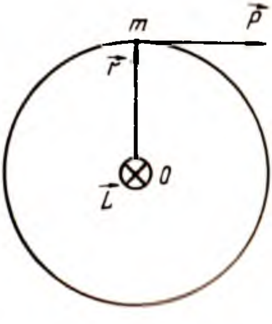
$$L = mvr. \tag{5.4}$$

Равшанки, бу ҳолда моддий нуқтанинг ҳаракат йўналиши узлуксиз ўзгариб турсада, импульс моментининг сон қиймати ўзгармай қолади.

O нуқта орқали ўтувчи ихтиёрий Z ўққа $\vec{L}$ векторнинг проекцияси моддий нуқтанинг шу ўққа нисбатан импульс моменти дейилади:

$$L_z = [\vec{r},\ \vec{p}]_z. \tag{5.5}$$

Ўққа нисбатан импульс моменти скаляр катталик бўлиб, нуқтага нисбатан импульс моменти эса вектор катталикдир.



5.3-расм

Моддий нуқталар тизимининг бирор O нуқтага нисбатан *импульс моменти* деб мазкур тизимдаги айрим моддий нуқталарнинг ўша O нуқтага нисбатан импульс моментларининг вектор йиғиндисига айтилади:

$$\vec{L}=\sum_i L_i=\sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i]=\sum_i [\vec{r}_i, m\vec{v}_i], \qquad (5.6)$$

бунда $\vec{r}_i$ — қаралаётган O нуқтадан i- моддий нуқтага ўтказилган радиус-вектор, $\vec{v}_i$ — ўша i- моддий нуқта (зарра)нинг тезлиги.

5.2- §. КУЧ МОМЕНТИ

Тинч турган жисмни айланма ҳаракатга келтирувчи ёки унинг айланма ҳаракатини ўзгартирувчи ташқи таъсирни тавсифлаш учун куч моменти деган тушунча киритилади. Куч моменти бирор нуқтага нисбатан ёки бирор айланиш ўқига нисбатан аниқланади.

Қаттиқ жисм моддий нуқталар тизимидан иборат бўлганлигидан куч моменти тушунчасини дастлаб моддий нуқта мисолида қараб чиқайлик. Массаси m бўлган моддий нуқтанинг исталган вақтдаги вазияти саноқ боши сифатида қабул қилинган O нуқтага нисбатан радиус-вектор $\vec{r}$ орқали аниқланаётган бўлсин. Моддий нуқтага қандайдир $\vec{F}$ куч таъсир этаётган бўлса, $\vec{r}$ радиус-векторнинг $\vec{F}$ кучга вектор кўпайтмаси (5.4- расм) $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моменти дейилади:

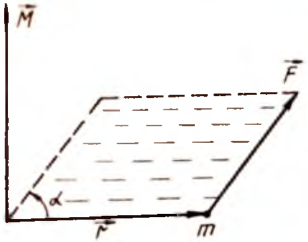
$$\vec{M}=[\vec{r},\vec{F}], \qquad (5.7)$$

бунда $\vec{F}$— моддий нуқтага таъсир этувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисидир. Куч моменти $\vec{M}$ псевдовектор бўлиб, у $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлар ётган текисликка тик йўналган, йўналиши эса ўнг винт қоидаси билан аниқланади, яъни ўнг винтни $\vec{r}$ дан $\vec{F}$ га қараб бураганда винтнинг илгариланма ҳаракати $\vec{M}$ нинг йўналиши билан мос тушади. Куч моментининг сон қиймати, равшанки,

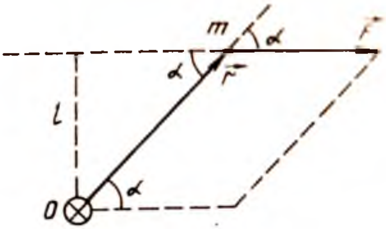
$$M=Fr\sin\alpha=Fl, \qquad (5.8)$$

бу ерда α — $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлар орасидаги бурчак; $l=r\sin\alpha$ эса O нуқтадан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғига туширилган тик чизиқнинг узунлиги (O нуқтадан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғигача бўлган энг яқин масофа) бўлиб, у куч елкаси дейилади (5.5- расм; $\vec{L}$ вектор расм текислигига тик равишда биздан қарама-қарши томонга қараб йўналган).

Ўққа нисбатан куч моменти нуқтага нисбатан куч моментининг шу нуқтадан ўтувчи ўққа туширилган проекциясига тенг бўлади. Ўққа нисбатан куч моменти скаляр катталикдир. Агар



5.4-расм



5.5-расм

Z ўқ $\vec M$ векторнинг йўналиши билан мос тушса, у ҳолда куч моменти ўқ йўналишидаги вектор тарзида ифодаланиши мумкин:

$$\vec M_z=[\vec r,\vec F]_z. \tag{5.9}$$

Энди n та моддий нуқтадан иборат тизимни олиб қарайлик. Тизимдаги i-моддий нуқтанинг O нуқтага нисбатан вазиятини $\vec r_i$ радиус-вектор билан ва унга таъсир қилувчи кучни $\vec F_i$ орқали белгиласак,O нуқтага нисбатан мазкур кучнинг моменти

$$\vec M_i=[\vec r_i, \vec F_i]$$

тарзда ифодаланади. O нуқтага нисбатан моддий нуқталар тизимига таъсир этувчи куч моментини тавсифлашда барча моддий нуқталарни O нуқтага нисбатан бир бутун (яхлит) тарзда олиб қаралади (қаттиқ жисмни моддий нуқталар тизими деб қараш мумкин). O нуқтага нисбатан моддий нуқталар тизимига таъсир этувчи куч моменти деб ҳар бир моддий нуқтага қўйилган куч моментларининг вектор йиғиндисига айтилади:

$$\vec M=\sum_i \vec M_i=\sum_i[\vec r, \vec F_i], \tag{5.10}$$

бунда $\vec F_i$ — i- моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучнигина ифодалайди. Шу нарсани алоҳида таъкидлаш лозимки, тизимдаги ҳар бир моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучдан ташқари, моддий нуқталарнинг ўзаро таъсири туфайли вужудга келувчи кучлар ҳам мавжуд. Маълумки, бу кучлар ички кучлар дейилади. Ички кучларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг ((4.8)га қ.) бўлганлиги туфайли (5.10) ифодада фақат ташқи кучларгина акс эттирилган.

5.3- §. ИМПУЛЬС МОМЕНТИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ. МОМЕНТЛАР ТЕНГЛАМАСИ

Юқорида биз моддий нуқталар тизими учун импульс моменти ва куч моменти деган катталиклар билан танишдик. Бу катталикларда моддий нуқтанинг исталган пайтдаги вазиятини аниқловчи радиус вектор (r) қатнашади. Бинобарин, импульс моменти ва куч моменти ўзаро бирор муносабат билан боғланган. Шу муносабатни аниқлаш лик. Фараз қилайлик, массаси m ва тезлиги $\vec{v}$ бўлган моддий нуқтага саноқ боши O га нисбатан қандайдир $\vec{F}$ куч таъсир қилаётган бўлсин (5.6- расм). Натижада моддий нуктанинг импульси ва ихтиёрий O нуқтага нисбатан унинг импульс моменти ўзгариб боради, яъни $\vec{L}=[\vec{r}, \vec{p}]$ вақтнинг функциясидир. Айтайлик, моддий нуқтанинг вазиятини аниқловчи радиус-вектор dt вақт оралиғида $d\vec{r}$ га ўзгарсин; у ҳолда (5.1) тенгликдан вақт бўйича ҳосила олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}]=[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}]+[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}], \qquad (5.11)$$

бунда $d\vec{r}/dt$ — моддий нуқтанинг t пайтдаги тезлиги $(d\vec{r}/dt=\vec{v})$; $\frac{d\vec{p}}{dt}$ эса Ньютоннинг II қонунига кўра, моддий нуқтага таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси. Буларни ва $\vec{p}=m\vec{v}$ эканлигини назарда тутиб, (5.11)ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=[\vec{v}, m\vec{v}]+[\vec{r}, \vec{F}].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи ҳад иккита коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси бўлганлиги туфайли нолга тенг; иккинчи қўшилувчи ҳад эса моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан моменти $(\vec{M})$ни ифодалайди. Шунинг учун юқоридаги тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}. \qquad (5.12)$$

Бу ифода моддий нуқта учун моментлар тенгламаси дейилади. (5.12) дан кўринадики, импульс моментининг вақт бўйича ўзгариши моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан моменти билан аниқланади (моментлар тенгламасининг Ньютоннинг иккинчи қонунига ўхшашлиги кўзга ташланади: моддий нуқта импульсининг вақт бўйича ўзгариши унга таъсир этаётган барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг).

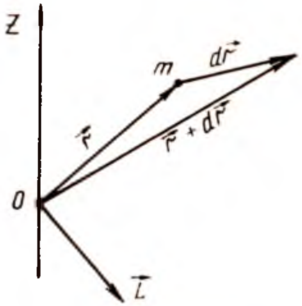
Моддий нуқтага таъсир этувчи барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг O нуқтага нисбатан моменти нолга тенг $(\vec{M}=0)$ бўлса, (5.12) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0. \qquad (5.13)$$

Ўзгармас катталикнинг вақт бўйича ҳосиласи нолга тенг эканлигини назарда тутсак, (5.13)дан

$$\vec{L}=\text{const} \qquad (5.14)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу натижа моддий нуқта импульс моментининг сақланиш қонунини ифодалайди: *моддий нуқтага таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчисининг ихтиёрий О нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлса моддий нуқта импульсининг шу нуқтага нисбатан моменти вақт ўтиши билан ўзгармайди.*



5.6-расм

Моддий нуқтанинг импульс моменти ихтиёрий O нуқтадан ўтувчи бирор ўққа (масалан Z ўққа, 5.6-расм) нисбатан аниқланаётган бўлса, (5.12) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \qquad (5.15)$$

бунда L_z ва M_z — $\vec{L}$ ва $\vec{M}$ векторларнинг мос равишда Z ўққа туширилган проекциялари. Шундай қилиб, ўққа нисбатан импульс моментининг вақт бўйича ўзгариши моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар моментининг мазкур ўққа туширилган проекциясига тенг экан.

Энди моддий нуқталар тизимини олиб қарайлик. Умуман, тизимдаги ҳар бир моддий нуқтага ташқи ва ички кучлар таъсир этади. Ички кучлар тизимдаги моддий нуқталарнинг ўзаро таъсир кучларидан иборат бўлганлиги туфайли уларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг ва бинобарин, ички кучларнинг O нуқтага нисбатан моменти ҳам нолга тенг. Шунинг учун тизимга таъсир этувчи кучлар фақат ташқи кучлардан иборат бўлади. Демак, n та моддий нуқталар тизими учун (5.12) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{M}_i \qquad (5.16)$$

Бунда $\sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}, m\vec{v}_i]$ — тизимнинг ихтиёрий O нуқтага нисбатан импульс моменти. (5.16) тенглик моддий нуқталар тизими учун моментлар тенгламасини ифодалайди.

Шундай қилиб, *моддий нуқталар тизимининг ихтиёрий О нуқтага нисбатан импульс моментидан вақт бўйича олинган ҳосила барча ташқи кучларнинг шу нуқтага нисбатан куч моментларининг вектор йиғиндисига тенг.*

(5.16) ифодадаги барча вектор катталикларнинг ихтиёрий O нуқта орқали ўтувчи Z ўққа проекцияси олинса, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i L_{iz} = \sum_i M_{iz}, \qquad (5.17)$$

яъни, тизимдаги моддий нуқталарнинг O нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан импульс моментларининг алгебраик йиғиндисининг вақт бўйича ўзгариши шу ўққа нисбатан олинган куч моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Агар моддий нуқталар тизими берк бўлса (тизимга ташқи кучлар таъсир қилмаса), (5.16) ифоданинг ўнг томони нолга тенг бўлади: бундан

$$\sum_i \vec{L}_i = \text{const} \tag{5.18}$$

деган хулосага келамиз. (5.18) тенглик моддий нуқталар тизими учун импульс моментининг сақланиш қонунини ифодалайди: *моддий нуқталар берк тизимининг ихтиёрий О нуқтага нисбатан импульс моменти вақт ўтиши билан ўзгармайди.* Бу натижа моддий нуқталар берк тизимининг О нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан импульс моменти учун ҳам ўринлидир: *тизимга таъсир этувчи ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлса, бу кучлар тизимнинг шу ўққа нисбатан импульс моментини ўзгартира олмайди.*

5.4-§. МАРКАЗИЙ МАЙДОНДАГИ ҲАРАКАТ. КЕПЛЕР ҚОНУНЛАРИ

Фазонинг ҳар бир нуқтасида моддий нуқтага қандайдир кучлар (ёки куч) таъсир этаётган бўлса, демак бу моддий нуқта кучлар майдонида бўлади. Марказий майдондаги ҳаракатда моддий нуқтага марказий кучлар таъсир этади. Марказий кучларга хос хусусият шундан иборатки, бу кучларнинг барчаси қўзғалмас марказ (қўзғалмас нуқта)дан ўтиб, бу кучларнинг катталиги марказ билан моддий нуқта орасидаги масофага боғлиқ. Бу қўзғалмас марказ куч маркази дейилади. Бирор моддий нуқта (жисм) атрофида ҳосил бўлган гравитация майдони, нуқтавий заряд ҳосил қилган электростатик майдон ва шу каби майдонлар марказий майдонлардир. Хусусан, Қуёш тизимидаги сайёраларнинг ўз меҳварлари бўйлаб ҳаракати марказий майдондаги ҳаракат бўлиб, биз қуйида уларнинг ҳаракатидаги қонуниятларни қараб чиқамиз.

Қуёш ва сайёралар орасидаги масофа уларнинг ўлчамларига нисбатан анча катта бўлганлигидан уларни моддий нуқта деб қараш мумкин. Қуёшнинг массасини m_0 ва унинг атрофида айланувчи бирор сайёранинг массасини m билан белгиласак, улар орасидаги тортишиш (гравитация) кучи

$$F = \gamma \frac{m_0 m}{r^2} \tag{5.19}$$

тарзида ифодаланади (бутун олам тортишиш қонуни). Бу куч майдони марказий майдондир, чунки ҳар бир сайёрага таъсир этувчи куч Қуёш марказидан ўтади ва бинобарин, мазкур кучнинг елкаси нолга тенг. Демак

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0.$$

Бундан ва моментлар тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}=0 \qquad \vec{L}=m[\vec{r}, \vec{v}]=L_0=\text{const}, \qquad (5.20)$$

яъни Қуёш тизимидаги ҳар бир сайёранинг импульс моменти вақт ўтиши билан ўзгармайди. (5.20) тенгликдан кўринадики, марказий майдондаги ҳаракат траекторияси $\vec{L}$ га тик жойлашган ясси текислик ($\vec{r}$ ва $\vec{v}$ векторлар ётган текислик)да ётади. Бундай ҳаракат ясси ҳаракат дейилади.

Юқорида келтирилган бутун олам тортишиш қонуни (5.19)ни келтириб чиқаришда Ньютон сайёраларнинг ҳаракати ҳақидаги Кеплернинг учта қонунига асосланган. **Кеплер қонунлари** қуйидагилар:

1. *Барча сайёраларнинг орбиталари эллипсдан иборат бўлиб, унинг бир фокусида Қуёш жойлашган.*

2. *Сайёранинг радиус-вектори тенг вақтлар оралиғида тенг юзалар чизади.*

3. *Сайёраларнинг айланиш даврлари квадратларининг эллиптик орбиталар катта ярим ўқларининг кубларига нисбати барча сайёралар учун бир хил:*

$$\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}=...=\text{const}.$$

Биз қуйида марказий майдондаги ҳаракат хусусиятларидан ва Қуёш атрофида айланувчи сайёралар энергияларининг ҳамда импульс моментларининг сақланиш қонунларидан фойдаланиб, Кеплер қонунларини асослаймиз. Дастлаб унинг иккинчи қонунини қараб чиқамиз.

Кеплернинг иккинчи қонуни. Сайёраларнинг ҳаракати давомида унинг $\vec{r}$ радиус-вектори dt вақт давомида $d\varphi$ бурчакка бурилади. Шу вақт давомида $\vec{r}$ чизган секторнинг юзи (5.7- расм):

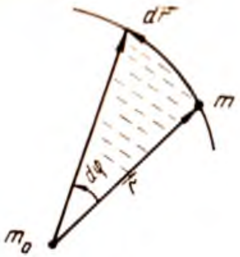
$$d\vec{S}=\frac{[\vec{r}, d\vec{r}]}{2}$$

Бу тенгликдан вақт бўйича ҳосила олиб, уни сайёранинг массаси m га кўпайтирамиз:

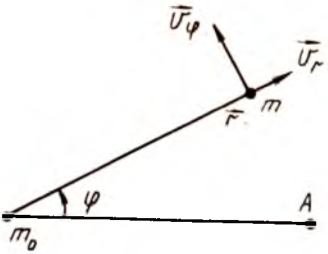
$$2m\frac{d\vec{S}}{dt}=m\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{r}\right]+m\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right]; \qquad (5.21)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи ҳад иккита коллинеар векторнинг вектор кўпайтмаси бўлгани туфайли, у нолга тенг; иккинчи ҳаддаги $\frac{d\vec{r}}{dt}$ — сайёранинг тезлигини ифодалайди (яъни $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$); $\frac{d\vec{S}}{dt}$ — сектор тезлик дейилади. Шундай қилиб, (5.21) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$2m\frac{d\vec{S}}{dt}=m[\vec{r}, \vec{v}] \quad \text{ёки} \quad \frac{d\vec{S}}{dt}=\frac{\vec{L}_0}{2m}=\text{const}. \qquad (5.22)$$



5.7-расм



5.8-расм

Охирги тенгликнинг ўнг томони ўзгармас катталиклардан иборат бўлганлигидан қуйидаги хулосага келамиз: *марказий майдондаги ҳаракатда сайёранинг сектор тезлиги ўзгармайди.*

Энди (5.22) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$dS = \frac{L_0}{2m}\,dt \qquad \text{ёки} \qquad \Delta S = \frac{L_0}{2m}\,\Delta t. \tag{5.23}$$

(5.22) ва унга мукобил (5.23) тенгликлар Кеплернинг иккинчи қонунини ифодалайди: *сайёранинг ҳаракати давомида унинг радиус-вектори тенг вақтлар оралиғида тенг юзалар чизади.*

Кеплернинг биринчи қонуни. Сайёраларнинг ҳаракати ясси ҳаракат бўлганлиги туфайли бундай ҳаракатни баён қилишда қутб координаталари $\vec{r}$ ва φ дан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. 5.8- расмда m_0 ва m орқали Қуёш ва бирор сайёранинг t вақтдаги вазияти акс эттирилган; бунда $\vec{r}$ — Қуёшдан сайёрагача бўлган масофа (радиус-вектор); φ — қутб бурчаги (унинг катталиги шартли равишда саноқ боши деб ҳисобланган қутб ўқи m_0A га нисбатан соат мили йўналишига тескари йўналишда олинади).

Сайёранинг ўз мехвари бўйлаб ҳаракат тезлигини бири радиус-вектор r йўналишида, иккинчиси унга тик йўналишда бўлган ўзаро тик иккита ташкил этувчига ажратиш мумкин (5.8- расм):

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$$

ёки

$$\vec{v} = v_r\vec{i} + v_\varphi\vec{j} = r\vec{i} + r\dot{\varphi}\vec{j}, \tag{5.24}$$

бунда $\vec{v}_r = v_r\vec{i}$ — Қуёшдан сайёрагача бўлган масофанинг ўзгариши билан, $v_\varphi = v_\varphi\vec{j}$ эса φ бурчакнинг ўзгариши билан боғлиқ тезликлар; $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ мос равишда $\vec{v}_r$ ва $\vec{v}_\varphi$ йўналишдаги бирлик векторлар ((5.24) ифодада $v_\varphi = \omega \cdot r = r\dot{\varphi}$ эканлиги эътиборга олинди).

Энди сайёранинг импульс моментини қутб координаталарида ифодалаймиз. (5.24) ни (5.20) га қўйиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}] = m[\vec{r}, \vec{v}_r] + m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi]; \tag{5.25}$$

$\vec{r}$ ва $\vec{v}_r$ коллинеар (бир хил йўналишдаги) векторлар бўлганлиги учун охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи ҳам нолга тенг эканлигини ва (5.24)ни назарда тутсак, сайёранинг импульс моменти қуйидаги кўринишга келади:

$$\vec{L}=m[\vec{r},\vec{v}_\varphi]=m[\vec{r},r\dot{\varphi}\vec{j}]=mr\dot{\varphi}[\vec{r},\vec{j}];$$

$\vec{r}$ ҳамда $\vec{j}$ векторлар ўзаро тик ва $[\vec{r},\vec{j}]$ нинг йўналиши $\vec{L}$ билан бир хил бўлиб, сон қиймати r га тенг. Шундай қилиб, сайёранинг импульс моментининг сақланиш қонуни қутб координаталар тизимида қуйидагича ифодаланади:

$$L=mr^2\dot{\varphi}=L_0=\mathrm{const}. \qquad (5.26)$$

(5.24) ни назарда тутиб, сайёранинг кинетик энергиясини қутб координаталари орқали

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{r}\vec{i}+r\dot{\varphi}\vec{j})^2=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} \qquad (5.27)$$

кўринишда ёзамиз (бунда ўзаро тик $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг эканлиги эътиборга олинди). Марказий майдонда ҳаракат қилаётган сайёранинг потенциал энергияси манфий, чунки мазкур майдонда жисмга таъсир этувчи кучлар консерватив кучлардир ((6.25) га қ.):

$$E_п=-\gamma\frac{m_0m}{r}$$

(m_0 ва m — мос равишда Қуёшнинг ва сайёранинг массаси). Шундай қилиб, марказий майдонда ҳаракатланаётган сайёранинг тўла энергиясининг ва импульс моментининг сақланиш қонуни қуйидагича ифодаланади:

$$E_0=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-\gamma\frac{m_0m}{r}=\mathrm{const}, \qquad (5.28)$$

$$L_0=mr^2\dot{\varphi}=\mathrm{const}. \qquad (5.29)$$

Бу тенгламаларда вақт бўйича олинган ҳосилаларни бурчак φ бўйича олинган ҳосилалар билан алмаштирамиз. Бунинг учун $\dot{\varphi}=L_0/mr^2$ эканини эътиборга олиб, (5.28)дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$(\dot{r})^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}E_0+\gamma\frac{2m_0}{r}-\frac{L_0^2}{m^2r^2},$$

бундан

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}E_0+\gamma\frac{2m_0}{r}-\frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \qquad (5.30)$$

Энди (5.29) ни

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}\,dt$$

кўринишда ёзамиз ва ундаги dt ўрнига (5.30) ни қўйиб ҳамда уни интеграллаб,

$$\varphi = \int \frac{L_0 dr/r^2}{\sqrt{2mE_0 + (2m_0m^2\gamma/r) - L_0^2/r^2}}. \tag{5.31}$$

ни ҳосил қиламиз. Илдиз остидаги ифодани

$$2mE_0 + \frac{m_0^2m^4}{L_0^2}\gamma^2 - \frac{L_0^2}{r^2} + \frac{2m_0m^2}{r}\gamma - \frac{m_0^2m^4}{L_0^2}\gamma^2$$

тарзда ёзиб, сўнгра

$$\eta = \frac{L_0}{r} - \frac{m_0m^2}{L_0}\gamma; \quad \delta^2 = 2mE_0 + \frac{m_0^2m^4}{L_0^2}\gamma^2 \tag{5.32}$$

алмаштиришларни киритсак ($d\eta = -L_0dr/r^2$), (5.31) ифода «жадвал» интеграли, яъни

$$\varphi = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{\delta^2 - \eta^2}} \tag{5.33}$$

кўринишга келади. Бинобарин,

$$\varphi = -\arcsin\frac{\eta}{\delta} + \varphi_1 = \arccos\frac{\eta}{\delta} + \varphi_0, \tag{5.34}$$

(бунда $\varphi_0 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$). φ_0 нинг қиймати ҳисоб бошини танлашга боғлиқ: ҳисоб бошини шундай танлайликки, $\varphi_0 = 0$ бўлсин. η, δ ва $d\eta$ ларнинг қийматларини (5.34)га қўйсак,

$$\varphi = \arccos\frac{(L_0/r) - (m_0m^2/L_0)\gamma}{\sqrt{2mE_0 + (m_0^2m^4/L_0^2)\gamma^2}}$$

бўлади. Арккосинус остидаги касрнинг сурат ва махражини $\frac{L_0}{m_0m^2\gamma}$ га кўпайтириб, (5.34)ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi = \arccos\frac{(L_0^2/m_0m^2r\gamma) - 1}{\sqrt{(2L_0^2E_0/m_0^2m^3\gamma^2) + 1}},$$

бу ифодада

$$p = \frac{L_0^2}{m_0m^2\gamma}; \tag{5.35}$$

$$e = \sqrt{(2E_0L_0^2/m_0^2m^3\gamma^2)+1} \tag{5.36}$$

белгилашларни киритамиз, у ҳолда

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{e}. \tag{5.37}$$

Бундан

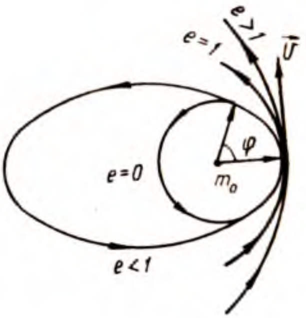
$$\cos\varphi = \frac{\frac{p}{r}-1}{e} \quad \text{ва} \quad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \tag{5.38}$$

келиб чиқади. (5.38) қутб координаталари орқали ифодаланган конус кесимнинг куч маркази (Қуёш)га нисбатан тенгламасидир (бу натижа Кеплернинг I қонунидир); хусусий ҳолда (5.38) *эллипс тенгламаси, р* — унинг *параметри, е* — эллипснинг *эксцентриситети* дейилади. (5.38) дан кўринадики, φ бурчакни ўлчаш сайёра радиус-вектори ($\vec r$) нинг шундай вазиятидан бошланадики, ўша вазиятда $\vec r$ нинг узунлиги $p/(1+e)$ га тенг бўлади.

Конус кесимнинг шакли эксцентриситетнинг катталигига боғлиқ ҳолда ҳар хил бўлиши мумкин, (5.36) ни

$$e^2 - 1 = \frac{2L_0^2E_0}{m_0^2m^3\gamma^2}$$

шаклда ёзсак, ундан кўринадики, $E_0 = -\frac{m_0^2m^3\gamma^2}{2L_0^2}$ бўлса, $e=0$ бўлади (яъни орбита айланадан иборат); $E_0>0$ бўлса, $e>1$ (гипербола); $E_0<0$ бўлса $e<1$ (эллипс); $E_0=0$ бўлса $e=1$ (парабола) бўлади (5.9- расм). $E_0<0$ бўлганда траектория эллипс бўлиши (5.28)га кўра $\frac{mv^2}{2}<\gamma\frac{m_0m}{r^2}$ эканлигини билдиради.



5.9-расм

Кеплернинг учинчи қонуни. Сайёранинг сектор тезлиги $\frac{d\vec S}{dt}$ бўлса, эллипс бўйлаб тўла айланиш даври T давомида радиус-вектор чизган юзанинг катталиги

$$S = \frac{dS}{dt}T$$

бўлади. (5.22)ни эътиборга олиб, бу тенгликни

$$S = \frac{L_0}{2m}T \tag{5.39}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Иккинчи томондан, ярим ўқлари a ва b бўлган эллипснинг юзи

$$S=\pi ab. \tag{5.40}$$

Аналитик геометриядан маълум бўлган $b=a\sqrt{1-e^2}$ ва $b^2=ap$ муносабатларни ҳамда (5.35)ни эътиборга олиб, (5.40)ни қуйидагича ёзамиз:

$$S=\pi a\sqrt{ap}=\pi a\sqrt{(aL_0^2)/m_0m^2\gamma}. \tag{5.41}$$

(5.39) ва (5.41) дан

$$T=2\pi ma\sqrt{a/m_0m^2\gamma},$$

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{m_0\gamma}=\text{const} \tag{5.42}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу Кеплернинг III қонунидир. Шундай қилиб, марказий майдондаги ҳаракатда энергиянинг ва импульс моментининг сақланиш қонунларидан мантиқий равишда Кеплер қонунлари келиб чиқар экан.

5.5-§. КОИНОТГА ЧИҚИШ ТЕЗЛИКЛАРИ

Табиат ҳодисаларини ўрганиш мақсадида кўп асрлар давомида ўтказилган тадқиқотлар ва тажрибалар Ер сиртида мавжуд бўлган шароитда амалга оширилган эди. Ер — Қуёш тизимидаги сайёралардан бири бўлиб, мазкур тизимда кичик соҳани ташкил этади. Шу билан бирга, Қуёш тизими ҳам ўз навбатида Коинотнинг кичик бир қисми ҳисобланади. Коинот сирларини ўрганиш муаммоси Коинотга парвоз қилишни тақозо қилади. Ҳозирги замон фан ва техникаси тараққиёти бундай парвозларни амалга ошириш учун дастлабки имкониятларни яратди ҳамда Ернинг сунъий йўлдошларининг учирилиши мазкур йўналишда қилинган биринчи қадам бўлди.

Жисм (ёки фазовий кема) Ернинг сунъий йўлдошига айланиши учун унга муайян бошланғич тезлик бериш лозим. Мазкур тезлик биринчи коинот тезлиги дейилади. Шу тезликни аниқлайлик. Массаси m бўлган жисм Ернинг атрофида айлана бўйлаб ҳаракатланиши учун унга таъсир қилувчи марказга интилма куч сон жиҳатдан жисмнинг оғирлик кучига тенг бўлиши керак (ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаймиз):

$$\frac{mv_1^2}{R}=mg, \tag{5.43}$$

бунда R — айлананинг радиуси бўлиб, амалий жиҳатдан Ернинг радиусига яқин ($R\approx R_E=6371$км), g — жисмнинг эркин тушиш тезланиши. (5.43)дан

$$v_1=\sqrt{gR}\approx 7{,}9\cdot 10^3\text{м/с}\approx 8\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Ернинг сунъий йўлдоши ўз меҳвари (орбитаси) бўйлаб ҳаракатланиб турганда у Ернинг тортиш кучи таъсирида бўлади Коинотни ўзлаштиришдаги иккинчи қадам шундан иборатки, жисм ўз ҳаракати туфайли Ернинг тортиш кучини енгиб, Қуёшнинг сунъий йўлдошига айланиши керак. Бундай ҳаракат тезлиги иккинчи коинот тезлиги дейилади. Жисм бундай тезликка эришиши учун унинг тўла энергияси нолга тенг бўлиши, яъни

$$E_0 = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{m_E m}{R} = 0$$

тенглик бажарилиши лозим (бунда m_E — Ернинг массаси). Бундан

$$v_2^2 = \frac{2\gamma m_E}{R} \tag{5.44}$$

га эга бўламиз. Иккинчи томондан, Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши туфайли вужудга келган марказдан қочма куч (3.20) ни эътиборга олмаганда жисмга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучига, яъни оғирлик кучига тенг:

$$\gamma\frac{m_E m}{R^2} = mg, \quad \text{бундан} \quad \gamma\frac{m_E}{R} = gR. \tag{5.45}$$

(5.44) ва (5.45) дан иккинчи коинот тезлиги учун қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\sqrt{gR} = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Учинчи коинот тезлиги ҳам мавжуд. Жисм бундай тезликка эришганда у Ер ва Қуёшнинг тортиш кучини енгиб Қуёш тизими чегарасидан чиқиб кетади. Учинчи коинот тезлигини топиш учун (5.44) формулада Ернинг массаси ўрнига Қуёш массаси (M)ни (назарий жиҳатдан Қуёш тизимининг массасини); R ўрнига Ер орбитасининг радиусини олиш керак ($M = 1{,}97\cdot10^{30}$кг; $R = 1{,}5\cdot10^{11}$км):

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}97\cdot10^{30}/1{,}5\cdot10^{11}} =$$

$$4{,}2\cdot10^4 \text{м/с} = 42 \text{ км/с}.$$

Олинган бу натижа Ер қўзғалмас бўлган ҳол учун ўринлидир. Ернинг ўз орбитаси бўйлаб 30 км/с тезлик билан ҳаракат қилиши ва Қуёш тизимидаги барча жисмлар (сайёралар ва кометалар)нинг массаси эътиборга олинса, фазовий кема тезлигининг йўналиши Ернинг ўз орбитаси бўйлаб ҳаракат йўналишига нисбатан қандай бурчак ташкил этишига қараб v_3 тезликнинг катталиги 17 дан 73 км/с гача ўзгаради.

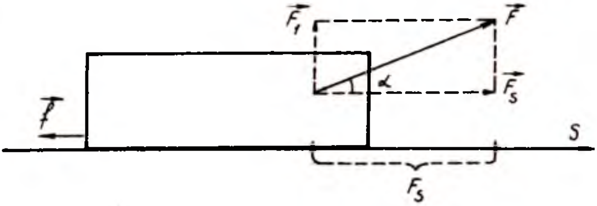
VI БОБ

ЭНЕРГИЯНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

6.1-§. ИШ ВА ҚУВВАТ. ЭНЕРГИЯ

Жисмлар бир-бири билан таъсирлашиши натижасида ҳаракат бир жисмдан иккинчисига узатилади. Ўзаро таъсир, маълумки, куч воситасида рўй беради, яъни куч таъсирида жисмнинг механикавий ҳаракати ўзгаради, аммо шуни ҳам назарда тутиш керакки, агар жисм тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда унга ҳеч қандай куч таъсир қилмаяпти деган хулоса келиб чиқмайди: жисмга таъсир этаётган кучлар бир-бирини мувозанатлайди. Масалан, стол устида тинч турган жисмнинг оғирлик кучи столнинг акс таъсир кучи билан мувозанатда бўлади. Бошқа ҳолларда ташқи куч таъсири ҳаракат билан боғлиқ бўлиб, мазкур ҳаракат туфайли жисм муайян вақт оралиғида бирор масофани босиб ўтади — ташқи куч иш бажаради.

Кундалик ҳаётимизда қўлланиладиган иш тушунчаси билан механикавий ҳаракат билан боғлиқ иш тушунчалари бир-биридан тубдан фарқ қилади; бу фарқ шундан иборатки, механикавий иш ҳаракат билан боғлиқ бўлиб, жисмларнинг бир жойдан иккинчи жойга кўчишида ташқи кучнинг бажарган иши билан ўлчанади.



6.1-расм

Тажрибаларнинг кўрсатишича, бажарилган иш жисм босиб ўтган йўлга ва унга таъсир этувчи ташқи кучга мутаносибдир. Доимий $\vec{F}$ куч таъсирида жисм тўғри чизиқли ҳаракат қилиб қандайдир s масофани босиб ўтса, бу кучнинг бажарган иши (6.1- расм)

$$A = Fs\cos\alpha \tag{6.1}$$

бўлади; бу ерда α — таъсир этувчи куч йўналиши билан ҳаракат йўналиши орасидаги бурчак, $F\cos\alpha = F_s$ — жисмга таъсир этувчи кучнинг ҳаракат йўналишига проекцияси эканлигини назарда тутиб, юқоридаги формулани қуйидагича ёзамиз:

$$A = F_s \cdot s. \tag{6.2}$$

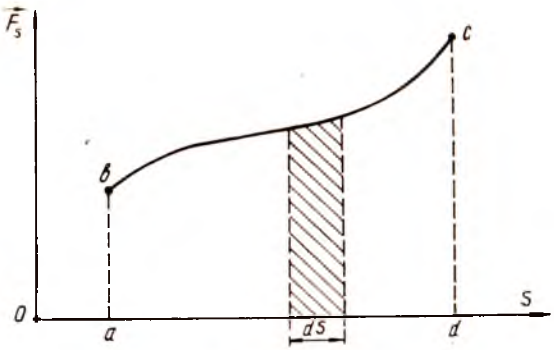
(6.1) формуладаги F куч жисмга таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисидир. Жисмга унинг ҳаракатига қаршилик кўрсатувчи ишқаланиш кучи f ҳам таъсир этади ва $\vec{f}$ нинг йўналиши ҳамма вақт $\vec{F}_s$ нинг йўналишига қарама-қаршидир (бу ерда $\vec{F}_s$ вектор катталик бўлиб, у $\vec{F}$ кучнинг ҳаракат йўналишидаги ташкил этувчисидир). Юқоридаги формуладан кўриниб турибдики, бажарилган иш α бурчакка боғлиқ: 1) $\alpha<\pi/2$ $(\cos\alpha>0)$ бўлса, бажарилган иш мусбат бўлади; 2) $\alpha>\pi/2$ $(\cos\alpha<0)$ бўлса, бажарилган иш манфийдир.

Бажарилган ишнинг мусбат ёки манфийлигини аникроқ тасаввур этиш учун мисоллар келтирайлик. Жисм $\vec{F}$ куч таъсирида ҳаракат қилаётганида, бу куч билан бир вақтда ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи ишқаланиш кучи $\vec{f}$ ҳам таъсир этади. Бу куч ҳаракат йўналишига нисбатан қарама-қарши томонга йўналган $(\alpha>\frac{\pi}{2})$ ва бу кучнинг бажарган иши манфийдир. Фараз қилайлик, $\vec{F}_s$ куч таъсирида жисм бирор текислик устида ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган бўлсин. У ҳолда Ньютоннинг биринчи қонунига асосан жисмга ҳеч қандай ташқи куч таъсир қилмаётган бўлиши ва (6.1) формулага асосан бажарилган иш ҳам нолга тенг бўлиши керак эди. Аслида эса бундай эмас. Бунинг боиси шундаки, бизнинг мисолимиздаги жисм ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётганида ташқи куч фақат ишқаланиш кучини мувозанатлаяпти, яъни $\vec{F}_s$ куч сон жиҳатдан ишқаланиш кучига тенг. Нақлиёт (транспорт) воситалари ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилаётганида ҳам моторнинг тортиш кучи ишқаланиш кучи билан мувозанатда бўлади. Демак, мотор кучининг бажарган иши мусбатдир. Яна бир мисол. Айтайлик, текис йўлда етарли даражада катта тезлик билан кетаётган автомобилнинг мотори ўчирилса ёки тормозланса, у бирор масофани ўтиб тўхтайди. Мазкур масофада унга фақат ишқаланиш кучи ҳамда ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади ва бу кучларнинг бажарган иши манфийдир. Демак, жисмнинг ҳаракатига қаршилик қилувчи кучларнинг бажарган иши манфийдир. Энди $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $(\cos\alpha=0)$ бўлган ҳолни қарайлик. Жисм айлана бўйлаб ўзгармас бурчак тезлик билан ҳаракатланганда унга фақат марказга интилма куч таъсир этади ва куч ҳамма вақт ҳаракат йўналишига тик йўналган. Бу кучнинг бажарган иши нолга тенг.

Умуман, жисмга таъсир этувчи куч ўзгариб туриши ва унинг ҳаракат траекторияси эгри чизиқдан иборат бўлиши мумкин. У ҳолда траекторияни хаёлан чексиз кичик элементар бўлакларга шундай бўламизки, бу бўлакча оралиғида жисмга таъсир этувчи кучни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин бўлсин. Бинобарин, элементар кўчишда бажарилган элементар ишни жисмга таъсир этувчи кучнинг элементар кўчишга скаляр кўпайтмаси тарзида ифодалаш мумкин, яъни:

$$dA=(\vec{F}\cdot ds)=F_s ds. \qquad (6.3)$$

Фараз қилайлик, F_s куч масофа бўйлаб 6.2- расмда кўрсатилганидек ўзгарсин (расмда абсцисса ўқи бўйлаб йўлнинг узунлиги



6.2-расм

қуйилган, a ва b нуқталар орасидаги масофа ихтиёрий шаклдаги йўлнинг узунлигига тенг). Бирор ds элементар кўчишда бажарилган dF элементар иш сон жиҳатдан қия чизиқлар билан ажратиб кўрсатилган юзачанинг катталигига тенг. Жисмнинг a нуқтадан d нуқтага кўчишида бажарилган иш барча элементар кўчишларда бажарилган ишларнинг йиғиндисига тенг бўлганлиги туфайли мазкур иш сон жиҳатдан $abcda$ юзанинг катталигига тенг бўлиб, қуйидаги интеграл орқали ифодаланади:

$$A=\int_a^d dA=\int_a^d F_s ds. \qquad (6.4)$$

Иш бирлиги қилиб бир бирликка тенг куч таъсирида жисмни бирлик масофага кўчиришда бажарилган иш қабул қилинган. Халқаро бирликлар тизими (СИ) да иш бирлиги қилиб бир Ньютон куч таъсиридаги йўналишда жисмни 1 метр масофага кўчиришда бажарилган иш қабул қилинган ва бу бирлик *жоуль* (Ж) дейилади.

$$1Ж=1Н\cdot1м.$$

Мисол: массаси 75 кг бўлган жисмни тик йўналишда 1 метр баландликка кўтаришда бажарилган иш — оғирлик кучига қарши қўйилган кучнинг 1 метр масофада бажарган ишидир. Мазкур куч сон жиҳатдан оғирлик кучига тенг бўлиб, йўналиши бўйича унга қарама-қаршидир, яъни:

$$A=mgh=75\ кг\cdot9{,}81 м/с^2\cdot1м=736Н\cdot м=736\ Ж.$$

СГС тизимида ишнинг ўлчов бирлиги — *эрг*. СИ ва СГС тизимларидаги ишнинг ўлчов бирликлари орасида қуйидаги муносабат мавжуд:

$$1Ж=1Н\cdot1м=1\cdot10^5 дина\cdot1\cdot10^2 см=10^7 эрг.$$

Амалий жиҳатдан, бажарилган ишнинг қийматини билишдан ташқари мазкур иш қанча вақт оралиғида бажарилганлигини билиш ҳам муҳим аҳамиятга эга. Вақт бирлиги давомида бажарилган ишга *қувват* дейилади. Агар dt вақт давомида dA иш бажарилса, қувват

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{6.5}$$

тарзда ифодаланади, яъни қувват бажарилган ишдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. (6.2) тенгликни (6.5) ифодага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(F_s ds) = F_s \cdot \frac{ds}{dt} = F_s \cdot v,$$

яъни берилган F_s куч таъсирида жисм катта тезлик билан ҳаракат қилиши учун механизмнинг қуввати ҳам катта бўлиши керак.

Қувват бирлиги сифатида СИда ватт (Вт) қабул қилинган: 1 ватт — 1 секунд давомида 1 жоуль иш бажарадиган қурилманинг ёки механизмнинг қувватидир:

$$1\text{Вт} = \frac{1\text{Ж}}{1\text{с}}.$$

Техникада баъзан тизимдан ташқари қувват бирлиги — от кучи (о.к.) ҳам қўлланилади. Бир от кучи — 1 секундда 736 Ж иш бажарадиган қурилманинг (механизмнинг) қувватидир. Юқорида келтирилган сонли мисолни назарда тутсак, 1 о.к.— массаси 75 кг бўлган жисмни 1 секунд давомида 1 метр баландликка кўтарадиган механизмнинг қувватидир.

Механикавий иш ва энергия деган икки тушунча ўзаро узвий боғлиқ тушунчалардир. Қуйидаги мисоллар орқали бу узвий боғланиш ҳақида тасаввур ҳосил қилиш мумкин. Манбалардан узатилаётган электр энергиясини истеъмол қилиб, уйимиздаги совутгич, кир ювиш машинаси, радио ва ойнаижаҳонлар ишлайди. Маълумки, ёнилғининг ёниш жараёнида ажралиб чиққан иссиқлик энергияси ҳисобига қишлоқ хўжалик машиналари, нақлиёт воситалари, кема ва тайёралар ҳаракатга келиб, иш бажаради. Соатнинг пружинасини бураб, муайян иш бажарамиз, шу иш ҳисобига соатда энергия тўпланади; тўпланган энергия эса механизмларнинг иш бажариши учун сарф бўлади. Баландликдан тушаётган сувнинг энергияси билан ГЭС ларнинг турбиналари ҳаракатга келади, яъни улар иш бажаради; бажарилган иш ҳисобига эса электр энергияси ҳосил бўлади; биз бу ерда сувнинг механикавий энергияси бажарилган иш воситасида электр энергиясига айланаётганини кўрамиз.

Шундай қилиб, бажарилган иш ҳисобига энергия ҳосил қилинади ва аксинча, энергия сарфлаб иш бажарилади. Бинобарин, *иш бажариш қобилияти энергия демакдир.*

Энергия йўқдан бор бўлмайди ва йўқолмайди, у фақат бир турдан бошқа турга ўтади. Биз қуйида механикавий энергиянинг фақат икки тури — кинетик ва потенциал энергиялар билан танишамиз. Бажарилган иш ҳисобига энергия ҳосил бўлишини ва аксинча, энергия сарфлаб иш бажарилишини назарда тутсак, иш ва энергия (шу жумладан кинетик ва потенциал энергиялар ҳам) бир хил ўлчов бирликларида — жоулларда ўлчанишини англаш қийин эмас.

6.2- §. КИНЕТИК ЭНЕРГИЯ

Ҳаракатдаги жисмнинг механикавий энергияси кинетик энергиядир. Умуман энергия жисмнинг иш бажариш қобилияти эканлигини назарда тутсак, кинетик энергияга қуйидагича таъриф бериш мумкин: *кинетик энергия деб ҳаракатланаётган жисмнинг иш бажариш қобилиятига айтилади.*

Бирор $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергияси қандай ифодаланади? Бу ифодани топиш учун дастлаб тинч турган ва массаси m бўлган жисмга ўзгармас ташқи $\vec{F}$ куч таъсир этаётган ҳолни қарайлик. Мазкур куч таъсирида жисм ҳаракатга келиб, dt вақт оралиғида ҳаракат йўналишида ds масофани босиб ўтади; натижада унинг тезлиги O дан $d\vec{v}$ га қадар ошади ва ташқи куч жисм устида мусбат иш бажаради. Ташқи куч dt вақт давомида жисм устида dA га тенг иш бажарса, шу вақт оралиғида унинг кинетик энергияси O дан dE_k га ошади. Бошқача айтганда, ташқи кучнинг бажарган иши жисмнинг кинетик энергиясининг орттирмасига тенг:

$$dA = dE_k \qquad (6.6)$$

Маълумки, F кучнинг жисмни $d\vec{s}$ га кўчиришда бажарган иши:

$$dA = (\vec{F}d\vec{s}) = Fds\cos\alpha = F_s ds,$$

бу ерда α — $\vec{F}$ ва $d\vec{s}$ векторлар орасидаги бурчак, $\vec{F}_s$ — жисмга таъсир этувчи кучнинг $d\vec{s}$ кўчишга проекцияси. Жисм ҳаракат қилаётган инерциал саноқ тизимида унга таъсир этувчи куч Ньютоннинг иккинчи қонуни:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

формула орқали ифодаланади. Мазкур кучнинг фақат ҳаракат йўналишига проекцияси

$$F_s = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

иш бажаради (бунда $d\vec{v}/dt$ — тезланишнинг ҳаракат йўналишига проекцияси). Бу кучнинг ds масофада бажарган иши:

$$dA = F_s ds = m\frac{dv}{dt}ds \qquad (6.7)$$

ds масофани жисм $v = ds/dt$ тезлик билан босиб ўтади ва бинобарин: $ds = vdt$; бу муносабатни (6.7) га қўйиб, ds масофада бажарилган иш учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$dA = m\frac{dv}{dt}vdt = mv\,dv. \qquad (6.8)$$

(6.6)га асосан (6.8) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$dE_к = mv\,dv. \qquad (6.9)$$

Бу муносабат F_s куч таъсирида жисм ds масофани босиб ўтганда унинг кинетик энергиясининг ўзгаришини ифодалайди. Жисм бу куч таъсирида муайян s масофани босиб ўтса, унинг кинетик энергияси:

$$E_K = \int dE_K = \int_0^v mv\,dv = \frac{mv^2}{2},$$

яъни

$$E_K = \frac{mv^2}{2}. \tag{6.10}$$

бўлади. Демак, $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергияси унинг массаси билан тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг, яъни массаси m бўлган жисм $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, унинг кинетик энергияси $mv^2/2$ га тенг. Иккинчи томондан, массаси m ва тезлиги $\vec{v}$ бўлган жисмни тўхтатиш учун ташқи кучлар $mv^2/2$ га тенг бўлган манфий иш бажариши лозим ва аксинча, массаси m бўлган тинч турган жисмни $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатга келтириш учун ташқи кучлар $\frac{mv^2}{2}$ га тенг бўлган мусбат иш бажариши лозим бўлади.

(6.10) формулани келтириб чиқаришда $\vec{F}$ куч таъсир этгунга қадар жисм тинч ҳолатда деб фараз қилган эдик. Энди куч таъсир этгунга қадар жисм қандайдир $\vec{v}_1$ тезлик билан ҳаракатланаётир ва ташқи куч таъсирида унинг тезлиги $\vec{v}_1$ дан $\vec{v}_2$ га қадар ошди, деб фараз қилайлик. Бу кучнинг бажарган иши жисм кинетик энергиясининг ўзгаришига тенг бўлади:

$$A = E_{K1} - E_{K2} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{6.11}$$

$\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган жисм импульсининг модули mv эканлигини назарда тутиб, унинг кинетик энергияси кўпинча қуйидагича ифодаланади:

$$E_K = \frac{p^2}{2m}. \tag{6.12}$$

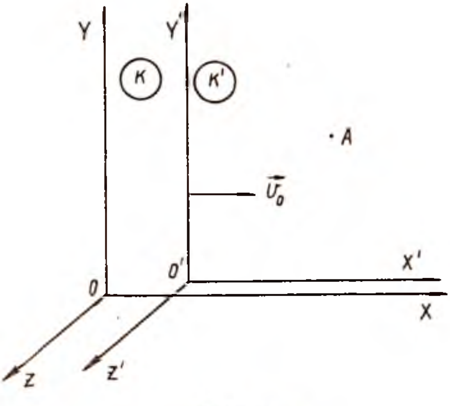
Шу пайтгача биз ҳаракатланаётган битта жисмнинг кинетик энергияси ҳақида мулоҳаза юритдик. Энди n та жисмдан (n та моддий нуқтадан) иборат тизимни олиб қарайлик. Ундаги i-жисмнинг массаси ва тезлиги мос равишда m_i ва $\vec{v}_i$ бўлса, тизимнинг кинетик энергияси:

$$E_K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{6.13}$$

тарзда ифодаланади, яъни тизимнинг кинетик энергияси уни ташкил этган жисмлар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг. Шуни эсда тутиш лозимки, тизимнинг импульси унинг таркибидаги жисмлар импульсларининг вектор йиғиндисига тенг; тизимнинг кинетик энергияси эса унинг таркибидаги жисмларнинг қайси йўналишда ҳаракатланаётганликларига боғлиқ эмас.

