Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим вазирлиги

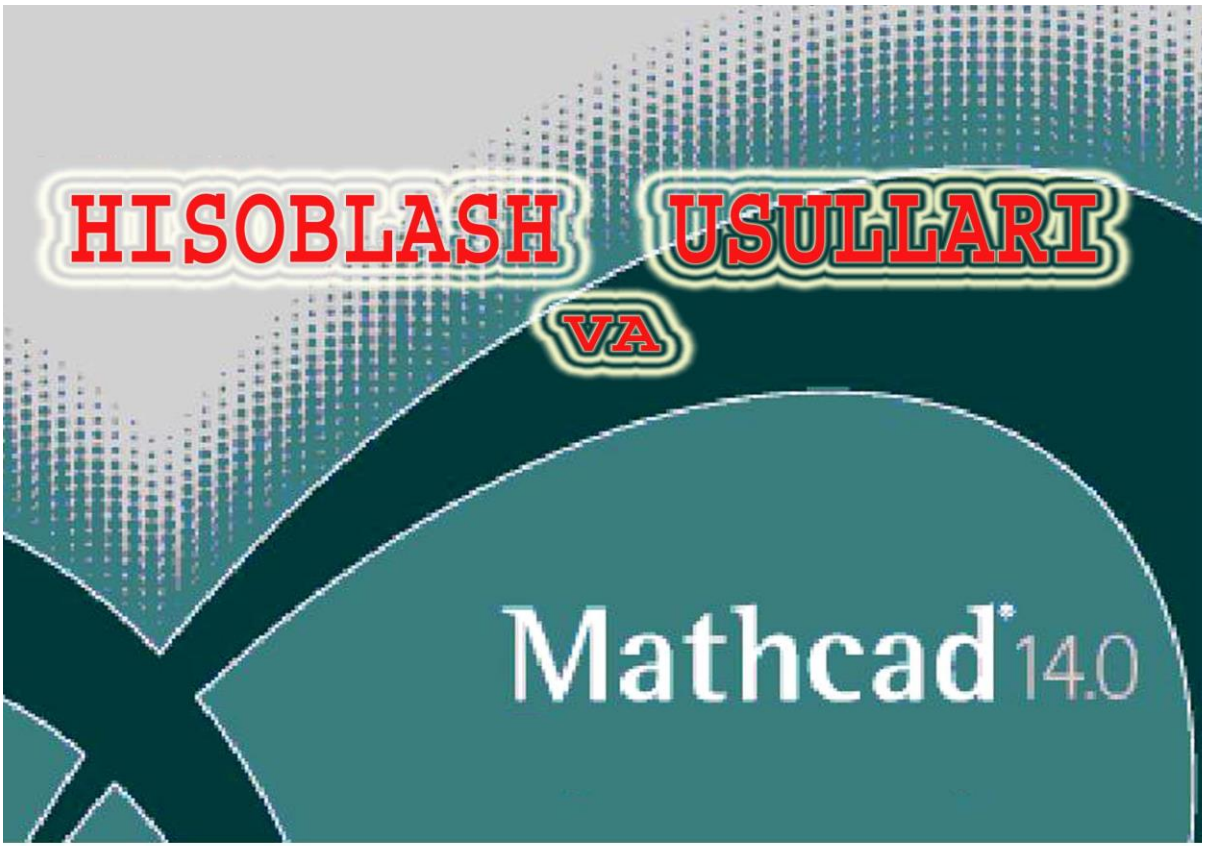
Наманган Давлат Университети

Амалий математика ва ахборот технологиялари кафедраси
А.Имомов

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ ва MathCAD

2-қисм

Дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш



http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111025095315.rar
http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111102151005.rar

Наманган-2014

Куч билим ва адолатда.
Амир Темур

Ким ахборотга эгалик қилса, у дунёга эгалик қилади**.** Билл Гейтс

С Ў З Б О Ш И

Ушбу ўқув қўлланма 5480100-«Амалий математика ва информатика», 5460100 «Математика», 5521900 «Информатика ва ахборотлар технологияси», 5140900 «Касб таълими» йўналишлари хамда 5А480103 «Амалий математика ва ахборотлар технологияси» мутахассисликлари учун «Ҳисоблаш усуллари», «Сонли усуллар, алгоритмлар ва АДД» фанларини ўрганувчилар учун мўлжалланган ва амалдаги ўқув режалари, ўқув дастурлари асосида тузилган. Ҳар бир мавзу асосий тушунчалар ва асосий натижалар (формулалар), саволлар, биринчи марта, усуллар учун MathCAD программаси билан ишлаш йўлга қўйилган.

2-қисм дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга бағишланган. Бу ерда оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи, чегара масалалар, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари қаралган.

MathCAD MATHematica (математика) и CAD (Computer Aided Design — системы автоматического проектирования, ёки САПР-автоматлаштирилган лойиҳалаш тизимлари) сўзларидан олинган. Шундай қилиб, MathCAD-ҳисоблашларни автоматлаштирувчи математик ахборот тизими демакдир.

Тизим деб қўйилган мақсадларини амалга ошириш учун бир вақтнинг ўзида ҳам ягона, ҳам ҳар хил элементларнинг мажмуи деб қаралиши мумкин бўлган ҳар қандай объектга айтилади.

Ахборот тизими- қўйилган мақсадни амалга ошириш учун ахборотни йиғиш, сақлаш, қайта ишлаш, қидириш ва узатиш усуллари, воситалари ва ходимларнинг ўзаро боғлиқ мажмуидир.

Ахборот тизимга инсон савол билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.Фойдаланувчи MathCADга масала билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.

Тақризчилар: т.ф.н.,доц.П.Каримов

Ўқув қўлланма НамДУ Амалий математика кафедрасининг 24.01.05 даги мажлисида кўриб чиқилган ва фойдаланишга тавсия этилган, пр.№ 6

Маъруза матнларини териш,чоп этиш учун шароит яратиб берган Б.Саматовга муаллиф миннатдорчилик билдиради.

2-қисм. Маърузалар.

ИЛОВА ЛАР.

2-БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

2.1.ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА (ОДТ) УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ. ЭЙЛЕР УСУЛИ

Асосий тушунчаоар: *ОДТ учун Коши масаласи, аниқ ва тақрибий ечим, бошланғич шарт, аниқ усуллар, тақрибий усуллар:тақрибий-аналитик усул, сонли усул.Итерация ва қаторга ёйиш усуллари, Эйлер, Рунге - Кутта, Адамс усуллари, маҳаллий ва тўлиқ хато.*

Асосий формулалар:

1. ОДТ учун Коши масаласи: $u' = f(x,u), a \le x \le b, u(a) = u_0, a = x_0$.

2.Тақрибий аналитик усуллар: итерация, қаторига ёйиш усуллари.

3.Эйлер усули: $u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0,1,...,n-1, u(x_n) - u_n = 0(h)$.

4.Эйлер усулининг алгоритми ва дастури.

5.Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. ОДТ учун Коши масаласи.

ОДТ учун Коши масаласини қараймиз:

$$u' = f(x,u), a \le x \le b, \qquad (1)$$

$$u(a) = u_0, a = x_0 \qquad (2)$$

(1) оддий дифференциал тенглама, (2) бошланғич шарт дейилади. Коши масаласида (2) бошланғич шартни ва ОДТ (1) ни қаноатлартирувчи u=u(x) функцияни топиш талаб этилади. Агар (1), (2) шартларни қаноатлантирувчи узлуксиз, биринчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга функция u=u(x) топилса, уни аниқ ечим дейилади. ОДТ курсидан маълумки $f(x,y)$ $f_y(x,y)$ функциялар бирор $[a,b]*[c,d]$ соҳада узлуксиз бўлса, Коши масаласи аниқ ечимга эга. Биз бу шартларни бажарилган деб қараймиз.

Лекин бу ечимни доим ҳам аниқ топиб бўлавермайди, чунки (1) дан Ньютон-Лейбниц формуласини қўллаб қуйидагини оламиз:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx + u(x_0) .$$

ва равшанки, ечимни аниқ топиш учун интеграл остидаги функция аниқ интегралланувчи бўлиши керак. Масалан, ушбу тенгламада $u'(x) = \exp(-(x^2 + u^2))$ ўнг томоннинг аниқ интегралини топиш мумкин эмас.

(1), (2) да u(x) функция вектор-функция ҳам бўлиши мумкин: $u(x) = (u_1(x),...,u_k(x))$. Бу ҳолда (1), (2) ОДТ системасига айланади. ОДТ системасига юқори тартибли тенгламаларни олиб келиш мумкин. Масалан, иккинчи тартибли ОДТ учун Коши масаласи

$$u'' = f(x,u,u'), u(x_0) = u_o, u'(x_0) = u'_o$$

ни ушбу белгилашлар ёрдамида

$$u'_1(x) = u'(x) = u_2(x), u'_2(x) = f(x,u_1,u_2)$$

қуйидаги ОДТ системасига олиб келинади:

$$u'_1(x) = u_2(x), u_1(x_0) = u_0 \qquad (3)$$

$$u'_2(x) = f(x,u_1,u_2), u_2(x_0) = u'_0. \qquad (4)$$

ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш усуллари икки гуруҳга бўлинади: Тақрибий аналитик усуллар (итерация-Пикар, қаторга ёйиш усуллари ва ҳ.к.) ва сонли усуллар (Эйлер, Рунге-Кутта, Адамс ва ҳ.к.). Тақрибий аналитик усуллар ёрдамида тақрибий ечим аналитик кўринишда, сонли усулларда эса тақрибий ечим сонли кўринишда, яъни жадвал кўринишда топилади.

2. Тақрибий аналитик усуллар.

а) Итерация ёки Пикар усули. (1), (2) ни ушбу Вольтер тенгламаси кўринишида ёзиб оламиз:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u)dt \qquad (5)$$

Сўнг, $u_0(x) = u_0$ деб олиб $\{u_k(x)\}$ итерациялар кетма-кетлигини тузамиз:

$$u_{k+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u_k(t))dt, u_0 = u_0(x), \qquad k = 0,1,2,.... \qquad (6)$$

Қисқартириб акс эттириш принципига асосан, оператор A:C[a,b]$\to$ C [a,b]

$$Au(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u)dt$$

қисқартириб акслантириш бўлса, $\{u_k(x)\}$ кетма-кетлик аниқ ечимга текис яқинлашади.

Теорема 1. Фараз қилайлик $D = D(x,u) = \{|x - x_0| \le a, \ |u - u_0| \le b\}$ чегараланган соҳада ўнг томон f(x,u) Липшиц шартига бўйсинсин:

$$|f(x,u_1) - f(x,u_2)| \le L|u_1 - u_2|.$$

У ҳолда $r_k(x) = u(x) - u_k(x)$ хатолик учун қуйидаги баҳо ўринли: $|r_k(x)| \le bL^k a^k / k!$.

Исбот: (5) дан (6) ни айирамиз ва модулга ўтамиз:

$$|r_{k+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x,u) - f(x,u_k)]dx \right| \le L\int_{x_0}^{x} |r_k(x)|dx.$$

Бу реккурент тенгсизликни ечамиз. Аввало,

$$|r_0(x)| = |u(x) - u_0| \le b,$$

эканлигидан кетма-кет топамиз:

$$|r_1(x)| \le bL(x - x_0), \qquad |r_2(x)| \le bL(x - x_0)^2 / 2!,..., \quad |r_k(x)| \le bL^k(x - x_0)^k$$

Теорема исбот бўлди.

Мисол 1. Пикар усулини ушбу Коши масаласига тадбиқ қиламиз:

$$u'(x) = x^2 + u^2(x), u(0) = 0.$$

Равшанки,

$$u_0(x) = 0, u_1(x) = \frac{x^3}{3}, u_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}, u_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60},$$

ва ҳоказо. Кўриниб турибдики, $|x| < 1$ соҳада қатор жуда тез яқинлашади.

Мисолдан кўринадики, Пикар усули (6) интеграл элементар фунуциялар ёрдамидагина ҳисоблансагина яхши ишлайди. Акс ҳолда бу усулни қўллаш мақсадга мувофиқ эмас. Пикар усулида Липщиц ўзгармаси L ни қуйидагича олиш мумкин $L = \max\{|f_u(x,u)|, (x,u) \in D\}.$.

б) Ечимни Тейлор қаторига ёйиш.

Фараз қилайлик, $f(x,u) \in C^{k+1}([a,b]*[c,d])$ бўлсин, к ≥0. У ҳолда аниқ ечим u(x) ни $x = x_0 \in [a,b]$ нуқта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйиш мумкин:

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0)/1! + ... + u^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k / k! + u^{(k+1)}(c)(x - x_0)^{k+1}/(k+1)! .(7)$$

бу ерда $a \le x_0 < c < x < b.$ $u^i(x_0)$ ҳосилаларни (1) тенгламалардан топиш мумкин:

$$u' = f(x,u), u'' = f'_x(x,u) + f'_u(x,u)u'(x) = f'_x + f'_u f,.., u^{(k)}(x) = (u^{(k-1)}(x))'.$$

Топилган ҳосилалар $x = x_0$ нуқтада ҳисобланиб (7) га қўйилади ва қолдиқ ҳад ташлаб юборилади. Натижада, $0((x - x_0)^{k+1})$ хатолик билан тақрибий-аналитик ечим топилади:

$$u(x) \approx u_k(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0)/1! + ... + u^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k / k!$$

Равшанки, $r_k(x) = u(x) - u_k(x)$ десак, ушбу баҳога келамиз:

$$|r_k(x)| \le \max\left\{|u^{(k+1)}(x)||x - x_0|^{k+1}/(k+1)!, \quad x \in [a,b]\right\}.$$

3. Эйлер усули. Фараз қилайлик u=u(x) ечим иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин,ёки f=f(x,t) функция биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда Тейлор формуласига асосан

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x + c_1)h^2/2, \quad 0 < c_1 < h$$

Демак, $u' = f(x,u)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$u(x+h) = u(x) + hf(x,u) + 0(h^2)$$

муносабатга келамиз. $x = x_i, \quad x_{i+1} = x_i + h$ десак

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hf(x_i, u_i) + 0(h^2), \quad i = 0,1,....$$

Бу муносабатда ноъмалум чексиз кичик $0(h^2)$ миқдор бор. Уни ташлаб юбориб

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0,1,....,n-1. \qquad (8)$$

муносабатларга келамиз, бу ерда u_i сонлар (8) реккурент формула ечими, равшанки, $u_i \ne u(x_i)$, яъни u_i лар $u(x_i)$ ларнинг тақрибий қийматлари экан, $r_i = u(x_i) - u_i$ хатоликни топамиз. Равшанки,

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_i) - u_i + 0(h^2), \quad i = 0,1,....,n-1.$$

$u(x_0) = u_0$ эканлигидан

$$u(x_1) - u_1 = 0(h^2), u(x_2) - u_2 = 0(h^2) + 0(h^2) = 2*0(h^2),..,$$

$$u(x_n) - u_n = n*0(h^2) = \frac{b-a}{n}0(h^2) = 0(h).$$

Демак, $u(x_i) - u_i = 0(h^2)$ -бу маҳаллий хатолик ва $u(x_n) - u_n = 0(h)$ - бу эса тўла хатолик.

Шундай қилиб, Эйлер усули [a,b] да биринчи тартибли хатоликка эга экан: $u(x_n) - u_n = 0(h)$.

4.Эйлер усулининг дастури .

Оралиқ, нуқталар $a := 0\ b := 0\ n := 10\ h := (b-a)/n\ Origin := 0\ i := 0..n\ x_i := a + ih$

ОДТ да ўнг томони, бошланғич шарт $f(x,y) := 2.2/(x^2 + y^2 + 2.6)\ \ y_0 := 0$

Эйлер усули $y_{i+1} := y_i + hf(x_i, y_i)$

Натижани чиқариш $y^T =$

Программа асосида экспериментлар ўтказамиз:a, b, u0, n=0 1 0 10:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
u	0.0000	0.0010	0.0050	0.0140	0.0300	0.0551	0.0914	0.1413	0.2072	0.2925	0.4011

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

4. Иккита ОДТ учун Эйлер усули.

Оралиқ, нуқталар $a := 0\ b := 0\ n := 10\ h := (b-a)/n\ Origin := 0\ i := 0..n\ x_i := a + ih$

Ўнг томон $f(x,u,v) := (v-u)*x \quad g(x,u,v) := (u+v)*x$

Бошланғич шарт $x_0 := 0\ u_0 := 1\ v_0 := 1$

Эйлер усули $u_{i+1} := u_i + hf(x_i, u_i, v_i)\ \ v_{i+1} := v_i + hg(x_i, u_i, v_i)$

Эйлер усули $u_{i+1} := u_i + hf(x_i, u_i, v_i)\ \ v_{i+1} := v_i + hg(x_i, u_i, v_i)$

Натижани чиқариш $u^T =$ $v^T =$

Программа асосида экспериментлар ўтказамиз:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
u	1.0000	1.0000	1.0004	1.0022	1.0070	1.0170	1.0351	1.0649	1.1106	1.1777	1.2729
v	1.0000	1.0200	1.0604	1.1223	1.2075	1.3187	1.4599	1.6366	1.8564	2.1295	2.4697

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

5. Назарий саволлар ва топшириқлар

1. ОДТ учун тақрибий усуллар неча хил бўлади?
2. Эйлер усулида маҳаллий, тўлиқ хатолик нима?
3. Эйлер усулида аниқ ва тақрибий ечим нима?
4. [0,1] кесмада $u' = x^2 + u^2, u(a) = u_0$, масала учун Пикар усулининг хатолигини топинг.
5. Юқоридаги масала учун Тейлор қаторига тақрибий ечимнинг ёйиш усули учун қолдиқ ҳадни баҳоланг. Мундарижага

2.2. ТАКОМИЛЛАШГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭЙЛЕР УСУЛЛАРИ

Асосий тушунчалар:*иккинчи тартибли аниқликдаги такомиллашган Эйлер усуллари, маҳаллий ва тўлиқ хатолик; прогноз ва коррекция усули, қолдиқ ҳадлар.*

Асосий формулалар:

1. *Такомиллашган Эйлер усули:*

$u_{i+1/2} = u_i + hf(x_i, u_i)/2$, $u_{i+1} = u_i + hf(x_i + h/2, u_{i+1/2})$, *i=0,...,n-1,* $u(x_n) - u_n = 0(h^2)$.

2. *Прогноз ва коррекция усули:*

$v_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i)$, $u_{i+1} = u_i + h[f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, v_{i+1})]/2$,*i=0,...,n-1,* $u(x_n) - u_n = 0(h^2)$.

3. *Усулнинг MathCAD даги алгоритми*

4. *Назарий саволлар ва масалалар.*

1. Такомиллашган Эйлер усули. Ушбу Ньютон-Лейбниц формуласининг хусусий ҳолини қараймиз:

$$u(x+h) = u(x) + \int_0^h u'(x+t)dt \qquad (1)$$

тенгликни қараймиз ва $u'(x+t)$ ни $t = h/2$ нуқтада ёямиз:

$u'(x+t) = u'(x+h/2) + u''(x+h/2)(t-h/2) + u'''(c)(t-h/2)^2/12, 0 < c < h/2$.

Лекин, осонгина ҳисоблаш мумкинки,

$$\int_0^h (t-h/2)dt = 0$$

Қуйида биз интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз: агар f(x), g(x) [a,b] да узлуксиз, signg(x)=const, бўлса

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx, a < c < b.$$

Интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\int_0^h u'''(c)(t-h/2)^2 dt = u'''(c_1)\int_0^h (t-h/2)^2 dt = u'''(c_1)h^3/12, , \quad 0 < c_1 < h/2.$$

Шунинг учун,

$u(x+h) = u(x) + hu'(x+h/2) + u'''(c_1)h^3/12 = u(x) + hf(x+h/2, u(x+h/2)) + 0(h^3)$.

Энди $x = x_i$, $x_{i+1} = x_i + h$ десак,

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hf(x_i + h/2, u(x_i + h/2)) + 0(h^3) .(2)$$

Бу ердан $u(x_{i+1})$ ни тўғридан тўғри топиш мумкин эмас, чунки $u(x_i + h/2)$ ҳам ноъмалум. Агар Эйлер формуласидан

$$u(x_i + h/2) = u(x_i) + hu'(x_i)/2 + 0(h^2) \qquad (3)$$

лигини эътиборга олсак ва уни (2) га қўйсак хатоликни бузилмаслиги кўриниб турибди:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hf(x_i + h/2, u(x_i) + hu(x_i)/2 + 0(h^2)) + 0(h^3), \\ u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hf(x_i + h/2, u(x_i) + hf(x_i, u(x_i))/2) + 0(h^3). \end{aligned} \qquad (4)$$

$0(h^3)$ хатоликни ташлаб юбориб янги

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i + h/2, u(x_i) + hf(x_i, u_i)/2), \qquad i = 0,1,2......., n-1. (5)$$

тенгламаларга келамиз. Бу ерда $u_i \approx u(x_i)$ *ва* $u(x_i) - u_i = 0(h^3)$ бўляпти. Демак (5) реккурент тенглама ечими u_i аниқ ечим қиймати $u(x_i)$ га $0(h^3)$ хатолик билан яқинлашар экан. $u(x_i) - u_i = 0(h^3)$ миқдор $x = x_i$ нуқтадаги маҳаллий хатолик

дейилади.(5) усул такомиллашган Эйлер усули дейилади. Уни
$u_{i+1/2} = u_i + hf(x_i, u_i)/2, \quad i = 0,1,.....n-1,$ белгилаш киритиб қуйидаги
$u_{i+1/2} = u_i + hf(x_i, u_i)/2, \quad u_{i+1} = u_i + hf(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}), \qquad x_{i+1/2} = x_i + h/2$ (6)
кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Тўлиқ хатони топамиз: $u(x_i) - u_i = 0(h^3)$ эканлигидан равшанки,

$$u(x_n) - u_n = \sum_{i=0}^{n-1}[u(x_i) - u_i] = n * 0(h^3) = 0(h^2).$$

Демак, такомиллашган Эйлер усулида тўлиқ хатолик иккинчи тартибли экан:

$$r_n(x) = u(x_n) - u_n = 0(h^2).$$

2. Прогноз-коррекция усули.

(1) да чизиқли интерполяциядан ёки трапеция формуласидан фойдаланамиз:
$u'(x+t) = u'(x) + h[u'(x+h) + u'(x)]/2 + t(t-h)u'''(c)/2!, \; 0 \le t \le h, \quad x \le c \le x+h,$
Бу формулани (2) га қўямиз:

$$u(x+h) = u(x) + h[u'(x) + u'(x+h))/2] + \frac{1}{2!}\int_0^h u'''(c)t(t-h)dt, c = c(t)$$

Бу ерда $u'''(x)$ узлуксиз десак, ва t(t-h)≤0 эканлигини ҳисобга олсак, интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан, шундай c_1 топиладики, $x \le c_1 \le x + h$,

$$\int_0^h u'''(c)t(t-h)dt = u'''(c_1)\int_0^h t(t-h)dt = -u'''(c_1)h^3/12$$

Натижада, $u(x+h) = u(x) + h[f(x,u) + f(x+h, u(x+h))]/2 - u'''(c_1)h^3/12$
тақрибий тенгликка келамиз.Энди $x = x_i, \quad x_i + h = x_{i+1}$ десак қуйидаги муносабатни оламиз:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h[f(x_i,u_i) + f(x_{i+1},u_{i+1})]/2 + 0(h^3) \quad (7)$$

Бу ердан $u(x_{i+1})$ ни топиш мумкин эмас. Чексиз кичик $0(h^3)$ ни ташлаб юбориб $u(x_i) \approx u_i$ деб u_i тақрибий қийматларни киритамиз. Лекин, $f(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$ ифодани $0(h^2)$ хатолик билан ҳисобласак умумий $0(h^3)$ хатолик бузилмайди. Шунинг учун, Эйлер усулидаги $u_{i+1} = u_i + hf(x_i,u_i)$ миқдор учун $u(x_i) - u_i = 0(h^2)$ эканлигини билган ҳолда (7) дан ушбу муносабатларни оламиз:

$$u_{i+1} = u_i + h[f(x_i,u_i) + f(x_{i+1}, u_i + hf(x_i,u_i)]/2, \; i = 0,1,....n-1. \quad (8)$$

Бу Эйлернинг прогноз-коррекция усули деб айтилади,
$v_{i+1} = u_i + hf(x_i,u_i)$ бу $u(x_{i+1})$ миқдорнинг прогнози-башорат қилинган қиймати,
$u_{i+1} = u_i + h[f(x_i,u_i) + f(x_{i+1}, v_{i+1})]/2$ бу $u(x_{i+1})$ нинг коррекцияланган (аниқлаштирилган) қиймати.

Демак, Эйлернинг прогноз-коррекция усули қуйидагича бўлар экан:
$v_{i+1} = u_i + hf(x_i,u_i)$, $u_{i+1} = u_i + h[f(x_i,u_i) + f(x_{i+1},v_{i+1})]/2$, i=0,1,…,n-1.

3. Усулнинг алгоритми

Қуйидаги дастурда Эйлернинг барча усуллари қамраб олинган.

ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечишни ушбу мисолда кўрамиз:

$$y' = 2.2/(x^2 + y^2 + 2.6), y(0) = 0$$

Усуллар сифатида Эйлер (E) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, такомиллашган Эйлер (TE) $y_{i+0.5} = y_i + hf(x_i, y_i)/2, y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})/2$, прогноз-коррекция (PK) $\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$, Рунге-Кутта (RK) усулларини

$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$, $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + hk_1)$,
$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + hk_2)$, $k_4 = hf(x_{i+1}, y_i + hk_3)$,қараймиз.

Биз кенг кўламдаги ички функцияларни ишлатмаймиз: Bulstoer, bulstoer, bvalfit, Odesolve, Radau, radau, Rkadapt, rkadapt, rkfixed, Sbval, Stiifb, stiffb, Stiffr, stiffr. Уларнинг кўпчилиги асосида юқоридаги усуллар ётади.

Оралиқ, нуқталар $a := 0$ $b := 0$ $n := 10$ $h := (b - a)/n$ $Origin := 0$ $i := 0..n$ $x_i := a + ih$

ОДТ да ўнг томони, бошланғич шарт $f(x, y) := 2.2/(x^2 + y^2 + 2.6)$ $y_0 := 0$

E усул $y_{i+1} := y_i + hf(x_i, y_i)$

TE усул $y12_{i+1} := y_i + hf(x_i, y_i)/2$ $yTE_{i+1} := y_i + hf(x_i + h/2, y12_i)$

PK усул $yPK_{i+1} := y_i + hf(x_i + h, y_{i+1})$

RK усул коэффицентлари $k1_i := hf(x_i, y_i)$ $k2_i := hf(x_i + h/2, y_i + hk1_i/2)$

RK усул коэфф.-тлари $k3_i := hf(x_i + h/2, y_i + hk2_i/2)$ $k4_i := hf(x_i + h, y_i + hk3_i)$

RK усул $yRK_{i+1} := y_i + (k1_i + 2k2_i + 2k3_i + k4_i)/6$

Ҳисоблашларни бажариб ушбу натижага келамиз:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	0.085	0.169	0.251	0.331	0.408	0.481	0.55	0.614	0.675	0.732
TE	0.085	0.168	0.251	0.331	0.407	0.48	0.549	0.614	0.675	0.731
PK	0.084	0.167	0.249	0.328	0.404	0.477	0.545	0.61	0.671	0.728
RK	0.085	0.168	0.25	0.33	0.406	0.479	0.548	0.613	0.674	0.731

Назарий саволлар ва масалалар.

1. Такомиллашган Эйлер усулининг асоси нимадан иборат?
2. Такомиллашган Эйлер усулида маҳаллий ва тўлиқ хатолик нимадан иборат?
3. Прогноз-коррекция усулининг моҳияти, нимадан иборат?
4. Прогноз-коррекция усулида маҳаллий ва тўлиқ хатолик нимадан иборат?
5. 1, 2. программаларини ОДТ лар системаси учун ёзинг. Бунда бир неча функция ўрнига битта процедура ишлатинг. Мундарижага

2.3.РУНГЕ-КУТТА УСУЛЛАРИ ГРУППАСИ

Асосий тушунчалар: Рунге-Кутта усуллари группаси, тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули

Асосий формулалар :

1. Рунге-Кутта усуллари группаси: Эйлер, такомиллашган Эйлер, прогноз-коррекция, Рунге-Кутта усуллари.

2. Тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули:

$$u(x+h)\approx z(h)=u(x)+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6, k_1=hf(x,u),\ k_2=h(x+h/2,u+k_1/2),$$

$$k_3=hf(x+h/2,u+k_2/2),\ k_4=hf(x+h,u+k_3),u(x_n)-u_n=0(h^4)$$

3. Усулнинг MathCADда алгоритми.

4. Назорат саволлари ва масалалари

1 Рунге-Кутта усуллари группаси

Биз Эйлер, такомиллашган Эйлер,прогноз-коррекция усулларини кўрдик:

а) Эйлер сули

$$u_{i+1}=u_i+hf(x_i,u_i),\ \ u(x_i)-u_i=0(h^2).(\ \ 1)$$

Б) такомиллашган Эйлер усули

$$u_{i+1/2}=u_i+hf(x_i,u_i)/2,u_{i+1}=u_i+hf(x_{i+1/2},u_{i+1/2}),\ u(x_i)-u_i=o(h^3).(\ \ 2)$$

в) прогноз-коррекция усули

$$u^*_{i+1}=u_i+h(f(x_i,u_i)),u_{i+1}=u_i+h[f(x_i,u_i)+f(x_{i+1},u^*_{i+1})]/2.(\ \ 3)$$

Бу усуллар Рунге-Кутта усуллари группасига киради.Умумий Рунге-Кутта усули қуйидагича .Тақрибий ечим

$$u(x+h)\approx z_s(h)=u(x)+\sum_{i=1}^{q}A_ik_i(h) \qquad (\ \ 4)$$

кўринишда қидирилади, бу ерда

k_1(h)=hf(x,u) , k_2(h)=hf(x+ α_2h,h+ $\beta_{21}k_1$(h)) ,...,

$$k_q(h)=hf(x+\alpha_qh,h+\beta_{q1}k_1(h)+...+\beta_{qq-1}k_{q-1}(h)),\alpha_2,...,\alpha_q,A_1,...,A_q,\beta_{ij},0<j<i\le q,$$

коэффициетлар қуйида танлаб олинади. Тақрибий ечим хатолигини $\varphi(h)=u(x+h)-z(h)$ дейлик. Фараз қиламизки, f(x,u) етарли даражада силлиқ функцияки, $\varphi^{(1)}(h),......,\varphi^{(s+1)}(h)$ мавжуд ва α_i,A_i,β_{ij} шундай танлаб олинадики, $\varphi(0)=...=\varphi^s(0)=0$ Уҳолда қолдик учун

$$\varphi(h)=\sum_{i=o}^{s}\varphi^i(0)h^i/i!+\varphi^{s+1}(\vartheta h)h^{s+1}/(s+1)!=\varphi^{s+1}(h\vartheta)h^{s+1}/(s+1)!$$

кўринишни оламиз. У ҳолда $u(x+h)\approx z_s(h)$ тақрибий формула s-тартибли бўлади.Конкрет ҳолларни кўриб чиқамиз.

1.1. *q=1*.Эйлер усули. Равшанки,

$$\varphi(h)=u(x+h)-u(x)-A_1hf(x,u),\ \varphi(0)=0,\varphi'(0)=f(x,u)(1-A_1),\quad \varphi''(h)=u''(x+\vartheta h).$$

Демак, $\varphi(h)=u''(x+\vartheta h)h^2/2,\qquad \varphi'(0)=0$ тенглик барча *f(x,u)* функциялар учун $A_1=1$ бўлгандагина бажарилади.Бу Эйлер усулига мос келади, чунки

$$u(x+h)=z(h)+\varphi(h)=u(x)+hf(x,u)+u''(x+\vartheta h)h^2/2.$$

1.2.q=2. Такомиллашган Эйлер ва прогноз-коррекция усули.

Бу ҳолда $u^{(1)}=f_x(x,u)+f_u(x,u)f(x,u)$ эканлигини назарда тутиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз

$$\varphi(h)=u(x+h)-u(x)-A_1hf(x,u)-A_2hf(x+\alpha_2h,u+\beta_{21}hf(x,u))=$$
$$=u(x+h)-u(x)-A_1hf(x,u)-A_2hf(x_1,u_1),$$
бу ердан
$$\varphi'(h)=u'(x+h)-u(x)-A_1f(x,u)-A_2f(x_1,u_1)-A_2h(\alpha_2f_x(x_1,u_1)+\beta_{21}f_u(x_1,u_1),$$
$$x_1=x+\alpha_2h,\quad u_1=u+\beta_{21}hf(x,u).$$
$$\varphi''(h)=u''(x+h)-2A_2(\alpha_2f_x(x_1,u_1)+\beta_{21}f_u(x_1,u_1)f(x,u))-$$
$$-2A_2(\alpha_2^{\,2}f_{xx}(x_1,u_1)+2\alpha_2\beta_{21}f_{xu}(x_1,u_1)f(x,u)+\beta^2{}_{21}f_{uu}(x_1,u_1)(f(x,u))^2),$$
$$\varphi'''(h)=u''(x+h)-3A_2(\alpha^2{}_2f_{xx}(x_1,u_1)+2\alpha_2\beta_{21}f_{xu}(x_1,u_1)f(x,u)+$$
$$+\beta_{21}^{\,2}f_{uu}(x_1,u_1)(f(x,u))^2)+0(h)$$
Дифференциал тенгламадан $u'=f, u''=f_x+f_uf, u'''=f_{xx}+2f_{xu}f+f_{uu}f^2+f_uu''$, сабабли
$$\begin{aligned}&\varphi(0)=u-u=0,\qquad \varphi'(0)=(1-A_1-A_2)f(x,u),\\&\varphi''(0)=(1-2A_2\alpha_2)f_x(x,u)+(1-2A_2\beta_{21})f_u(x,u)f(x,u),\\&\varphi'''(0)=(1-3A_2\alpha_2^{\,2})f_x(x,u)+(2-6A_2\alpha_2\beta_{21})f_u(x,u)f(x,u)+\\&(1-3A_2\beta^2{}_{21})f_{uu}(x,u)f(x,u)^2+f_u(x,u)u''(x)\end{aligned}\qquad(5)$$
тенгликларни оламиз.

Агар $A_1+A_2=1$ бўлса, $\varphi'(0)=0$ барча *f(x,u)* лар учун бажарилади, $\varphi''(0)=0$ эса $1-2A_2\alpha_2=0,\ 1-2A_2\beta_{21}=0$ бўлса барча f(x,u) лар учун бажарилади.

У ҳолда φ(0)= φ‘(0)= φ’’(0)=0 бўлиб қолади. Қолдиқ ҳад учун
$$\varphi(h)=\varphi^3(\vartheta h)h^3/3! \qquad (6)$$
кўринишида оламиз.

Энди, агар $A_1=0$, $A_2=1$ десак $\alpha_2=\beta_{21}=1/2$ бўлади ва
$$u(x+h)\approx z(h)=u(x)+hf(x+h/2,h(x)+hf(x,u)/2)$$
муносабатни оламиз. Бу такомиллашган Эйлер формуласини беради.

Агар $A_1=A_2=1/2$ десак $\alpha_2=\beta_{21}=1$ ва
$$u(x+h)\approx z(h)=u(x)+h[f(x,u)+f(x+h,u+hf(x,u)]/2$$
муносабатни оламиз. Бу прогноз- коррекция усулига мос келади.

2. Тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули

q=s=4 учун энг кўп қўлланадиган Рунге-Кутта усулига келамиз.
$$u(x+h)\approx z(h)=u(x)+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6,$$
$$k_1=hf(x,u),\qquad k_2=h(x+h/2,u+k_1/2),$$
$$k_3=hf(x+h/2,u+k_2/2),\qquad k_4=hf(x+h,u+k_3),$$
ҳисоблаш формулалари қуйидагича ёзилади.
$$\begin{aligned}&u_{i+1}=u_1+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6,\\&k_1=hf(x_i,u_i),\qquad k_2=h(x_i+h/2,u_i+k_1/2),\\&k_3=hf(x_i+h/2,u_i+k_2/2),\qquad k_4=hf(x_i+h,u_i+k_3),\end{aligned}\qquad(7)$$
Равшанки, $\varphi(x)=u(x_i)-u_i=h^5u(5)(\vartheta h)/5!$ (8)

3. Mathcad тилидаги дастур.

Рунге-Кутта усули

Оралиқ, нуқталар $a:=0\ b:=0\ n:=10\ h:=(b-a)/n\ Origin:=0\ i:=0..n\ x_i:=a+ih$

ОДТ да ўнг томон, бошланғич шарт $f(x,y):=2.2/(x^2+y^2+2.6)\ \ y_0:=0$

RK усул коэффициентлари $k1_i:=hf(x_i,y_i)\ \ k2_i:=hf(x_i+h/2,y_i+hk1_i/2)$

RK усул коэффициентлари $k3_i := hf(x_i + h/2, y_i + hk2_i/2)$ $k4_i := hf(x_i + h, y_i + hk3_i)$

RK усул $yRK_{i+1} := y_i + (k1_i + 2k2_i + 2k3_i + k4_i)/6$

Программа асосида экспериментлар ўтказамиз: a,b,n,u0=?0 1 10 0

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
u	0.0003	0.0027	0.0090	0.0214	0.0418	0.0724	0.1157	0.1741	0.2509	0.3502	0.4776

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

Энди Рунге-Кутта усилини иккита тенглама учун қараймиз. Коментарий – текст-изоҳ ишлатмай ёзамиз:

$a := 0$ $b := 0$ $n := 10$ $h := (b-a)/n$ $Origin := 0$ $i := 0..n$ $x_i := a + ih$ оралиқ, нуқталар

$f(x,u,v) := \cos(2.5*u) + v$ $g(x,u,v) := \sin(x + 2.5*u) + v$ $u_0 := u0$ $v_0 := v0$

$k1_i := hf(x_i, u_i, v_i)$ $l1_i := hg(x_i, u_i, v_i)$

$k2_i := hf(x_i + h/2, u_i + hk1_i/2, v_i + hl1_i/2)$ $l2_i := hg(x_i + h/2, u_i + hk1_i/2, v_i + hl1_i/2)$

$k3_i := hf(x_i + h/2, u_i + h21_i/2, v_i + hl2_i/2)$ $l3_i := hg(x_i + h/2, u_i + hk2_i/2, v_i + hl2_i/2)$

$k4_i := hf(x_i + h, u_i + hk3_i, v_i + hl3_i)$ $l4_i := hg(x_i + h, u_i + hk3_i, v_i + hl3_i)$

$uRK_{i+1} := uRK_i + (k1_i + 2k2_i + 2k3_i + k4_i)/6$ $vRK_{i+1} := vRK_i + (l1_i + 2l2_i + 2l3_i + l4_i)/6$

Программа асосида экспериментлар ўтказамиз:a,b,n,u0,v0=0 1 10 0 0,

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
u	0.1157	0.2257	0.3274	0.4215	0.5103	0.5952	0.6754	0.7489	0.8147	0.8726	0.9235
v	0.4215	0.0627	0.1520	0.2858	0.4532	0.6266	0.7774	0.8937	0.9780	1.0378	1.0802

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Рунге -Кутта усуллари группасига қайси усуллар киради?
2. Такомиллашган Эйлер усули нечанчи тартибли усул?
3. Прогноз ва коррекция усули нечанчи тартибли усул? Мундарижага

2.4. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДТ УЧУН ЧЕГАРА МАСАЛАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ. КОЛЛОКАЦИЯ ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР УСУЛЛАРИ

Асосий тушунчалар: *ОДТ учун чегара масала, чегара шартлар, тақрибий ечиш усуллари, тақрибий аналитик ва сонли усуллар, базис функциялар, четланиш, энг кичик квадратлар усули.*

Асосий формулалар:

1. Ҳисоблаш усуллари ёрдамида масала ечиш этаплари

Математик модель, аниқ ечим, тақрибий ечим, ечиш усули, хатолик.

2.ОДТ учун чегара масала. $Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\ \ a \le x \le b,$

$l_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_0$, $l_1 u \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1$.

3. Ҳисоблаш математикасининг тақрибий усуллари

4.Коллокация усули: $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$, $\sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j(x_i) = f(x_i) - L\varphi_0(x_i)$

5.Энг кичик квадратлар усули: $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, L\varphi_i) = (f - L\varphi_0, L\varphi_i),\ \ (f,g) = \int_b^a f(x)g(x)dx, \qquad i, j = 1,...n$$

6..Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Ҳисолаш усуллари ёрдамида масала ечиш этаплари

Ҳисоблаш математикаси ёрдамида бирор-бир масалани ечиш учун қуйидаги саволларга аниқ жавоб бериши керак.

1) Масаланинг математик модели нима ? . Аниқ ечим қандай функция бўлиши керак?

2) Тақрибий ечим нима? (Функциями ?, Жадвалми ?)

3) Тақрибий ечим қандай усул билан топилади?

4) Тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги фарқ , яъни ҳатолик қандай баҳоланади?

2. ОДТ учун чегара масала

Иккинчи тартибли ОДТ учун чегара масала қуйидагича берилади:

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$l_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_0\, , l_1 u \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1 \tag{2}$$

чегара шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилади. Бу ерда p, q, f∈C[a,b]-[a,b] да берилган узлуксиз функциялар, α_i, β_i, γ_i-берилган сонлар, улар бараварига нолга тенг эмас, яъни чегара шартлар доим маънога эга.

Коши масаласидан фарқли ўлароқ (1),(2) масаланинг ечими мавжуд, лекин ягона эмас, ёки мавжуд эмас бўлиши мумкин. Бу масала ягона ечимга эга бўлиши учун мос бир жинсли тенглама ($f=\gamma_0,\gamma_1=0$) фақат ноль ечимга эга бўлиши керак.

(1), (2) масаланинг аниқ ечимини доимо аниқ топиб бўлавермайди, чунки дифференциал тенгламани ечиш унинг ҳадларини интеграллаш демакдир.Масалан, ечим масаланинг Грин G(x,y) функцияси орқали

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y) dy$$

кўринишда ёзилади. Ундан ташқари , агар тенглама ночизиқ бўлса, масалан, f=f(x,u), масала яна мураккблашади. Шунинг учун, дифференциал чегара масала тақрибий ечилади. Тақрибий усуллар тақрибий аналитик (Ритц, Галеркин, коллокация, энг кичик квадратлар) ва сонли (чекли айирмалар) усулларга бўлинади.

3. Ҳисоблаш математикасининг тақрибий усуллари.

Ҳисоблаш математикасининг тақрибий усуллари 2 гуруҳга бўлинади.

1) Тақрибий аналитик усуллар.

2) Сонли усуллар.

Тақрибий аналитик усулларда тақрибий ечим тақрибий аналитик кўринишда,яъни функция кўринишида топилади.

Сонли усулларда эса тақрибий ечим жадвал кўринишида топилади . Бу тақрибий жадвал аниқ ечимнинг тақрибий қийматларидан иборат бўлади.

Бу усуллар ўртасида боғланиш интерполяция ёрдамида амалга оширилади.

Масалан: Тақрибий аналитик ечим жадвалини ҳисоблаш мумкин. Жадвалдан интерполяция асосида тақрибий аналитик кўринишини топиш мумкин.

Тақрибий аналитик усулларга: вариацион-прекцион, коллокация, Галёркин-Ритц усуллари киради.

Сонли усулларга : чекли айирмали усуллар, айирмали схемалар киради.(ОДТ учун Рунге -Кутта ,Эйлер, такомиллашган Эйлер усуллари).

(1),(2) масаланинг тақрибий аналитик ечимини топиш учун [a,b] да аниқланган $\{\varphi_i(x),\ \ i=0,1,...,n,...,\}$ базис функциялар кетма-кетлигини топиш талаб этиладики, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\{\varphi_i(x),\ \ i=0,1,...,n,...,\}$ [a,b] да иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга;

2) $\varphi_0(x)$ функция (2) чегара шартларни қаноатлантиради;

3) $\{\varphi_i(x),\ \ i=0,1,...,n,...,\}$ [a,b] да эркли тўлиқ функциялар системасини ташкил этади, яъни агар бирор функция ϕ (x) учун

$$\int_a^b \phi(x)\varphi_i(x)dx = 0 \qquad ,i=1,2,......$$

шартлар бажарилса ϕ (x)=0 тенглик келиб чиқиши керак.

Маълумки, $\{x^i, x\in[a,b]\}$, $\{\cos(x^i),\sin(x^i),\ \ x\in[0,2\pi]\}$ функциялар тўлиқ функциялар системасини ташкил этади. Бу Вейерштрасснинг узлуксиз функцияларни кўпҳадлар билан аппроксимация қилиш хақидаги теоремасидан келиб чиқади.

Базис функциялар танлангач тақрибий аналитик ечим қуйидаги кўринишда изланади:

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x) \qquad (3)$$

Танлаб олинганга мувофиқ тақрибий аналитик ечим $u_n(x)$ (2) чегара шартларни қаноатлантиради: $l_0u_n(x)=\gamma_0, \qquad l_1u_n=\gamma_1.$

Иккита муҳим таъриф киритамиз:

Таъриф: $r_n(x)=u(x)-u_n(x)$ (2.4.4) айирма $u_n(x)$ тақрибий ечимнинг хатолиги дейилади.

Равшанки, Lu(x)=f(x) .(4) дан $u(x)=u_n(x)+r_n(x)$.

Бу тенгликни тенгламага қўямиз: $Lu(x)=Lu_n(x)+Lr_n(x)=f(x)$

Бу ердан $Lu_n(x)-f(x)=-Lr_n(x)$. $Lu_n(x)-f(x)=-Lr_n(x)$

айирма $Lu(x)-f(x)=0$ тенгламадан четланиш дейилади. Четланишни $\phi(x,c_1,...c_n)$ деб белгилаймиз:

$$\phi(x,c_1,...,c_n)=Lu_n(x)-f(x)=L\phi_0(x)-(f(x)-\sum_{j=1}^{n}c_jL\phi_j(x)) \qquad (\quad 5)$$

Таъриф: Агар $c_1,...,c_n$ параметрларнинг баъзи бир қийматларида $\phi(x,c_1,...c_n)=0$ бўлса, $u_n(x)$ (1), (2) масала ечими бўлади ва четланиш $\phi_n(x)=Lu_n(x)-f(x)$ тақрибий ечимнинг аниқ ечимга яқинлик даражасини кўрсатади, лекин тақрибий ечим хатолигига фарқ қилади. Агар f(x)=Lu(x) лигини эътиборга олсак четланишни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\phi(x)=Lu_n(x)-f(x)=L(u_n(x)-u(x))=-Lr_n(x). \quad (6)$$

(4) ва (6) дан тақрибий ечим хатолиги билан четланиш орасидаги фарқ яққол кўриниб турибди. Улар орасида боғлиқлик ҳам бор. Равшанки,

$$\phi_n(x)=-Lr_n(x) \qquad (7)$$

Демак, тақрибий ечим хатолиги (7) дифференциал тенглама ечими экан. Чегара шартлар $r_n(x)$ учун бир жинсли: $l_0 r_n(x)=l_1 r_n(x)=0.$

Турли тақрибий аналитик усу ллар тақрибий ечим коэффициентларини бир биридан танлаб олиш билан фарқ қилади.

3. Коллокация усулида (a,b) интервалдан n та нуқта $x_1,...,x_n$ танлаб олинади, улар коллокация нуқталари дейилади ва коллокация нуқталарида четланиш нолга айланади деб талаб қилинади:

$$\phi_n(x_i)=0, \qquad i=1.2.3....n \quad (8)$$

$n\to\infty$ да бу тенгликлар $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)=0$ муносабатни таъминлайди. (5) дан фойдаланиб бу тенгликларни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j L_j \varphi_j(x_i)=f(x_i)-L\varphi_0(x_i) \quad (9)$$

ёки батафсилроқ ёзсак:

$$\begin{cases} c_1L\varphi_1(x_1)+c_2L\varphi_2(x_1)+.........+c_nL\varphi_n(x_1)=f(x_1)-L\varphi_0(x_1), \\ c_1L\varphi_1(x_2)+c_2L\varphi_2(x_2)+.........+c_nL\varphi_n(x_2)=f(x_2)-L\varphi_0(x_2), \\ c_1L\varphi_1(x_3)+c_2L\varphi_2(x_3)+.........+c_nL\varphi_n(x_3)=f(x_3)-L\varphi_0(x_3), \\ .... \\ c_1L\varphi_1(x_n)+c_2L\varphi_2(x_n)+.........+c_nL\varphi_n(x_n)=f(x_n)-L\varphi_0(x_n), \end{cases} \qquad (10)$$

Агар (10) система ечимга эга бўлса, тақрибий аналитик ечим (3) топилади.

4. Энг кичик квадратлар усулида четланиш квадратидан олинган интеграл $c_1,...,c_n$ ларда энг кичик қиймат қабул қилиш талаб қилинади, яъни

$$I=\int_a^b[\phi_n(x)]^2dx=\int_a^b[\phi_n(x,c_1,c_2......,c_n)]^2dx$$

$$\min_{\{c_i\}} I(c_1,c_2,.....c_n)=I(c_1^{\,0},...,c_n^{\,0})$$

бўлиши талаб қилинади. Минимумга эришишнинг зарурий шарти $dI/dc_i=0, \quad i=1,...,n$ ни талаб қилиб ушбу системага келамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(L\varphi_j,L\varphi_i)=(f-L\varphi_0,L\varphi_i), \qquad i=1,2,....n \qquad (11)$$

бу ерда

$$(L\varphi_j,L\varphi_i)=\int_b^a L\varphi_j(x)L\varphi_i(x)dx, \quad i,j=1,...n$$

Агар $L\varphi_j,...,L\varphi_n$ функциялар чизиқли эркли бўлса (11) ягона ечимга эга.

Амалий жиҳатдан (9) осонроқ ечилади, (11) эса қийинроқ ечилади, чунки интегралларни ҳисоблаш зарур.

Мисол 1. $Lu = u'' + u = -x,\quad 0 \le x \le 1,\ u(0)=0,\ u(1)=0,$ масалани қарайлик, аниқ ечим $u(x) = \sin(x)/\sin(1) - x$.

Ечиш. Равшанки, $\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_i(x) = x^i(1-x), \qquad i = 1,2,...,n$ базис ечим бўла олади. n=2 дейлик. У ҳолда

$$\varphi_1(x) = x(1-x) = x - x^2, \qquad \varphi_2(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3,$$
$$u_1(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x),$$
$$L\varphi_1 = \varphi_1'' + \varphi_1 = 2 + x - x^2,$$
$$L\varphi_2 = \varphi_2'' + \varphi_2 = 2 - 6x - x^2 - x^3, \qquad L\varphi_0 = 0$$

коллокация нуқталари сифатида $x_1 = 1/4, \quad x_2 = 3/4$ ларни оламиз.

Шунинг учун

$$L\varphi_1(x_1) = -29/16,\ L\varphi_2(x_1) = 5/16,\ f(x_1) = -1/4$$
$$L\varphi_1(x_2) = -29/16,\ L\varphi_2(x_2) = -43/16,\ f(x_2) = -3/4$$

натижада қуйидаги системага келамиз:

$$\begin{cases} -29/16c_1 + 5/16c_2 = -1/4 \\ -29/16c_1 - 43/16c_2 = -3/4 \end{cases} \quad ёки \quad \begin{cases} -29c_1 + 5c_2 = -64 \\ -29c_1 - 43c_2 = -12 \end{cases}$$

Буерда $c_1 = -19.6 - 29, \quad c_2 = -1.16$, яъни $u_2(x) = -19/183x(1-x) - 1/16x^2(1-x).$

Коллокация, энг кичик квадратлар усулини қўллаш учун қуйидаги алгоритмга мурожаат мурожаат қилиш мумкин:

1) Кириш ,
2) нуқталар сони n ни ва тақрибий ечим қиймати ҳисобланадиган нуқтани киритиш,
3) коллокация нуқталари $\{x_i\}$,i=1,...,n, ни киритиш,
4) аниқловчи тенгламалар системаси коэффицентларини киритиш $a_{ij}=L\varphi_j(x_i), a_{in+1}=f(x_i)- L\varphi_0(x_i)$,i,j=1,...,n,
5) Гаусс қисм программаси га мурожаат қилиб ноъмалум коэффицентларни ҳисоблаш.
6) $u_n(x)$ ни ҳисоблаш
7) $c_1,...,c_n,u_n(x)$ ларни чиқариш.
8) Тамом.

Коллакация усулининг MathCAD даги дастури

$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t) \qquad p(t) := \sin(t)\ q(t) := \cos(t)\ f(t) := 6t + 3t^2\sin(t) + t^3\cos(t)$

Оралиқ, параметрлар $\quad \pi$:=3.14 φ_0(t)=1 n:=5 i:=1..n j:=1..5 t_0:=0 t_n:=1

Қадам, базис функция $\quad$ h:=(t_n-t_0)/n φ(j,t):=sin(j* π*t) i:=1..n Origin:=0

ЧАТС элементлари $\quad \psi(j,t) := \varphi''(j,t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t)$

$$\chi(t) := f(t) - \varphi_0''(t) - p(t)\varphi_0'(t) - q(t)\varphi_0(t) \qquad a_{i,j} := \psi(j,t_i) \quad b_i := \chi(t_t)$$

A матрица b ўнг томон $\quad A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$

Коэффициентлар $c := A^{-1}b \quad c := \begin{bmatrix} -0.381 & 0.058 & -0.011 & 0.0004666 & -0.0000987 \end{bmatrix}^T$

Ечим $u(t) := \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{5} c_j \varphi(j,t)$

Қийматлар $u(0.2) = 0.013$ $u(0.4) = 0.056$ $u(0.6) = 0.067$ $u(0.8) = 0.034$

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

5. Назарий саволлар ва топшириқлар.

1.ОДТ учун чегара масалаларини ечиш усуллари қайси группаларга бўлинади?
2.Тақрибий аналитик усулларни санаб беринг.
3.Базис функциялар, тулиқ функциялар системаси нима?
4.Тақрибий ечим хатолиги нима?
5.Тенгламадан четланиш нима? Четланиш билан қандай боғланган?
6.Коллокация усули нима?
7.Энг кичик квадратлар усули нима?

Мундарижага

2.5. ГАЛЁРКИН ВА РИТЦ УСУЛЛАРИ

Асосий тушунчалар: *Базис функциялар, четланиш, тақрибий ечим хатолиги, Галёркин усули, Ритц усули, вариацион -проекцион усуллар.*
Асосий формулалар*:*

1.Галеркин усули: $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_i) = (f - L\varphi_0, \varphi_i), \ \ (f, g) = \int_b^a f(x) g(x) dx, \quad i, j = 1,...n$$

2.Ритц усули: $F(u) = (Lu, u) - 2(u, f) = \int_a^b u(x) Lu(x) dx - 2\int_a^b u(x) f(x) dx \to \min$**,**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_i) = (f - L\varphi_0, \varphi_i),$$

3. Базис фунцияларни танлаш:

1) 1-тур чегара шартлар: u (a)=A, u(b)=B , $\varphi_0^1(x) = A + (B - A)(x - a)/(b - a)$,

а) $\varphi_i(x) = (x - a)^i (b - x), i \ge 1$; б) $\varphi_i(x) = \sin(\dfrac{i(x - a)}{b - a}\pi)$, $\quad i \ge 1.$

2) ***2-тур чегара шартлар****:* u′(a)=A, u′(b)=B ,

$\varphi_0^2(x) = \int \varphi_0^1(x) dx = Ax + (B - A)(x - a)^2 / (2(b - a)) + C$,

а) $\varphi_i(x) = (x - a)^{i+1} (b - x)^2, \ i \ge 1;$ б) $\varphi_i(x) = Cos(\dfrac{i(x - a)}{b - a}\pi), \quad i \ge 1$

3) **3*-тур чегара шартлар****:* $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \ \ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B$,

$\varphi_0(x) = \delta + \gamma(x - a) \Rightarrow \alpha_0 \delta + \alpha_1 \gamma = A, \ \ \beta_0 \delta + (\beta_0 (b - a) + \beta_1)\gamma = B,$

a) $\varphi_i(x) = (x - a)^{i+1} (b - x)^2$, $i \ge 1$; *b)* $\varphi_i(x) = (x - a)^{i+1} [\gamma_i + (x - a)], \ i \ge 1.$

4.Назарий саволлар ва топшириклар

1. Галёркин усули

Тарихан аввал Ритц усули, сўнг Галёркин усули пайдо бўлган. Кейин улар вариацион-проекцион усуллар группаси ёки Галёркин усуллар группаси деб атала бошланди. Галёркин усулида ҳам Ритц усулида ҳам тақрибий аналитик ечим қуйидаги кўринишда изланади:

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x), \tag{1}$$

бу ерда $\{\varphi_j(x)\}$ базис функциялар,

$$l_0\varphi_0(x) = \gamma_0, \quad l_1\varphi_0(x) = \gamma_1, \quad l_0\varphi_i(x) = l_i\varphi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \ .$$

Четланиш ва тақрибий ечим хатолигини киритамиз:

$$\phi_n(x) = \phi_n(x, c_1, c_2, .., c_n) = Lu_n(x) - f(x) = L\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j(x) - f(x); \tag{2}$$

$$r_n(x) = r_n(x, c_1, c_2, .., c_n) = u(x) - u_n(x) \tag{3}$$

Галеркин усулида четланиш $\phi_n(x)$ базис функцияларга ортогонал қилиб олинади:

$$\int_a^b \phi_n(x)\varphi_i(x)dx = 0, \qquad i = 1,2,...,n. \qquad (4)$$

ёки батафсилроқ

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{c_j}(\mathrm{L}\varphi_j,\varphi_i) = (f - L\varphi_0,\varphi_i), \qquad i = 1,...n. \qquad (5)$$

бу ерда яна (f,g)-скаляр кўпайтма

$$(L\varphi_j,\varphi_i) = \int_a^b L\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx, \quad i, j = 1,..n\,.$$

Базис функцияларнинг тўлиқлиги четланишни тобора нолга интилишига сабаб бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0 \qquad (6)$$

яъни $u_n(x),\ n \to \infty$ да тобора Lu=f тенгламани қанотлантириб боради.

Мисол. Яна ўша мисолни қарайлик

$$Lu = u'' + u = -x, \quad 0 \le x \le l,\ u(0) = 0,\ u(l) = 0\,.$$

n=2 дейлик. У ҳолда $c_1,\ c_2$ коэффицентлар

$$c_1(L\varphi_1,\varphi_1) + c_2(L\varphi_2,\varphi_1) = (f,\varphi_1), c_1(L\varphi_1,\varphi_2) + c_2(L\varphi_2,\varphi_2) = (f,\varphi_2),$$

системадан топилади. Равшанки,

$$L(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 (-2 + x(1-x))x(1-x)dx, \quad L(\varphi_2,\varphi_1) = \int_0^1 (2 - 6x + x^2(1-x))x(1-x)dx$$

$$L(\varphi_1,\varphi_2) = \int_0^1 (-2 + x(1-x))x^2(1-x)dx,\ L(\varphi_2,\varphi_1) = \int_0^1 -(2 + 6x + xL2(1-x))x^2(1-x)dx$$

$$(f,\varphi_1) = -\int_0^1 x^2(1-x)dx, \quad (f,\varphi_2) = \int_0^1 x^3(1-x)dx$$

Интегралларни ҳисоблаб қуйидаги системага келамиз:

$$3c_1/10 + 3c_2 = 1/12, \ \ 3c_1/20 + 13c_2/105 = 1/20.$$

Бу системанинг ечими $c_1 = 71/369, \quad c_2 = 7/41$

Демак, тақрибий ечим қуйидагича бўлар экан

$$u_2(x) = x(1-x)(71/369 + 7x/41).$$

2.Ритц усули.

Ушбу интегрални қараймиз:

$$F(u) = (Lu,u) - 2(u,f) = \int_a^b u(x)Lu(x)dx - 2\int_a^b u(x)f(x)dx$$

Афсуски**,** Ритц усулида операторга янги шарт қўйиш керак. Масалан**,** оператор симметрик ва мусбат аниқланган бўлиши керак:

(Lu,v)=(u,Lv), (Lu,u) A(u,u),c>0, u,v.

Ана шундай ҳолдагина Ритц усули тенгламалари системаси Галеркин усули системаси билан устма-уст тушади. Лекин Ритц усули назарий жиҳатдан қулай яқинлашиш имкониятларига эга.

Теорема 1.Агар v(x) функция Lv=f(x) тенглама ечими бўлса,у F(u) функционалга энг кичик қиймат беради (ва аксинча,минимал функция тенглама ечими бўлади).

Исбот. w=v+u янги функцияни қарайлик.

Равшанки,

$$F(w) = (Lw, w) - 2(w, f) = F(v) + 2(Lv - f, u) + (Lu, u) = F(v) + (Lu, u) \geq F(v)$$

Демак, *F(v)* миқдор *F(w)* лар ичида энг кичик экан. Бу теорема квадратик функционалнинг минимуми ҳақидаги теорема дейилади.

Теорема натижаси сифатида *Lu=f(x)* тенглама ечимини (1) кўринишда излаб номаълум коэффитсиентларни $F(u_n)$ функционалга энг кичик қиймат бериш шартидан топилади (теореманинг акси ҳам ўринли,уни мустақил исботланг). Равшанки,

$$F(u_n) = (Lu_n, u_n) - 2(u_n, f) = (L\varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j, \varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j) - 2(\varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j, f) =$$

$$= (L\varphi_0, \varphi_0) + \sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_0) + \sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_0, \varphi_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_j c_i (L\varphi_j, \varphi_i)) - 2(\varphi_0, f) - 2\sum_{j=1}^{n} c_j (\varphi_j, f),$$

$$dF(u_n)/dc_i = 2\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_i) - 2(L\varphi_0 - f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2........n.$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_i) = (f - L\varphi_0, \varphi_i), \; i = 1, ..., n$$

Шундай қилиб Ритц тенгламалар системаси $(Lu, u) \geq c(u, u)$, $(Lu, v) = (u, Lv)$ шартларда Галеркин тенгламалар системаси билан устма уст тушар экан.

Галеркин усулида (Lu,v)=(u,Lv), (Lu,u)≥c(u,u), шартлар талаб қилинмайди.

3. Базис фунцияларни танлаш

1-тур чегара шартлар: $u(a) = A, u(b) = B$.

$$\varphi_0(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) \qquad (\varphi_0(a) = A, \varphi_0(b) = B)$$

$$a) \;\; \varphi_i(x) = (x - a)^i (b - x), i \geq 1, \; \varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0.$$

$$b) \;\; \varphi_i(x) = \sin(\frac{i(x - a)}{b - a}\pi), \quad i \geq 1 \qquad \varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0.$$

2-тур чегара шартлар: $u'(a) = A, u'(b) = B$

$$\varphi_0(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) \quad ,$$

$$\varphi_0(x) = \int \varphi_0(x)dx = Ax + \frac{B - A}{2(b - a)}(x - a)^2 + C \, , \; (\varphi_0'(a) = A, \;\; \varphi_0'(b) = B).$$

$$a) \;\; \varphi_i(x) = (x - a)^{i+1}(b - x)^2, \;\; i \geq 1$$

$$\varphi_i'(x) = (i + 1)(x - a)^i (b - x)^2 + (x - a)^{i+1}(-1) \cdot 2 \cdot (b - x), \qquad \varphi_i'(a) = \varphi_i'(b) = 0.$$

$$b) \;\; \varphi_i(x) = Cos(\frac{i(x - a)}{b - a}\pi), \quad i \geq 1, \quad (\varphi_i'(x) = -\frac{i\pi}{b - a} Sin(\frac{i(x - a)}{b - a}\pi, \;\; \varphi_i'(a) = \varphi_i'(b) = 0.$$

3-тур чегара шартлар: $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \;\; \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B$

$$\varphi_0(x)=\delta+\gamma(x-a) => \alpha_0\delta+\alpha_1\gamma=A,\ \beta_0\delta+(\beta_0(b-a)+\beta_1)\gamma=B,$$

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ \beta_0 & \beta_0(b-a)+\beta_1\end{vmatrix}\neq 0, D_\delta=\begin{vmatrix}\alpha_0 & A\\ \beta_0 & B\end{vmatrix}, D_\gamma=\begin{vmatrix}A & \alpha_1\\ B & \beta_0(b-a)+\beta_1\end{vmatrix},$$

$$\varphi_0(x)=\delta+\gamma(x-a)=\frac{D_\delta}{D}+\frac{D_\gamma}{D}(x-a)$$

$a)$ $\varphi_i(x)=(x-a)^{i+1}(b-x)^2,\ i\geq 1\ \ (\varphi_i(a)=\varphi_i'(a)=\varphi_i(b)=\varphi_i'(b)=0)$

$b)$ $\varphi_i(x)=\gamma_i(x-a)^{i+1}+(x-a)^{i+2}=(x-a)^{i+1}[\gamma_i+(x-a)],\ i\geq 1.$

$\varphi_i'(a)=\varphi_i'(a)=0\ => \alpha_0\varphi_i(a)+\alpha_1\varphi_i'(a)=0.\ \varphi_i'(x)=(i+1)\gamma_i(x-a)^i+(i+2)(x-a)^{i+1}$

$\beta_0\varphi_i(b)+\beta_1\varphi_i'(b)\ => \beta_0[\gamma_i(b-a)^{i+1}+(b-a)^{i+2}]+\beta_1[(i+1)\gamma_i(b-a)^i+(i+2)(b-a)^{i+1}]=0$

$\beta_0[\gamma_i(b-a)+(b-a)^2]+\beta_1[\gamma_i(i+1)+(i+2)(b-a)]=0\quad =>$

$$\gamma_i=-\frac{\beta_0(b-a)^2+\beta_1(i+2)(b-a)}{\beta_0(b-a)+\beta_1(i+1)},\qquad i\geq 1.$$

Мисол:

$$x^4y''+x^6y'-x^5y=6-3x^3,\quad x\in[1,2]$$

$$y(1)=1,\ 3y(2)+y'(2)=0.5\quad (y=y(x)=\frac{1}{x^2})$$

Ечиш: 1) $\varphi_0(x)=\delta+\gamma x$

$\delta+\gamma=1,\ 3(\delta+2\gamma)+\gamma=0.5, => 3\delta+7\gamma=0.5,\ \ 3\delta+3\gamma=3\ =>$

$4\gamma=-2.5=-\frac{5}{2},\ \ \gamma=-\frac{5}{8},\ \ \delta=\frac{13}{8},\ \ \varphi_0(x)=\frac{13}{8}-\frac{5}{8}x,$

2) $\varphi_i(x)=(x-1)^{i+1}(2-x)^2,\ \ i\geq 1,\ \ \varphi_i(2)=0,$

$\varphi_i'(x)=(i+1)(x-1)^i(2-x)^2+(x-1)^{i+1}\cdot 2(-1)(2-x),\ \ \varphi_i'(2)=0,\ => 3\varphi_i(2)+\varphi_i'(2)=0$

3) $u_2(x)=\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$

3. Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Галеркин усулининг моҳияти нимада?
2. Ритц усулининг моҳияти нимада?
3. Қандай оператор симметрик дейилади?
4. Қандай оператолр мусбат аниқланган дейилади?
5. Қандай операторлар учун Ритц ва Галеркин усули бир хил.?
6. Квадратик функционалнинг минимуми ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

Мундарижага

Галёркин усулининг MathCAD даги дастури

$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t) \quad p(t) := \sin(t) \; q(t) := \cos(t) \; f(t) := 6t + 3t^2 \sin(t) + t^3 \cos(t)$

Оралиқ, параметрлар π:=3.14 φ_0(t)=1 n:=5 i:=1..n j:=1..5 t_0:=0 t_n:=1

Қадам, базис функция h:=(t_n-t_0)/n φ(j,t):=sin(j* π*t) i:=1..n Origin:=0

ЧАТС элементлари $\psi(j,t) := \varphi''(j,t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t)$

$\chi(t) := f(t) - \varphi_0''(t) - p(t)\varphi_0'(t) - q(t)\varphi_0(t) \quad a_{i,j} := \int_0^1 \varphi(i,t)\psi(j,t)dt \quad b_i := \int_0^1 \chi(t)\psi(i,t)dt$

A матрица, b ўнг томон $A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$

Коэф. -р $c := A^{-1}b \quad c := [-0.381 \quad 0.058 \quad -0.011 \quad 0.0004666 \quad -0.0000987]^T$

Ечим $u(t) := \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{5} c_j \varphi(j,t)$

Қийматлар $u(0.2) = 0.013 \quad u(0.4) = 0.062 \quad u(0.6) = 0.073 \quad u(0.8) = 0.042$

Энг кичик квадратлар усули

$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t) \quad p(t) := \sin(t) \; q(t) := \cos(t) \; f(t) := 6t + 3t^2 \sin(t) + t^3 \cos(t)$

Оралиқ, параметрлар π:=3.14 φ_0(t)=1 n:=5 i:=1..n j:=1..5 t_0:=0 t_n:=1

Қадам, базис функция h:=(t_n-t_0)/n φ(j,t):=sin(j* π*t) i:=1..n Origin:=0 *ЧАТС элементлари* $\psi(j,t) := \varphi''(j,t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t)$

$\chi(t) := f(t) - \varphi_0''(t) - p(t)\varphi_0'(t) - q(t)\varphi_0(t) \quad a_{i,j} := \int_0^1 \psi(i,t)\psi(j,t)dt \quad b_i := \int_0^1 \chi(t)\psi(i,t)dt$

A матрица, b ўнг томон $A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$

Коэф. -р $c := A^{-1}b \quad c := [-0.381 \quad 0.058 \quad -0.011 \quad 0.0004666 \quad -0.0000987]^T$

Ечим $u(t) := \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{5} c_j \varphi(j,t)$

Қийматлар $u(0.2) = 0.013 \quad u(0.4) = 0.063 \quad u(0.6) = 0.074 \quad u(0.8) = 0.043$

Усулларнинг қийматларини нуқталарда солиштирамиз:

Усуллар/Нуқталар	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Коллокация	-10E-3	0.013	0.035	0.056	0.056	0.067	0.054	0.034	0.015
Галёркин	-10E-3	0.013	0.038	0.062	0.074	0.073	0.061	0.042	0.021
ЭКК усули	-10E-3	0.013	0.039	0.063	0.075	0.074	0.062	0.043	0.022

Изоҳ. Коллокация, Галёркин, ЭКК усулларининг дастурини бирлаштириш мумкин**.** У ҳолда дастур анчагина компактлашади.