6.3- §. ТУРЛИ САНОҚ ТИЗИМЛАРИДАГИ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯЛАР ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

Маълумки, механикавий ҳаракат нисбий бўлганлиги туфайли жисмнинг фазодаги ҳар қандай ҳаракати ва тезлиги бирор инерциал саноқ тизимига нисбатан аниқланади. Юқорида кинетик энергияни ифодаловчи (6.10) ва (6.13) муносабатларда жисмларнинг тезликлари муайян инерциал саноқ тизимига нисбатан аниқланаётганлиги атайлаб эслатилмаса ҳам назарда тутилган. Чунки мазкур муносабатларни келтириб чиқаришда Ньютоннинг иккинчи қонунидан фойдаланилган, бу қонун эса инерциал саноқ тизимидагина ўринлидир. (3.5) формуладан кўринишича, бир-бирига нисбатан ҳаракатда бўлган турли инерциал саноқ тизимларида жисмларнинг тезлиги ва бинобарин, унинг кинетик энергияси турлича бўлади.



6.3-расм

Турли саноқ тизимларида жисмнинг кинетик энергиялари орасидаги боғланишни аниқлаш мақсадида бир-бирига нисбатан ҳаракатда бўлган K ва K' инерциал саноқ тизимларини олиб қарайлик (6.3- расм). K' саноқ тизими K га нисбатан X ўқига параллел йўналишда ўзгармас $\vec{v}_0$ тезлик билан илгариланма ҳаракатланаётган бўлсин. Дастлаб битта жисм (моддий нуқта A) нинг K ва K' саноқ тизимларидаги кинетик энергиялари орасидаги боғланишни топайлик. Жисм K' саноқ тизимига нисбатан $\vec{v}'$ тезлик билан X ўқи йўналишида ҳаракатланаётган бўлсин. У ҳолда унинг K га нисбатан тезлиги ((3.5) формулага қ.)

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_0$$

бўлади. Бу ифодани (6.10) га қўйсак жисмнинг K саноқ тизимидаги кинетик энергияси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$E_K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\vec{v}'+\vec{v}_0)^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}mv_0^2+m\vec{v}'\vec{v}_0, \qquad (6.14)$$

бунда E_K — жисмнинг K тизимдаги кинетик энергияси, $E'_K=$ $=\frac{1}{2}mv'^2$—унинг K' даги кинетик энергияси (бу формулада $\vec{v}'\vec{v}'=$ $=v'^2$; $\vec{v}_0\vec{v}_0=v_0^2$ эканлиги эътиборга олинди). Бундан ташқари $m\vec{v}'=\vec{p}'$ — жисмнинг K' тизимдаги импульси бўлганлиги учун

$$E_K=E'_K+\frac{mv_0^2}{2}+\vec{p}'\cdot\vec{v}_0. \qquad (6.15)$$

бўлади. Кўриниб турибдики, жисмнинг K тизимга нисбатан кинетик энергияси унинг K ва K' тизимлардаги кинетик энергияларининг оддий йиғиндисидан иборат эмас экан.

Энди битта жисмнинг K ва K' тизимлардаги кинетик энергияларини боғловчи (6.15) ифодани n та жисмдан иборат тизим учун қўлласак (бу ҳолда 6.3- расмда битта моддий нуқта (A) атрофида n та моддий нуқта жойлашган деб тушуниш керак), бу ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$E_K=\sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2}+\frac{v_0^2}{2}\sum_i m_i+\vec{v}_0\sum_i m_i\vec{v}_i, \tag{6.16}$$

бунда ўнгдаги биринчи қўшилувчи тизимнинг K даги кинетик энергияси (E'_k) ни ифодалайди; иккинчи қўшилувчи ҳаддаги йиғинди эса тизимдаги барча жисмларнинг умумий массасини ифодалайди (яъни $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i=m$) ва ниҳоят, охирги йиғинди $\vec{p}'=\sum\limits_i m_i\vec{v}_i$ – тизим импульсининг K' да ўлчанган қиймати. Шунинг учун (6.16) ифодани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$E_K=E'_K+\frac{mv_0^2}{2}+\vec{v}_0\cdot\vec{p}'. \tag{6.17}$$

Механика тизим инерция (масса) марказининг K тизимга нисбатан тезлигини $\vec{v}'_c$ билан белгиласак, (6.16) даги вектор йиғинди (яъни $\sum\limits_i m_i\vec{v}'_i$) масса марказининг импульсини ифодалайди ва (4.18) га асосан $\vec{p}'=m\vec{v}'_c$ тарзда ёзилади. Натижада (6.16) қуйидагича ифодаланади:

$$E_K=E'_K+\frac{mv_0^2}{2}+m(\vec{v}_0\cdot\vec{v}'_c). \tag{6.18}$$

Агар K' нинг координата боши сифатида механик тизимнинг инерция (масса) марказини танласак, яъни K' га нисбатан инерция маркази тинч турса, $\vec{v}'_c=0$; $\vec{p}'=0$ бўлади. У ҳолда K ва K' инерциал саноқ тизимларидаги кинетик энергиялар орасидаги боғланиш

$$E_K=E'_K+\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{6.19}$$

тарзда ифодаланади.

Охирги тенглик Кёниг теоремасини ифодалайди: *бир неча жисм (моддий нуқталар)дан иборат механикавий тизимнинг кинетик энергияси мазкур тизимдаги жисмларнинг инерция марказига нисбатан ҳаракатланишларидаги кинетик энергиялари билан инерция марказининг илгариланма ҳаракатидаги кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.*

6.4- §. КОНСЕРВАТИВ ВА НОКОНСЕРВАТИВ КУЧЛАР

Тинч турган жисмни ҳаракатга келтириш учун унга бирор куч таъсир этиши керак. Бу кучлар ўзларининг хусусиятлари жиҳатидан икки хил бўлиши мумкин: 1) жисмлар бир-бирига бевосита тегиши орқали ўзаро таъсирлашиши ва мазкур таъсир туфайли тинч турган жисм ҳаракатга келиши ёки ҳаракатдаги жисм тезлигини ўзгартириши мумкин, 2) жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида уларнинг тезликларининг ўзгариши майдон воситасида бўлиши мумкин, яъни жисмлар бир-бирига нисбатан бирор масофада туриб майдон воситасида таъсирлашадилар (шу ўринда майдон ҳам материянинг бир тури эканлигини эслатиб ўтамиз).

Биринчи тур кучларга мисол тариқасида жисмнинг ҳаракат йўналишига нисбатан қарама-қарши томонга йўналган ишқаланиш кучларини, ҳавонинг ва суюқликларнинг жисм ҳаракатига қаршилик кучларини келтириш мумкин. Жисмни бир нуқтадан иккинчи нуқтага кўчиришда бу кучларни енгиш учун ташқи кучлар мусбат иш бажаради ва бажарилган ишнинг катталиги ўтилган йўлга боғлиқ, босиб ўтилган йўл қанчалик катта бўлса ташқи кучлар бажарган иш ҳам шунчалик катта бўлади.

Иккинчи тур кучларга мисол тариқасида Ернинг тортиш кучини, қайишқоқлик (эластиклик) кучини, зарядланган жисмларга электр майдон томонидан таъсир этувчи кучларни кўрсатиш мумкин.

Ҳар бир жисм ўз атрофида гравитация майдони деб аталадиган майдон ҳосил қилади ва бу майдон унга киритилган бошқа жисмларга таъсир этувчи тортишиш кучи тарзида намоён бўлади ((5.19)га қ.). Фазонинг бирор нуқтасига жисмни киритсак ва шу нуқтада унга қандайдир куч таъсир этса, фазонинг бу нуқтасида майдон бор деган хулосага келамиз. Қуёш билан Ер, Ер билан Ой орасидаги ўзаро таъсир гравитация майдони воситасида содир бўлади. Зарядланган жисмларнинг бир-биридан бирор масофада туриб ўзаро таъсирлашиши материянинг бир тури бўлган электр майдон воситасида амалга ошади.

Демак, майдонга киритилган жисмларга мазкур майдон томонидан муайян куч таъсир қилади. Маълумки (5.4- § га қ.), бундай майдон куч майдони дейилади. Ер атрофидаги куч майдони унинг гравитация майдонидир. Масалан, массаси m бўлган Ер сиртидаги жисмга Ернинг гравитация майдони $\vec{F}=m\vec{g}$ куч билан таъсир қилади.

Фазонинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига жисмни кўчиришда ташқи кучларнинг бажарган иши босиб ўтилган йўлнинг шаклига боғлиқ бўлмай, балки жисмнинг бошланғич ва охирги вазиятларигагина боғлиқ бўлса, бундай кучлар *консерватив* ёки *потенциал кучлар* деб аталади. Жисмга таъсир этувчи оғирлик кучи, сиқилган ёки чўзилган пружинанинг қайишқоқлик (эластиклик) кучи, зарядланган жисмларга таъсир этувчи электростатик кучлар консерватив кучларга мисол бўлади.

Бошқа ҳамма кучлар *ноконсерватив кучлар* дейилади. Ишқаланиш кучлари, муҳитнинг жисм ҳаракатига қаршилик кучлари ноконсерватив кучларга киради. Ноконсерватив кучларнинг бажарган иши босиб ўтилган йўлга боғлиқ бўлиб, мазкур йўл қанчалик узун бўлса, бажарилган иш ҳам шунчалик катта бўлади.

Консерватив кучларнинг бажарган иши босиб ўтилган йўлнинг шаклига боғлиқ бўлмай, балки жисмнинг фақат дастлабки ва кейинги вазиятигагина боғлиқ бўлганлигидан бу кучларнинг ҳар қандай берк йўл (контур) бўйича бажарган иши нолга тенг ((6.26) га қ.).

6.5-§. ПОТЕНЦИАЛ ЭНЕРГИЯ

Механикавий энергиянинг юқорида кўриб ўтилган тури — кинетик энергиядан ташқари яна бир тури мавжуд бўлиб, у потенциал энергиядир. Потенциал энергия — жисмларнинг ёки уларнинг айрим қисмларининг ўзаро таъсир энергияси бўлиб, бу энергия уларнинг бир-бирига нисбатан жойлашувига боғлиқ. Шунинг учун потенциал энергиянинг қиймати жисм (ёки тизим)ни бир вазиятдан иккинчи вазиятга ўтказишда ташқи кучларнинг бажарган иши билан ўлчанади. Иккинчи томондан, 6.4-§ да айтиб ўтилганидек, куч майдонида жойлашган жисмларга муайян консерватив куч таъсир этади; мазкур кучнинг белгиланган шароитда иш бажариш қобилияти уларнинг потенциал энергиясининг ўлчови бўлиб хизмат қилади. Бошқача айтганда, куч майдонида жойлашган жисм муайян потенциал энергияга эга бўлади. Масалан, Ер сиртидан бирор баландликда жойлашган жисм унинг сиртига нисбатан муайян потенциал энергияга эга бўлади, чунки жисмга Ернинг гравитация майдони (оғирлик кучи майдони) таъсир этади ва жисм Ер сиртига қайтиб тушиши жараёнида консерватив кучлар унинг потенциал энергиясига тенг бўлган иш бажаради. Худди шунингдек, чўзилган (ёки сиқилган) пружина ўрамлари қайишқоқлик (эластиклик) кучлари майдонининг таъсирида бўлади, бинобарин у чўзилиш катталигига мос келувчи потенциал энергияга эга бўлади. Пружина дастлабки вазиятига қайтганда консерватив (қайишқоқлик) кучлар унинг потенциал энергиясига тенг иш бажаради. Шуни ҳам айтиш керакки, қайишқоқлик кучлари майдонининг асл манбаи — пружина чўзилганда уни ташкил этган атомлар орасидаги масофанинг ўзгаришидир, ҳар бир атом қўшни атомларнинг электр майдони таъсирида бўлади.

Демак, потенциал энергия — жисмларнинг ёки тизим қисмларининг ўзаро таъсири билан боғлиқ энергия бўлиб, бу энергия таъсирлашувчи жисмлар ёки тизим қисмлари орасидаги масофага боғлиқдир. Шунинг учун жисмнинг ёки тизимнинг потенциал энергияси фақат унинг координаталарининг функциясидир ва бу функция $E_n(x, y, z)$ тарзида ифодаланади. Потенциал энергияга эга бўлган жисм (тизим) ўзининг дастлабки вазиятига қайтганда, консерватив кучлар айнан унинг потенциал энергиясига тенг бўлган иш бажаради. Демак, консерватив кучларнинг иши жисм ёки тизим потенциал энергиясининг камайиши ҳисобига бажарилади:

$$dA = -dE_n, \qquad (6.20)$$

(манфий ишора потенциал энергиянинг камайишини билдиради). Баъзи хусусий ҳоллар учун потенциал энергияни қараб чиқайлик:

а. Оғирлик кучи майдонидаги жисмнинг потенциал энергияси. Потенциал энергия жисм координаталарининг функцияси бўлганлиги туфайли координаталар бошини (саноқ бошини) танлаш зарур, яъни жисмнинг потенциал энергияси қайси жисмга нисбатан аниқланаётганлиги муҳимдир. Оғирлик майдонидаги жисмнинг потенциал энергияси фақат битта координата — баландликнинг функцияси бўлганлиги учун унинг потенциал энергияси қайси сатҳга нисбатан аниқланаётган бўлса, бу сатҳни нолинчи сатҳ деб қабул қилинади. Масалан, нолинчи сатҳ сифатида Ер сиртини, денгиз сатҳини, кўп қаватли уйларда биринчи, иккинчи ёки учинчи ва ҳоказо қаватларнинг полини қабул қилиш мумкин. Нолинчи сатҳга нисбатан h баландликда турган жисм шу сатҳга қайтиб тушса, оғирлик кучи:

$$A = mgh$$

га тенг иш бажаради. Демак, h баландликда турган жисмнинг потенциал энергияси

$$E_n = mgh \qquad (6.21)$$

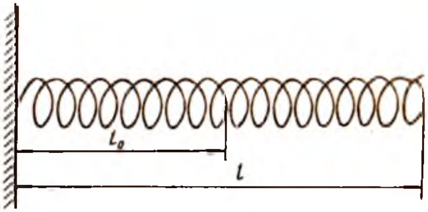
бўлади. Нолинчи сатҳни танлаш ихтиёрий бўлганлиги учун, ундаги жисмнинг потенциал энергиясини бошқа бирор сатҳга нисбатан C га тенг деб қабул қилиш мумкин. Шунинг учун (6.20) ифодани умумий кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$E_n = mgh + C.$$

Кинетик энергия ҳамма вақт мусбат қийматга эга: потенциал энергия эса мусбат ёки манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Масалан, чуқурлиги l бўлган ўрадаги жисмнинг Ер сиртига нисбатан потенциал энергияси манфийдир, яъни $E_n = -mgl$.

б. Чўзилган пружинанинг потенциал энергияси. Чўзилган ёки сиқилган пружинанинг потенциал энергияси унинг айрим қисмларининг ўзаро таъсир энергиясидир. Пружинани чўзганимизда чўзишга қаршилик қилувчи ички кучлар вужудга келади. Бу кучлар қайишқоқлик (эластиклик) кучлари бўлиб, табиати жиҳатидан улар консерватив кучлардир. Пружинани чўзиш ёки сиқиш жараёнида ташқи кучлар пружина устида мусбат иш бажаради; консерватив кучлар эса манфий иш бажаради, чунки мазкур кучлар чўзиш (сиқиш)га қаршилик кўрсатади. Ташқи кучларнинг бажарган иши ҳисобига пружина потенциал энергияга эга бўлади ва бу энергиянинг қиймати айнан ташқи кучлар бажарган ишга тенг. Узунлиги l_0 бўлган пружина ташқи куч таъсирида l узунликка қадар узайсин (6.4- расмга қ.) ва бу узайишни $l - l_0 = x$ деб белгилайлик. Қайишқоқлик чегарасигача бу узайиш Гук қонунига бўйсунади:

$$F = -kx,$$



6.4-расм

бунда k — пружинанинг кайишкоқлик хусусиятларини ўзида акс эттирувчи коэффициент, манфий ишора эса F куч чўзилиш ёки сиқилиш йўналишига нисбатан тескари томонга йўналганлигини билдиради (чўзилмаган ёки сиқилмаган пружина учун $x = 0$).

Пружинани dx элементар узунликка чўзишда F кучнинг бажарган иши қуйидагига тенг:

$$dA = Fdx = -kxdx.$$

Қайишқоқлик чегарасида x узунликка чўзишда F кучнинг бажарган иши қуйидагича аниқланади:

$$A = \int_0^x Fdx = \int_0^x kxdx = \frac{rx^2}{2}\cdot$$

Мазкур иш қайишқоқлик чегарасида x масофага чўзилган (ёки сиқилган) пружинанинг потенциал энергиясига тенгдир:

$$E_п = \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.22}$$

(6.22) муносабат v тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергиясини ифодаловчи формулага ўхшашдир: жисм массаси ўрнида қайишқоқлик коэффициенти ва тезлик ўрнида пружинанинг узайиши турибди.

в. Икки жисмнинг ўзаро таъсир энергияси. Ҳар бир жисм ўзининг атрофида гравитация майдони ҳосил қилади. Жисмнинг потенциал энергияси унинг бошқа жисмлар билан мазкур майдон орқали ўзаро таъсир энергиясидир. Ўзаро таъсирсиз потенциал энергия мавжуд бўлмайди. Оғирлик кучи майдонидаги жисмнинг потенциал энергияси мазкур жисмнинг Ер билан гравитация майдони воситасидаги ўзаро таъсир энергияси бўлиб, бу энергияни ифодаловчи (6.21) формула Ер сиртидан унча катта бўлмаган баландликлар учун тўғридир, чунки бу формулалардаги g нинг қиймати Ер сиртидаги муайян нуқта учун ўзгармас катталик бўлиб, ((5.19)га қ.) баландлик (h) ошган сари унинг қиймати Ер марказидан ҳисобланган масофанинг квадратига тескари мутаносиб тарзда ўзгариб боради.

Энди массалари m_1 ва m_2 бўлган иккита жисмни олиб қарайлик. Улар ўзларининг гравитация майдони орқали ўзаро таъсирлашадилар. Бутун олам тортишиш қонунига кўра икки жисмнинг гравитация майдони таъсиридаги ўзаро тортишиш кучи уларнинг массаларига мутаносиб ва улар орасидаги масофанинг квадратига тескари мутаносибдир:

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2},$$

бунда γ — гравитация доимийси. Бу иккала таъсирлашувчи жисмнинг потенциал энергиясини ҳисоблайлик. Шу мақсадда уларнинг бирини кўзғалмас деб, иккинчисини эса унинг гравитация майдонида кўчади деб қараш мумкин: массаси m_1 бўлган жисмни (моддий нуқтани) кўзғалмас деб ҳисоблайлик ва массаси m_2 бўлган жисм (моддий нуқта) гравитация майдонида $\vec{r}_1$ радиус-вектор билан аниқланадиган *1*-вазиятдан $\vec{r}_2$ радиус-вектор билан аниқланадиган *2*-вазиятга кўчсин (6.5- расм). Мазкур кўчишда босиб ўтилган йўлни элементар $d\vec{s}$ бўлакчаларга хаёлан ажратайлик. Ана шу элементар йўллардан бирида консерватив кучларнинг бажарган иши

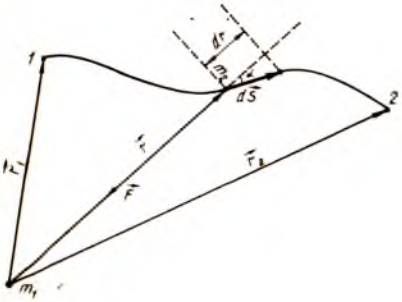
$$dA=Eds\cos\alpha=-Fdr$$

бўлади. Бунда гравитацион тортишиш кучлари учун $ds\cos\alpha=-dr$ эканлигини ҳисобга олдик. Шундай қилиб, $dA=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_2}dr$. Массаси m_2 бўлган жисмнинг *1*-вазиятдан *2*-вазиятга кўчишида бажарилган тўла иш

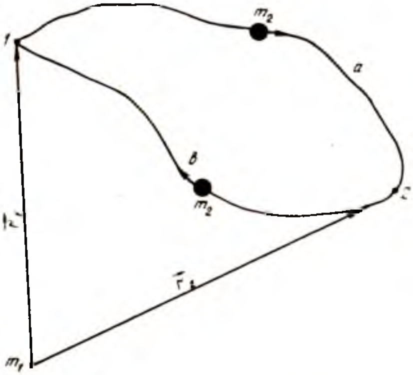
$$A_{12}=-\int_{r_1}^{r_2}Fdr=-\gamma m_1m_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=-\gamma m_1m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \qquad (6.23)$$

бўлади. Бунда тенглик белгисидан кейинги манфий ишора тортишиш кучлари бўлган консерватив кучларнинг бажарган иши манфий эканлигини ифодалайди. Бу формулани

$$A_{12}=\left(-\gamma\frac{m_1m_2}{r_1}\right)-\left(-\gamma\frac{m_1m_2}{r_2}\right). \qquad (6.23,a)$$



6.5-расм



6.6-расм

кўринишда ёзсак, $1-2$ кўчишда бажарилган иш массаси m_2 бўлган жисмнинг бошланғич ва охирги вазиятларига тааллуқли бўлган $\left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r}\right)$ катталикларнинг айирмасига тенг эканлигини кўрамиз.

Гравитация майдонида консерватив кучларнинг бажарган иши жисмнинг шу майдондаги потенциал энергияси ҳисобига, яъни жисм потенциал энергиясининг камайиши ҳисобига бажарилади:

$$A_{12}=E_{\Pi 1}-E_{\Pi 2} \tag{6.24}$$

(6.23) ва (6.24) ифодалардан гравитация майдонига жойлаштирилган жисмнинг потенциал энергияси учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$E_{\Pi}=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{6.25}$$

манфий ишора тортишиш кучлари майдонидаги жисмнинг ўзаро таъсир потенциал энергиясини ифодалайди.

Агар массаси m_2 бўлган жисм гравитация майдонини ҳосил қилаётган m_1 массали жисмдан чексиз узоқлашса ($r_2=\infty$), унинг потенциал энергияси $E_{\Pi 2}=0$ бўлади.

(6.23) формуладан кўринишича, гравитация майдонида (потенциал майдонда) жисмни бир нуқтадан иккинчи нуқтага кўчиришда консерватив кучларнинг бажарган иши кўчириш йўлининг узунлиги ва шаклига боғлиқ эмас, чунки бу иш кўчирилаётган жисмнинг бошланғич ва охирги вазиятларини белгиловчи $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ радиус-векторларгагина боглиқ. Ҳақиқатан ҳам, агар массаси m_2 бўлган жисм массаси m_1 бўлган жисмнинг гравитация майдонида (6.6- расм) *1*- вазиятдан *2*- вазиятга дастлаб *1a2* йўл бўйлаб, сўнгра эса *1b2* йўл билан кўчирилганда, ҳар иккала ҳолда ҳам бажарилган иш (6.23) формула билан ифодаланади ва ўзаро тенг.

Энди гравитация майдонида жисмни берк йўл (берк контур) бўйлаб кўчиришда бажарилган иш нимага тенг эканлигини аниқлайлик. Шу мақсадда аввал массаси m_2 бўлган жисмни *1*-вазиятдан *2*-вазиятга (6.6- расмга қ.) *1a2* йўл билан кўчирайлик, бу ҳолда консерватив кучларнинг бажарган иши манфийдир; сўнгра ўша жисмни *2*-вазиятдан *1*- вазиятга *2b1* йўл бўйлаб кўчирайлик, бундай кўчиришда консерватив кучлар жисм устида мусбат иш бажаради. Иккала ҳолда ҳам бажарилган иш, юқорида кўрганимиздек, (6.23) формула билан аниқланганлиги учун, сон жиҳатдан ўзаро тенг, лекин мазкур ишлар ишоралари билан бир-биридан фарқ қилади, яъни

$$A_{1a2}=-A_{2b1}.$$

Консерватив кучларнинг *1a2* ва *2b1* йўллар бўйлаб (берк йўл бўйлаб) бажарган тўла иши шу ишларнинг йиғиндисига тенг:

$$A_{1a2}+A_{2b1}=0.$$

Демак, консерватив кучларнинг берк йўл (берк контур) бўйлаб жисмни кўчиришда бажарган иши нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам жисмни берк йўл бўйлаб кўчирганда, у аввалги ўрнига (I-вазиятга) қайтиб келади, бинобарин, $r_1 = r_2$ бўлганлиги туфайли (6.23)га асосан $A_{121} = 0$ бўлади. Бу натижа одатда қуйидагича ёзилади:

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0, \tag{6.26}$$

бу ерда $\vec{F}$ — берк йўл (контур) бўйлаб кўчиришда жисмга таъсир этувчи консерватив куч, $d\vec{s}$ — мазкур йўлнинг элементар бўлаги.

6.6-§. ПОТЕНЦИАЛ ЭНЕРГИЯ ВА КУЧ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

Жисмларнинг ўзаро таъсири бир томондан куч орқали, иккинчи томондан потенциал энергия орқали ифодаланади. Шу боисдан потенциал майдондаги жисмнинг потенциал энергияси билан мазкур майдон томонидан унга таъсир этувчи куч орасида муайян боғланиш мавжуд бўлиши керак. Шу боғланишни топайлик. Бизга маълумки, потенциал майдонда жисмни бир нуқтадан иккинчи нуқтага кўчиришда консерватив кучларнинг бажарган иши жисм потенциал энергиясининг камайиши ҳисобига бажарилади:

$$A_{12} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} = -\Delta E_{\text{п}},$$

бунда $E_{\text{п}1}$ ва $E_{\text{п}2}$ — мос равишда потенциал майдоннинг биринчи ва иккинчи нуқталаридаги жисмнинг потенциал энергиялари. У ҳолда жисмни $d\vec{s}$ га кўчиришда консерватив кучларнинг бажарган иши:

$$\vec{F} d\vec{s} = -dE_{\text{п}} \tag{6.27}$$

бўлади. Бу ердаги манфий ишора бажарилган иш потенциал энергиянинг $d\vec{s}$ йўналишида камайиши ҳисобига бўлаётганини билдиради. Жисмга таъсир этувчи кучнинг кўчиш йўналишига проекциясини F_s деб белгиласак, (6.27) тенгликнинг чап томони қуйидагича ёзилади:

$$\vec{F} d\vec{s} = F ds \cos\alpha = F_s ds.$$

Шундай қилиб, (6.27) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F_s ds = -dE_{\text{п}}.$$

Бу тенгликдан кучнинг кўчиш йўналишига проекцияси учун қуйидагига эга бўламиз:

$$F_s = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial s} \tag{6.28}$$

(бунда $\partial/\partial s$ белгиси $\vec{s}$ йўналиш бўйича олинаётган хусусий ҳосилани ифодалайди). Потенциал энергия ($E_{\text{п}}$) жисм вазиятининг функцияси бўлганлиги туфайли (6.28) муносабат фазодаги ихтиёрий йўналиш учун, масалан, Декарт координата ўқларининг X, Y, Z йўналишлари учун ҳам ўринлидир:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}. \tag{6.29}$$

Шуни эсда тутиш керакки, (6.28) ва (6.29) формулалардаги F_s, F_x, F_y ва F_z кучлар потенциал майдонда жисмга таъсир этувчи консерватив кучларнинг мос йўналишлардаги проекцияларини ифодалайди. $\vec{F}$ вектор унинг X, Y, Z ўқлари бўйича ташкил этувчилари орқали:

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{i}+F_z\vec{k} \tag{6.30}$$

тарзда ифодаланишини эътиборга олсак, (6.29) га асосан (6.30) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial E_\text{п}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_\text{п}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_\text{п}}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{6.31}$$

Қавс ичидаги ифода grad$E_\text{п}$ деб белгиланади:

$$\frac{\partial E_\text{п}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_\text{п}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_\text{п}}{\partial z}\vec{k}=\text{grad}\,E_\text{п} \tag{6.32}$$

ва $E_\text{п}$ нинг градиенти деб ўқилади. Шунга кўра (6.31) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\vec{F}=-\text{grad}\,E_\text{п}. \tag{6.33}$$

(6.32) ва (6.33) тенгликларнинг чап томонлари вектор катталик бўлганликлари учун уларнинг ўнг томони ҳам вектор катталикни ифодалаши керак. Шундай қилиб, жисмнинг потенциал энергияси скаляр катталик бўлиб, унинг градиенти эса вектор катталикдир. (6.31) ва (6.33) ифодалардаги манфий ишора $\vec{F}$ кучнинг йўналиши жисм потенциал энергиясининг камайиши томонга йўналганлигини билдиради. (6.28), (6.29) ва (6.33) формулалар жисмнинг потенциал энергияси билан унга таъсир этувчи куч орасидаги боғланишни ифодалайди. Охирги формула қуйидагича ўқилади: потенциал майдонда жисмга таъсир этувчи куч унинг потенциал энергиясининг тескари ишора билан олинган градиентига тенг. Бошқача айтганда, жисм потенциал энергиясининг градиенти, бирор йўналиш бўйича масофа ўзгариши билан жисм потенциал энергиясининг ўзгаришини кўрсатади, яъни потенциал майдонда жисмни бир нуқтадан иккинчи нуқтага кўчиришда унинг потенциал энергиясининг ўзгариши қанчалик катта бўлса, шу йўналишда жисмга таъсир қилувчи куч ҳам шунчалик катта бўлади.

Мисол тариқасида чўзилган (ёки сиқилган) пружинанинг энергияси билан унга таъсир этувчи куч орасидаги боғланишни олиб қарайлик. Агар пружина чўзилган ҳолатига нисбатан x узунликка узайган бўлса, унинг потенциал энергияси (6.22) формулага асосан

$$E_\text{п}=\frac{1}{2}kx^2$$

эканлиги бизга маълум, бу ерда k қайишқоқлик коэффициенти бўлиб, қаралаётган пружина учун ўзгармасдир. Равшанки, чўзилган ёки сиқилган пружинанинг потенциал энергияси битта координатага, бизнинг мисолимизда x координатага боглиқдир. Охирги тенгликни (6.29)га қўйиб, қайишқоқлик чегарасигача чўзилган пружина томонидан таъсир этаётган консерватив куч

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x} = -\frac{\partial}{dx}(\frac{1}{2}kx^2) = -kx$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз; бу эса Гук қонунининг ўзгинасидир.

6.7- §. ИЧКИ МЕХАНИКАВИЙ ЭНЕРГИЯ

Бир-бири билан таъсирлашувчи бир нечта (умумий ҳолда n та) жисмдан иборат механикавий тизимни олиб қарайлик. Бундай тизимнинг ҳаракатини унинг инерция марказининг ҳаракати орқали тавсифлаш мумкин. Механикавий тизимнинг ҳаракати, бинобарин, унинг кинетик энергияси ҳар хил саноқ тизимларида турличадир. Тизим ҳаракатини иккита K ва K' саноқ тизимларида олиб қарайлик. Худди 6.4- § да кўриб ўтганимиздек K' саноқ тизими X ўқига параллел равишда K тизимга нисбатан ўзгармас v_0 тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин (6.3- расмга қ.). K' саноқ тизимининг координата боши сифатида механикавий тизимнинг инерция (масса) марказини танласак, у ҳолда K саноқ тизимига нисбатан механикавий тизимнинг ҳаракатини икки хил ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин: 1) механикавий тизимнинг K га нисбатан ҳаракати, яъни механикавий тизим инерция марказининг K га нисбатан ҳаракати; 2) механикавий тизим таркибидаги жисмларнинг (моддий нуқталарнинг) инерция марказига нисбатан ҳаракати.

Шунга кўра механикавий тизимнинг энергиясини ҳар икки хил энергиянинг йиғиндисидан иборат деб қараш лозим бўлади: 1) инерция марказининг K га нисбатан илгариланма ҳаракатидаги кинетик энергияси; 2) тизимнинг ички механикавий энергияси. Тизимнинг *ички механикавий энергияси* ($E_п$) унинг таркибидаги барча жисмларнинг инерция марказига нисбатан ҳаракатидаги (M-тизимдаги) кинетик энергия билан уларнинг ўзаро таъсир потенциал энергиясининг йиғиндисига тенг:

$$E_и = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + E_п, \tag{6.34}$$

бунда $\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ — тизимдаги барча жисмларнинг инерция марказига нисбатан ҳаракатидаги кинетик энергияларининг йиғиндиси, $E_п$ — механикавий тизим жисмларининг ўзаро таъсир потенциал энергияси.

6.3- § да келтирилган мулоҳазаларни такрорлаб механикавий тизимнинг энергияси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$E = E_и + \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{6.35}$$

Юқорида айтилганларга кўра бу формуладаги иккинчи қўшилувчи ҳад механикавий тизим инерция марказининг K га нисбатан илгариланма ҳаракатидаги кинетик энергиясини ифодалайди. Демак, механикавий тизимнинг энергияси унинг ички энергияси билан инерция марказининг илгариланма ҳаракатидаги кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг экан.

6.8- §. МЕХАНИКАВИЙ ЭНЕРГИЯНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Жисм (моддий нуқта) консерватив кучлар майдонида жойлашган бўлсин, яъни жисмга консерватив кучлардан бошқа кучлар таъсир қилмаётган бўлсин. Консерватив кучларнинг элементар $d\vec{r}$ кўчишда бажарган иши (6.20) ва (6.24) га асосан жисм потенциал энергиясининг камайишига тенг:

$$dA = -dE_{\text{п}}.$$

Иккинчи томондан, жисмнинг $d\vec{r}$ масофага кўчишида консерватив кучларнинг бажарган иши (6.6) га кўра унинг кинетик энергиясининг ортишига тенг:

$$dA = dE_K.$$

Бу икки тенгликдан:

$$dE_K = -dE_{\text{п}}$$

ёки

$$d(E_K + E_{\text{п}}) = 0 \qquad (6.36)$$

ни ҳосил қиламиз. Охирги ифодадаги кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси $E = E_K + E_{\text{п}}$ жисмнинг тўла энергияси дейилади; (6.36)дан

$$E = E_K + E_{\text{п}} = \text{const} \qquad (6.37)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу формула битта жисм учун энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди: *консерватив кучлар майдонида ҳаракатланаётган жисмларнинг тўла механикавий энергияси ўзгармайди.* Бу қонундан шу хулоса келиб чиқадики, консерватив кучлар майдонида кинетик энергия потенциал энергияга айланиши ва аксинча, потенциал энергия кинетик энергияга айланиши мумкин, лекин жисмнинг тўла энергияси ўзгармайди. Яъни консерватив кучларнинг таъсирида жисмнинг потенциал энергияси қанчага камайса, унинг кинетик энергияси шунчага ортади ва аксинча.

Мисол тариқасида H баландликдан бошланғич тезликсиз эркин тушаётган жисмни олиб қарайлик. Унинг пастга қараб ҳаракатланишига сабаб — унга таъсир этувчи консерватив кучларнинг (Ернинг гравитация майдони томонидан таъсир этувчи кучнинг) мавжудлигидир. Бошланғич ҳолатда (H баландликда) унинг кинетик энергияси нолга тенг, потенциал энергия эса (6.21) га асосан mgH га тенг. Маълумки, бошланғич тезликсиз H баландликдан тушган жисмнинг охирги тезлиги:

$$v=\sqrt{2gH}$$

ва бу тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергияси

$$E_K=\frac{mv^2}{2}.$$

Охирги икки тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$E_K=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(\sqrt{2gH})=mgH.$$

Жисм Ерга тушганда унинг потенциал энергияси нолга тенг бўлишини назарда тутсак, охирги формуладан шу хулоса келиб чиқадики, жисмнинг дастлабки потенциал энергиясининг ҳаммаси унга тенг бўлган кинетик энергияга айланган.

Эркин тушаётган жисм энергиясининг бир қисми кинетик энергия, қолган қисми потенциал энергиядир. Шундай қилиб, огирлик кучи майдонида ҳаракатланаётган жисмнинг тўла энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$E=\frac{mv^2}{2}+mgh. \tag{6.38}$$

Энди бир-бирлари билан консерватив кучлар (ички кучлар) орқали ўзаро таъсирлашувчи n та жисм (моддий нуқта) дан иборат тизимни олиб қарайлик ва мазкур тизим ташқи консерватив кучлар, масалан, гравитация майдони томонидан таъсир этувчи кучлар таъсирида бўлсин (яъни тизим жисмлари ўзаро таъсирлашишларидан ташқари уларга ташқи консерватив кучлар ҳам таъсир этаяпти). Бу кучлар таъсирида тизимнинг вазияти ва ундаги жисмларнинг бир-бирига нисбатан жойлашиши ўзгаради. Натижада мазкур кучлар тизим устида муайян иш бажаради.

Ташқи консерватив кучларнинг бажарган элементар иши ташқи куч майдонидаги тизим потенциал энергиясининг камайиши ҳисобига бўлади:

$$dA'=-dE_{\text{п}}.$$

Ўзаро таъсир туфайли вужудга келадиган ички кучларнинг бажарган элементар иши (dA'') жисмларнинг ўзаро таъсир потенциал энергиясининг камайиши ($-dE''_{\text{п}}$) га тенг:

$$dA''=-dE''_{\text{п}}.$$

(6.6) формулага асосан барча кучларнинг бажарган элементар иши тизимдаги жисмлар кинетик энергияларининг ортиши (dE_K) га сарф бўлади, яъни:

$$dA'+dA''=dE_K. \tag{6.39}$$

Тизимнинг кинетик энергияси унинг таркибидаги жисмлар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг:

$$E_K=\sum_i\frac{m_iv_i^2}{2}.$$

Юқорида келтирилган (6.39) тенгликнинг чап томонидаги элементар ишларни уларга тегишли энергия билан алмаштирамиз:

$$-dE'_{\text{п}}-dE''_{\text{п}}=dE_K .$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$d(E_K+E'_{\text{п}}+E''_{\text{п}})=0. \qquad (6.40)$$

Тизимнинг тўла механикавий энергияси унинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндисига тенг:

$$E=E_K+E_{\text{п}}'+E_{\text{п}}''.$$

(6.40) тенгликдан

$$E=E_K+E'_{\text{п}}+E''_{\text{п}}=\text{const} \qquad (6.41)$$

эканлиги келиб чиқади ва у тизим механикавий энергиясининг сақланиш қонунини ифодалайди: *фақат ташқи ва ички консерватив кучларнинг таъсирида бўлган жисмлар тизимининг тўла энергияси ўзгармай қолади.*

Агар жисмлар тизими берк бўлса, яъни унга ташқи консерватив кучлар таъсир этмаса, тизим тўла энергиясининг сақланиш қонуни

$$E_K+E''_{\text{п}}=\text{const} \qquad (6.42)$$

тарзда ифодаланади ва қуйидагича таърифланади: *консерватив кучлар воситасида ўзаро таъсирлашувчи жисмлардан иборат бўлган берк тизимнинг тўла механикавий энергияси ўзгармай қолади.*

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, тизимга ноконсерватив кучлар ҳам таъсир қилаётган бўлса, у ҳолда унинг тўла механикавий энергияси сақланмайди. Бу хакда қуйида фикр юритамиз.

6.9- §. ЭНЕРГИЯНИНГ УМУМФИЗИКАВИЙ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

Юқорида механикавий энергиянинг сақланиш қонунини кўриб ўтганимизда, биз фақат консерватив кучлар таъсир этадиган тизимни олиб қараган эдик. Аксарият ҳолларда консерватив кучлардан ташқари тизимга ноконсерватив кучлар ҳам таъсир этади. Ноконсерватив кучларга, хусусан, ишқаланиш кучлари ва муҳитнинг қаршилик кучлари киради. Бу кучларнинг бажарган иши манфийдир. Шунинг учун ноконсерватив кучлар мавжуд бўлганда тизимнинг тўла механикавий энергияси камайиб боради ва бундай камайиши энергиянинг диссипацияси (исрофланиши) дейилади. Энергиянинг бу камайишини ташқи манбадан узлуксиз тўлдириб турилмаса, ишқаланиш кучлари мавжуд бўлган тизимда (масалан, нақлиёт воситаларида) ҳаракат охири тўхтайди, яъни энергиянинг йўқотилиши кузатилади. Демак, диссипатив кучлар мавжуд бўлганда, тизимнинг тўла механикавий энергияси сақланмайди. Бундан энергиянинг сақланиш қонуни бузилаяпти деган хулоса келиб чиқмайди: ишқаланиш мавжуд бўлганда механикавий энергиянинг бошқа турдаги энергияга айланиши содир бўлади, хусусан, механикавий энергия иссиқлик энергиясига айланади. Иссиқлик энергияси эса жисм таркибидаги атом ва молекулаларнинг тартибсиз ҳаракатидан иборат энергиядир (жисм таркибидаги атом ва молекулаларнинг тартибсиз ҳаракатини бизнинг сезги аъзоларимиз иссиқлик тарзида идрок этади).

Ноконсерватив кучлар таъсири туфайли берк тизимда механикавий «энергиянинг йўқолиши»да ҳамма вақт мазкур «йўқолиш»га тенг бўлган миқдорда бошқа турдаги энергия ажралиб чиқади. Электр энергияси ишлаб чиқиладиган қурилмаларда кўпинча механикавий энергиянинг (масалан, оқар сув энергиясининг) электр энергиясига айланишини кузатамиз.

Физика тарихида шундай ҳоллар ҳам бўлганки, тажрибадан олинган натижаларда энергиянинг сақланиш қонуни бажарилмаётганга ўхшаб туюлган. Масалан, атом ядроларининг бета-емирилиш ҳодисаларида энергия ва импульснинг сақланиш қонунининг «бузилиши» кузатилган. Кейинчалик, физикларнинг мантиқий мулоҳазалари шундай хулосага олиб келдики, бета-емирилишда электрон билан бирга ядродан бошқа бир номаълум заррача учиб чиқиши ва бу заррача ўзи билан бирга олиб кетаётган энергия бу жараёнда етишмаётган энергия миқдорига тенг бўлиши керак. Бундай дадил хулосага келиш учун макроскопик механика қонунларидан четга чиқадиган тасаввурларга таянишга тўғри келди. Ўтказилган қўшимча тажрибалар эса мазкур хулосани тасдиқлади (заррача нейтрино деган ном олди).

Шундай қилиб, оддий механикавий ҳодисаларга нисбатан яна ҳам кенгроқ миқёсдаги физикавий ҳодисаларни қамраб олган энергиянинг сақланиш қонуни қарор топди. Бу қонун энергиянинг умумфизикавий сақланиш қонуни дейилади. Бу қонунга асосан, *энергия ҳеч қачон йўқдан бор бўлмайди ва мавжуд энергия йўқолмайди, у фақат бир турдан иккинчи турга айланиши мумкин.* Энергиянинг умумфизикавий сақланиш қонуни механика ҳодисаларинигина ўз ичига олиб қолмай, балки механика қонунларини қўллаш мумкин бўлмаган ҳодисаларни ҳам қамраб олади. Бу қонун механика қонунларидан келтириб чиқарилмаганлигини тушуниш қийин эмас: у кенг миқёсдаги тажриба натижаларини умумлаштиришдан келиб чиққан мустақил қонундир.

6.10-§. САҚЛАНИШ ҚОНУНЛАРИ ҲАМДА ФАЗО ВА ВАҚТ СИММЕТРИЯСИ

Одатда симметрия деганимизда буюмлар, нарсалар ва тирик жониворлар шаклининг симметрияси кўз олдимизга келади. Масалан, тайёралар, кемалар, кристаллар, қушлар, капалаклар ва бошқаларнинг шакли муайян симметрияга эга, яъни уларнинг чап ва ўнг томонлари ўрта чизиққа нисбатан деярли бир-бирини такрорлайди. Қуйида симметрия деганимизда, бизнинг кундалик ҳаётимизда учраб турадиган симметрияга нисбатан бошқа маънодаги симметрия — табиат қонунлари симметрияси ҳақида гап боради. Масалан, физика қонунларининг симметрияси деганда баъзи бир алмаштиришларга нисбатан уларнинг инвариант эканлиги тушунилади. Фазо ва вақтнинг симметрияси деганимизда вақтнинг бир жинслилиги, фазонинг эса бир жинслилиги ва унинг изотроплиги тушунилади. Бу тушунчалар киритилиши билан вақтнинг бир жинслилиги, фазонинг эса бир жинслилиги ва изогроплигини қандай тасаввур қилиш мумкин, деган саволнинг туғилиши табиийдир.

Вақтнинг бир жинслилиги — ўтаётган вақтнинг турли пайтлари бир-биридан фарқ қилмайди демакдир. Шу боисдан, кўпинча, вақтнинг барча пайтлари ўзаро муқобил, яъни улар тенг ҳуқуқли деган ибора қўлланилади. Амалий жиҳатдан вақтнинг бир жинслилиги шунда намоён бўладики, бир хил шароит яратилганда, берк тизимнинг ҳаракат қонунлари вақт ўтиши билан ўзгармайди. Масалан, эркин тушаётган жисмнинг ҳаракат қонуни бу ҳаракат қачон содир бўлганлигига боғлиқ эмас: 10 метр баландликдан бошланғич тезликсиз эркин тушаётган жисмнинг охирги тезлигини ўлчаш бўйича исталган пайтда ўтказилган тажриба бир хил натижа беради ва бу тезлик вақтнинг барча пайтлари учун $v = \sqrt{2gh} \approx$

≈ 14 м/с бўлиб чиқади (бу натижаларда жисм ва Ер берк тизимни ташкил этади). Яна бир мисол: баъзи бир тажриба натижалари бирор вақт ўтгандан кейин қайта текширилиб кўрилади ва кўпинча бир хил натижа олинади. Демак, вақтнинг бир жинслилиги турли пайтларда ўтказилган тажриба натижаларини таққослаб кўришга имкон беради.

Фазонинг бир жинслилиги деганимизда унинг барча нуқталари бир-бирига муқобил эканлиги тушунилади, яъни фазонинг ҳамма нуқталарининг хусусиятлари бир хил. Амалий жиҳатдан фазонинг бир жинслилиги шунда намоён бўладики, жисмларнинг ўзаро жойлашишлари ва тезликларини ўзгартирмасдан берк тизимни бир жойдан иккинчи жойга кўчирсак, унинг хусусиятлари ва ҳаракат қонунлари ўзгармайди: аввалги жойда содир бўладиган ҳодиса бир хил шароит яратилганда фазонинг иккинчи жойида ҳам ўзгаришсиз такрорланади. Бу ерда «бир хил шароит яратилганда» деган ибора нимани англатишини қуйидаги мисолдан тушуниб олиш мумкин: осма соат тебрангичининг тебраниш даврини ўлчаётган бўлайлик. Тебрангичнинг узунлиги ва бошқа қисмлари ўзгармаганда унинг тебраниш даври эркин тушиш тезланиши (g) нинг қийматига боғлиқ (маълумки, g нинг қиймати Ернинг ҳар хил нуқталари учун ҳар хил қийматга эга бўлиб, 9,78 м/с^2 дан 9,83 м/с^2 гача ўзгаради). Соатни бутун ҳолда ва ўзига параллел қилиб фазонинг бир жойидан иккинчи жойига кўчирганимизда мазкур жойларда g нинг қиймати бир хил бўлса (бир хил шароит), соат тебрангичининг тебраниш даври иккала жойда ҳам бир хил қийматга эга бўлади. g нинг қийматлари бир хил бўлган фазонинг бошқа нуқталари учун ҳам тебрангичнинг тебраниш даври ўлчаш хатоликлари чегарасида аввалги нуқталарда олинган қийматларга тенг бўлиб чиқади. Бу натижа фазонинг барча нуқталарининг хусусиятлари бир хил эканлигининг исботи, яъни фазонинг бир жинслилигининг намоён бўлиши демакдир.

Фазонинг изотроплиги шуни билдирадики, ундаги ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган барча йўналишларнинг хусусиятлари бир-биридан фарқ қилмайди, яъни фазода қайси йўналишни олиб қарамайлик, улар бир-бирига муқобил. Мазкур муқобиллик шунда намоён бўладики, бир хил шароит яратилганда жисмлардан ташкил топган берк тизимни (тадқиқот қурилмаларини, ўлчаш асбобларини, лабораторияни ва бошқаларни) исталган бурчакка бурилса, бу буриш барча келгуси ҳодисаларнинг боришига таъсир этмайди. Масалан: а) ойнаижаҳонни бирор бурчакка бурсак (антеннанинг вазияти ўзгармаганда) унинг кўрсатишида ҳеч қандай ўзгариш содир бўлмайди; б) нуқтавий манбадан чиқаётган товуш тўлқинлари барча йўналишлар бўйича бир хил тарқалади.

а. Импульснинг сақланиш қонуни фазонинг бир жинслилигининг натижаси эканлиги. Импульснинг сақланиш қонуни берк тизим учун бажарилади ва берк тизимда фақат ички кучларгина мавжуд. Бу қонунни келтириб чиқаришда юқорида (4.1-§ га қ.) Ньютоннинг иккинчи ва учинчи қонунларидан фойдаланилган эди. Ньютоннинг учинчи қонунига кўра берк тизимдаги ички кучларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак, яъни:

$$\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}+\sum_{i,j=1}^{n}\vec{F}_{ji}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{31}+\ldots=0 \qquad (i\neq j). \qquad (6.43)$$

Кейинчалик маълум бўлдики, фазонинг симметрия хусусиятларидан, яъни унинг бир жинслилигидан ва Ньютоннинг фақат иккинчи қонунидан фойдаланиб ҳам импульснинг сақланиш қонунини келтириб чиқариш мумкин экан. Бунинг учун берк тизимни ўзига параллел равишда фазонинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига шундай кўчирамизки, ундаги жисмларнинг ўзаро жойлашиши ва тезликлари аввалгидай қолсин. Кўчишни $\vec{r}$ билан белгиласак, мазкур кўчишда бажарилган иш қуйидаги:

$$A=\Big(\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}+\sum_{j,i}\vec{F}_{ji}\Big)\vec{r}$$

скаляр кўпайтма тарзида ифодаланади. Бу кўчишда ($\vec{r}\neq 0$) берк тизимда ҳеч нарса ўзгармагани туфайли фазонинг бир жинслилигидан шу хулоса келиб чиқадики, мазкур кўчишда бажарилган иш нолга тенг, яъни

$$A=\Big(\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}+\sum_{j,i}\vec{F}_{ji}\Big)\vec{r}=0 \qquad (i\neq j). \qquad (6.44)$$

Тизимнинг муайян $\vec{r}\neq 0$ масофага кўчирилганини назарда тутсак, (6.44) тенгликдан

$$\Big(\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}+\sum_{j,i}\vec{F}_{ji}\Big)=0 \qquad (i\neq j)$$

келиб чиқади, яъни фазонинг бир жинслилигидан берк тизимдаги ички кучларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг, деган хулосага келамиз. Бинобарин, Ньютоннинг иккинчи қонунидан ва фазонинг бир жинслилигидан (Ньютоннинг учинчи қонунидан фойдаланмасдан)

$$\Big(\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}+\sum_{j,i}\vec{F}_{ji}\Big)=\frac{d}{dt}\sum_{i}\vec{p}_i=0$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан импульснинг сақланиш қонуни ((4.4) ифодага қ.)

$$\sum_{i}\vec{p}_i=\sum_{i}m_i\vec{v}_i=\mathrm{const}$$

келиб чиқади.

Демак, импульснинг сақланиш қонуни фазонинг бир жинслилигининг натижасидир, чунки фазонинг ана шу хусусияти туфайли берк тизим бир бутун ҳолда кўчирилганда унинг механикавий хусусиятлари ўзгаришсиз сақланади.