2.6.ОДТ УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР УСУЛИ (ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМА-ЧАС)

Асосий тушунчалар: *ЧАС, тўр, тўр функция, ЧАС ҳосил қилиш усули.*
Асосий формулалар:
1. ОДТ учун чекли айирмали схема (ЧАС):

$$\begin{cases} L_h u^h = \left\{ \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i,\ i = 0,...,n-1, \right\} = f^h \\ l_h u^h = \{l_{0h}u^h, l_{1h}u^h\} = \{\alpha_0 u_0 + \alpha_1 \dfrac{u_1 - u_0}{h}, \beta_0 u_n + \beta_1 \dfrac{u_n - u_{n-1}}{h}\} = g^h = \{\gamma_0, \gamma_1\}. \end{cases}$$

2. Чекли айирмали схемани ечишнинг прогонка (ҳайдаш) усули:

$$b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0, a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i,\ \ i = 1,...,n-1, a_n u_{n-1} + b_n u_n = d_n$$

$$\begin{cases} v_{i+1} = -c_i / [a_i v_i + b_i], w_{i+1} = [d_i - a_i u_i] / [a_i v_i + b_i],\ \ i = 1,...n-1, v_0 = w_0 = 0, \\ u_n = [d_n - a_n u_n] / [a_n v_n + b_n], u_i = v_{i+1} u_{i+1} + w_{i+1}, i = n-1, n-2, ..., 0. \end{cases}$$

3. Чели айирмали схемани ечиш учун прогонка усулининг дастури
4. Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Чекли айирмали схема ҳосил қилиш усули.

Иккинчи тартибли дифференциал тенглама учун чегара масалани қараймиз:

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a \le x \le b, \qquad (1)$$

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_0, \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1. \qquad (2)$$

(1), (2) ОДТ учун чегара масала дейилади. (1)-иккинчи тартибли чизиқли ОДТ, (2)-эса чегара шартлар дейилади. (D=[a,b] кесма дифференциал чегара масаланинг берилиш соҳаси, ($\overset{0}{D} = (a,b)$ -дифференцал тенгламанинг берилиш соҳаси, $\Gamma = \partial D = \{a,b\}$ - D-кесманинг чегара нуқталари)-чегара шартлар берилган соҳа.

Фараз қиламизки, p(x), q(x), f(x)$\in$C[D],D=[a,b].

(1), (2)-дифференциал тенглама ва чегара шартларни қаноатлантирувчи $u = u(x) \in C^2[a,b]$ функция чегара масаланинг (аниқ) ечими дейилади. Афсуски уни доимо аниқ топиб бўлмайди.Шунинг учун чегара масалани тақрибий ечамиз.

(1), (2) чегара масалани тақрибий ечиш учун уни мос чизиқли алгебрик тенгламалар системасига -чекли айирмали схемага-ЧАС га келтирамиз.

ЧАС тузиш технологияси қуйидагидан иборат:

1) D= [a,b] узлуксиз соҳада $D_h = \{x_i\} = \{x_i = a + ih,\ h = (b-a)/n, i = 0,1,...,n\}$, ***тўр ясаймиз. 2)Дифференциал узлуксиз масалани тўр нуқталарида ёзамиз. 3) узлуксиз ҳосилаларни чекли айирмали ҳосилалар билан алмаштирамиз. 4)Чексиз кичик миқдорларни ташлаб юбориб ЧАС-чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз 5)ЧАС ни ечиб ечимнинг тақрибий жадвалини топамиз.***

Тўрдагина аниқланган функцияни тўр функция дейилади ва f_h кўринишда белгиланади, масалан, $f_h(x) = [f(x_0),..., f(x_n)]$. $\bar{u}(x)$ аниқ ечимнинг $D_h = \{x_i\}$ тўрдаги қийматларини $\bar{u}_h(x)=[\bar{u}(x_i),i=0..n]= [\bar{u}_i,i=0..n]$ деб, белгилаймиз. Бирор $\bar{u}_h$ тўр функцияга яқинроқ ихтиерий тўр функцияни u_h деб белгилаймиз, масалан $u_h = [u_0,...,u_n] \in R^{n+1},\ u_i \approx \bar{u}(x_i),\ \ i = 0,1,...,n$.

Келишув: $\bar{u}_h(x)=[\bar{u}(x_i),i=0..n]= [\bar{u}_i,i=0..n]$ ***-аниқ ечимнинг тўр нуқталаридаги аниқ жадвали (аниқ ечим жадвали),*** $u_h = [u_0,...,u_n] \in R^{n+1}, u_i \approx \bar{u}(x_i),\ \ i = 0,1,...,n,$ ***эса***

унга яқин бўлган бирор тақрибий жадвал (тақрибий ечим жадвали). Одатда u_h тақрибий жадвални биз айирмали схемани ечиб топамиз.

Тўрда аниқланган барча $u_h(x), \quad f_h(x)$ функциялар тўпламини U_h, F_h деб белгилаймиз. $D_h = \{x_i\}$ тўрда яқинлик тушунчаси ушбу нормалар ёрдамида киритилади:

$$\| f_h \|_C = \max_{0\le i\le n} \left| f(x_i) \right|, \| f_h \|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} h[f(x_i)]^2}..$$

(1-2) масалага чекли айирмали схема тузиш учун уни тўр нуқталарида ёзамиз:

$$\bar{u}''(x_i) + p(x_i)\bar{u}'(x_i) + q(x_i)\bar{u}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, ..., n-1, \qquad (3)$$

$$\alpha_0\bar{u}(x_0) + \alpha_1\bar{u}'(x_0) = \gamma_0, \beta_0\bar{u}(x_n) + \beta_1\bar{u}'(x_n) = \gamma_1 \qquad (4)$$

Афсуски, бу ердан $\bar{u}(x_i), \bar{u}'(x_i), \bar{u}''(x_i)$ ларни топиш мумкин эмас,бу ерда ноъмалумлар сони тенгламалар сонидан кўп, шунинг учун $\bar{u}'(x_i), \ \bar{u}''(x_i)$ ҳосилалар тақрибан $u(x_i)$ ларнинг комбинациялари билан алмаштирилади, яъни $\bar{u}'(x_i), \ \bar{u}''(x_i)$ ҳосилалар чекли айримали ҳосилалар билан алмаштирилади. Биз ушбу чекли айирмали ҳосилалар билан танишмиз $\Lambda_x^+ u(x_i)$, $\Lambda_x^- u(x_i)$, $\Lambda_x u(x_i)$, $\Lambda_x^r u(x_i)$, $\Lambda_x^l u(x_i)$, $\Lambda_{xx} u(x_i)$:

$$u'(x_i) = \Lambda_x^+ u(x_i) - \frac{h}{2} u''(\xi_1), \Lambda_x^+ u(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}, \quad (5)$$

$$u'(x_i) = \Lambda_x^- u(x_i) + \frac{h}{2} u''(\xi_2), \ \Lambda_x^- u(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}, \ (6)$$

$$u'(x_i) = \Lambda_x u(x_i) - \frac{u'''(\xi_3)}{6} h^2, \Lambda_x u(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}, \ (7)$$

$$u'(x_0) = \Lambda_x^r u(x_0) + \frac{u'''(\xi_4)}{3} h^2, \Lambda_x^r u(x_0) = \frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h}, \ (8)$$

$$u'(x_n) = \Lambda_x^l u(x_0) + \frac{u'''(\xi_5)}{3} h^2, \ \Lambda_x^l u(x_0) = \frac{u(x_{n-2}) - 4u(x_{n-1}) + 3u(x_n)}{2h}, \ (9)$$

$$u''(x_i) = \Lambda_{xx} u(x_i) - \frac{u''''(\xi_6)}{24} h^2, \Lambda_{xx} u(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}, \ (10)$$

Бу тенгламадан (5), (6), (9) ларнинг (3), (4) га қўямиз:

$$[\bar{u}(x_{i+1}) - 2\bar{u}(x_i) + \bar{u}(x_i)]/h^2 + p(x_i)[\bar{u}(x_{i+1}) - \bar{u}(x_{i-1})]/2h + q(x_i)\bar{u}(x_i) = f(x_i) + 0(h^2),$$

$$\{\alpha_0\bar{u}(x_0) + \alpha_1(\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_0))/h = \gamma_0(h) + 0(h), \ \beta_0 u(x_n) + \beta_1(\bar{u}(x_n) - \bar{u}(x_{n-1}))/h = \gamma_1 + 0(h).$$

Бу ердан ҳам $\{\bar{u}(x_i)\}$ қийматларини топиб бўлмайди, чунки номаълум чексиз кичик миқдорлар иштирок этаяпти, уларни ташлаб юборамиз, у ҳолда ҳосил бўлган тенгламалар системасини (ЧАС ни) энди $\bar{u}_h = \{\bar{u}(x_i)\}$ лар эмас балки, қандайдир уларга яқин $u_h = \{u(x_i)\} = \{u_i\}$ қаноатлантиради:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, \quad i = 0, ..., n-1, \quad (11)$$

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = \gamma_0, \beta_0 u_n + \beta_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \gamma_1 \qquad (12)$$

(11-12) алгебраик тенгламалар системаси (1- 2) тенгламалар учун чекли айирмали схема (ЧАС) дейилади. (11) да биз $0(h^2)$ хатоликка йўл қўйдик.
(12) да эса O(h) хатоликка йўл қўйдик. Чегара шартларни аниқроқ аппроксимация қилиб чегара шартлар хатолигини ҳам $0(h^2)$ га кўтариш мумкин. Бунинг учун $u'(x_0), \ u''(x_h)$ ларнинг (7), (8) формулалар билан алмаштириш керак. Натижада биз ушбу чекли айирмали схемасини оламиз:

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+p_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_iu_i=f_i, i=0,...,n-1, \qquad (13)$$

$$\alpha_0u_0+\alpha_1\frac{-3u_0+4u_1-u_2}{h}=\gamma_0, \beta_0u_n+\beta_1\frac{u_{n-2}-4u_{n-1}+3u_n}{h}=\gamma_1 \quad (14)$$

Демак, битта тенглама учун бир неча айримали схема тузиш мумкин экан. (1), (2) ва (11-12), (13-14) ларга қараб қуйидаги натижаларни олиш мумкин:

1. Дифференциал масаланинг берилиш соҳаси узлуксиз C=C[a,b]=U фунциялар тўпламини дискрет $C_h=C_h[a,b]=U_h$ функциялар тўплами билан алмаштирилди.

2. $Lu,\ l_0u,\ l_1u$ узлуксиз функциялар тўпламида аниқланган операторлар ўрнига тўр нуқталарида аниқланган чекли айримали операторлар $L_hu^h, l_{0h}u^h, l_{1h}u^h$ қурилади:

$$L_hu^h=\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+p_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q_iu_i=f_i, i=1,...,n-1,$$

$$l_{0h}u^h\equiv\alpha_0u_0+\alpha_1\frac{u_1-u_0}{h}=\gamma_0, l_{1h}u^h\equiv\beta_0u_n+\beta_1\frac{u_n-u_{n-1}}{h}=\gamma_1$$

3. (1-2) узлуксиз дифференциал масала ўрнига дискрет (узлуқли), (11-12) (еки (13-14)) ЧАС (алгебраик тенгламалар системаси) қурилади.

Чекли айримали схема (11), (12)ни, агар мумкин бўлса, ечиб тақрибий ечим $u^h=(u_0,...,u_n)$ ни топамиз. Бу ерда учта савол туғилади:

1) Чекли айримали схема ечимга эгами, ечим қандай топилади? 2) Чекли айримали схема турғунми ? 3) Чекли айримали схема ечими u^h u_h га яқинлашадими, $u^h\to u_h$? Бу саволларга келгуси маърузада қуйидаги миқдорлар текширилиб жавоб берилади.

Қуйидаги миқдорларни киритамиз.

$R_h=L_hu_h-f^h=\{L_hu(x_k)-f(x_k), x_k\in D_h\}$-ЧАС нинг аппроксимация хатолиги,

$r_h=l_hu_h-g^h=\{l_hu(x_k)-g(x_k), x_k\in\Gamma_h\}$-чегара шартларнинг аппроксимация хатолиги,

турғунлик: $\|u^h\|_{U_h}\le C_1\|L_hu_h\|_{F_h}+C_2\|l_hu^h\|_{G_h}$, ва яқинлашиш: ε_h (x)=u_h (x)-u^h (x) =0(h^r) .

2 Чекли айирмали схемани ечишнинг прогонка усули

Биринчи савол билан шуғулланамиз, иккинчи ва учинчи савол билан келгуси маърузада шуғулланамиз. (11), (12) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} u_0(\alpha_0h-\alpha_1)+\alpha_1u_1=\gamma_0h, \\ (1-p_ih/2)u_{i-1}-(2-q_ih^2)u_i+(1-p_ih/2)u_{i+1}=f_ih^2, \qquad i=1,...,n-1 \\ -\beta_1u_{n-1}+(\beta_0h+\beta_1)u_n=\gamma_ih \end{cases}$$

Биз уч диогналли тенгламалар системасига келдик. Уни албатта прогонка (ҳайдаш) усули билан ечиш мумкин. Ушбу

$$b_0=\alpha_0h-\alpha_1, c_0=\alpha_1, d_0=\gamma_0h,\ a_i=1-p_ih/2, b_i=q_ih^2-2, c_i=1+p_ih/2, d_i=f_ih^2,$$

i=1,…,n-1, $a_n=-\beta_1, b_n=\beta_0h+\beta_1$ белгилашларни киритиб стандарт шаклга келамиз:

$$\begin{cases} b_0u_0+c_0u_1=d_0 \\ a_iu_{i-1}+b_iu_i+c_iu_{i+1}=d_i,\ \ i=1,...,n-1 \\ a_nu_{n-1}+b_nu_n=d_n \end{cases} \qquad (16)$$

Прогонка усулига асосан ечим $u_i=v_{i+1}u_{i+1}+w_{i+1}$ кўринишда изланади, бу ерда:

$$\{v_{i+1}=-c_i/[a_iv_i+b_i], w_{i+1}=[d_i-a_iu_i]/[a_iv_i+b_i],\ i=1,...n-1, v_0=w_0=0, \qquad (17)$$

$$u_n=[d_n-a_nu_n]/[a_nv_n+b_n], u_i=v_{i+1}u_{i+1}+w_{i+1}, i=n-1,n-2,...,0. \qquad (18)$$

(17) прогонка коэффициентларни , (18) эса noъмалумларни аниқлайди.
Ҳисоблашлар ушбу жадвал асосида олиб борилади.

k	$\downarrow x_k = a+kh$	a_k	b_k	c_k	d_k	$w_{i+1} = \frac{d_i - a_i w_i}{a_i v_i + b_i}$	$v_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i v_i + b_i}$	$u_i = v_{i+1}u_{i+1} + w_{i+1}$
0		0				0	0	
1								
…								
n-1								
n				0				$u_n = \frac{d_n - a_n w_n}{a_n v_n + b_n} \uparrow$

3. Чекли айирмалар схемаларни прогонка усули билан ечиш дастури

Масалани Маткадда ечиш

$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t)$ $p(t) := \sin(t)$ $q(t) := \cos(t)$ $f(t) := 6t + 3t^2 \sin(t) + t^3 \cos(t)$

Оралиқ, параметрлар π:=3.14 n:=10 i:=0..n t_0:=0 t_n:=1 h:=(t_n-t_0)/n $t_i := t_0 + ih$

ЧШ коэффицентлари $\alpha_0 := 1$ $\alpha_1 := 0$ $\gamma_0 :=$

ЧШ коэффицентлари $\beta_0 := 1$ $\beta_1 := 0$ $\gamma_1 :=$

ЧАТС да 0- тенглама коэффицентлари $b_0 = \alpha_0 h - \alpha_1, c_0 = \alpha_1, d_0 = \gamma_0 h,$

ЧАТС да n- тенглама коэффицентлари $a_n = -\beta_1, b_n = \beta_0 h + \beta_1$ $d_n := \gamma_1 h$

i-тенглама коэф. i=1,..,n-1, $a_i = 1 - p_i h/2, b_i = q_i h^2 - 2, c_i = 1 + p_i h/2, d_i = f_i h^2$

Аниқ ечим $z := x^3$

$z(x)^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	$1\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-3}$	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1

Маткадда 0- тенглама коэффицентлари $m_{0,0}$:=α_0h-α_1 $m_{0,1} := \alpha_1$ $d_0 := \gamma_0 h$

i-тенг. коэф. $i := 1..n-1$ $m_{i,i-1} := 1 - p(x_l)\frac{h}{2}$ $m_{i,i} := b_i$ $m_{i,i+1} := 1 + p(x_l)\frac{h}{2}$ $d_i := f(x_i)h_i^2$

Маткадда n- тенглама коэффицентлари $m_{n,n-1} := \beta_1$ $m_{n,n} := \beta_0 h + \beta_1$ $d_n := \gamma_1 h$

Назорат учун Маткад ойнасида ЧАТС матрицаси ва ўнг томонни экранга чиқарамиз:

m =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.95	-1.999	1.05	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.95	-1.998	1.05	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.95	-1.997	1.05	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.95	-1.996	1.05	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.95	-1.995	1.05	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.95	-1.994	1.05	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.993	1.05	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.992	1.05
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.991
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

d =

	0
0	0
1	$6.301\cdot 10^{-3}$
2	0.013
3	0.021
4	0.029
5	0.038
6	0.048
7	0.059
8	0.071
9	0.085
10	0.1

Ечимнинг тўр нуқталардаги қийматларини чиқарамиз: $u := m^{-1}d \qquad u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.526E-3	0.907E-3	0.028	0.065	0.126	0.217	0.344	0.513	0.729	1

4.ЧАС нинг аппроксимация хатолиги.

$R_h = L_h u_h - f^h = \{L_h u(x_k) - f(x_k), x_k \in D_h\}$, $r_h = l_h u_h - g^h = \{l_h u(x_k) - g(x_k), x_k \in \Gamma_h\}$ миқдорларни текширамиз. Равшанки,

$$R_h = L_h u_h - f^h = \{L_h u(x_k) - f(x_k), x_k \in D_h\} =$$

$$\{\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + p(x_i)\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)u(x_i) - f(x_i), i = 1,...,n-1\} =$$

$$\{u_{xx}(x_i) + 0(h^2) + p(x_i)u_x(x_i) + 0(h^2) + q(x_i)u(x_i) - f(x_i), i = 1,...,n-1\} =$$

$$\{u_{xx}(x_i) + p(x_i)u_x(x_i) + q(x_i)u(x_i) + 0(h^2) - f(x_i), i = 1,...,n-1\} = \{f(x_i) + 0(h^2) - f(x_i)\} = 0(h^2)$$

$$r_h = l_h u_h - g^h = \{l_h u(x_k) - g(x_k), x_k \in \Gamma_h\} =$$

$$\{\alpha_0 u(x_0) + \alpha_1 \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - \gamma_0, \beta_0 u(x_n) + \beta_1 \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} - \gamma_1\} =$$

$$\{\alpha_0 u(x_0) + \alpha_1 u'(x_0) + 0(h) - \gamma_0, \beta_0 u(x_n) + \beta_1 u'(x_n) + 0(h) - \gamma_1\} =$$

$$\{\gamma_0 + 0(h) - \gamma_0, \gamma_1 + 0(h) - \gamma_1\} = 0(h).$$

5.ЧАС нинг турғунлиги.

(16) ни ЧАС ни қараймиз.Уни Au=f деб ёзиб олиб иккита ўнг томон f_1, f_2 учун $Au_1=f_1$, $Au_2=f_2$ ЧАС ни қараймиз. Фараз қилайлик A^{-1} тескари матрица мавжуд бўлсин. У ҳолда $u_1 - u_2 = A^{-1}(f_1 - f_2)$ ва $\|u_1 - u_2\| \le \|A^{-1}\|\|f_1 - f_2\|$. Демак, агар $\|f_1 - f_2\| \le \delta, \|A^{-1}\| \le C$ бўлса $\|u_1 - u_2\| \le C\delta = \varepsilon$ бўлади ва ЧАС турғун бўлади. Бу ерда асосий масала A^{-1} матрица нормасининг чегараланганлиги экан. Кўрсатиш мумкинки, агар A матрица салмоқли бош диогналга эга бўлса тескари матрица чегараланган бўлади ва ЧАС турғун бўлади.

Лемма 1. Агар A матрица салмоқли бош диогналга эга бўлса тескари матрица чегараланган бўлади.

Исбот.u вектор учун шундай к топайликки, $\|u\| = |u_k|$ бўлсин.У ҳолда

$$\|f\| = \|Au\| = \max_i \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^n a_{kj}u_j\right| \ge (|a_{kk}| - \sum_{j\ne k} a_{kj})\|x\| \ge \min_i(|a_{ii}| - \sum_{j\ne i} a_{ij})\|x\|.$$

A^{-1} мавжуд ва $u = A^{-1} f$ эканлигидан ва норманинг таърифидан қуйидагини топамиз:

$$\left\| A^{-1} \right\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\left\| A^{-1} f \right\|}{\| f \|} \leq \left\{ \min_i (|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|) \right\}^{-1} .$$

Бизда

$$|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \{ |b_0| - |c_0|, |b_i| - |a_i| - |c_i|, i = 1, 2, ..., n-1, |b_n| - |a_n| \} > 0 ,$$

чунки бу шартлар q(x)<0 ва h етарли кичик десак бажарилади.

6.Назарий саволлар ва топшириклар.

1. $u'(x_i)$ ҳосила учун учта тақрибий ҳисоблаш формуласини келтириб чикаринг. Уларни хатоликлари қандай.

2. $u'(x_0), u'(x_n)$ ҳосила учун иккитадан чекли айримали ҳосилаларни келтириб чикаринг. Уларни хатоликлари қандай.

3. $u''(x_i)$ ҳосила учун чекли айримали ҳосилани келтириб чикаринг.Уларни хатоликлари қандай.

4. Чекли айримали схема ҳосил килиш этапларини баён этинг.

5. Чекли айримали схемаларда нечта асосий масала бор.

Мундарижага

2.7. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАРНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Асосий тушунчалар: *четланиш, аппрокимацмя, турғунлик, яқинлашиш, Фллиповнинг яқинлашиш ҳақидаги теоремаси.*
Асасий формулалар:
*1. ЧАС тузиш технологияси:**1)тўр ясаш; 2)ДТ ва ЧШ ни тўрда ёзиш;3)ҳосилаларни чекли айирмали ҳосилалар билан аппроксимация қилиш; 4)чексиз кичик миқдорни ташлаб юбориб алгебраик тенгламалар системаси-ЧАС олиш; 5)ЧАС ни ечиш**.*
2.*Аппрокимация:* $R_h = L_h u_h - f^h = \{L_h u(x_k,t_j) - f(x_k,t_j),(x_k,t_j)\in D_{h\tau}\} = 0(h^{s1}+\tau^{s2})$,.
Турғунлик: $\left\|u^h\right\|_{U_h} \le C_1 \| f_h \|_{F_h}$. *Яқинлашиш:* $\varepsilon_h(x)=\bar{u}_h(x)-u_h(x)$, $\varepsilon_h = 0(h^r)$.
3.Филлиповнинг яқинлашиш теоремаси. Аппроксимация+турғунлик→яқинлашиш
4.Аппрокимацияни текшириш.
5. Турғунликни текшириш.
6.Назарий саволлар ва топшириклар.

1. Дифференциал чегара масала (ДМ).

D соҳа (x,y) текисиликнинг бирор G чегара билан ажратилган қисми бўлсин. D соҳада иккита дифференциал оператор берилган бўлсин:

$$l_0 u(x,y) = l_0(u) = l_0(u,u_x,u_u,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + g = f_0(x,y),$$

$$l_1 u(x,y) = l_1(u) = l_1(u,u_x,u_y) = \alpha u + \beta u_n = f_1(x,y), \quad u_n = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Бу ерда a,b,c,d,e,g,α, β функциялар x,y ўзгарувчиларга боғлиқ: a=a(x,y),…, $l_0 u = f_0$ -ДТ-дифференциал тенглама, $l_1 u = f_1$-ЧШ-бошланғич-чегара шарт.
ДМ ни содда қилиб компакт кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$Lu = f, \tag{1}$$

$$Lu = [l_0 u, l_1 u]^T, \quad f = [f_0, f_1]^T, \; Lu = L(u) = L(u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}).$$

(1) чегара масалани қаноатлантирадиган $\bar{u} = \bar{u}(x,y)$ функцияни ДМ нинг аниқ ечими деб айтамиз: $l_0\bar{u} = f_0$, $l_1\bar{u} = f_1$ ёки $L\bar{u} = f, \forall(x,y)\in D+G$.

2. **Чекли айирмали схема** (ЧАС). $\bar{D} = D+G$ соҳага қарашли дискрет $D_h = \{M_h = (x_k,y_k), k = 0,1,...,m\}$ нуқталар тўпламини қараймиз ва уни соҳада тўр деб атаймиз, бу ерда h параметр $\bar{D}$ соҳадаги нуқталар сонини ва зичлигини характерлайди, масалан, $h = 1/m$, $M_h = (x_k,y_k)$-нуқталар тўрнинг тугун нуқталари дейилади. Тўрда аниқланган функция тўр функция дейилади. U деб $\bar{D}$ соҳада аниқланган функциялар тўпламини тушунайлик. U_h деб D_h тўрда аниқланган u_h функциялар тўпламини белгилайлик. U ва U_h орасидаги боғланиш узлуксиз функциянинг тўрдаги қийматлар жадвалини

$$p_h u = u_h, \; p_h u(x,y) = u_h = \{u(x_k,y_k), k = 0,...,m\}, u\in U, u_h \in U_h,$$

берадиган оператор-проектор орқали ўрнатилади.
Келишув: $\bar{u}_h = \{\bar{u}(x_k,y_k), k = 0,...,m\}$ ***деб тўрдаги аниқ ечим жадвалини,*** $u_h = \{u(x_k,y_k), k = 0,...,m\}$ ***деб унга яқин бўлган тақрибий ечим жадвални белгилаб оламиз:*** $u_h \approx \bar{u}_h$. ***Одатда*** $\bar{u}_h - u_h \to 0(h^r), h\to 0$ ***деб талаб қилинади.***

u_h тақрибий ечимни яратиш учун $Lu = f$ ДМ ўрнига u_h га нисбатан

$$L_h u_h = f_h \tag{2}$$

чекли айирмали схема-сонли тенгламалар системаси тузилади, бу ерда

$f_h = p_h f$, $L_h u_h = L(u_h) = L(u_h, \Lambda_x u, \Lambda_y u, \Lambda_{xx} u, \Lambda_{xy} u, \Lambda_{yy} u)$, $\Lambda_x u, \Lambda_y u, \Lambda_{xx} u, \Lambda_{xy} u, \Lambda_{yy} u$ - $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ ҳосилалар учун чекли айирмали ҳосилалар. Агар $f \in F$ бўлса $F_h = \{f_h\}$ тўр функциялар тўплами ҳам U_h га ўхшаб киритилади. U_h, F_h фазоларда U, F даги $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_F$ нормалар каби $\|\cdot\|_{U_h}$, $\|\cdot\|_{F_h}$ нормалар киритилади. Одатда жуда суҳим бўлган мослик шарти талаб қилинади:

$$\lim_{h\to 0}\|u_h\|_{U_h} \to \|u\|_U, \ \lim_{h\to 0}\|f_h\|_{F_h} \to \|f\|_F \qquad (3)$$

Таъриф1. Агар ЧАС хатолиги $\varepsilon_h = \bar{u}_h - u_h \to 0, h \to 0$ бўлса ЧАС яқинлашувчи, агар $\|\bar{u}_h - u_h\|_{U_h} \le Ch^s$ бўлса бу яқинлашиш s-тартибли дейилади.

Таъриф 2. Агар $L_h \bar{u}_h = f_h + R_h, R_h \to 0, h \to 0$ бўлса ЧАС $Lu = f$ ДМ ни ечимда аппроксимация қилади дейилади. $R_h = L_h \bar{u}_h - f_h$ ЧАСнинг ечимдаги аппроксимация хатолиги дейилади. Агар $\|R_h\|_{F_h} \le Mh^\sigma$ бўлса, ЧАС ДМни σ тартиб билан аппроксимация қилади дейилади.

Фараз қилайлик L_h чекли айирмали оператор чизиқли бўлсин.

Таъриф 3. Айирмали схема $L_h u_h = f_h$ ечими мавжуд бўлиб

$$\|u_h\|_{U_h} \le M\|f_h\|_{F_h} \qquad (4)$$

тенгсизлик бажарилса, яъни берилганларнинг кичик ўзгаришлари ечимнинг кичик ўзгаришларига сабаб бўлса, ЧАС турғун дейилади.

3. **ЧАС нинг яқинлашиши ҳақидаги Филлипов теоремаси.**

Теорема 1 (А.Ф. Филлипов). $L_h u_h = f_h$ ЧАС $Lu = f$ ДМ ни ечимда s тартиб билан аппроксимация қилсин ва турғун бўлсин. У ҳолда ЧАС s тартиб билан яқинлашувчи бўлади, яъни $\|\bar{u}_h - u_h\|_{U_h} \le C_1 h^s$ тенгсизлик ўринли:

Аппроксимация+турғунлик→яқинлашиш.

Исбот. Апроксимация ва турғунлик шартига кўра $\|R_h\|_{F_h} \le Ch^s$, $\|u_h\|_{U_h} \le M\|f_h\|_{F_h}$. $R_h = L_h \bar{u}_h - f_h$. Лекин, $R_h = L_h \bar{u}_h - f_h = L_h \bar{u}_h - L_h u_h = L_h(\bar{u}_h - u_h) = L_h \varepsilon_h$. Яъни хатолик $\varepsilon_h = \bar{u}_h - u_h$ га нисбатан $L_h \varepsilon_h = R_h$ ЧАС ни олдик. $\|u_h\|_{U_h} \le M\|f_h\|_{F_h}$ га u_h ўрнига ε_h ни, f_h ўрнига R_h ни қўямиз ва $\|R_h\|_{F_h} \le Mh^s$ тенгсизликдан фойдаланамиз: $\|\varepsilon_h\|_{U_h} \le M\|R_h\|_{F_h} \le MCh^s$.

Теорема 2. $Lu = f$ ДМ учун ЧАС $L_h u_h = f_h$ турғун бўлсин ва мослик шарти (3) бажарилсин. У ҳолда $\lim_{h\to 0}\|\bar{u}_h - u_h\|_{U_h} = \|\bar{u} - u\| = 0$ ва $\|\bar{u}\|_U \le M\|f\|$.

4. **ЧАС тузиш технологияси**. ДМ $Lu = f$ дан ЧАС $L_h u_h = f_h$ га ўтиш учун қуйидаги ишлар қилинади:

1. ДМ нинг берилган узлуксиз соҳа $\bar{D} = D + G$ дискрет соҳа –тўр $\bar{D}_h = D_h + G_h$ билан алмаштирилади.

2. $Lu = f$ ДМ тўр нуқталарида ёзилади:

$$L(u_h) = L(u_h, D_x u_h, D_y u_h, D_{xx} u_h, D_{xy} u_h, D_{yy} u_h) = f_h, \qquad (5)$$

бу ерда $D_x u_h = u'(M_h) = \Lambda_x u_h + O(h^r), r = 1, 2$, $D_{xx} u_h = u''(M_h) = \Lambda_{xx} u_h + O(h^2)$,....

3. (3) да чексиз кичик миқдорларни ташлаб юбориб ЧАС га келамиз: $L_h u_h = f_h$.

4. ЧАС $L_h u_h = f_h$ ни ечиб тўрда тақрибий ечим жадвали $u_h = L_h^{-1} f_h$ ни топамиз.

5. ЧАС ни текшириш технологияси. Узлуксиз масала $Lu = f$ дан дискрет масала $L_h u_h = f_h$ га ўтилгач ЧАС нинг яроқлилигини текшириш учун қуйидаги ишлар қилинади:

1.Аппроксимация $R_h = L_h \bar{u}_h - f_h$ текширилади, масалан, $\|R_h\|_{F_h} \le Ch^s$ бўлсин.

2. Турғунлик $\|u_h\|_{U_h} \le M \| f_h\|_{F_h}$ текширилади.