б. Импульс моментининг сақланиш қонуни билан фазонинг изотроплиги орасидаги боғланиш. Фазонинг изотроплиги шунда намоён бўладики, берк тизимни ихтиёрий бирор бурчакка бурсак, бу буриш унинг физикавий хусусиятларига ва ҳаракат қонунларига таъсир этмайди.

Тизимни бирор кўзғалмас O нуқтага нисбатан $d\vec{\varphi}$ бурчакка бурсак, бу буришда O нуқтадан r_i масофада турган i- жисмга j-жисм томонидан таъсир этувчи ички $\vec{F}_{ij}$ кучнинг куч моменти қуйидагича ифодаланади ((5.7) ифодага қ.):

$$\vec{M}_i=[\vec{r}_i,\ \vec{F}_{ij}]\,.$$

i- жисмни кўзғалмас O нуқтага нисбатан $d\vec{\varphi}$ бурчакка буришда ички кучларнинг бажарган иши

$$dA_i=\vec{M}_i d\vec{\varphi}$$

тарзда ифодаланади (IX бобга қ., (9.24) ифода). Жисмларга таъсир этаётган ички кучларнинг O нуқтага нисбатан олинган куч моментини $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ..., $\vec{M}_n$ билан белгиласак ҳамда тизимдаги барча жисмлар тезликларининг йўналишларини ва сон қийматларини ўзгартирмаган ҳолда уни O нуқтага нисбатан $d\vec{\varphi}(d\vec{\varphi}\neq 0)$ бурчакка бурсак, мазкур буришда бажарилган иш:

$$dA=(\vec{M}_1+\vec{M}_2+\ \dots\ +\vec{M}_n)\,d\vec{\varphi} \qquad (6.45)$$

бўлади. Фазодаги барча йўналишлар бир хил хусусиятга эга бўлганликлари туфайли мазкур буриш учун иш сарф қилинмайди, яъни:

$$(\vec{M}_1+\vec{M}_2+\ \dots\ +\vec{M}_n)\,d\vec{\varphi}=0\,. \qquad (6.46)$$

Шартга кўра $d\vec{\varphi}$ бурчак нолга тенг бўлмаганлиги сабабли (6.46) скаляр кўпайтманинг биринчи кўпайтувчиси (қавс ичидаги ифода) нолга тенг бўлиши шарт:

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2+\ \dots\ +\vec{M}_n=\sum_i \vec{M}_i=0\,. \qquad (6.47)$$

Демак, фазонинг изотроплигидан берк тизимдаги ички кучлар моментларининг вектор йиғиндиси нолга тенглиги (Ньютоннинг учинчи қонунидан фойдаланмасдан) келиб чиқади. Моментлар тенгламаси ((5.20) ифодага қ.)

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{M}_i$$

га кўра ва (6.47) дан

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i=0$$

ҳамда

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \mathrm{const} \qquad (6.48)$$

деган натижага келамиз. Бундан кўринадики, берк тизим импульс моментининг сақланиш қонуни фазонинг изотроплигининг натижасидир, чунки фазонинг ана шу хусусияти туфайли берк механикавий тизим бир бутун ҳолда ихтиёрий бирор бурчакка бурилганда унинг механик хусусиятлари ўзгармайди.

в. Энергиянинг сақланиш қонуни вақтнинг бир жинслилигининг натижаси эканлиги. Энергиянинг сақланиш қонунининг вақтнинг бир жинслилиги билан боғлиқлигини асослаш учун потенциал майдонда жойлашган n та жисмдан иборат берк тизимни олиб қараймиз. Бирор i- жисмга потенциал майдон томонидан таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари:

$$F_{x_i} = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial x_i}, \quad F_{y_i} = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial y_i}, \quad F_{z_i} = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial z_i}$$

тарзда ёзилади ((6.29) ифодага қ.). Мазкур тенгликларнинг ҳар бирининг чап томонларини кўчиш вектори $d\vec{r}_i$ нинг координата ўқларидаги проекциялари dx_i, dy_i, dz_i га мос равишда кўпайтириб,

$$F_{x_i} dx_i = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial x_i} dx_i, \quad F_{y_i} dy_i = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial y_i} dy_i,$$

$$F_{z_i} dz_i = -\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial z_i} dz_i$$

га эга бўламиз. Бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда қўшиб чиқиб, олинган натижани тизимдаги n та жисм учун ёзамиз:

$$\sum_i (F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i) = -\sum_i \left(\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial z_i} dz_i \right). \qquad (6.49)$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги йиғинди ишораси остида турган ифода, равшанки, потенциал майдон томонидан i- жисм устида бажарилган ишга тенг:

$$F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i = dA_i \,. \qquad (6.50)$$

Мазкур иш i- жисм кинетик энергиясининг ошишига сарф бўлади, яъни:

$$dA_i = dE_{K_i} \,. \qquad (6.51)$$

(6.50) ва (6.51) ифодаларга асосан (6.49) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_i (dE_{K_i}) = -\sum_i \left(\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial z_i} dz_i \right). \qquad (6.52)$$

Энди вақтнинг бир жинслилигини эътиборга оламиз. Вақтнинг бир жинслилиги шундай натижага олиб келадики, берк тизимнинг потенциал энергияси вақт ўтиши билан ўзгармайди. Масалан, Ернинг гравитация майдонида Ер юзига нисбатан h баландликда жойлашган массаси m бўлган жисмнинг потенциал энергияси $E_{\text{п}} = mgh$ — берк тизим учун вақт ўтиши билан ўзгармайди, яъни $\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial t} = 0$. Берк тизим потенциал энергияси вақтга боғлиқ бўлмаса (6.52) нинг ўнг томонидаги йиғинди ишораси остида турган ифодани (тизимдаги i- жисм потенциал энергиясини) тўла дифференциал шаклида ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial E_{\text{п}_i}}{\partial z_i} dz_i = dE_{\text{п}_i}.$$

У ҳолда (6.52) ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sum_i (dE_{K_i}) = -\sum_i (dE_{\text{п}_i}).$$

Бу тенгликни

$$d(\sum_i E_{K_i} + \sum_i E_{\text{п}_i}) = 0$$

кўринишда ёзсак, ундан механикавий энергиянинг сақланиш қонуни

$$\sum_i E_{K_i} + \sum E_{\text{п}_i} = \text{const} \tag{6.53}$$

келиб чиқади. (6.53) ифодадан шундай хулосага келамизки, механикавий энергиянинг сақланиш қонуни замирида вақтнинг бир жинслилиги ётади, чунки ана шу хусусият туфайли берк тизимдаги жараёнларнинг содир бўлиш қонунияти бу жараёнларни вақт бўйича бошқа пайтга кўчирилганда ҳам ўзгармайди.

VII БОБ

РЕЛЯТИВ ДИНАМИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

7.1-§. МАХСУС НИСБИЙЛИК НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ПОСТУЛАТЛАРИ

Ҳозиргача биз ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик ($v \ll c$) тезликлар билан боғлиқ механикавий ҳаракат қонунлари билан танишдик. Зеро табиий шароитда учраб турадиган аксар механикавий ҳодисалар ёруғлик тезлигига нисбатан анча кичик тезликларда содир бўлади. Фан ва техника инқилоби туфайли ёруғлик тезлигига яқин тезликлар билан бевосита боглиқ ҳодисалар ҳозирги вақтда оддий механикавий ҳодисалар қаторидан кенг жой олмоқда ва муҳандислик механикасида кўп ҳолларда релятив механика қонунларидан фойдаланилмоқда. Хусусан, бу қонунлар асосида катта тезликларда ($v \approx c$) элементар заррачаларнинг тўқнашишлари ва мазкур зарраларнинг модда билан ўзаро таъсири ўрганилади. Зарядли зарраларни жуда катта тезликларгача тезлатувчи қурилмалар релятив механика қонунлари асосида режалаштирилади.

Релятив механиканинг асосини А. Эйнштейн томонидан яратилган махсус нисбийлик назарияси ташкил қилади ва у кучсиз гравитация майдонлари мавжуд бўлган ҳоллар учун фазо ва вақт ҳақидаги физикавий назария ҳисобланади. Бу назария Ньютон физикасининг барча тасаввурларини, айниқса фазо ва вақт хоссалари ҳақидаги тасаввурларни қайта кўриб чиқишни тақозо қилади. Чунки Эйнштейннинг нисбийлик назариясида, Ньютон механикасидан фарқли ўлароқ, фазо ва вақт хоссалари ҳақидаги тасаввурлар мазкур фазо ва вақт ичида содир бўлаётган табиат ҳодисалари билан узвий боғлангандир. Махсус нисбийлик назариясида физикавий ҳодисалар қонуниятлари фақатгина инерциал саноқ тизимларида ўрганилади. Бундан ташқари умумий нисбийлик назарияси ҳам мавжуд бўлиб, у гравитация майдонлари ҳақидаги назариядир.

А. Эйнштейннинг махсус нисбийлик назарияси қуйидаги иккита постулатга (принципга) асосланган: 1) нисбийлик принципи; 2) ёруғлик тезлигининг ўзгармаслиги принципи.

Биринчи постулат фақат механикавий ҳодисаларга тааллуқли бўлган Галилейнинг нисбийлик принципларини барча физикавий ҳодисалар учун умумлаштиришдан иборат. Бу постулат қуйидагича таърифланади: *ҳар бир физикавий ҳодиса барча инерциал саноқ тизимларида бир хил содир бўлади.* Бошқача айтганда, барча табиат қонунлари (ва уларни тавсифловчи тенгламалар) бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ўзгармайди, яъни мазкур қонунлар инерциал саноқ тизимларига нисбатан инвариантдир.

Ёруғлик тезлигининг доимийлиги ҳақидаги иккинчи постулат қуйидагича таърифланади: *ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги ёруғлик манбаининг ҳаракатига боғлиқ эмас ва у барча инерциал саноқ тизимларида бир хилдир.*

Юқорида зикр этилган постулатлар жуда кўп тажрибаларда тасдиқланган. Масалан, Физо тажрибаларида ёруғликнинг тезлиги ёруғлик тарқалаётган муҳитнинг ҳаракатига боглиқ эмаслиги аниқланган. Майкельсон ва Морли тажрибалари ҳам шуни кўрсатдики, ёруғликнинг тезлиги ёруғлик манбаининг ҳаракат тезлигига боғлиқ эмас экан. Инерция (масса) маркази атрофида катта тезлик билан ҳаракатланувчи қўшалоқ юлдузларнинг ҳаракатини кузатиш натижалари ва бошқа бир қатор тажрибалар ҳам ёруғлик тезлиги ўз манбаининг ҳаракатига боғлиқ эмаслигини тасдиқлади. Шундай қилиб, ёруғлик тезлиги барча инерциал саноқ тизимларида бир хил эканлиги аниқланди. Шунинг билан бирга, *ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги табиатда кузатиладиган тезликлар ичида энг каттасидир. Ҳар қандай жисмлар ўзаро таъсирининг узатилиш тезлиги ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан катта бўлиши мумкин эмас.*

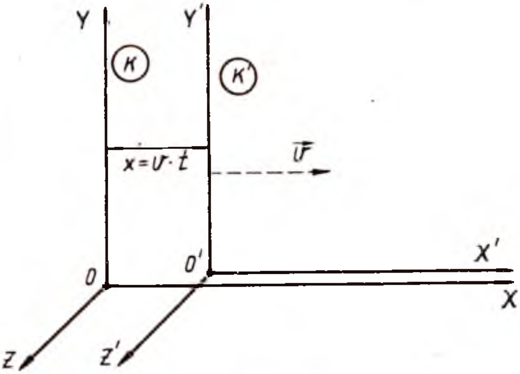
Галилей алмаштиришларидан келиб чиқадиган тезликларни қўшиш қоидасига ((3.5) га қ.) асоcан бир саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ёруғликнинг тезлиги $u=v+c$ га тенг бўлиши керак (бу ерда v — K' саноқ тизимининг K тизимга нисбатан тезлиги). Тезликларни қўшишнинг бу қонуни эса ёруғлик тезлигининг доимийлик принципига мутлақо зиддир. Бу зиддиятнинг сабаби Ньютон механикасида алоҳида-алоҳида олиб қаралган фазо ва вақтнинг мутлақ деб ҳисобланганлигидадир.

Фазо ва вақтни мутлақ деб ҳисоблаганда жисмлар нисбий тезлигининг ёруғлик тезлигидан катта бўла олмаслигини тушунтириш асло мумкин эмас. Шу боисдан Ньютон механикасидаги фазо ва вақт мутлақдир деган тасаввурлардан воз кечишга тўғри келади.

Шундай қилиб, бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда, фазо ва вақтнинг ўзгаришини Галилей алмаштиришлари воситасида эмас, балки бошқача алмаштиришлар воситасида тасвирлаш зарурати келиб чиқди. Бундай алмаштириш тенгламаларини биринчи бўлиб голландиялик олим Г. Лоренц (1853—1928) келтириб чиқарган.

7.2- §. ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИ

Лоренц алмаштиришларида бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда x, y, z координаталар билан бир қаторда вақт ҳам ўзгарувчан катталик деб қаралади, яъни бир инерциал саноқ тизимида фазо ва вақт x, y, z, t билан ифодаланса, иккинчи инерциал саноқ тизимида бу катталиклар x', y', z', t' қийматларга эга бўлади (мазкур алмаштиришларда $t \neq t'$ деб қаралади). Лоренц алмаштиришларини келтириб чиқариш учун 3.1- § да кўриб ўтилгандек, K ва K' инерциал саноқ тизимларини оламиз ва бу тизимларнинг X, Y, Z ва X', Y', Z' ўқларини бир-бирига мос равишда параллел жойлаштирамиз (7.1- расм). K саноқ тизимини шартли равишда қўзғалмас деб ҳисоблайлик, K' эса K га нисбатан X ўқи бўйлаб $\bar{v}$ тезлик билан текис ҳаракатланаётган бўлсин. Дастлабки пайтда (яъни $t=0$ ва $t'=0$ бўлганда) иккала тизим координаталарининг боши устма-уст тушади ($x=x'=0$) деб фараз қиламиз. Фазода бирор нуқтани олайлик ва бу нуқта K' саноқ тизимининг бошида жойлашган бўлсин. У ҳолда $t=t'=0$ бўлганда, мазкур нуқтанинг координатаси $x'=0$ бўлиши табиий. Бу ҳол учун Лоренц алмаштиришларининг ошкор кўринишини топиш ҳақидаги масала юқорида зикр этилган фазодаги ўша нуқта учун x, y, z, t катталиклар билан x', y', z',



7.1-расм

t' катталиклар орасидаги боғланишлар формулаларини топиш масаласига келтирилади. Фазо ва вақтнинг бир жинслилиги бу катталиклар орасидаги боғланишлар чизиқли боғланиш бўлишлари кераклигини тақозо қилади. Шу сабабли K ва K' инерциал саноқ тизимларининг мос равишда x ва x' координаталари учун Галилей алмаштиришларини ифодаловчи ((3.1) ва (3.2) га қ.)

$$x=x'+vt'; \qquad x'=x-vt$$

формулалар фақат мутаносиблик коэффициенти γ билан фарқ қилувчи қуйидаги

$$x=\gamma(x'+vt'), \tag{7.1}$$

$$x'=\gamma(x-vt) \tag{7.2}$$

ифодалар билан алмаштирилиши лозим (K ва K' тизимлар тенг ҳуқуқли инерциал саноқ тизимлари бўлганлиги туфайли мутаносиблик коэффициенти γ иккала формула учун бир хил қилиб олинган).

Энди мутаносиблик коэффициенти нимага тенг эканлигини аниқлашимиз керак. Бунинг учун ёруғлик тезлиги барча инерциал саноқ тизимларида бир хил қийматга тенг эканлиги ҳақидаги постулатдан фойдаланамиз. Вақт учун саноқ боши сифатида K ва K' тизимларнинг координата бошлари (0 ва 0′ нуқталар) устма-уст тушган пайтни танлаш қулай. $t=t'=0$ бўлган пайтда координата бошида ёруғлик учқуни чақнаган деб фараз қилиб, X *ва* X' ўқлари йўналишида ёруғлик фронтининг тарқалиш жараёнини олиб қарайлик. K ва K' тизимларида ёруғлик тезлиги бир хил бўлганлиги туфайли вақтнинг ихтиёрий t ва t' пайтларида ёруғлик фронтининг X ва X' йўналишларидаги координаталари мос равишда:

$$x=ct; \qquad x'=ct' \tag{7.3}$$

тенгликлар билан аниқланадиган нуқталарга етиб боради. Энди (7.1) ва (7.2) тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда бир-бирига кўпайтирсак,

$$xx'=\gamma^2(x'+vt')\,(x-vt)$$

бўлади. Бу формуладаги x ва x' ларни (7.3) формуладаги ct ва ct' орқали ифодаласак

$$ct\cdot ct'=\gamma^2(ct'+vt')\,(ct-vt)=\gamma^2(c+v)\,(c-v)\,tt',$$

яъни

$$c^2=\gamma(c^2-v^2)$$

тенглик келиб чиқади. Бундан қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \tag{7.4}$$

бу ерда $\beta=v/c$ белгилашни киритдик. (7.4) га асосан (7.1) ва (7.2) тенгликларни қуйидагича ёзамиз:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{7.5}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (7.6)$$

Ҳаракат фақат X ва X' ўқлари йўналишида содир бўлаётганлиги туфайли бу йўналишга тик бўлган y, y', z, z' координаталар аввалигича ўзгармай қолишини, яъни

$$y = y', \qquad z = z' \qquad (7.6,a)$$

муносабатлар бажарилишини тушуниш қийин эмас.

Энди K инерциал саноқ тизимидан K' тизимга ўтганда вақт (t ва t') учун алмаштириш формулаларини топайлик. Бунинг учун (7.6) даги x' учун топилган ифодани (7.5) формулага қўямиз:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} + vt'\right) = \frac{x - vt}{1-\beta^2} + \frac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Бу формулани vt' га нисбатан ечамиз:

$$vt' = x\sqrt{1-\beta^2} - \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ёки

$$t' = \frac{x}{v}\sqrt{1-\beta^2} - \frac{x - vt}{v\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1 - v^2/c^2)x - x + vt}{v\sqrt{1-\beta^2}},$$

бинобарин:

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (7.7)$$

Худди шунингдек, (7.5) ва (7.6) тенгликлардан t учун қуйидагига эга бўламиз:

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (7.8)$$

(7.5) — (7.8) формулалар бир-бирига нисбатан ўзгармас тезлик билан ҳаракатланаётган тизимлар координаталарини ўзаро боғлайди ва улар *Лоренц алмаштиришлари* дейилади. Умумий кўринишда Лоренц алмаштиришлари қуйидагича ёзилади:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + v/c^2 \cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (7.9)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - v/c^2 \cdot x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (7.10)$$

K' саноқ тизимидан K тизимга ўтиш (7.9) формулалар орқали амалга оширилади ва аксинча, K саноқ тизимидан K' тизимга (7.10) формулалар воситасида ўтилади. (7.9) ва (7.10) формулалардан кўриниб турибдики, Лоренц алмаштиришлари координаталар билан бир қаторда вақтни ҳам ўз ичига олаяпти: координаталарни алмаштириш формулаларида вақт иштирок этаяпти, вақтни алмаштириш формулаларида эса координаталар иштирок этаяпти. Демак, Лоренц алмаштиришларида фазо ва вақт бир-бири билан узвий боғлиқ бўлиб, уларни алоҳида олиб қараш маънога эга эмас. Бинобарин, нисбийлик назарияси бир-бири билан узвий боғланган фазо ва вақт ҳақидаги назариядир.

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, (7.9) ва (7.10) формулалар тенг ҳуқуқли бўлиб, бир-биридан фақат тезлик v нинг олдидаги ишора билан фарқ қилади. Бунинг боиси шундан иборатки, K' саноқ тизими K га нисбатан $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаяпти деб қаралса, K саноқ тизими K' га нисбатан $-\vec{v}$ тезлик билан чап томонга ҳаракатланаяпти деб қараш мумкин.

Лоренц алмаштиришлари $\vec{v}$ нинг исталган қийматларида ўринли бўлиб, Галилей алмаштиришларини инкор этмайди: кичик ($v \ll c$) тезликларда Лоренц алмаштиришлари бевосита Галилей алмаштиришларига ўтади, яъни Галилей алмаштиришлари Лоренц алмаштиришларининг хусусий ҳолидир. Ҳақиқатан ҳам, $v \ll c$ бўлганда (7.9) ва (7.10) формулаларда квадрат илдиз тагидаги $\beta^2 = v^2/c^2$ нисбат 1 га нисбатан жуда кичик сонни ташкил қилади, яъни мазкур нисбат нолга интилгани учун уни ҳисобга олмаслигимиз мумкин. У ҳолда Лоренц алмаштиришлари Галилей алмаштиришларининг ўзи бўлиб қолади.

Пировардида шуни ҳам қайд қилайликки, ёруғлик тезлигидан катта ($v > c$) тезликларда (7.9) ва (7.10) формулалардаги x, t, x' ва t' катталиклар мавҳум қийматга эга бўлади. Бу натижа бизни шундай хулосага олиб келадики, ёруғлик тезлиги (c) табиатда мавжуд бўлган тезликларнинг энг каттасидир ва ҳеч қандай тезлик ёруғлик тезлигидан катта бўлиши мумкин эмас. Ундан ташқари, $v = c$ бўлганда (маълумки, v — ҳаракатдаги инерциал саноқ тизимининг тинч турган саноқ тизимига нисбатан текис ҳаракат тезлиги) Лоренц алмаштиришларидаги x, t, x' ва t' катталиклар чексиз катта қийматга эга бўлиши керак, ваҳоланки бундай бўлиши бирор маънога эга эмас. Демак, ҳаракатдаги саноқ тизими билан боғланган жисмнинг нисбий тезлиги ҳамма вақт ёруғлик тезлигидан кичик бўлади.

7.3- §. ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН НАТИЖАЛАР

Ньютон механикасида барча инерциал саноқ тизимларида воқеалар бир вақтда содир бўлади деб қаралади. Чунки бу механика оддий шароитлардаги жараёнларни, яъни ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик тезликлар билан боғлиқ жараёнларни акс эттиради. Нисбийлик назарияси исталган тезликлар билан боғлиқ бўлган жараёнларни ўз ичига олади. Элементар заррачаларнинг ҳаракати ва улар иштирокидаги жараёнлар аксарият ҳолларда ёруғлик тезлигига яқин тезликларда юз беради. Ёруғлик тезлигига яқин тезликлар билан ҳаракатланаётган элементар заррачалар билан боғлиқ ҳолда кечадиган ҳодиса ва жараёнларни биз бевосита идрок эта олмаймиз. Шу боисдан нисбийлик назариясидан келиб чиқадиган натижалар кундалик ҳаётимизда учрайдиган ҳодисаларга ва оддий шароитда ўтказилган тажриба натижаларига зид бўлиб туюлади. Хусусан, Лоренц алмаштиришларидан келиб чиқадиган натижалар, яъни бир вақтлиликнинг, жисм ўлчамларининг ҳамда вақт оралигининг нисбийликлари шулар жумласидандир. Қуйида уларни кўриб чиқамиз.

1. Бир вақтлиликнинг нисбийлиги. Барча инерциал саноқ тизимлари тенг ҳуқуқли бўлишига қарамай, уларда содир бўлаётган воқеаларнинг бир вақтлилиги ва кетма-кетлиги ҳар хилдир. K ва K' инерциал саноқ тизимларини олайлик ва худди юқоридагидек (7.2-§), K' саноқ тизими K тизимга нисбатан X ўқи йўналишида ўзгармас $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин. Тинч турган K саноқ тизимининг x_1 ва x_2 нуқталарида бир вақтнинг ўзида ($t_1=t_2$, $\Delta t=t_2-t_1=0$) икки воқеа содир бўлсин: айтайлик, x_1 ва x_2 нуқталарда жойлашган иккита милтиқдан бир вақтда ўқ отилсин. Бу икки воқеа ҳаракатдаги K' саноқ тизимининг x_1' ва x_2' нуқталарида айни бир вақтда юз берадими ёки вақтнинг мос равишда t_1' ва t_2' пайтларида содир бўладими, деган саволга жавоб бериш учун Лоренц алмаштиришларидан фойдаланамиз. $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ эканлигини назарда тутиб, x_1, x_2, x_1', x_2', t_1, t_2, t_1' ва t_2' лар учун Лоренц алмаштиришларини қуйидагича ёзамиз:

$$x_1=\gamma(x_1'+vt_1'), \qquad x_2=\gamma(x_2'+vt_2');$$

$$x_1'=\gamma(x_1-vt_1), \qquad x_2'=\gamma(x_2-vt_2);$$

$$t_1=\gamma(t_1'+\frac{v}{c^2}x_1'), \qquad t_2=\gamma(t_2'+\frac{v}{c^2}x_2');$$

$$t_1'=\gamma(t_1-\frac{v}{c^2}x_1), \qquad t_2'=\gamma(t_2-\frac{v}{c^2}x_2) .$$

Бу тенгликлардан $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta x'=x_2'-x_1'$, $\Delta t=t_2-t_1$, $\Delta t'=t_2'-t_1'$ катталиклар учун Лоренц алмаштиришларини

$$\Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t'); \tag{7.11}$$

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t); \tag{7.12}$$

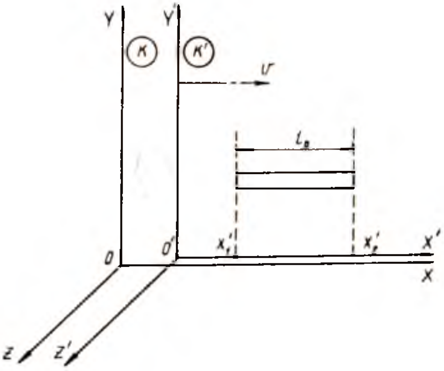
$$\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'); \tag{7.13}$$

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x) \tag{7.14}$$

тарзда ёзиш мумкин; бу ерда $\Delta t'$ — ҳаракатланаётган K' саноқ тизимидаги кузатувчи нуқтаи назарича икки воқеанинг содир бўлиш пайтлари оралиги. Мазкур $\Delta t'$ нимага тенг эканлигини аниқлайлик. Тинч турган K саноқ тизимида икки воқеа бир вақтда амалга ошаётганлигини (яъни $\Delta t=t_2-t_1=0$ эканлигини) эътиборга олсак, охирги (7.14) тенгликдан

$$\Delta t'=-\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x \tag{7.15}$$

бўлади. Бу тенгликдан кўриниб турибдики, *бир инерциал саноқ тизимининг ҳар хил нуқталарида бир вақтда* ($t_1=t_2$, $\Delta t=0$) *содир бўлган икки воқеа бошқа инерциал саноқ тизимида вақтнинг ҳар хил* ($t_1'\neq t_2'$, $\Delta t'\neq 0$) *пайтларида содир бўлар экан.* Шунинг учун бир вақтда бўлаётган воқеалар ҳақида гапирганимизда бу воқеалар қайси саноқ тизимида олинаётганлиги аниқ бўлиши керак. (7.15) ифодани таҳлил қилиб (бу формуладаги манфий ишорани эътиборга олган ҳолда) яна қуйидаги хулосага келамиз: тинч турган саноқ тизимида координатанинг катта қийматига мос келувчи воқеа ҳаракатдаги тизимда вақт бўйича олдинроқ содир бўлади. (7.12), (7.14) ва (7.15) формулалардан яна қуйидаги натижа келиб чиқади: фақат бир хусусий ҳолда, яъни тинч турган саноқ тизимининг айнан бир нуқтасида ($\Delta x=0$) иккала воқеа бир вақтда ($\Delta t=0$) амалга ошган бўлса, ҳаракатдаги саноқ тизимида ҳам мазкур икки воқеа фазонинг айнан бир нуқтасида ($\Delta x'=0$) бир вақтда ($\Delta t'=0$) содир бўлади.



7.2-расм

2. Ҳаракатдаги жисмнинг узунлиги. Лоренц алмаштиришларидан келиб чиқадиган натижалардан яна бири шундан иборатки, *бир-бирига нисбатан ҳаракатда бўлган турли инерциал саноқ тизимларида жисмнинг узунлиги турлича бўлади.* Бунга ишонч ҳосил қилиш учун, юқорида кўриб ўтилганидек, иккита K ва K' саноқ тизимларини олайлик. K' саноқ тизимида $0'X'$ ўқига параллел қилиб бирор таёқчани жойлаштирайлик ва K' тизими таёқча билан бирга K тизимга нисбатан 7.2- расмда кўрсатилган йўналишда $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин. Равшанки, таёқча K' тизимга нисбатан тинч ҳолатда бўлади ва бу тизимда таёқча учларининг координаталари x_1' ва x_2' бўлгани учун унинг K' тизимдаги узунлиги $l_0=x_2'-x_1'$ бўлади.

Энди таёқчанинг K тизимдаги узунлиги нимага тенг эканлигини аниқлайлик. Таёқча бу тизимга нисбатан ҳаракатланаётганлиги туфайли унинг учларининг координаталарини айнан бир $t=t_1=t_2$ вақтда ўлчаш лозим. K тизимда таёқча учларининг координаталари x_1 ва x_2 бўлгани учун унинг бу тизимдаги узунлиги $l=x_2-x_1$ бўлади. l_0 ва l узунликлар орасидаги боғланишни топиш мақсадида x'_1 ва x'_2 лар учун Лоренц алмаштиришларини қуйидагича ёзамиз:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Бу икки тенгликдан:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

эканлиги келиб чиқади, яъни таёқчанинг K тизимга нисбатан v тезлик билан ҳаракатланаётган вақтдаги узунлиги билан у тинч турган тизимдаги узунлиги орасидаги боғлиқлик

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (7.16)$$

муносабат билан ифодаланади. Таёқчанинг у тинч турган тизимдаги узунлиги (l_0) унинг *хусусий узунлиги* дейилади. Охирги формуладан кўриниб турибдики, таёқчанинг K тизимдаги узунлиги K' тизимдагига нисбатан қисқа бўлар экан ва жисмнинг тезлиги (v) қанчалик катта бўлса, унинг узунлиги (7.16) ифодага кўра шунчалик қисқариб борар экан. Бу қисқариш *Лоренц қисқариши* деб юритилади.

Шундай қилиб, таёқчанинг узунлиги турли саноқ тизимларида турлича, яъни унинг узунлиги нисбий маънога эга: таёқча қайси тизимда тинч турган бўлса, ўша тизимда у энг катта узунликка эга бўлади. Юқорида зикр этилган қисқариш нисбий маънога эга бўлганлиги туфайли жисмда ҳеч қандай кучланишлар содир бўлмайди, чунки жисмга ҳеч қандай ташқи кучлар таъсир қилмайди. Шунинг учун Лоренц қисқариши релятив натижадир. Ҳаракат йўналишига тик йўналишларда жисмнинг ўлчамлари (яъни таёқчанинг эни) ўзгармайди (унинг эни барча инерциал саноқ тизимларида бир хиллигича қолади).

Лоренц қисқариши барча тезликларда ҳам ўринли. Лекин амалий жиҳатдан бу қисқариш ёруғлик тезлигига яқин тезликларда сезиларли даражада бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, Лоренц қисқариши туфайли куб шаклидаги жисм K тизимдаги кузатувчига параллелепипед бўлиб кўриниши керак эди. Лекин бу ерда яна бир физикавий ҳодиса борки, у Лоренц қисқаришини кузатишга имкон бермайди. Бу ҳодиса шундан иборатки, жисмнинг турли узоқликда турган нуқталаридан келаётган ёруғлик нури киши кўзига ҳар хил вақт давомида етиб келади: натижада жисм шакли кузатувчига ўзгариб кўринади. Масалан, Лоренц қисқариши бўлмаганда эди, куб шаклидаги жисм кузатувчига ҳаракат йўналишида чўзинчоқ бўлиб кўринар эди. Турли нуқталардан келаётган ёруғлик нури ҳар хил вақтда етиб келиши билан бирга Лоренц қисқариши ҳам мавжуд бўлганлиги туфайли бу икки ўзгариш бир-бирини «йўққа чиқаради».

3. **Вақт оралиғининг нисбийлиги.** Ньютон механикасининг тасаввурларига кўра вақтнинг ўтиши барча инерциал саноқ тизимларида айнан бир хилдир. Нисбийлик назариясига кўра эса айнан бир воқеанинг ёки жараённинг давом этиш вақти турли инерциал саноқ тизимларида турлича бўлади. Фараз қилайлик, ҳаракатланаётган K' тизимнинг x' координатаси билан аниқланаётган нуқтасида жойлашган бирор жисм билан боғлиқ жараён t'_1 пайтда бошланиб, t'_2 пайтда тугаллансин. Равшанки, жараён $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ вақт давом этган бўлади ва мазкур $\Delta\tau$ вақт оралиғи K' саноқ тизимида ўрнатилган соат воситасида ўлчанган, яъни вақтни ўлчайдиган асбоб ҳам K' тизимнинг x' нуқтасида жойлашган жисм билан бирга $\bar{v}$ тезлик билан ҳаракатланаяпти. Шунинг учун τ вақт жисмнинг *хусусий вақти* дейилади.

Энди мазкур жараён содир бўлишига кетган вақт оралиғини қўзғалмас деб ҳисобланган K саноқ тизимида топайлик. Бу саноқ тизимидаги кузатувчи шу тизимдаги соатнинг кўрсатишига кўра жараённинг бошланиши t_1 пайтда, тугалланиши t_2 пайтда бўлганлигини қайд этади. Жараён K' тизимнинг x' координатаси билан аниқланадиган нуқтасида содир бўлаётганлиги сабабли t_1, t'_1, t_2 ва t'_2 катталиклар орасидаги боғланишни ифодаловчи Лоренц алмаштиришларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$t_1 = \frac{t'_1 + v\,/c^2 \cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + v\,/c^2 \cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

бу икки тенгликдан

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

келиб чиқади. Охирги формуладан:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}\ . \tag{7.17}$$

Бу формуладан кўриниб турибдики, ҳаракатдаги тизимда жараённинг давом этиш вақти тинч турган тизимдагига нисбатан $1/\sqrt{1-\beta^2}$ марта кам экан (чунки $\sqrt{1-\beta^2} < 1$); бошқача айтганда, тинч турган саноқ тизимига нисбатан ҳаракатдаги тизимда вақт секин ўтади. Бу ҳодисани ҳаракатдаги саноқ тизимларида вақт ўтишининг секинлашуви дейилади. Демак, *вақт оралиғи ҳам нисбийдир.*

Жисм қайси саноқ тизимида тинч турган бўлса (жисм K' тизимда тинч турибди, лекин бу тизим K тизимга нисбатан ҳаракатда), хусусий вақт оралиғи ўша тизимдаги соат воситасида ўлчанади. Жисм бир саноқ тизимидан иккинчисига ўтказилганда хусусий вақт оралиғи жисм билан бирга ҳаракатланаётган соат воситасида ўлчанганлиги туфайли мазкур вақт оралиғи Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантдир, яъни хусусий вақт оралиғи бир саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда ўзгармай қолади.

Вақт ўтишининг секинлашуви фақат соатларнинг секин юришидангина иборат бўлиб қолмай, балки ҳаракатланувчи тизимда барча физикавий жараёнлар ҳам $1/\sqrt{1-\beta^2}$ марта секин содир бўлиши тақозо этилади. Ҳаракатдаги тизимда вақтнинг секин ўтиши жуда катта тезликларда (ёруғлик тезлигига яқин тезликларда) сезиларли даражада намоён бўлади. Бу ҳодисанинг мавжудлиги тажрибалар ва кузатишлар орқали кўп марта тасдиқланган. Мазкур ҳодиса, масалан, мюонлар билан ўтказилган тажрибаларда тасдиқланган. Мюонлар яшаш даври жиҳатидан турғун бўлмаган зарралар бўлиб, уларнинг хусусий яшаш вақти (яъни улар билан боғланган саноқ тизимида ўлчанган яшаш вақти) $2{,}5\cdot10^{-6}$ секундга тенг (мюон — массаси электрон массасига нисбатан 270 марта катта бўлган мусбат зарядли зарра). Мюонлар атмосферанинг юқори қатламларида (20—30 км баландликда) космик нурлар таркибида учрайди ва у жисмлар билан (асосан атмосфера таркибидаги молекулалар билан) таъсирлашиш натижасида парчаланади; натижада мюон ўрнида электрон ёки позитрон ва иккита нейтрино ҳосил бўлади. Мюонлар ёруғлик тезлигига яқин тезликлар билан ҳаракатланадилар. Агар мюон ҳатто ёруғлик тезлигига тенг тезлик билан ҳаракат қилганида ҳам атмосферанинг юқори қатламларидан пастга қараб (Ер томонга) $2{,}5\cdot10^{-6}$ секунд вақт ичида фақат 600 метрга яқин масофани босиб ўтишга улгурган бўлар эди. Кузатишларнинг кўрсатишича, мюонлар 20—30 км баландликда ҳосил бўлса ҳам улар жуда кўп миқдорда Ер сиртида жойлашган лабораторияларда қайд қилинмоқда. Бу ҳол жуда катта тезлик билан ҳаракатланаётган мюонларнинг хусусий яшаш вақтининг $1/\sqrt{1-\beta^2}$ марта ошиши билан тушунтирилади. Худди шунингдек, бирор радиоактив моддани ғоят катта тезлик билан ҳаракатга келтирилса, унинг радиоактив емирилиш жараёни ҳам $1/\sqrt{1-\beta^2}$ марта секинлашади (яъни унинг ярим емирилиш даври $1/\sqrt{1-\beta^2}$ марта ошади).

Демак, айнан бир жараён турли инерциал саноқ тизимларида турлича вақт давом этади.

7.4- §. РЕЛЯТИВ МЕХАНИКАДА ТЕЗЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ

Галилей алмаштиришларидан келиб чиқадиган натижалардан бири шундан иборатки, *K инерциал саноқ тизимига нисбатан OX йўналишда v тезлик билан текис ҳаракат қилаётган K' инерциал саноқ тизимидаги жисм (моддий нуқта) шу тизимга нисбатан*

$\vec{v}_1$ *тезлик билан ҳаракатда бўлса, мазкур жисмнинг К тизимдаги тезлиги*

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}'$$

муносабат орқали ифодаланади. Лоренц алмаштиришларига асосланган релятив механикада юқорида зикр этилган тезликлар орасидаги богланиш бошқачадир. Бу боғланишни аниқлаш учун моддий нуктанинг K саноқ тизимидаги тезлигининг X ўқи йўналишидаги ʻташкил этувчисини

$$u_x = \frac{dx}{dt} \tag{7.18}$$

кўринишда ёзамиз. Мазкур тезликнинг X' ўқ йўналиши бўйича олинган ташкил этувчиси

$$u'_{X'} = \frac{dx'}{dt'} \tag{7.19}$$

тарзда ёзилади. Лоренц алмаштиришларига ((7.9) формулага қ.) асосан dx ва dt катталикларни dx' ва dt' лар орқали ёзсак, улар

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \tag{7.20}$$

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2)dx'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.21}$$

кўринишни олади. Энди (7.20) нинг (7.21) га нисбатини олсак, у ҳолда (7.18) га асосан

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + (v/c^2)dx'} \tag{7.22}$$

га эга бўламиз. Бу ифоданинг ўнг томонининг сурат ва махражини dt' га бўлсак ҳамда $dx'/dt' = u'_{x'}$ эканлигини назарда тутсак, (7.22) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$u_x = \frac{u'_{x'} + v}{1 + u'_{x'} \cdot v/c^2}. \tag{7.23}$$

Агар моддий нуқта X ва X' ўқларга параллел равишда $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, унинг K тизимдаги тезлиги (u) нинг қиймати u_x га, $u'_{x'}$ эса моддий нуқтанинг K' тизимдаги тезлиги v' га тенг бўлади. У ҳолда (7.23) қуйидаги кўринишни олади:

$$u = \frac{v' + v}{1 + v' \cdot v/c^2}. \tag{7.24}$$

(7.23) ва (7.24) формулалар K' саноқ тизимидан K тизимга ўтишда u_x ёки u тезликни топишга имкон беради. Худди шунингдек, (7.10) формуладан фойдаланиб, K саноқ тизимидан K' тизимга ўтишда $u'_{x'}$ тезликни топиш

$$u'_{x'} = \frac{v_x - v}{1 - v_x \cdot v/c^2} \tag{7.25}$$

ифода воситасида амалга оширилади. Юқорида келтирилган (7.23) — (7.25) формулалар *тезликларни қўшишнинг релятив қоидасини* ифодалайди.

(7.24) ифодадан кўриниб турибдики, натижавий тезлик (u) икки тезликнинг йиғиндиси ($v'+v$) дан кичик экан. Тезликларни қўшишнинг релятив қоидасида ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги (c) дан катта тезликларни инкор этувчи нисбийлик назариясининг иккинчи постулати ўз ифодасини топган: фараз қилайлик, K' саноқ тизимида зарра (моддий нуқта) ёруғлик тезлигида ҳаракатлансин (масалан, фотон ёки нейтрино), яъни $v'=c$ бўлсин. У ҳолда K саноқ тизимидаги кузатувчи зарра

$$u=\frac{c+v}{1+cv/c^2}=\frac{(c+v)c}{c+v}=c$$

тезлик билан ҳаракатланаётганини қайд қилади. Натижада биз шундай хулосага келамизки, ***моддий нуқтанинг мутлақ тезлиги ёруғлик тезлигидан катта бўла олмайди.*** Агар моддий нуқтанинг K' саноқ тизимидаги тезлиги ва саноқ тизимларининг бир-бирига нисбатан тезлиги ёруғлик тезлигидан жуда кичик, яъни $v'\ll c$, $v\ll c$ бўлса, унда $v'v/c^2\ll 1$ бўлади ва (7.24) ифодадан Галилей алмаштиришларидан келиб чиқадиган тезликларни қўшиш қоидасига ўтамиз:

$$u=v'+v\,.$$

Демак, релятив механика қонунлари кенг қамровли моҳиятга эга бўлиб, жисмнинг кичик ($v\ll c$) тезликларида у Ньютон механикаси қонунлари кўринишини олади.

7.5- §. ОРАЛИҚ (ИНТЕРВАЛ)

Галилей алмаштиришларидан келиб чиқадиган натижага кўра жисмнинг ўлчамлари (узунлиги) ва икки воқеанинг содир бўлишида ўтган вақт оралиғи бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ўзгармай қолади, яъни инвариант ҳисобланади. Маълумки, жисмнинг ўлчамлари (хусусан, узунлиги) фазода x, y, z координаталар билан берилади ва Ньютон механикасида уч ўлчовли фазо ҳамда бир ўлчовли вақт бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда, яъни бир-биридан мустақил равишда мавжуд. Бошқача айтганда, воқеанинг қаерда содир бўлганлиги ҳақидаги масала шу воқеанинг қачон содир бўлганлиги ҳақидаги масаладан мустақил ҳолда — алоҳида олиб қаралади. Масалан, Ньютон механикасида координаталари x_1, y_1, z_1 ва x_2, y_2, z_2 бўлган фазодаги икки нуқта орасидаги масофа қуйидагича аниқланади:

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \qquad (7.26)$$

Бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда x_1, y_1, z_1 ва x_2, y_2, z_2 координаталар ўзгарса ҳам, l нинг қиймати ўзгармай қолади, яъни l Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.

Лоренц алмаштиришларидан келиб чиқадиган хулоса эса шундан иборатки, жисмларнинг ўлчамлари (хусусан, узунлиги) ва воқеалар орасидаги вақтнинг ўтиши (давомийлиги) бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ўзгарганлиги туфайли бу катталиклар мазкур алмаштиришларга нисбатан инвариант эмас. Ҳақиқатан, нисбийлик назариясида фазо ва вақт бир-бири билан узвий боғланган бўлиб, Лоренц алмаштиришларини ифодаловчи тенгламаларда x, y, z координаталар билан бир қаторда вақт тўртинчи тенг ҳуқуқли катталик сифатида иштирок этади. Шу боисдан нисбийлик назариясида бир-бири билан ўзаро боғланган ягона *тўрт ўлчовли фазо-вақт* тушунчаси киритилади. Тўрт ўлчовли фазода вақт (t) ўрнида нуқта координаталари билан бир ўлчамга эга бўлган ct (c — ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги) катталикдан фойдаланилади, яъни тўрт ўлчовли фазода X, Y, Z, ct ўқларидан иборат координаталар тизими қўлланилади. У ҳолда содир бўлган воқеа фазо-вақт координаталар тизимида x, y, z, ct координаталар билан аниқланувчи нуқта сифатида ифодаланади. Бу нуқта *дунёвий нуқта* деб аталади. Вақт ўтиши билан дунёвий нуқта ўз ўрнини ўзгартириб фазо-вақтда *дунёвий чизиқ* деб аталадиган траектория чизади. Шуниси эътиборга моликки, масалан, моддий нуқта уч ўлчовли фазода ҳатто тинч ҳолатда бўлса ҳам унинг дунёвий нуқтаси ct ўқига параллел бўлган (дунёвий нуқта ct га мутаносиб бўлганлиги туфайли) тўғри чизиқдан иборат дунёвий чизиқ бўйича ҳаракатланади.

Тўрт ўлчовли фазода кетма-кет содир бўлган икки воқеани тавсифлаш учун оралиқ (интервал) деган тушунча киритилади. Тўрт ўлчовли фазода биринчи воқеа x_1, y_1, z_1, ct_1 координаталар билан аниқланувчи дунёвий нуқта билан, иккинчи воқеа x_2, y_2, z_2, ct_2 координаталар билан аниқланувчи дунёвий нуқта билан ифодаланади. x_1, y_1, z_1, ct_1 ва x_2, y_2, z_2, ct_2 нуқталар орасидаги оралиқ ёки қисқа қилиб айтганда, икки воқеа орасидаги оралиқ бирор K саноқ тизимида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$s=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]}. \qquad (7.27)$$

Бу формулани (7.26) га асосан

$$s=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-l^2} \qquad (7.28)$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу катталик барча инерциал саноқ тизимларида бир хил қийматга эга, яъни бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда (7.27) нинг қиймати ўзгармайди. Бошқача айтганда, бу катталик Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантдир. Унинг инвариантлигини исботлаш учун (7.27) ни

$$s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \qquad (7.29)$$

кўринишда ёзамиз. Сўнгра Лоренц алмаштиришларини ифодаловчи (7.9) формулага асосан ҳамда (7.29) даги x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, t_2-t_1 айирмалар K' саноқ тизимининг мос катталиклари орқали ифодаланган

$$x_2-x_1=\frac{(x'_2-x'_1)+v(t'_2-t'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y_2-y_1=y'_2-y'_1,\ z_2-z_1=z'_2-z'_1,$$

$$t_2-t_1=\frac{(t'_2-t'_1)+(v/c^2)(x'_2-x'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

тенгликлардан қуйидагига эга бўламиз (бу ерда $\beta=\frac{v}{c}$):

$$(x_2-x_1)^2=\frac{(x'_2-x'_1)^2+2v(x'_2-x'_1)(t'_2-t'_1)+v^2(t'_2-t'_1)^2}{1-\beta^2}; \qquad (7.30)$$

$$(y_2-y_1)^2=(y'_2-y'_1)^2,\ (z_2-z_1)^2=(z'_2-z'_1)^2; \qquad (7.31)$$

$$c^2(t_2-t_1)^2=\frac{c^2(t'_2-t'_1)^2+2v(x'_2-x'_1)(t'_2-t'_1)+(v/c)^2(x'_2-x'_1)^2}{1-\beta^2}. \qquad (7.32)$$

Энди (7.30) — (7.32) ифодаларни (7.29) формулага қўйсак,

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=$$
$$=c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)-(z'_2-z'_1)^2 \qquad (7.33)$$

тенглик бажарилади, яъни $s^2=s'^2$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, *оралиқ (интервал) ва унинг квадрати Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталик экан.*

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, Ньютон механикасидаги уч ўлчовли фазода «икки нуқта орасидаги масофа» тушунчаси қанчалик муҳим ўрин тутса, релятив механикада «оралиқ» тушунчаси ҳам шунчалик муҳим ўрин тутади. Лекин «масофа» билан «оралиқ»нинг бир-биридан фарқи шундан иборатки, бунда s тўрт ўлчовли фазони акс эттиради, чунки у Лоренц алмаштиришларига асосланган бўлиб, x, y, z координаталар билан бир қаторда t вақтни ҳам ўз ичига олади.

Одатдаги уч ўлчовли фазода икки нуқта орасидаги масофа (l) нинг квадрати ((7.26) га қ.) мусбат сон бўлса-да оралиқнинг квадрати (7.29) га асосан мусбат ёки манфий сон бўлиши мумкин: агар $c(t_2-t_1)>l$ бўлса, s^2 нинг қиймати мусбат, агар $c(t_2-t_1)<l$ бўлса, s^2 манфий бўлади. $s^2>0$ бўлса, бундай оралиқ *вақтсимон оралиқ* дейилади. $s^2<0$ бўлса, бундай оралик *фазосимон оралиқ* дейилади. Қандайдир икки воқеа учун оралиқнинг қиймати барча инерциал саноқ тизимларида аниқланиши мумкин, лекин s^2 нинг қиймати қайси ҳолларда мусбат ва қайси ҳолларда манфий бўлишини аниқлашни соддароқ тасаввур қилиш учун $l=0$ ва $t_2-t_1=0$ бўлган хусусий ҳолларни олиб қараш мақсадга мувофиқдир: $l=0$ бўлганда икки воқеа фазонинг бир нуқтасида содир бўлаётган, $t_2-t_1=0$ бўлганда эса икки воқеа бир вақтда юз бераётган бўлади.

Вақтсимон оралиқда $c(t_2-t_1)>l$ шарт бажарилиши туфайли қаралаётган икки воқеа бирор инерциал саноқ тизимининг бир нуқтасида (бир жойда) кетма-кет содир бўлади ва мазкур икки воқеа бир вақтда содир бўладиган бошқа бирорта саноқ тизими мавжуд бўлиши мумкин эмас (бундай саноқ тизими мавжуд бўлганда эди, $t_2' - t_1' = 0$ бўлиши лозим эди ва (7.28) дан $s^2 < 0$ бўлиши келиб чиқади, бу эса вақтсимон оралиқ таърифига зиддир). Шундай қилиб вақтсимон оралиқда содир бўладиган икки воқеа учун

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

оралиқнинг қиймати аниқланади, яъни мазкур икки воқеа бирор инерциал саноқ тизимининг бир нуқтасида (бир жойда) кетма-кет t_1 ва t_2 пайтларда юз беради. Бошқача айтганда, икки воқеа дунёвий чизиқнинг икки нуқтасида жойлашади.

Равшан бўлиши учун биз юқорида вақтсимон оралиқнинг хусусий ҳоли ($l = 0$) ни олиб қарадик. Умумий ҳолда $c(t_2 - t_1) > l$ бўлганлиги туфайли бир воқеа содир бўлаётган нуқтадан иккинчи воқеа содир бўлаётган нуқтага ёруглик нури келиши учун зарур бўладиган вақт (l / c) воқеаларнинг содир бўлиш пайтлари t_1 ва t_2 орасидаги вақт ($t_2 - t_1$) дан кичик. Шу туфайли вақтсимон оралиқлар билан ажратилган бир воқеа иккинчи воқеанинг содир бўлишига сабабчи бўлиши мумкин ёки бу воқеаларнинг бири иккинчисига таъсир кўрсатиши мумкин.