3. Агар аппроксимация ва турғунлик ўринли бўлса Филлипов теоремасига асосан, яқинлашиш $\|\varepsilon_h\|_{U_h} \le M \|R_h\|_{F_h} \le MCh^s$ ўринли бўлади.

4. Компьютерда ЧАС $L_h u_h = f_h$ ни ечиш учун бирор алгоритм танланади.

4. Турғунликни текшириш. Чекли айримали схемаларнинг турғунлигини билиш жуда муҳимдир.Уни текширишни турли усуллари бор.Улардан энг соддаси спектрал белгидир. Фараз қилайлик (1), (2) тенглама вақтига (t) ва фазовий координаталар $x_i ,..., x_m$ ларга боғлиқ бўлсин ва бир жинсли бўлсин. (3), (4) чекли айримали схеманинг хусусий ечимлари гармоника

$$u_h(x,t) = \lambda^n \exp(i\varphi(k_1x_1 + ... + k_m x_m)), \quad i^2 = -1, \lambda = \lambda(\varphi).$$

кўринишда изланади. Равшанки биржинсли схема учун u^h=0 ечим, гармоника ҳам ечим бўлиши учун нуқталар сони чексизликка интилганда гармоника ҳам нолга интилиши керак.

Равшанки, $|u_h| = |\lambda^n|$, ва агар $|\lambda| < 1$ бўлса $u^j{}_k \to 0, j \to \infty$ ва схема турғун, агарда $|\lambda| > 1$ бўлса $u^j{}_k \to \infty, j \to \infty$ ва схема нотурғун.

4. Аппроксимацияни текшириш.

Фараз қилайлик, Lu=f,lu=g дифференциал чегаравий масала $L_h u_h = f_h$, $l_h u_h = g_h$ айирмали схема билан алмаштирилган бўлсин. Айирмали схемага аниқ ечим жадвали $\bar{u}_h$ ни қўйиб ушбу дифференциал тенглама, бошлангич- чегара шартлардан четланишларни ҳосил килдик:

$$R_h = L_h\bar{u}_h - f_h == L_h\bar{u}_h - (Lu)_h,\ r_h = l_h\bar{u}_h - g_h = l_h\bar{u}_h - (lu)_h.$$

Бу четланишларнинг 0 га интилиши Тейлор формуласи асосида ёки чекли айирмали ҳосилаларнинг ташлаб юборилган қолдиқ ҳадларидан фойдаланиб кўрсатилади.

Мисол 1. $Lu = u_t + au_x = 0,\ \ lu = u(x,0) = g(x)$ Коши масаласи берилган бўлсин, $t \ge 0, -\infty < x < \infty$.

$x_k = kh,\ t_n = j\tau$ тўр ясаб, дифференциал тенглама ва чегара шартларни аппроксимация қиламиз.Тўрда ушбу схемани тузайлик:

$$L_h u^h = f^h, L_h u^h = \{\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} + a\frac{u_k^j - u_{k-1}^j}{h}\},\ f^h = \{f_k^j\}, l^h u^h = g^h, l^h u^h = \{u_k^0\}, g^h = \{g_k\}$$

Кўриниб турибдики, $R_h = L_h u_h - f^h = 0(\tau) + 0(h)$.Уни таъриф асосида исботлаш мумкин.

Равшанки, $f_h = f^h,\ g_h = g^h,\ r_h = u_h u_n - (lu)_h = 0$ ва

$$R_h = L_h u_h - f_h = (u(x_k, t_{j+1}) - u(x_k, t_j))/\tau + a(u(x_k, t_j) - u(x_{k-1}, t_j))/h -$$
$$(u_t(x_k, t_j) + au_x(x_k, t_j)) = u_t(x_k, t_j) + u_{tt}(x_k, c_1)\tau/2 + a(u_x(x_k, t_j) +$$
$$hu_{xx}(c_2, t_v)/2) - (u_t(x_k, t_j) + au_x(x_k, t_v)) = u_{tt}(x_k, c_1)\tau/2 + a_u x_k(c_2, t_v)h/2 = 0(\tau + h)$$

Демак, $R_h = R_{h\tau} = 0(\tau + h)$, бу ерлар c_1,c_2- оралик қийматлар. Улар Тейлор формуласидан фойдаланиш туфайли келиб чикди.

5. Турғунликни текшириш.

Турғунликнинг текширишнинг бир неча усуллари бор. Улардан энг соддаси турғунликнинг спектрал Нейман, зарурий белгисидир. Нейманнинг зарурий шарти вақтга боғлиқ системалар учун қўлланилади. Нейманнинг зарурий шартини мисолда тушунтирамиз.

$L_u = u_t + au_x = 0$ тенглама учун $l_u = u(x,0) = g(x)$ бошланғич шарт қўйилган бўлсин. Бу тенглама учун худди юқоридаги айирмали схемани мос қўямиз. Айирмали схема хусусий ечимини гармоника кўринишда излаймиз. Бу ечимнинг схемага қўйиб уни қачон ечим бўлишини аниқлаймиз. Бунинг учун айирмали схема хусусий ечимини $u_k^{\ j} = \lambda^j \exp(ikh\varphi), \quad i^2 = -1,$ кўринишда излаймиз.Схема биржинсли бўлганлигидан $u_k^{\ j} = 0$ ечим бўлади.Хусусий ечим қанақа экан?. Гармоникани схемага қўямиз ва топамиз:

$$\frac{\lambda^j(\lambda-1)\exp(ikh\varphi)}{\tau} + a\frac{\lambda^j\exp(ikh\varphi)(1-\exp(-ih\varphi))}{h} = 0 \to \frac{\lambda-1}{\tau} + a\frac{1-\exp(-ih\varphi)}{h} = 0,$$

$$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{h} + \frac{a\tau}{h}\exp(-ih\varphi) = 1 - \frac{a\tau}{h}(1-\cos(h\varphi)) - i\frac{a\tau}{h}\sin(h\varphi),$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1-\frac{a\tau}{h}(1-\cos(h\varphi)]^2 + [\frac{a\tau}{h}\sin(h\varphi)]^2}$$

Равшанки**,** $\left|u_k^j\right| = \lambda^j \mid e^{ih\varphi k} \mid = \lambda^j$, шунинг учун агар $u_k^{\ j} \to \infty$ бўлса турғунликни бўлиши мумкин эмас.Демак, |λ|<1 бўлиши керак. Агар a<0 бўлса, |λ|>1 ва турғунлик йўқ.

Демак**,** берилган схема a>0 бўлса |λ|<1 бўлиши учун $a\tau/h < 1$ бўлиши керак ва схема бу ҳолда турғун бўлади.

6.Назарий саволлар ва топшириклар

1. ЧАС тузиш кетма-кетлигини айтиб беринг .
2. Тақрибий ечим хатолиги нима? (ε_h=?)
3. ЧАС ни диффенциал тенгламадан четланиши нима? ($R_h \to 0$)
4. ЧАС ни чегаравий-бошлангич шартларидан четланиши нима? ($r_h \to 0$)
5. ЧАС қачон дифференциал масалани аппроксимация қилади? ($R_h, r_h \to 0$)

Мундарижага

2.8. ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМА

Асосий тушунчалар: *шаблон, дисперцион шарт,ПТ учун ошкор схема, ошкормас схема, шартли турғунлик, абсалют турғунлик, прогонка усули, қатлам.*
Асосий формулалар:
1. *ПДТ учун бошланғич-чегара масала:* $Lu = u_t - u_{xx} = f(x,t)$,

$$lu = u(x,0) = u^0(x), 0 \le x \le 1, , l_0 u = u(0,t) = \gamma_0(t), \quad l_1 u = u(l,t) = \gamma_1(t), 0 \le t \le T.$$

2.Ошкор ва ошкормас ЧАС :

$$L_h^{(1)} u^h = (u_k^{j+1} - u_k^{j})/\tau - \Lambda_{xx} u_k^{j} = f_k^{j};$$

$$u_k^0 = u(x_k),\ k = 0,...,m; u_0^{j+1} = \gamma_0^{j+1},\ u_m^{j+1} = \gamma_0^{j+1}, \quad j = 0,...,n.$$

$$L_h^{(2)} u^h = (u_k^{j+1} - u_k^{j})/\tau - \Lambda_{xx} u_k^{j+1} = f_k^{j+1};$$

$$u_k^0 = u(x_k),\ k = 0,...,m; u_0^{j+1} = \gamma_0^{j+1},\ u_m^{j+1} = \gamma_0^{j+1}, \quad j = 0,...,n.$$

Алгоритмлар: $u_k^{j+1} = u_k^{j} + \tau\Lambda_{xx} u_k^{j} + \tau f_k^{j}; \quad (E - \tau\Lambda_{xx}) u_k^{j+1} = u_k^{j} + \tau f_k^{j+1};$

3.Аппрокцимацияни текшириш:

$$R_h^{(1)} = L_h^{(1)} u_h - f^h = \{\ Lu(x_k,t_h) - f(x_k,t_h)\ \} = 0(\tau + h^2)$$

$$R_h^{(2)} = L_h^{(2)} u_h - f^h = \{\ Lu(x_k,t_h) - f(x_k,t_h)\ \} = 0(\tau + h^2)$$

4.Турғунликни текшириш:а)ошкор схеманинг турғунлик шарти $\tau / h^2 \le 1/2$ *;*
б) ошкормас схема шартсиз (абсолют) турғун .
5. ПДТ учун Галёркин усули.
6.Назарий саволлар ва машклар.

1. ЧАС тузиш

D={0≤x≤1,0≤t≤T} соҳада иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$Lu = u_t - u_{xx} = f(x,t) \qquad (1)$$

бошлангич шарт

$$lu = u(x,0) = u^0(x) = g_0(x) \qquad (2)$$

ва чегара шартлар

$$l_0 u = u(0,t) = g_1(t), \quad l_1 u = u(1,t) = g_2(t) \quad . \qquad (3)$$

га бўйсунадиган ечимини топиш талаб этилади. Фараз қиламизки, (1)-(3) масала ечими ягона ва мавжуд, ундан ташкари ечим D соҳада u_{tt}, u_{xxxx} узлуксиз ҳосилага эга .

Ечимни чекли айирмалар схемалар усули билан тақрибий топамиз. Бунинг учун соҳада

$$x_k = kh,\ k = 0,...m,\ h = 1/m,\ t_j = j\tau,\ j = 0,...,n,\ \tau > 0,\ \tau \le T < (n+1)\tau$$

тўғри чизиқлар ёрдамида $(x_k, t_j) = (kh, j\tau)$ тўр ҳосил қиламиз .

Тўрнинг нуқталарида (1), (2), (3) тенгламаларни ёзамиз:

$$u_t(x_k,t_j) = u_{xx}(x_k,t_j) + f(x_k,t_j), k = 1,...,m-1, j = 0,...,n-1. \ (4)$$

$$u(x_k,0) = u^0(x_k),\ k = 0,...,m \qquad (5)$$

$$u(0,t_j) = g_1(t_j), \quad u(1,t_j) = g_2(t_j),\ j = 0,...,n. \qquad (6)$$

Бу ерга кирувчи ҳосилаларни қуйидагича алмаштириш мумкин:

$$u_t(x_k,t_j) = \frac{u(x_k,t_{j+1}) - u(x_k,t_j)}{\tau} + 0(\tau) = \Lambda_t^{+} u(x_k,t_j) + 0(\tau),$$

$$u_t(x_k,t_j) = \frac{u(x_k,t_j) - u(x_k,t_{j-1})}{\tau} + 0(\tau) = \Lambda_t^{-} u(x_k,t_j) + 0(\tau),$$

$$u_t(x_k,t_j) = u_t(x_k,t_j) = \frac{u(x_k,t_{j+1}) - u(x_k,t_{j-1})}{2\tau} + 0(\tau^2) = \Lambda_t^0 u(x_k,t_j) + 0(\tau^2) ,$$

$$u_{xx}(x_k,t_j) = \Lambda_{xx}u_h + 0(h^2) = \frac{u(x_{k-1},t_j) - 2u(x_k,t_j) + (x_{k+1},t_j)}{h^2} + 0(h^2) ,$$

$$u_{xx}(x_k,t_{j+1}) = \Lambda_{xx}u(x_k,t_{j+1}) + 0(h^2) = \Lambda_{xx}u_h + 0(h^2) = \frac{u(x_{k-1},t_j) - 2u(x_k,t_j) + (x_{k+1},t_j)}{h^2} + 0(h^2)$$

Бу ерда биз соддалаштириш учун иккинчи тартибли ҳосила учун иккинчи тартибли чекли айирмали (ҳосила) оператор киритдик:

$$\Lambda_{xx}u_h = \Lambda u(x_k,t_j) = \frac{u(x_{k-1},t_j) - 2u(x_k,t_j) + (x_{k+1},t_j)}{h^2} .$$

Λ_{xx} оператор $u_h = \{u_k^n\}$ ихтиёоий тўр функцияга ҳам шу каби таъсир эътади:

$$\Lambda_{xx}u_h = \Lambda_{xx}u_k^j = \frac{u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j}{h^2} .$$

(7)-(11) формулалардан кўриниб турибдики, бита ҳосила бир неча усул билан аппроксимации қилиниши мумкин экан. Ҳосилани чекли айирмалар Билан аппроксимация килишда ишлатиладиган тўрнинг нуқталар тўпламига шаблон дейилади. Демак, ҳосилани аппроксимация килиш усули шаблонга боғлиқ. Энди (4)-(6) ларга ҳосилаларнинг (7)-(11) қийматларини куйамиз. Бошлангич чегара шартларда ҳосила йук, улар аниқ аппроксимация қилинади. (4) га аввал (10), кейин (11) ни қўйиб икки хил айирмали схема ҳосил қиламиз:

$$L_h^{(1)}(u(x_k,t_j)) = (u(x_k,t_{j-1}) - u(x_k,t_j))/\tau - \Lambda_{xx}u(x_k,t_j) = f(x_k,t_j) + 0(\tau + h^2) \quad (12)$$

$$L_h^{(2)}(u(x_k,t_j)) = (u(x_k,t_{j+1}) - u(x_k,t_j))/\tau - \Lambda_{xx}u(x_k,t_{j-1}) = f(x_k,t_{j+1}) + 0(\tau + h^2) \quad (13)$$

Чексиз кичик микдоларни ташлаб юбориб ва $u_{kj} \approx u(x_k,t_j)$ деб икки хил чекли айирмали схема ҳосил қиламиз:

$$L_h^{(1)}u^h = (u_k^{\,j+1} - u_k^{\,j})/\tau - \Lambda u_k^{\,j} = f_k^{\,j}; \qquad f^h = (f_h) \quad (14)$$

$$L_h^{(2)}u^h = (u_k^{\,j+1} - u_k^{\,j})/\tau - \Lambda u_k^{\,j+1} = f_k^{\,j+1}, \qquad f^h = (f_h) \quad (15)$$

(14) схеманинг шаблони $(x_k,t_{n+1}),(x_{k-1},t_n),\ (x_k,t_n),\ (x_{k-1},t_n)$. (15) схеманики эса $(x_k,t_{n+1}),(x_{k-1},t_{n+1}),\ (x_k,t_{n+1}),\ (x_{k+1},t_{n+1})$. (14) ошкор схема дейилади, (15) соф ошкормас схема дейилади. Уларни қўшиб, иккига бўлиб Кранк-Николсон схемасини оламиз:

$$L_h^{(3)}u^h = (u_k^{\,j+1} - u_k^{\,j})/\tau - 0.5\Lambda(u_k^{\,j} + u_k^{\,j+1}) = 0.5(f_k^{\,j} + f_k^{\,j+1}) = 0.5 f_k^{\,j+0.5}, \qquad f^h = (f_h) \quad (16)$$

Энди схемаларни бошлангич-чегара шартлар билан бирга ёзамиз:

$$(u_k^{\,j+1} - u_k^{\,j})/\tau - \Lambda_{xx}u_k^{\,j} = f_k^{\,j}, \qquad k = 1,...m-1; \quad j = 0,...,n-1 , \qquad (17)$$

$$u_k^{\,0} = g_0(x_k),\ k = 0,..m; u_0^{\,j+1} = g_1^{\,j+1} \qquad u_m^{\,j+1} = \gamma_2^{\,j+1}, \quad j = 0,...n-1;$$

$$(u_k^{\,j+1} - u_k^{\,n})/\tau - \Lambda_{xx}u_k^{\,j+1} = f_k^{\,j+1}, \qquad k = 1,...m-1; \quad j = 0,...,n-1 , \qquad (18)$$

$$u_k^{\,0} = g_0(x_k),\ k = 0,..m; u_0^{\,j+1} = g_1^{\,j+1} \qquad u_m^{\,j+1} = g_2^{\,j+1}, \quad j = 0,...n-1;$$

$$(u_k^{\,j+1} - u_k^{\,n})/\tau - 0.5\Lambda_{xx}(u_k^{\,j} + u_k^{\,j+1}) = 0.5(f_k^{\,j} + f_k^{\,j+1}), \qquad k = 1,...m-1; \quad j = 0,...,n-1 , \ (19)$$

$$u_k^{\,0} = g_0(x_k),\ k = 0,..m; u_0^{\,j+1} = g_1^{\,j+1} \qquad u_m^{\,j+1} = g_2^{\,j+1}, \quad j = 0,...n-1 .$$

2. Аппроксимацияни текшириш. Бошлангич-чегара шартлар аниқ аппроксимация қилингани туфайли факат дифференциал тенгламанинг аппроксимациясинингина текшириш колади. Ўнг томон ҳам аниқ аппроксимация қилинаяпти, шунинг учун $f^n = f_k^{\,n} = f(x_k,t_n) = f_n$ ва

(12), (13) дан қуйидагини топамиз:

$$R_h^{(1)} = L_h^{(1)} u_h - f^h - (Lu - f)_h = \{Lu(x_k, t_j) - f(x_k, t_j)\} = 0(\tau + h^2)$$

$$R_h^{(2)} = L_h^{(2)} u_h - f^h - (Lu - f)_h = \{Lu(x_k, t_j) - f(x_k, t_j)\} = 0(\tau + h^2)$$

бу (12), (13) дан келиб чикиб турибдики. Демак, икала схема ҳам дифференциал тенгламани $0(\tau + h^2)$ билан аппроксимация қилаяпти экан.

Кранк-Никольсон схемаси аниқлиги $R_h^{(3)} = 0(\tau^2 + h^4)$ га тенг.

3 Турғунликни текшириш. Иккала схеманинг ечимини ҳам

$$u_k^j = \lambda^j e^{i\alpha k}$$

кўринишида излаймиз. Бу хусусий ечимни (14) ва (15) га қўйиб қуйидаги дисперсион шартларни топамиз ($f_k^j=0$ деб оламиз)

$$(\lambda_1^{j+1} e^{i\alpha k} - \lambda_1^{j} e^{i\alpha k}) / \tau = (\lambda_1^{j} e^{i\alpha(k-1)} - 2\lambda_1^{j} e^{i\alpha k} + \lambda_1^{j} e^{i\alpha(k+1)}) h^2$$

$$(\lambda_2^{j+1} e^{i\alpha k} - \lambda_2^{j} e^{i\alpha k}) / \tau = (\lambda_2^{j+1} e^{i\alpha(k-1)} - 2\lambda_2^{j+1} e^{i\alpha k} + \lambda_2^{j+1} e^{i\alpha(k+1)}) h^2$$

Бир хил кўпайтувчиларга кискартириб $(\lambda^j e^{i\alpha k})$ ушбуни топамиз:

$$(\lambda_1 - 1)/\tau = \lambda_1 (e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)})/h^2, \quad (\lambda_2 - 1)/\tau = \lambda_2 (e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)})/h^2. \ (20)$$

$e^{i\alpha(-1)} - 2 + e^{i\alpha(1)} = 2\cos(\alpha) - 2 = 2(\cos(\alpha) - 1) = -4\sin^2(\alpha/2)$ муносабатдан фойдаланиб

$$\lambda_1 = 1 - 4\frac{\tau}{h^2}\sin^2(\alpha/2), \quad \lambda_2 = (1 + 4\frac{\tau}{h^2}\sin^2(\alpha/2))^{-1} \qquad (21)$$

ечимларни топамиз. Бу муносабатлар $u_k^j = \lambda^j e^{i\alpha k}$ гармоника айирмали схеманинг қачон ечими бўлишини билдиради. Улар дисперцион муносабат (*λ ва а* ўртасида) ёки ҳарактеристик тенглама дейилади.

$u_k^j = |\lambda|^j$ эканидан, агар $|\lambda|>1$ бўлса $|u_k^j| \to \infty$ ва турғунлик бўлиши мумкин эмас. $|\lambda|<1$ бўлса $|u_k^j| \to 0$ турғунлик бўлиши мумкин. (21) дан $\lambda_2 < 1$ ва ошкормас схема доимо турғун экан. Ошкор схемада $\lambda_1 < 1$ бўлиши учун $\tau/h^2 \le 1/2$ бўлиши керак.

Демак, ошкор схема $\tau/h^2 \le 1/2$ бўлсагина турғун экан ва ошкормас доимо турғун экан, яъни ошкор схема шартли турғун, ошкормас схема абсолют турғун экан. Кранк-Никольсон схемаси ҳам абсолют турғун бўлади.

4. Алгоритмлар. Ошкор схемани ечиш масаласини кўрайлик. u_k^{j+1} ни топамиз (ошкор кўринишда)

$$u_k^{j+1} = u_k^j + \tau/h^2 (u_{k-1}^j - 2u_k^j + u_{k+1}^j) + \tau f_k^j, \quad j = 0,...,n-1;$$

$$u_k^0 = u_k^0, k = 0,1,...,m; \quad u_0^j = \gamma_0^j, \quad u_m^j = \gamma_1^j, \quad j = 0,1,...,n; \ (22)$$

Бу ердан кўринадики, чекли айирмали схемада факат икки қатлам нуқталари иштирок этяпти $(t = t_j, \ t = t_{j+1})$ ундан ташкари юқори катлам($t = t_{j+1}$) да факат битта ноъмалум қиймат бор (u_k^{j+1}). Демак, (22) асосида $t = t_0$ катламда берилган бошлангич ва чегара шарт қийматларидан фойдаланиб $t = t_1$ қатламдаги, сўнг кейинги қатламдаги қийматларни ҳам реккурент формулалар (22) ёрдамида, тенглама ечмасдан ошкор топишимиз мумкин.

Энди соф ошкормас схемани ечиш масаласини кўрайлик. Бу ерда энди ҳар бир $t = t_{j+1}$ қатламда $u_k^{j+1}, k = 1,...,m-1,$ номаълумларни топиш учун уч диоганалли система оламиз:

$$\begin{aligned} &-ru_{k-1}^{j+1} + (1+2r)u_k^{j+1} - ru_{k+1}^{j+1} = u_k^j + \tau f_k^j, \ k = 1,...,m-1; \ j = 1,...,n-1 \\ &u_k^0 = u_k^0, \quad u_0^{j+1} = \gamma_0^{j+1}, \quad u_k^{j+1} = \gamma_1^{j+1} \quad, j = 0,1....,n-1; \ r = \tau/h^2 \end{aligned} \qquad (23)$$

Бу ерда ҳам иккита қатлам иштирок этяпти. Юқори $t = t_{j+1}$ катламда уч номаълум, қуйи катламда битта қиймат иштирок этяпти. Шунинг учун ҳам бу схемани ошкормас схема дейилади. Ечишни $t = t_1$ қатламдан бошланади. Бу қатламда (22) га прогонка усули қўлланилади. Биринчи қатламда номаълумлар топилгач иккинчи қатламдаги номаълумлар яна прогонка усули билан топилади ва ҳоказо.

Соф ошкормас схемани коэффициентлари $0) a_{00} = 1, i = 1..m, a_{0i} = 0$;

$i) i = 1..m-1, a_{ii-1} = a_{ii+1} = -r, a_{ii} = 1+2r, a_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1$; $m) a_{mi} = 0, i = 0..m-1, a_{mm} = 1$,

бўлган $A = [a_{ij}]$ матрица ва векторлар $u^{<j>} = [u_0^j, u_1^j, ..., u_m^j]^T$, $f^{<j>} = [f_0^j, f_1^j, ..., f_m^j]^T$

киритиб қуйидагича, ёзиш мумкин:

$$Au^{<j+1>} = u^{<j>} + \tau f^{<j>}, j = 0..n-1. \qquad (24)$$

Кранк-Николсон схемаси ҳам ошкормас схема бўлади ва қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин**:**

$$-u^{j+1}_{k-1} + 2(1+r)u^{j+1}_{k} - u_{k+1}^{j+1} = u^{j+1}_{k-1} - 2(1+r)u^{j+1}_{k} + u_{k+1}^{j} + 2h^2 f_k^j, \ k = 1,...,m-1; \ j = 1,...,n-1,$$
$$u_k^0 = g_k^0, \quad u_0^{j+1} = g_1^{j+1}, \quad u_k^{j+1} = g_2^{j+1} \quad, j = 0,1....,n-1 \ ; \ r = \tau / h^2$$

Кранка-Николсон схемасини коэффициентлари

$0) a_{00} = 1, i = 1..m, a_{0i} = 0; b_{0i} = 0, i = 0..m;$

$i) i = 1..m-1, a_{ii-1} = a_{ii+1} = -1, a_{ii} = 2(1+\mu), a_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1; \mu = 1/r;$

$i = 1..m-1, b_{ii-1} = b_{ii+1} = 1, b_{ii} = 2(1-\mu), b_{ij} = 0, j \neq i-1, i, i+1;$

$m) a_{mi} = 0, i = 0..m-1, a_{mm} = 1; a_{mi} = 0, i = 0..m;$

бўлган матрицалар $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ва векторлар $u^{<j>} = [u_0^j, u_1^j, ..., u_m^j]^T$,

$f^{<j>} = [f_0^j, f_1^j, ..., f_m^j]^T$ киритиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Au^{<j+1>} = Bu^{<j>} + 2h^2 f^{<j>}, j = 0..n-1, f_{i,j} = f(x_i, t_j + \tau/2). \qquad (25)$$

Демак, алгоритмик томондан ошкор схема қулай, лекин шартли турғун, соф ошкормас схема ва Кранк-Николсон схемалаи абсолют турғун, лекин ҳар бир катламда алгебраик тенгламалар системаси уч диоганалли, уни ечиш прогонка усули билан олиб борилади. Шартли турғунлик тўр қадамларига қаттик шарт қўяди, бу эса ҳисоблашларни кўп бажаришга олиб келади.

5. ПДТ учун ЧАСни MathCadда ечишни ташкил этиш.

ПДТ учун ушбу чегара масалани қараймиз:

$ua(x,t) := (x - x^2)e^t$, $f(x,t) = (x - x^2 + 2)e^t$, $u0(x) = (x - x^2)$, $g_1(t) = 0, g2(t) = 0$

A) Pdesolve ички функция ёрдамида ечиш.

MathCad ойнасида қуйидаги командаларни киритамиз:

Соҳа ни бериш $a := 0$ $b := 1$ $L := b - a$ $T := 0.05$

Соҳада тўр $m := 10 \; n := 5 \; i := 0..m \;\; j := 0..n, h := L/m \;\; \tau := T/n \;\; x_i := a + ih \;\; t_j := j\tau$

Берилганлар $\quad u0(x) := x - x^2 \quad f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t \quad g1(t) := 0 \quad g2(t) := 0$

Тенглама Given $\quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t)$ (баробар йўғон)

Чегара шартлар $u(x,0) = u0(x) \;\; u(0,t) = g1(t) \;\; u(1,t) = g2(t)$

Ички функцияга мур.-т $\quad u := Pdesolve\left[u, x, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, m, n\right] \qquad u_{i,j} := u(x_i, t_j)$

Аниқ ечим ва қийматлари $\quad ua(x,t) := (x - x^2)e^t \quad ua_{i,j} := ua(x_i, t_j)$

Тақрибий ечим жадвалини чиқарамиз:

$u^T =$

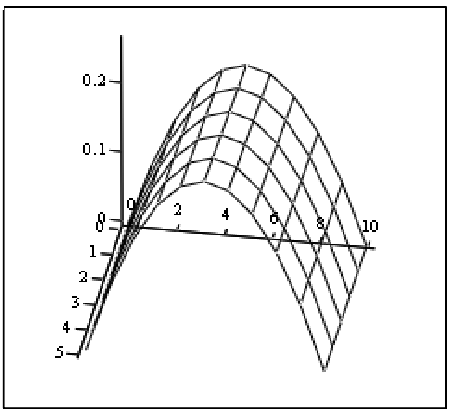
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.089	0.158	0.207	0.237	0.247	0.237	0.207	0.158	0.089
1	0	0.09	0.16	0.209	0.239	0.249	0.239	0.209	0.16	0.09
2	0	0.091	0.161	0.212	0.242	0.252	0.242	0.212	0.161	0.091
3	0	0.092	0.163	0.214	0.244	0.254	0.244	0.214	0.163	0.092
4	0	0.093	0.164	0.216	0.247	0.257	0.247	0.216	0.164	0.093
5	0	0.093	0.166	0.218	0.249	0.26	0.249	0.218	0.166	0.093

Аниқ ечим жадвалини чиқарамиз:

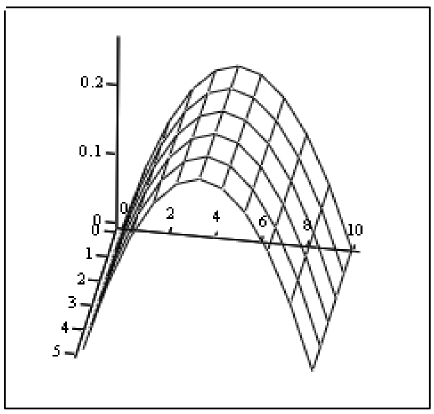
$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09
1	0	0.091	0.162	0.212	0.242	0.253	0.242	0.212	0.162	0.091
2	0	0.092	0.163	0.214	0.245	0.255	0.245	0.214	0.163	0.092
3	0	0.093	0.165	0.216	0.247	0.258	0.247	0.216	0.165	0.093
4	0	0.094	0.167	0.219	0.25	0.26	0.25	0.219	0.167	0.094
5	0	0.095	0.168	0.221	0.252	0.263	0.252	0.221	0.168	0.095

Аниқ ва тақрибий ечим графикини чиқарамиз:



u^T



ua^T

В) ПДТ учун ошкор ЧАС ни MathCAD да ечиш.

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни ёзамиз:

Соҳа $\qquad a := 0 \;\; b := 1 \;\; L := b - a \;\; T := 0.05$

Соҳада тўр $m := 10 \; n := 5 \; i := 0..m \;\; j := 0..n, h := L/m \;\; \tau := T/n \;\; x_i := a + ih \;\; t_j := j\tau$

Берилганлар $u0(x) := x - x^2 \quad f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t \quad g1(t) := 0 \quad g2(t) := 0$

Қўшимча шартлар $u_{i,0} := u0(x_i) \; u_{0,j} := g1(t_j) \; u_{m,j} := g2(t_j)$

u_h қийматларни қатлам бўйича ҳисоблаш ва чиқариш

$i := 1..m-1 \;\; j := 0..n-1 \;\; u_{i,j+1} := r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1-2r)u_{i,j} + \tau f(x_i, t_j) \quad u^T =$

Аниқ ечим, қийматлари $ua(x,t) := (x - x^2)e^t \quad ua_{i,j} := ua(x_i, t_j) \;\; ua^T =$

Отметим, что таблицы значений приближённого и точного решений совпадают с соответствующими таблицами из пункта А), полученными внутренней функцией **Pdesolve.**

С) Решение чисто неявной КРС для ПДУ в MathCAD.

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни ёзамиз:

Соҳа $a := 0 \; b := 1 \; L := b - a \; T := 0.05$

Соҳада тўр $m := 10 \; n := 5 \; i := 0..m \; j := 0..n, h := L/m \; \tau := T/n \;\; x_i := a + ih \; t_j := j\tau$

Аниқ ечим ва унинг жадвали $ua(x,t) := (x - x^2)e^t \quad ua_{i,j} := ua(x_i, t_j)$

Берилганлар $u0(x) := x - x^2 \quad f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t \quad g1(t) := 0 \quad g2(t) := 0$

Қўшимча шартлар $u_{i,0} := u0(x_i) \; u_{0,j} := g1(t_j) \; u_{m,j} := g2(t_j)$

ЧАС матрицаси $A_{0,0} := 1 \; i := 1..m \; A_{0,i} := 0 \quad A_{m,m} := 1 \;\; i = 0..m-1 \;\; A_{m,i} := 0$

$i := 1..m-1 \; A_{i,i-1} := -r \;\; A_{i,i+1} := -r \;\; A_{i,i} := 1 + 2r$

Берилганлар $i := 1..m-1 \; j := 0..n-1 \;\; d_{0,j} := g1(t_{j+1}) \;\; d_{m,j} := g2(t_{j+1}) \;\; d_{i,j} := \tau f_{i,j+1}$

u_h қийматларни қатлам бўйича ҳисоблаш ва чиқариш

$j := 0..n-1 \;\; u^{<j+1>} := A^{-1}(d^{<j>} + u^{<j>})$

ЧАС матрицасини назорат учун чиқариш A=

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.5	2	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.5	2	-0.5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.5	2	-0.5	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.5	2	-0.5	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-0.5	2	-0.5	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.5	2	-0.5	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-0.5	2	-0.5	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	2	-0.5	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	2	-0.5
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Тақрибий ечим u_h жадвали $\quad u^T =$

$u^T =$

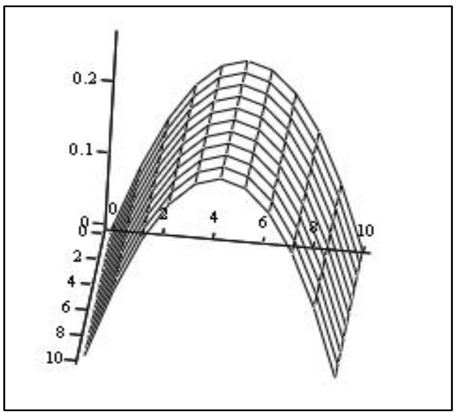
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09
1	0	0.09	0.161	0.211	0.241	0.251	0.241	0.211	0.161	0.09
2	0	0.091	0.162	0.212	0.242	0.253	0.242	0.212	0.162	0.091
3	0	0.091	0.162	0.213	0.244	0.254	0.244	0.213	0.162	0.091
4	0	0.092	0.163	0.214	0.245	0.255	0.245	0.214	0.163	0.092
5	0	0.092	0.164	0.215	0.246	0.256	0.246	0.215	0.164	0.092
6	0	0.093	0.165	0.216	0.247	0.258	0.247	0.216	0.165	0.093
7	0	0.093	0.166	0.217	0.249	0.259	0.249	0.217	0.166	0.093
8	0	0.094	0.167	0.219	0.25	0.26	0.25	0.219	0.167	0.094
9	0	0.094	0.167	0.22	0.251	0.262	0.251	0.22	0.167	0.094
10	0	0.095	0.168	0.221	0.252	0.263	0.252	0.221	0.168	0.095

Аниқ ечим жадвали $\quad \overline{u}_h \; ua^T =$

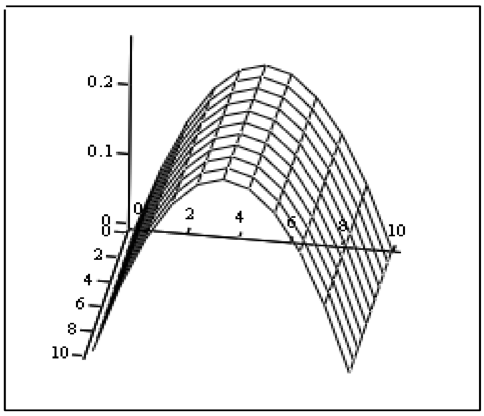
$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09
1	0	0.09	0.161	0.211	0.241	0.251	0.241	0.211	0.161	0.09
2	0	0.091	0.162	0.212	0.242	0.253	0.242	0.212	0.162	0.091
3	0	0.091	0.162	0.213	0.244	0.254	0.244	0.213	0.162	0.091
4	0	0.092	0.163	0.214	0.245	0.255	0.245	0.214	0.163	0.092
5	0	0.092	0.164	0.215	0.246	0.256	0.246	0.215	0.164	0.092
6	0	0.093	0.165	0.216	0.247	0.258	0.247	0.216	0.165	0.093
7	0	0.093	0.166	0.217	0.249	0.259	0.249	0.217	0.166	0.093
8	0	0.094	0.167	0.219	0.25	0.26	0.25	0.219	0.167	0.094
9	0	0.094	0.167	0.22	0.251	0.262	0.251	0.22	0.167	0.094
10	0	0.095	0.168	0.221	0.252	0.263	0.252	0.221	0.168	0.095

Ечимларнинг графикларини чиқариш



u^T



ua^T

D) ПДТ учун Кранка- Николсона ЧАСини MathCAD да ечиш

ПДТ учун Кранка- Николсона ЧАСи

ПДТ $\quad u_t = u_{xx} + f(x,t) \;\; ut(x,t) := (x - x^2)e^t \quad f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t$

Берилганлар $\quad g1(t) := ut(0,t) \;\; g2(t) := ut(1,t) \;\; u0(x) := ut(x,0) \;\; ff(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t$

Тўр $\quad x0 := 0 \;\; xm := 1 \; m := 10 \;\; h := (xm - x0)/m \;\; i := 0..m \;\; x_i := x0 + ih$

Тўр $\quad t0 := 0 \; tn := 0.1 \; n := 10 \;\; \tau := (tn - t0)/n \;\; j := 0..n \;\; t_j := t0 + j\tau \;\; \mu := \tau / h^2 \;\; \tau = 0.01$

Қийматлар $\quad i := 0..m \;\; j := 0..n \;\; f_{i,j} := f(x_i, t_j) \;\; ut_{i,j} := ut(x_i, t_j) \;\; u_{i,0} := u0(x_i) \;\; \mu = 1$

Параметрлар $\quad \gamma := 2(1+\mu) \; \gamma = 4 \;\; \gamma 1 := 2(1-\mu)$

ЧАС матрицасини яратиш

$A_{0,0} := 1 \;\; k := 1..m \;\; A_{0,k} := 0 \;\; B_{0,0} := 0 \;\; k := 1..m \;\; B_{0,k} := 0$

$A_{m,m} := 1 \;\; k := 1..m-1 \;\; A_{m,k} := 0 \;\; B_{m,m} := 0 \;\; k := 1..m-1 \;\; B_{m,k} := 0$

$k := 1 \;\; A_{k,k-1} := -1 \;\; A_{k,k} := \gamma \;\; A_{k,k+1} := -1 \;\; B_{k,k-1} := 1 \;\; B_{k,k} := \gamma 1 \;\; B_{k,k-1} := 1$

ЧАС нинг ўнг томонини яратиш

$j := 0..n-1 \;\; d_{0,j+1} := 0 \;\; d_{m,j+1} := 0 \;\; i := 1..m-1 \;\; d_{i,j} := 2h^2 \, ff(x_i, t_j + \tau/2)$

ЧАС ни қатламлар бўйича чиқариш $j := 0..n-1 \;\; u^{<j+1>} := lsolve(A, d^{<j>} + Bu^{<j>})$

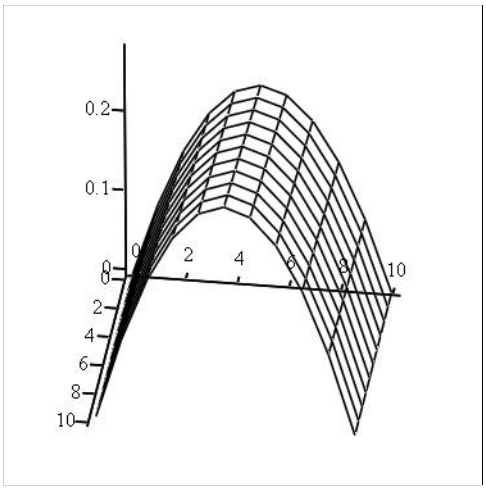
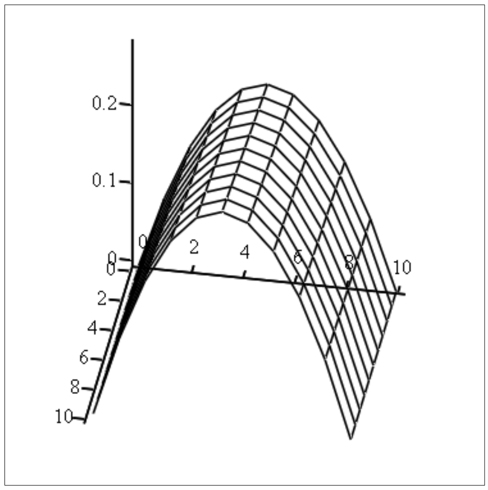
Аниқ ва тақрибий ечим жадвалларини, графикларни чиқариш

$ut^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24
1	0	0.0909	0.16161	0.21211	0.24241	0.25251	0.24241
2	0	0.09182	0.16323	0.21424	0.24485	0.25505	0.24485
3	0	0.09274	0.16487	0.2164	0.24731	0.25761	0.24731
4	0	0.09367	0.16653	0.21857	0.24979	0.2602	0.24979
5	0	0.09461	0.1682	0.22077	0.25231	0.26282	0.25231
6	0	0.09557	0.16989	0.22299	0.25484	0.26546	0.25484
7	0	0.09653	0.1716	0.22523	0.2574	0.26813	0.2574
8	0	0.0975	0.17333	0.22749	0.25999	0.27082	0.25999
9	0	0.09848	0.17507	0.22978	0.2626	0.27354	0.2626
10	0	0.09947	0.17683	0.23209	0.26524	0.27629	...

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24
1	0	0.0909	0.16161	0.21211	0.24241	0.25251	0.24241
2	0	0.09182	0.16323	0.21424	0.24485	0.25505	0.24485
3	0	0.09274	0.16487	0.21639	0.24731	0.25761	0.24731
4	0	0.09367	0.16653	0.21857	0.24979	0.2602	0.24979
5	0	0.09461	0.1682	0.22077	0.2523	0.26282	0.2523
6	0	0.09556	0.16989	0.22298	0.25484	0.26546	0.25484
7	0	0.09653	0.1716	0.22523	0.2574	0.26813	0.2574
8	0	0.0975	0.17332	0.22749	0.25999	0.27082	0.25999
9	0	0.09847	0.17507	0.22977	0.2626	0.27354	0.2626
10	0	0.09946	0.17683	0.23208	0.26524	0.27629	...

ut^T u^T

Юқори тартибли аниқликдаги ЧАС нинг афзаллиги кўриниб турибди: натижаларда фарқ фақат вергулдан сўнг 5 –рақамда сезилмоқда. Натижалар Pdesolve ички функциясини билан мос**.**

6.Соддалик учун бир жинсли чегара масалани қараймиз. Бу ҳолда тақрибий-аналитик ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$u_n(x,t)=\sum_{j=1}^{n}c_j(t)\varphi_j(x),(\varphi_0(x,t)=0)$$

бу ерда $\{\varphi_j(x)=\sin(j\pi x)\}$ базис функциялар,

Четланиш ва тақрибий ечим хатолигини киритамиз:

$$\phi_n(x,t)=\phi_n(x,t,c_1,c_2,..,c_n)=Lu_n(x,t)-f(x,t)=\sum_{j=1}^{n}[c_j'(t)+(j\pi)c_j(t)]\varphi_j(x)-f(x,t);$$

Галеркин усулида четланиш $\phi_n(x,t)$ базис функцияларга ортогонал қилиб олинади:

$$\int_a^b\phi_n(x,t)\varphi_i(x)dx=0,\qquad i=1,2,...,n,\int_a^b\varphi_j(x,t)\varphi_i(x)dx=0,\ i=1,2,...,n.$$

Шунинг учун биз қуйидаги тенгламаларга келамиз:

$$c_i'(t)+(j\pi)^2c_i(t)=q_i(t)=\int_0^1 f(x,t)\varphi_i(x)dx,c_i(0)=\int_0^1 u^0(x)\varphi_i(x)dx,i=1,...,n.$$

Бу тенгламалардан $c_i(t)$ коэффициент-функциялар топилгач, тақрибий ечим топилади.

6.Назарий саволлар ва топшириклар.

1. Шаблон нима?
2. Дисперцион муносабат нима?
3. Ошкор ва ошкормас схема ва уларнинг фарқлари нима?
4. Шартли турғунлик нима? Шартсиз турғунлик нима?
5. Қатлам нима?
6. $\Lambda_x,\Lambda_{xx},\Lambda_{yy}$ -чекли айирмали ҳосилаларни 1,x,y,x^2,xy,y^2 бошқа функцияларга таъсир эттириб кўринг. (Масалан, $\Lambda_x 1=0,\Lambda_{xx}x=0,\Lambda_{xx}x^2=2.$)

Мундарижага

2.9. ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР.

Асосий тушунчалар: *ГДТ учун чекли айирмали схемаларнинг аппроксимацияси, турғунлиги, яқинлашиши, алгоритми.*

Асосий формулалар:

1. ГДТ учун бошланғич-чегара масала.

$Lu = u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < 1, lu = u(x,0) = u_0(x) = u0(x),$

$l_1 u = u'(x,0) = u_1(x) = u1(x), l_2 u = u(0,t) = g_0(t),\ l_3 u(1,t) = g_1(t)$

2. ГДТ учун ЧАС да бошланғич ва чегара шартлар аппроксимацияси .

$$\{u_k^{\ j-1} - 2u_k^{\ j} + u_k^{\ j+1}\}/\tau^2 - \Lambda_{xx} u_k^{\ j} = f_k^{\ j}, \quad k = 1,...,m-1, \quad j = 1,...,n-1,$$

$$u_k^{\ 0} = u0_k, u_k^{\ 1} = u0_k + \tau u1_k + \frac{\tau^2}{2}\{f_k^{\ 0} + \Lambda_{xx} u0_k\},\ k = 1,...,m-1, (u_k^{\ 1} = u0_k + \tau u1_k)\ ,$$

$$u_0^{\ j} = g_0^{\ j},\ u_m^{\ j} = g_1^{\ j},\ j = 0,...,n.$$

3. Аппроксимация.

$R_h = L_h u_h - f^h = 0(\tau^2 + h^2), r_h = l_h u_h - g_h = 0(\tau)$ *ёки*

$R_h = L_h u_h - f^h = 0(\tau^2 + h^2), r_h = l_h u_h - g_h = 0(\tau^2)$

4. Турғунлик : ошкор схема шартли турғун: $\tau \le h$ *, ошкормас схема-абсолют турғун.*

5.MathCAD да алгоритм

1)Ошкор ЧАС: $u^{<j+1>} = Bu^{<j>} + \tau^2 f^{<j>},\ j = 1..n-1, .\ u^{<0>} = \{u0_i\}, u^{<1>} = \{u0_i + \tau u1_i\}$

2) Соф ошкормас ЧАС:

$$Au^{<j+1>} = -u^{<j-1>} + 2u^{<j>} + \tau^2 f^{<j+1>}, u^{<0>} = \{u0_i\}, u^{<1>} = \{u0_i + \tau u1_i\}$$

3) Кранк-Николсон ошкормас ЧАС:

$$Au^{<j+1>} = -Bu^{<j-1>} + 2u^{<j>} + \tau^2 f^{<j+1>}, u^{<0>} = \{u0_i\}, u^{<1>} = \{u0_i + \tau u1_i\}$$

6. ГДТ учун Галёркин усули.

7.Назарий саволлар ва машқлар.

1. ГДТ учун бошланғич-чегара масала.

Тўлқин тарқалиш тенгламаси учун аралаш масалани қараймиз:

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$lu = u(x,0) = u0(x), \qquad l_1 u = u'(x,0) = u1(x), \tag{2}$$

$$l_2 u = u(0,t) = \gamma_0(t), \qquad l_3 u(1,t) = \gamma_1(t), \tag{3}$$

бу ерда f, u_0, u_1, g_0, g_1 - берилган, етарли силлиқ функциялар.

Фараз қиламизки (1) - (3) масала тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга ягона ечимга эга бўлсин.

2.ЧАС тузиш учун олдинги маърузадаги тўрни қурамиз:

$(x_k, t_j) = (kh, \tau j),\ k = 0,...,m;\ j = 0,...,n;\ \ h = 1/m;\ \tau = T/n$.

(1)-(3) ни тўр нуқталарда ёзамиз:

$$u_{tt}(x_k, t_j) - u_{xx}(x_k, t_j) = f(x_k, t_j), \tag{4}$$

$$u(x_k, 0) = u_0(x_k), \quad u'(x_k, t_0) = u_1(x_k), \tag{5}$$

$$u(0, t_j) = g_0(t_j), \quad u(1, t_j) = g_1(t_j), \tag{6}$$

Бу ерга кирувчи $u_{xx}(x_k, t_j)$ ни $\Lambda_{xx} u(x_k, t_j)$ чекли айирмали ҳосила билан, $u_{tt}(x_k, t_j)$ ни ҳам шўнга ухшаш чекли $\Lambda_{tt} u(x_k, t_j)$ чекли айирмали билан, $u'(x_k, t_0)$ ни биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила билан алмаштирамиз:

$$u_{xx}(x_k,t_j)=\frac{u(x_{k-1},t_j)-2u(x_k,t_j)+u(x_{k+1},t_j)}{h^2}-\frac{h^2u_{xxxx}(x_k{}^1,t_j)}{12}=\Lambda_{xx}u(x_k,t_j)+0(h^2),\quad (7)$$

$$u_{tt}(x_k,t_n)=\Lambda_{tt}(x_k,t_n)+0(\tau^2),\qquad (8)$$

$$u'(x_k,0)=\{u(x_k,t_1)-u(x_k,t_0)\}/\tau+0(\tau).\qquad (9)$$

Ҳосилаларнинг бу қийматларини (4) -(6) га қўямиз

$$\frac{u_k{}^{j-1}-2u_k{}^j+u_k{}^{j+1}}{\tau^2}-\Lambda_{xx}u_k{}^j=f_k{}^j,\ k=1,...,m-1,\ j=1,...,n-1,$$

$$u_k{}^0=u_{0k},u_k{}^1=u_k{}^0+\tau u_{1k}+\frac{\tau^2}{2}\{f_k{}^0+\Lambda_{xx}u_{0k}\},\ k=1,...,m,(u_k{}^1=u_k{}^0+\tau u_{1k})\ ,$$

$$u_0{}^j=g_0{}^j,\ u_m{}^j=g_1{}^j,\ j=0,...,n.$$

3. Аппроксимация

Аппроксимацияни текширишда факат дифференциал тенлама ва битта бошлангич шарт хатолик билан алмаштирилаётганини назарда тутамиз:

$$R_h=L_hu_h-f^h=L_hu_h-f_h=\{Lu(x_k,t_j)-f(x_k,t_j)+0(\tau^2+h^2)\}=0(\tau^2+h^2),$$

$$r_h=l_hu_h-g_h=\{u(x_k,t_0)-u_{0h}(x_k),u'_t(x_k,t_0)-u_{1h}(x_k),0,0\}=\{0,0(\tau),0,0\}=0(\tau)\ .$$

Шундай қилиб бошлангич шарт 0(τ) билан, дифференциал тенглама $0(\tau^2+h^2)$ билан аппроксимация қилиняпти экан. Бошлангич шарт аппроксимацияси паст, уни яхшилаш мумкин.

Бунинг учун

$$u(x_k,t_0)=u_{0k},\qquad u'_0(x_k,t_0)=u_{1k},\qquad u_{tt}(x_k,t_0)=u_{xx}(x_k,t_0)+f(x_k,t_0)$$

шартлардан ва Тейлор формуласидан фойдаланамиз:

$$u(x_k,t_1)=u(x_k,t_0)+\tau u'_t(x_k,t_0)+\tau^2u''_{tt}(x_k,t_0)/2+0(\tau^3).$$

Бу ердан

$$u_k{}^1=u_k{}^0+\tau u0_k+\frac{\tau^2}{2}\{f_k{}^0+\Lambda_{xx}u_{0k}\},\qquad k=0,...,m-1.$$

Шундай қилиб (10)-(12) ўрнига аникрок ушбу

$$\frac{u_i^{j-1}-2u_i^j+u_i^{j+1}}{\tau^2}-\Lambda u_i^j=f_i^j,\quad k=1,...,m-1,\quad j=1,...,n-1,\quad (13)$$

$$u_k{}^0=u_{0k},\quad u_k{}^1=u0_k+\tau u1_k+\frac{\tau^2}{2}\{f_k{}^0+\Lambda_{xx}u0_k\},\ k=1,...,m-1,(14)$$

$$u_0{}^j=g_0{}^j,\quad u_m{}^j=g_1{}^j,\ \ j=0,...,n.\ (15)$$

схемани олиш мумкин. Энди аппроксимация $0(\tau^2+h^2)$ бўлди.

4. Турғунлик

Турғунликни текшириш учун ўнг томонларни 0 га тенг деб оламиз ва хусусий ечимни гармоника $u_k{}^j=\lambda^j\exp(\varphi ik),i^2=-1$,i-мавҳум бирлик, кўринишида излаймиз.Уни чекли айирмали схемага қўямиз:

$$\lambda^j\exp(\varphi ik)(\lambda^{j+1}-2\lambda^j+\lambda^{j-1})/\tau^2=\lambda^j\exp(\varphi ik)(\exp(\varphi i)-2+\exp(-\varphi i))/h^2.$$

$\lambda^n\exp(\varphi ik)$ га кискартириб ушбу дисперцион муносабатни топамиз:

$$\lambda^2-2\lambda(1-2\tau^2\sin(\alpha/2)/h^2)+1=0$$

Виетга теоремасида асосан ечимлар кўпайтмаси $\lambda_1\lambda_2=1$. Агар дискриминантни мусбат десак $\lambda_1<1$ бўлса $\lambda_2>1$ бўлади.

Бу ҳолда турғунлик йук. Энди дискриминантни манфий десак, иккита комплекс ечим мавжуд бўлиб $\lambda_1\lambda_2 = 1$ бўлади. Бу ҳолда турғунликни кутиш мумкин. Демак, (13) нинг дискриминанти манфий бўлиши керак экан.

Яъни,

$$\left|1 - 2(\tau^2 \sin(\alpha/2)/h^2)\right| \le 1$$

Бу тенгсизлик $\tau \le h$ дагини бажарилиши мумкин. Демак, (13)-(15) схема шартли турғун экан.

5. Алгоритм.

0- ва 1- қатламларда ечим маълум: $u^{<0>} = \{u0_i\}, u^{<1>} = \{u0_i + \tau u1_i\}$ ёки

$$u_k^{\,0} = u0_k, u_k^{\,1} = u0_k + \tau u1_k + \frac{\tau^2}{2}\{f_k^{\,0} + \Lambda_{xx} u0_k\},\ k = 1,...,m-1\ .$$

Қолган қатламларда ечим қуйидаги формулалар асосида топилади:

1)Ошкор ЧАС*:* $u^{<j+1>} = Bu^{<j>} + \tau^2 f^{<j>},\ j = 1..n-1,.$

2) Соф ошкормас *ЧАС:*

$$Au^{<j+1>} = -u^{<j-1>} + 2u^{<j>} + \tau^2 f^{<j+1>},\ j = 1..n-1;$$

3) Кранк-Николсон ошкормас ЧАС*:*

$$Au^{<j+1>} = -Bu^{<j-1>} + 2u^{<j>} + \tau^2 f^{<j+1>},\ j = 1..n-1.$$

формулалар билан реккурент равишда топилади.

6.ГДТ учун ЧАСни MathCadда ечишни ташкил этиш.

A) Pdesolve ички функция билан ечиш.

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} = f\left(x,t\right) = (x - x^2 + 2)e^t,\ u = u(x,t), a \le x \le b, 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = u_0(x) = (x - x^2), u_t^{'}(x,0) = u_1(t) = (x - x^2)\ \ u(a,t) = g_1(t) = 0, u(b,t) = g_2(t) = 0\ .$$

ГДТ ечиш учун қуйидаги математик командаларни ёзамиз:

$a := 0\ b := 1\ \ L := b - a\ T := 0.0005$ «соҳа

$m := 10\ n := 10\ i := 0..m\ \ j := 0..n, h := L/m\ \ \ \tau := T/n\ \ \ \ x_i := a + ih\ t_j := j\tau$ «тўр

$ut(x,t) := ut(x,t)\ \ ut_{i,j} := ut(x_i, t_j)$ «аниқ ечим $ua(x,t)$ ва каркас $\bar{u}_h$

$u0(x) := x - x^2\ \ u1(x) := x - x^2\ \ f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t\ \ g1(t) := 0\ \ g2(t) := 0$ «берилди

Given $w_t(x,t) := v(x,t)\ \ v_t(x,t) := w_{xx}(x,t) + f(x,t)$ «ГДТ

$w(x,0) := u0(x)\ \ v(x,0) := u1(x)\ w(0,t) := g1(t)\ \ w(1,t) := g2(t)$ « берилганлар

$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := Pdesolve\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, n, n\right]\ \ u_{i,j} := w(x_i, t_j)$ «ички функция

« Аниқ ва тақрибий ечим жадвали

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.0889	0.158	0.2074	0.237	0.2469	0.237	0.2074	0.158	0.0889	0
1	0	0.0898	0.1596	0.2095	0.2394	0.2494	0.2394	0.2095	0.1596	0.0898	0
2	0	0.0907	0.1612	0.2116	0.2418	0.2519	0.2418	0.2116	0.1612	0.0907	0
3	0	0.0916	0.1628	0.2137	0.2443	0.2544	0.2443	0.2137	0.1628	0.0916	0
4	0	0.0925	0.1645	0.2159	0.2467	0.257	0.2467	0.2159	0.1645	0.0925	0
5	0	0.0934	0.1661	0.218	0.2492	0.2596	0.2492	0.218	0.1661	0.0934	0

$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.0909	0.1616	0.2121	0.2424	0.2525	0.2424	0.2121	0.1616	0.0909	0
2	0	0.0918	0.1632	0.2142	0.2448	0.2551	0.2448	0.2142	0.1632	0.0918	0
3	0	0.0927	0.1649	0.2164	0.2473	0.2576	0.2473	0.2164	0.1649	0.0927	0
4	0	0.0937	0.1665	0.2186	0.2498	0.2602	0.2498	0.2186	0.1665	0.0937	0
5	0	0.0946	0.1682	0.2208	0.2523	0.2628	0.2523	0.2208	0.1682	0.0946	0

В) Ошкор шартли ЧАС. Қуйидаги командаларни ёзамиз:

$a:=0\ b:=1\ \ L:=b-a\ T:=0.05\ m:=10\ n:=5\ i:=0..m\ \ j:=0..n$ «соҳа

$h:=L/m\quad \tau:=T/n\quad x_i:=a+ih\ t_j:=j\tau\quad r:=\tau^2/h^2$ «тўр

$ut(x,t):=(x-x^2)e^t, ut_{i,j}:=ut(x_i,t_j)$ «аниқ ечим $ut(x,t)$ ва каркас

$u0(x):=x-x^2\ \ u1(x):=x-x^2\quad f(x,t):=(x-x^2+2)e^t\quad g1(t):=0\ \ g2(t):=0$ «берилди

$u_{i,0}:=u0(x_i)\ u_{i,1}:=u_{i,0}+\tau u1(x_i)\ u_{0,j}:=g1(t_j)\ \ u_{m,j}:=g2(t_j)$ « Ошкор ЧАС

$i:=1..m-1\ \ j:=1..n-1\ \ u_{i.j+1}:=r(u_{i-1.j}+u_{i+1.j})+2(1-r)u_{i.j}+\tau^2 f(x_i,t_j)-u_{i.j-1}$

«Аниқ ва тақрибий ечим жадвалини чиқарамиз:

« Фарқни фақат ўнли рақамлар сони ошириб борилгандагина кўриш мумкин.

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
2	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.2501	0.24	0.21	0.16	0.09	0
3	0	0.09	0.16	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.16	0.09	0
4	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
5	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
6	0	0.0901	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.0901	0
7	0	0.0901	0.1601	0.2101	0.2402	0.2502	0.2402	0.2101	0.1601	0.0901	0
8	0	0.0901	0.1601	0.2102	0.2402	0.2502	0.2402	0.2102	0.1601	0.0901	0
9	0	0.0901	0.1601	0.2102	0.2402	0.2502	0.2402	0.2102	0.1601	0.0901	0
10	0	0.0901	0.1602	0.2102	0.2402	0.2502	0.2402	0.2102	0.1602	0.0901	0

$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
2	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.2501	0.24	0.21	0.16	0.09	0
3	0	0.09	0.16	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.16	0.09	0
4	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
5	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
6	0	0.0901	0.1601	0.2101	0.2401	0.2502	0.2401	0.2101	0.1601	0.0901	0
7	0	0.0901	0.1601	0.2101	0.2402	0.2502	0.2402	0.2101	0.1601	0.0901	0
8	0	0.0901	0.1601	0.2102	0.2402	0.2502	0.2402	0.2102	0.1601	0.0901	0
9	0	0.0901	0.1601	0.2102	0.2402	0.2502	0.2402	0.2102	0.1601	0.0901	0
10	0	0.0901	0.1602	0.2102	0.2402	0.2503	0.2402	0.2102	0.1602	0.0901	0

С) Соф ошкормас ЧАС . Ушбу командаларни ёзамиз:

$a:=0\ b:=1\ \ L:=b-a\ T:=0.0005\ m:=10\ n:=10\ i:=0..m\ \ j:=0..n$ «соҳа

$h:=L/m\ \ \tau:=T/n\ \ \ x_i:=a+ih\ t_j:=j\tau\ \ \ ut_{i,j}:=ut(x_i,t_j)\ r:=\tau^2/h^2$ «тўр

$u0(x):=x-x^2\ u1(x):=x-x^2\ \ f(x,t):=(x-x^2+2)e^t\ \ g1(t):=0\ \ g2(t):=0$ «берилди

$u_{i,0}:=u0(x_i)\ u_{i,1}:=u_{i,0}+\tau u1(x_i)\ u_{0,j}:=g1(t_j)\ \ u_{m,j}:=g2(t_j)$ «қўшимча шартлар

« ЧАС матрицаси ва алгоритмнинг қадамлари

$A_{0,0}:=1\ i:=1..m\ \ A_{0,i}:=0$

$i:=1..m-1\ A_{i,i-1}:=-r\ \ A_{i,i+1}:=-r\ \ A_{i,i}:=1+2r$

$i:=0..m-1\ \ A_{m,i}:=0\ \ A_{m,m}:=1$

$j:=1..n-1\ \ \ u^{<j+1>}:=A^{-1}(-u^{<j-1>}+\tau^2 f^{<j+1>}+2u^{<j>})$

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.005	1.01	-0.005
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

«Аниқ ечим ва тақрибий ечимларнинг 0-, ва 1-қатламлардаги қийматларини чиқариш

$u^{\langle 0\rangle T} =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0

$u^{\langle 1\rangle T} =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0

«Аниқ ечим ва тақрибий ечимларнинг қийматлар жадвалини чиқариш

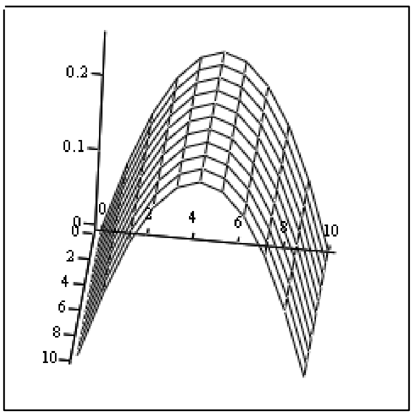
$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
2	0	0.0899	0.1599	0.2099	0.2399	0.2499	0.2399	0.2099	0.1599	0.0899	0
3	0	0.0897	0.1597	0.2097	0.2397	0.2497	0.2397	0.2097	0.1597	0.0897	0
4	0	0.0894	0.1594	0.2094	0.2394	0.2494	0.2394	0.2094	0.1594	0.0894	0
5	0	0.089	0.159	0.2091	0.2391	0.2491	0.2391	0.2091	0.159	0.089	0
6	0	0.0886	0.1585	0.2086	0.2386	0.2486	0.2386	0.2086	0.1585	0.0886	0
7	0	0.088	0.158	0.208	0.238	0.248	0.238	0.208	0.158	0.088	0
8	0	0.0873	0.1573	0.2073	0.2373	0.2473	0.2373	0.2073	0.1573	0.0873	0
9	0	0.0866	0.1565	0.2065	0.2365	0.2465	0.2365	0.2065	0.1565	0.0866	0
10	0	0.0858	0.1556	0.2056	0.2356	0.2456	0.2356	0.2056	0.1556	0.0858	0

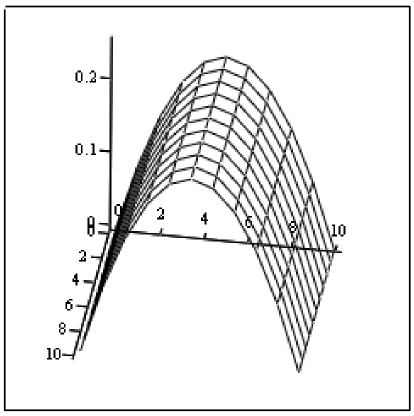
$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
2	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
3	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
4	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.2501	0.24	0.21	0.16	0.09	0
5	0	0.09	0.16	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.16	0.09	0
6	0	0.09	0.16	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.16	0.09	0
7	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
8	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
9	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0
10	0	0.09	0.1601	0.2101	0.2401	0.2501	0.2401	0.2101	0.1601	0.09	0

«Аниқ ва тақрибий ечим графиклари:



u^T



ua^T

Д) Абсолют турғун Кранк-Никольсон ЧАСи

MathCAD ойнасида алгоритмнинг қуйидаги командаларини терамиз:

ГДТ $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$ **Кранк-Николсон схемаси** $Au^{<j+1>} = Bu^{<j-1>} + 4u^{<j>} + 2\tau^2 f^{<j+1/2>}$

$ut(x,t) := (x - x^2)e^t \quad f(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t \quad ff(x,t) := (x - x^2 + 2)e^t \; g1(t) := ut(0,t) \;\; g2(t) := ut(1,t)$

$u0(x) := ut(x,0) \;\; dut(x,t) := dut(x,t)/dt \;\; u1(x) := dut(x,0) \rightarrow x - x^2$

$x0 := 0 \;\; xm := 1 \;\; m := 10 \;\; h := (xm - x0)/m \;\; i := 0..m \;\; x_i := x0 + ih$

$t0 := 0 \;\; tn := 1 \;\; n := 10 \;\; \tau := (tn - t0)/n \;\; j := 0..n \;\; t_i := t0 + j\tau \;\; r := (\tau / h)^2$

$i := 0..m \;\; j := 0..n \;\; f_{i,j} := f(x_i, t_j) \; ut_{i,j} := ut(x_i, t_j) \;\; ff_{i,j} := ff(x_i, t_j + \tau/2) \;\; u_{i,0} := u0(x_i)$

$i := 1..m-1 \;\; u_{i,1} := u_{i,0} + (r/2)(u_{i-1,0} - 2u_{i,0} + u_{i+1,0})$

ЧАС учун ЧАТС ни яратиш

$\gamma := 2r \;\; i := 0 \;\; j := 0..m \;\; A_{i,j} := if(j = 0,1,0) \;\; B_{i,j} := 0$

$i := 1..m-1 \;\; A_{i,j} := if[(j \neq i-1)*(j \neq i+1), 0, -r] \;\; A_{i,i} := 2(1+r)$

$i := 1..m-1 \;\; B_{i,j} := if[(j \neq i-1)*(j \neq i+1), 0, r] \;\; B_{i,i} := -2(1+r)$

$i := m \;\; A_{i,j} := if(j = m,1,0) \;\; B_{i,j} := 0$

Чегара шартлар ва ўнг томон

$j := 0..n \;\; d_{0,j} := g1(t_j) \;\; d_{m,j} := g2(t_j) \;\; i := 1..m-1 \;\; d_{i,j} := if[(i=0)*(i=m), 0, 2\tau^2 ff_{i,j}]$

$d^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.044	0.045	0.046	0.047	0.047	0.047	0.046	0.045	0.044	0
1	0	0.049	0.05	0.051	0.052	0.052	0.052	0.051	0.05	0.049	0
2	0	0.054	0.055	0.057	0.058	0.058	0.058	0.057	0.055	0.054	0
3	0	0.059	0.061	0.063	0.064	0.064	0.064	0.063	0.061	0.059	0
4	0	0.066	0.068	0.069	0.07	0.071	0.07	0.069	0.068	0.066	0
5	0	0.072	0.075	0.077	0.078	0.078	0.078	0.077	0.075	0.072	0
6	0	0.08	0.083	0.085	0.086	0.086	0.086	0.085	0.083	0.08	0
7	0	0.088	0.091	0.094	0.095	0.095	0.095	0.094	0.091	0.088	...