Фазосимон оралиқда $c(t_2 - t_1) < l$ тенгсизлик бажарилиши лозим бўлганлиги туфайли қаралаётган икки воқеа бирор инерциал саноқ тизимининг турли нуқталарида ($l > 0$) бир вақтнинг ўзида ($t_2 - t_1 = 0$) содир бўлади. Лекин мазкур икки воқеа бир нуқтада ($l = 0$) содир бўладиган бирорта ҳам саноқ тизими мавжуд эмас, чунки икки воқеа бир нуқтада содир бўлиши учун $l = 0$ бўлиши керак; бу шарт бажарилганда эди, (7.28) га кўра $s^2 > 0$ бўлиб қолар эди, ваҳоланки, охирги тенгсизлик фазосимон оралиқ таърифига зиддир. Умуман олганда, фазосимон оралиқда ($s^2 < 0$ шарт бажарилганда) воқеалар содир бўлаётган нуқталар орасидаги масофа l, равшанки, $c(t_2 - t_1)$ дан катта. Шу боисдан мазкур икки воқеа (ҳатто ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги билан тарқалувчи сигнал воситасида ҳам) бир-бирига таъсир кўрсата олмайди. Бинобарин, фазосимон оралиқ билан ажратилган воқеаларнинг бирининг содир бўлишига иккинчиси сабаб бўла олмайди, улар бир-бирларига таъсир кўрсата олмайдилар (улар сабабий боғланган бўла олмайдилар).

$s^2 = 0$ шарт бажарилса, яъни $c(t_2 - t_1) = l$ бўлса, бундай оралиқ *нолинчи оралиқ* дейилади. Нолинчи оралиқ ёруглик нури (ёки электромагнит тўлқин) орқали боғланган икки воқеа орасидаги оралиқдир. Шунинг учун нолинчи оралиқ баъзан *ёруғликсимон оралиқ* деб ҳам юритилади. Бир-биридан l масофада бўлган икки нуқтада жойлашган икки атомнинг бири t_1 пайтда ёруғлик нури чиқарса (биринчи воқеа) ва иккинчи атом бу нурни t_2 пайтда ютса (иккинчи воқеа), бу икки воқеа учун, равшанки, $s^2 = 0$ бўлади.

Пировардида шуни таъкидлаш лозимки, барча саноқ тизимларида сабаб бўлган воқеа ҳамма вақт оқибат (натижа) ҳисобланган воқеадан олдин келади.

Шундай қилиб, Ньютон механикасида алоҳида-алоҳида олиб қаралган мутлақ фазо (масофа l) ва мутлақ вақт оралиғи ўрнида нисбийлик назариясида мутлақ деб қараладиган икки воқеа орасидаги оралиқ тушунчаси киритилди. Оралиқ s ни мутлақ деганимизда унинг бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда инвариант эканлигини тушунамиз.

Ораликнинг инвариантлигидан ташқари, биз юқорида кўриб ўтдикки, ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги (c) ва хусусий вақт оралиғи ($\Delta\tau$) Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантдир. Шунингдек тинч турган жисмнинг массаси (m) ҳам инвариант катталиклар қаторига киради.

7.6- §. РЕЛЯТИВ ИМПУЛЬС

Ҳозиргача бу бобда биз релятив механиканинг асосини ташкил этган фазо ва вақтнинг умумий хусусиятлари билан танишдик. Биз кўрдикки, фазо ва вақт бир-бири билан чамбарчас боғланган бўлиб, жисмнинг ўлчамлари (хусусан, узунлиги), воқеанинг содир бўлиш пайти ва бу воқеанинг давом этиш вақти нисбий бўлиб, бу катталиклар бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ўзгаради.

Ньютон механикасида $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган ва массаси m бўлган жисм (зарра)нинг импульси $\vec{p}=m\vec{v}$ тарзда ифодаланади ҳамда жисмлар тўпламидан иборат бўлган берк тизимнинг импульси ҳар бир алоҳида олинган инерциал саноқ тизимида вақт ўтиши билан ўзгармайди. Бу натижа кичик тезликлар ($v \ll c$) учун ўринли бўлиб, ғоят катта тезликлар учун, айниқса ёруғлик тезлигига яқин тезликлар соҳасига хос бўлган релятив механикада зарра* импульсининг ифодаси фазо ва вақтнинг узвий боғлиқлик хусусиятларини акс эттириши лозим, яъни бу ифода нисбийлик назариясидан келиб чиқадиган хулосаларга асосланиши керак. Шу мақсадда мутақаббил механикадаги импульс ифодасини қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (7.34)$$

бу ерда $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ — массаси m бўлган зарранинг қаралаётган саноқ тизимидаги тезлиги, $d\vec{r}$ — шу тизимда зарранинг кўчиши. (7.34) формула орқали ифодаланган зарра импульсининг сақланиш қонуни Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлиши учун ундаги вақт оралиғи dt ўрнида зарранинг $d\vec{r}$ масофани босиб ўтиши учун кетган хусусий вақт оралиғи $d\tau$ олиниши керак, яъни (7.34) ифода

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

---

[*] Жисм тушунчаси ўрнида релятив механикага хос бўлган зарра тушунчасини ишлатамиз.

тарзда ёзилиши керак. (7.17) муносабатга асосан вақт оралиғи:

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}\ . \qquad (7.35)$$

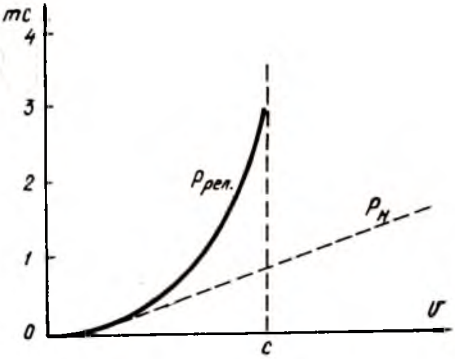
Бу ифодани (7.34) га қўйсак:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

га эга бўламиз. Бу формулада $d\vec{r}/dt = v$ шартли равишда кўзғалмас деб ҳисобланган саноқ тизими (K тизим)га нисбатан зарранинг тезлигини ифодалаганлиги туфайли бу тенглик

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (7.36)$$

кўринишни олади. Юқорида айтилганидек, бу ерда m — зарранинг массаси бўлиб, у инвариант катталикдир. (7.36) муносабат *зарранинг релятив импульсини* ифодалайди ва тажрибаларнинг кўрсатишича, шу тарзда аниқланган зарранинг импульси ҳақиқатан ҳам барча инерциал саноқ тизимларида импульснинг сақланиш қонунини қаноатлантиради. (7.34) ва (7.36) муносабатларнинг бир-биридан фарқини массанинг тезликка боғлиқлигининг натижаси деб қаралмаслиги керак, чунки биз релятив масса атамасидан фойдаланмаймиз. Бинобарин, (7.36) формула импульснинг зарра тезлигига қандай боғлиқлигини ифодалайди. Шуни таъкидлаш лозимки, кичик тезликларда ($v \ll c$) импульснинг релятив ифодасидан Ньютон механикасидаги импульс формуласи бевосита келиб чиқади. Шундай қилиб, импульснинг релятив ифодаси кенг қамровли маънога эга. Қиёслаш мақсадида 7.3- расмда релятив импульс ($p_{\text{рел}}$) ва Ньютон механикасига асосланган импульс ($p_{\text{н}}$)ларнинг зарранинг тезлигига қараб ўзгариш графиклари келтирилган. Расмда улар орасида жуда катта



7.3-расм

тафовут борлиги кўриниб турибди; бу тафовут зарра тезлиги ёруғлик тезлиги (c) га яқинлашган сари кескин ортиб боради. Ньютон механикаси тасаввурларига асосан зарра тезлиги ёруғлик тезлигидан ҳам катта бўлиши мумкин, лекин бундай бўлиши нисбийлик назариясининг иккинчи постулатига зиддир.

7.7-§. РЕЛЯТИВ ЗАРРАНИНГ ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАСИ

Маълумки, Ньютон механикасида жисмларнинг ҳаракат тенгламаси:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{7.37}$$

ёки

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{7.38}$$

тенглик билан ифодаланади; бу ерда $\vec{F}$— заррага таъсир этувчи куч, m ва $\vec{v}$— унинг массаси ҳамда тезлиги. Галилей алмаштиришларидан келиб чиқадиган хулоса шундан иборатки, (7.37) тенгламадаги $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ тезланиш инвариант катталикдир, бинобарин, заррачага таъсир этувчи куч ҳам инвариант катталик ҳисобланади.

Нисбийлик назариясининг биринчи постулатига кўра табиатнинг барча қонунлари турли инерциал саноқ тизимларига нисбатан инвариант бўлиши керак. Бошқача айтганда, физикавий қонунларнинг математикавий ифодаси барча инерциал саноқ тизимларида бир хил кўринишга эга бўлиши лозим. Энди юқорида келтирилган (7.37) ва (7.38) ҳаракат тенгламаларини олиб қарайлик. Кичик тезлик ($v \ll c$) ларда бу икки тенглама орасида моҳиятан фарқ йўқ, чунки иккала тенглама ҳам фақат тезлик ёки тезланишни ўлчашга келтирилади. Лекин ғоят катта тезликларда зарранинг тезлигини деярли ўзгармас ва қиймати жиҳатидан у тахминан ёруғлик тезлигига тенг деб қараш мумкин; унинг импульси эса тезликка боғлиқ бўлган ва тажрибада ўлчанадиган катталик ҳисобланади. Шу мулоҳазаларга кўра релятив механикада зарранинг ҳаракат тенгламасини келтириб чиқариш учун асос қилиб (7.37) тенглик эмас, балки (7.38) тенглик олиниши керак, бундан ташқари (7.38) тенгликдаги зарранинг импульси ($\vec{p}$) сифатида нисбийлик назариясидан келиб чиқадиган хулосаларга асосланган (7.36) ифода орқали аниқланадиган релятив импульс олиниши лозим. Шундай қилиб, (7.36) тенгликни (7.38) га қўйиб, заррага таъсир этаётган куч учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right); \tag{7.39}$$

бу формула релятив динамиканинг асосий тенгламаси бўлиб, *релятив зарранинг ҳаракат тенгламасини* ифодалайди. Бу тенглама Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант тенгламадир.

Агар вақт ўтиши билан зарра импульсининг ўзгариш қонуни маълум бўлса, заррага таъсир этувчи кучнинг ўзгариш қонунини релятив динамиканинг асосий тенгламаси (7.39) дан аниқлаш мумкин. Иккинчи томондан, бошланғич шартлар (зарранинг бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ ва вазияти $\vec{r}_0$) берилган бўлса ва заррага таъсир этувчи куч маълум бўлса, унинг ҳаракат тенгламасини топиш мумкин.

Кўриниб турибдики, кичик тезликларда ($v \ll c$ ва $v^2/c^2=0$) релятив зарранинг ҳаракат тенгламаси Ньютон механикасидаги жисмнинг ҳаракат тенгламаси кўринишини олади.

Маълумки, Ньютон механикасида заррага (жисмга) таъсир этувчи куч инвариант катталикдир. Релятив механикада эса бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда кучнинг қиймати ва йўналиши ўзгаради; бундан ташқари куч йўналиши билан тезланиш векторининг йўналишлари бир тўғри чизиқда ётмайди. Бу натижалар релятив механикада куч инвариант катталик эмаслигини кўрсатади. Лекин бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда алмаштириш қоидалари куч учун ўзига хос қонуниятлар воситасида амалга оширилади.

7.8- §. ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАСИНИНГ ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИГА НИСБАТАН ИНВАРИАНТЛИГИ

7.6- § да фазода кетма-кет содир бўлган икки воқеа оралиқ (интервал) тушунчаси орқали ифодаланган эди. Оралиқнинг асосий хусусиятларидан бири шундан иборатки, у Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталикдир, яъни

$$c^2\Delta t^2-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)=c^2\Delta t'^2-(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2).$$

Бу тенгликни

$$(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2=(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2$$

тарзда ёзсак ҳам унинг Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантлиги сақланади. Сўнгра, тўрт ўлчовли фазода $-c^2$ ўрнида $(ic)^2$ ни ёзиш мумкин (бу ерда $i=\sqrt{-1}$ — мавҳум бирлик). У ҳолда юқоридаги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2+(ic)^2\Delta t^2=\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2+(ic)^2\Delta t'^2. \qquad (7.40)$$

Одатдаги уч ўлчовли фазода зарранинг (нуқтанинг) вазияти радиус-вектор $\vec{r}$ воситасида берилади ва у координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ тарзда ифодаланади. Тўрт ўлчовли фазода зарранинг вазияти радиус-вектор $\vec{R}$ билан белгиланади ва у ўзининг ташкил этувчилари орқали қуйидагича аниқланади:

$$\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+ic\,t\vec{e} \qquad (7.41)$$

бу ерда $\vec{e}$— бирлик вектор бўлиб, у ct координата ўқи бўйлаб йўналган. (7.41) тенгликда шу нарса муҳимки, тўртта координата ўқлари (ict, X, Y, Z) бир-бирига нисбатан тик йўналган деб тасаввур қилинади ва бу тенгликдаги биринчи учта ҳад $\vec{R}$ векторнинг фазовий ташкил этувчиларини, тўртинчи ҳад (ict) эса унинг вақт бўйича ташкил этувчисини ифодалайди. Оралиқ (s) Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталик бўлганлиги туфайли радиус вектор $\vec{R}$ ҳам мазкур алмаштиришларга нисбатан инвариантдир, яъни

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+ict\vec{e}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}+ict'\vec{e} \tag{7.42}$$

ёки

$$\vec{R}=\vec{R}'.$$

Биз текшираётган зарра K' саноқ тизимига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин; K' тизим (зарра билан бирга) ўз навбатида K саноқ тизимига нисбатан $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин. (7.35) ифодага кўра K саноқ тизимидаги вақт оралиғи dt ва K' даги вақт оралиғи $d\tau$ орасида қуйидаги муносабат мавжуд:

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

(7.42) тенглик зарранинг тўрт ўлчовли фазодаги вазиятини аниқлаганлиги туфайли мазкур тенгликнинг зарра хусусий вақти (τ) бўйича дифференциали тўрт ўлчовли фазода унинг K' тизимдаги тезлигини ифодалайди:

$$\vec{u}'=\frac{d\vec{R}'}{d\tau}=\frac{d}{dt'}(ict'\vec{e}+x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})=ic\vec{e};$$

бу тўрт ўлчовли фазодаги тезлик *дунёвий тезлик* деб аталади. Демак, зарра тинч ҳолатда бўлган K' саноқ тизимида дунёвий тезлик қуйидагига тенг:

$$\vec{u}'=ic\vec{e}, \tag{7.43}$$

чунки зарра тинч турган саноқ тизими учун $\frac{dx'}{d\tau}$, $\frac{dy'}{d\tau}$ ва $\frac{dz'}{d\tau}$ ҳосилалар нолга тенг. (7.43) дан кўринадики, $\vec{u}'$ векторнинг квадрати $-c^2$ га тенг — бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда унинг қиймати ўзгармайди, бинобарин, *дунёвий тезлик Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталикдир*.

Шартга кўра K саноқ тизимига нисбатан зарра $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланади ва бунда унинг тезлиги:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{R}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}.$$

Бу формуладаги dR/dt муносабат (7.41) ифодани t бўйича дифференциаллаш йўли билан топилади; $dt/d\tau$ эса (7.35) га асосан

$1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ га тенг. Шундай қилиб, зарранинг K тизимдаги тезлиги учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{u}=\frac{dR}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{ic\vec{e}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

яъни

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{ic\vec{e}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{u}_r+\vec{u}_t. \tag{7.44}$$

Охирги тезликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳад K тизимда дунёвий тезликнинг фазовий ташкил этувчисини ифодалайди, иккинчи ҳад эса унинг вақт бўйича ташкил этувчисидир. Демак, дунёвий тезлик вектори ($\vec{u}$)нинг фазовий ташкил этувчи ($\vec{u}_r$) релятив зарра ҳаракати тенгламаси

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

даги $\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ нисбатга тенг (m — инвариант катталик). Бинобарин, охирги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{u}_r).$$

Бу тенгликни зарранинг хусусий вақти $d\tau$ орқали ифодаласак ((7.35)г.. қ.), у

$$\vec{F}=\sqrt{1-v^2/c^2}\frac{d}{d\tau}(m\vec{u}_r) \tag{7.45}$$

кўринишни олади. Бу ерда $\vec{u}_r$ — тўрт ўлчовли фазода зарра тезлигининг фазовий ташкил этувчиси бўлганлиги туфайли (7.45) даги $\frac{d}{d\tau}(m\vec{u}_r)$ муносабат шу тўрт ўлчовли фазода заррага таъсир этувчи куч ($\vec{f}$) нинг фазовий ташкил этувчисини ифодалайди:

$$\vec{f}_r=\frac{d}{d\tau}(m\vec{u}_r). \tag{7.46}$$

$\vec{f}$ кучни унинг фазовий ва вақт бўйича ташкил этувчилари орқали қуйидагича ифодалаймиз:

$$\vec{f}=\vec{f}_r+\vec{f}_t=\frac{d}{d\tau}(m\vec{u}_r+m\vec{u}_t). \tag{7.47}$$

(7.46) ни эътиборга олинса (7.45) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{F}=\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot\vec{f}_r. \tag{7.48}$$

Зарра тинч ҳолатда бўлган K' саноқ тизимида $\vec{f}$ кучнинг фазовий ташкил этувчилари ($f_{rx}\cdot\vec{i}$, $f_{ry}\cdot\vec{j}$, $f_{rz}\cdot\vec{k}$) уч ўлчовли фазодаги

$\vec{F}$ кучнинг мос ташкил этувчилари билан айнан бир хилдир. K саноқ тизимида эса $\vec{f}_r$ ва $\vec{F}$ орасидаги боғланиш (7.48) муносабат билан аниқланади. Шундай қилиб, *тўрт ўлчовли фазода релятив зарранинг ҳаракат тенгламаси* ((7.47) га қ.)

$$\vec{f}=\frac{d}{d\tau}\,(m\vec{u}) \tag{7.49}$$

тарзда ифодаланади ва у *Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.*

7.9-§. ИШ ВА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯ

Ньютон механикасида куч $\vec{F}$ нинг заррани $d\vec{r}$ га кўчиришда бажарган элементар иши:

$$dA=\vec{F}d\vec{r}.$$

Зарранинг кўчиши $d\vec{r}=\vec{v}dt$ эканлигини эътиборга олсак бу иш

$$dA=\vec{F}\vec{v}dt \tag{7.50}$$

бўлади. Зарра кинетик энергиясининг релятив механикадаги ифодасини топиш учун релятив зарранинг ҳаракат тенгламасидан фойдаланамиз (яъни (7.39) тенгламага асосан (7.40)ни қуйидагича ёзамиз):

$$dA=\vec{F}\vec{v}\,dt=\vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)dt.$$

F куч dt вақт давомида зарра устида dA иш бажарса, зарранинг кинетик энергияси $dE_{\text{к}}$ га ўзгаради, яъни $\vec{F}$ кучнинг бажарган иши (6.6)га асосан зарранинг кинетик энергиясининг ўзгаришига тенг бўлади:

$$dA=dE_{\text{к}}.$$

Бинобарин:

$$dE_{\text{к}}=\vec{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)dt=\vec{v}d\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги дифференциал ишораси остидаги нисбат икки функциянинг (яъни $m\vec{v}$ ва $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ нинг) кўпайтмаси эканлигини назарда тутган ҳолда уни дифференциаллаймиз:

$$dE_{\text{к}}=\vec{v}\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,d(m\vec{v})+m\vec{v}d\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\right]=$$

$$=\vec{v}\left[\frac{md\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{m\vec{v}}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\,d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]=$$

$$=\vec{v}\left[\frac{2m(1-v^2/c^2)d\vec{v}+m\vec{v}d(v^2/c^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right]=$$

$$=\frac{m}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left[(1-\frac{v^2}{c^2})\,2\vec{v}d\vec{v}+\vec{v}\vec{v}d\,(\frac{v^2}{c^2})\right];$$

бу ерда $2\vec{v}d\vec{v}=2vdv=d(v^2)=c^2d(\frac{v^2}{c^2})$ ва $\vec{v}\vec{v}=v^2$ бўлганлиги туфайли $dE_к$ учун олинган охирги тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$dE_к=\frac{m}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+v^2d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{m}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\left[v^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2\right]=\frac{mc^2}{2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}d\left(\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Дифференциаллашни амалга ошириб,

$$\frac{mc^2}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)=d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак,

$$dE_к=d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (7.51)$$

Бу формула (зарра кинетик энергиясининг дифференциали) $\vec{F}$ куч таъсирида зарранинг $d\vec{r}$ га кўчишида унинг кинетик энергиясининг ўзгаришини ифодалайди. Бинобарин, зарранинг тўлиқ кинетик энергияси (7.51)ни интеграллаш билан аниқланади ва бу тенгликни интеграллаш натижасида

$$E_к=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\text{const}$$

ифодага эга бўламиз. Интеграллаш доимийси нимага тенг эканлигини топайлик. Кинетик энергия — ҳаракат энергияси бўлганлиги туфайли зарранинг тезлиги $v=0$ бўлганда, равшанки, $E_к=0$ бўлиши керак. Бу мулоҳазалардан интеграллаш доимийси $\text{const}=-mc^2$ эканлиги келиб чиқади ва интеграллаш доимийсининг бу қийматини юқоридаги формулага қўйсак, *релятив зарранинг кинетик энергияси* қуйидагича ифодаланади:

$$E_к=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \qquad (7.52)$$

Зарранинг (жисмнинг) кинетик энергиясини ифодаловчи (7.52) муносабат кенг қамровли маънога эга бўлиб, кичик тезликларда у кинетик энергиянинг Ньютон механикасидаги шаклини олади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун (7.52) формуладаги $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ нисбатни Тейлор қаторига ёямиз:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\ldots .$$

Кичик ($v\ll c$) тезликларда v/c нисбатнинг тўртинчи, олтинчи ва ҳоказо даражалари 1 га нисбатан жуда кичик сонни ташкил этганликлари туфайли, уларни ҳисобга олмасдан, мазкур қаторнинг дастлабки икки ҳади билан чегараланамиз. У ҳолда (7.52) формула Ньютон механикасидаги $E_к = mv^2/2$ шаклни олади. Жуда катта тезликларда эса зарранинг (жисмнинг) кинетик энергияси (7.52) формула билан ифодаланади.

7.10-§. ТЎЛИҚ ЭНЕРГИЯ. ЭНЕРГИЯ БИЛАН ИМПУЛЬС ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

Юқорида биз ((7.52) формулага қ.) релятив зарранинг кинетик энергиясини:

$$E_к = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \tag{7.53}$$

тарзда ифодалаган эдик; бу ерда m — зарранинг массаси, v — унинг K саноқ тизимига нисбатан тезлиги. Кўриниб турибдики, зарранинг кинетик энергияси иккита катталикнинг айирмаси шаклида ифода қилинаяпти, яъни бу тенгликни:

$$E_к = E - E_0 \text{ ёки } E = E_к + E_0 \tag{7.54}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Охирги тенгликда $E_к$ — зарранинг кинетик энергияси бўлганлиги учун E_0 катталик ҳам энергия маъносига эга. Бу формулада E иккита энергиянинг йиғиндисидан иборат бўлиб, у зарранинг тўлиқ энергиясини ифодалайди. (7.54) даги белгилашларга кўра зарранинг тўлиқ энергияси қуйидагига тенг:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.55}$$

(7.53) ва (7.54) тенгликлардан

$$E_0 = mc^2 \tag{7.56}$$

эканлиги кўриниб турибди. Бу катталикнинг физикавий маъносини аниқлайлик: зарранинг тўлиқ энергиясини ифодаловчи (7.55) тенгликдан шу хулоса келиб чиқадики, агар зарра тинч ҳолатда бўлса, (унинг тезлиги $v = 0$ бўлса) $E = E_0 = mc^2$ бўлади. Шунинг учун ҳам (7.56) формула билан ифодаланган энергия тинч ҳолатдаги жисмнинг (зарранинг) энергияси дейилади. Тинч ҳолатдаги жисмнинг энергияси унинг ички энергиясини ифодалайди. Баъзан бу энергияни жисмнинг хусусий энергияси деб ҳам юритилади. Зарранинг тинч ҳолатдаги энергиясини акс эттирувчи (7.56) ифода жисмлар тизими учун ҳам ўринлидир: жисмлар тизимининг тинч ҳолатдаги энергияси мазкур тизим таркибидаги жисмлар (зарралар)нинг тинч ҳолатдаги энергиялари, уларнинг инерция (масса) марказига нисбатан ҳаракатидаги кинетик энергиялари ва бу жисмлар (зарралар)нинг ўзаро таъсир энергияларининг йиғиндисига тенг. Тинч ҳолатдаги энергияга ташқи майдон (гравитация майдони, электр майдон ва ҳоказо) томонидан жисмга таъсир этувчи куч билан боғлиқ бўлган потенциал энергия кирмайди.

Шуни таъкидлаш лозимки, Ньютон механикасида тўлиқ энергия деганда зарранинг (жисмнинг) кинетик ва потенциал энергиялари нинг йиғиндиси тушунилади. Релятив механикада эса тўлиқ энергия — зарранинг (жисмнинг) кинетик энергияси билан унинг тинч ҳолатдаги энергиясининг йиғиндисидан иборат.

Тўлиқ энергия E ва импульс $\vec{p}$ зарранинг тезлигига боғлиқ катталиклар бўлганлиги учун бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда уларнинг қийматлари ўзгаради, яъни мазкур катталиклар алоҳида-алоҳида олинганда улар Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант эмас. Лекин E ва p ларнинг ўзаро боғланишини ифодаловчи катталик инвариант катталик эканлигига қуйидаги мулоҳазаларга кўра ишонч ҳосил қилиш мумкин. Зарранинг мос равишда тўлиқ энергияси ва импульсини ифодаловчи

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \tag{a}$$

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{б}$$

тенгликлардан

$$v=\frac{c^2}{E}\,p \tag{7.57}$$

эканлиги келиб чиқади. Энди (a) тенгликни квадратга кўтариб, тезлик (v) ўрнига унинг (7.57) даги қийматини қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$E^2-p^2c^2=m^2c^4=\mathrm{inv}. \tag{7.58}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги зарранинг массаси (m) ва ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги (c) инвариант катталиклардир. Бундан зарранинг тўлиқ энергияси (E) ва импульси (p)ни боғловчи (7.58) муносабат Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталик эканлиги келиб чиқади. Кўпинча мазкур инвариант катталик қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2=m^2c^2=\mathrm{inv}. \tag{7.59}$$

Юқоридаги тенгликнинг Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант эканлиги яна шундан ҳам маълумки, бу тенглик зарранинг тезлигига боғлиқ эмас. Демак,

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2$$

катталик бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда бир хил (яъни m^2c^2) қийматга эга.

7.11-§. ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИГА НИСБАТАН ИНВАРИАНТ КАТТАЛИКЛАР

Бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда физикавий катталикларнинг қийматлари ўзгаради — жисмнинг координаталари, тезлиги ва вақт оралиғи шулар жумласидандир. Шу билан бирга шундай катталиклар ҳам борки, уларнинг қийматлари бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда ўзгармайди. Маълумки, бундай катталиклар Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант (ўзгармайдиган) катталиклар дейилади. Улар қуйидагилардир:

1. Ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги (c) барча инерциал саноқ тизимларида бир хил қийматга эга.

2. Жисмнинг (зарранинг) массаси бир инерциал саноқ тизимидан иккинчига ўтилганда ўзгармайди (кейинги вақтларда «релятив масса» тушунчаси ишлатилмаяпти).

3. Жисм қайси саноқ тизимида тинч турган бўлса, унинг хусусий вақти у билан бирга ҳаракатланаётган (бошқа инерциал саноқ тизимига нисбатан) соат воситасида ўлчанади. Шу боисдан, жисм ҳаракатининг жадаллигини ифодаловчи вақт оралиғи

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант катталикдир; бу формулада Δt — ҳаракатдаги жисмга нисбатан шартли равишда тинч ҳолатда бўлган саноқ тизимида (K саноқ тизимида) ўлчанган вақт оралиғи.

4. Воқеалар оралиғи (интервал) — релятив механикадаги асосий инвариантлардан ҳисобланади. Воқеалар оралиғи (s) нинг квадрати K ва K' саноқ тизимларида қуйидагича ифодаланади:

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = s'^2;$$

бу ерда:

$$\Delta t = t_2 - t_1,\ \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1,\ \Delta z = z_2 - z_1,$$
$$\Delta t' = t'_2 - t'_1,\ \Delta x' = x'_2 - x'_1,\ \Delta y' = y'_2 - y'_1,\ \Delta z' = z'_2 - z'_1;$$

яъни

$$s^2 = s'^2 = \text{inv}.$$

Бинобарин, воқеалар оралиги ва унинг квадрати бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда ўзгармайди.

5. Тўрт ўлчовли фазода аниқланган зарранинг ҳаракат тенгламаси

$$\bar{f} = \frac{d}{d\tau}\,(m\bar{u})$$

инвариант катталик ҳисобланади. Бу ерда $\bar{f}$ ва $\bar{u}$ мос равишда тўрт ўлчовли фазода заррага таъсир этувчи куч ҳамда зарранинг дунёвий тезлиги, $d\tau$ — зарранинг хусусий вақт оралиғи.

6. Бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда зарранинг тўлиқ энергияси (E) ва импульси (p) ўзгаради, лекин E ва p ни ўз ичига олган:

$$E^2 - p^2c^2$$

муносабат Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлиб, барча инерциал саноқ тизимларида бир хил қийматга эга, чунки бу муносабатнинг қиймати зарра тезлиги (v) га боғлиқ эмас:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{inv}$$

ёки

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2=m^2c^2=\text{inv}.$$

7. Жисмнинг тинч ҳолатдаги энергияси (ички энергияси)

$$E_0=mc^2$$

барча инерциал саноқ тизимларида бир хил қийматга эга, чунки бу ерда m ва c катталикларнинг ҳар бири алоҳида инвариант катталиклардир.

7.12-§. ЭНЕРГИЯ ВА ИМПУЛЬС УЧУН ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИ

Бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда, юқорида кўрдикки, зарранинг тўлиқ энергияси ва унинг импульси ўзгаради, яъни бу катталикларни бир-биридан айрим ҳолда олиб қаралганда улар Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариант эмас. Шу боисдан бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда зарранинг импульси ва энергияси учун Лоренц алмаштиришлари қандай кўринишга эга бўлишини аниқлайлик. Шу мақсадда яна зарра тинч ҳолатда бўлган K' саноқ тизими K га нисбатан OX ўқи бўйлаб $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган ҳолни олиб қарайлик. Умумий ҳолда зарра K саноқ тизимига нисбатан $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ тезлик билан ҳаракатланаётганлиги туфайли бу тезликнинг координата ўқларига бўлган проекциялари

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

Маълумки, ((7.35) га қ.):

$$d\tau=dt\sqrt{1-v^2/c^2}. \qquad (а)$$

Бу ифодага асосан зарранинг импульси

$$\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ни унинг координата ўқлари бўйича ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$p_x=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dx}{dt}=m\frac{dx}{d\tau},\quad p_y=m\frac{dy}{d\tau},\quad p_z=m\frac{dz}{d\tau}. \qquad (7.60)$$

Унинг тўла энергиясини ҳам юқоридаги (а) формулага биноан қуйидагича ёзамиз:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=mc^2\frac{dt}{d\tau}$$

ёки

$$\frac{E}{c^2}=m\frac{dt}{d\tau}. \qquad (7.61)$$

(7.60) ва (7.61) ифодаларда зарранинг массаси m ва унинг хусусий вақт оралиғи $d\tau$ инвариант катталиклар эканлигини назарда тутсак, шундай хулосага келамизки, бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтилганда, p_x, p_y, p_z лар учун Лоренц алмаштиришлари мос равишда dx, dy, dz (яъни x, y, z) координаталар тарзида амалга оширилиши керак; E/c^2 катталик учун эса Лоренц алмаштиришлари вақт оралиғи dt тарзида (яъни t тарзида) амалга оширилиши лозим. Бошқача айтганда, Лоренц алмаштиришларини ифодаловчи (7.9) ва (7.10) формулаларда x ўрнига p_x, y ўрнига p_y, z ўрнига p_z, t ўрнига E/c^2 қўйилиши керак. Шундай қилиб, импульс ва тўлиқ энергия учун мазкур алмаштиришлар қуйидагича ифодаланади:

$$p'_x=\frac{p_x-Ev/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\quad p'_y=p_y,\ \ p'_z=p_z,\ \ E'=\frac{E-p_xv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \qquad (7.62)$$

бу ерда v — ҳаракатдаги K' саноқ тизимининг K га нисбатан тезлиги, p'_x, p'_y, p'_z ва E' мос равишда импульс ва энергиянинг K' даги қийматлари. (7.62) формула K саноқ тизимидан K' га ўтишда зарра импульсининг проекциялари ва унинг энергияси учун Лоренц алмаштиришларини ифодалайди.

Шунингдек, K' саноқ тизимидан K га ўтилганда (7.62) алмаштиришлар қуйидаги кўринишни олади:

$$p_x=\frac{p'_x+E'v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\quad p_y=p'_y,\ \ p_z=p'_z,\ \ E=\frac{E'-p'_xv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (7.63)$$

Кўриниб турибдики, (7.62) ва (7.63) алмаштиришлар, худди (7.9) ва (7.10) алмаштиришлар каби, бир-биридан фақат суратдаги тезлик (v) нинг олдидаги ишора билан фарқ қилади.

7.13-§. ТУРЛИ САНОҚ ТИЗИМЛАРИДА ИМПУЛЬС ҲАМДА ЭНЕРГИЯНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНЛАРИ

Ньютон механикасида импульс ва энергиянинг сақланиш қонунлари (4.4) ва (6.42) ифодалар билан берилган. Бу ерда биз «зарралар тизими учун релятив импульс ҳамда тўлиқ энергиянинг сақланиш қонунлари бирор инерциал саноқ тизимида бажарилса, мазкур қонунлар бошқа инерциал саноқ тизимида ҳам бажариладими?» деган саволларни ўз олдимизга қўямиз.

K саноқ тизимига нисбатан OX ўқи йўналишида $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган K' тизимда ўзаро таъсирлашувчи n та заррани олиб қараймиз. K' саноқ тизими OX ўқи йўналишида ҳаракат қилаётганлиги туфайли импульснинг шу йўналишдаги проекцияси билан чегараланамиз. Ҳар бир зарранинг K саноқ тизимидаги импульси ва энергияси қуйидагича ифодаланади ((7.63) га қ.):

$$p_x=\frac{p'_x+E'\cdot v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad (а) \qquad E=\frac{E'+p'_xv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (б)$$

Битта зарранинг импульси учун ёзилган бу ифода n та зарра учун қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sum_i p_{ix}=\frac{\sum\limits_i p'_{ix}+v/c^2\sum\limits_i E'_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (7.64)$$

K' саноқ тизимидаги n та зарранинг ўзаро таъсирлашуви туфайли айрим зарраларнинг импульслари ўзгарса ҳам, зарралар тизимининг тўлиқ импульси вақт ўтиши билан ўзгармай қолади, чунки зарралар тизимига ташқи куч таъсир қилмаяпти (берк тизим). Бинобарин, K' саноқ тизимида зарраларнинг дастлабки тўлиқ импульси ва тўлиқ энергияси бирор вақт ўтгандан кейинги тўлиқ импульси ва тўлиқ энергиясига тенг, яъни

$$\sum_i p'_{ix}=\sum_i \mathcal{P}'_{ix},\qquad \sum E'_i=\sum_i \mathcal{E}'_i; \qquad (c)$$

бу ерда: $\mathcal{P}'_{ix}$ ва $\mathcal{E}'_i$ — зарранинг ўзаро таъсиридан кейинги импульси ва энергияси. Бу тенгликларни (а) ифодага қўйиб,

$$\sum_i p_{ix}=\frac{\sum\limits_i \mathcal{P}'_{ix}+v/c^2\Sigma\mathcal{E}'_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\sum\limits_i (\mathcal{P}'_{ix}+v/c^2\cdot\mathcal{E}'_i)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ни ҳосил қиламиз. K саноқ тизимида зарранинг таъсирлашишдан кейинги тўлиқ импульсини $\sum\limits_i \mathcal{P}_{ix}$ деб белгиласак, охирги тенгликни:

$$\frac{\sum\limits_i (\mathcal{P}'_{ix}+v/c^2\cdot\mathcal{E}'_i)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\sum_i \mathcal{P}_{ix} \qquad (7.65)$$

шаклида ёзиш мумкин, яъни:

$$\sum_i p_{ix}=\sum \mathcal{P}_{ix}. \qquad (7.66)$$

Бундан агар зарраларнинг тўлиқ импульси вақт ўтиши билан K' саноқ тизимида ўзгармай қолса, мазкур катталик K саноқ тизимида ҳам ўзгармай қолади, деган хулосага келамиз. Бошқача айтганда, *импульснинг сақланиш қонуни K' саноқ тизимида бажарилса, бу қонун K саноқ тизимида ҳам бажарилади.*

Энди зарралар тизимининг тўлиқ энергияси учун ҳам юқоридагидек мулоҳаза юритамиз, яъни (б) ифодани n та заррадан иборат тизим учун ёзамиз:

$$\sum_i E_i=\frac{\sum\limits_i E'_i+v\sum\limits_i p'_{ix}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Бу ифода тизимнинг дастлабки пайтдаги энергия ва импульсини акс эттиради. K' саноқ тизимида тўлиқ импульс ва энергия зарраларнинг ўзаро таъсирлашишидан кейин ўзгармаслигини ((с) ифодага қ.) назарда тутсак, бу тенглик

$$\sum_i E_i=\frac{\sum\limits_i \mathscr{E}'_i+v\sum\limits_i \mathscr{P}'_{ix}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\sum\limits_i (\mathscr{E}'_i+v\mathscr{P}'_{ix})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (7.67)$$

кўринишни олади. Охирги тенгликнинг ўнг томони, равшанки, қуйидагига тенг:

$$\frac{\sum\limits_i (\mathscr{E}'_i+v\mathscr{P}'_{ix})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\sum_i \mathscr{E}_i; \qquad (7.68)$$

бинобарин:

$$\sum_i E_i=\Sigma\mathscr{E}_i.$$

Шундай қилиб, *ўзаро таъсирлашувчи зарралар берк тизимининг тўлиқ импульси ва тўлиқ энергиясининг сақланиш қонунлари бирор инерциал саноқ тизимида бажарилса, мазкур қонунлар бошқа инерциал саноқ тизимларида ҳам бажарилар экан.*

Умуман олганда, импульс ва энергиянинг сақланиш қонунлари кенг қамровли моҳиятга эга бўлиб, бу қонунлар кичик ($v\ll c$) тезликлар учун ҳам, релятив тезликлар ($v\approx c$) учун ҳам ўринлидир.

7.14-§. МАССА БИЛАН ЭНЕРГИЯ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

Юқорида (7.10-§) биз тинч ҳолатдаги жисмнинг (хусусий) энергиясини

$$E_0=mc^2$$

тарзда ифодалаган эдик ((7.56) га қ.). Бунда ёруғлик тезлиги с нинг бўшлиқдаги сон қиймати жисм массасига нисбатан ғоят катта бўлганлиги туфайли энергия сон қийматининг ΔE_0 ўзгаришига массанинг озгина ўзгариши мос келади. Жисмнинг тинч ҳолатдаги энергияси бошқа турдаги энергияларга айланиши мумкин.

Ньютон механикасида масса жисмнинг инерция ўлчови тарзида намоён бўлган бўлса, релятив механикада жисм массаси унда мавжуд бўлган энергия миқдорининг ўлчови тарзида намоён бўлади.

Агар бирор жараён туфайли жисм массаси Δm га камайса, бу жараён натижасида

$$\Delta E_0=c^2\Delta m \qquad (7.69)$$

энергия ажралиб чиқади ва аксинча, жисм энергияси бу жараёнда ΔE_0 га ошса, унинг массаси Δm га ошади — *тинч ҳолатдаги жисм энергияси ва массаси бир-бирига мутаносиб тарзда ўзгаради.* (7.69) формула орқали ифодаланган муносабат масса ва энергиянинг ўзаро боғланиш қонуни дейилади.

Бу қонунга асосан бирор усул билан жисмнинг энергиясини ΔE_0 га ўзгартирсак (уни қиздириб ёки совутиб, ёхуд унинг тезлигини ўзгартириб) шу ўзгарган энергияга мос равишда унинг массаси ҳам Δm га ўзгаради. Масалан, қиздириб унга ΔE_0 га тенг энергия берилса, унинг массаси $\Delta m = \Delta E/c^2$ қадар ошади; агар ёруғлик чиқариш натижасида жисмнинг энергияси ΔE_0 қадар камайса, унинг массаси $\Delta m = \Delta E_0/c^2$ қадар камаяди.

Лекин шуни алоҳида назарда тутиш керакки, оддий макроскопик жараёнларда жисм энергияси ўзгарганда, унинг массасининг ўзгариши

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2}$$

массани ўлчаш аниқликларига нисбатан жуда кичикдир. Масалан, Ернинг сунъий йўлдошини учириш учун, маълумки, унга камида 8000 м/с га тенг тезлик берилади (оддий шароитларда бу жуда катта тезлик ҳисобланади) ва унинг кинетик энергияси $\Delta E = \frac{mv^2}{2}$ га ошади. Айтайлик, массаси 300 кг бўлган Ернинг сунъий йўлдоши ўша тезликка эришса, унинг массаси

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{mv^2}{2c^2} \approx 10^{-7} \text{ кг}$$

га ошади ва бу ошган масса миллиграммнинг ўндан бирига тенг; бу миқдор йўлдош массасини ўлчаш аниқлигига нисбатан жуда кичик ва амалда у сезилмайди.

Масса билан энергия орасидаги боғланиш атом ядросида кечадиган жараёнларда ҳамда элементар зарраларнинг ўзаро таъсирлашишида яққол намоён бўлади. Атом электростанцияларининг ишлаш принципи уран $_{92}\mathrm{U}^{235}$ ядросининг нейтронлар таъсирида парчаланишига асосланган; нейтрон таъсирида ҳар бир уран атомининг ядроси цезий $_{55}\mathrm{Cs}^{140}$ ва рубидий $_{37}\mathrm{Rb}^{94}$ ядроларидан иборат иккита ядрога парчаланади; бундан ташқари қўшимча яна иккита нейтрон n^0 ажралиб чиқади. Ядро парчалангандан кейин ҳосил бўлган цезий $_{55}\mathrm{Cs}^{140}$, рубидий $_{37}\mathrm{Rb}^{94}$ ва иккита нейтрон массаларининг йиғиндиси дастлабки ядро уран $_{92}\mathrm{U}^{235}$ ва битта нейтрон массаларининг йиғиндисидан кичик. Парчаланиш натижасида массанинг камайиши туфайли катта энергия ажралиб чиқади. Бу энергия атом электростанциясида электр энергияга айлантирилади.

Пировардида шуни таъкидлаб ўтамизки, масса билан энергиянинг ўзаро боғланиш қонунини «масса энергияга айланади» ёки «энергия массага айланади» деб тушунмаслик керак. Масса билан энергиянинг ўзаро боғлиқлиги намоён бўладиган жараёнларда аслида энергия массага айланмайди, у бир турдан иккинчи турга ўтади. Масалан, тинч ҳолатдаги жисм энергиясининг ёруғлик энергиясига айланиш жараёнини олайлик. Бу ҳолда фазонинг бирлик ҳажмида мавжуд бўлган ёруғлик энергиясига ўз навбатида муайян $\Delta m = \frac{E_0}{c^2}$ масса мос келади.

VIII БОБ

ЖИСМЛАРНИНГ ТЎҚНАШУВИ

8.1-§. ТЎҚНАШУВ ТУРЛАРИ

Жисмларнинг бир-бирига бевосита тегиши туфайли юз берадиган ўзаро таъсир жараёни тўқнашув ёки урилиш деб юритилади. Бу тушунча аксарият ҳолларда макроскопик жисмларнинг тўқнашувини акс эттиради. Микроскопик жисмлар (атомлар, молекулалар ва элементар зарралар) нинг тўқнашув жараёнида уларнинг бир-бирига бевосита тегиши мутлақо шарт эмас. Даставвал фақат макроскопик жисмларнинг тўқнашувини таҳлил қилиш билан чегараланамиз. Олинган натижаларни кейинчалик релятив зарраларнинг тўқнашув жараёни учун қўллаймиз.

Тўқнашув жараёнида қисқа муддат давомида жисмларда жуда катта ички кучлар вужудга келади. Шунинг учун тўқнашув давомида жисмларга таъсир этувчи ташқи кучларни (Ернинг тортиш кучи, ишқаланиш кучи ва ҳоказо) эътиборга олмаса ҳам бўлади; бинобарин, ўзаро тўқнашувчи икки жисмни берк тизим деб қараб, бу тизимга импульснинг ва энергиянинг сақланиш қонунларини татбиқ қилиш мумкин.

Ҳодисани ўрганишни соддалаштириш мақсадида бир-бири билан тўқнашувчи икки шар шаклидаги жисмдан иборат тизимни олиб қараймиз. Тўқнашув чоғида жисмлар деформацияланади (сиқилади). Бунинг натижасида бир-бирига урилаётган жисмлар кинетик энергияларининг бир қисми ёки ҳаммаси сиқилиш билан боғлиқ потенциал энергияга ва жисмларнинг ички энергиясига айланиши мумкин. Бу ерда шуни эслатиб ўтиш лозимки, тўқнашиш натижасида жисмнинг ички энергияси ортса, бу ортган энергия ундаги атом ва молекулаларнинг тартибсиз тебранма ҳаракат энергиясига айланади. Жисм таркибидаги атом ва молекулаларнинг тартибсиз тебранма ҳаракатини бизнинг сезги аъзоларимиз иссиқлик тарзида идрок этади.

Жисмларнинг (зарраларнинг) тўқнашуви икки турга — қайишқоқ (эластик) ва ноқайишқоқ (ноэластик) тўқнашувларга бўлинади. Одатда жисмларнинг тўқнашуви мутлақ қайишқоқ тўқнашув ва мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувларга бўлиб ўрганилади.

Тўқнашув натижасида тизимнинг (тўқнашувчи жисмларнинг) кинетик энергияси ўзгармаса, бундай тўқнашув *мутлақ қайишқоқ тўқнашув* дейилади. Бу таърифдан равшанки, иккала тўқнашувчи жисм кинетик энергияларининг йиғиндиси тўқнашув содир бўлгандан кейин ўзгармай қолаяпти, яъни мазкур энергия тизимни ташкил этувчи жисмларнинг ички энергиясига айланмаяпти. Демак, мутлақ қайишқоқ тўқнашув натижасида ҳар бир жисмнинг ички энергияси ўзгармайди. Мутлақ қайишқоқ тўқнашув натижасида жисмларнинг кинетик ва ички энергияларининг ўзгармай қолишининг боиси шундаки, тўқнашув жараёнида жисмлар сиқилади ва вақтнинг бирор пайтида уларнинг барча кинетик энергиялари сиқилган жисмларнинг потенциал энергиясига айланади; уларнинг шу пайтдаги ҳолати сиқилган пружинанинг ҳолатига ўхшайди. Бу жараён тугагач, тизимнинг потенциал энергияси яна кинетик энергияга айланади. Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, тўқнашишдан кейин ҳар бир жисмнинг кинетик энергияси ўзгарса ҳам, уларнинг кинетик энергияларининг йиғиндиси (тизимнинг кинетик энергияси) ўзгармай қолади — урилиш жараёнида уларнинг дастлабки кинетик энергиялари ўзаро қайта тақсимланади.

Кузатишларнинг кўрсатишича, мутлақ қайишқоқ жисмлар табиатда учрамайди, лекин кўп ҳолларда катта аниқлик билан баъзи жисмларни мутлақ қайишқоқ жисмлар деб қараш мумкин. Масалан, фил суягидан ясалган бильярд шарлари қайишқоқлиги жиҳатидан мутлақ қайишқоқ жисмларга жуда яқин. Сифатли пўлатдан ясалган бильярд шарларининг қайишқоқлик хусусияти ҳам шунга яқинлашади.

Тўқнашувлар жараёнида иккита жисм бирлашиб, сўнгра улар худди битта жисм каби ҳаракатини давом эттирадиган тўқнашувлар *мутлақ ноқайишқоқ тўқнашув* дейилади. Мутлақ ноқайишқоқ тўқнашув жараёнида жисмларда қайишқоқ деформация вужудга келмайди: тизим кинетик энергиясининг бир қисми ёки ҳаммаси ички энергияга айланади. Масалан, қўрғошиндан, мумдан, пластилиндан ва лойдан ясалган шарлар одатда тўқнашганларидан кейин бирлашиб яхлит жисм каби ҳаракатларини давом эттирадилар.

Тўқнашувларнинг яна бир тури борки, уни соддагина қайишқоқ тўқнашув деб юритилади. Бундай тўқнашув қайишқоқлик даражаси жиҳатидан мутлақ қайишқоқ ва мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувлар оралиғидаги ўринни эгаллайди.

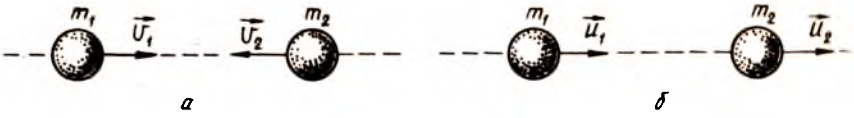
Энди мутлақ қайишқоқ ва мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувларни алоҳида кўриб чиқайлик. Бунда асосий масала жисмларнинг тўқнашишидан аввалги тезликларини билган ҳолда тўқнашишдан (ўзаро таъсирлашишдан) кейин уларнинг тезликларини аниқлашдан иборат бўлади. Юқорида айтилганидек, бу ерда импульс ва энергиянинг сақланиш қонунларидан фойдаланилади.

8.2-§. МУТЛАҚ ҚАЙИШҚОҚ ТЎҚНАШУВ

Биз мутлақ қайишқоқ шарларнинг марказий урилишларини ўрганиш билан чегараланамиз. Бу ҳолда шарларнинг $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликлари уларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқ бўйича йўналган бўлади. Шунинг учун бундай тўқнашувлар (урилишлар) *марказий тўқнашув* дейилади. Массалари m_1 ва m_2, тезликлари мос равишда $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ бўлган шарлар (8.1, *а*- расм), мутлақ қайишқоқ тўқнашсин; уларнинг тўқнашувдан кейинги тезликларини 8.1, *в*- расмда кўрсатилганидек, мос равишда u_1 ва u_2 билан белгилайлик. Мутлақ қайишқоқ тўқнашувда тизим (тўқнашувчи шарлар) импульсининг ва энергиянинг сақланиш қонунлари бажарилади. Юқоридаги белгилашларга кўра бу қонунларни қуйидагича ёзамиз:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2; \tag{8.1}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{8.2}$$



8.1-расм

Тўқнашувлар марказий бўлганлиги туфайли тезлик векторлари шарларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб йўналган. Шунинг учун (8.1) тенгликни скаляр кўринишда ёзамиз (қарама-қарши йўналишлар учун мазкур тезликларнинг ишораларигина ўзгаради). (8.1) ва (8.2) ифодаларни мос равишда

$$m_1(v_1-u_1)=m_2(u_2-v_2), \tag{8.3}$$

$$m_1(v_1^2-u_1^2)=m_2(u_2^2-v_2^2) \tag{8.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин ва ниҳоят охирги формулани

$$m_1(v_1-u_1)(v_1+u_1)=m_2(u_2-v_2)(u_2+v_2)$$

шаклда ёзиб, унинг (8.3) тенгликка нисбатини олсак:

$$v_1+u_1=u_2+v_2 \tag{8.5}$$

келиб чиқади. Шарлар тўқнашгандан кейин улар эришган тезликлар (u_1 ва u_2) ни аниқлайлик. Бунинг учун (8.5) ифодани m_2 га кўпайтирамиз:

$$m_2v_1+m_2u_1=m_2u_2+m_2v_2;$$

бу олинган натижани (8.3) дан айирсак, биринчи шарнинг тўқнашувдан кейинги тезлиги

$$u_1=\frac{2m_2v_2+(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2} \tag{8.6}$$

бўлади. Худди шунингдек, (8.5) ифодани m_1 га кўпайтириб, кўпайтмани (8.3) дан айирсак, иккинчи шарнинг тўқнашувдан кейинги тезлиги учун

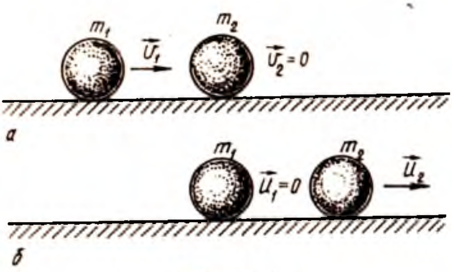
$$u_2=\frac{2m_1v_1+(m_2-m_1)v_2}{m_1+m_2} \tag{8.7}$$

га эга бўламиз. Кўриниб турибдики, u_1 ва u_2 лар учун топилган ифодаларнинг бир-биридан фарқи m ва v катталиклардаги индекслар (1 ва 2) ўринларининг алмашишидан иборат.

Олинган натижаларни талқин қилиш учун баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқайлик:

1. Тўқнашувчи шарларнинг массалари тенг бўлсин ($m_1=m_2$). У ҳолда (8.6) ва (8.7) дан кўринишича, $u_1=v_2$ бўлади: массалари бир хил бўлган шарлар тўқнашганда, уларнинг фақат тезликлари алмашади, яъни биринчи шар тўқнашувдан кейин v_2 тезлик билан, иккинчи шар эса v_1 тезлик билан ҳаракатланади.

2. Тенг массали шарларнинг бири тўқнашгунга қадар тинч турган бўлсин, яъни $m_1=m_2$, $v_2=0$ (8.2, *а*- расм). У ҳолда юқоридаги икки формуладан кўринадики, $u_1=0$, $u_2=v_1$ бўлади, яъни урилишдан кейин биринчи шар тўхтаб қолади (8.2, *б*-расм), иккинчи шар эса v_1



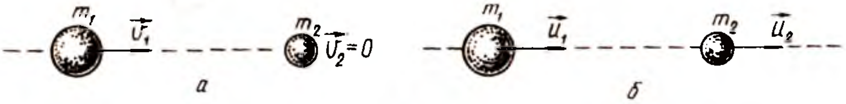
8.2-расм

тезлик билан ўша йўналишда ҳаракатга келади (бильярд ўйинида бу ҳодиса яққол намоён бўлади).

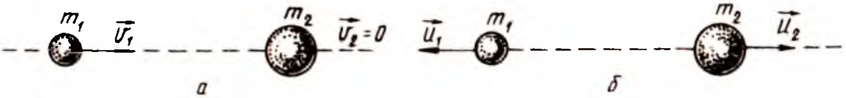
3. Агар $m_1 > m_2$ ва $v_2 = 0$ бўлса, яъни тўхтаб турган m_2 массали шарга массаси m_1 бўлган шар v_1 тезлик билан бориб урилса (8.3,*а*-расм), юқоридаги формулалар

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{ва} \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{8.8}$$

кўринишни олади, урилишдан кейинги тезликлар эса шарлар массаларининг нисбатига боғлиқ бўлади. Урилиш натижасида биринчи шар ўзининг тўқнашишга қадар бўлган тезлигига нисбатан кичикроқ u_1 тезлик билан аввалги йўналишда ҳаракатини давом эттиради. Иккинчи шар биринчи шарнинг урилишгача бўлган тезлигига нисбатан каттароқ тезлик билан биринчи шарнинг йўналишида ҳаракатга келади (8.3, *б*-расм).



8.3-расм



8.4-расм

4. Массаси кичикроқ бўлган шар тинч турган массаси каттароқ шарга бориб урилсин (яъни $m_1 > m_2$ ва $v_2 = 0$; 8.4,*а*-расм). Тўқнашишдан кейин биринчи шар тескари йўналишда u_1 тезлик билан ($u_1 < v_1$) ҳаракатланади, иккинчи шар биринчи шарнинг тўқнашгунга қадар бўлган йўналишида u_2 тезлик билан ($u_2 < v_1$) ҳаракат қила бошлайди (8.4, *б*-расм).

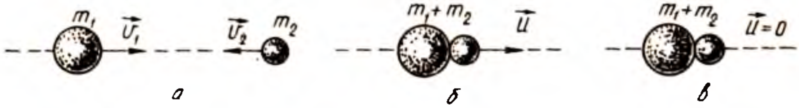
5. Агар тинч турган шарнинг массаси (m_2) бориб урилаётган шарнинг массаси (m_1) га нисбатан жуда катта, яъни $m_2 \gg m_1$ бўлса, (8.8) ифодага кўра:

$$u_1 = -v_1, \; u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$$

бўлади. Бундай ҳол мутлақ қайишқоқ шар қаттиқ деворга (деворни массаси ва радиуси ғоят катта шар деб қараш мумкин) урилганда кузатилади, яъни биринчи шар урилишга қадар бўлган ўзининг тезлиги билан тескари томонга қайтади.

8.3-§. МУТЛАҚ НОҚАЙИШҚОҚ ТЎҚНАШУВ

Юқорида кўриб ўтилганидек, мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувда тўқнашувчи жисмлар кинетик энергиясининг бир қисми ёки ҳаммаси ички энергияга (иссиқликка) айланади. Мазкур жараёнда бир жисмнинг ички энергияси иккинчи жисмнинг ички энергиясига айланиши ҳам мумкин. Кинетик энергиянинг қанча қисми ички энергияга айланиши тўқнашувчи жисмларнинг ўзига хос хусусиятларига боғлиқ. Мутлақ ноқайишқоқ тўқнашув натижасида тўқнашувчи иккала жисм бирлашиб, битта жисм каби ҳаракатланади. Массалари m_1 ва m_2 бўлган шарларнинг тўқнашгунга қадар тезликлари $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ бўлса (8.5, *а*-расм), иккита жисмдан иборат бу тизим тўқнашувдан кейин m_1+m_2 массали битта жисм каби $\vec{u}$ тезлик билан ҳаракат қилади (8.5, *б*-расм). Мазкур тизим учун импульснинг сақланиш қонуни, равшанки, қуйидагича ёзилади:



8.5-расм

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{u}.$$

Бу тенгликлардан тизимнинг тўқнашувдан кейинги тезлиги

$$\vec{u}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \tag{8.9}$$

эканлиги келиб чиқади. Тўқнашувга қадар шарлар бир-бирига томон йўналишда ҳаракатда бўлсалар, тўқнашгандан кейин улар импульси катта бўлган шарнинг импульс вектори йўналишида битта (яъни яхлит) жисм каби ҳаракатни давом эттирадилар (8.5,*б*-расм). Тўқнашгунга қадар шарлар бир-бирига қараб йўналган ва уларнинг импульслари ўзаро тенг ($m_1\vec{v}_1=-m_2\vec{v}_2$) бўлса, охирги тенгликка кўра $\vec{u}=0$ бўлади. Бошқача айтганда, шарлар тўқнашувдан сўнг ҳаракатларини давом эттирмайдилар (8.5, *в*-расм). Бу ҳолда иккита шардан иборат тизимнинг кинетик энергияси тўлиғича ички энергияга (иссиқлик энергиясига) айланади. Бу натижа элементар зарраларнинг ўзаро таъсири туфайли янги сифатга эга бўлган зарралар ҳосил бўлишида муҳим аҳамият касб этади (8.5-§ га қ.).

Энди мутлақ ноқайишқоқ тўқнашув жараёнида шарларнинг тўлиқ энергияси қандай ўзгаришини аниқлайлик. Бундай тўқнашувда энергиянинг бир қисми ёки ҳаммаси тўқнашувчи шарлардан иборат тизимнинг ички энергиясига (иссиқлик энергиясига) айланганлиги туфайли механикавий энергиянинг сақланиш қонуни бажарилмаслиги ўз-ўзидан равшандир. Ҳақиқатан ҳам тўқнашувга қадар шарларнинг тўлиқ кинетик энергияси:

$$E_к=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2. \tag{8.10}$$

Тўқнашувдан сўнг тизим яхлит жисм тарзида $\vec{u}_1$ тезлик билан ҳаракатланганлиги туфайли унинг кинетик энергияси

$$E'_к = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

бўлади. (8.9) ифодани эътиборга олиб, бу формулани қуйидагича ёзамиз:

$$E'_к = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (8.11)$$

Тўқнашув жараёнида энергиянинг қанча қисми ички энергияга айланганлигини аниқлаш учун (8.10) ифодадан (8.11)ни айирамиз:

$$E_к - E'_к = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Бу ифодадаги $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ нисбат шарларнинг келтирилган масса-си дейилади ва μ орқали белгиланади; $v_1 - v_2$ айирма эса шарларнинг тўқнашувга қадар бўлган нисбий тезликларини ифодалайди. Мазкур белгилашларга кўра охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$E_к - E'_к = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2. \qquad (8.12)$$

Демак, иккита мутлақ ноқайишқоқ шарнинг тўқнашуви жараёнида тизим кинетик энергиясининг камайиши келтирилган массанинг нисбий тезлик квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг.

Пировардида шуни таъкидлаш лозимки, ноқайишқоқ тўқнашувда тизим кинетик энергиясининг ички энергияга айланиш жараёни ва аксинча, ички энергиянинг кинетик энергияга айланиш жараёни элементар зарралар, атом ва молекулаларнинг ўзаро тўқнашувида ҳамда ядро реакцияларида муҳим ўринни эгаллайди.

8.4-§. ИНЕРЦИЯ МАРКАЗИ БИЛАН БОҒЛАНГАН САНОҚ ТИЗИМИ

Фараз қилайлик, иккита жисм мутлақ ноқайишқоқ тўқнашаётган бўлсин ва бу тўқнашувни марказий тўқнашув деб ҳисоблайлик. Тўқнашув жараёнини қўзғалмас деб ҳисобланган *K* саноқ тизимида кузатсак, тўқнашувдан кейин мазкур икки жисм бирлашиб, битта жисм каби ҳаракатда бўлади ва унинг тезлиги (8.9) формула орқали ифодаланади:

$$\vec{u} = \frac{m\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (а)$$

Қўзгалмас ҳисобланган *K* саноқ тизими (яъни Ер билан ёки унинг устида турган жисм билан богланган саноқ тизими) кўпинча лаборатория саноқ тизими номи билан юритилади.

Инерция (масса) маркази билан боғланган саноқ тизими ҳақида 4.5-§ да мулоҳаза юритилган эди ва бошқа саноқ тизимларидан ажралиб туриши учун бу тизимни *М*-тизим деб атаган эдик. Мазкур саноқ тизими жисмларнинг тўқнашувини таҳлил қилишда анча қулайликларга эга. *М*-тизимнинг асосий қулайликларидан бири шундан иборатки, унда жисмлар импульсларининг вектор йиғиндиси уларнинг ўзаро таъсирлашишига қадар ҳам, таъсирлашгандан кейин ҳам нолга тенг:

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{p}'_i = 0$$

ёки

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \ldots + \vec{p}'_n = 0.$$

Бунда $\vec{p}_i$ — тўқнашувга қадар, $\vec{p}'_i$ — тўқнашувдан кейин i-жисмнинг импульси. Ўзаро таъсирлашувчи икки жисм мисолида мазкур тенглик

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 = 0$$

тарзда ёзилади; бу ерда $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — икки жисмнинг тўқнашишдан олдинги, $\vec{u}'_1$, $\vec{u}'_2$ — тўқнашишдан кейинги тезликлари. Мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувдан кейин икки зарра худди битта (яхлит) зарра каби $\vec{u}$ тезлик билан ҳаракатланганлиги туфайли охирги тенглик қуйидагича ёзилади:

$$m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} = 0.$$

Бундан $\vec{u} = 0$ эканлиги ўз-ўзидан равшандир: бирлашган икки жисмнинг инерция (масса) маркази *М*-тизимда тинч ҳолатда бўлади, ваҳоланки, лаборатория саноқ тизимида мутлақ ноқайишқоқ тўқнашувдан кейин инерция марказининг тезлиги нолга тенг эмас, унинг тезлиги (*а*) ифода билан аниқланади.

8.5- §. БЎСАҒАВИЙ ЭНЕРГИЯ.
РЎПАРАВИЙ ТЎҚНАШУВЧИ ЗАРРАЛАР ТЕЗЛАТКИЧЛАРИ

Юқорида (8.1-§) шар шаклидаги жисмларнинг тўқнашувини таҳлил қилишда олинган натижалар ҳар қандай жисм учун, шу жумладан зарралар учун ҳам ўринлидир. Шу боисдан олинган ўша натижаларга асосланиб қуйида зарраларнинг ноқайишқоқ тўқнашуви ҳақида мулоҳаза юритамиз. Маълумки ((8.12) ифодага қ.), ноқайишқоқ тўқнашувда тўқнашувчи зарралардан иборат тизим кинетик энергиясининг бир қисми (муайян шароитда ҳаммаси) уларнинг ички энергиясига (тинч ҳолатдаги энергиясига) айланади ва аксинча, тўқнашиш жараёнида уларнинг ички энергияси зарраларнинг кинетик энергиясига айланиши ҳам мумкин. Бошқача айтганда, тўқнашиш жараёнида тўқнашувчи зарраларнинг кинетик энергияси ошиши ёки камайиши мумкин. Ноқайишқоқ тўқнашув жараёнида тўқнашувчи зарралар кинетик энергияларининг ўзгариши одатда *Q* ҳарфи билан белгиланади. Тўқнашиш натижасида тўқнашувчи зарраларнинг умумий кинетик энергияси ошса (яъни

$Q>0$ бўлса) бундай ноқайишқоқ тўқнашув *экзотермик тўқнашув* дейилади. Равшанки, экзотермик тўқнашувда зарранинг ички энергияси ҳисобига унинг кинетик энергияси ошади. Мазкур жараён Q нинг ҳар қандай қийматларида ҳам амалга ошиши мумкин. Ядронинг парчаланиши экзотермик жараёнга мисол бўла олади, яъни парчаланиш натижасида ҳосил бўлган зарраларнинг кинетик энергиялари нолга тенг ($Q=0$) бўлиши ҳам мумкин.

Тўқнашув натижасида зарраларнинг умумий кинетик энергиялари камайса (яъни $Q<0$ бўлса) бундай ноқайишқоқ тўқнашув *эндотермик тўқнашув* дейилади. Демак, эндотермик тўқнашувда зарраларнинг кинетик энергиялари ҳисобига уларнинг ички энергиялари ошади. Ноқайишқоқ тўқнашув жараёнида ички энергиянинг ошиши зарралар хусусиятларининг ўзгаришига олиб келади: бир турдаги зарра иккинчи турдаги заррага (янги заррага) айланиши мумкин. Ноқайишқоқ тўқнашувда зарраларнинг бир турдан иккинчи турга айланиши учун унинг ички энергияси муайян миқдорга ошиши лозим. Мазкур энергиянинг миқдори зарранинг ўз хусусиятларига боғлиқ бўлиб, у $|Q|$ дан кам бўлмаслиги керак. Бу энергия миқдори *бўсағавий энергия* деб аталади. Зарралар бир турдан иккинчи турга айланаётган бўлса, мазкур жараёнда қандайдир реакция содир бўлаяпти демакдир. Шу боисдан бўсағавий энергия кўпинча *реакция энергияси* (реакция содир бўлиши учун зарур бўлган энергия) деб ҳам аталади.

Қандай шартлар бажарилганда мазкур жараён амалга ошишини аниқлайлик. Бунинг учун зарралар тўқнашувини M-тизимда муҳокама этиш мақсадга мувофиқдир, чунки бу тизимда зарраларнинг тўқнашгунга қадар бўлган тўлиқ кинетик энергияси бўсағавий энергиядан кам бўлмаслиги лозим, яъни $E_к \geqslant |Q|$ шарти бажарилиши керак. $E_к=|Q|$ бўлганда, тизим кинетик энергиясининг ҳаммаси зарраларнинг ички энергиясини оширишга сарф бўлади. Бу шарт бажарилганда, M-тизимда тўқнашиш натижасида зарралар тўхтаб қолади. Бошқача айтганда, зарралар кинетик энергияларининг ҳаммаси реакцияни амалга оширишга сарф бўлиши керак. Бунинг учун зарралар импульсларининг вектор йиғиндиси ноқайишқоқ тўқнашувдан олдин ва ундан кейин нолга тенг бўлиши талаб қилинади. Бу шарт эса фақат инерция маркази билан боғлиқ саноқ тизими (M-тизим) дагина амалга ошади. Лаборатория саноқ тизимида эса тўқнашувчи зарралар кинетик энергияларининг ҳаммасини уларнинг ички энергиясига айлантириш мумкин эмас. Чунки ноқайишқоқ тўқнашувдан кейин инерция (масса) марказининг ҳаракати билан боғлиқ бўлган кинетик энергия реакцияни амалга оширишда иштирок этмайди. Бошқача айтганда, лаборатория саноқ тизимида (импульснинг сақланиш қонунига кўра) тўқнашгунга қадар бўлган зарралар импульсларининг вектор йиғиндиси улар тўқнашгандан кейин ҳам ўзгармай қолиши керак.

Зарраларнинг ноқайишқоқ тўқнашувида реакцияни амалга ошириш учун, одатда, тезлатилган зарралар тинч турган заррага (нишонга) йўналтирилади. Бу ҳолда тезлатилган зарраларнинг энергияси тинч турган зарраларникига нисбатан, яъни лаборатория саноқ тизимига нисбатан аниқланади. Ноқайишқоқ тўқнашув натижасида зарралар кинетик энергияларининг ички энергияга айланиш жараёнини яхшироқ тасаввур қилиш учун икки протоннинг ўзаро тўқнашувини олиб қарайлик ва лаборатория саноқ тизимида тинч турган протонга (нишонга) тезлатилган протон бориб урилганда энергиянинг қанча қисми уларнинг ички энергиясига айланишини (реакцияни амалга оширишга сарф бўлишини) аниқлайлик. Бунда икки ҳолни — кичик тезликлар ($v \ll c$) билан боғлиқ энергия соҳасини ва катта тезликлар билан боғлиқ энергия соҳасини алоҳида-алоҳида қараб чиқайлик:

А. Кичик тезликларда тўқнашувчи зарраларнинг кинетик энергиялари протоннинг тинч ҳолатдаги ички энергияси ($m_p c^2$) га нисбатан жуда кичик эканлиги ўз-ўзидан аён. Шу боисдан жараённи мутақаббил (классик) физика нуқтаи назаридан қараб чиқиш мумкин. Лаборатория саноқ тизимида v тезликкача тезлатилган протон тинч турган протонга бориб урилганда тўқнашувчи зарралардан иборат тизимнинг тўлиқ кинетик энергияси:

$$E_{\text{кл}} = \frac{1}{2} m_p v^2 \qquad (8.13)$$

($E_{\text{кл}}$ — лаборатория саноқ тизимидаги кинетик энергия). Ноқайишқоқ тўқнашувдан кейин инерция марказининг тезлиги нолдан фарқли бўлганлиги туфайли (8.13) кўринишда ифодаланган энергиянинг ҳаммаси зарраларнинг ички энергиясига айланмайди — бу энергиянинг бир қисми инерция марказининг ҳаракат энергияси бўлиб қолади. Мазкур энергиянинг қанча қисми реакцияни амалга оширишда иштирок этмаслигини (ички энергияга айланмаслигини) аниқлаш мақсадида ноқайишқоқ тўқнашув жараёнини M-тизимда олиб қарайлик. Юқорида таъкидлаб ўтганимиздек, бу саноқ тизимида зарралар кинетик энергияларининг ҳаммаси уларнинг ички энергиясини оширишга сарф бўлиши мумкин. Мазкур тизимда тинч турган протоннинг инерция марказига нисбатан тезлиги $-\frac{1}{2}v$ га тенг; унга бориб урилувчи протоннинг тезлиги эса $\frac{1}{2}v$ га тенг; M- тизимда умумий кинетик энергия тўқнашувчи протонлар кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$E_{\text{км}} = \frac{1}{2} m_p \left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{1}{2} v\right)^2 = \frac{1}{4} m_p v^2 \qquad (8.14)$$

($E_{\text{км}}$ — зарраларнинг M-тизимдаги кинетик энергиялари). (8.13) ва (8.14) тенгликлардан кўринадики, зарраларнинг лаборатория саноқ тизимидаги кинетик энергиялари M- тизимдаги кинетик энергияга нисбатан икки марта кўп, яъни лаборатория саноқ тизимига нисбатан тезлатилган протон кинетик энергиясининг фақат ярми тўқнашувчи протонларнинг ички энергиясини оширишга сарф бўлиши мумкин; энергиянинг қолган қисми инерция марказининг ҳаракатига сарф бўлади.

Б. Энди тинч турган протонга катта тезликка эга бўлган протон бориб урилганда кинетик энергиянинг қанча қисми тўқнашувчи зарраларнинг ички энергиясига айланишини қараб чиқайлик. Масалан, тезлатилган протоннинг кинетик энергияси унинг тинч ҳолатдаги ички энергияси (m_pc^2) дан катта бўлсин. У ҳолда юқорида келтирилган ((7.58) ифодага қ.) релятив зарраларнинг тўлиқ энергияси (E) ва импульси (p)ни ўзаро боғловчи муносабат

$$E^2-p^2c^2=m^2c^4=\text{inv}$$

дан фойдаланамиз. Бу тенглик бир инерциал саноқ тизимидан иккинчисига ўтганда ўзгармайди, яъни мазкур тенглик лаборатория саноқ тизими (қисқача $Л$) дан $М$-тизимга (қисқача $М$) ўтганда бир хил кўринишга эга, яъни инвариантдир. Шундай қилиб, юқоридаги тенглик нишон томонга йўналтирилган протон учун қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(E_1^2-p_1^2c^2)_{\text{л}}=(E_1^2-p_1^2c^2)_{\text{М}}. \qquad (8.15)$$

Лаборатория тизимида тинч турган протоннинг тўлиқ энергиясини E_2, импульсини p_2 орқали белгилаб, иккита протондан иборат тизим учун (8.15) ифодани

$$\left[(E_1+E_2)^2-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2c^2\right]_{\text{Л}}=\left[(E_1+E_2)^2-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2c^2\right]_{\text{М}} \qquad (8.16)$$

тарзда ёзамиз. Таърифга кўра $М$-тизимда $\vec{p}_1+\vec{p}_2=0$. Лаборатория саноқ тизимида иккинчи протон қўзғалмас бўлганлиги сабабли унинг энергияси фақат тинч ҳолатдаги (яъни кичик) энергиядан иборат бўлиб, импульси эса нолга тенг:

$$E_2=m_pc^2;\ \vec{p}_2=0. \qquad (8.17)$$

(8.16) формулада $E_1+E_2=E_{\text{тм}}$ — $М$-тизимда иккала протоннинг тўлиқ энергияси. Бинобарин, (8.17) ни назарда тутиб, (8.16)ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left[(E_1+m_pc^2)^2-p_1^2c^2\right]_{\text{л}}=E^2_{\text{тм}}$$

ёки

$$\left[(E_1^2-p_1^2c^2)+2E_1m_pc^2+m_p^2c^4\right]_{\text{л}}=E^2_{\text{тм}}.$$

Бу ерда кичик қавс ичидаги ифода $m_p^2c^4$ га тенг эканлигини эътиборга олсак, охирги формулани

$$2m_pc^2(E_1+m_pc^2)_{\text{л}}=E^{\,2}_{\text{тм}}$$

кўринишда ёзиш мумкин; бунда $E_1+m_pc^2=E_{\text{тл}}$ — лаборатория саноқ тизимида иккала протоннинг тўлиқ энергиясини ифодалаганлиги туфайли

$$2\text{E}_{\text{тл}}\,m_pc^2=E^2_{\text{тм}}$$

га эга бўламиз; бу ифодадан лаборатория тизимида иккала протоннинг тўлиқ энергияси учун

$$E_{\text{тл}}=\frac{E^2_{\text{тм}}}{2m_pc^2} \qquad (8.18)$$

га эга бўламиз. (8.18) нисбатни аниқлаш учун протоннинг тинч ҳолатдаги энергияси m_pc^2 ни ҳисоблайлик. Маълумки, $m_p = 1{,}67 \times \times 10^{-27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Тезлатилган ва тинч ҳолатдаги заррaларнинг энергиялари одатда электронвольт (эВ) ларда ифодаланади. 1 эВ — заряди электрон зарядига тенг бўлган заррани потенциаллар фарқи $u_1 - u_2 = 1$ вольт (В) бўлган майдонда тезлатилганда, у эришган энергияга тенг. Электрон заряди $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ кулонга тенг бўлганлиги учун 1 эВ$= e(u_1 - u_2) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл$\cdot$1 В$= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Ж бўлади. У ҳолда $m_pc^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-10}$ Ж$\approx 0{,}938 \cdot 10^9$ эВ$\approx 10^9$ эВ.

Айтайлик, реакция амалга ошиши учун M-саноқ тизимида тезлатилган протоннинг тўлиқ энергияси 10^{10} эВ га тенг бўлиши талаб қилинсин. Лаборатория саноқ тизимида протон қандай энергиягача тезлатилиши кераклигини аниқлайлик. (8.18) формулага $m_pc^2 = = 10^9$ эВ ва $E_{тм} = (10^{10})^2 = 10^{20}$ эВ қийматларни қўйсак,

$$E_{тл} \approx \frac{10^{20}}{2 \cdot 10^9} = 5 \cdot 10^{10} \text{ эВ}$$

бўлади. Демак, инерция (масса) маркази билан боғланган саноқ тизимида протонлар 10^{10} эВ га тенг энергияга эришишлари учун лаборатория саноқ тизимида уларни 5 марта катта энергиягача тезлатиш лозим бўлади, яъни тезлаткичнинг фойдали иш коэффициенти 0,2 га тенг бўлади.

Мақсадга кўра лаборатория саноқ тизимида имкон қадар кам энергия сарфлаб зарраларнинг энергиясини шу қадар ошириш керакки, натижада янги зарралар ҳосил бўлсин. Бунга ҳар иккала тўқнашувчи заррани ҳаракатга келтириш билан эришиш мумкин. Бу усул рўпаравий тўқнашувчи зарралар дастаси (нури) ҳосил қилинадиган тезлаткичларда амалга оширилади. Ҳозирги замон тезлаткичларида зарралар дастаси (зарралардан иборат нур)нинг ҳар бири иккинчиси томон йўналтирилади. Мазкур усул қўлланганда, бир хил импульсга эга бўлган зарраларнинг ҳар бири иккинчиси томон йўналтирилиб, улар иккита тезлаткичнинг ўртасидаги фазода тўқнашадилар. Бу ҳолда тўқнашувчи зарраларнинг инерция маркази лаборатория саноқ тизимига нисбатан ҳаракатсиз бўлади. Бошқача айтганда, лаборатория саноқ тизими зарралар инерция маркази билан боғланган саноқ тизими бўлиб қолади. Мазкур усул билан зарралар тўқнашуви амалга оширилганда тўқнашувдан сўнг зарралар инерция марказининг ҳаракатига энергия сарф бўлмайди.

Ҳозирги замон тезлаткичлари элементар зарраларни 10^{12} эВ гача тезлатиш имкониятига эга. Катта тезликларгача тезлатилган зарралар нишонга бориб урилганда табиий шароитларда учрамайдиган янги зарралар ҳосил бўлади. Янги зарраларни ҳосил қилишда, юқорида айтилганидек, рўпаравий тўқнашувчи зарралар дастаси ҳосил қилинадиган қурилмалар анчагина устунликларга эга. Рўпаравий тўқнашувчи зарралар дастаси усули аслида қуйидагича амалга оширилади: учрашувчи зарралар дастаси (нури) нинг бири тезлаткичда катта тезликларгача тезлатилгандан кейин кучли магнит майдонга киритилади. Мазкур майдонда зарраларга магнит куч

(Лоренц кучи) таъсир этади. Бу куч, маълумки, зарраларнинг фақат ҳаракат йўналишинигина ўзгартириб, тезлигини (энергиясини) ўзгартирмайди. Натижада зарралар дастаси айланма шаклдаги траектория бўйлаб ҳаракатланади. Зарралар ҳаракатини мазкур траектория бўйлаб узоқ вақт сақлаб туриш мумкин. Магнит майдонда ҳаракатланаётган зарраларнинг тезликларига тенг тезликкача тезлатилган яна бир зарралар дастаси магнит майдондаги зарралар билан қарама-қарши йўналишда тўқнаштирилади. Рўпаравий тўқнашувчи зарралар дастаси «бегона» атом ва молекулалар билан тўқнашмаслиги учун қурилмада юқори вакуум ҳосил қилинади.

8.6- §. АНТИПРОТОН ҲОСИЛ БЎЛИШИНИНГ БЎСАҒАВИЙ ЭНЕРГИЯСИ

Маълумки, протон — водород атомининг ядросини ташкил этувчи мусбат зарядли (заряди $+e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, массаси $m_p=1{,}67\times\times10^{-27}$ кг) элементар заррадир. Антипротон эса протондан фақат зарядининг ишораси ($-e$) билан фарқ қилади. Ҳозирги вақтда маълум бўлган ҳар бир элементар зарранинг антизарраси аниқланган. Масалан, электрон-позитрон, нейтрон-антинейтрон, нейтрино-антинейтрино ва бошқ. Антизарра одатда унга мос келувчи заррани ифодалайдиган ҳарф билан белгиланиб, ўша ҳарфнинг устига чизиқча қўйилади (масалан p — протонни, $\bar{p}$ — антипротонни ифодалайди).

Биринчи марта $6{,}3\cdot10^9$ эВ гача тезлатилган протонлар мис нишонга бориб урилганда жуфт зарралар — протон ва антипротон ҳосил бўлиши кузатилган. Антипротоннинг ҳосил бўлиш реакцияси қуйидагича ёзилади:

$$p+p\rightarrow p+p+(p+\bar{p}).$$

Бу формуладан кўринишича, бир-бири билан тўқнашувчи икки протон билан бир қаторда реакция натижасида нишондан яна протон-антипротон жуфти ажралиб чиқади. Ҳосил бўлган протон-антипротон жуфтидаги зарядларнинг алгебраик йиғиндиси нолга тенг ва бинобарин, бу ерда зарядларнинг сақланиш қонуни ҳам бажарилади. Антипротон ва протондан ташқари бир вақтнинг ўзида яна иккита протон ҳосил бўлиши — зарядлар сақланиш қонунининг намоён бўлишидир.

Мазкур реакцияни амалга ошириш учун зарур бўлган бўсағавий энергияни аниқлайлик. Ҳосил бўлган протон ва антипротоннинг массалари ўзаро тенг бўлганлиги туфайли уларнинг тинч ҳолатдаги энергиялари $2m_pc^2$ га тенг. Бинобарин, реакция амалга ошиши учун инерция (масса) маркази саноқ тизими (M-тизим) да ўзаро тўқнашувчи протонларнинг кинетик энергиялари $2m_pc^2$ дан кам бўлмаслиги лозим. Бундан ташқари, бу энергияга яна тўқнашувчи протонларнинг ҳар бирининг тинч ҳолатдаги энергиялари m_pc^2 ҳам қўшилади. Шундай қилиб, M-тизимда тўлиқ энергия

$$E_{\text{тм}}=4m_pc^2 \tag{8.19}$$

дан кам бўлмаслиги зарур.

Энди, M-саноқ тизимида (8.19) формула орқали акс эттирилган энергияни лаборатория саноқ тизимида ифодалайлик. (8.1) га асосан

$$E_{\text{т.л}}=\frac{E^2_{\text{тм}}}{2m_pc^2}=\frac{(4m_pc^2)^2}{2m_pc^2} \qquad (8.20)$$

бўлади; бунда $2m_pc^2$ — тўқнашувчи икки протоннинг тинч ҳолатдаги энергиясини ва $6m_pc^2$ — уларнинг кинетик энергиясини ташкил этади. Демак, протон-антипротон жуфтининг ҳосил бўлиш бўсагавий энергияси (маълумки, протон учун $m_pc^2=0{,}94\cdot10^9$ эВ)

$$6m_pc^2\approx6\cdot0{,}94\cdot10^9 \text{ эВ}=5{,}64\cdot10^9 \text{ эВ}=5{,}64 \text{ ГэВ}$$

бўлиши керак. Ҳисоблашдан олинган бу натижа тезлатилган протон тинч турган якка протон билан тўқнашган ҳол учун тўғридир. Агар тезлаткичда тезлатилган протон тинч турган якка протон билан тўқнашмасдан яхлит мисдан иборат нишонга бориб урилаётганини (яъни протон-нишон ядро билан боғланганлигини) эътиборга олсак, протон-антипротон жуфти ҳосил бўлиш бўсағавий энергияси камаяди. Ҳақиқатан, тажрибада кузатилишича, протон-антипротон жуфтининг ҳосил бўлиш бўсағавий энергияси $4{,}4\cdot10^9$ эВ ни ташкил этган. Бу энергия эса тезлатилган протон эркин ҳолдаги протон-нишон билан тўқнашгандагига қараганда $1{,}2\cdot10^9$ эВ қадар камдир.

IX БОБ

ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР МЕХАНИКАСИ

9.1-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТ ВА МУВОЗАНАТ ТЕНГЛАМАСИ

Қаттиқ жисм ҳаракатини ўрганишда шу пайтгача биз унинг катталиги ва шаклини эътиборга олмай, уни моддий нуқта деб қараган эдик. Қуйида биз жисмнинг катталиги ва шакли муҳим аҳамиятга эга бўлган ҳаракатларни ҳам қараб чиқамиз. Шу мақсадда қаралаётган қаттиқ жисмни биз мутлақ қаттиқ жисм деб ҳисоблаб, уни фикран жуда кичик (элементар) бўлакчаларга бўлиб чиқишимиз ва уни моддий нуқталар тизимидан иборат деб қарашимиз мумкин. Шу боисдан моддий нуқталар тизими ҳаракати учун ўринли бўлган қонуниятларни қаттиқ жисмнинг ҳаракати учун қўллаймиз.

Қаттиқ жисм ҳаракатининг энг оддийси — илгариланма ҳаракат бўлиб, бунда унинг барча нуқталари бир хил тезлик ва бир хил тезланиш билан ҳаракатланади. Қаттиқ жисм ҳаракатининг бошқа тури — унинг бирор нуқта ёки ўқ атрофидаги айланма ҳаракатидир. Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, айланма ҳаракатда жисмнинг ҳар хил нуқталари ўққа тик бўлган текисликларда ётувчи айланалар бўйлаб ҳаракатда бўлади

Маълумки (1.10-§ га қ.), мутлақ қаттиқ жисмнинг эркинлик даражалари сони 6 га тенг, яъни унинг ҳаракати 6 та мустақил тенглама орқали аниқланади. Мазкур тенгламаларнинг 3 таси қаттиқ жисм инерция (масса) марказининг ҳаракат тенгламасидир:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_i F_x;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_i F_y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_i F_z; \tag{9.1}$$

ёки

$$m\frac{dv_x}{dt}=\sum_i F_x;\quad m\frac{dv_y}{dt}=\sum_i F_y;\quad m\frac{dv_z}{dt}=\sum_i F_z \tag{9.1, a}$$

(бунда x, y, z — жисм инерция марказининг координаталари; v_x, v_y, v_z — масса маркази тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари; $\sum\limits_i F_x$, $\sum\limits_i F_y$, $\sum\limits_i F_z$ — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг мос равишда X, Y, Z ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиси). Қолган учта тенглама – X, Y, Z ўқларга нисбатан олинган моментлар тенгламасидир ((5.17) га қ.):

$$\frac{dL_x}{dt}=\sum_i M_x;\quad \frac{dL_y}{dt}=\sum_i M_y;\quad \frac{dL_z}{dt}=\sum_i M_z, \tag{9.2}$$

бунда L_x, L_y, L_z — моддий нуқталар тизимидан иборат қаттиқ жисм импульс моментининг X, Y, Z ўқлардаги проекциялари; $\sum\limits_i M_x$, $\sum\limits_i M_y$, $\sum M_z$ — айланиш ўқига нисбатан ташқи кучлар моментларининг алгебраик йиғиндиси.

Механикада *жисм мувозанати* деб унинг шундай ҳолати тушуниладики, жисм қаралаётган инерциал саноқ тизимига нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Жисм мувозанатда бўлиши учун уни илгариланма ва айланма ҳаракатга келтирувчи сабаб бўлмаслиги лозим. Бунинг учун жисмни илгариланма ҳаракатга келтирувчи кучларнинг X, Y, Z ўқлардаги проекциялари ва айланиш ўқига нисбатан куч моментларининг мазкур координата ўқлардаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши шарт:

$$\sum_i F_x=\sum_i F_y=\sum_i F_z=0; \tag{9.3}$$

$$\sum_i M_x=\sum_i M_y=\sum_i M_z=0. \tag{9.4}$$

(9.3) ва (9.4) шартлар X, Y, Z ўқлар учун бажарилса, у ҳолда ихтиёрий олинган бошқа ўқлар учун ҳам бажарилади.

Агар қаттиқ жисмга таъсир этаётган кучларни уларнинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчирсак айланиш ўқига нисбатан кучларнинг елкаси ўзгармайди; бинобарин, мазкур кучларнинг ўққа нисбатан моментлари ҳам ўзгармайди, яъни мазкур ўзгаришлар жисмнинг ҳаракатига ёки тинч ҳолатига таъсир этмайди. Шунингдек, жисмга таъсир этаётган барча кучлар уларнинг тенг таъсир этувчиси билан, барча кучларнинг бирор ўққа нисбатан моментларининг вектор йиғиндиси эса тенг таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моменти билан алмаштирилиши мумкин. Жисмга таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}$ билан ва унинг қаралаётган ўққа нисбатан моментини $\vec{M}$ билан белгиласак, жисмнинг мувозанат шарти қуйидаги кўринишни олади:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}=0; \qquad (9.5)$$

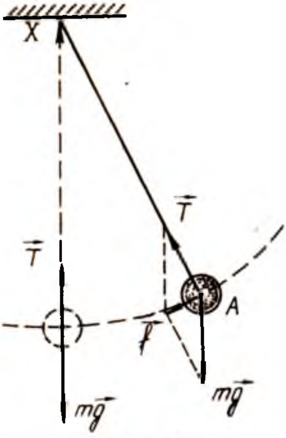
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0, \qquad (9.6)$$

бунда $\vec{v}$ — жисм масса (инерция) марказининг тезлиги. Жисм мувозанатда бўлиши учун бу шартлар зарур шартлар бўлиб, лекин етарли эмас. Гап шундаки, бу шартлар бажарилганда жисмнинг масса маркази қаралаётган саноқ тизимига нисбатан ўзгармас ($v=\text{const}$) тезлик билан илгариланма ҳаракатда ва жисм бирор ўққа нисбатан ўзгармас бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлиши мумкин. Шу боис жисмнинг барча нуқталарининг тезлиги қаралаётган саноқ тизимига нисбатан нолга тенг бўлиши лозим (етарли шарт).

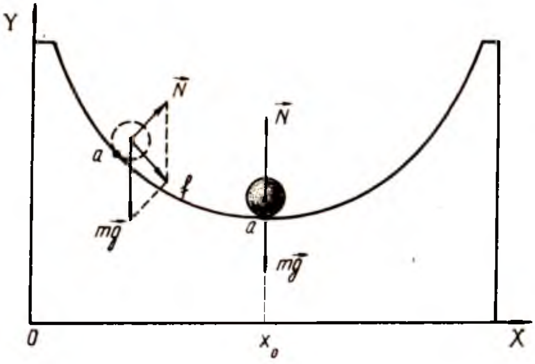
Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, мувозанатда бўлган жисм шу вазиятда исталганча узоқ вақт тура олмаслиги ҳам мумкин. Амалда мувозанатда турган ҳар қандай жисмга кичик ташқи туртки таъсир этиши мумкин ва бу туртки уни мувозанат ҳолатдан чиқара олади. Бу ҳолда (9.3) ва (9.4) шартлар (умумий ҳолда (9.5) ва (9.6) шартлар) бажарилмайди. Натижада бу кичик таъсир туфайли ўз мувозанат вазиятидан чиққан жисм, вужудга келган шароитга кўра, яна мувозанат ҳолатига қайтиши ёки қайтмаслиги мумкин. Жисмнинг ўз мувозанат ҳолатига қайтиши ёки қайтмаслиги — у мувозанат ҳолатидан чиққандан кейин унга таъсир қилаётган кучлар ёки куч моментлари қайси йўналишда таъсир этишига боғлиқ. Мазкур кучлар ва куч моментларининг таъсир йўналишига қараб жисмнинг ҳолати турғун мувозанат ва турғунмас мувозанатга ажратилади. Жисм мувозанат ҳолатидан бир оз чиқарилганда вужудга келган куч ёки куч моменти уни мувозанат ҳолатига қайтарса, жисмнинг бу мувозанати *турғун мувозанат* дейилади. Жисм мувозанат ҳолатидан бир оз чиқарилганда вужудга келган куч ёки куч моменти уни бу ҳолатдан янада узоқлаштирса бундай мувозанат *турғунмас мувозанат* дейилади.

Масалан, ипга солинган A шарчанинг мувозанат ҳолатида (9.1-расм) унинг оғирлик кучи $m\vec{g}$ ва ипнинг таранглик кучи $\vec{T}$ нинг X ўқидаги проекцияларининг (X ўқ ип бўйлаб юқорига йўналган) алгебраик йиғиндиси нолга тенг: $T_x - mg_x = 0$ ёки вектор кўринишда $\vec{T}+m\vec{g}=0$. Энди шарчани мувозанат ҳолатидан бироз четга чиқариб қўйиб юборсак, $m\vec{g}$ ва $\vec{T}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлмай қолади: $m\vec{g}$ ва $\vec{T}$ ларнинг тенг таъсир этувчиси — $\vec{f}$ куч жисмни мувозанат ҳолатига қайтаради.

Яна бир мисол: радиуси r бўлган шарча силлиқ эгри сиртли чуқурликда мувозанат ҳолатда турган бўлсин (9.2-расм). Чуқурликнинг пастки нуқтасида (координатаси x_0 бўлган нуқтада) шарнинг оғирлик кучи ($m\vec{g}$) ва тагликнинг акс таъсир кучи



9.1-расм

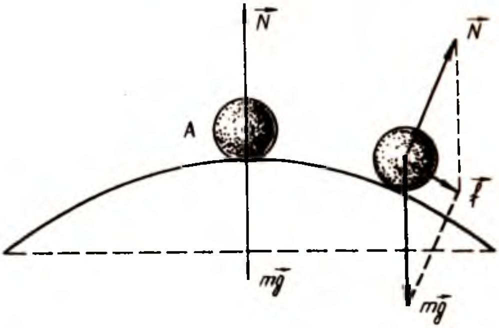


9.2-расм

($\vec{N}$) бир n=бирини мувозанатлайди — шарча мувозанат ҳолатда бўлади ($N_y - mg_y = 0$). Энди шарча мувозанат вазиятидан бир оз четга чиқарилиб, кейин ўз ҳолига қўйилса, шарчага унинг мувозанат вазияти томон йўналган куч таъсир қилади. Бу куч шарчани мувозанат вазиятига қайтаради. Бу ерда шу нарсани таъкидлаш лозимки, шарча мувозанат вазиятидан чиқарилгандан кейин, уни мувозанат вазиятига қайтарувчи $\vec{f}$ куч билан бир қаторда шу куч билан боғлиқ бўлган куч моменти ҳам вужудга келади; натижада шарча мувозанат вазиятига қайтиш жараёнида илгариланма ҳаракат қилиши билан бирга марказидан ўтган ўқ (9.2-расмда бу ўқ расм текислигига тик йўналган) атрофида айланма ҳаракат ҳам қилади (думалайди). Шу боис, радиуси r бўлган шарчани айланма ҳаракатга келтирувчи кучнинг моменти нимага тенг деган саволнинг туғилиши табиий. Айланма ҳаракат жараёнида вақтнинг ҳар бир пайтида шарчани у тегиб турган a нуктадан ўтувчи оний ўқ (расм текислигига тик йўналган ўқ) атрофида айланяпти деб қараш мумкин. Жисмнинг симметрия ўқидан фарқли равишда оний ўқ жисм (шарча) сирти бўйлаб силжиб боради. 9.2-расмдан кўриниб турибдики, елкаси r бўлган $\vec{f}$ кучнинг a нуқтадан ўтувчи оний ўққа нисбатан моменти $\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{f}]$ га тенг (қўзғалувчан z ўқ расм текислигига тик равишда биздан нариги томонга йўналган). Шарча мувозанат вазиятда бўлганда $\vec{f} = 0$ ва $\vec{M}_z = 0$. Демак, мазкур мувозанат турғун мувозанатдир ва шу вазиятда жисм исталганча узоқ вакт тура олади. Турғун мувозанатда жисмнинг потенциал энергияси энг кичик (минимум) бўлади. Юқоридаги мисолимизда потенциал энергиянинг энг кичик бўлиш шарти

$$\frac{\partial E_n}{\partial y} = 0 \qquad (9.7)$$

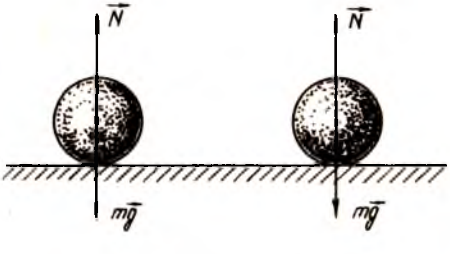
тарзда ифодаланади. Бундан ва (6.29) дан $\sum_i F_y = 0; \ \sum_i M_z = 0$ (табиийки, $\sum_i F_x = \sum_i F_z = 0; \ \sum_i M_x = \sum_i M_y = 0$) эканлиги келиб чиқади, яъни (9.3) ва (9.4) шартлар, шунингдек (9.5) ва (9.6) шартлар бажарилади.



9.3-расм

Жисмнинг турғун бўлмаган мувозанати 9.3-расмда тасвирланган. *А* шарча силлиқ дўнгликда турган бўлса, бу вазиятда оғирлик кучи ($m\vec{g}$) билан шарча турган силлиқ сиртнинг акс таъсир кучи ($\vec{N}$) ўзаро тенг ва қарама-қарши томонга йўналган, яъни бу жисмнинг вазиятида ҳам юқорида келтирилган мувозанатлик шартлари бажарилади. Лекин мазкур вазият турғунмас вазиятдир, чунки жуда кичик ташқи таъсир остида ҳам жисм ўзининг мувозанат вазиятидан чиқади ва бунинг натижасида вужудга келган $\vec{f}(m\vec{g}+\vec{N}=\vec{f})$ куч жисмни мувозанат вазиятига қайтармайди, аксинча, у жисмни мувозанат вазиятидан узоқлаштиради. Равшанки, турғунмас мувозанатда жисмнинг потенциал энергияси энг катта қийматга эга бўлади.

Агар жисм уфқ текислигида мувозанат ҳолатда турган бўлса (9.4-расм), уни уфқ текислиги бўйлаб бу вазиятдан чиқарилган ҳолда ҳам оғирлик кучи ($m\vec{g}$) билан жисм турган тагликнинг акс таъсир кучи ($\vec{N}$) бир-бирини мувозанатлайди ва жисмни аввалги ҳолатга келтирувчи куч вужудга келмаса ҳам жисм ўзининг тинч ҳолатини сақлайверади. Мувозанатнинг бу тури *фарқсиз мувозанат* дейилади. Бундай мувозанатда жисмнинг потенциал энергияси уфқ текислигига нисбатан энг кичик (нолга тенг) бўлиб, у бир вазиятдан иккинчи вазиятга ўтганда ўзгармайди.



9.4-расм

9.2- §. ЖИСМНИНГ АЙЛАНИШ ЎҚИГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

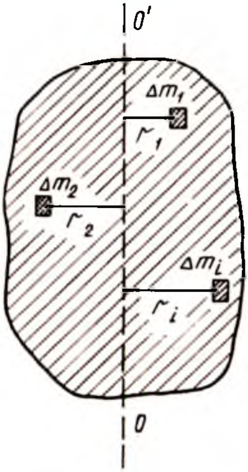
Юқорида биз бурчак тезлик, бурчак тезланиш (1.7-§) ва куч моменти (5.1-§) деган катталиклар билан танишдик. Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини ўрганишда юқоридаги катталиклар билан бир қаторда *инерция моменти* деган катталикдан ҳам фойдаланилади. Бу катталик ҳақида муайян тасаввур ҳосил қилиш учун *OO'* ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмни олиб қарайлик (9.5-расм); уни фикран массалари Δm_i бўлган *n* та жуда майда бўлакларга бўлиб, ҳар бир майда (элементлар) бўлакчадан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофани r_i билан белгилайлик. Майда бўлакча массасини ундан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофа квадратига кўпайтмаси унинг шу ўққа нисбатан *инерция моменти* (I_i) дейилади:

$$I_i = \Delta m_i r_i^2. \tag{9.8}$$

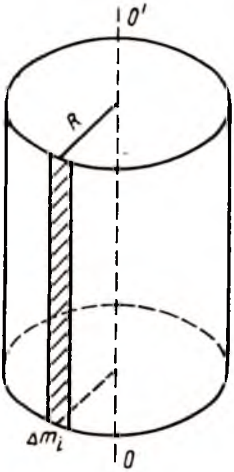
Айланиш ўқига нисбатан каттиқ жисмнинг инерция моменти (I) деб, барча кичик (элементар) массаларнинг шу ўққа нисбатан инерция моментларининг йиғиндисига айтилади:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2. \tag{9.9}$$

Таърифдан кўринадики, жисмнинг инерция моменти айланиш ўқига нисбатан аникланади. Бу борада шу нарсани таъкидлаш лозимки, ҳар қандай жисм тинч ҳолатда ёки айланма ҳаракатда бўлишига боғлиқ бўлмаган ҳолда унинг ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти мавжуд. Бу ерда жисмнинг инерция моментини унинг массасига қиёс қилиш мумкин: жисм ҳаракатда ёки тинч ҳолатда бўлишидан қатъи назар, унинг массаси (инертлиги) мавжуддир.