ЧАС ни қатламлар бўйича ечиш

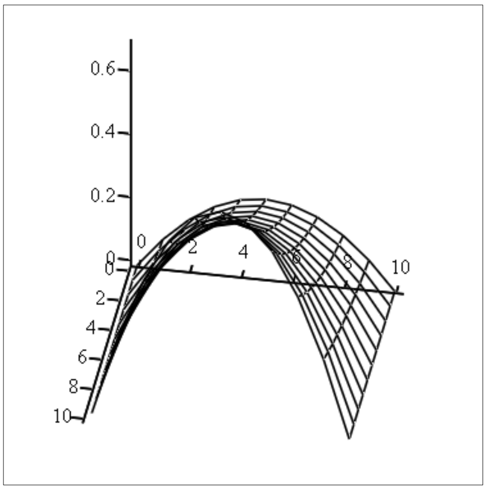
$$j := 1..n-1 \;\; u^{<j+1>} := lsolve(A, Bu^{<j-1>} + 4u^{<j>} + d^{<j>})$$

$ua^T =$

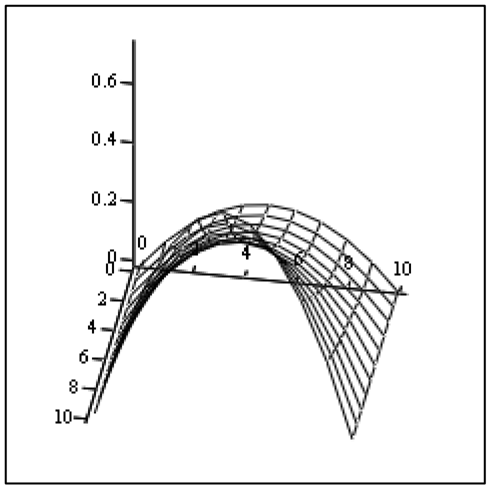
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.099	0.177	0.232	0.265	0.276	0.265	0.232	0.177	0.099	0
2	0	0.11	0.195	0.256	0.293	0.305	0.293	0.256	0.195	0.11	0
3	0	0.121	0.216	0.283	0.324	0.337	0.324	0.283	0.216	0.121	0
4	0	0.134	0.239	0.313	0.358	0.373	0.358	0.313	0.239	0.134	0
5	0	0.148	0.264	0.346	0.396	0.412	0.396	0.346	0.264	0.148	0
6	0	0.164	0.292	0.383	0.437	0.456	0.437	0.383	0.292	0.164	0
7	0	0.181	0.322	0.423	0.483	0.503	0.483	0.423	0.322	0.181	0
8	0	0.2	0.356	0.467	0.534	0.556	0.534	0.467	0.356	0.2	...

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09	0
1	0	0.089	0.166	0.221	0.254	0.265	0.254	0.221	0.166	0.089	0
2	0	0.095	0.176	0.236	0.272	0.284	0.272	0.236	0.176	0.095	0
3	0	0.109	0.193	0.256	0.295	0.308	0.295	0.256	0.193	0.109	0
4	0	0.127	0.218	0.283	0.324	0.338	0.324	0.283	0.218	0.127	0
5	0	0.145	0.249	0.319	0.362	0.376	0.362	0.319	0.249	0.145	0
6	0	0.161	0.284	0.364	0.409	0.424	0.409	0.364	0.284	0.161	0
7	0	0.178	0.32	0.415	0.468	0.484	0.468	0.415	0.32	0.178	0
8	0	0.2	0.358	0.472	0.536	0.557	0.536	0.472	0.358	0.2	...



ua^T



u^T

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

7.Соддалик учун бир жинсли чегара масалани қараймиз. Бу ҳолда тақрибий-аналитик ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$u_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j(x), (\varphi_0(x,t) = 0)$$

бу ерда $\{\varphi_j(x) = \sin(j\pi x)\}$ базис функциялар,

Четланиш ва тақрибий ечим хатолигини киритамиз:

$$\phi_n(x,t) = \phi_n(x,t,c_1,c_2,..,c_n) = Lu_n(x,t) - f(x,t) = \sum_{j=1}^{n}[c_j''(t) + (j\pi)c_j(t)]\varphi_j(x) - f(x,t);$$

Галеркин усулида четланиш $\phi_n(x,t)$ базис функцияларга ортогонал қилиб олинади:

$$\int_a^b \phi_n(x,t)\varphi_i(x)dx = 0, \qquad i = 1,2,...,n, \int_a^b \varphi_j(x,t)\varphi_i(x)dx = 0,\ i = 1,2,...,n.$$

Шунинг учун биз қуйидаги тенгламаларга келамиз:

$$c_i''(t) + (j\pi)^2 c_i(t) = q_i(t) = \int_0^1 f(x,t)\varphi_i(x)dx,$$

$$c_i(0) = \int_0^1 u^0(x)\varphi_i(x)dx, c_i'(0) = \int_0^1 u^1(x)\varphi_i(x)dx,\ i = 1,...,n.$$

Бу тенгламалардан $c_i(t)$ коэффициент-функциялар топилгач, тақрибий ечим топилади.

Назарий саволлар ва топшириклар

1. (10)-(12) схема шаблони топинг
2. (10)-(12) схема буйича ҳисоблаш учун дастур тузинг
3. (13)-(15) схема буйича ҳисоблаш учун дастур тузинг
4. (13)-(15) схема аппрокцимация шартлими ёки абсолютми?
5. (13)-(15) схема шартлар турғунми ёки абсолют турғунми?

Мундарижага

2.10. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМА

Асосий тушунчалар: *Кўп ўзгарувчили параболик тенглама учун ошкор схема, ошкормас схема, каср қадамли схемалар, тежамкор схемалар*

Асосий формулалар:

1. Классик ошкор ва ошкормас схемалар.

$$\frac{u_{ij}^{k}-u_{ij}^{k-1}}{\tau}+(\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy})u_{ij}^{k-1}=f_{ij}^{k-1}, k=0,1,...,n-1, 1\le i,j\le m_1-1, m_2-1,$$

$$\frac{u_{ij}^{k}-u_{ij}^{k-1}}{\tau}+(\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy})u_{ij}^{k}=f_{ij}^{k} \quad , k=0,1,...,n-1, 1\le i,j\le m_1-1, m_2-1.$$

2. Каср қадамли тежамкор схемалар.

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2}-u_{ij}^{k}}{\tau}-\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2}=f_{1ij}^{h+1/2} \quad , k=0,1,...,n-1, 1\le i,j\le m_1-1, m_2-1,$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+1/2}}{\tau}-\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1}=f_{2ij}^{h+1/2}, k=0,1,...,n-1, 1\le i,j\le m_1-1, m_2-1.$$

3. Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Классик схемаларни умумлаштириш.

D={0≤x, y≤1, 0≤t≤τ} соҳада иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун бошлангич- чегара дифференциал масалани қараймиз:

$$Lu=u_t-u_{xx}-u_{yy}=f(x,y,t) \qquad (1)$$

$$lu=u(x,y,0)=u_0(x,y) \qquad (2)$$

$$l_1u(0,y,t)=\gamma_1, \quad l_2u(1,y,t)=\gamma_2, \ l_3u(x,0,t)=\gamma_3, \quad l_4u(x,1,t)=\gamma_4, \quad (3)$$

Фараз қиламизки (1) - (3) масала ягона ечим $\bar{u}=\bar{u}(x,y,t)$ га эга бўлсин ва ечим $\bar{u}_{tt}, \bar{u}_{xxxx}, \bar{u}_{yyyy}$ ҳосилаларга эга бўлсин. Ечимни чекли айирмалар усули билан тақрибий топамиз. Бунинг учун соҳада

$$x_i=ih_1, \ y_j=jh_2, \ t_k=k\tau, \ i=0,...,m_1; \quad j=0,...,m_2; \ k=0,...,n$$

тўғри чизиклар ёрдамида тўр ҳосил қиламиз. Ечим $\bar{u}(x_i,u_j,t_k)$ нинг (x_i,y_j,t_k) нуқтадаги тақрибий қийматини $\bar{u}_{ij}^{k}=\bar{u}(x_i,u_j,t_k)$ деб белгилаймиз: Биз ЧАС тузиш ёрдамида $u_h=\{u_{ij}^{k}\}=\{u(x_i,u_j,t_k)\}\approx\{\bar{u}_{ij}^{k}\}=\{\bar{u}(x_i,u_j,t_k)\}$ тақрибий жадвал қидирамиз. Бу тақрибий жадвал биз қурадиган чекли айирмали схема ечими бўлади. 2.8-маърузадигидек $u_{xx}(x_i,u_j,t_k)$, $u_{yy}(x_i,u_j,t_k)$ ҳосилаларни аппроксимация қилувчи ушбу чекли айирмали операторларни киритамиз.

$$\Lambda_{xx}u(x_i,u_j,t_k)=\frac{u(x_{i-1},u_j,t_k)-2u(x_i,u_j,t_k)+u(x_{i+1},u_j,t_k)}{h_1^2},$$

$$\Lambda_{yy}u(x_i,u_j,t_k)=\frac{u(x_i,u_{j-1},t_k)-2u(x_i,u_j,t_k)+u(x_i,u_{j+1},t_k)}{h_2^2}$$

Равшанки,

$$u'(x_i,y_j,t_k)=\frac{u(x_i,y_j,t_{k+1})-u(x_i,y_j,t_k)}{\tau}+0(\tau),$$

$$u_{xx}(x_i,y_j,t_k)=\Lambda_{xx}u(x_i,y_j,t_k)+0(h_1^2), \quad u_{yy}(x_i,y_j,t_k)=\Lambda_{yy}u(x_i,y_j,t_k)+0(h_2^2),$$

$$R_h=0(\tau+h_1^2+h_2^2).$$

(1)-(3) ни тўр нуқталарида ёзиб, 2.8-маърузадагидек ҳосилаларини чекли айирмалар билан алмаштириб ушбу икки хил схемани ҳосил қиламиз (ошкор ва ошкормас схемалар):

$$\frac{u_{ij}{}^{k}-u_{ij}{}^{k-1}}{\tau}+\Lambda u_{ij}{}^{k-1}=f_{ij}{}^{k-1}\quad,\ \frac{u_{ij}{}^{k}-u_{ij}{}^{k-1}}{\tau}+\Lambda u_{ij}{}^{k}=f_{ij}{}^{k}\qquad(4)$$

Бу ерда $\Lambda=\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy}$, $\quad \Lambda u_{ij}{}^{k}=\Lambda_{xx}u_{ij}{}^{k}+\Lambda_{yy}u_{ij}{}^{k}$

Қўшимча шартларни ёзмадик, чунки уларда ҳосилалар йук, улар бехато аппроксимация қилинади. Схемаларни хоссаларини санаб ўтайлик. **Ошкор схема** - аппроксимацияси: $0(\tau+h_1^2+h_2^2)$, шартли турғун: $\tau/h_1^2+\tau/h_2^2\le 1/2$, ҳисобланиши-реккурент формула ёрдамида:

$$u_{ij}{}^{k}=u_{ij}{}^{k-1}-\tau\Lambda u_{ij}{}^{k-1}+\tau f_{ij}{}^{k-1}.$$

Ошкормас схема - Аппроксимацияси: $0(\tau+h_1^2+h_2^2)$, абсолют турғун, лекин ҳар бир қатламда чизиқли анча мураккаб тенгламалар системасини ечиш зарур:

$$(E+\tau\Lambda)u_{ij}^{k}=u_{ij}^{k-1}+\tau f_{ij}^{k},\Lambda=\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy}.\qquad(5)$$

Иккала схема ҳам камчиликларга ҳам эга, бири шартли турғун, иккинчиси ечилиши қийин.

Шунинг учун, бундай камчиликлардан ҳоли каср кадамли айирмали схемаларни кўрамиз Бундан схемаларни биринчи бўлиб академик Н.Н.Яненко яратган.

Ҳар бир катламда бажарилаётган амаллар сони нуқталар сонига пропорционал бўлган схемалар тежамкор схемалар дейилади. Каср кадамли схемалар ана шундай схемалардир.

2. Каср кадамли схемалар. Асосий дифференциал масалада (1)-(3) қўшимча шартлар аниқ аппроксимация қилинаётганлиги учун факат (1) тенгламани аппроксимация килиш билан шуғулланамиз. (1) ни қуйиагича ёзиб оламиз.

$$1/2u_t-u_{xx}=f_1,\quad 1/2u_t-u_{yy}=f_2,\qquad f_1+f_2=f\quad(6)$$

(6) учун каср кадамли айирмали схемаларни 2.9-маърузадаги каби тузамиз:

$$L_h^{(1)}u^h=\frac{u_{ij}{}^{k+1/2}-u_{ij}{}^{k}}{\tau}-\frac{u_{i-1j}{}^{k+1/2}-2u_{ij}{}^{k+1/2}+u_{i+1j}{}^{k+1/2}}{h_1^2}=f_{1ij}{}^{k+1/2},$$

$$L_h^{(2)}u^h=\frac{u_{ij}{}^{k+1}-u_{ij}{}^{k+1/2}}{\tau}-\frac{u_{i-1j}{}^{k+1}-2u_{ij}{}^{k+1}+u_{i+1j}{}^{k+1}}{h_2^2}=f_{2ij}{}^{k+1/2},$$

$$k=0,...,n-1,\ i=1,...,m_1-1,\ j=1,...,m_2-1.$$

ёки батафсилрок,

$$r_1u_{i-1j}{}^{k+1/2}-(1+2r_1)u_{ij}{}^{k+1/2}+r_1u_{i+1j}{}^{k+1/2}=-(u_{km}^{k}+\tau f_{1ij}{}^{k+1/2}),r_1=\frac{\tau}{h_1^2},\qquad(7)$$

$$k=0,...,n-1,\ i=1,...,m_1-1,\ j=1,...,m_2-1.$$

$$r_2u_{ij-1}{}^{k+1}-(1+2r_2)u_{ij}{}^{k+1}+r_1u_{ij+1}{}^{k+1}=-(u_{ij}^{k+1/2}+\tau f_{2ij}{}^{k+1/2}),r_2=\frac{\tau}{h_2^2},\qquad(8)$$

$$k=0,...,n-1,\ i=1,...,m_1-1,\ j=1,...,m_2-1.$$

Шундай қилиб аввал (7) ечилади, $u_{ij}{}^{k+1/2}$ топилади, сўнг (8) ечилиб $u_{ij}{}^{k+1}$ топилади.

2.1. Аппроксимацияни текширамиз. (7), (8) схемалар (1) ни аппроксимация килмайди. Лекин:

$L_h^{(1)}u^h = 1/2u_t - u_{xx} - f_1 + 0(\tau + h_1^2),\ L_h^{(2)}u^h = 1/2u_t - u_{yy} - f_2 + 0(\tau + h_2^2),$

$R_h^{(1)} = L_h^{(1)}u^h - (1/2u_t - u_{xx} - f_1)^h = 0(\tau + h_1^2),\quad R_h^{(2)} = L_h^{(2)}u^h - (1/2u_t - u_{yy} - f_2)^h = 0(\tau + h_2^2),$

$R_h = R_h^{(1)} + R_h^{(2)} = L_h u_h - (u_t - u_{xx} - u_{yy} - f)_h = 0(\tau + h_1^2 + h_2^2).$

Демак, аппроксимация $R_h = 0(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ экан.

2.2. Турғунлик. (7) ва (8) учун

$$\lambda_1 = 1/(1 + 4\tau\sin^2(\alpha/2))/h_1^2,\qquad \lambda_2 = 1/(1 + 4\tau\sin^2(\alpha/2))/h_2^2,$$

Доимо, $\lambda = \lambda_1\lambda_2 < 1$. Шунинг учун (7), (8) схема абсолют турғун.

2.3 Хар бир схема (7),(8) прогонка усули билан ечилади.

3. Программа ва натижалар

Назарий саволлар ва топшириклар

1. Ошкор схема (25.4) учун турғунлик шартини келтириб чикаринг.
2. Ошкормас (25.5) учун турғунлик шартини келтириб чикаринг.
3. (25.7),(25.8) схема нима учун тежамкор?
4. Каср кадамли схема (25.7),(25.8) учун турғунлик шартини келтириб чикаринг.

Мундарижага

2.11. ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР

Асосий тушунчалар: *Эллиптик тенглама учун ЧАС тузиш, аппроксимация, турғунлик, яқинлашиш, алгоритм*

Асосий формулалар:

1*.Эллиптик тенглама учун чегара масала.*

2.ЧАС тузиш ва текшириш.

3.Алгоритм ва дастур.

4.Эллиптик тенглама учун Галёркин усули.

$$L_h u^h = \frac{u_{k-1m} - 2u_{km} + u_{k+1m}}{h^2_1} + \frac{u_{km-1} - 2u_{km} + u_{km+1}}{h^2_2} = f_{km}, k = 1,...,K-1, m = 1,...,M-1.$$

$$u_{km} = g(x_k, y_m), k = 0, K, m = 0,1,...,M; m = 0, M, k = 0,1,...,K.$$

2. ЧАСни текшириш

Аппроксимация: $R_h = L_h u_h - f_h = 0(h_1^2 + h_2^2)$ *.Турғунлиги:* $\left\| u^h \right\|_{U_h} \le C_1 \left\| f^h \right\|_{F_h} + C_2 \left\| g^h \right\|_{G_h}$.

3. ЧАСни ечиш алгоритми.

$$u_{km}^{(j)} = (\frac{2}{h_1^2 + h_2^2})^{-1} \left[\frac{u_{k-1m}^{(j-1)} + u_{k-1m}^{(j-1)}}{h^2_1} + \frac{u_{km-1}^{(j-1)} + u_{km+1}^{(j-1)}}{h^2_2} - f_{km} \right], k = 1,...,K-1, m = 1,...,M-1.$$

$$u_{km}^{(j)} = g(x_k, y_m), k = 0, K, m = 0,1,...,M; m = 0, M, k = 0,1,...,K, j = 1,2,....$$

4. Назарий саволлар ва топшириклар.

1. ЧАС тузиш. Энг содда эллиптик тенглама

$$L\bar{u} = \bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in D, \qquad (1)$$

учун чегара масала қўйилган бўлсин:

$$[\alpha\,(x,y)\bar{u}(x,y) + \beta(x,y)d\bar{u}/dn]|_\Gamma = g(x,y) \qquad (2)$$

бу ерда $D \subset R^2$ бирор чекли соха, Г-унинг чегараси, f,g-берилган функциялар,du/dn - чегарада ташқи нормал бўйича ҳосила.

Биз β=0, α=1 бўлган содда ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, берилган соҳада масалани ечими мавжуд, ечим тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

Айирмали схема тузиш учун D соҳада $x_k = kh, y_m = ml$, k=0, ±1, ...,; m=0, ±1, ..., тўғри чизиқлар ўтказамиз. D_{hl} тўр деб $\bar{D}$ =D+Г га тегишли барча нуқталарни қабул қиламиз. $(x_k, y_m) \in D_{hl}$ нуқтани тўрнинг ички нуқтаси деймиз, агар у ўзи ва энг яқин тўртта нуқта D_{hl} тўрга тегишли бўлса, улар чизмада о билан белгиланган. Қолган нуқталарни чегара нуқталар деймиз, улар * билан белгиланган.

(x_k, y_m) нуқта ички бўлсин. Ички нуқталарда (1) дифференциал тенгламани ёзамиз:

$$\bar{u}_{xx}(x_k, y_m) + \bar{u}_{yy}(x_k, y_m) = f(x_k, y_m).$$

2.10-маърузадагидек u_{xx}, u_{yy} ҳосилаларни чекли айирмали ҳосилалар билан алмиаштирамиз:

$$\bar{u}_{xx}(x_k, y_m) = \Lambda_{xx}\bar{u}(x_k, y_m) + h_1^2 \bar{u}_{xxxx}(c_1)/24, \qquad (3)$$

$$\bar{u}_{yy}(x_k, y_m) = \Lambda_{yy}\bar{u}(x_k, y_m) + h_2^2 \bar{u}_{yyyy}(c_2)/24 \qquad (4)$$

Натижада ушбу тенгликка келамиз:

$$L\bar{u}(x_k, y_m) = \bar{u}_{xx}(x_k, y_m) + \bar{u}_{yy}(x_k, y_m) = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\bar{u}(x_k, y_m) + 0(h_1^2 + h_2^2) \qquad (5)$$

Чексиз кичик миқдорларни ташлаб юбориб қуйидаги чекли айирмали схемага келамиз:

$$Lu_h = f_h, l_h u_h = g_h, \qquad (6)$$

ёки

$$L_h u_h = \frac{u_{k-1m} - 2u_{km} + u_{k+1m}}{h^2{}_1} + \frac{u_{km-1} - 2u_{km} + u_{km+1}}{h^2{}_2} = f_{km}, k = 1,...,K-1, m = 1,...,M-1. \qquad (7)$$

$$u_{km} = g(x_k, y_m), k = 0, K, m = 0,1,...,M; m = 0, M, k = 0,1,...,K.$$

Чегара шартларнинг аппроксимациясини кейинрок муҳокама қиламиз. Ҳозирча чегара шартлар аппроксимацияси тенглама аппроксимациясидан ёмон эмас деб фараз қилайлик. Чегара шатрларни аппроксимация қилиш, чегарада ҳосила берилганда пайдо бўлади ёки чегара ихтиёрий эгри чизик бўлганда ҳосил бўлади. Хозирча D=[0,1]*[0,1] деб қабул қилиб тўрайлик. У ҳолда

$$r_h = l_h \bar{u}_h - g_h = l_h u_h - g_h = 0.$$

2. ЧАСни текшириш.Аввало,аппроксимация хатолигини текширамиз: (6) схема аппроксимацияси (5) тенгликка асосан

$$R_h = L_h \bar{u}_h - f_h = L_h \bar{u}_h - (Lu)_h = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\bar{u}(x_k, y_m) - (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy})(x_k, y_m) = 0(h_1^2 + h_2^2)$$

Энди айирмали схема ечимининг мавжудлиги, ягоналиги ва сўнг турғунлигини кўрсатамиз.

2.1. Мавжудлиги ва ягоналиги.

Лемма. v^h тўр функция D_h да аниқланган ва $L_h\ v^h \geq 0$ ($L_h\ v^h \leq 0$) бўлсин. У ҳолда v^h тўр функция Γ_h чегаранинг бирор нуқтасида энг катта қийматга эришади. (энг кичик қийматга эришади).

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни энг катта қиймат ички нуқтада, масалан, (x_k, y_m) нуқтада эришилсин. У ҳолда

$$v_{km} = \max\{v_{ij}, (x_i, y_j) \in D_h\}, v_{km} > v_{k+1m}, v_{km} > v_{k-1m}, v_{km} > v_{km+1}, v_{km} > v_{km-1}.$$

У ҳолда, равшанки

$$L_h\ v_{km} = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\, v_{km} = \frac{v_{k-1m} - v_{km} + v_{k+1m} - v_{km}}{h_1^2} + \frac{v_{km-1} - v_{km} + v_{km+1} - v_{km}}{h_2^2} < 0$$

Бу фаразимизнинг нотўғри эканлгини кўрсатади. Лемманинг иккинчи қисми ҳам шундай исботланади.

Теорема 1. (Максимум принципи). Агар v^h тўр функция D_h да аниқланган ва

$$L_h v_h = 0, (k=1,...,K-1;\ m=1,...,M-1)$$

бўлса, v^h тўр функция Γ_h чегарада ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига эришади.

Исбот. Леммадан бевосита келиб чикади, чунки,

$$L_h v_h = 0 \Leftrightarrow (L_h v_h \leq 0) \cap (L_h v_h \geq 0)$$

Теорема 2. (6)-(7) масала ягона ечимга эга.

Исбот. $f_h = 0, g_h = 0 \rightarrow u_h = 0$ эканлигини келтириб чикариш керак. $L_h u_h = f_h = 0, l_h u_h = g_h = 0$ бўлганлиги учун u^h тўр функция чегарада ўзининг энг ката ва энг кичик қийматларига эришади.Лекин чегарада $u_h = 0$ $(f_h = g_h = 0)$.Шунинг учун, ички нуқталарда ҳам унинг қийматлари 0 га тенг ва D_h да $u_h = 0$.

2.2 Турғунлик. Агар u_h ечим бўлса турғунлик бўлиши учун

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C_1 \|f_h\|_{F_h} + C_2 \|g_h\|_{G_h} \qquad (8)$$

тенгсизликни кўрсатишимиз керак, бу ерда

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{D_h}|u_h|, \| f_h\|_{F_h} = \max_{D_h}| f_h|, \|g_h\|_{\Gamma_h} = \max_{\Gamma_h}|g_h|,$$

Равшанки, ихтиёрий квадрат кўпҳад Q учун (3,4 га асосан)

$$\mathrm{L_h Q_{km}} = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\mathrm{Q_{km}} = \mathrm{LQ}(x_k, y_m) = u_{xx}(x_k, y_m) + u_{yy}(x_k, y_m) = 4,$$

чунки Q дан тўртинчи ҳосилалар 0 га тенг. R> $\sqrt{2}$ учун ёрдамчи функция тузамиз:

$$\mathrm{Q(x,y)} = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2 - (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2]\ \| f_h\|_{F_h} + \|g_h\|_{G_h}$$

Равшанки,

$$\mathrm{L_h Q_{km}} = \mathrm{L_h Q}(x_k, y_m) = -\|f_h\|_{F_h} \quad k=1,...,K-1; m-1,...,N-1$$

У ҳолда $v_h = u_h - Q$ ёрдамчи функция учун $L_h v_h = f_h + \|f_h\|_{F_h} \geq 0$.

Леммага асосан $v_h = u_h - Q$ ўзининг энг катта қийматига чегарада эришади.Декин Γ_h да

$$v^h = u^h - Q = g^h - \|g^h\|_{G_h} \ -0.25[R^2 - (x-0.5)^2 - (y-0.5)^2]\| f_h\|_{F_h} \leq \ 0$$

Шунинг учун, D_h да $v_h \leq 0$ ёки $u_h \leq Q$ тенгсизлик ўринли.

Худди шу каби $v_h = u_h + Q$ ни текшириб $L_h v_h \leq 0$ ва $v_h \geq 0$ Γ_h да эканлигини кўрамиз. Лемманинг иккинчи қисмига асосан $v^h \geq 0$ ва D_h $u^h \geq -Q$. Шундай қилиб тўрнинг нуқталарила ушбу тенгсизлик ўринли:

$$-Q \leq u^h \leq Q \Leftrightarrow |u^h| \leq Q, (x_i, y_j) \in D_h$$

Шунинг учун, $C_1 = 0.25R^2$ ва $C_2 = 1$ қийматларга мос

$$\|u_h\|_{U_h} \leq 0.25R^2 \| f_h\|_{F_h} + C_2 \|g_h\|_{G_h}$$

тенгсизиликни топамиз. Бу эса (8)нинг ўзгинаси-турғунлик тенгсизлиги.

3.Алгоритм ва дастур. (7) дан оламиз:

$$u_{km} = (\frac{2}{h_1^2 + h_2^2})^{-1}[\frac{u_{k-1m} + u_{k+1m}}{h^2{}_1} + \frac{u_{km-1} + u_{km+1}}{h^2{}_2} - f_{km}], k = 1,..., K-1, m = 1,..., M-1.$$

$$u_{km} = g(x_k, y_m), k = 0, K, m = 0,1,..., M; m = 0, M, k = 0,1,..., K.$$

Бу системага Якоби итерация усулини қўллаймиз:

$$u_{km}^{(j)} = (\frac{2}{h_1^2 + h_2^2})^{-1}\left[\frac{u_{k-1m}^{(j-1)} + u_{k-1m}^{(j-1)}}{h^2{}_1} + \frac{u_{km-1}^{(j-1)} + u_{km+1}^{(j-1)}}{h^2{}_2} - f_{km}\right], k = 1,..., K-1, m = 1,..., M-1.$$

$$u_{km}^{(j)} = g(x_k, y_m), k = 0, K, m = 0,1,..., M; m = 0, M, k = 0,1,..., K, j = 1, 2, ...$$

Ҳисоблашлар $|u_{km}^{(j)} - u_{km}^{(j-1)}|$<eps (eps-берилган аниқлик) бўлгунча давом эттирилади.

Бу итерация усулининг яқинлашувчанлигини исботлаш мумкин.

Mathcad нинг ички функцияси ёрдамда эллиптик тенгламани ечишни кўрамиз. Улар учун Multigrid(ρ,ncycle), relax(a,b,c,d,e, ρ,u,r) ички функциялари мўлжалланган.

Мисол 2. $u_{xx} + u_{yy} = -4$ тенглама, аниқ ечим $u = -(x^2 + y^2), 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 3$.

$$u(x,0) = -x^2, u(x,3) = -x^2 - 9, u(0, y) = -y^2, u(8, y) = -64 - y^2$$

$$u(x,0) = -x^2, u(x,3) = -x^2 - 9, u(0, y) = -y^2, u(8, y) = -64 - y^2.$$

Мисолни $relax(a,b,c,d,e,\rho,u,r)$ ички функция билан ечамиз, бу ерда параметрлар Лаплас тенгламасининг дифференциал операторининг чекли айирмали кўринишидан олинади:

$$au_{i+1,j}+bu_{i-1,j}+cu_{i,j+1}+du_{i,j-1}+eu_{i,j}=\rho_{i,j},$$

$$a=b=c=d, e=-4a, a_{i,j}=1, i:=1..m, j:=1..m, 0<r<1,$$

Бу ерда r –релаксация коэффиценти, усулнинг яыинлашишини таъминлайди.

$L_1 := 8 \quad L_2 := 3 \quad m := 64 \quad i := 0..m \quad j := 0..m$

$x_i := L_1 \cdot \frac{i}{m} \qquad y_j := L_2 \cdot \frac{j}{m}$

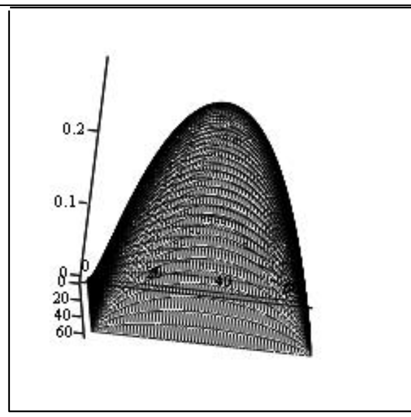
$\rho_{i,j} := -4$

$u_{i,0} := -(x_i)^2 \quad u_{i,m} := -(x_i)^2 - 9 \quad u_{0,j} := -(y_j)^2$

$u_{m,j} := -64 - (y_j)^2$

$a_{i,j} := 1 \quad b := a \quad c := a \quad d := a \quad e := -4 \cdot a \quad r := 0.99$

$u := relax(a,b,c,d,e,\rho,u,r)$



u

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

4.Эллиптик тенглама учун Галёркин усули.

Соддалик учун бир жинсли чегара шартларни қараймиз. Тақрибий ечимни

$$u_{mn}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{m,n}c_{ij}\varphi_{ij}(x,y), \varphi_{ij}(x,y)=\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{a}, \quad (9)$$

кўринишда излаймиз. Четланиш ва тақрибий ечим хатолигини киритамиз:

$$\phi_n(x,y)=\phi_n(x,y)=Lu_{mn}(x,y)-f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{m,n}\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)c_{ij}\varphi_{ij}(x)-f(x,y);$$

Галеркин усулида четланиш $\phi_{mn}(x,y)$ базис функцияларга ортогонал қилиб олинади:

$$\int_a^b \phi_{mn}(x,t)\varphi_{ij}(x)dx=0, \qquad i,j=1,2,...,n, \int_a^b \varphi_{ij}(x,t)\varphi_{ij}(x)dx=0, \ i,j=1,2,...,n.$$

Шунинг учун биз қуйидаги тенгламаларга келамиз:

$$\sum_{i,j=1}^{m,n}A_{ijkl}c_{ij}=q_{kl}=-\int_0^a\left(\int_0^b f(x,y)\varphi_{ij}(x,y)dxdy\right), A_{ijkl}=\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)\int_0^a\int_0^b\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)dxdy=$$

$$\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)\int_0^a\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi x}{a}dx\int_0^b\sin\frac{j\pi x}{b}\sin\frac{l\pi x}{b}dy$$

Бу ердаги интеграллар тригонометрик функцияларнинг ортогоналлик шартидан осонгина топилади:

$$\int_0^a\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi x}{a}dx=\begin{Bmatrix}\frac{a}{2}, i=j\\ 0, i\neq j\end{Bmatrix}, \int_0^b\sin\frac{j\pi x}{b}\sin\frac{l\pi x}{b}dx=\begin{Bmatrix}\frac{b}{2}, j=l\\ 0, j\neq l\end{Bmatrix}$$

Шунинг учун

$$A_{ijkl}=A_{ij}=\frac{ab}{4}\left(\frac{i^2\pi^2}{a^2}+\frac{j^2\pi^2}{b^2}\right), c_{ij}=\frac{q_{ij}}{A_{ij}}=\frac{4}{ab}\frac{q_{ij}}{\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)\pi^2}, i=1,...,m; j=1,...,n.$$

Топилган коэффицентларни (9) га қўйиб тақрибий ечимни ҳосил қиламиз.

Назарий саволлар ва топшириклар

1. (6),(7) схеманинг аппроксимацияси қандай?
2. (6), (7) схеманинг турғунлиги қандай?
3. (6), (7) схема яқинлашадими?
4. (6), (7) схема қандай ечилади? Мундарижага

ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

2.11. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАР. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Асосий тушунчалар: *интеграл тенглама, чизиқли интеграл тенглама, Фредгольм 1-тур, 2-тур интеграл тенгламаси, Вольтерр 1-тур, 2-тур интеграл тенгламаси, хос сон, хос вектор, симметрик ядро, коррект ва нокоррект қўйилган масала, ажраладиган ядро.*

Асосий формулалар:

1.Таърифлар: $\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad ,u(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$,

$$\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad ,u(x)-\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(t).$$

2.Коррект ва нокоррект масалалар.Корректлик:ечим мавжуд, ягона, турғун.