9.5-расм



9.6-расм

Аксарият ҳолларда жисмнинг массаси унинг ҳажми бўйлаб бир текис тақсимланган (жисм бир жинсли) бўлади. Шунинг учун жисмнинг инерция моментини унинг зичлиги орқали ифодалаш мумкин. Маълумки бир жинсли жисмнинг зичлиги $\rho = m/V$ (V — массаси m бўлган жисмнинг ҳажми) тарзда ифодаланади. Шу муносабат билан жисм инерция моментини ифодаловчи (9.9) йиғиндини интеграл билан алмаштириш мумкин:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm, \qquad (9.10)$$

бунда интеграллаш жисмнинг бутун ҳажмидаги элементар массалар (dm) бўйича амалга оширилади. dm га тенг элементар массанинг ҳажми dV эканлигидан ва зичликнинг таърифидан $dm = \rho dV$ ни ҳосил қиламиз; натижада (9.10) қуйидаги кўринишни олади:

$$I = \rho \int_V r^2 dV. \qquad (9.11)$$

Энди, баъзи жисмларнинг инерция моментларини акс эттирувчи ифодани топайлик. Радиуси R га тенг юпқа деворли (ковак) цилиндрнинг симметрия ўқи (OO') га нисбатан инерция моментини топиш учун унинг деворларини OO' ўққа параллел бўлган n та энсиз бўлакчаларга 9.6-расмда кўрсатилгандек фикран бўлиб чиқамиз. Цилиндрнинг девори юпқа бўлганлиги туфайли ҳар бир энсиз бўлакча OO' ўқдан бир хил масофада жойлашган деб ҳисоблаш мумкин. i-бўлакчанинг массасини Δm_i деб белгиласак, унинг OO' ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_i = \Delta m_i R^2$$

бўлади. Юпқа цилиндрнинг ўша ўққа нисбатан инерция моменти эса қуйидагича ифодаланади:

$$I = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2, \qquad (9.12)$$

бунда $\sum\limits_i \Delta m_i = m$ — юпқа цилиндрнинг массаси. Энди радиуси R ва баландлиги h бўлган бир жинсли яхлит цилиндрнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моментини акс эттирувчи ифодани топайлик. Бунинг учун цилиндрни радиуси r ва деворининг қалинлиги dr бўлган ичма-ич жойлашган цилиндрларга фикран бўлиб чиқайлик (9.7-расмда шундай цилиндрдан биттаси тасвирланган). Бундай цилиндрнинг ҳажми

$$dV = 2\pi r dr \cdot h.$$

Охирги формулани (9.11) га қўйиб ва ичма-ич жойлашган цилиндрларнинг радиуслари 0 дан R гача ўзгаришини назарда тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

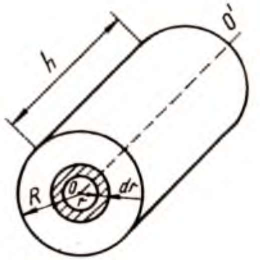
$$I = \rho \int_0^R r^2 2\pi r dr \cdot h = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4.$$

Бу формуланинг ўнг томонидаги $\pi R^2 h$ — яхлит цилиндрнинг ҳажми ва $\pi R^2 h\rho = m$ унинг массаси эканлигини эътиборга олсак, бир жинсли яхлит цилиндрнинг (шунингдек, бир жинсли дискнинг) симметрия ўқига (9.7-расм, OO′ ўқ) нисбатан инерция моменти қуйидагича ифодаланади:

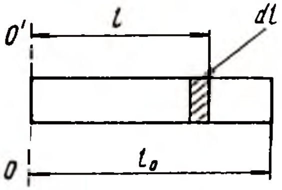
$$I=\frac{1}{2}mR^2. \tag{9.13}$$

Узунлиги l_0 ва массаси m бўлган бир жинсли ингичка таёқчанинг бир учидан унга тик равишда ўтувчи ўққа нисбатан (9.8-расм) инерция моментини топиш учун уни кичик узунликдаги бўлакчаларга фикран бўлиб чиқамиз. Бир жинсли таёқчанинг узунлик бирлигига тўғри келувчи массаси m/l_0 бўлганлиги учун, dl узунликдаги бўлакчанинг массаси

$$dm=\frac{m}{l_0}\,dl$$



9.7-расм



9.8-расм

бўлади; бу бўлакчанинг OO' ўққа нисбатан инерция моменти

$$dI=l^2dm=\frac{m}{l_0}\,l^2dl$$

муносабат билан ифодаланади. Таёқчанинг OO' ўққа нисбатан инерция моментини топиш учун охирги формулани 0 дан l_0 гача интеграллаймиз:

$$I=\int dI=\frac{m}{l_0}\int\limits_0^{l_0}l^2dl=\frac{1}{3}ml_0^2. \tag{9.14}$$

Шу таёқчанинг ўртасидан унга тик равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти

$$I=\frac{1}{12}ml_0^2 \tag{9.15}$$

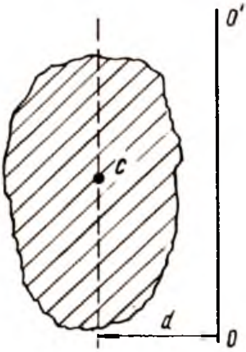
эканлигини ҳисоблаш қийин эмас. Шунингдек, радиуси R ва массаси m бўлган бир жинсли шарнинг унинг марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти

$$I=\frac{2}{5}mR^2 \tag{9.16}$$

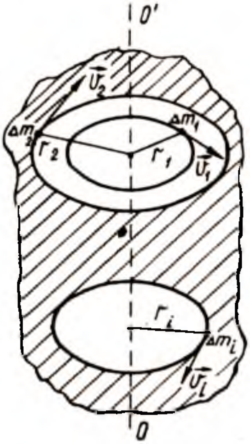
формула билан ифодаланади.

(9.12) — (9.15) ифодаларни таққослаб шундай хулосага келамизки, жисмларнинг инерция моментлари айланиш ўқига нисбатан улар массасининг тақсимотига (массанинг ўққа нисбатан жойлашишига) боғлиқ катталик экан.

Ҳозиргача биз жисмларнинг инерция моментларини уларнинг масса марказидан ўтувчи ўққа нисбатан аниқладик. Масса марказидан ўтмаган бошқа ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти эса масса марказидан ўтган ўққа нисбатан аниқланган инерция моментидан фарқ қилади, чунки ўқнинг вазияти ўзгариши билан жисм массасининг ўққа нисбатан нисбий жойлашиши ҳам ўзгаради. Шунинг учун жисмнинг масса маркази (C нуқта, 9.9-расм) орқали ўтмаган ўққа (масалан, OO' ўққа) нисбатан инерция моментини аниқлашда Штейнер (1796—1863, Швейцария олими) теоремасидан фойдаланилади: *ихтиёрий ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти* (I) *ўша ўққа параллел равишда масса маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан аниқланган инерция моменти* (I_c) *ва жисм массаси* (m) *билан ўқлар орасидаги масофа* (d) *квадратининг кўпайтмаси тарзида аниқланадиган катталик йиғиндисига тенг:*



9.9-расм



9.10-расм

$$I = I_c + md^2: \qquad (9.17)$$

9.3-§. ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАСИ

Бирор қўзғалмас ўқ (айтайлик, Z ўқ) атрофида ўзгармас бурчак тезлик (ω) билан айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмни олиб қарайлик ва уни массалари Δm_i бўлган n та майда бўлакчаларга фикран шундай бўлиб чиқайликки, уларнинг ҳар бирини моддий нуқта деб қараш мумкин бўлсин. Ҳар бир бўлакчадан айланиш ўқигача бўлган энг яқин масофани r_i билан белгиласак (9.5-расмга қ.), қаралаётган қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига нисбатан импульс моменти (5.6)га кўра

$$L_z = \Sigma L_{zi} = \sum_i \Delta m_i v_i r_i \qquad (9.18)$$

тарзда ифодаланади; бунда v_i — массаси Δm_i бўлган бўлакчанинг чизиқли тезлиги. Қаттиқ жисм бирор ўқ атрофида айланаётганда массалари Δm_i бўлган унинг ҳар бир майда бўлакчаси (шунингдек, унинг ҳар бир нуқтаси)нинг траекторияси айланиш ўқига тик жойлашган текисликларда ётувчи ва радиуслари r_i бўлган айланалардан иборат бўлади (9.10- расм). Ҳар бир бўлакчанинг чизиқли тезлиги (1.35)га кўра айланиш радиусига мутаносиб, яъни $v_i = \omega r_i$. Бунга асосан (9.18)ни қуйидагича ёзамиз ($\omega = \mathrm{const}$): $L_z = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2$. (9.9)га биноан $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментини ифодалайди. Натижада, охирги тенглик

$$L_z = I\omega \qquad (9.19)$$

кўринишга келади. Бинобарин, қаттиқ жисм импульсининг қўзғалмас ўққа нисбатан моменти унинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезликнинг кўпайтмасига тенг.

Қаттиқ жисмнинг Z ўқ атрофидаги айланма ҳаракати ташқи кучлар таъсирида содир бўлаётган бўлса, мазкур кучларнинг натижавий моменти $\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ бўлади ((5.10)га қ.) ва ўша ўққа нисбатан моментлар тенгламаси (5.15) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = M_z. \qquad (9.20)$$

Жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти вақтга боғлиқ бўлмаган катталик бўлганидан ва $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ — бурчак тезланиш эканини эътиборга олсак, юқоридаги ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$M_z = I\varepsilon.$$

Вектор кўринишда бу тенглик

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \qquad (9.20,\ a)$$

тарзда ёзилади ($\vec{M}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторларнинг йўналиши бир хил).

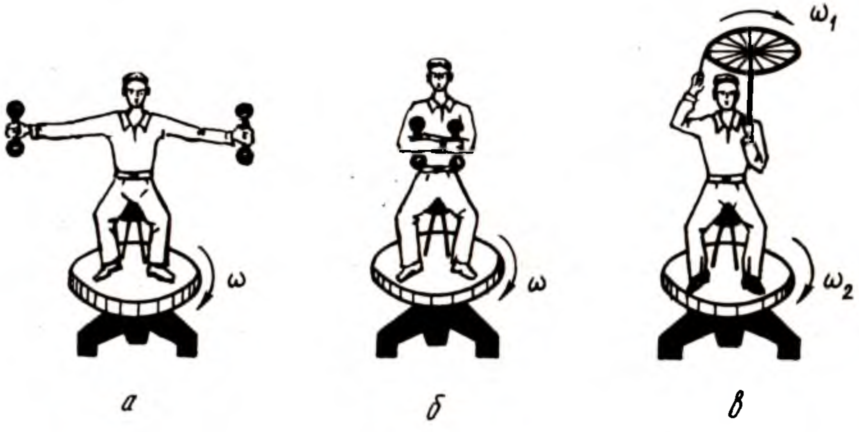
(9.20, *a*) формула қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси дейилади. У илгариланма ҳаракат қилаётган моддий нуқта динамикасининг асосий тенгламаси $\vec{F} = m\vec{a}$ (Ньютоннинг II қонуни)га ўхшашдир. Бунда масса вазифасини инерция моменти, чизиқли тезланиш вазифасини бурчак тезланиш, куч вазифасини куч моменти ўтайди.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмга ташқи кучлар таъсир қилмаса, яъни $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ва $M_z = 0$ бўлса, (9.20) дан

$$I\omega = \mathrm{const} \tag{9.21}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу муносабат қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисм импульс моментининг сақланиш қонунини ифодалайди. Бу қонундан кўринадики, жисмнинг ўққа нисбатан импульс моменти ўзгармаганда ($I = \mathrm{const}$) мазкур жисм ўзгармас бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлади; айланиш жараёнида бирор сабабга кўра жисмнинг инерция моменти ўзгарса, унинг бурчак тезлиги ҳам ўзгаради (I ортса, ω камаяди ва аксинча).

Ўқ атрофида айланаётган жисм импульс моментининг сақланиш қонунини Жуковский курсиси деб аталувчи қурилма ёрдамида намойиш қилиш мумкин. Жуковский курсиси тик жойлашган ўқ атрофида айлана оладиган дискдан иборат. Унда шарикли подшипниклар қўлланилгани туфайли ишқаланиш кучлари жуда кичик.



9.11-расм

Диск устида киши тикка туриши ёки диск устига стулча қўйиб ўтириб олиши мумкин. Курсига бирор киши қўлларини кенг ёйган ҳолда ўтириб олгандан кейин уни айланма ҳаракатга келтирилади (9.11, *а*-расм). Курси билан бирга айланаётган киши қўлларини пастга туширса (ёки қўлларини қовуштирса) унинг инерция моменти камаяди. $I\omega$ кўпайтма (9.21) га кўра ўзгармай қолиши учун бурчак тезлик ω ортади — курси тез айлана бошлайди (9.11, *б*-расм). Курсидаги кишининг қўлларида оғир тошлар (айтайлик гантель) бўлса, бу ўзгариш ёрқинроқ намоён бўлади.

Жуковский курсиси ёрдамида импульс моментининг вектор катталик эканини ҳам намойиш қилиш мумкин. Бунинг учун тинч ҳолатда бўлган курсида ўтирган киши қўлига велосипед ғилдирагига ўхшаш ғилдиракнинг ўқини бир қўлида тик йўналишда ушлаб туриб иккинчи қўли билан ғилдиракни айланма ҳаракатга келтирса, у курси билан бирга тескари йўналишда айлана бошлайди (9.11, *в*-расм). Бу ҳол қуйидагича тушунтирилади: ғилдиракнинг инерция моментини I_1, бурчак тезлигини ω_1, кишининг курси билан биргаликдаги инерция моментини I_2 десак, импульс моментининг сақланиш қонуни ($I_1\omega_1+I_2\omega_2=\text{const}=0$) га асосан, курси ва ундаги киши олган бурчак тезлик

$$\vec{\omega}_2=-\frac{I_1}{I_2}\vec{\omega}_1$$

бўлади; бунда манфий ишора $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ (яъни $\vec{L}_{z1}$ ва $\vec{L}_{z2}$) векторларнинг йўналиши қарама-қарши эканлигини ифодалайди.

9.4-§. АЙЛАНАЁТГАН ЖИСМНИНГ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИ ВА БАЖАРГАН ИШИ

Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик (ω) билан айланма ҳаракат қилаётган бўлсин. Уни 9.5-расмда кўрсатилгандек, n та майда бўлакчаларга фикран бўлиб чиқайлик ва i- бўлакчанинг массасини Δm_i билан ва мазкур бўлакчадан айланиш ўқигача бўлган энг яқин масофани r_i билан белгилайлик. 9.3-§ да айтилганидек, бўлакчанинг ҳар бири айланиш ўқига тик жойлашган текисликларда ётувчи айланалар бўйлаб v_i га тенг ҳар хил чизиқли тезлик билан ҳаракат қилади. Чизиқли тезлик v_i билан бурчак тезлик ω орасидаги $v_i=\omega r_i$ муносабат мавжудлигини ва барча бўлакчаларнинг бурчак тезлиги бир хил ($\omega=\text{const}$) эканлигини эътиборга олиб, i-бўлакчанинг кинетик энергиясини

$$E_{\text{к}i}=\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}=\frac{\Delta m_i(\omega r_i)^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\Delta m_i r_i^2$$

тарзда ёзамиз. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик энергияси айрим бўлакчалар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг:

$$E_{\text{к}}=\sum_i E_{\text{к}i}=\frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2,$$

бу ерда $\sum\limits_i \Delta m_i r_i^2$ — маълумки ((9.9) га қ.), жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментини ифодалайди. Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергияси қуйидагича ифодаланади:

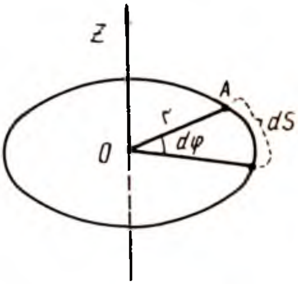
$$E_{\text{к}}=\frac{I\omega^2}{2}. \tag{9.22}$$

Бу формулани илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик энергияси ($mv^2/2$) билан таққосласак, бунда жисм массаси ўрнида инерция моменти, чизиқли тезлик ўрнида эса бурчак тезлик турганини кўрамиз.

Жисм бир вақтнинг ўзида ҳам илгариланма, ҳам айланма ҳаракат қилиши мумкин. Жисм аксарият ҳолларда унинг масса марказидан ўтган ўқ атрофида айланади; ўқ эса ўз навбатида илгариланма ҳаракат қилади. Автомобиль ғилдирагининг ҳаракати, цилиндр шаклидаги жисмнинг бирор текислик устида думалаши шулар жумласидандир. Бундай ҳаракатнинг тўлиқ кинетик энергияси илгариланма ва айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$E_к=\frac{mv_c^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}, \qquad (9.23)$$

бунда m — жисмнинг массаси, v_c — масса марказининг илгариланма ҳаракатдаги тезлиги.



9.12-расм

Тинч турган жисмни бирор ўқ атрофида айланма ҳаракатга келтириш учун ташқи кучлар ишқаланиш кучларини енгиб иш бажаради. Шу иш ҳисобига жисм айланма ҳаракатдаги кинетик энергияга эга бўлади. Мазкур иш ифодасини топайлик. 9.1-§ да кўриб ўтдикки, жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда унинг ҳар бир нуқтасининг траекторияси айланиш ўқига тик жойлашган текисликларда ётувчи ҳар хил радиусли айланалардан иборат бўлади. Жисм Z ўқи атрофида айланаётган бўлсин (9.12-расм). Жисмдаги A нуқтанинг айланиш радиуси $d\varphi$ бурчакка бурилганда бу нуқта айлананинг ёйи бўйлаб ds масофани босиб ўтади. Бунда бажарилган иш

$$dA=Fds.$$

Расмдан кўринишича $ds=rd\varphi$, бинобарин, $dA=Frd\varphi$; бунда $Fr=$ $=M$ — ташқи кучларнинг Z ўққа нисбатан моменти эканлигини эътиборга олиб, юқоридаги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$dA=Md\varphi. \qquad (9.24)$$

Жисм муайян φ бурчакка бурилганда бажарилган тўлиқ иш эса

$$A=M\varphi \qquad (9.25)$$

бўлади. Бу формулани илгариланма ҳаракатда ташқи кучлар бажарган иш формуласи ($A=F_sds$) билан таққосласак, шу нарса аён бўладики, куч вазифасини ташқи кучлар моменти, чизиқли кўчиш вазифасини эса бурчак кўчиш ўтайди.

Биз юқорида жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракатларини тавсифловчи ифодалар (ва катталиклар) орасида мос ўхшашликлар борлигини кўрдик. Мазкур ўхшашликлар қуйидаги жадвалда қайд этилган:

	Илгариланма ҳаракат	Айланма ҳаракат
1.	Масса m	Инерция моменти I
2.	Кўчиш s	Бурчак кўчиш φ
3.	Тезлик $\vec{v}$	Бурчак тезлик $\vec{\omega}$
4.	Тезланиш $\vec{a}$	Бурчак тезланиш $\vec{\varepsilon}$
5.	Импульс $\vec{p}=m\vec{v}$	Импульс моменти $\vec{L}=I\vec{\omega}$
6.	Куч $\vec{F}$	Куч моменти $\vec{M}$
7.	Динамиканинг асосий тенгламаси $\vec{F}=m\vec{a}$	Динамиканинг асосий тенгламаси $\vec{M}=I\vec{\varepsilon}$
8.	Кинетик энергия $mv^2/2$	Кинетик энергия $I\omega^2/2$
9.	Иш $dA=F_s ds$	Иш $dA=Md\varphi$

X БОБ

ТУТАШ МУҲИТЛАР МЕХАНИКАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

10.1-§. СУЮҚЛИК ВА ГАЗЛАРНИНГ УМУМИЙ ХОССАЛАРИ

Суюқлик — моддаларнинг қаттиқ ва газсимон ҳолатлари орасидаги агрегат ҳолат бўлиб, унинг асосий хоссаларидан бири оқувчанлигидир. Суюқликнинг иккинчи асосий хоссаси — унинг идишга қуйилганда газ сингари идиш шаклини олишидир. Баъзи хоссаларига кўра суюқлик қаттиқ жисмга ўхшайди, бошқа хоссаларига кўра газга ўхшайди. Лекин суюқлик таркибидаги молекулаларнинг ҳаракати (иссиқлик ҳаракати) ўзига хос табиатга эга бўлиб, бу ҳаракат қаттиқ жисм ва газ молекулаларининг ҳаракатидан фарқ қилади. Оддий шароитда газ молекулалари деярли ўзаро таъсирлашмайди (улар орасидаги ўзаро таъсир кучи жуда кичик), чунки улар орасидаги масофа молекулаларнинг ўз ўлчамларидан камида бир неча ўн минг марта ортиқ. Газ молекулалари орасидаги тортишиш кучлари уларни бир-бири яқинида тутиб туролмайди ва бинобарин, газлар чексиз кенгая олади. Шунинг учун газлар улар солинган идиш ҳажмининг ҳаммасини эгаллайди ва идиш шаклини олади.

Газнинг ҳолати босим (P), ҳажм (V) ва ҳарорат (T) билан аниқланганлигидан уларнинг ўзгаришига қараб газ ҳар хил хусусиятларга эга бўлиши мумкин. Масалан, кучли сиқилган газнинг физикавий хусусиятлари оддий шароитдаги газникидан кескин фарқ қилади. Суюқликларда эса молекулалар орасидаги масофа жуда кичик бўлиб, бу масофанинг ўртача қиймати молекулаларнинг диаметрига яқиндир. Шунинг учун суюқликнинг ҳар бир молекуласи газ молекуласидан бошқача ҳаракат қилади, яъни у мувозанат вазияти атрофида тебранма ҳаракат қилиш билан бирга молекулалар орасидаги бўшлиқлар бўйлаб (мураккаб эгри чизиқли траектория бўйлаб) силжийди.

Суюқлик идишга қуйилганда идиш ҳажмининг муайян қисмини эгаллайди ва шу билан бирга ўша ҳажмдаги идиш шаклини олади. Худди шу хоссалари билан суюқлик газга ўхшайди. Қаттиқ жисм суюқликдан асосан шу билан фарқ қиладики, у муайян ҳажмга эга бўлиш билан бирга ўзига хос шаклга ҳам эга. Суюқлик молекулаларининг ўзаро таъсир кучлари билан қаттиқ жисм молекулаларининг ўзаро таъсир кучлари тахминан бир хил бўлади. Суюқликларда ва қаттиқ жисмларда мазкур ўзаро таъсир жуда кучли, шу боис уларнинг молекулалари газ молекулалари каби тарқалиб кетмайди. Суюқ ва қаттиқ жисмлар зичликлари газларникига нисбатан анча катта бўлиб, улар ташқи куч таъсирида жуда кам сиқилади. Бу ҳол суюқ ва қаттиқ жисм молекулалари орасидаги масофа жуда кичиклиги билан боғлиқ. Шу жиҳатдан суюқлик қаттиқ жисмга ўхшайди. Суюқликнинг қаттиқ жисм ва газлардан яна бир асосий фарқи шундан иборатки, унда юза қатлами (суюқлик юзаси) мавжуд.

Ташқи шароит (масалан, ҳарорат, босим ва ҳажм)нинг ўзгариши билан муайян модданинг ўзи ё қаттиқ жисм ҳолатида ё суюқ ҳолатда ёхуд газ ҳолатида бўлиши мумкин. Сувнинг уч агрегат ҳолатда — муз (қаттиқ жисм), сув (суюқлик) ва буғ (газ) ҳолатда бўлиши бизга маълум. Газларни критик ҳарорат (температура) деб аталган ҳарорат ($T_к$) гача совитилганда улар суюқликка айланади. Масалан, кислороднинг критик ҳарорати 154 К (—119°С)ни ташкил этади. Агар уни 154 К дан паст ҳароратгача совитилса у суюқ ҳолатга ўтади. Азот ва водород учун критик ҳарорат мос равишда 126 К (—147°С) ва 33 К(—240°С)ни ташкил этади.

Пировардида шуни таъкидлаш лозимки, қуйида биз суюқликларнинг ҳаракатини ўрганишда уларни муттасил (узлуксиз) муҳит деб қараймиз, яъни суюқликларнинг алоҳида зарралардан — молекулалардан тузилганлигини эътиборга олмаймиз.

10.2- §. БОСИМ

Кундалик ҳаётимиздан маълумки, юмшоқ қор устида турган киши қорга ботиб кетади. Аммо у оёғига чанғи боғласа, қорга ботмай бемалол юриши мумкин. Бунинг сабаби нимада? Ваҳоланки, кишининг оғирлиги ҳар икки ҳолда ҳам бир хил-ку? Бунинг сабаби шундаки, биринчи ҳолда оғирлик кучи кичик юзага таъсир этса, иккинчи ҳолда ўша куч анча катта юза(чанғилар юзаси) бўйлаб тақсимланади. Бундан босим кучи таъсирининг натижаси бу кучнинг миқдоригагина эмас, балки куч тик таъсир қиладиган сирт юзига ҳам боғлиқлиги келиб чиқади. Бинобарин, *босим деб сиртнинг бирлик юзига тик равишда таъсир қилувчи кучга тенг бўлган катталикка айтилади*. Босим бирлиги қилиб 1 м^2 юзага тик равишда таъсир этаётган 1 Н кучнинг босими қабул қилинган: агар босимни p билан, кучни F билан ва юзани S билан белгиласак,

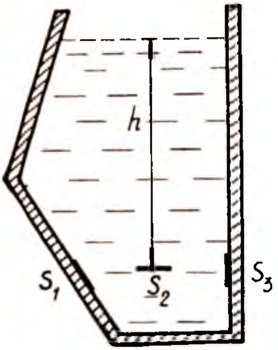
$$p=\frac{F}{S}=\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right].$$

Бу соҳада кўп ишлар қилган француз олими Паскаль шарафига 1Н/м^2 босим бирлиги *Паскаль* (Па) деб аталади:

$$\frac{1\ \text{Н}}{1\ \text{м}^2}=1\ \text{Па}.$$

Газ босими қаттиқ жисм ва суюқликлар босимидан фарқ қилиб, у газ молекулаларининг идиш деворларига урилиши натижасида вужудга келадиган босимдан иборат. Оддий шароитда ҳавода молекулаларнинг идиш деворларининг 1 $см^2$ юзига 1 с да урилишлар сони 10^{23} га яқинлиги аниқланган. Айрим молекулаларнинг зарблари кучсиз бўлсада, бундай сондаги молекулаларнинг идиш деворларига зарби анча сезиларли бўлиб, у газ босимини ҳосил қилади.

Ўзгармас ҳароратдаги газнинг босими идишнинг ҳажмига тескари мутаносиб бўлса, бир хил ҳажмдаги босими эса унинг ҳароратига тўғри мутаносибдир.



10.1-расм

Суюқликлар ва газларга берилган босим қаттиқ жисмлардагидек фақат куч таъсир қилган йўналишдагина эмас, балки ҳамма йўналишларда узатилиши шу суюқлик ва газлар зарраларининг эркин ҳаракатланишидан келиб чиқади. Бу хусусиятдан келиб чиқадиган асосий натижа Паскаль қонунидан иборат: *суюқлик ва газга таъсир этаётган ташқи босим суюқлик ёки газнинг ҳар бир нуқтасига ўзгаришсиз узатилади.* Бу қонундан техникада пневматик асбобларни ясашда фойдаланилади.

Оғирлик кучи таъсир қилаётган суюқлик ичидаги босим унинг баландлигига боғлиқ. Юқоридан пастга қараб босим ортиб боради, чунки суюқликнинг ҳар бир қатлами юқори қатламлар босимига дучор бўлади; идиш тубидаги суюқликни эса юқорида ётган ҳамма қатламлар босади. Паскаль қонунига мувофиқ бу босимлар ҳамма йўналишлар бўйича узатилади; шунинг учун суюқлик идиш туби ва деворларида ҳамда унга ботирилган ҳар қандай жисм сиртида босим ҳосил қилади. Масалан, 10.1-расмда кўрсатилган шаклдаги идишда суюқлик бўлсин. Идиш ичида ҳар хил текисликда жойлашган ва ҳар қайсисининг юзаси бир бирликка тенг бўлган учта $S_1=S_2=S_3$ юзачаларни фикран олиб қарайлик. Мазкур юзачаларнинг ҳар бири суюқлик юзасидан h чуқурликда жойлашган бўлсин. Паскаль қонунига биноан, ҳар бир юзага баландлиги h ва кўндаланг кесим юзаси бир бирликка тенг бўлган ҳажмдаги суюқликнинг оғирлигига тенг куч таъсир этади. Суюқликнинг бу оғирлигини Q билан, зичлигини ρ билан белгиласак, ҳар бир юзачага таъсир этаётган босим $\bar{p}=\frac{\bar{Q}}{S}=\frac{\rho\bar{g}hS}{S}=\rho\bar{g}h$ бўлади (g — жисмнинг бўшлиқдаги эркин тушиш тезланиши). Демак, юзачаларнинг қандай жойлашганидан қатъи назар, суюқликнинг юқори қатламлари томонидан уларга $\bar{p}=\rho\bar{g}h$ босим таъсир этади.

Бу мулоҳазалардан кўринадики, ҳар қандай суюқликнинг (ва газларнинг) пастки қатламларига, шунингдек, ўша қатламларни чегаралаб турган идиш деворига улардан h баландликда жойлашган қатлам томонидан h катталикка мутаносиб бўлган босим таъсир этади.

Зоган, Ерни куршаб олган ҳаво қатлами (*атмосфера*)нинг баландлиги бир неча километрни ташкил этади. Огирлик кучи таъсирида ҳавонинг юқоридаги катламлари, океандаги сув каби, пастки қатламларга босим беради. Натижада Ер сирти ва ундаги жисмларга ҳаво қатламининг босими — атмосфера босими таъсир қилади. Бу босимнинг микдорини биринчи марта XIX асрда итальян олими Торричелли аниқлаб, атмосфера босим кучининг Ер сиртидаги катталиги 760 мм симоб устуни огирлигига тенг эканлигини кўрсатди.

Суюқлик босими асосан гидромеханик (суюқликнинг бирор нуқтасидаги), гидростатик (тинч ҳолатдаги суюқликка оид) ва гидродинамик (ҳаракатдаги суюқликка оид) босимларга бўлинади. Гидромеханик босимнинг атмосфера босимидан ортиғи ортиқча босим деб аталади; атмосфера босимидан кичик босим вакуумметрик (бўшлиқдаги) босим бўлади. Динамик босим — ҳаракатдаги суюқлик зарраларининг ҳажм бирлигидаги кинетик энергиясини ифодаловчи катталикдир. Бундан ташқари ҳаво босими, буғ босими, парциал босим (турли хил газлар аралашмасига оид) деган тушунчалардан фойдаланилади. Бирор идиш ичидаги ва унинг атрофидаги муҳит босими биргаликда мутлақ босим деб аталади.

СИ тизимидаги босим бирлиги (Па) дан ташқари физика ва техникада қуйидаги босим бирликлари қўлланилади:

1) Оддий шароитда денгиз сатҳидаги ($15°C=288$ K) *атмосфера босими* — 1 атм$=1{,}013\cdot10^5$ Па.

2) $\vec{p}=\rho\vec{g}h$ формулада ρ ва $\vec{g}$ берилган катталиклар бўлгани учун *босимнинг симоб устуни* (h)нинг миллиметрларда ўлчанган бирлиги (мм сим. уст.) қўлланилади: 1 атм$=$760 мм сим. уст.; 1 мм сим. уст. $\approx$ $\approx$ 133 Па.

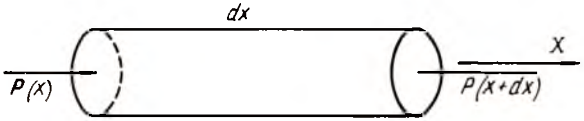
10.3-§. СУЮҚЛИКЛАРНИНГ ҲАРАКАТ ВА МУВОЗАНАТ ТЕНГЛАМАСИ

Суюқликлар ҳаракатининг ҳақиқий манзарасини аниқлаш учун механика қонунларини татбиқ этган вақтда суюқлик заррачалари инерциясининг намоён бўлишидан ташқари, яна ички ишқаланиш кучлари борлигини ҳам (анча катта тезликлар билан ҳаракатланувчи газлар учун сиқилувчанликнинг вужудга келишини ҳам) ҳисобга олиш зарур. Суюқликлар ва газлар ҳаракатининг мураккаб манзарасини тушуниш учун биз уларни дастлаб ёпишмайдиган ва сиқилмайдиган суюқлик (*идеал суюқлик*) сифатида қараб чиқамиз.

Ҳаракат тезликлари катта бўлмаганда енгил сиқилувчи газлар ҳам унда ҳаракатланувчи жисмларга худди сиқилмайдиган суюқликлардек таъсир кўрсатади. Кичик тезликлар билан ҳаракатланувчи суюқлик ичига киритилган жисмларга таъсир этувчи кучларнинг пайдо бўлишига асосан ёпишқоқлик сабаб бўлади, катта тезликларда эса суюқликларнинг инерцияси кўпроқ таъсир кўрсатади. Бу кучларнинг миқдори ва йўналиши суюқлик билан унга киритилган қаттиқ жисмнинг бир-бирига нисбатан кўчиш тезлигига боғлиқ бўлади.

Умуман, суюқликларда таъсир этувчи кучларни ҳажмий кучларга ва сирт кучларига ажратиш мумкин. Ҳажмий кучлар масса dm

га ва у билан боғлиқ бўлган кучга мутаносибдир. Бу кучни $\vec{f}dV$ деб белгиласак, $\vec{f}$ ни ҳажмий кучларнинг зичлиги дейиш мумкин. Ҳажмий кучга оғирлик ва инерция кучлари мисол бўла олади. Равшанки, оғирлик кучининг ҳажмий зичлиги $\vec{f}=\rho\vec{g}$ (ρ — суюқлик зичлиги, $\vec{g}$ — эркин тушиш тезланиши). Сирт кучлари эса суюқликнинг ҳар бир кичик ҳажмига уни ўраб турган суюқлик бўлаклари томонидан таъсир этувчи тик ва уринма тарзда йўналган кучлардан иборат. Тинч турган суюқлик (гидростатик идеал суюқлик) учун уринма кучларни эътиборга олмай, фақат тик йўналган босим кучларидан иборат ҳолни кўриб чиқайлик. Кичик ҳажм бўлакчаси dV учун узунлиги dx ва кўндаланг кесими юзаси dS бўлган цилиндрни олайлик (10.2-расм). Босим кучининг цилиндрнинг биринчи асосига таъсир этувчисини $p(x)dS$ десак, иккинчиси $p(x+dx)dS$ га тенг бўлади. Аслида $\vec{p}$ куч y ва z координаталарга ҳамда вақт t га ҳам боғлиқ бўлади. Цилиндрнинг ён томонларига таъсир этувчи босим кучлари X ўқига тик бўлганидан, уни ҳисоблашда y ва z ўқлар бўйлаб таъсир этувчи кучларни қараб ўтирмасак ҳам бўлади.



10.2-расм

Қаралаётган ҳажм бўлакчасига таъсир этувчи босим кучининг X ўқи йўналишидаги ташкил этувчиси $[p(x)-p(x+dx)]dS$ га тенг бўлади. Чексиз кичик ўзгаришни дифференциал билан алмаштириш мумкинлигидан,

$$p(x+dx)-p(x)=-dp=-\frac{dp}{dx}dx$$

деб ёзиш мумкин. y, z ва t ларни ўзгармас деб қаралаётганда, p (x, y, z, t) функциянинг x бўйича олинган ҳосиласи хусусий ҳосиладан иборат бўлгани туфайли,

$$-\frac{dp}{dx}dx=-\frac{\partial p}{\partial x}dx=T_x dx$$

дейиш мумкин. Шунга ўхшаш, p нинг y ва z лар бўйича хусусий ҳосиласини $\frac{\partial p}{\partial y}$ ва $\frac{\partial p}{\partial z}$ десак, босим кучининг X, Y ва Z ўқлари бўйича ташкил этувчиларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_x=-\frac{\partial p}{\partial x},\quad T_y=-\frac{\partial p}{\partial y},\quad T_z=-\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (10.1)$$

Шундай қилиб, суюқликнинг бирлик ҳажмига босим p туфайли вужудга келган қуйидаги сирт кучлари таъсир этади:

$$\vec{T}=-\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \qquad (10.2)$$

p скаляр катталикнинг градиентини

$$\text{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \qquad (10.3)$$

деб белгиласак,

$$\vec{T} = -\text{grad}\, p \qquad (10.4)$$

деб ёзиш мумкин, яъни $\vec{T}$ вектор p скаляр катталикнинг тескари ишора билан олинган градиентига тенг экан. Шундай қилиб, $\vec{T}$ вектор босим p нинг миқдори билан эмас, балки унинг фазодаги йўналишлар бўйлаб ўзгариши билан аниқланади.

Суюқликнинг мувозанат ҳолатида T куч ҳажмий куч $\vec{f}$ билан мувозанатда бўлиши туфайли қуйидагига эга бўламиз:

$$\text{grad}\, p = \vec{f}. \qquad (10.5)$$

Бу тенглама *гидростатиканинг асосий тенгламаси* дейилади. (10.5) тенгламанинг координаталар бўйича ёзилган кўриниши қуйидагича:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(x), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f(y), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f(z). \qquad (10.6)$$

Агар идеал суюқлик қандайдир $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, (10.4) ва (10.5) формулаларни ҳисобга олиб, суюқликнинг ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \text{grad}\, p. \qquad (10.7)$$

Бу тенглама *идеал суюқлик гидродинамикасининг асосий тенгламаси* бўлиб, у *Эйлер тенгламаси* деб ҳам аталади. Реал суюқликларда (ишқаланиш ҳисобга олинганда) суюқликнинг ҳаракат тенгламалари анча мураккаблашади.

10.4- §. СИҚИЛМАЙДИГАН СУЮҚЛИК ГИДРОСТАТИКАСИ

Агарда суюқликлардаги ҳажмий кучларни йўқ деб фараз қилсак, у ҳолда $\vec{f} = 0$ ва демак, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ бўлади, яъни ҳажмий кучлар бўлмаганда мувозанат шароитида суюқликнинг барча нуқталарида босим бир хил бўлади.

Хусусан, ҳажмий кучлар бўлмаганда суюқликнинг бирдан-бир мувозанат шарти шундан иборатки, бу ҳолда суюқлик сиртининг барча нуқталарига таъсир этувчи босим бир хил ва у ташқи босимдан иборат бўлади. Акс ҳолда суюқликнинг ҳаракати вужудга келади. Ҳажмий кучлар бўлмаганда суюқлик сиртига берилувчи муайян босим суюқлик ичидаги барча нуқталарда шундай босимни вужудга келтиради.

Агар суюқлик оғирлик майдонида бўлса, у ҳолда $\vec{f} = \rho\vec{g}$. Бу кучни Z ўқи бўйлаб йўналган деб ҳисобласак, мувозанатдаги суюқликнинг асосий тенгламаси қуйидагидан иборат бўлади:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \qquad (10.8)$$

(10.8) формуладан кўриниб турибдики, мувозанатда бўлган суюқликда босим X ва Y ўқларга боғлиқ бўлмасдан фақат Z га боғлиқ бўлади. Z га тик текисликлар эса бир хил босимли текисликлар бўлади ва бундан суюқликларнинг зичлиги фақат баландликка боғлиқ, деган хулоса келиб чиқади.

Энди фараз қилайлик, суюқлик бир жинсли ва сиқилмайдиган ($\rho=\text{const}$) бўлсин ҳамда эркин тушиш тезланиши $\vec{g}$ ҳам баландликка боғлиқ бўлмасин. Бу шароитларни ҳисобга олган ҳолда (10.8) тенгламанинг интеграли қуйидагини беради:

$$p=p_0-\rho gz. \tag{10.9}$$

Интеграллаш доимийси p_0 маъно жиҳатидан $z=0$ даги суюқликнинг босимидан иборат.

(10.9) формула идишдаги суюқликнинг тагига ва деворларига ҳамда суюқликка ботирилган жисмнинг сиртига таъсир этувчи кучларни ҳам аниқлаш имконини беради.

Маълумки, Архимед қонунига биноан суюқлик ва газга ботирилган ҳар қандай жисмга у сиқиб чиқарган суюқлик ёки газ оғирлигига тенг гидростатик кўтариш кучи таъсир қилади. Бу куч жисм сиртига суюқлик ёки газ томонидан таъсир қилувчи босим кучларининг тенг таъсир этувчиси бўлиб, тик равишда юқорига йўналади. Жисмнинг оғирлиги кўтариш кучидан катта бўлса жисм чўкади, кичик бўлса чўкмайди. Бу сўнгги хусусият жисмларнинг суюқлик ва газларда сузиш қонунининг асосини ташкил этади.

Агар суюқликка қандайдир жисм киритилган бўлса ва у механикавий нуқтаи назардан мувозанатда бўлса, у ҳолда унга таъсир этувчи ташқи кучларни жисмнинг оғирлик кучи ва жисмга ҳар томондан таъсир этувчи босим кучларидан — Архимед кучларидан иборат деб қараш мумкин. Бу кучлар бир-бирига тенг ва қарама-қарши йўналган бўлса, жисм мувозанатда бўлади. Масалан, кеманинг сузишини текширадиган бўлсак, сув устида бемалол сузиб юриши учун кеманинг сувга ботирилган қисми сиқиб чиқарган сувнинг оғирлиги кеманинг юки билан биргаликдаги ҳаводаги оғирлигига тенг бўлиши лозим.

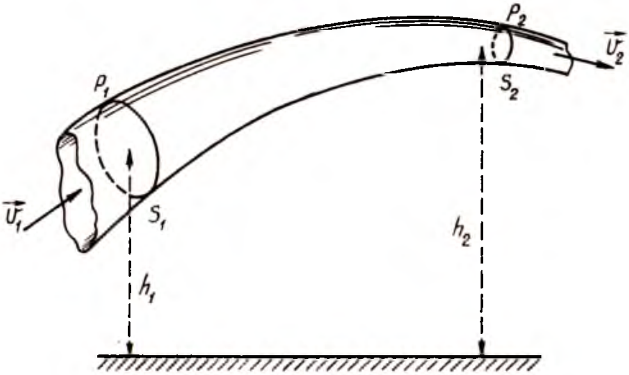
10.5-§. ИДЕАЛ СУЮҚЛИКНИНГ ТУРҒУН ҲАРАКАТИ. БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИ

Реал суюқликлар ҳаракатининг қонунларини ўрганиш анча мураккаб бўлгани учун биз асосан ёпишқоқлик кучларини ҳисобга олмасдан, идеал суюқликнинг ҳаракатини қарайлик. Албатта, бу ҳолда суюқликларда мавжуд бўладиган ички ишқаланишнинг тик ва уринма кучларини чексиз кичик деб қараш мумкин. Бу ҳолда идеал суюқликдаги мавжуд бўлган бирдан-бир куч — унинг тик йўналган босим кучидир. Бу босим кучи ($\bar{p}$) суюқликнинг зичлиги билан аниқланади.

Суюқликнинг кўндаланг кесими турлича бўлган оқим найида оқиш жараёнини қараб чиқайлик. Маълумки, суюқлик оқимининг ҳеч ерда узилмаслиги, яъни унинг узлуксизлигидан суюқлик тезлигининг оқим найининг кўндаланг кесимига кўпайтмасининг ўзгармас эканлиги келиб чиқади. Бу эса маълум вақт оралиғида найнинг бир учидан оқиб кираётган суюқликнинг ҳажми унинг қарама-қарши томонидан оқиб чиқаётган суюқлик ҳажмига тенг бўлишини билдиради (10.3-расм):

$$v_1S_1=v_2S_2,$$

яъни Δt вақт оралиғида S_1 кесим орқали оқиб кираётган суюқликнинг тезлиги v_1 ва босими p_1 бўлса, худди шу вақт ичида S_2 кесимдан v_2 тезлик ва p_2 босимларда бир хил суюқлик массаси оқиб ўтар экан.



10.3-расм

Оғирлик кучи таъсирида рўй берувчи турғун ҳаракатни қараб чиқайлик. Бу ҳаракат учун энергиянинг сақланиш қонунини татбиқ этиш мумкин.

Оқим турғун бўлганлигидан, найнинг ажратиб олинган қисмларида энергия тўпланмайди ҳам, сарф бўлмайди ҳам. Демак, Δt вақт ичида S_1 кесим орқали узатилаётган энергия худди шу вақтда S_2 кесим орқали узатилаётган энергияга тенг бўлиши керак. Бу ҳолда S_1 кесимдан оқиб ўтаётган m массали суюқликнинг кинетик энергияси $mv_1^2/2$ ва потенциал энергияси mgh_1 бўлганидан, Δt вақт оралиғида оғирлик кучлари таъсирида S_1 кесим орқали узатиладиган энергия миқдори $\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1$ бўлади. Бундан ташқари орқадаги суюқлик ўзининг олдидаги суюқликни силжитиши учун p_1S_1 кучнинг $v_1\Delta t$ йўлга кўпайтмасига тенг бўлган иш бажаради. Шундай қилиб, Δt вақтда кўндаланг кесим орқали узатиладиган умумий энергия миқдори қуйидагига тенг бўлади:

$$E=\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1S_1v_1\Delta t. \qquad (10.10)$$

Найнинг ҳеч бир қисмида энергия тўпланмаганлиги ва сарф ҳам бўлмаганлиги сабабли, S_2 кесим орқали Δt вақтда узатиладиган энергия ҳам худди шундай қўшилувчилар йиғиндисига тенг бўлади. Демак,

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1S_1v_1\Delta t=\frac{mv_2^2}{2}+mgh_2+p_2S_2\Delta t. \qquad (10.11)$$

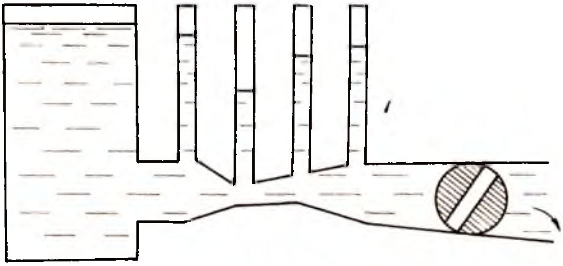
Оқимнинг узлуксизлик шартига мувофиқ Δt вақтда найга оқиб кираётган суюқлик ҳажми $S_1v_1\Delta t$ га, худди шу вақт ичида ундан оқиб чиқаётган суюқлик ҳажми $S_2v_2\Delta t$ га тенг. (10.11) нинг икки томонини бу тенг ҳажмларга бўлсак ва $\frac{m}{Sv\Delta t}=\rho$ — суюқликнинг зичлиги эканлигини ҳисобга олсак, (10.11) ўрнига қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\rho gh_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\rho gh_2$$

ёки

$$\frac{\rho v^2}{2}+p+\rho gh=\text{const}. \qquad (10.12)$$

Бу тенглама Бернулли тенгламаси деб аталади. Бернулли тенгламасидан келиб чиқадиган хулосалардан бири шундай: *оқим найининг ингичка қисмида суюқликнинг тезлиги бошқа қисмлардагига қараганда катта бўлади.* Найнинг ингичка қисмига оқиб кираётган суюқликка найнинг йўғон қисмида оқаётган суюқлик томонидан йўғон ва ингичка жойлардаги статик босимлар фарқи p_2- $-p_1$ га тенг бўлган куч таъсир этади. Бу куч найнинг ингичка қисмига қараб йўналган бўлади. Демак, оқим найининг тор жойларидаги босим кенг жойларидагига қараганда пастроқ бўлади (10.4-расм).



10.4-расм

Биз Бернулли тенгламасини оқаётган суюқликнинг кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндиси ўзгармас бўлган ҳол учун келтириб чиқардик. Аслида бу энергияларнинг бир қисми ишқаланиш кучларига қарши иш бажаришга сарф бўлади, натижада суюқликнинг молекуляр ҳаракат энергияси ортади (суюқлик исийди).

Оқиш уфқ текислиги бўйлаб рўй бераётган бўлса, статик ва динамик босимлар йиғиндиси ўзгармайди, шунинг учун оқаётган суюқликда статик босим доим ҳаракатсиз тургандагига қараганда кам бўлади.

Агар найнинг кенг қисмидаги босим атмосфера босимига тенг бўлса, унинг тор қисмидаги босим атмосфера босимидан кам бўлади. Кўпгина қурилмаларнинг, масалан, инжектор, сув парраги, насослар ва карбюраторларнинг ишлаш принципи ана шу ҳодисага асосланган.

10.6- §. СУЮҚЛИКНИНГ НАЙЛАРДА ОҚИШИ. ПУАЗЕЙЛЬ ФОРМУЛАСИ

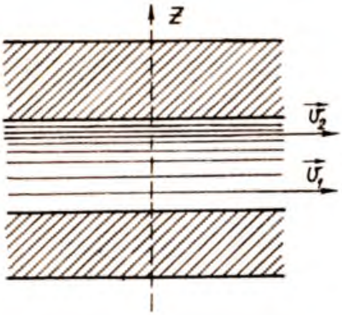
Реал суюқликларда ҳаракат идеал суюқликлардагидан фарқли бўлиб, уларда ички ишқаланиш кучлари вужудга келади. Бундай суюқликларда ички ишқаланиш кучлари қатламларнинг ҳаракатига ва демак, ундаги жисмларнинг ҳаракатига ҳам, қаршилик кўрсатувчи куч сифатида намоён бўлади. Бу ҳодисани ўрганиш учун биз бирор суюқлик суртилган икки пластинка олиб (10.5-расм), устидаги пластинкани остидагисига нисбатан ҳаракатлантирайлик. Бунда уларга тегиб турган суюқлик қатламлари уларга ёпишади, қолган барча қатламлар эса бир-бирларига нисбатан сирпаниб кўчади. Бу ҳолда пластинкалардан узоқ турган қатламларнинг сирпаниш тезлиги яқин турганларникидан катта бўлади. Қатламлар ҳаракатининг тезлигини ҳаракатга тик бўлган Z ўққа нисбатан қарайлик. Бу ҳолда ҳаракатнинг Z ўқи бўйича ўзгариш тезлиги (тезлик градиенти) $\frac{d\vec{v}}{dz}$ бўлади. Агар координата z ортиши билан қатламларнинг тезлиги бир текисда ортса, у ҳолда тезлик градиенти суюқликнинг барча массаси учун бир хил бўлади. Бир-биридан Δz узоқликда турган қатламларнинг тезликлари $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ бўлса, у ҳолда тезлик градиенти $\frac{v_2 - v_1}{dz}$ бўлади.