3.Назарий саволлар ва топшириклар

1.Интеграл тенгламалар физика ва техникада учрайдиган масалалар ечишнинг кучли воситаси ҳисобланади.

Дифференциал тенгламаларни ечиш икки кадамдан иборат дейиш мумкин:аввал умумий ечим топилади, сўнг умумий ечим ичидан қўшимча шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечим ажратиб олинади. Агар масалани интеграл тенгламага олиб келиш мумкин бўлса иккинчи кадамга эҳтиёж қолмайди. Бирданига қўшимча шартларни қаноатлантирадиган ечим топилади.

Интеграл тенглама деб ноъмалум функция интеграл остида келган тенгламага айтилади. Агар ноъмалум функция интеграл остида биринчи тартиб билан келса у чизиқли интеграл тенглама деб айтилади.

Биринчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси деб

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади.

Иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси деб

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad (2)$$

кўринишдаги интеграл тегнгламага айтилади.

Бу ерда К(x,t)-интеграл тенглама ядроси деб аталувчи узлуксиз функция, f(x)-тенгламанинг ўнг томони, узлуксиз функция, u(x)-ноъмалум функция , λ - параметр; а,в-ҳақиқий сонлар, ядро [a,b]*[a,b],тўртбурчакда қаралади.

Интеграл тенглама ечими деб тенгламани $x\in[a,b]$ буйича айниятга айлантирувчи функцияга айтилади.

Юқори чегараси ўзгарувчан бўлган интеграл ушбу тенглама

$$\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad (3)$$

Вольтеррнинг 1-тур интеграл тенгламаси деб айтилади.

Ушбу интеграл тенглама эса

$$u(x)-\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(t) \qquad (4)$$

Вольтеррнинг 2-тур интеграл тенгламаси деб айтилади.

Ночизик интеграл тенгламалар эса қуйидагича бўлиши мумкин:

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,t,u(t))dt = f(t) \qquad (5)$$

Бундай тенглама Гаммерштейн интеграл тенгламаси деб айтилади. Уларни одатда фақат тақрибий ечиш мумкин.

Агар f(x)=0 бўлса интеграл тенгламалар биржинсли дейилади:

$$u(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (6)$$

Агар λ нинг бирор λ≠0 қийматида (6) тенглама u(x)≠0 ечимга эга бўлса бу ечим интеграл тенгламанинг хос функцияси, λ≠0 мос сон эса хос қиймати дейилади.

K(x,t)=K(t,x) шартни қаноатлантирадиган ядро симметрик ядро дейилади. K(x,t)=K (x-t) ядро эса аргументлар айирмасига боғлиқ ядро дейилади.

Агар интеграл тенглама ядросини ушбу кўринишида

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t) \qquad (7)$$

ёзиш мумкин бўлса, ядрони ўзгарувчилари ажраладиган ядро дейилади.

Симметрик ядролар қуйидаги ажойиб хоссаларга эга:

1) ҳар қандай симметрик ядро учун хеч бўлмаганда битта λ≠0 хос сон мавжуд;

2) симметрик ядро хос сонлари ҳақиқий;

3) ҳар хил хос сонларга λ_1 , λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$ мос хос функциялар $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ (a,b) интервалда ўзаро ортогонал :

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0,$$

Интеграл тенгламаларнинг асосий масаласи ёки аниқ ечим, ёки тақрибий ечимни топиш, хос сон, хос функцияларни топишдан иборатдир.

K(x,t), f(x) узлуксиз дифференциалланувчи, K(x,x) $\neq 0$ бўлса, биринчи тур Вольтерр тенгламаси иккинчи тур Вольтерр интеграл тенгламасига келтирилади.

Масалан, (3) ни дифференциалласак

$$K(x,x)u(x)+\int_a^x K'_x(x,t)u(t) = f'(x)$$

тенгламани оламиз ва K(x,x) $\neq 0$ га бўлиб иккинчи тур Вольтерр интеграл тенгламасини оламиз.

2. Коррект қўйилган масала тарифини келтирамиз:

$$Au=f,\ A:U \to F,\ u \in U,\ f \in F \qquad (7)$$

тенглама берилган бўлсин, бу ерда U,F - бирор нормалланган функционал фазолар $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_F$ - улардаги нормалар, A:U→F - бирор акслантириш.

Таъриф 1.(Адамар). Агар қуйидаги 3 шарт: 1) ҳар қандай f∈F учун ечим мавжуд; 2) ечим ягона; 3) ечим турғун бажарилса, Au=f масала U,F фазоларда коррект қўйилган дейилади. Корректлик шартларидан бири бузилса Au=f масала U,F фазоларда нокоррект қўйилган дейилади.

Ечимнинг турғунлиги деганда унинг масаланинг берилганларидан узлуксиз боғлиқлиги тушунилади ёки берилганлардаги йўл қўйилган кичик хатоликлар ечимнинг ҳам кичик хатоликларига сабаб бўлиши тушунилади. Масалан, (7) да берилганлар бу f - ўнг томон ва A - оператор (операторнинг коэффициентлари). Фараз қилайлик, Au=f ўрнига $A_h u_h = f_h$ тенглама берилган бўлсин

$$\|A-A_h\| \le c_1 h^s, \quad \|f-f_h\| \le c_2 h^r$$

Агар $\|u-u_h\| \le c_3 h^m$ бўлсагина ечим турғун бўлади.

Нокоррект масалаларга мисоллар келтирамиз:1) детерминанти 0 га тенг ёки 0 га яқин чизиқли алгебраик тенгламалар системаси (ечим мавжуд эмас ёки ечим чексиз кўп), 2)интерполяция масаласи (ечим чексиз кўп), 3)дифференциаллаш масаласи (турғунлик ўринли эмас), 4)биринчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси (корректликнинг учала шарти бузилади), 5)Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи (турғунлик ўринли эмас).

Биринчи тур Фредгольм интеграл тенгламасини нокоррект қўйилганлигини кўрсатайлик. Аввало, (7) тенглама ўнг томонга нисбатан турғун эмаслигини кўрсатамиз. u(x)=exp(iωx) гармоникани олайлик, ω>>1 бўлсин (бу юқори частотали гармоника дейилади).

Гармоникани ечим десак унда ўнг томон қуйидагича бўлиши керак:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}K(x,t)e^{i\omega t}\Big|_a^b - \frac{1}{i\omega}\int_a^b K'(x,t)e^{i\omega t}dt = 0(\frac{1}{\omega}) \quad (8)$$

Бундай ҳолда $|f(x)| = 0(1/\omega) \to 0,\ \omega \to \infty$, лекин |u|=1. Энди, агар $f(x) = 0(1/\omega)$ ни четланиш (чексиз кичик) деб қарасак ечимнинг четланиши |u|=1 бўляпти. Яъни, $|u| \to 1,\ \omega \to \infty,$ ва биринчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси турғун эмас экан.

Вольтерр интеграл тенгламаси учун ҳам шу гап ўринли, масалан,

$$\int_a^x u(t)dt = f(x) \quad (9)$$

тенглама $u(x) = f'(x)$ дифференциаллаш масаласига эквивалент. Агар $f(x) = \cos(nx)/n$ десак, $u = u(x) = f'(x) = -\sin(nx).$ $|f(x)| = 0(1/n)$ бўлишига қарамасдан $|f'(x)| = |u(x)| = 1$.

Ундан ташкари, (1), (3) тенгламалар ҳар қандай ўнг томон учун ечимга эга эмас. Масалан, (3) да ўнг томон дифференциалланувчи бўлиши керак.

Фараз қилайлик, (1) да ядро ажраладиган бўлсин, яъни

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t) \quad (10)$$

бўлсин.

Бу ҳолда (1) ҳам ҳар қандай ўнг томон учун ечимга эга бўлмаслиги мумкин. (10) ни (1) га қўяйлик, у ҳолда қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\sum_{k=1}^n \beta_i a_i(x) = f(x),\ \beta_i = \int_a^b b_i(t)u(t)dt \quad (11)$$

Бу тенглик интеграл тенглама ўнг f(x) томон {a_i(x)} ларнинг чизиқли комбинацияси кўринишда ёзилиш мумкин бўлгандагин ечимга эга эканлигини кўрсатмоқда, бошқа ўнг томонлар учун мавжуд эмас.

Равшанки, коррект қўйилмаган масалалар учун хатолик билан берилган ўнг томон билан масала ечиш бутунлай беманиликдир.

Коррект қўйилмаган масалаларга детерминанти 0 га тенг ёки 0 га яқин чизиқли тенгламалар системасини мисол қилиб олиш мумкин. Масалан, Au=f чизиқли алгебраик тенгламалар системаси бўлсин, $\|f-f_h\|_F \le h$ ва $Au_h=f_h$ бўлсин. $u-u_h$ хатоликни баҳолаб кўрайлик. Агар $u_h = u + r,\quad f_h = f + \eta$ десак Ar=η бўлади, бу ерда r - хатолик. Нисбий хатоликни текширайлик:

$$\frac{\|r\|}{\|u\|}:\frac{\|\eta\|}{\|f\|} = \frac{\|r\|}{\|u\|}\frac{\|f\|}{\|\eta\|} = \frac{\|Au\|}{\|u\|}\frac{\|A^{-1}\eta\|}{\|\eta\|} \le \frac{\|A\|\|u\|}{\|u\|}\frac{\|A^{-1}\|\|\eta\|}{\|\eta\|} = \|A\|\|A^{-1}\| = \nu(A),$$

яъни,

$$\frac{\|r\|}{\|u\|}:\frac{\|\eta\|}{\|f\|}\le v(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$$

Бу ердан, агар A^{-1} мавжуд бўлмаса, ёки det(A) 0 га яқин бўлса, ечимнинг нисбий хатоси чекланмаган бўлиш мумкинлиги кўриниб турибди.

Яна бир мисол сифатида Лаплас тенгламаси учун Коши масаласини олиш мумкин:

$$\Delta u = 0, u(0,y) = 0, u_x(0,y) = \sin(Ky)/K.$$

Агар $K \to \infty$ деб лимитга ўтиб аниқ ечим $u(x,y)=0$ ни топамиз. Лекин, бу масала аниқ ечим $u(x,y,K)=sh(Kx)\sin(Ky)/K^2$ га эга. Равшанки, $u(x,y,K)\to\infty, K\to\infty$, бу эса масаланинг турғун эмаслигини кўрсатади.

Узоқ вақтгача нокоррект масалалар амалий маънога эга эмас деб қаралмай келинди.

Академик А.Н.Тихонов ва унинг шогирдлари нокоррект масалалар ҳам амалий маънога эга эканликларини кўрсатишиб нокоррект масалалар учун тақрибий методлар яратишди. Бу тақрибий усулларни регуляр усуллар деб атай бошлашди. Ундан ташқари,академик А.Н.Тихонов ва унинг шогирдлари ечимлари ягона бўлмаган нокоррект масалаларнинг нормал (сплайн), яъни ечимлар ичида энг кичик нормага эга бўлганини турғун топиш йўлларини яратдилар. Масалан, Au=f ечимлари берилган ўнг томон учун кўп бўлсин. $U=\{u\in X : Au=f\}\ne\varnothing$ бўлсин, чизиқли узлуксиз $T: X\to Y$ оператор олиб ушбу масалани қараймиз(бу ерда X,Y ,бирор гильберт фазолари)

$$\|T\sigma\|_Y = \min_{u\in U}\|Tu\|_Y \,, \qquad (12)$$

$$\|T\sigma^\alpha\|_Y^2 + \alpha\|A\sigma^\alpha - f\|_Z^2 = \min_{u\in X}\{\|Tu\|_Y^2 + \alpha\|Au-f\|_Z^2\}. \qquad (13)$$

σ -ечим нормал ечим (интерполяция сплайни) дейилади, σ^α эса регуляр ечим (силлиқловчи сплайн) дейилади. Бу масала ёрдамида узоқ вақт ечилмай ётган, кўп ўзгарувчили функциялар учун ихтиёрий тартибсиз жойлашган нуқталардаги маълумотларни интерполяция масаласи ҳал қилинди.

Тихонов ва унинг шогирдлари кўрсатишдики, $\sigma^\alpha\to\sigma$. Бу факт нотурғун масаланинг ечимини тақрибий ечиш йўлини кўрсатмоқда.

Мисол 1. $A=[a_{ij}]: R^n\to R^n, u, f\in R^n$ бўлсин. У ҳолда Au=f -бу чизиқли тенгламалар системаси, (12) масала унинг $U=\{u\in X : Au=f\}\ne\varnothing$ ечимлар тўпламида $\|T\sigma\|_Y = \min_{u\in U}\|Tu\|_Y$ маънодаги минимал нормал ечими. Бу масала нокоррект. Унинг тақрибий ечимини топиш учун (13) масала ечими топилади, кўрсатилганга мувофиқ, $\sigma^\alpha\to\sigma$.

Мисол 2. $Tu=\partial^m u/\partial x^m, Au=[u(x_i), i=0,...,n], f=[f(x_i), i=0,...,n]$ весак (12), (13) масалалар бизга 2m-1 –даражали сплайн-функцияларни беради. Сплайн –функциялар учун (12) масалаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\min_{u\in U}\int_a^b [u^{(m)}(x)]^2dx = \int_a^b [s^{(m)}(x)]^2dx, U=\{u(x_i)=f(x_i), i=0,...,n\} \qquad (14)$$

2.1 Назарий саволлар ва топшириклар.

1. Интергал тенглама деб нимага айтилади?
2. Фредгольм интеграл тенгламалари нима?
3. Вольтерр интеграл тенгламалари нима?
4. Коррект масала нима?
5. Хос сон ва хос қиймат нима?

Мундарижага

2.12. Интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари

ИТ ни доимо ҳам аниқ ечиб бўлмайди. Шунинг учун кўплаб тақрибий усуллар ва дастурлар ишлаб чиқилган.

Вольтерр ИТ лари учун итерация, квадратура формулалари усуллари қаралган. Фредгольма ИТ лари учун итерация, квадратура формулалари, коллокация, Галёркин усуллари қаралган.

ИТ ни тақрибий ечиш асисида қуйидаги ғоя ётади:

1) Тақрибий ечим кўринишини аниқлаш, масалан, $u_n(x)=\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)$, где $c_j=?$, $\varphi_i(x)$-базис функциялар;
2) Тақрибий ечим коэффициентларини аниқловчи ЧАТС ни тузиш, масалан, $Mc=d$, бу ерда M -матрица, d -вектор;
3) Аниқловчи тенгламалар системаси $Mc=d$ ни ечиш, масалан, $c=M^{-1}d$ или $c=lsolve(M,d)$,бу ерда $lsolve(M,d)$ - MathCAD,ички функцияси бўлиб, ЧАТС $Mc=d$ ечимини беради;
4) Тақрибий ечимнинг бирор қийматларини топиш, график ва жадвалларни $u_i=u(x_i), i=0..n$, чиқариш.

Ички функция $lsolve(M,d)$ яхшигина ишлаб турибди,шунинг учун, алоҳида ЧАТС $Mc=d$ ни ечишни алгоритмлаш ҳозирча керак бўлмаяпти.

ИТ ни тақрибий ечиш усулларини кўриб чиқамиз.

А. ИТ ни ечиш учун ЧАС ёки квадратурлар усули.

Ғоя қуйидагидан иборат**.**

[a,b] кесмада тўр-нуқталар тўплами киритамиз:

$\Delta_n=\{x_i=a+(i-1)h, i=1..n, h=(b-a)/(n-1)\}$.

Аниқ ечим $\bar{u}=\bar{u}(x)=ut(x)$ ва тақрибий ечим $u=u(x)$ нинг тўрдаги қийматларини қуйидагича белгилаймиз: $\bar{u}_i=ut_i=\bar{u}(x_i)$, $u_i=u(x_i)$, $i=1..n$. Ушбу тугун нуқталари $\{x_i\}$ва коэффициентлари $\{c_i\}$ квадратура формуласини қараймиз:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=1}^{n}c_j f(x_j)+R_n(f),\ R_n(f)=O(h^r). \tag{4}$$

Масалан, трапеций ва Симпсон квадратура формулалари учун, агар $h=(b-a)/(n-1),\ n=2m+1, x_i=a+(i-1)h$, десак у ҳолда қуйидагилар ўринли:

1) $A_1:=h/2\ A_n:=h/2\ i:=2..n-1\ A_i:=h\ , R_n=-(b-a)f''(\xi)h^2/12$,

2) $B_1=h/3,\ B_n=h/3; i=1..m,\ B_{2i}=4h/3; i=2..m,\ B_{2i-1}=2h/3, R_n=-(b-a)f^{iv}(\xi)h^4/180$.

(2) тенгламада $x=x_i$ деб, интегрални интеграл йиғинди билан алмаштириб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$u(x_i)-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jK(x_i,x_j)u(x_j)=f(x_i)+R_n(\lambda K(x_i,x)u(x)).$$

Қолдиқ ҳадни ташлаб юбориб, қуйидаги белгилашларни киртамиз:

$$u_i=u(x_i)\approx\bar{u}(x_i)=\bar{u}_i, K_{ij}=K(x_i,x_j),\ f_i=f(x_i), i=1..n.$$

У ҳолда тақрибий ечимнинг ноъмалум коэфициентларини аниқлаш учун қуйидаги ЧАТС ни оламиз:

$$u_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jK_{ij}u_j=f_i,\ i=1..n. \tag{5}$$

Агар $Eu = u, K = [K_{ij}], u = [u_i], f = [f_i], c = [c_i]$, белгилашларни киритсак (5) ЧАТС ни қуйидагича ёзиш мумкин: $Mu = f, M = E - \lambda cK$.Агар $\det(M) \neq 0$ бўлса MathCADда ечим ушбу формула $u = M^{-1} f$ ёки $u = lsolve(M, f)$ билан берилади.

Худди шу каби, Вольтерра ИТнинг тақрибий ечимининг ноъмалум коэфициентларини топиш учун ушбу ЧАТС ни оламиз:

$$u_i - \lambda \sum_{j=1}^{i} c_i K_{ij} u_j = f_i,\ i = 1..n. \qquad (6)$$

Тақрибий ечимнинг ўзини ушбу интерполяция формуласи кўринишда ёзиш мумкин:

$$u_n(x) = f(x) + \lambda_i \sum_{j=1}^{n} c_j K(x, x_j) u_j . \qquad (7)$$

Агар $1 - \lambda c_i K(x_i, x_i) \neq 0$, бўлса, у ҳолда (6) ЧАТС қуйидагича ечилади:

$$u_1 = (1 - \lambda c_1 K_{11})^{-1} f_1, u_i = (1 - \lambda c_i K_{ii})^{-1} (f + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} c_i K_{ij} u_j), i \geq 2 . \quad (8)$$

Вольтерра ИТ си учун яна бир бошқа формула чиқарамиз. (6) тенгликни чиқаришда интегрални $[a, x_i]$ кесмада аппроксимация қилишда талаб қиламизки, квадратура формула ҳар бир $[a, x_i]$ кесмада тўлиқ қўлланилсин ва $c_1 + .. + c_i = x_i - a$ тенглик бажарилсин. 2 тур Вольтерра ИТ ни қараймиз:

$$Lu \equiv u(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) u(y) dy + f(x), a \leq x \leq b .$$

Бу ерда интегралда кетма-кет $x = x_i, i = 1..n$ деб оламиз:

$$Lu(x_i) \equiv u(x_i) = \lambda \int_a^{x_i} K(x_i, y) u(y) dy + f(x_i), i = 1..n .$$

Бу ердан дарров оламиз: $u_1 = f_1$. Сўнг, интегралга $[a, x_i]$ кесмада трапеция формуласини қўллаймиз:

$$u_i = \lambda \sum_{j=1}^{i} c_j K_{i,j} u_j + f_i, i = 2..n, c_1 = c_i = h/2, c_2 = .. = c_{i-1} = h .$$

Натижада ушбу формулалар кетма-кетлигини топамиз:

$$u_1 = f_1,\ \ u_i = (f_i + \lambda \sum_{j=2}^{i-1} c_j K_{i,j} u_j)/(1 - \lambda h K_{i,i}/2), i = 2..n . \qquad (9)$$

B. Узлуксиз итерация усулининг ғояси қуйидагидан иборат: $\{u^{(m)}(x)\}$ кетма-кетлик қуйидагича қурилади:

$$u^{(0)}(x) = 0, u^{(m+1)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u^{(m)}(y) dy , \qquad (10)$$

$$u^{(0)}(x) = 0, u^{(m+1)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) u^{(m)}(y) dy . \qquad (11)$$

Агар интеграллар қийинчилик билан ҳисобланадиган бўлса, уларни қуйидагича тақрибий ҳисобланиши мумкин ва итерация усулининг дискрет варианти келиб чиқади:

$$u_i^{(0)} = 0, u_i^{(m+1)} = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j K_{i,j} u_i^{(m)}, m = 0,1,..; i = 1..n ,$$

$$u_i^{(0)} = 0, u_i^{(m+1)} = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{i} c_j K_{i,j} u_i^{(m)}, m = 0,1,..; i = 1..n .$$

Ҳисоблашлар берилган аниқлик ўрнатилгунча олиб борилади:

$$\left|u_i^{(m+1)} - u_i^{(m)}\right| < \varepsilon, \forall i = 1..n \ .$$

(10),(11) итерацион жараёнларнинг яқинлашиши уларни берувчи операторларнинг қисқартириб акс эттитриш хусусиятларига боғлиқ, жумладан ўнг томонлардаги матрицаларнинг хоссаларидан боғлиқ.

С. Ядрони айниган ядро билан алмаштириш.

Агар

$$K(x,y) = K_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y)\,, \qquad (12)$$

яъни ядронинг ўзгарувчилари ажраладиган ва чекли йиғинди бўлса, у айниган ядро дейилади.

.

Подставляя (12) ни (2) га қўйиб, топамиз:

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(x)\,, \qquad (13)$$

бу ерда

$$c_i = \lambda \int_a^b \beta_i(y) u(y) dy\,. \qquad (14)$$

(13) ни (14) га қўйиб, c_i коэффициентларни топиш учун, ушбу ЧАТС ни топамиз:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij} c_j = f_i \,, K_{ij} = \int_a^b \alpha_j(x)\beta_i(x) dy,\ f_i = \int_a^b f(x)\beta_i(x) dx\,, \qquad (15)$$

Ихтиёрий ядрони айниган ядрога келтириш учун ядрони Тейлор формуласига ёйиш, интерполяция формулалари, Галёркин усуллари, моментлар усуллари асосида бажариш мумкин. Масалан, Галёркин усулида тафовут $R_n(x) = Lu_n(x) - f(x)$ базис функцияларга ортогонал бўлиши талаб этилади: $R_n(x) \perp \varphi_i(x) = 0, i = 1..n$. Бу бизга $Mc = f$

ЧАТС ни беради:

$$M_{i,j} = \alpha_{i,j} - \lambda\beta_{i,j}, \alpha_{i,j} = \int_a^b \varphi(i,x)\varphi(j,x) dx\,,$$

$$\beta_{i,j} = \int_a^b (\int_a^b K(x,y)\varphi(j,y)dy)\varphi(i,x)dx,\ f_i = \int_a^b (\int_a^b K(x,y) f(y)dy)\varphi(i,x)dx, i, j = 1..n\,.$$

Д. Галёркина, коллокация и энг кичик квадратлар усули.

Тақрибий ечимни ушбу формула кўринишда излаймиз:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)\,, \qquad (16)$$

бу ерда $\{\varphi_i(x)\}$ функциялар $[a,b]$ кесмада тўлиқ функциялар системаси. Айирма

$$R_n(x) = R_n(x, c_1, ..., c_n) = Lu_n(x) - f(x) \qquad (17)$$

тақрибий $u_n(x)$ нинг тафовути дейилади, у тақрибий ечим аниқ тенгламани қаноатлантириш даражасини белгилайди. Коллокация, Галёркин, энг кичик квадратлар усулида $c_1, ..., c_n$ ноъмалумлар қуйидаги шартлар асосида аниқланади:

1) коллокация усулида $Lu_n(x_i) - f(x_i) = 0, i = 1..n$;

2) Галёркин усулида $R_n(x) \perp \varphi_i(x) = 0, i = 1..n$;

3) энг кичик квадратлар усулида $c_i, i=1..n$ лар бўйича $\int_a^b [R_n(x)]^2 dx \to \min$.

Бу талаблар бизни ушбу ЧАТС га олиб келади:

$$Mc = f\ , \qquad (18)$$

бу ерда система $Mc = f$ элементлари ушбу функция $\psi_j(x) = \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi_j(y)dy$ асосида қуйидагича аниқланади:

$$1)\ M_{ij} = \psi_j(x_i),\ f_i = f(x_i), i = 1..n\ .$$

$$2)\ M_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\psi_j(x)dx,\ f_i = \int_a^b f(y)\varphi_i(y)dy, i = 1..n\ ,$$

(19)

$$3)\ M_{ij} = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx,\ f_i = \int_a^b f(y)\psi_i(y)dy, i = 1..n\ .$$

2.13. Вольтер интеграл тенгламаларини тақрибий ечиш.

А. Кквадратур формулаларини қўллаш.

Мисол 1. Трапеция формуласи асосида Вольтерра ИТ ечилсин

$K(x,y) := e^{-(x-y)}\sin(x-y),\ \ f(x) := e^{-x}$, $ut(x) := e^{-x}(1+0.5x^2)$,a:=0,b:=1. (20)

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни терамиз ва жавобни оламиз:

$Вольтерра\ ИТ\ 2тур\ \ Трапеция\ квадратура формуласи\ \ ORIGIN := 1$

$K(x,y) := e^{-(x-y)}\sin(x-y)\ \ f(x) := e^{-x}\ \ ut(x) := e^{-x}(1+0.5x^2)$

$a := 0\ b := 1\ n := 101\ h := (b-a)/(n-1)$

$i := 1..n\ x_i := a+(i-1)h\ \ f_i := f(x_i)\ ut_i := ut(x_i)\ \ j := 1..n\ K_{i,j} := K(x_i, x_j)$

$A_1 := h/2\ \ A_n := h/2\ \ k := 2..n-1\ \ A_k := h$

$u_1 := f_1\ \ k := 2..n\ u_k := (1-hK_{k,k}/2)^{-1}(f_k + \sum_{j=1}^{n} if(j \ge k, 0, A_j K_{k,j} u_j))$

$k := 1..n\ v_k := u_k\ \ vt_k := ut_k$

$v^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.99	0.98	0.97	0.961	0.951	0.942	0.932	0.923	0.914

$vt^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.99	0.98	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.918

Пример 2. Трапеций-Симпсона усули билан Вольтерра ИТ ечилсин

$K(x,y) := e^{-(x-y)}\sin(x-y),\ \ f(x) := e^{-x}$, $ut(x) := e^{-x}(1+0.5x^2)$,a:=0,b:=1.

Индекс $i := 2..n$ нинг тоқ ёки жуфтлигига қараб, $[a, x_i]$ кесмада навбати билан трапеция ёки Симпсона квадратура формуласи қўлланилади.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Вольтерра\ ИТ\ 2\,тур\ Трапеция + Симпсон\ КФ\ ORIGIN := 1$

$K(x,y) := e^{-(x-y)}\sin(x-y)\ \ f(x) := e^{-x}\ \ ut(x) := e^{-x}(1+0.5x^2)$

$a := 0\ b := 1\ \ m := 40\ \ n := 2m+1\ \ \ h := (b-a)/(n-1)$

$i := 1..n \; x_i := a + (i-1)h \; f_i := f(x_i) \; ut_i := ut(x_i) \; j := 1..n \; K_{i,j} := K(x_i, x_j)$

$A_1 := h/2 \; A_n := h/2 \; k := 2..n-1 \; A_k := h$

$B_1 := h/3 \; B_n := h/3 \; k := 1..m \; B_{2k} := 4h/3 \; k := 2..m \, B_{2k-1} := 2h/3$

$$T_1 := f_1 \quad k := 2,4..2m \quad T_k := (1 - hK_{k,k}/2)^{-1}(f_k + \sum_{j=1}^{k-1} A_j K_{k,j} T_j)$$

$T^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0.988	0	0.964	0	0.941	0	0.918	0	0.897	0

$$S_1 := f_1 \; k := 3,5..2m+1 \;\; S_k := (1 - hK_{k,k}/3)^{-1}(f_k + \sum_{j=1}^{k-1} B_j K_{k,j} S_j)$$

$S^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0	0.975	0	0.952	0	0.929	0	0.906	0	0.885

$k := 1..n \quad u_k := if(\mathrm{mod}(k,2) = 0, T_k, S_k)$

$u^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0.988	0.975	0.964	0.952	0.941	0.929	0.918	0.906	0.897	0.885

$ut^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0.988	0.976	0.964	0.952	0.941	0.93	0.92	0.909	0.899	0.889

Бу ерда ўзгарувчилар T^T, S^T нинг қийматлари назорат учун чиқарилган холос.

В. Итерация усули . ИТ учун трапеция формуласи асосида итерациялар кетма-кетлигини қурамиз:
а) трапеция усули:

$$u_i^{(m+1)} = f_i + \frac{h}{2}[K_{i1}u_1^{(m)} + 2\sum_{j=2}^{i-1} K_{ij}u_j^{(m)} + K_{ii}u_i^{(m)}], i = 1,...,n. \qquad (21)$$

б) Симпсона усули:

$$u_i^{(m+1)} = f_i + \frac{h}{3}[K_{i1}u_i^{(m)} + 2\sum_{j=2}^{i/2}[2K_{i,2j-1}u_{2j-1}^{(m)} + K_{i,2j}u_{2j}^{(m)}] + K_{i,i}u_i^{(m)}]. \qquad (22)$$

Мисол 3. Трапеция усули билан Вольтерра ИТ ечилсин.

$$K(x,y) = x^2 + xy, \; \lambda = 0.1, \; f(x) = x^3 - \lambda(0.2x + 0.25x^2), a = 0, b = 1. \qquad (23)$$

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

Вольтерра 2 турр Итерацияусули Трапеция КФ ORIGIN $:= 1$

$K(x,y) := x^2 + xy \; \lambda := 0.1 \quad f(x) := x^3 - \lambda(0.2x + 0.25x^2)$

$a := 0 \; b := 1 \; m := 5 \; n := 2m+1 \; h := (b-a)/(n-1)$

$i := 1..n \; x_i := a + (i-1)h \; f_i := f(x_i) \;\; j := 1..n \; K_{i,j} := K(x_i, x_j)$

$A_1 := h/2 \; A_n := h/2 \; k := 2..n-1 \; A_k := h$

$u_1 := f_1 \; k := 2..n \; u_k := (1 - h\lambda K_{k,k}/2)^{-1}(f_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} if(j \ge k, 0, A_j K_{k,j} u_j))$ «трапеций ус.

$u1_{1,i} := f_1 \; s := 1..m-1 \; i := 2..n \; u1_{s+1,i} := (f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} if(j \ge i, 0, A_j K_{i,j} u_j))$ «итераций ус.

$u^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	-0.001	0.003	0.019	0.052	0.11	0.198	0.323	0.494	0.72	0.999

$u1 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.001	0.003	0.019	0.052	0.109	0.196	0.32	0.488	0.708	0.989
3	0	-0.001	0.003	0.019	0.052	0.109	0.196	0.32	0.488	0.708	0.989
4	0	-0.001	0.003	0.019	0.052	0.109	0.196	0.32	0.488	0.708	0.989
5	0	-0.001	0.003	0.019	0.052	0.109	0.196	0.32	0.488	0.708	0.989

Мисол 4. 1 тур Вольтерра ИТ ечилсин:

$K(x,y):=2+x^2-y^2 \quad f(x):=x^2 \quad ut(x):=x\exp(-x^2/2)$.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Вольтерра\ 1тур\ ИТ \quad Трапеция\ \ КФ\ ORIGIN:=1$

$K(x,y):=2+x^2-y^2 \quad f(x):=x^2 \quad ut(x):=x\exp(-x^2/2)$

$a:=0\ b:=3.5\ m:=25\ \ n:=2m+1\ \ h:=(b-a)/(n-1)$

$i:=1..n\ x_i:=a+(i-1)h\ \ f_i:=f(x_i)\ \ j:=1..n\ K_{i,j}:=K(x_i,x_j)$

$A_1:=h/2\ A_n:=h/2\ k:=2..n-1\ A_k:=h\quad f1(x):=\dfrac{df(x)}{dx}\ \ u_1:=f1(a)$

$u_1:=0\ k:=2..n\ u_k:=(A_kK_{k,k})^{-1}(f_k-\lambda\sum_{j=1}^{k-1}A_jK_{k,j}u_j)$

$u^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.035	0.105	0.173	0.24	0.303	0.362	0.416	0.465	0.508	0.544

$ut^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.07	0.139	0.205	0.269	0.329	0.385	0.435	0.479	0.517	0.548

2.14. Фредгольма 2 тур интеграл тенгламаларини тақрибий ечиш

А. Квадратура формуласи.