Суюқлик қатламлари орасида мавжуд бўлган ишқаланиш кучи $\vec{F}$ учун Ньютон қуйидаги қонуниятни аниқлади:

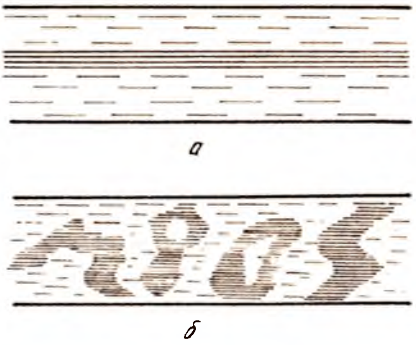
$$\vec{F} = \eta \left| \frac{d\vec{v}}{dz} \right| S, \tag{10.13}$$

бунда η — суюқликнинг қовушоқлик коэффициенти; S — қатламлар юзаси; dv/dz катталик (тезлик градиенти) бир қатламдан иккинчи қатламга ўтганда суюқлик қатламлари тезликларининг ўзгариш жадаллигини ифодалайди. Ишқаланиш кучи ($\vec{F}$) икки «қўшни» қатламнинг тезроқ ҳаракатланаётганини тўхтатишга, секинроқ ҳаракатланаётганини эса тезлатишга интилади.

(10.13)га кўра η нинг СИ даги бирлиги қилиб шундай суюқликнинг қовушоқлиги олинадики, бунда тезлик градиенти $\frac{dv}{dz} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}}$ бўлганда, суюқликнинг икки «қўшни» қатламлари орасидаги $S = 1$ м^2 сиртда мавжуд бўлган ишқаланиш кучи 1 Н га тенг бўлади. Бу бирлик паскаль-секунд (Па·с) деб аталади.



10.5-расм


а
б

10.6-расм

Унча катта бўлмаган тезликларда суюқлик қатлам-қатлам бўлиб оқади. Бундай оқиш *ламинар оқиш* дейилади. Ламинар оқишда (10.6, *а*-расм) суюқлик қатламлари най деворларидан қанча узоқ турса, бир-бирига нисбатан шунча каттароқ тезлик билан сирпанади (суюқликнинг ламинар оқишида най ичига юборилган бўёқли суюқлик аниқ чегараланган шаклда қолаверади). Тезлик ортиши билан суюқлик қатламларининг аралашиб оқиши вужудга келади. Бундай оқиш *турбулент оқиш* дейилади. Бунда тоза ва бўялган суюқликлар орасидаги кескин чегара йўқолиб, найнинг ҳамма жойларида тартибсиз уюрмавий ҳаракатлар юзага келади (10.6, *б*-расм). Ламинар оқим турбулент оқимга айланиш пайтидаги тезлик *критик тезлик* деб аталади.

Техника тараққиётининг бугунги босқичида суюқликларнинг ҳар хил найлардаги ўртача тезликларини билиш катта амалий аҳамиятга эга. Тажрибаларда аниқланишича, ҳар хил диаметрли найларнинг кўндаланг кесим юзидан вақт бирлигида оқиб ўтадиган суюқлик миқдори M ўртача оқиш тезлиги $v_{\text{ӯ}}$ нинг кўндаланг кесим юзи S га кўпайтмасига тенг экан:

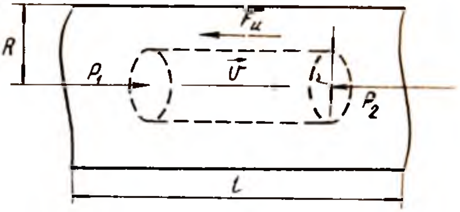
$$M = v_{\text{ӯ}} \cdot S.$$

Француз олими Пуазейль (1841) суюқликларнинг найларда оқиш тезликларини тажриба йўли билан ўрганиб, *суюқликнинг най бўйлаб ўртача ламинар оқиш тезлиги най узунлик бирлигига босимнинг тушиши ҳамда най радиусининг квадратига тўғри мутаносиб ва қовушоқлик коэффициентига тескари мутаносиб* эканлигини аниқлади:

$$v_{\text{ӯ}} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{8\eta}. \qquad (10.14)$$

Шунинг учун ҳам бу қонун *Пуазейль қонуни* деб аталади. Най учун $S = \pi R^2$ ва $M = v_{\text{ӯ}} S$ эканлигини ҳисобга олиб Пуазейль қонунини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}. \qquad (10.15)$$



10.7-расм

Ўлчамлари маълум бўлган найдаги босимлар тушишини билган ҳолда (10.15) формуладан фойдаланиб оқаётган суюқликнинг қовушоқлик коэффициенти η ни топиш мумкин.

Найда ламинар оқаётган суюқликнинг стационар ҳаракатини ўрганиб, (10.15) формулани қуйидаги йўл билан ҳам келтириб чиқариш мумкин: най орасида узунлиги l ва радиуси r бўлган цилиндрларни ажратиб олайлик (10.7-расм). Оқим стационар бўлганда бир хил кўндаланг кесимга эга бўлган найдаги барча суюқлик зарраларининг тезлиги ўзгармас бўлганидан, суюқликнинг исталган ҳажмига таъсир этувчи ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Шунинг учун ажратиб олинган цилиндрга таъсир этувчи ва ҳаракат йўналиши бўйича йўналган кучлар йигиндисини $(p_1-p_2)\pi r^2$ дейиш мумкин. Бундан ташқари, цилиндрнинг ён томонларига таъсир этувчи ишқаланиш кучи:

$$F=\eta\left|\frac{dv}{dr}\right|2\pi rl.$$

Стационар ҳолатда бу кучлар ўзаро тенг:

$$(p_1-p_2)\pi r^2=\eta\left(\frac{dv}{dr}\right)2\pi rl. \qquad (10.16)$$

Суюқликнинг тезлиги найнинг марказидан четга томон камайиб боришини, яъни $dv/dr=-dv/dr$ эканлигини назарда тутиб, (10.16) формулани қуйидагича ўзгартириш мумкин:

$$-\frac{dv}{dr}=\frac{(p_1-p_2)r}{2\eta l} \quad \text{ёки} \quad dv=-\frac{p_1-p_2}{2\eta l}rdr. \qquad (10.17)$$

(10.17) ни интеграллаб,

$$v=-\frac{p_1-p_2}{4\pi l}r^2+C \qquad (10.18)$$

ни ҳосил қиламиз. $r=R$ бўлган нуқталарда суюқликнинг тезлиги $v=0$ бўлгани учун, (10.18) дан интеграллаш доимийси (C) қуйидагига тенг бўлади:

$$C=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2.$$

Натижада, (10.18) қуйидаги кўринишни олади:

$$v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\pi l}(R^2-r^2)=\frac{p_1-p_2}{4\pi l}R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (10.19)$$

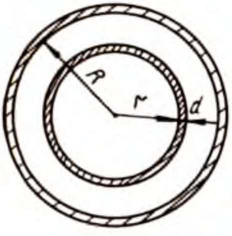
Цилиндрнинг (найнинг) марказидаги $(r=0)$ тезлиги

$$v_0=v(0)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2 \qquad (10.20)$$

бўлганидан, (10.19) қуйидагича ёзилади:

$$v(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2}). \qquad (10.21)$$

(10.21)дан кўриниб турибдики, найларда суюқликларнинг ламинар оқимидаги тезлиги най марказидан деворга томон парабола қонуни бўйича ўзгарар экан.



10.8-расм

Энди найнинг кўндаланг кесимидан вақт бирлигида ламинар оқиб ўтаётган суюқлик миқдори M ни ҳисоблаб топайлик. Шу мақсадда радиуси R бўлган найнинг кўндаланг кесимини қалинлиги dr бўлган майда ҳалқачаларга фикран бўлиб чиқамиз (10.8-расм). Ички радиуси r ва ташқи радиуси $r+dr$ бўлган ҳар бир халқача орқали бирлик вақтда оқиб ўтувчи суюқлик миқдори:

$$dM = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})2\pi r dr$$

бўлади. Бутун най бўйлаб унинг кўндаланг кесимидан бирлик вақтда оқиб ўтувчи суюқлик миқдори эса

$$M = \int_0^R dM = \int_0^R v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi r^2 v_0$$

бўлади. Бундаги v_0 ўрнига унинг (10.20) даги қийматини қўйиб қуйидаги Пуазейль формуласини ҳосил қиламиз:

$$M = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}.$$

10.7-§. СУЮҚЛИК ВА ГАЗЛАРДА ЖИСМЛАРНИНГ ҲАРАКАТИГА КЎРСАТИЛАДИГАН ҚАРШИЛИК. ГИДРОДИНАМИКАДА ЎХШАШЛИК ҚОНУНИ

Реал суюқлик ёки газларда ишқаланиш кучлари мавжудлиги туфайли уларда ҳаракатланувчи жисмларга таъсир этувчи қаршилик кучлари пайдо бўлади. Бу кучларнинг миқдори асосан жисмларнинг ҳаракат тезлигига боғлиқ бўлади. Стокс *катта бўлмаган v тезликлар билан ҳаракатланувчи r радиусли шарсимон жисмларга муҳит томонидан таъсир этувчи қаршилик кучи F жисмнинг тезлиги ва ўлчамларига ҳамда муҳитнинг қовушоқлик коэффициенти η га тўғри мутаносиб* эканлигини кўрсатди:

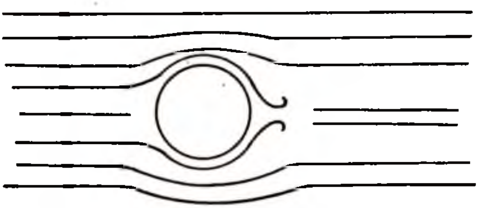
$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (10.22)$$

(10.22) Стокс формуласи дейилади. Бу формуланинг амалий аҳамияти шундан иборатки, у жисмнинг қовушоқ муҳитда эркин тушиш тезланишини аниқлашда, ҳар хил зичликка эга бўлган муҳитларда томчи ёки кичик зарраларнинг радиусларини уларнинг бу муҳитларда эркин тушишини кузатиш орқали аниқлашда ва шу каби вазифаларни ҳал қилишда қўлланилади.

Катта тезликларда газ ва суюқликларнинг қаршилиги асосан уюрма ҳосил қилиш учун иш бажарилиши натижасида юзага келади. Бу қаршилик *пешона қаршилик* деб аталиб, у Ньютон кашф қилган қонунга биноан, *ҳаракат тезлигининг квадрати билан жисм ҳаракатига тик бўлган кўндаланг кесим юзасига мутаносибдир:*

$$F = C_x \cdot \frac{\rho v^2}{2} S, \tag{10.23}$$

бу ерда ρ — муҳитнинг зичлиги; C_x — пешона қаршилик коэффициенти бўлиб, унинг қиймати жисмнинг шаклига боғлиқ.



10.9-расм

Юқорида айтилганидек, пешона қаршилик муҳитда ҳосил бўлувчи уюрмалар таъсирида вужудга келади (10.9-расм). Кўплаб суюқлик ва газларда олиб борилган тажрибалар Ньютоннинг пешона қаршилик учун чиқарган формуласи тезликнинг баъзи бир қийматлари учун тўғри эканлигини кўрсатди. Масалан тезликинг кичик қийматларида қаршилик, Стокс формуласига мувофиқ, тезликнинг иккиламчи даражасига эмас, балки бирламчи даражасига мутаносиб бўлар экан. Товуш тезлигига яқин тезликларда бу боғланиш v^3 га, товуш тезлигидан жуда катта бўлган тезликларда яна v^2 га мутаносиб бўлар экан. Шундай қилиб, ҳар хил тезликларда ҳаракатланувчи суюқлик ва газлардаги турли шаклдаги жисмларга таъсир этувчи кучларни қараш да биз (10.23) формуладаги қаршилик коэффициенти C_x ни муҳитнинг қовушоқлик коэффициенти (η), зичлиги (ρ) ва жисмнинг ҳаракат тезлиги (v) ҳамда ўлчами (r) нинг қандайдир функциясидан иборат дейишимиз ҳақиқатга яқин бўлади. Олиб борилган изланишлар C_x нинг фақат $\frac{\rho l v}{\eta}$ га боглиқ эканлигини кўрсатди:

$$C_x = f(Re), \quad Re = \frac{\rho l v}{\eta}. \tag{10.24}$$

(10.24) даги Re ўлчамсиз катталик бўлиб, *Рейнольдс сони* деб аталади. Муҳит қовушоқлик коэффициентининг унинг зичлигига нисбати η/ρ эса *кинематик қовушоқлик* деб аталади:

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu. \tag{10.25}$$

Амалда Рейнольдс сони қовушоқлик коэффициенти орқали эмас, балки кинематик қовушоқлик орқали ифодаланади:

$$Re = \frac{l v}{\nu}. \tag{10.26}$$

Ҳаракатланаётган суюқликда ишқаланиш кучлари (η нинг қиймати) қанчалик кичик бўлса, Рейнольдс сони шунчалик катта бўлади. (10.24) дан кўринадики, идеал суюқликлар учун ($\eta=0$) Рейнольдс сони ∞ га тенг (маълумки бундай суюқликлар мавжуд эмас).

Суюқлик ва газларда жисмларнинг ҳаракатини ўрганишда ҳаракатнинг нисбийлигидан келиб чиқиб суюқликдаги жисм тинч турибди, суюқлик эса жисмга нисбатан бирор тезлик билан ҳаракатланяпти деб қараш мумкин. Шу боис қуйида биз суюқликнинг жисмга (ёки жисмлар тизимига) нисбатан ҳаракатини таҳлил қиламиз. Бунинг учун иккита жисм олиб, дастлаб суюқликда биринчи жисм бўлган ҳолдаги, сўнгра эса у жисм ўрнида иккинчи жисм бўлган ҳолдаги оқим манзараларини кузатайлик. Тажрибаларнинг кўрсатишича, оқим тезлиги ва суюқликнинг ўзига хос катталиклар (зичлик, қовушоқлик ва бошқалар) маълум шартларни қаноатлантирганда қаралаётган суюқликлар оқими манзараларида муайян механикавий ўхшашлик мавжудлигини кузатиш мумкин. Модомики, ўхшашлик мавжуд бўлса, биринчи ҳол учун оқим манзарасини билган ҳолда иккинчи ҳол учун оқим манзарасини олдиндан айтиб бериш мумкин экан. Бошқача айтганда, кичик ўлчамларга эга бўлган жисмлар билан суюқликларда (ёки газларда) тажриба ўтказиб, олинган натижаларни катта ўлчамдаги жисмларга қўллаш мумкин (моделлаш усули). Кемасозлик ва тайёрасозликда худди шундай қилинади. Бу усулнинг асосида *ўхшашлик қонуни* ётади.

Ўхшашлик қонунини умумий тарзда қараб чиқайлик. Фараз қилайлик, $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ мос равишда суюқликнинг ўхшаш нуқталаридаги радиус-вектори ва тезлиги, l — жисмнинг ўлчами, v_0 — оқимнинг жисмга нисбатан тезлиги. Ўз навбатида суюқликнинг хусусиятлари унинг зичлиги ρ, қовушоқлик коэффициенти η ва муайян сиқилувчанлиги билан аниқланади. Шу билан бирга ўхшашлик қонунида оғирлик кучининг таъсири эркин тушиш тезланиши (g) билан, нотурғун оқим оқимнинг нотурғунликдан чиқиш вақти τ билан, суюқликнинг сиқилувчанлиги эса товушнинг муҳитдаги тезлиги (c) билан ифодаланади.

Ҳаракат тенгламаларида $\vec{v}$, v_0, $\vec{r}$, l, ρ, η, c, $\vec{g}$, τ катталиклар орасида муайян боғланиш мавжуд бўлиши лозим. Бу катталиклар ёрдамида бир-бирига боғлиқ бўлмаган 6 та ўлчамсиз муносабатни ҳосил қилиш мумкин экан. Буларга $\vec{v}/\vec{v}_0$, $\vec{r}/l$ нисбатлар ва яна 4 та ўлчамсиз сонлар — қийматли боғланишлар киради:

$$Re=\frac{\rho l v_0}{\eta}=\frac{l v_0}{\nu}; \tag{10.27}$$

$$F=\frac{v_0^2}{gl}; \tag{10.28}$$

$$M=\frac{v_0}{c}; \tag{10.29}$$

$$S=\frac{v_0\tau}{l}. \tag{10.30}$$

Ўлчамликлар қоидасидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларни ёзиш мумкин:

$$\frac{v}{v_0}=f\left(\frac{\vec{r}}{l},\ Re,\ F,\ M,\ S\right). \tag{10.31}$$

ёки

$$v=v_0 f\left(\frac{\vec{r}}{l},\ Re,\ F,\ M,\ S\right) \tag{10.32}$$

Агар икки оқим учун (10.27) — (10.32) боғланишлардан бештаси бир-бири билан мос келса, у ҳолда олтинчиси мос келар экан. Бу умумий оқимларнинг ўхшашлик қонунидан иборат. Оқимларнинг ўзи эса механикавий ёки гидродинамикавий ўхшаш оқимлар деб аталади. (10.27) формуладаги сон — Рейнольдс сони, (10.28) даги — Фруд сони, (10.29) даги — Мах сони, (10.30) даги — Струхал сони деб аталади. Фруд номи билан боғлиқ бўлган F сон юқорида биз кўрган Рейнольдс сонига ўхшаш маънога эга. У катталик нуқтаи назаридан суюқлик кинетик энергиясининг бу энергиянинг маълум йўлда оғирлик кучининг бажарган иши туфайли вужудга келган кинетик энергияга нисбатидан иборат. Фруд сони қанча катта бўлса, инерциянинг оғирликка нисбатан таъсири шунча катта бўлади ва аксинча.

Струхал сони асосан турғун бўлмаган суюқликлар учун маълум аҳамиятга эга бўлса, Мах сони эса сиқилмайдиган суюқликлар учун маънога эга бўлганлигидан турғун оқаётган суюқликлар учун (10.32) тенглама ўрнига

$$\vec{v}=\vec{v}_0 f(\frac{r}{l}, \mathrm{Re}, F)$$

тенгламани ёзиш мумкин. Бундан Рейнольдс ва Фруд сонлари бир хил бўлган суюқликларнинг оқими бир хил бўлади деган хулоса келиб чиқади.

10.8- §. ГИДРОДИНАМИКАВИЙ НОТУРҒУНЛИК. ТУРБУЛЕНТЛИК

Юқоридаги бандларда биз суюқликларнинг ҳаракатини текширганимизда асосан ламинар оқиш ҳолларини қараб чиқдик. Ламинар оқишнинг асосий хусусиятларидан бири унинг узлуксизлигидир. Текис жойларда оқувчи суюқлик ва газларнинг ҳаракати асосан най деворларига параллел бўлган ҳаракат траекториясига эга бўлади. Аммо етарли даражада катта тезликларда ламинар оқишнинг бузилиши — ламинар оқишнинг беқарорлиги вужудга келади. Бунинг натижасида ҳаракат турбулент ҳаракатга айланади. Турбулент ҳаракатда суюқлик ёки газнинг гидродинамикавий хоссалари (тезлик, босим, газлар учун эса зичлик ва ҳарорат) тез ва тартибсиз ҳолда ўзгариб туради. Турбулент оқимга тоғ дарёларидаги сувнинг ҳаракати, тез сузувчи кеманинг орқасидаги сувнинг ҳаракати ҳамда қувурлардан тартибсиз чиқувчи тутунлар ва бошқалар мисол бўлади. Бундай ҳаракатларнинг ҳаммаси гидродинамикавий нотурғунлик юзага келувчи оқимларда содир бўлади. Турбулент оқимда суюқлик зарраларининг траекториялари най ўқига параллел бўлмасдан, мураккаб эгри чизиқлардан иборат бўлади. Траекториялар вакт давомида турғун бўлмасдан, ўзгариб туради. Шундай қилиб, табиатан нотурғунлик, тезликнинг суюқликнинг асосий кўчма ҳаракати йўналишига тик бўлган ташкил этувчилари мавжудлиги турбулент оқимни ламинар оқимдан фарқлаб турувчи муҳим белгилар ҳисобланади. Қувур ва ариқларда ламинар оқимдан турбулент оқимга ўтишда Рейнольдс сони ўхшашлик қонунининг мезони бўлиб хизмат қилади. Ҳар хил кўндаланг кесим юзасига эга бўлган қувур ва ариқлар учун Рейнольдс сони бир хил қийматга эга бўлса, уларда суюқликнинг оқиш манзараси бир хил бўлади. Кўндаланг кесими доира шаклидаги қувурларда ламинар оқимдан турбулент оқимга ўтишда Рейнольдс сони 1200 ни ташкил қилади, яъни $Re>1200$ дан бошлаб оқим турбулент манзарага эга бўлади.

XI БОБ

ТЕБРАНМА ҲАРАКАТ

11.1- §. ТЕБРАНМА ҲАРАКАТ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тебранма ҳаракат табиатда энг кўп тарқалган ҳаракатдир. Дарахтларнинг шохи ёки далалардаги майсаларнинг тебраниб турганини кўп кузатганмиз. Дутор, рубоб каби мусиқа асбобларининг торлари, осма соат тебрангичи, ички ёнув двигатели цилиндридаги поршенларнинг ҳаракати тебранма ҳаракатдир. Мотор ишлаб турганда машина ва дастгоҳларнинг корпуслари титраб тебранма ҳаракат қилади; телефонда гаплашганимизда, радиодан товуш чиққанда, улардаги юпқа парда (мембрана) тебраниб туради.

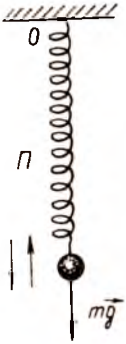
Бу мисоллардан кўриниб турибдики, бунда ҳаракат бирор даражада такрорланиб туради. Бинобарин, *вақт ўтиши билан такрорланиб турадиган ҳаракатларга тебранма ҳаракат дейилади.*

Юқорида келтирилган мисоллар механикавий тебранма ҳаракатга тааллуқлидир. Табиатда механикавий тебранма ҳаракатлар билан бир қаторда механикага оид бўлмаган такрорланиб турадиган жараёнлар ҳам кўп учрайди. Ўзгарувчан ток занжиридаги зарядли заррачалар (электронлар) ҳаракати, ички ёнув двигатели цилиндридаги газ босимининг ўзгариши ва бошқалар шулар жумласидан бўлиб, механикавий тебранма ҳаракатларни эса умумий тебранма жараёнларнинг бир тури деб қараш мумкин. Тебранма ҳаракатлар механикавий тебранма ҳаракат, электромагнит тебранма ҳаракат, электромеханикавий тебранма ҳаракат (телефон ва радиолардаги товуш чиқарувчи мембраналарнинг тебраниши ва бошқ.) каби турларга бўлинади. Тебранма ҳаракатларнинг табиатлари ҳар хил бўлса ҳам улар ягона қонуният бўйича содир бўлади.

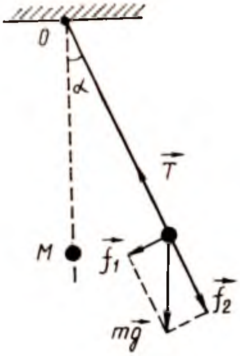
Ҳозирги замон техникасининг кўп соҳалари тебранма ҳаракат қонунларига асосланган ва тебранма ҳаракат қонунларини билмай туриб телефон, радио, ойнаижаҳон, радиолокация ва шунга ўхшаш ҳозирги замон техникасини яратиб бўлмас эди.

Тебранма ҳаракатга мисол тариқасида 11.1-расмда кўрсатилган энг оддий тизимни олиб қарайлик. Тизимдаги пружина (*П*) нинг бир учи расмда кўрсатилгандек, штативнинг *О* нуқтасига маҳкамланган (штатив расмда кўрсатилмаган), пружинанинг иккинчи учига m массали юк (металл шарча) осилган. Бу юк таъсирида пружина бир оз чўзилади, бунда пружинанинг қайишоқлик кучи юкнинг оғирлик кучи билан мувозанатлашади. Юкнинг бу вазияти унинг мувозанат вазиятини акс эттиради. Агар юкни мувозанат вазиятидан тик йўналишда пастга ёки юқорига бир оз силжитиб сўнг қўйиб юборсак, у пружинанинг қайишоқлик кучи таъсирида пастга ва юқорига қараб тебранма ҳаракат қила бошлайди, яъни тизимнинг ҳаракати даврий равишда такрорлана бошлайди. Бундай тизим пружинали тебрангич деб юритилади.

Тебранма ҳаракатга иккинчи мисол тариқасида штативнинг *О* нуқтасига ингичка ип билан осилган m массали юк (кичкина металл шарча) дан иборат тизимни олиб қарайлик (11.2- расм). Тизим ўзининг мувозанат вазиятида *МО* ҳолатда бўлади; бу ҳолатда шарчанинг оғирлик кучи ($m\vec{g}$) ипнинг таранглик кучи (T) билан мувозанатда бўлади. Агар шарчани мувозанат вазиятидан бир оз четлатиб, сўнг қўйиб юборсак, тизим ўзининг мувозанат ҳолати атрофида тебранма ҳаракатга келади — шарчанинг ҳаракати *М* нуқтага нисбатан даврий равишда такрорланаверади. Ҳаракатнинг бундай такрорланишига сабаб шундаки, тизим мувозанат ҳолатига нисбатан α бурчакка четлатилганда шарча ўз оғирлик кучининг $\vec{f}_1 = mg\sin\alpha$ га тенг ташкил этувчиси (11.2-расмга қ.) таъсирида бўлади. Бу куч тизимни ҳамма вақт мувозанат вазиятига (шарча чап томонда бўлса ҳам, ўнг томонда бўлса ҳам) қайтаришга интилади. Мувозанат вазиятидан ўтаётганда эса тебранаётган шарча бирдан



11.1-расм



11.2-расм

тўхтаб қола олмайди — бунга унинг инерцияси халақит беради (инерция кучи юқорида кўриб ўтилган пружинали тебрангичнинг тебранишида ҳам асосий сабаблардан биридир). 11.2-расмда акс эттирилган тизим одатда математикавий тебрангич дейилади (математикавий тебрангичнинг аниқроқ таърифини кейинроқ келтирамиз).

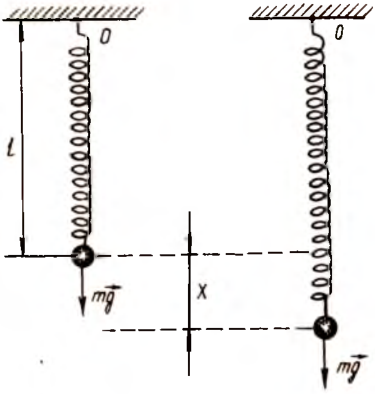
Тизимга таъсир этувчи кучларнинг табиатига кўра тебранма ҳаракатлар эркин (ёки хусусий) тебранишларга, мажбурий тебранишларга ва автотебранишларга бўлинади.

Мувозанат вазиятидан чиқарилган тизимда ташқи кучлар таъсирисиз (ички кучлар таъсирида) вужудга келадиган тебранишлар *эркин тебранишлар* дейилади. 11.1- ва 11.2-расмлар ёрдамида тавсифланган тебранишлар, равшанки, эркин тебранишлардир. Даврий равишда ўзгарадиган кучлар таъсирида вужудга келадиган тебранишлар *мажбурий тебранишлар* дейилади. Агар 11.1- ва 11.2-расмларда келтирилган тизимларга даврий тарзда ташқаридан туртки бериб турилса, уларнинг тебранишлари мажбурий тебраниш бўлади. *Автотебранишларда* ташқи кучларнинг таъсири тизимнинг ўзи воситасида амалга оширилади. Осма соат тебрангичининг тебраниши автотебранишдир.

Табиатда кўп учрайдиган тебранма ҳаракатлар ичида *гармоник тебранишлар* деб аталувчи тебранишлар муҳим ўринни эгаллайди. Гармоник тебранишлар тебранма ҳаракатлар ичида энг муҳими бўлиши билан бирга энг оддийси ҳамдир. Тебранма ҳаракат қонуниятларини ўрганишни мана шу гармоник тебранишлардан бошлаймиз.

11.2-§. ГАРМОНИК ТЕБРАНИШЛАР

Тебранувчи жисм ҳаракат траекториясининг вақт бўйича ўзгариши синус ва косинус қонуни бўйича ўзгарадиган тебранишларга *гармоник тебранишлар* дейилади. 11.3-расмда тасвирланган пружинали тебрангичнинг мувозанат вазиятида металл шарчанинг оғирлик кучи пружинанинг қайишоқлик кучи билан мувозанатда бўлади ва l_0 узунликдаги пружина шарчанинг оғирлик кучи таъсирида бир оз чўзилиб, унинг узунлиги l га тенг бўлиб қолади. Энди шарчани расмда кўрсатилгандек, x масофага пастга ёки юқорига силжитиб, сўнг қўйиб юборсак, у мувозанат вазияти атрофида тебранма ҳаракат қила бошлайди.



11.3-расм

Пружинанинг кичик чўзилишлари (ёки сиқилишлари) *Гук қонуни* орқали ифодаланади:

$$F = -kx, \qquad (11.1)$$

бу ерда x — пружинанинг узайиши ёки қисқариши бўлиб, уни одатда силжиш деб юритилади; k — ўзгармас катталик бўлиб, ўша пружинанинг қайишоқлик ёки бикрлик коэффициенти дейилади. Манфий ишора $\vec{F}$ кучнинг силжишга тескари, яъни тебранувчи жисмнинг мувозанат вазиятига томон йўналганини билдиради.

Гармоник тебранма ҳаракатнинг таърифига кўра силжиш қонуни қуйидагича ифодаланади:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad (11.2)$$

бунда x — шарчанинг мувозанат вазиятидан силжиши, A — шарчанинг мувозанат вазиятидан энг катта силжиши бўлиб, бу катталик тебраниш амплитудаси номи билан юритилади (ҳақиқатан ҳам синуснинг энг катта қиймати бирга тенг бўлгани туфайли $x = A$ бўлади); ω_0 — доиравий частота; $\omega_0 t + \alpha$ эса гармоник тебранишнинг фазаси дейилади ва у кузатилаётган онда (ихтиёрий t пайтда) тебранувчи жисм қандай вазиятда ва қайси йўналишда эканлигини аниқлайди; α — ўзгармас катталик бўлиб, бошланғич фаза дейилади ва у кузатиш бошланиши олдидан ($t=0$ пайтда) мувозанат вазиятига нисбатан жисм ҳаракатининг йўналиши ва вазиятини аниқлайди. Масалан, (11.2) дан $t=0$ пайт учун

$$x_0 = A\sin\alpha \qquad (11.3)$$

га эга бўламиз. Бундан A ва α орқали жисмнинг $t=0$ пайтдаги вазиятини аниқловчи x_0 катталикни топамиз. Кузатишнинг бошланиш пайти ўзгариши билан бошланғич фазанинг қиймати ҳам ўзгаради. Жисмнинг тебраниш манзарасини соддалаштириш мақсадида (11.2) ифодадаги бошланғич фазани нолга тенг ($\alpha=0$) деб оламиз; бу ҳол шуни акс эттирадики, кузатишни биз жисм ўзининг мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтдан бошлаяпмиз. Шунга кўра (11.2) ифода

$$x=A\ \sin\omega_0 t \tag{11.4}$$

кўринишда ёзилади. Энди $\omega_0=2\pi/T$ эканлигини ((1.37) формулага қ.) эътиборга олсак, (11.4) ифода қуйидагича ёзилади:

$$x=\sin\frac{2\pi}{T}t. \tag{11.5}$$

Бу ифодадан кўринадики, ҳар $t=T$ вақт оралиғида x нинг қиймати нолга тенг бўлади, яъни ҳар бир $t=T$ вақтдан сўнг ҳаракатнинг ўзгариш манзараси такрорланиб боради. Шунинг учун T — жисмнинг тўла тебраниш даври дейилади. Тўла тебраниш даврида пружинага осилган жисм ўзининг мувозанат вазиятидан (11.3-расмда M вазият) пастга силжиб, сўнг у мувозанат вазиятига томон ҳаракат қилади, мувозанат вазиятига келганда, у ўзининг инерцияси билан ҳаракатини давом эттиради (юқорига кўтарилади) ва ниҳоят, у яна пастга томон силжиб, ўзининг мувозанат вазиятига қайтади. Математикавий тебрангич мисолида (11.2-расмга қ.) тебранувчи жисм $t=T$ вақт давомида ўзининг мувозанат вазияти (11.2- расм, M нуқта)дан, айтайлик, ўнг томонга тўла четланиб, сўнг мувозанат вазиятига қайтиб келади ва ўз инерцияси таъсирида чап томонга тўла четлангандан сўнг яна ўзининг мувозанат вазиятига қайтиб келади. Бинобарин, $t=T$ вақт оралиғида тебранувчи жисм тўрт амплитуда (4 A) га тенг масофани ўтишини англаш қийин эмас. (Бу мисолимизда содда бўлиши учун бошланғич фазани нолга тенг деб олдик, яъни вақт ҳисобини жисм мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтдан бошладик.)

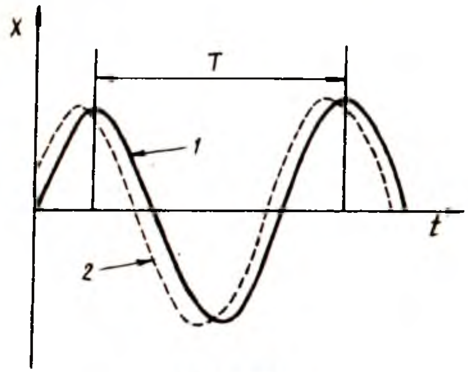
Вақт бирлиги ичидаги тебранишлар сони тебраниш частотаси дейилади ва ν ҳарфи билан белгиланади. Частота ва тўла тебраниш даври

$$\nu=\frac{1}{T}$$

муносабат билан боғланган; доиравий частота ω ва оддий частота ν эса ((1.38) формулага қ.)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu \tag{a}$$

муносабат билан ўзаро боғланган. Охирги икки формуладан кўринадики, СИ тизимида доиравий частота ω_0 жисмнинг 2π секунд давомида неча марта тўла тебранишини ифодаловчи катталикдир; частота ν эса жисмнинг 1 секунд давомида неча марта тўла тебранишини акс эттиради. Доиравий частота бурчак тезлик каби радиан тақсим секундларда ўлчанади. Частота ν нинг ўлчов бирлиги герц [Гц] деб юритилади. Агар 1 секунд давомида жисм бир марта тўла тебранса, унинг частотаси 1 Гц га тенг бўлади. Бинобарин (а) ифодадан кўринадики, бир тўла тебранишдан сўнг жисмнинг тебраниш фазаси 2π га ўзгаради, яъни у ўзининг дастлабки вазиятига қайтади. (11.2) ифодани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

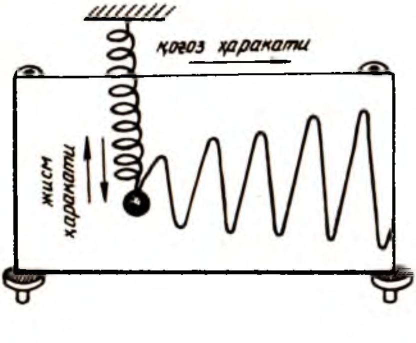


11.4-расм

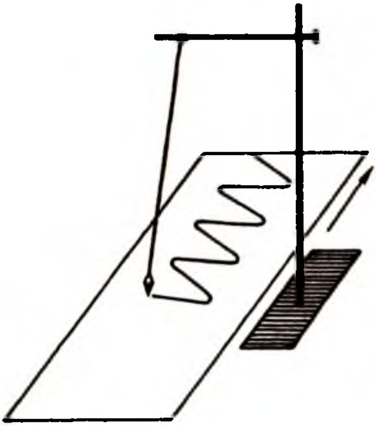
$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \qquad (11.6)$$

бунда $\alpha_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$. (11.6) формула ҳам гармоник тебранма ҳаракатнинг силжиш қонунини ифодалайди. (11.2) ва (11.6) ифодалардан кўринадики, гармоник тебранма ҳаракатда силжишнинг вақтга боғлиқлик эгри чизиғи синусоида ((11.6) ифодага кўра — косинусоида) эгри чизиғидан иборат бўлиши керак. 11.4- расмдаги *1* эгри чизиқ бошланғич фаза нолга тенг бўлган ҳол учун гармоник тебранишда силжишнинг вақтга боғлиқлик эгри чизиғи ((11.5) функциянинг вақтга боғлиқлик эгри чизиғи)ни акс эттиради. Худди шу расмда *2* эгри чизиқ орқали бошланғич фазаси $\alpha = \frac{\pi}{6}$ бўлган ((11.2) қонуниятга асосан) гармоник тебранишда силжишнинг вақтга боғлиқлик эгри чизиғи ифодаланган.

Гармоник тебранишда силжишнинг вақтга боғлиқлик эгри чизиғи синусоидадан (ёки косинусоидадан) иборат эканлиги қуйидаги тажрибаларда намоён бўлади:



11.5-расм



11.6-расм

а) пружинали тебрангичдаги тебранувчи жисмга кичкина оддий қалам ўрнатиб, бу қаламнинг учини 11.5-расмда кўрсатилгандек, ўзгармас тезлик билан ҳаракатланаётган қоғоз лентага тегизиб қўйиш кифоя.

б) 11.6-расмда тебранувчи жисм сифатида қум тўлдирилган ва ингичка ипга осилган идишча (математикавий тебрангич) кўрсатилган. Идишчанинг пастки тешигидан тушаётган қум доналари ҳосил қилган «из» ўзгармас тезлик билан ҳаракатланаётган қоғоз сиртида гармоник тебранишнинг вақтга боғлиқлик эгри чизигини тасвирлайди. Шундай қилиб, пружинали ва математикавий тебрангичларнинг тебранишлари гармоник тебраниш бўлиб, силжишнинг вақтга боғлиқлиги эса, синусоидадан ёки косинусоидадан иборат экан.

11.3- §. ГАРМОНИК ТЕБРАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛУВЧИ ЖИСМНИНГ ТЕЗЛИГИ ВА ТЕЗЛАНИШИ

Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган жисмнинг (моддий нуқтанинг) силжиши синуслар қонуни, яъни (11.2) қонуният бўйича содир бўлаётган бўлсин:

$$x=\sin(\omega_0 t+\alpha).$$

Гармоник тебранувчи моддий нуқтанинг исталган пайтдаги *тезлиги силжишдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг:*

$$v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\alpha)=v_m\cos(\omega_0 t+\alpha), \tag{11.7}$$

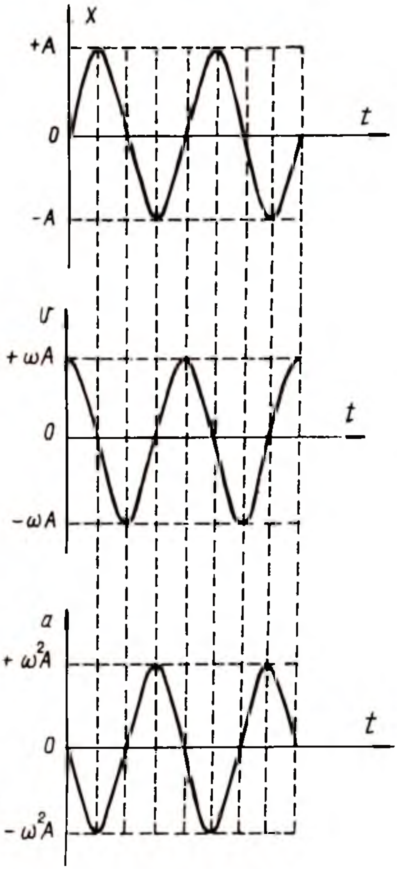
бунда $A\omega_0=v_m$ — тезликнинг амплитуда қиймати. Охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$v=v_m\sin\left(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.8}$$

(11.8) формуладан кўринадики, *тебранувчи моддий нуқтанинг тезлиги ҳам гармоник қонун бўйича ўзгаради,* яъни тезлик ҳам силжиш каби ω_0 частота билан (T давр билан) ўзгаради. (11.2) ва (11.8) ифодаларни таққосласак, гармоник тебранувчи моддий нуқтанинг тезлиги силжишига нисбатан фаза жиҳатдан $\pi/2$ қадар олдинда эканлиги аён бўлади. Охирги иборани қуйидагича тушуниш керак: *силжиш энг катта қийматга эришганда тезлик нолга тенг ва аксинча, тезлик энг катта қийматга эга бўлганда силжиш нолга тенг бўлади,* яъни моддий нуқта мувозанат вазиятидан ўтаётганда ($x=0$) унинг тезлиги энг катта қийматга эришади.

Тебранувчи моддий нуқтанинг тезланиши тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки силжишдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha), \tag{11.9}$$



11.7-расм

бунда $A\omega_0^2$ — тезланишнинг амплитуда қиймати (a_m) бинобарин, (11.9)ни

$$a=a_m \sin(\omega_0 t+\alpha+\pi) \qquad (11.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгликдан кўринадики, *тебранувчи моддий нуқта тезланишининг ўзгариши ҳам* частотаси ω_0 (ва даври T) бўлган *гармоник тебранма ҳаракат қонуни бўйича содир бўлади.* (11.2) ва (11.9) ифодаларни таққослашдан гармоник тебранувчи моддий нуқтанинг тезланиши силжишга нисбатан фаза бўйича π қадар олдинда эканлиги келиб чиқади, яъни *тезланиш ва силжиш қарама-қарши фаза бўйича ўзгаради.* (11.2) ифодага асосан (11.9) формула

$$a=-\omega_0^2 x \qquad (11.11)$$

кўринишга эга бўлади. Бундан кўринадики, гармоник тебранма ҳаракатдаги тезланиш силжишга мутаносиб бўлиб, йўналиши бўйича моддий нуқтанинг мувозанат вазияти томон йўналган (манфий ишора тезланиш ва силжиш бир-бирига нисбатан қарама-қарши фазада ўзгаришини билдиради). 11.7-расмда гармоник тебранма ҳаракат қилувчи моддий нуқтанинг силжиши, тезлиги ва тезланиши орасидаги фазалар фарқлари таққослаб кўрсатилган.

11.4- §. ГАРМОНИК ТЕБРАНМА ҲАРАКАТНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси дейилганда тебранаётган моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаси тушунилади. Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаси исталган пайтда унинг вазиятини ёки ҳолатини аниқлашга имкон беради. Пружинали тебрангич мисолида тебранаётган моддий нуқтага тезланиш берувчи куч — пружинанинг (11.1) формула билан ифодаланган қайишқоқлик кучидир:

$$F=-kx.$$

Бу куч таъсирида тебранувчи моддий нуқта

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega_0^2\sin(\omega_0t+\alpha)$$

тезланиш олади ((11.9) ифодага қ.). У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \text{ ёки } m\ddot{x}+kx=0.$$

Охирги тенгламани

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

тарзда ёзамиз ва ундаги $\frac{k}{m}$ нисбат мусбат сон бўлганлиги туфайли, уни ω_0^2 орқали белгилаймиз:

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2. \qquad (11.12)$$

Натижада гармоник тебранма ҳаракатнинг қуйидаги дифференциал тенгламасига эга бўламиз:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0. \qquad (11.13)$$

Демак, пружинали тебрангичнинг ҳаракат тенгламаси бир жинсли иккинчи тартибли (вақт бўйича силжишдан олинган ҳосиланинг тартибига кўра) дифференциал тенглама тарзида ифодаланади. (11.13) тенглама пружинали тебрангич мисолида келтириб чиқарилган бўлса ҳам, у барча гармоник тебранишлар учун ўринлидир ва унинг ечими гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини ифодалайди. (11.13) тенгламанинг ечими

$$x=A\sin(\omega_0t+\alpha) \qquad (б)$$

ёки

$$x=A\cos(\omega_0t+\alpha) \qquad (в)$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун (11.13) тенгламадаги $\ddot{x}$ ўрнига (11.9) ифодани, x ўрнига (11.2) ифодани қўйсак, (11.13) тенглама айниятга айланади, яъни (11.2) ва (11.9) тенгликлар (11.13) тенгламани қаноатлантиради. Бундан кўринадики, (11.13) дифференциал тенглама гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламасидир ва унинг ечими бўлган (б) ва (в) ифодалар (силжиш қонунлари) тебранаётган моддий нуқтанинг исталган пайтдаги вазиятини ва ҳолатини аниқлашга имкон беради.

Гармоник тебранма ҳаракатнинг асосий хусусиятларидан бири унинг даврийлигидир. Юқоридаги (а) ва (11.12) тенгламалардан пружинали тебрангичнинг тебраниш даври учун

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (11.14)$$

га эга бўламиз, яъни мазкур тебрангичнинг *тебраниш даври пружинага осилган юк массасининг квадрат илдизига тўғри мутаносиб ва унинг қайишқоқлик коэффициентининг квадрат илдизига тескари мутаносибдир.* (11.12) ифодадаги ω_0 — пружинали тебрангичнинг хусусий тебраниш частотаси деб аталади.

Ўзининг мувозанат вазияти атрофида гармоник тебранма ҳаракат қилаётган тизимни гармоник осциллятор дейилади. Бинобарин, (11.13) дифференциал тенглама гармоник осцилляторнинг ҳаракат тенгламасидир (осциллятор — «тебранувчи» деган маънони англатади).

11.5-§. МАТЕМАТИКАВИЙ ТЕБРАНГИЧ

Чўзилмайдиган вазнсиз ипдан ва унга осилган, массаси m бўлган моддий нуқтадан иборат тизимни математикавий тебрангич дейилади (11.2-расм). Амалий жиҳатдан, узунлиги l бўлган чўзилмайдиган ипнинг оғирлиги унга осилган моддий нуктанинг оғирлигига нисбатан ҳисобга олмаслик даражасида кичик бўлиши лозим. Тебрангич мувозанат вазиятида бўлганда, 11.1-§ да таъкидлаб ўтилганидек, металл шарчанинг оғирлик кучи ипнинг таранглик кучи билан мувозанатда бўлади. Тебрангични мувозанат вазиятидан чиқарсак, яъни уни мувозанат вазиятига нисбатан φ бурчакка оғдирсак, уни мувозанат вазиятига қайтарувчи куч пайдо бўлади. Бу куч сон жиҳатдан қуйидагига тенг (11.2-расмга қ.):

$$f_1 = mg\sin\varphi. \qquad (11.15)$$

Бу куч пружинанинг қайишқоқлик кучига жуда ўхшаш, чунки бу куч ҳам, пружинанинг қайишқоқлик кучи ҳам тебранувчи тизимни мувозанат вазиятига қайтаришга интилади. Шу туфайли f_1 куч қайишқоқлик кучи бўлмаса ҳам уни квазиқайишқоқ (қайишқоққа ўхшаш) куч деб юритилади.

Тизимни мувозанат вазиятига қайтарувчи f_1 куч таъсирида массаси m бўлган шарча a тезланиш олади. Бу хусусий ҳол учун Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидагича ёзилади:

$$m\vec{a} = -m\vec{g}\sin\varphi, \text{бундан } \vec{a} = -g\sin\varphi. \qquad (11.16)$$

Манфий ишора $\vec{f}_1$ кучнинг йўналиши силжишга (яъни $\sin\varphi$ га) қарама-қарши эканлигини билдиради. Математикавий тебрангич φ бурчакка четланганда, шарча босиб ўтган траекторияни радиуси l бўлган (11.2-расмга қ.) айлананинг ёйи деб қараш мумкин. Шу боисдан шарчанинг айлана ёйи бўйлаб ҳаракатидаги бурчак тезланиш (ε) чизиқли тезланиш (a) билан қуйидагича боғланган ((1.44) ифодага қ.):

$$a = \varepsilon l = \ddot{\varphi} l,$$

бунда $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ эканлиги эътиборга олинди. Энди бу ифодани (11.16) га қўйсак, уни

$$\ddot{\varphi} l = -g\sin\varphi \text{ ёки } \ddot{\varphi} l + g\sin\varphi = 0 \qquad (11.17)$$

тарзда ёзиш мумкин. Тебрангичнинг кичик тебранишлари (тизимнинг унча катта бўлмаган бурчакка оғиши) билан чегараланамиз; у ҳолда $\sin\varphi \approx \varphi$ деб қабул қилиш мумкин. Шунга кўра (11.17) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\ddot{\varphi}l + g\varphi = 0 \text{ ёки } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Охирги тенгламада

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2 \qquad (11.18)$$

белгилашни киритиш муайян физикавий маънога эга. Натижада

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (11.19)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу дифференциал тенглама (11.13) тенгламанинг худди ўзи, фақат силжиш (x) четланиш бурчаги орқали, чизиқли тезланиш ($\ddot{x}$) эса бурчак тезланиш ($\ddot{\varphi}$) орқали ифодаланган. Шу боисдан (11.19) тенгламанинг ечими:

$$\varphi = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad (11.20)$$

ёки

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (11.21)$$

эканлиги табиий (бунда α — тебранишнинг бошланғич фазаси, A — четланиш бурчагининг амплитуда қиймати). (11.20) ва (11.21) тенгламалар гармоник ҳаракат тенгламаларидир.

Демак, кичик тебранишларда математикавий тебрангич ўзининг мувозанат вазияти атрофида

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (11.22)$$

доиравий частота билан тебранма ҳаракат қилади. Бу частота математикавий тебрангичнинг хусусий тебраниш частотаси дейилади. Иккинчи томондан $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ эканлигини ва (11.22) тенгликни назарда тутсак, математикавий тебрангичнинг тўла тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (11.23)$$

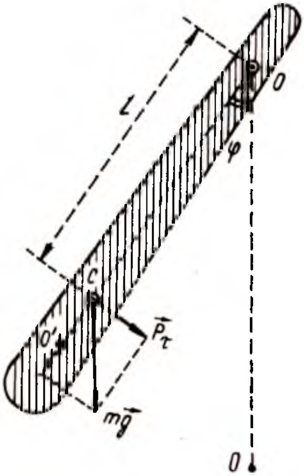
бўлади. Бундан кўринадики, математикавий тебрангичнинг тўла тебраниш даври (ва хусусий тебраниш частотаси) фақат унинг узунлигига ҳамда оғирлик кучи таъсирида жисмнинг эркин тушиш тезланишига боғлиқ бўлиб, тебранувчи жисмнинг массасига ва тебраниш амплитудасига боғлиқ эмас.

11.6- §. ФИЗИКАВИЙ ТЕБРАНГИЧ. ИЗОХРОНЛИК

Физикавий тебрангич деб, оғирлик марказидан ўтмайдиган ўқ атрофида тебранма ҳаракат қила оладиган қаттиқ жисмга айтилади (11.8-расм). Мазкур ўқ (O нуқтадан ўтган ўқ) осилиш ўқи дейилади. Бу ўқ оғирлик маркази (C) дан l масофада жойлашган. Тебрангични мувозанат вазияти (OO') дан бирор бурчакка, айтайлик чап томонга, оғдирсак, оғирлик кучининг ташкил этувчиси $\vec{P}_{\text{т}}$ уни мувозанат вазиятига қайтаришга интилади. Тебрангич оғирлик марказидан ўтаётганда ўз инерцияси таъсирида ҳаракатини давом эттириб, ўнг томонга оғади ва бу жараён такрорланади, яъни у мувозанат вазияти атрофида тебранма ҳаракат қилади. Агар осилиш ўқидаги ишқаланиш кучини ҳисобга олмасак, тебраниш оғирлик кучининг $\vec{p}_{\text{т}} = -m\vec{g}\sin\varphi$ ташкил этувчиси туфайли содир бўлади. Манфий ишора $\vec{p}_{\text{т}}$ кучнинг четланиш ($\varphi\sim\sin\varphi$) га қарама-қарши эканлигини билдиради. $\vec{p}_{\text{т}}$ нинг таъсирида тебрангични мувозанат вазиятига қайтарувчи

$$M = -mgl\sin\varphi \qquad (11.24)$$

га тенг куч моменти вужудга келади; бунда l — осилиш ўқига нисбатан $\vec{p}_{\text{т}}$ кучнинг елкаси.



11.8-расм

Осилиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моментини I билан белгиласак, жисмга қўйилган куч моменти (қаттиқ жисм айланма ҳаракати динамикасининг асосий тенгламаси)

$$M = I\varepsilon = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi} \qquad (11.25)$$

тарзда ифодаланади. (11.24) ва (11.25) тengliклардан қуйидагига эга бўламиз:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \qquad (11.26)$$

11.5-§да айтилганларга кўра кичик тебранишлар учун $\sin\varphi\approx\varphi$ деб қабул қилиб, (11.26) тенгликни

$$I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \text{ ёки } \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \qquad (11.27)$$

кўринишда ёзамиз. Охирги ифодани (11.19) тенглама билан таққосласак,

$$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2 \qquad (11.28)$$

келиб чиқади; бунда ω_0 — физикавий тебрангичнинг хусусий тебраниш частотаси дейилади. Шунга кўра (11.27) тенгламани

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (11.29)$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенглама (11.19) тенглама билан бир хил ва у гармоник тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидир, чунки (11.29) да силжиш ўрнида оғиш бурчаги (φ) қатнашаяпти. Маълумки унинг ечими $\varphi = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$ ёки $\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ кўринишга эга. (11.28), (11.29) ва охирги тенгликлардан шундай хулосага келамизки, кичик тебранишларда физикавий тебрангич

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{11.30}$$

хусусий частота билан ўзининг мувозанат вазияти атрофида гармоник тебранма ҳаракат қилади. Унинг тўла тебраниш даври, равшанки,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \tag{11.31}$$

формула билан аниқланади. Бу формулага кўра физикавий тебрангичнинг тебраниш даври унинг массаси (m) га боғлиқдек кўринади; аслида эса у массага эмас, балки массанинг тебрангичда тақсимланишини ифодаловчи катталик I/m га боғлиқ.

(11.31) тенгликни худди математикавий тебрангичнинг тебраниш даврига ўхшатиб

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бундаги $L = \frac{I}{ml}$ — физикавий тебрангичнинг келтирилган узунлиги дейилади ва у 11.8-расмда кўрсатилган OO' нуқталар орасидаги узунликка тенг. O' нуқта шундай хусусиятга эгаки, агар физикавий тебрангич осилган O нуқтадаги ўқни OC чизиқнинг давомидаги O' нуқтага кўчирсак, унинг тебраниш даври ўзгармайди.

(11.31) ифодадан кўринадики, кичик тебранишларда физикавий тебрангичнинг (пружинали ва математикавий тебрангичларнинг ҳам) тебраниш даври унинг тебраниш амплитудасига боғлиқ эмас. Агар тебраниш даври амплитудага боғлиқ бўлмаса, бундай тебранишлар *изохрон тебранишлар* дейилади. Демак, физикавий тебрангичнинг тебранишлари изохрон тебранишлардир. Тебрангичларнинг изохронлик хусусияти улардан вақт ўлчагич асбоб сифатида фойдаланишга имкон беради. Тебрангичли соатлар изохронлик ҳодисаси асосида ишлайди. Катта бурчакка (0,02 радиан ва ундан ортиқ) четланишларда тебрангичнинг изохронлиги бузилади.

11.7-§. ГАРМОНИК ТЕБРАНМА ҲАРАКАТ ЭНЕРГИЯСИ

Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган тизим ўзининг мувозанат вазиятидан четланганда, потенциал энергия учун ноль сатҳ деб ҳисобланган сатҳ (мувозанат вазият)га нисбатан вақт ўтиши билан у ҳар хил баландликка кўтарилади, яъни тизимнинг потенциал энергияси вақт ўтиши билан ўзгаради. Бу билан бир қаторда унинг кинетик энергияси ҳам вақт ўтиши билан ўзгаради: тизим ўзининг мувозанат вазиятидан ўтаётганда, унинг тезлиги энг катта қийматга эришади ва аксинча, мувозанат вазиятидан энг четга оғганда унинг тезлиги нолга тенг бўлади.

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра берк тизимнинг тўла энергияси (яъни потенциал ва кинетик энергиялар йиғиндиси) вақт ўтиши билан ўзгармай қолади: тебраниш жараёнида тизимнинг потенциал энергияси кинетик энергияга ва аксинча, кинетик энергияси потенциал энергияга айланиб туради — жисм ўзининг мувозанат вазиятидан энг катта четланганда унинг тўла энергияси фақат потенциал энергиядан, мувозанат вазиятидан ўтаётганда эса унинг тўла энергияси фақат кинетик энергиядан иборат бўлади.

Энергиянинг сақланиш қонунини пружинали тебрангич мисолида қараб чиқайлик. (6.22) ифодага кўра мувозанат вазиятидан x масофага силжитилган пружинали тебрангичнинг потенциал энергияси:

$$E_п = \frac{kx^2}{2}.$$

$k = \omega_0^2 m$ ((11.12) ифодага қ) ва $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$ эканлигини эътиборга олиб, юқоридаги тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$E_п = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (11.32)$$

Мазкур тенглама тизим потенциал энергиясининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодалайди.

Тезлиги нолдан фарқли бўлган барча вазиятларда массаси m бўлган моддий нуқтанинг кинетик энергияси ҳам нолдан фарқли, яъни

$$E_к = \frac{1}{2} mv^2.$$

Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тезлиги ҳам гармоник тарзда ўзгаради. Шунинг учун (11.7) ифодани назарда тутсак, тебранаётган моддий нуқтанинг кинетик энергияси

$$E_к = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \qquad (11.33)$$

кўринишда ёзилади.

(11.32) ва (11.33) ифодалардан кўринадики, моддий нуқтанинг потенциал ва кинетик энергиялари вақт ўтиши билан 0 дан $\frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$ гача гармоник равишда ўзгаради.

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тўла энергияси E унинг потенциал ва кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$E = E_п + E_к = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 [\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha)];$$

бунда ўрта қавс ичидаги ифода, маълумки, 1 га тенг. Шундай қилиб, гармоник тебранма ҳаракатнинг тўла энергияси

$$E=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\text{const} \qquad (11.34)$$

вақт ўтиши билан ўзгармайди (бу ердаги m, ω_0, A — қаралаётган тизим учун ўзгармас катталиклар).

Тригонометриядан маълум бўлган

$$\cos^2(\omega_0 t+\alpha)=\frac{1}{2}[1+\cos2(\omega_0 t+\alpha)],$$

$$\sin^2(\omega_0 t+\alpha)=\frac{1}{2}[1-\cos2(\omega_0 t+\alpha)]$$

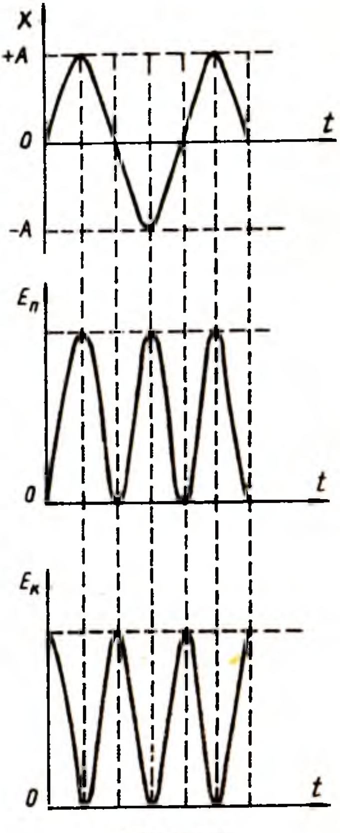
формулалардан фойдаланиб, (11.32) ва (11.33) ифодаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$E_п=\frac{1}{4}m\omega_0^2A^2[1-\cos(2\omega_0 t+2\alpha)], \qquad (11.35)$$

$$E_к=\frac{1}{4}m\omega_0^2A^2[1+\cos(2\omega_0 t+2\alpha)] \qquad (11.36)$$

Охирги икки формуладан кўринадики, гармоник тебранаётган моддий нуқтанинг кинетик ва потенциал энергиялари ҳам вақт ўтиши билан гармоник қонуният бўйича ўзгаради, лекин мазкур ўзгариш силжиш (x) га нисбатан икки баравар катта частота ($2\omega_0$) билан ва $\frac{1}{4}m\omega_0^2A^2$ амплитуда билан содир бўлади. 11.9-расмда x, $E_п$ ва $E_к$ катталикларнинг вақтга боғлиқлик эгри чизиқлари келтирилган ($E_т$ — тўла энергия).

Пировардида шуни таъкидлаш лозимки, гармоник тебранма ҳаракатларда энергиянинг бир турдан иккинчи турга (кинетик энергия потенциал энергияга ва аксинча) айланишининг ҳамда энергиянинг сақланиш қонунининг яққол намоён бўлишини кўрамиз.



11.9-расм

11.8-§. АМПЛИТУДА-ВЕКТОР УСУЛИ. БИР ЙЎНАЛИШДАГИ БИР ХИЛ ЧАСТОТАЛИ ТЕБРАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ

Гармоник тебранишлар кўпинча чизма равишда амплитуда-вектор усули билан тасвирланади ва бу усул вектор диаграмма усули деб ҳам аталади. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат: X ўқидаги ихтиёрий O нуқтадан узунлиги тебраниш амплитудасининг сон қийматига тенг бўлган A векторни шундай жойлаштирамизки (11.10-расм), бу вектор OX ўқи билан тебранишнинг бошланғич фазаси α га тенг бурчак ҳосил қилсин. Агар A векторни O нуқта атрофида соат милига тескари йўналишда ω_0 бурчак тезлик билан айланма ҳаракатга келтирсак, бу векторнинг X ўқидаги проекцияси A ва $-A$ орасида ўзгаради. Расмдан кўринишича, t вақтдан сўнг унинг X ўқидаги проекцияси

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

бўлади, бу эса тебранувчи моддий нуқтанинг t пайтдаги силжишидир. Шундай қилиб, ω_0 частота билан содир бўлаётган гармоник тебранишни X ўқидаги ихтиёрий нуқта атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланувчи амплитуда вектори ($\vec{A}$) нинг шу ўқдаги проекциясининг вақт бўйича ўзгариши тарзида тасвирлаш мумкин; бунда $t = 0$ пайтдаги $\vec{A}$ векторнинг X ўқ билан ташкил қилган бурчаги тебранишнинг бошланғич фазасини ифодалайди.

* * *

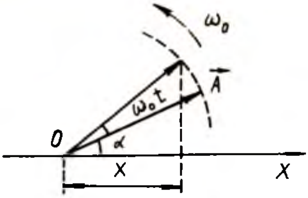
Моддий нуқта бир вақтнинг ўзида икки ва ундан ортиқ тебранишларда қатнашиши мумкин. Масалан, юриб кетаётган вагоннинг шипига пружинали тебрангични осиб ва уни мувозанат вазиятидан чиқариб (айтайлик x масофага пастга чўзиб) қўйиб юборсак, тебрангич вагоннинг шипига нисбатан тик йўналишдаги хусусий тебранишлардан ташқари вагон билан биргаликда тебранма ҳаракатда қатнашади, чунки вагоннинг ўзи ҳам темир йўлнинг уланган жойларидан ўтганда тик йўналишда тебранма ҳаракатга келади. Шундай қилиб, Ер билан боғлиқ саноқ тизимида пружинали тебрангич бир томонга уфққа нисбатан тик йўналган иккита тебранишда иштирок этади.

Моддий нуқта бир хил йўналиш бўйича бир хил частота, лекин турлича амплитуда ва бошланғич фазалар билан содир бўлаётган икки тебранишда қатнашаётган бўлсин. Шунга кўра бу икки тебраниш қонуниятлари:

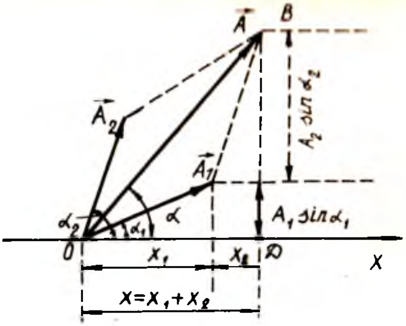
$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \qquad (11.37)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) \qquad (11.38)$$

тарзда ифодаланиши мумкин. Ҳар икки тебранма ҳаракат бир йўналишда содир бўлаётганлиги туфайли натижавий тебраниш, яъни натижавий силжиш алоҳида силжишларнинг йиғиндисидан иборат эканлигини тасаввур этиш қийин эмас. Қўшилувчи тебранишларнинг частоталари (даврлари) бир хил бўлганлиги туфайли T вақт



11.10-расм



11.11-расм

ўтгандан сўнг x_1 ва x_2 силжишлар ўзларининг дастлабки қийматларига эга бўлади. Шунинг учун тебранишларнинг (силжишларнинг) алгебраик йиғиндиси (x) ҳам частотаси ω_0 га тенг бўлган даврий тебранма ҳаракатдан иборат бўлади, яъни

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{11.39}$$

Натижавий тебранишдаги x, A, α катталикларни топиш учун юқорида баён этилган айланувчи амплитуда-вектор усулини қўллаймиз. Шу мақсадда $\vec{A}_1$ ва $\vec{A}_2$ векторларни 11.11-расмда кўрсатилгандек, X ўқидаги O нуқтадан бошлаб мос равишда α_1 ва α_2 бурчак остида чизамиз. Векторларни қўшиш қоидасига асосан натижавий тебранишларнинг амплитуда вектори ($\vec{A}$) — томонлари $\vec{A}_1$ ва $\vec{A}_2$ векторлардан иборат бўлган параллелограммнинг диагоналидир. Энди, $\vec{A}_1$ ва $\vec{A}_2$ векторларни бир хил бурчак тезлик (ω_0) билан О нуқта атрофида соат милига тескари йўналишда айлантирсак, натижавий вектор $\vec{A}$ ҳам ω_0 бурчак тезлик билан ўша йўналишда айланади, чунки иккала вектор бир хил бурчак тезлик билан ҳаракатланганлиги туфайли улар орасидаги бурчак (фазалар фарқи) $\alpha_2 - \alpha_1$ вақт ўтиши билан ўзгармай қолади. Бундан натижавий тебраниш частотаси худди қўшилувчи тебранишлар частотаси каби ω_0 га тенг, деган хулоса келиб чиқади. Бинобарин, $\vec{A}_1$ ва $\vec{A}_2$ векторларнинг X ўқидаги проекциялари x_1 ва x_2 (11.37) ҳамда (11.38) қонуниятлар бўйича гармоник равишда ўзгаради.

$\vec{A}$ нинг қийматини топиш учун 11.11-расмдаги параллелограммга косинуслар теоремасини қўллаймиз:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\alpha_1 - \alpha_2)] =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{11.40}$$

Натижавий векторнинг бошланғич фазасини OBD учбурчакдан топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{OB} = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}. \tag{11.41}$$

Шундай қилиб, бир йўналишда содир бўлаётган бир хил частотали иккита гармоник тебранма ҳаракатда бир вақтнинг ўзида қатнашаётган моддий нуқтанинг натижавий тебраниши ҳам қўшилувчи тебранишлар йўналишидаги ўша частотали гармоник тебранишдан иборат. Натижавий тебраниш (11.39) қонуният билан ифодаланади, бунда тебраниш амплитудаси (A) ва бошланғич фаза (α) мос равишда (11.40) ва (11.41) формулалар воситасида аниқланади.

(11.40) формула билан аниқланадиган натижавий тебраниш амплитудаси қўшилувчи тебранишлар фазаларининг айирмаси ($\alpha_2 - \alpha_1$) га боғлиқ. Масалан, бу формулада $\alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi$, ($n=0$, 1, 2,...) бўлса, қўшилувчи тебранишлар бир хил фазада содир бўлаяпти дейилади. Бу ҳолда (11.40) тенгликдан:

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2 \text{ ёки } A = A_1 + A_2$$

эканлиги келиб чиқади, яъни натижавий тебраниш амплитудаси қўшилувчи тебранишлар амплитудасининг йиғиндисига тенг. Агар $\alpha_2 - \alpha_1 = (2n+1)\pi$ бўлса, тебранишлар қарама-қарши фазада бўлади. Бу ҳолда

$$A = A_1 - A_2$$

бўлади, яъни натижавий амплитуда қўшилувчи тебранишлар амплитудалари айирмасининг мутлақ қийматига тенг; хусусан, $A_1 = A_2$ бўлса, $A=0$ бўлади. Бу натижани вагоннинг шипига осилган пружинали тебрангич мисолида қуйидагича тасаввур қилиш мумкин: ихтиёрий пайтда пружинага осилган металл шарча пастга томон эндигина силжий бошлади дейлик, вагоннинг Ерга нисбатан тебраниши эса айни пайтда юқорига томон йўналган бўлади ва Ер билан боғланган саноқ тизимидаги кузатувчига нисбатан металл шарча тинч ҳолатда бўлади.

Тебранишларни қўшишда юқорида зикр этилган айланувчи амплитуда-вектор усули физиканинг ёруғлик ҳодисаларини ўрганиш бўлимида кенг қўлланилади. Чунончи, бир неча манбадан келаётган бир хил частотали ёруғлик тўлқинлари фазонинг бирор нуқтасида қўшилса, бу тўлқинларнинг натижавий амплитудасини аниқлашда айланувчи амплитуда-вектор усули кўргазмалилик жиҳатидан анчагина устунликларга эга.

11.9-§. ЎЗАРО ТИК БЎЛГАН ТЕБРАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ

Моддий нуқта бир вақтнинг ўзида ўзаро тик йўналишлардаги бир хил частотали иккита тебранишда қатнашиши мумкин. Бундай тебраниш билан танишиш мақсадида узунлиги l бўлган ингичка ипга осилган металл шарча (математикавий тебрангич)нинг X ва Y координата ўқлари бўйлаб тебранишини олиб қарайлик (11.12-расм). Бу ҳолда ҳар иккала (X ва Y) йўналишда ҳам математикавий тебрангичнинг хусусий тебраниш частотаси бир хил, чунки ҳар иккала йўналишдаги тебранишлар частотаси унинг узунлиги (l) билан аниқланади. Математикавий тебрангичнинг ўзаро тик йўналишлардаги тебранишларда бир вақтнинг ўзида иштирок этишини амалга ошириш учун X координата ўқи йўналишида тебраниб турган шарчага Y координата ўқи йўналишида бошланғич туртки билан таъсир этиш кифоя.

Шарчанинг натижавий тебранишдаги траекториясини аниқлаш X ва Y координата ўқлари бўйича тебранишларни қўшиш воситасида амалга оширилади. Мазкур ўқлар бўйича гармоник тебранишлардаги силжиш қонуниятларини қуйидагича ёзамиз:

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1), \qquad (11.42)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_0 t + \alpha_2). \qquad (11.43)$$

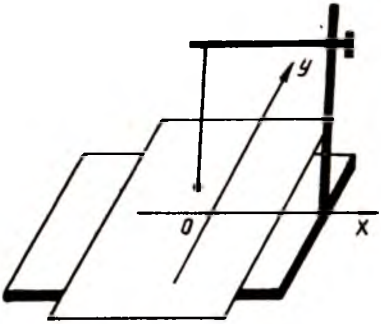
Умумий ҳолда, шарчанинг натижавий траекторияси мураккаб эгри чизиқдан иборат бўлади. Бир неча хусусий ҳолларни қараб чиқайлик:

1. Тебранишларнинг бошланғич фазалари ўзаро тенг ($\alpha_1 = \alpha_2$). Бу ҳолни амалга ошириш учун X координата ўқи бўйлаб тебранаётган шарчага у ўзининг мувозанат вазиятидан ўтаётганда, унга Y координата ўқи йўналишида (11.12-расм) бошланғич туртки бериш лозим. Шарчанинг натижавий траекториясини аниқлаш учун (11.42) тенгликнинг (11.43) тенгликка нисбатини оламиз ($\alpha_1 = \alpha_2$):

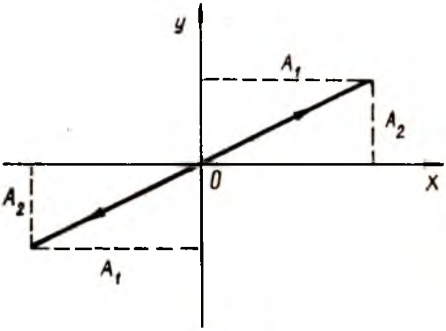
$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2},$$

бундан

$$y = \frac{A_1}{A_2} x \qquad (11.44)$$



11.12-расм



11.13-расм

га эга бўламиз. Бу эса тўғри чизиқ тенгламасидир, яъни шарча координата бошидан ўтувчи ана шу тўғри чизиқ бўйича тебранади (11.13-расм). Унинг мувозанат вазиятидан силжиши

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

муносабат билан аниқланади. Бу формуладаги x ва y лар ўрнига (11.42) ва (11.43) ифодаларни қўйиб, шарчанинг мувозанат вазиятидан силжиш қонуниятини топамиз:

$$r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin\omega_0 t$$

(бунда $\alpha_1=\alpha_2=0$ эканлиги назарда тутилди). Охирги тенгликдан кўринадики, шарча ўз мувозанат вазияти атрофида (11.44) формула билан ифодаланган тўғри чизиқ бўйлаб частотаси ω_0 ва амплитудаси $\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ бўлган гармоник тебранма ҳаракат қилади (11.13-расм).

2. $\alpha_1-\alpha_2=\pi$ бўлсин, бундан $\alpha_1=\alpha_2+\pi$ бўлади. У ҳолда (11.42) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$x=A_1\sin(\omega_0 t+\alpha_2+\pi)=-A_1\sin(\omega_0 t+\alpha_2). \qquad (11.45)$$

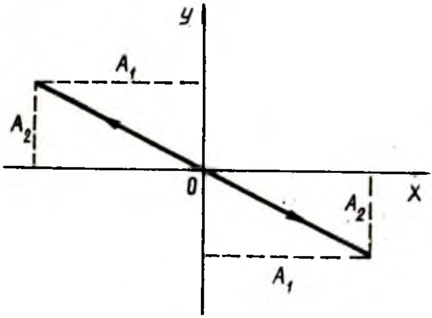
(11.43) тенгликнинг (11.45) тенгликка нисбатини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x. \qquad (11.46)$$

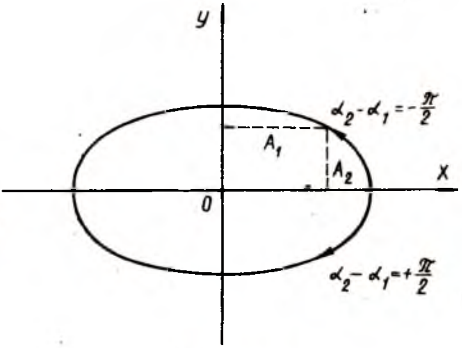
Бу ҳолда шарчанинг натижавий тебраниш траекторияси координата бошидан ўтувчи (11.46) ифода билан берилган тўғри чизиқ бўйича (11.14-расмда кўрсатилгандек) гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

3. $\alpha_1-\alpha_2=\pi/2$ бўлсин, бу тенгликни $\alpha_1=\alpha_2+\frac{\pi}{2}$ кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда (11.42) тенглик

$$x=A_1\sin(\omega_0 t+\alpha_2+\frac{\pi}{2})=A_1\cos(\omega_0 t+\alpha_2) \qquad (11.47)$$



11.14-расм



11.15-расм

кўринишга келади. Энди (11.47) ва (11.43) ифодаларни

$$\frac{x}{A_1}=\cos(\omega_0 t+\alpha_2), \quad \frac{y}{A_2}=\sin(\omega_0 t+\alpha_2)$$

тарзда ёзамиз. Охирги икки тенгликни квадратга кўтариб, сўнг уларни бир-бирига қўшсак, қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1, \qquad (11.48)$$

бу эса эллипс тенгламасидир. Унинг ўқлари координата ўқлари бўйлаб йўналган бўлиб, тебраниш амплитудалари (A_1 ва A_2) эллипснинг мос ярим ўқларига тенг (11.15-расм). Агар $\alpha_1-\alpha_2=$ $=+\frac{\pi}{2}$ бўлса, шарчанинг ҳаракати мазкур эллипс бўйича соат милининг ҳаракат йўналиши бўйлаб, $\alpha_1-\alpha_2=-\frac{\pi}{2}$ бўлган ҳолда эса соат милининг ҳаракатига тескари йўналишда содир бўлади.

(11.48) тенгликдан кўринадики, агар қўшилувчи тебранишлар амплитудалари ўзаро тенг ($A_1=A_2=A$) бўлса натижавий ҳаракат траекторияси

$$x^2+y^2=A^2 \tag{11.49}$$

кўринишга келади. Бу эса радиуси A га тенг бўлган айлана тенгламасидир. Демак, шарча (умумий ҳолда моддий нуқта) бир вақтнинг ўзида ўзаро тик йўналишлардаги бир хил частотали ва бир хил амплитудали иккита тебранишда қатнашса, тебранишнинг натижавий траекторияси айланадан иборат бўлади.

Ўзаро тик йўналишлардаги тебранишларни қўшиш бўйича юқорида қилинган хулосалар қутбланган ёруғлик нурларининг интерференциясини (физиканинг оптика бўлими) ўрганишда кенг қўлланилади.

Биз ўзаро тик йўналишлардаги тебранишларни қўшишда энг оддий хусусий ҳолларни кўриб ўтдик. Бошқа ҳолларда, масалан, қўшилувчи тебранишлар частоталари ўзаро тенг бўлмаса, натижавий тебраниш траекторияси частоталарнинг нисбатига ва фазалар фарқига боғлиқ равишда анча мураккаб эгри чизиқдан иборат бўлади.

11.10-§. СЎНУВЧИ ТЕБРАНИШЛАР

Ҳозиргача биз ўзгармас амплитуда билан содир бўладиган, яъни фақат квазиқайишқоқ куч таъсирида содир бўладиган тебранишларни қарадик. Амалда ҳар қандай тизимнинг тебраниши (агар у ташқаридан энергия олиб турмаса) сўнувчан бўлади — тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан узлуксиз камайиб боради. Бунинг сабаби шундаки, жисмнинг тебранма ҳаракатига атроф-муҳит томонидан қаршилик кўрсатилади ва бинобарин, тизим ўз энергиясини муҳит қаршилигини енгишга, таянч ва осмалардаги ишқаланишларга узлуксиз равишда сарфлайди. Шу боисдан тебранма ҳаракат тенгламасини ифодаловчи Ньютоннинг иккинчи қонунида квазиқайишқоқ куч ($F=-kx$) билан бир қаторда муҳитнинг қаршилик кучи ҳам иштирок этиши лозим. Тажрибаларнинг кўрсатишича унча катта бўлмаган тезликлар учун муҳитнинг қаршилик кучи, шу жумладан ишқаланиш кучи ҳам, тезликка тўғри мутаносиб бўлиб, ҳаракат йўналишига нисбатан тескари томонга йўналган:

$$F_к=rv=-r\frac{dx}{dt}=-r\dot{x}, \tag{11.50}$$

бунда r — муҳитнинг қаршилик коэффициенти. *Сўнувчи тебранишни* ифодаловчи Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\frac{dx}{dt}$$

ёки

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0.$$

Охирги тенгламанинг ҳар иккала томонини m га бўламиз:

$$\ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{1}{m}kx=0.$$

Бу тенгламада

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2\,,\qquad \frac{r}{m}=2\delta \tag{11.51}$$

белгилашларни киритсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0, \tag{11.52}$$

бу ифодадаги ω_0 тизимнинг муҳитнинг қаршилиги бўлмаган ҳолдаги хусусий тебраниш частотаси, δ — *сўниш коэффициенти*. Муҳитнинг қаршилигини ўзида акс эттирувчи (11.52) тенгламанинг ечими $\delta<\omega_0$ бўлган ҳол учун қуйидагича:

$$x=A_0e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega t+\alpha), \tag{11.53}$$

бунда A_0 — тебранишнинг бошланғич ($t=0$ бўлгандаги) амплитудаси; $A_0e^{-\delta t}$ кўпайтма t пайтдаги сўнувчи тебраниш амплитудасини ифодалайди; ω — сўнувчи тебраниш частотаси, унинг қиймати қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}. \tag{11.54}$$

Бу ифодадан кўринадики, сўнувчи тебраниш частотаси (ω) хусусий тебраниш частотаси (ω_0) дан кичик.

(11.54) тенгликка биноан сўнувчи тебраниш даври:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}.$$

Сўниш кўрсаткичи (коэффициенти) ортиши билан тебранишлар даври ортади (тебранишлар частотаси камаяди).

Сўнувчи тебранишда силжишнинг ((11.53) боғланишнинг) вақт ўтиши билан ўзгариши 11.16-расмда тасвирланган. (11.53) формуладан ва 11.16-расмдан кўринишича, сўнувчи тебранишлар амплитудаси вақт ўтиши билан

$$A=A_0e^{-\delta t} \tag{11.55}$$

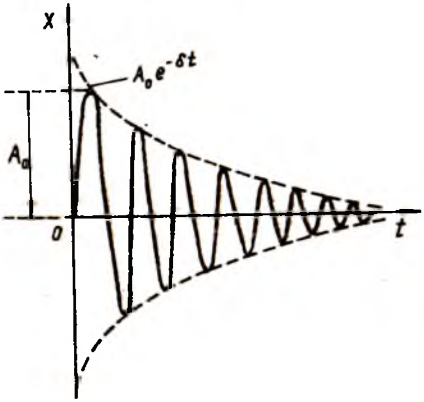
қонун (экспоненциал қонун) бўйича камайиб боради.

Сўнувчи тебранишда бир-биридан тебраниш даври T га фарқ қилувчи иккита кетма-кет амплитудалар нисбати:

$$\frac{A_0e^{-\delta t}}{A_0e^{-\delta(t+T)}}=e^{\delta T}$$

сўниш декременти деб аталади, унинг натурал логарифми эса сўнишнинг логарифмик декременти дейилади ва λ билан белгиланади:

$$\lambda=\ln\frac{A_0e^{-\delta t}}{A_0e^{-\delta(t+T)}}=\delta T. \qquad (11.56)$$



11.16-расм

Бу катталик сўнишнинг ўлчови сифатида қўлланилади. (11.56) тенгламадан кўринишича, сўниш коэффициенти δ бир даврга тенг вақтдаги сўнишни акс эттиради.

Сўнишнинг ўлчови бўлган λ қандай катталик эканини аниқлайлик. Шу мақсадда (11.55) ифодани

$$\frac{A_0}{A}=e^{\delta t}$$

кўринишда, (11.56) ифодани эса $\delta=\lambda/T$ кўринишда ёзсак, бу охирги икки тенгламадан:

$$\frac{A_0}{A}=e\frac{X}{T}t \qquad (11.57)$$

ифодага эга бўламиз; бунда A_0 — бошланғич амплитуда, A эса t пайтдаги амплитуда. Сўнувчи тебранишда амплитуда $e=2{,}73$ марта камайиши учун кетган $t=\tau$ вақт давомида тизим N марта тебранган бўлса:

$$N=\frac{t}{T}=\frac{\tau}{T}$$

бўлади ва (11.57) ифода

$$\frac{A}{A_0}=e^{N\lambda}$$

кўринишни олади. Шартга кўра, $A_0/A=e$ бўлганлиги учун $e^{N\lambda}=e$ ва бундан $N\lambda=1$ ёки

$$\lambda=\frac{1}{N} \qquad (11.58)$$

эканлиги келиб чиқади. Охирги тенгликдан кўринадики, *сўнишнинг логарифмик декременти амплитуда e марта камайиши учун кетган вақт ичида содир бўлувчи тебранишлар сонини аниқловчи катталикдир.*

Тебранишнинг сўнишини бошқача тавсифлаш ҳам мумкин. Бу мақсадда кўпинча тебранувчи тизимнинг асллиги (Q) деган катталикдан фойдаланилади:

$$Q=\frac{\pi}{\lambda}=\pi N.$$

Бу формуладан кўринадики, тебранувчи тизимнинг асллиги Q сон жиҳатдан тебранишлар амплитудаси e марта камайиши учун кетган вақт давомидаги тебранишлар сонининг π га кўпайтмасига тенг. Бошқача айтганда, Q нинг катта қийматларига λ нинг кичик қийматлари тўғри келади.

11.11-§. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР. РЕЗОНАНС

Табиий шароитда содир бўладиган хусусий тебранишлар, юқорида кўрдикки, сўнувчан бўлади, чунки тебраниш жараёнида тизимдаги энергия ишқаланиш кучини ва муҳитнинг қаршилик кучини енгишга сарфланиб боради. Сўнмайдиган тебранишларни ҳосил қилиш учун тизимга ташқаридан даврий равишда энергия узатилиб турилиши керак. Даврий ўзгарувчан ташқи куч таъсирида тизимда вужудга келадиган тебранишларга *мажбурий тебранишлар* дейилади. Масалан, биз телефонда гаплашганимизда микрофон пардаси (мембранаси) тебранаётган (босими ўзгараётган) ҳаво таъсирида, ҳаво эса бизнинг томоқ-бурун бўшлигимиздаги товуш пардаларининг тебраниши таъсирида мажбурий тебранма ҳаракат қилади. Радио карнайи, мотори ишлаб турган машина ёки дастгоҳ корпусларининг тебранишлари (титраши) мажбурий тебранишлардир. Пружинали тебрангич мисолида ҳам пружинага осилган юкка (металл шарчага) тик йўналишда даврий равишда туртки бериб турилса, унинг тебраниши мажбурий тебраниш бўлади.

Мажбурий тебранишларнинг эркин тебранишлардан фарқи шундаки, мажбурий тебранишларнинг частотаси тизимнинг ўз хусусиятидан келиб чиқмай, балки ташқи таъсирнинг частотаси билан аниқланади. Қуйида биз энг оддий ҳолни — тизимга таъсир этувчи ташқи куч гармоник қонун билан ўзгарадиган ҳолни қараб чиқиш билан чегараланамиз, яъни ташқи куч ω частота билан

$$F=F_0\cos\omega t$$

тарзда ўзгарсин, бунда $\overline{F}_0$ — ташқи кучнинг амплитуда қиймати. Даврий равишда ўзгариб турадиган бундай ташқи кучни мажбур этувчи куч дейилади. Тинч турган тизимга ўзгарувчан ташқи куч таъсир қилса, у ўзининг мувозанат вазиятидан аста-секин қўзғала бошлайди. Мазкур жараёнда ташқаридан берилган энергия қисман тизимнинг ҳаракат энергиясини оширишга сарфланса, қисман ишқаланиш кучини ҳамда муҳитнинг қаршилик кучини енгишга сарфланади, шу билан бирга тебранишнинг амплитудаси орта боради. Бирор вақтдан кейин тизим томонидан ишқаланиш кучини ва муҳитнинг қаршилик кучини енгишга вақт бирлиги ичида сарфланаётган энергия ташқаридан узатилаётган энергияга тенг бўлиб қолади. Шу пайтдан бошлаб тизимнинг тебраниши барқарорлашади, яъни у ўзгармас амплитуда билан тебрана бошлайди. Барқарор ҳолатга келган тебранишларни қараб чиқайлик.

Мажбурий тебранма ҳаракат қилаётган тизимга бир вақтнинг ўзида квазиқайишқоқ куч $(-kx)$ ва муҳитнинг қаршилик кучи $(-r\frac{dx}{dt})$ дан ташқари, ташқи куч $(F=F_0\cos\omega t)$ ҳам таъсир этади. Бинобарин, мажбурий тебранишлар учун Ньютоннинг иккинчи қонунини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\frac{dx}{dt}+F_0\cos\omega t.$$

11.11-§ даги белгилашлардан фойдаланиб бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t. \tag{11.59}$$

Барқарор ҳолатга келган мажбурий тебраниш ω частота билан содир бўлишини кўзда тутсак, (11.59) тенгламанинг ечимини

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{11.60}$$

тарзда ифодалаш мақсадга мувофиқ бўлади. (11.60) ифода (11.59) тенгламанинг ечими эканлигини текшириб кўрамиз. Бунинг учун $x=-\omega A\sin(\omega t+\alpha)$; $\ddot{x}=-\omega^2A\cos(\omega t+\alpha)$ эканлигини эътиборга олиб, (11.60) ифодани ва охирги икки тенгликни (11.59) тенгламага қўямиз. Натижада мазкур тенглама айниятга айланади ва ундан мажбурий тебраниш амплитудаси A ни аниқлаймиз:

$$-\omega^2A\cos(\omega t+\alpha)-2\delta\omega A\sin(\omega t+\alpha)+\omega_0^2A\cos(\omega t+\alpha)=$$

$$=\frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Маълум тригонометрик формулалардан фойдаланиб (синус ва косинусларни ёйиб чиқиб), бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$-\omega^2A(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)-2\delta\omega A(\sin\omega t\cos\alpha+\cos\omega t\sin\alpha)+$$

$$+\omega_0^2A(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Бу тенглама айниятга айланиши учун чап ва ўнг томондаги $\cos\omega t$ ва $\sin\omega t$ олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$-\omega^2 A\cos\alpha=2\delta\omega A\sin\alpha-\omega_0^2 A\cos\alpha+\frac{F_0}{m};$$

$$\omega^2 A\sin\alpha=2\delta\omega A\cos\alpha+\omega_0^2 A\sin\alpha.$$

Охирги икки тенгламани

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha-2\delta\omega A\sin\alpha=\frac{F_0}{m}, \qquad (11.61)$$

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha+2\delta\omega A\cos\alpha=0 \qquad (11.62)$$

кўринишда ёзамиз. Энди уларни алоҳида-алоҳида квадратга кўтариб, сўнгра ҳадма-ҳад қўшсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$A^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]^2=\frac{F_0^2}{m^2}.$$

Бундан тизимнинг мажбурий тебраниш амплитудаси

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}+4\delta^2\omega^2. \qquad (11.63)$$

эканлиги келиб чиқади. (11.62) тенгламадан эса мажбурий тебраниш фазасини аниқлаймиз:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (11.64)$$

(11.63) ва (11.64) тенгликлардан кўринадики, мажбурий тебраниш амплитудаси ва фазаси ташқи кучнинг ўзгариш частотаси (ω) га боғлиқ равишда ўзгаради ($\omega_0=\mathrm{const}$). Амплитуда ва фаза ташқи кучнинг ўзгариш частотасига қандай боғлиқлигини қараб чиқайлик.

Амплитуда энг катта қийматга эришиши учун (11.63) ифоданинг махражи энг кичик қийматга эришиши лозим. Махраж энг кичик қийматга эришиши учун илдиз остидаги ифоданинг ҳосиласи нолга тенг бўлиши керак:

$$-2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega+8\delta^2\omega=0 \text{ ёки } -(\omega_0^2-\omega^2)+2\delta^2=0,$$

бундан:

$$\omega^2=\omega_0^2-2\delta^2.$$

Демак, ташқи кучнинг частотаси

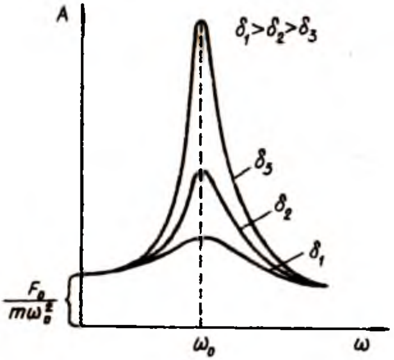
$$\omega=\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \qquad (11.65)$$

бўлганда мажбурий тебраниш амплитудаси энг катта қийматга эришади. Бу ҳодиса резонанс ҳодисаси дейилади ва ташқи кучнинг бу частотаси резонанс частота дейилади.

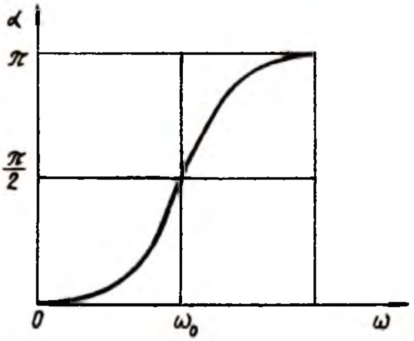
Резонанс частотада мажбурий тебраниш амплитудаси нимага тенг эканлигини аниқлайлик. Шу мақсадда (11.65) тенгликни (11.63) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$A_р = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (11.66)$$

Кўриниб турибдики, δ камайган сари мажбурий тебраниш амплитудаси $A_р$ ошиб боради. Хусусий ҳолда, яъни сўниш бўлмаганда ($\delta = 0$ бўлганда), резонанс частота тизимнинг хусусий тебраниш частотасига тенг бўлиши ((11.65) тенгликка қ.) ва мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катта қийматга эришиши керак. Табиий шароитларда эса δ нинг қиймати нолдан фарқли, бинобарин $A_р$ чексиз катта бўла олмайди. δ нинг қиймати нолдан фарқли бўлганлиги туфайли ташқи кучнинг частотаси тизимнинг хусусий тебраниш частотасига яқинлашганда резонанс ҳодисаси содир бўлади. Бинобарин, *резонанс ҳодисаси ташқи кучнинг ўзгариш частотаси тизимнинг хусусий тебраниш частотасига яқинлашганда мажбурий тебраниш амплитудасининг кескин ошишидан иборат* экан.



11.17-расм



11.18-расм

Сўниш коэффициентининг ҳар хил қийматларида мажбурий тебраниш амплитудасининг ташқи куч частотасига боғлиқлик эгри чизиқлари 11.17-расмда тасвирланган; бу эгри чизиқлар резонанс эгри чизиқлари дейилади. Ташқи кучнинг ўзгариш частотаси нолга тенг бўлганда, яъни тизимга ўзгармас куч таъсир қилганда, резонанс эгри чизиқлари амплитуда ўқини

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega^2} \qquad (11.67)$$

қийматда кесиб ўтади (11.17-расмга қ.). Бу тизимга ўзгармас куч ($\omega = 0$) таъсир этиб турса, у ўзининг мувозанат вазиятидан (11.67) ифода билан аниқланадиган масофага четланиб туради деган маънони англатади.

(11.64) формулага эътибор берсак, ташқи кучнинг частотаси ўзгариши билан (δ ўзгармаган ҳолда) мажбурий тебраниш фазаси

(α) ҳам ўзгариб боришини кўрамиз. Бу ўзгариш 11.18-расмда тасвирланган. (11.64) формуладан ва расмдан кўринадики, $\omega=0$ бўлганда силжиш ва мажбурий тебраниш бир хил фазада ($\alpha=0$) содир бўлади. ω ортиши билан α нинг қиймати ортиб боради ва $\omega=\omega_0$ да $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бўлади. Ташқи куч частотасининг бундан кейинги ортиши α нинг яна ҳам ортишига олиб келади ва $\omega\gg\omega_0$ бўлганда α нинг қиймати π га интилади, яъни бу ҳолда мажбурий тебранишдаги силжиш ва ташқи куч йўналишлар бўйича қарама-қарши фазада бўладилар.

Силжиш билан ташқи куч орасидаги фазалар муносабати резонанс ҳодисасининг моҳиятини чуқурроқ тушунишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, (11.2) ва (11.8) формулалардан шу нарса аён бўладики, гармоник тебранма ҳаракатда силжиш фаза бўйича тезликдан $\pi/2$ қадар орқада қолади. Иккинчи томондан, юқорида айтилгандек, резонанс пайтида силжиш ташқи куч йўналишига нисбатан фаза бўйича $\pi/2$ қадар орқада қолади. Бу мулоҳазалардан кўринадики, тезлик ва ташқи кучнинг ўзгариши бир хил фазада содир бўлади, яъни резонанс частотада ташқи кучнинг йўналиши тебранма ҳаракат тезлиги йўналиши билан бир хил бўлади. Шу боисдан резонанс частотада ташқи куч бажарган ишнинг ҳаммаси тизимнинг тебраниш энергиясига айланади, натижада тебраниш амплитудаси энг катта қийматга эришади.

Резонанс ҳодисаси баъзи ҳолларда фойдали натижаларга, бошқа ҳолларда эса зарарли оқибатларга олиб келиши мумкин. Шунинг учун айланувчи қисмларга эга бўлган техник қурилмалар ва турли иншоотларни яратишда резонанс ҳодисаси эътиборга олинади. Табиатда мавжуд бўлган ҳар бир нарса — бинолар, кўприклар, автомобиль, поезд, тайёра, кема, фазовий кемалар, пружинали тебрангич, математикавий тебрангич ва бошқалар тебранувчи тизимдир. Уларнинг ҳар бири, шу жумладан уларнинг айрим қисмлари ўзига хос хусусий тебраниш частотасига эга. Ташқи ўзгарувчан куч таъсир этганда уларда мажбурий тебраниш вужудга келиши мумкин. Масалан, оғир трактор ёки шунга ўхшаш нақлиёт воситаси биз яшаб турган уйимизнинг орқасидаги кўчадан ўтиб кетаётганда уйнинг деразалари титрашини сезамиз. Бу нарса мажбурий тебранишнинг намоён бўлишидир. Баъзи ҳолларда мажбурий тебраниш амплитудаси кескин ошиб кетиши (резонанс частотага яқин частотада) ва оқибатда иншоот бузилиши мумкин. Тарихда шундай ҳодиса ҳам кузатилган (1831 й. Манчестер шаҳри): кўприкдан аскарлар саф тортиб ўтаётганда кўприк жуда катта амплитуда билан тебрана бошлаб бузилиб тушган. Бунинг сабаби — кўприкнинг хусусий тебраниш частотаси ҳамда аскарларнинг оёқ ташлаш частотаси бир-бирига яқинлашган ва натижада резонанс ҳодисаси амалга ошган. Шунга ўхшаш ҳодиса 1905 йили Петербургда ҳам содир бўлган.

Ички ёнув двигателлари, электромоторлар, газ ва буғ двигателлари, тайёралар ва шу кабиларнинг айланувчи қисмларининг ўқи аниқ масса марказидан ўтмаганлиги туфайли улар тебранма ҳаракат манбаи бўлиб қоладилар. Бунда механизм ўқининг вақт бирлиги ичида айланишлари сони ташқи куч частотаси вазифасини ўтайди. Юқорида зикр этилган механизмлар ва улар қисмларининг хусусий тебраниш частотаси ўқнинг бирлик вақт ичида айланишлар сонига яқинлашганда резонанс ҳодисаси содир бўлиши ва бу ҳодиса механизмларнинг бузилишига олиб келиши мумкин. Шу боисдан айланувчи қисмларга эга бўлган техникавий иншоотларни яратишда резонанс ҳодисасининг салбий оқибатлари ҳисобга олинади.

Резонанс ҳодисасининг ижобий натижалари техникада кенг қўлланилади. Бу ҳодисадан фойдаланиб мураккаб тебраниш жараёнини оддий тебранишлар спектрига ёйиш мумкин. Бошқача айтганда мураккаб тебранишлар таркибида мавжуд бўлган оддий (гармоник) тебранишлар частотаси аниқланади. Радиотехника ва ойнаижаҳон муҳандислик ишида асосан резонанс ҳодисаси қўлланилади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЕТ

1. *Савельев И. В.* Курс физики. т.I.М., «Наука», 1989.
2. *Аҳмаджонов О.* Физика курси. I том, Тошкент, «Ўқитувчи», 1987.
3. *Сивухин Д. В.* Умумий физика курси. I том, Механика. Тошкент. «Ўқитувчи», 1981.
4. Берклеевский курс физики (*Киттель Ч., Найт В., Рудерман М.).* т.I. М., «Наука», 1983.
5. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. I и Вып. 2: Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение. М., «Мир», 1976.
6. Орир Дж. Физика, т.I , М., «Мир», 1981.
7. *Детлаф А. А., Яворский Б. М.* Курс физики. М., «Высшая школа», 1989.
8. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. М., «Высшая школа», 1976.
9. *Астахов А. В.* Курс физики. М., Наука, т.I. 1977.
10. *Хайкин С. Э.* Физические основы механики. М., Наука, 1971.
11. *Расулмуҳамедов А. Г., Камолов Ж., Избосаров Б.Ф.* Умумий физика курси. Механика. Т., «Ўқитувчи», 1989.
12. *Раҳимов А. Ў.* Классик механика. Т., «Ўқитувчи», 1988.

МУНДАРИЖА

Учебное пособие

Абдувахит Касимов, Худайберди Джуракулов,
Абдуназар Сафаров

КУРС ФИЗИКИ, Ч. I

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон»—1994, 700129, Ташкент, Навои, 30

Таҳририят мудири М. САЪДУЛЛАЕВ
Кичик муҳаррир Ш. СОИБНАЗАРОВА
Расмлар муҳаррири И. КУЧЕНКОВА
Техник муҳаррир С. СОБИРОВА
Мусаҳҳиҳлар М. РАҲИМБЕКОВА, С. ТОХИРОВА

Теришга берилди 01.06. 93. Босишга рухсат этилди 26.04. 94. Қоғоз ўлчами $60 \times 90^1/16$. Литературная гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли босма т. 14,0. 14,25. Нашр табоқ 14,25. Адади 7000 нусха. № **694** Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129. Тошкент, Навоий, 30. Нашр № 15—93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг ижарадаги
Тошкент матбаа комбинатида терилиб, Тошкент рангли босма фабрикасида
босилди. 700128, Тошкент, У. Юсупов кўчаси, 86.

Қосимов А. ва бошқ.

Қ 61 Физика курси: Олий техника ўқув юрти талабалари учун ўқув қўлланма/А. Қосимов, Х. Жўрақулов, А. Сафаров. 3 қисмли. Қисм I. Механика.— Т.: Ўзбекистон, 1994—222 б.

I. 1,2 Ҳаммуаллиф.

ISBN 5-640-01323-0

Мазкур қўлланмада анъанавий мавзулар билан бир қаторда эркинлик даражалари, умумлашган координаталар, инерция маркази билан боғланган саноқ тизимлари, сақланиш қонунларининг фазо ва вақт симметрияси билан боғлиқлиги, мутлақ нисбий тезлик ва тезланишлар, релятив зарра ҳаракат тенгламасининг Лоренц алмаштиришларига нисбатан инвариантлиги, бусағавий энергия ва шу каби мавзулар кенг ёритилган. Механикавий тебранма ҳаракат ҳақидаги мавзулар ҳам шу қисмга киритилди.

Қўлланма муҳандислик техника олийгоҳлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, у педагогика олийгоҳлари талабалари ҳамда ўқитувчилар учун ҳам қимматли манба бўлади деган фикрдамиз.

Касимов А. и др. Курс физики. В 3 ч. Ч. I. 22.3я73

$$К\frac{1604000000-009}{М\ 351\ (04)\ 94}11-94$$

№ 680—93
Алишер Навоий номли
Ўзбекистон Республикасининг
давлат кутубхонаси