Мисол 1. Фредгольма 2-тур ИТ ечилсин.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Фредгольм\ 2тур \quad Трапеция\ КФ\ \ ORIGIN:=1$

$K(x,y):=xy\ \ f(x):=2x\ ut(x):=3x$

$a:=0\ b:=1\ n:=11\ h:=(b-a)/(n-1)$

$i:=1..n\ x_i:=a+(i-1)h\ \ f_i:=f(x_i)\ ut_i:=ut(x_i)\ \ j:=1..n\ K_{i,j}:=K(x_i,x_j)$

$A_1:=h/2\ A_n:=h/2\ k:=2..n-1\ A_k:=h$

$u_1:=f_1\ \ k:=2..n\ u_k:=(1-hK_{k,k}/3)^{-1}(f_k+\sum_{j=1}^{n}if(j\ge k,0,A_jK_{k,j}u_j))$

$i:=1..n\ \ j:=1..n\ M_{i,j}:=if(j=i,1-A_iK_{i,i},-A_jK_{i,j})\ \ u:=lsolve(M,f)$

$u^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.301	0.602	0.902	1.203	1.504	1.805	2.105	2.406	2.707	3.008

$$ut^T = \begin{array}{c|ccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.9 & 1.2 & 1.5 & 1.8 & 2.1 & 2.4 & 2.7 & 3 \end{array}$$

Мисол 2. Фредгольма 2-тур ИТ Симпсона усули билан ечилсин.
MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$$\textit{Фредгольма 2 тур ИТ} \quad \textit{Симпсон КФ} \; ORIGIN := 1$$

$$K(x,y) := \sin(x+2y) \quad f(x) := x \quad ut(x) := x - \pi\cos(x)$$

$$a := -\pi \;\; b := \pi \;\; m := 5 \;\; n := 2m+1 \;\; h := (b-a)/(n-1)$$

$$i := 1..n \; x_i := a + (i-1)h \;\; f_i := f(x_i) \; ut_i := ut(x_i) \;\; j := 1..n \; K_{i,j} := K(x_i, x_j)$$

$$A_1 := h/3 \; A_n := h/3 \; k := 2,4..2m \; A_k := 4h/3 \;\; k := 3,5..2m-1 \; A_k := 2h/3$$

$$i := 1..n \quad j := 1..n \; M_{i,j} := if(j = i, 1 - A_i K_{i,i}, -A_j K_{i,j}) \;\; u := lsolve(M, f)$$

$$u^T = \begin{array}{c|ccccccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.071 & -0.898 & -2.244 & -3.213 & -3.195 & -1.956 & 0.269 & 2.872 & ... \end{array}$$

$$ut^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0.028 & -0.914 & -2.227 & -3.17 & -3.142 & -1.913 & 0.286 & 2.856 & ... \end{array}$$

В.Метод итераций.
Мисол 3. Фредгольма 2-тур ИТ итерация усули билан ечилсин.
MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$$\textit{Фрелгольма 2 тур Итерация усули + Трапеция КФ} \;\; ORIGIN := 1$$

$$K(x,y) := 1 \;\; \lambda := 0.5 \quad f(x) := \sin(\pi x) \;\; ut(x) := \sin(\pi x) + 2/\pi$$

$$a := 0 \;\; b := 1 \;\; m := 5 \;\; n := 2m+1 \quad h := (b-a)/(n-1)$$

$$i := 1..n \; x_i := a + (i-1)h \;\; f_i := f(x_i) \; ut_i := ut(x_i) \;\; j := 1..n \; K_{i,j} := K(x_i, x_j)$$

$$A_1 := h/2 \; A_n := h/2 \; k := 2..n-1 \; A_k := h$$

$$u1_{1,i} := f_1 \;\; s := 1..m-1 \; i := 2..n \; u1_{s+1,i} := f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{i,j} u_{s,j})$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0.612	0.921	1.199	1.421	1.563	1.612	1.563	1.421	1.199	0.921
7	0.622	0.931	1.209	1.431	1.573	1.622	1.573	1.431	1.209	0.931
8	0.622	0.935	1.214	1.435	1.577	1.626	1.577	1.435	1.214	0.935
9	0.629	0.938	1.217	1.438	1.58	1.629	1.58	1.438	1.217	0.938
10	0.63	0.939	1.218	1.439	1.581	1.63	1.581	1.439	1.218	…

$$ut^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.637 & 0.946 & 1.224 & 1.446 & 1.588 & 1.637 & 1.588 & 1.446 & 1.224 & ... \end{array}$$

С. Ядрони айниган ядро билан алмаштириш..

Мисол 4. Фараз қилайлик ИТ берилган бўлсин:

$$u(x) + \int_0^{0.5} xsh(xy)dy = f(x), \; f(x) = 2 - ch(x/2) \,. \qquad (24)$$

Базис функцияларни $\varphi_i(x)=x^{i-1}$ кўринишда олиб, тақрибий ечимни ушбу кўринишда оламиз:

$$u(x)=u_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x).$$

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Фредгольма\ 2тур\ ИТ\ \ Момоентлар\, усули+Айниган\, ядро\ \ ORIGIN:=1$

$K(x,y):=xy\ \ f(x):=2x\ \ ut(x):=3x$

$a:=0\ b:=1\ \ n:=6\ \ \ h:=(b-a)/(n-1)\ i:=1..n\ \ x_i:=a+(i-1)h$

$f_i:=f(x_i)\ ut_i:=ut(x_i)\ \ \varphi(i,x):=x^{i-1}\ \ j:=1..n$

$\alpha_{i,j}:=\int_a^b\varphi(i,x)\varphi(j,x)dx\ \ \beta_{i,j}:=\int_a^b(\int_a^b K(x,y)\varphi(j,y)dy)\varphi(i,x)dx\quad ff_i:=\int_a^b\psi(i,x)f(x)dx$

$i:=1..n\ \ j:=1..n\ \ M_{i,j}:=\alpha_{i,j}-\beta_{i,j}\quad c:=lsolve(M,ff)$

$c^T=(-0\ 3\ 0.505\ \ 0.206\ -0.206\ 0.206)$

$u(x):=f(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi(j,x)\rightarrow\frac{1848x^5}{8989}-\frac{1848x^4}{8989}+\frac{2604x^3}{8989}+\frac{1848x^2}{8989}+\frac{22514x}{8989}-\frac{1}{8989}$

$ut(x)^T=(0\ 0.6\ 1.2\ 1.8\ 2.4\ 3)\quad u(x)^T=(-0\ 0.511\ 1.05\ 1.629\ 2.267\ 3)$

Д. Коллокация, Галёркин, энг кичик квадратлар усуллари

Фредгольма 2-тур ИТ ни коллокация, Галёркин, энг кичик квадратлар усули билан ечилсин. Базис функция $\varphi_i(x)=x^{i-1}, i=1..n$, кўринишда олинсин.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

Мисол 5. Фредгольма 2-тур ИТ ни коллокация усули билан ечилсин.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Фредгольм\ 2тур\, ИТ\quad Колокация\, усули\quad ORIGIN:=1$

$K(x,y):=xy\ \ f(x):=2x\ \ ut(x):=3x$

$a:=0\ b:=1\ \ n:=6\ \ h:=(b-a)/(n-1)\ i:=1..n\ \ x_i:=a+(i-1)h$

$f_i:=f(x_i)\ ut_i:=ut(x_i)\ \ \varphi(i,x):=x^{i-1}\ \ j:=1..n\ \ \psi(j,x):=\varphi(j,x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(j,y)dy$

$i:=1..n\ \ j:=1..n\ \ M_{i,j}:=\psi(j,x_i)\ \ c:=lsolve(M,f)\ c^T=(0\ 3\ 0\ \ 0\ 0\ 0)$

$ut^T=(0\ 0.6\ \ 1.2\ 1.8\ \ 2.4\ \ 3)$

$u(x):=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi(i,x)\rightarrow 3x\ \ u(x):=3x\ \ u_i:=u(x_i)\ \ u^T=(0\ 0.6\ \ 1.2\ 1.8\ 2.4\ 3)$

Мисол 6. Фредгольма 2-тур ИТ ни энг кичик квадратлар усули билан ечилсин.

MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$Фредгольма\ 2тур\ ЭКК\ усули\ ORIGIN:=1$

$K(x,y):=xy\ \ f(x):=2x\ \ ut(x):=3x$

$a:=0\ b:=1\ \ n:=6\ \ h:=(b-a)/(n-1)\ i:=1..n\ \ x_i:=a+(i-1)h$

$f_i := f(x_i)\ ut_i := ut(x_i)\ \ \varphi(i,x) := x^{i-1}\ \ j := 1..n\ \ \psi(j,x) := \varphi(j,x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(j,y)dy$

$i := 1..n\ \ j := 1..n\ \ M_{i,j} := \int_a^b \psi(i,x)\psi(j,x)\,dx\ \ ff_i := \int_a^b \psi(i,x) f(x)dx\ \ c := lsolve(M, f)$

$c^T = (0\ 3\ 0\ \ 0\ 0\ 0)\ ut^T = (0\ 0.6\ 1.2\ 1.8\ 2.4\ 3)\ u(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(i,x) \to 3x$

$u(x)^T = (0\ 0.6\ 1.2\ 1.8\ 2.4\ 3)$

Мисол 7. Фредгольма 2-тур ИТ Галёркин усули билан ечилснн.
MathCAD ойнасида ушбу командаларни терамиз ва натижалар оламиз:

$\text{Фредгольма } 2\, тур\ \ \text{Галёркин усули}\ \ ORIGIN := 1$

$K(x,y) := xy\ \ f(x) := 2x\ \ ut(x) := 3x$

$a := 0\ b := 1\ \ n := 6\ \ h := (b-a)/(n-1)\ i := 1..n\ \ x_i := a + (i-1)h\ \ f_i := f(x_i)\ ut_i := ut(x_i)$

$\varphi(i,x) := x^{i-1}\ \ j := 1..n\ \ \alpha_{i,j} := \int_a^b \varphi(i,y)\varphi(j,y)dy\ \ \beta_{i,j} := \int_a^b (\int_a^b K(x,y)\varphi(j,y)dy)\varphi(i,x)dx$

$i := 1..n\ \ j := 1..n\ \ M_{i,j} := \alpha_{i,j} - \beta_{i,j}\ \ \ ff_i := \int_a^b \varphi(i,x) f(x)dx\ \ c := lsolve(M, ff)$

$c^T = (-0\ 2.018\ 0.822\ 1.159\ -0.822\ 0.822)$

$$u(x) := \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cdot \phi(i,x)\right) \to \frac{7392 \cdot x^5}{8989} - \frac{7392 \cdot x^4}{8989} + \frac{10416 \cdot x^3}{8989} + \frac{7392 \cdot x^2}{8989} + \frac{18144 \cdot x}{8989} - \frac{4}{8989}$$

$u(x)^T = (-0\ 0.444\ 1\ 1.714\ 2.667\ 3.999)\ ut(x)^T = (0\ 0.6\ 1.2\ 1.8\ 2.4\ 3)$

Мисоллар MathCAD дастурида тузилган дастурларнинг қулайликлари: қулайлик, компактлилик, кўргазмалилик, ёзувларнинг математик нотацияда ёзилишининг табиийлиги, тайёр ички функциялардан блок сифатида фойдаланиг имкониятини мавжудлигини кўрсатиб турибди.Дастурнинг ихтиёрий жойида ихтиёрий ўзгарувчининг қийматлари, жадвали, графигини монитор экранига чиқариш имкониятини беради, бу эса уларнинг назорат қилиш имкониятини беради ва хатолпрни тузатиш имкониятини беради.

Мундарижага

2.16.ЎЗГАРУВЧАН КОЭФФИЦЕНТЛИ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМА

Асосий тушунчалар: *Ўзгарувчан коэффицентли параболик тенглама учун ЧАС*

Асосий формулалар:

1. Ўзгарувчан коэффицентли ОДТ учун 2-тартибли чекли айирмали оператор.

$$Lu=\frac{d}{dx}(k(x)\frac{d}{dx})=(ku')',\ a\le x\le b,\ L_hu=(au_{\bar{x}})_{x,i}=\frac{1}{h}(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}),$$

$$a_i=\frac{1}{2}(k_i(x)+k(x_{i+1})),\quad a_i=k(x_i-\frac{h}{2}),\ a_i=\sqrt{k(x_i)k(x_{i+1})},\ L_hu-Lu=0(h^2).$$

2. Ўзгарувчан коэффицентли параболик тенглама учун ЧАС .

$$q(x,t)u_t=(k(x,t)u_x)_x+f(x,t),0<x<1,0<t\le T,$$

$$u(x,0)=u^0(x),\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(1,t)=\mu_1(t),$$

$$q(x_i,t)\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=L_h(t)(\delta u_i^{j+1}+(1-\delta)u_i^j)+f(x_i,t),\quad i=1,...,I-1,$$

$$u_0^j=\mu_1(t_j),\quad u_n^j=\mu_2(t_j),\quad u_i^0=u^0(x_i),\quad i=0..I,\ j=0..J$$

1. Ўзгарувчан коэффицентли дифференциал оператор.

$$Lu=\frac{d}{dx}(k(x)\frac{d}{dx})=(ku')',\ a\le x\le b, \tag{1}$$

операторни қараймиз. Уни $D=[a,b]$ кесмада

$$D_h=\{x_i=a+ih,\ I=0,...,n;\ h=(b-a)/n\}$$

тўр олиб чекли айирмали

$$L_hu=(au_{\bar{x}})_{x,i}=\frac{1}{h}(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}) \tag{2}$$

оператор билан аппроксимациялаймиз. Бу ерда a=a(x) функция D_h тўрда аниқланган ва $L_hu-Lu=0(h^2)$ иккинчи тартибли аппроксмация шартини қаноатлантириш керак. (2) га ушбу ёйилмаларни қўямиз:

$$u_{x,i}=u_i'+\frac{h}{2}u_i''+\frac{h^2}{6}u_i'''+0(h^3),\quad u_{\bar{x},i}=u_i'-\frac{h}{2}u_i''+\frac{h^2}{6}u_i'''+0(h^3),\ u_i'=u'(x_i),$$

Натижада ушбу тенгликни оламиз:

$$L_hu=\frac{a_{i+1}-a_i}{h}u_i'+\frac{a_i+a_{i+1}}{2}u_i''+\frac{h(a_{i+1}-a_i)}{6}u_i'''+0(h^2).$$

Лекин,

$$Lu=(k'u)'=k'u'+k''u,$$

шунинг учун

$$L_hu-Lu(x_i)=\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h}-k_i'\right)u_i'+\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}-k_i\right)u_i'+h\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{6}\right)u_i'''+0(h^2).$$

Бу ерда, агар

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h}=k'(x_i)+0(h^2),\qquad \frac{a_{i+1}+a_i}{2}=k(x_i)+0(h^2) \tag{3}$$

бўлса $L_hu-Lu=0(h^2)$ бажариши кўриниб турибди.

(3) тартибли 2-тартибли аппроксимакция етарли шартли дейилади. Равшанки, (3) шартларни

$$a_i=\frac{1}{2}(k_i(x)+k(x_{i+1})),\quad a_i=k(x_i-\frac{h}{2}),\ a_i=\sqrt{k(x_i)k(x_{i+1})} \tag{4}$$

коэффицентли қаноатлантиради. Масаслан, $a_i=k(x_i-h/2)$ учун (4) ни текширамиз. Бунинг учун $a_{i+1}=k(x_i+h/2), a_i=k(x_i-h/2)$ лигини назарга олсак

$$a_i=k(x_i)-k'(x_i)\frac{h}{2}+\frac{1}{2}k''(\zeta_1)\frac{h^2}{4},\ a_{i+1}=k(x_i)+k'(x_i)\frac{h}{2}+\frac{1}{2}k''(\zeta_2)\frac{h^2}{4}$$

эканлигидан, (3) ларни бажарилиши кўриниб турибди. Худди шу каби қолган ҳолларда ҳам текширилади.

2. Ўзгарувчан коэффицентли пароболик тенглама учун 1-тур чегара масалани кўрамиз:

$$q(x,t)u_t = (k(x,t)u_x)_x + f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t \le T, \quad (5)$$

$$u(x,0) = u^0(x),\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),$$

бу ерда q,k,f- етарли силлик функциялар бўлиб ушбу шартларга бўйсинади:

$$0 < c_1 \le k(x,t) \le c_2, \quad q(x,t) \ge c_3 > 0 \quad (6)$$

$Lu = (k(x,t)u_x)_x$ дифферанциал оператор ҳар бир t да (x_i, t) нуқтада (2) каби бўлинган ацирмали оператор билан аппроксимакциялаймиз:

$$L_h(t)u = (a(x_i,t)u_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h}\left[a\left(x_{i+1},t\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a(x_i,t)\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right]. \quad (7)$$

Бу ерда $a(x_i,t)$ коэффицентлар яна 2- тартибли аппроксимакция шартларини қаноатлантириш керак:

$$a(x_{i+1},t) + a(x_i,t) = 2k(x_i,t) + 0(h^2) \quad \left[a(x_{i+1},t) - a(x_i,t)\right]/h = k'(x_i,t) + 0(h).$$

Бу шартларни қаноатлантирадиган коэффицентлар

$$a(x_i,t) = 0,5(k(x_i,t) + k(x_{i-1},t)), \quad a(x_i,t) = k(x_i - h/2, t)$$

кўринишларда берилиши мумкин. (2.16.5) учун параметрли ч.а.с тузиш мумкин$\left(0 \le \delta \le 1\right)$

$$q(x_i,t)\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = L_h(t)(\delta u_i^{j+1} + (1-\delta)u_i^j) + f(x_i,t), \quad i = 1,...,I-1, \quad (8)$$

$$u_0^j = \mu_1(t_j), \quad u_n^j = \mu_2(t_j), \quad u_i^0 = u^0(x_i), \quad i = 0..I,\ j = 0..J$$

нинг қиймати сифатида $\lfloor t_j, t_{j+1} \rfloor$ дан ихтиёрий қийматни олиш мумкин, масалан, $t = t_j + 0.5\tau.$

Схема $t = t_j + 0.5\tau,\ \delta = 0.5 \quad да \quad 0(\tau^2 + h^2),$ колган қийматларда $0(\tau + h^2)$ аппроксимакцияга эга.

Ўзгарувчан коэффицентли тенгламалар учун тузилган ЧАС турғинлигини текширишда музлатиш принципи ишлатилади.Уни (8) га қўллайлик.

$\delta = 0$ да схема (8) ошкор.Унинг турғунлигини текшириш учун $f = 0$ дейлик. У ҳолда

$$q(x_i,t)\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = (a(x_i,t)u_{\bar{x}})_{x,i} \quad (9)$$

схемага келайлик.Ҳамма коэффицентларни ўзгармас дейлик (музлайтайлик): $q(x_i,t) = q = const, a(x_i,t) = a = const$. У ҳолда ўзгармас коэффицентли

$$q\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = au_{\bar{x}x,i} \Rightarrow \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = u_{\bar{x}x,i}, \tau^1 = \frac{\tau a}{q} \quad (10)$$

схемага келамиз. Бу схема $\tau^1 / h^2 \le 0.5$ да турғун ёки

$$\frac{\tau a(x_i,t)}{q(x_i,t)} \le \frac{h}{2} \quad (11)$$

да турғун.

$0 < c_1 \le a(x_i,t) \le c_2, \quad q(x_i,t) \ge c_3 > 0$ эканлиги туфайли (11) дан ўзгарувчан коэффицентли параболик тенглама учун ЧАС тўнгунлик шарти келиб чикади.

$\frac{\tau}{h} \le \frac{c_3}{2c_2}$. (8) схемани ечиш учун $\tau = 0$ да реккурент формула

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{1}{q(x_i,t)} L_h(t) u_i^j + \tau\, f(x_i,t), \quad i = 1..I-1, \quad j = 0..J-1, \qquad (12)$$

ишлатилиши мумкин. Ошкормас ҳолда $\delta = 1 (\delta \ne 0)$ схема (8) прогонка усули билан ечилади.

Мундарижага

2.17.НОЧИЗИК ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ СХЕМА

Асосий тушунчалар: *Ночизик паробалик тенглама, чизиқли ва ночизиқ ЧАС, итерация усули.*

Асосий формулалар:

1. Ночизик паробалик тенглама: $u_t = \left(k(u) u_x\right)_x + f(u)$.

2.Ночизик паробалик тенглама учун ошкормас чизиқли ЧАС

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h} = \frac{1}{h}\left(a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}\right) + f\left(u_i^j\right), i = 1...I-1, j = 0...J-1,$$

$$a_i = 0{,}5\left(k\left(u_i^j\right) + u\left(u_{i-1}^j\right)\right).$$

3. Ночизик паробалик тенглама учун ночизик ЧАС:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left(a\left(u_{i+1}^{j+1}\right)\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - a\left(u_i^{j+1}\right)\frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}\right) + f\left(u_i^{j+1}\right),$$

$$\alpha\left(u_i^{j+1}\right) = 0{,}5\left(k\left(u_i^{j+1}\right) + k\left(u_{i-1}^{j+1}\right)\right), \; i = 1..I-1, j = 0..J-1,$$

4. Ночизик паробалик тенглама учун предиктер-корректор схема:

$$\frac{u_i^{j+1/2} - u_i^j}{\tau} = \left(a\left(u_i^j\right) u_{\bar{x}}^{j+1/2}\right)_{x,i} + f\left(u_i^j\right), \quad i = 1..I-1, u_0^{j+1/2} = \mu_1\left(t_j + 0.5\tau\right), \quad u_n^{j+1/2} = \mu_2(t_j + 0.5\tau).$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}(a\left(u_i^{j+1/2}\right) u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i} + (a\left(u_i^{j+1/2}\right) u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i} + f\left(u_i^{j+1/2}\right) \;, u_0^{j+1} = \mu_1\left(f_{j+1}\right), u_n^{j+1} = \mu_2\left(f_{j+1}\right),$$

1. Ночизик параболик тенгламани қараймиз:

$$u_t = \left(k(u) u_x\right)_x + f(u), \qquad (1.)$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,0) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad a \le x \le b. \qquad (2.)$$

Ночизик тенгламаларда олдинги $k(u)$ функциянинг ўзгариш сохаси аниқмас бўлганлиги учун ошкормас схемаларгина ишлатилади. Қуйидаги ошкормас чизикли ЧАС ни караймиз:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h} = \frac{1}{h}\left(a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}\right) + f\left(u_i^j\right), \qquad \begin{matrix} i = 1...I-1 \\ j = 0...J-1, \end{matrix} \qquad (3.)$$

бу ерда $a_i = 0{,}5\left(k\left(u_i^j\right) + u\left(u_{i-1}^j\right)\right)$. Бошлангич чегара шартларнинг аппроксимацияси аниқ бажарилади:

$$u_i^0 = u^o(x_i), i = 0.I, \; u_o^j = \mu_1(t_j), \; u_I^j = \mu_2(t_j), \; j = 0..J \qquad (4)$$

(3) системани ушбу уч диоганалли система кўринишига келтирамиз:

$$\begin{cases} u_0^j = \mu_1\left(t_j\right), \; j = 0..J, \\ -\dfrac{\tau a_i}{h^2} u_{i-1}^j + \left[1 + \dfrac{\left(a_i + a_{i+1}\right)}{h^2}\right] u_i^j - \dfrac{\tau a_{i+1}}{h^2} u_{i+1}^j = u_i^{j-1} + \tau\, f\left(u_i^{j-1}\right), \; \begin{matrix} i = 1..I-1, \\ j = 1..J-1, \end{matrix} \\ u_n^j = \mu_2\left(t_j\right), \; j = 0..J, \; u_i^0 = u^o\left(x_i\right), \; i = 0..I. \end{cases} \quad (5.)$$

Бу схемада

$$\alpha_i = -\tau a_i / h^2, \; \beta_i = 1 + \tau\left(a_i + a_{i+1}\right)/h^2, \; \gamma = -\tau a_{i+1}/h^2, \; d_i^{j-1} = u_u^{j-1} + \tau f\left(u_i^{j-1}\right), \; i = 1..I-1, \quad (6)$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \gamma_0 = 0, \quad d_o = \mu_1(t_j),$$

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_n = 1, \quad \gamma_n = 0, \quad d_n = \mu_2(t_j)$$

белгилашлар киритиб стандарт кўринишида ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} \beta_0 u_i^j + \gamma_0 u_1^j = d_0 = \mu_1(t_i), \\ \alpha_i u_{i-1}^j + \beta_i u_i^j + \gamma_i = d_i, \quad i = 1..I-1, \\ \alpha_n u_{n-1} + \beta_n u_n^j = d_n = \mu_2(t_j). \end{cases} \quad \begin{matrix} j = 1..J-1, \quad d_i^{j-1} = u_i^{j-1} + \tau\, f(u_i^{j-1}), \\ u_i^0 = u^0(x_i), \quad i = 0..I \end{matrix} \quad (7)$$

Бу уч диогналли система ечимининг прогонка усули билан

$$u_i^j = v_{i+1} u_{i+1}^j + w_{i+1}, \quad i = 0..I-1,$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$\text{а)} \; v_{i+1} = \frac{-\gamma_i}{(\alpha_i v_i + \beta_i)}, \; w_{i+1} = \frac{d_i - \alpha_i w_i}{\alpha_i v_i + \beta_i}, \quad i = 1..I-1, \quad v_0 = w_0 = 0, \quad (9)$$

$$\text{б)} \; u_n^j = w_n, \; u_i^j = v_{i+1} u_{i+1}^j + w_{i+1}, \quad i = I-1..0.$$

2. Кўпинча (1.), (2.) масала учун

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left(a\left(u_{i+1}^{j+1}\right) \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - a\left(u_i^{j+1}\right) \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right) + f\left(u_i^{j+1}\right), \quad (10)$$

$$\alpha\left(u_i^{j+1}\right) = 0,5\left(k\left(u_i^{j+1}\right) + k\left(u_{i-1}^{j+1}\right)\right), \; i = 1..I-1, j = 0..J-1, \quad (11)$$

чекли айирмали схема ишлатилади. Бу ночизик чекли айирмали схема. Уни ечиш учун бирор итерация усули ишлатилади, масалан,

$$\frac{u_i^{(s+1)} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left(a\left(u_{i+1}^{(s)}\right) \frac{u_{i+1}^{(s+1)} - u_i^{(s+1)}}{h} - a\left(u_i^{(s)}\right) \frac{u_i^{(s+1)} - u_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right) + f\left(u_i^{(s)}\right), \quad (12)$$

$s = 0..m-1, \; u_i^{(0)} = u_i^j, \; u_i^{(m)} = u_i^{j+1}.$

Бу ерда s-итерация номери. Кўриниб турибдики, коэффицентлар олдинги итерацияда ҳисобланяпти $\left(a\left(u_{i+1}^{(s)}\right), a\left(u_i^{(s)}\right), f\left(u_i^{(s)}\right)\right)$, бошлангич киймат сифатида u_i^{j+1} учун u_i^j олинмокда. Бу бошлангич қиймат τ қанчалик кичик бўлса, шунча яхши. Итерациялар сони m аниқликка қараб берилади. Силлиқ коэффицентлар учун $\kappa\left(u\right) \geq c_1 > 0$ бўлса 2-3 итерация ҳисоблаш етарли. $u_i^{(s+1)}$ янги итерациялар (11) дан прогонка усули ёрдамида топилади.

Буннинг учун (11) куйидагича ёзиб олинади:

$$u_0^j=\mu_1\left(t_j\right),\ j=1..J, \tag{13}$$

$$\frac{-\tau\,a_i(u_i^{(s-1)})}{h^2}u_{i-1}^{(s)}+\left[1+\tau\frac{\left(a_i\left(u_i^{(s-1)}\right)+a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)\right)}{h^2}\right]u_i^{(s)}-\frac{\tau\,a_{i+1}(u_{i+1}^{(s-1)})}{h^2}u_i^{(s)}=d_i^j,$$

$$d_l^j=u_i^j+\tau\ f\left(u_i^{(s-1)}\right),\ u_n^j=\mu_2\left(t_j\right),\quad j=1..J,\quad s=0..\ m-1,\quad u_i^{(0)}=u_i^j,\quad u_i^{(m)}=u_i^j$$

яна

$$\alpha_0^{(s-1)}=0,\ \beta_0^{(s-1)}=1,\ \gamma_0^{(s-1)}=0,\ d_0^{(s-1)}=\mu_1(t_j),\ \alpha_1^{(s-1)}=0,\ \beta_1^{(s-1)}=1,\ \gamma_1^{(s-1)}=0,\ d_1^{(s-1)}=\mu_2(t_j),$$

$$\begin{aligned}&\alpha_i^{(s-1)}=-\tau\,a_i(u_i^{(s-1)})/h^2,\quad \beta_i^{(s-1)}=1+\tau\left[a_i\left(u_i^{(s-1)}\right)+a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)\right]/h^2,\\ &\beta_i^{(s-1)}=-\tau a_{i+1}\left(u_{i+1}^{(s-1)}\right)/h^2,\ d_i^{(s-1)}=u_i^s+\tau\ f\left(u_i^{(s-1)}\right),\quad i=1..I-1,\end{aligned} \tag{14}$$

белгилашларни киритиб (2.17.12) ни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\begin{cases}\beta_0^{(s-1)}u_0^{(s)}+\gamma_0^{(s-1)}u_1^{(s)}=d_0^{(s-1)}=\mu_1(t\ _j)\\ \alpha_i^{(s-1)}u_{i-1}^{(s)}+\beta_i^{(s-1)}u_i^{(s)}+\gamma_i^{(s-1)}u_{i+1}^{(s)}=d_i^{(s-1)},\quad d_i^{(s-1)}=u_i^j+\tau\ f\left(u_i^{(s-1)}\right),\quad i=1..I-1,\\ \alpha_n^{(s-1)}u_{n-1}^{(s)}+\beta_n^{(s-1)}u_n^{(s)}=d_n^{(s-1)}=\mu_2\left(t_j\right)\end{cases}$$

Бу уч диоганалли система (8), (9) каби прогонка усули билан ечилади.

3. Ночизиқ параболик тенглама (1) ни ечиш учун 2- тартибли предиктор-корректор схемалар ҳам ишлатиш мумкин. Бу ерда j-катламдан j+1 катламга ўтиш 2-этапда ташкил этилади.

Биринчи этапда чизиқли ошкормас схема

$$\frac{u_i^{j+1/2}-u_i^j}{\tau}=\left(a\left(u_i^j\right)u_{\bar{x}}^{j+1/2}\right)_{x,i}+f\left(u_i^j\right),\quad i=1..I-1, \tag{15}$$
$$u_0^{j+1/2}=\mu_1\left(t_j+0.5\tau\right),\quad u_n^{j+1/2}=\mu_2(t_j+0.5\tau).$$

Бу схемадан прогонка усуллари ёрдамида оралик $u_i^{j+1/2}, i=0..I,$ қийматлар топилади. Сўнг, иккинчи этапда шаблони 6 та нуқтали, ўзгарувчан коэффицентли $a(u)$, ўнг томони $f(u)$ $u=u_i^{j+1/2}$ нуқтада ҳисобланувчи яна ошкормас схема

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j+1/2}}{\tau}=\frac{1}{2}(a\left(u_i^{j+1/2}\right)u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i}+(a\left(u_i^{j+1/2}\right)u_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i}+f\left(u_i^{j+1/2}\right),\quad i=1..I-1. \tag{16}$$
$$u_0^{j+1}=\mu_1\left(f_{j+1}\right),\qquad u_n^{j+1}=\mu_2\left(f_{j+1}\right),$$

ечилади. Бу схемани ечишида ҳам прогонка усули ишлатилади.

(15), (16) схемаларнинг аппроксимацияли $O\left(\tau^2+h^2\right)$ абсалют турғун (ошкормас схемалар ечилмоқда).

Мундарижага

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ ФАНИДАН ТЕСТ **ҲУ 6 сем 1v**

_________________________________(фам.исм) ___________(гурух)

1. $y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ **Коши масаласи учун Эйлер усулини кўрсатинг**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)$, i=0..n. B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$ D) $y_{i+1}=y_i+h(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$

2. $y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ **Коши масаласи учун Рунге-Кутта усули бу…**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)$, i=0..n. B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$ D) $y_{i+1}=y_i+h(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$

3. **Прогноз- коррекция усулининг хатолиги нимага тенг?**

A) $y(x_i)-y_i=O(h)$, i=0,...,n B) $y(x_i)-y_i=O(h^2),\ y(x_n)-y_n=O(h)$

C) $y(x_i)-y_i=O(h^3),\ y(x_n)-y_n=O(h^2)$ D) $y(x_i)-y_i=O(h^5),\ y(x_n)-y_n=O(h^4)$

4. **Эйлер усулининг хатолиги нимага тенг**

A) $y(x_i)-y_i=O(h)$, i=0,...,n B) $y(x_i)-y_i=O(h^2), y(x_n)-y_n=O(h)$

C) $y(x_i)-y_i=O(h^3),\ y(x_n)-y_n=O(h^2)$ D) $y(x_i)-y_i=O(h^5),\ y(x_n)-y_n=O(h^4)$

5. **Такомиллашган Эйлер усулининг хатолиги нимага тенг**

A) $y(x_i)-y_i=O(h)$, i=0,...,n B) $y(x_i)-y_i=O(h^2),\ y(x_n)-y_n=O(h)$

C) $y(x_i)-y_i=O(h^3),\ y(x_n)-y_n=O(h^2)$ D) $y(x_i)-y_i=O(h^5),\ y(x_n)-y_n=O(h^4)$

6. **Рунге-Кутта усулининг хатолиги нимага тенг**

A) $y(x_i)-y_i=O(h)$, i=0,...,n B) $y(x_i)-y_i=O(h^2),\ y(x_n)-y_n=O(h)$

C) $y(x_i)-y_i=O(h^3),\ y(x_n)-y_n=O(h^2)$ D) $y(x_i)-y_i=O(h^5),\ y(x_n)-y_n=O(h^4)$

7. **Такомиллашган Эйлер усулини кўрсатинг**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)$, i=0..n. B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$ D) $y_{i+1}=y_i+h(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$

8. **Эйлернинг прогноз-коррекция усулини кўрсатинг**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)$, i=0..n. B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$ D) $y_{i+1}=y_i+h(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$

9. **Адамснинг иккинчи тартибли схемасини кўрсатинг**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)+1,5f(x_{i-1},y_{i-1})-0,5f(x_{i-2},y_{i-2})$,

B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$

D) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)++(23f(x_{i-1},y_{i-1})-16f(x_{i-2},y_{i-2})++5f(x_{i-3},y_{i-3}))$

10. **Адамснинг учинчи тартибли схемасини кўрсатинг**

A) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)+1,5f(x_{i-1},y_{i-1})-0,5f(x_{i-2},y_{i-2})$,

B) $y_{i+0,5}=y_i+h_if(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+h_if(x_{i+0,5},y_{i+0,5})$

C) $u_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i), y_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},u_{i+1})]/2$

D) $y_{i+1}=y_i+hf(x_iy_i)++(23f(x_{i-1},y_{i-1})-16f(x_{i-2},y_{i-2})++5f(x_{i-3},y_{i-3}))$

11. $Ly=y^{(2)}+p(x)y^{(1)}+q(x)y=f(x), y(a)=A, y(b)=B$ **масала учун тақрибий ечим** $y_n(x)=\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)$, $\varphi_j(x)$ **-базис функциялар, кўринишда танланган. Коллокация усулида** $\{c_j\}$ **лар қандай топилади?**

A)тўғри жавоб йўқ B) $\sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j(x_i) = f(x_i) - L\varphi_0(x_i), i = 1,...,n$

C) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

D) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)L\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))L\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

12. Ритц усулида тақрибий ечим $y_n(x)= \varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)$ **кўринишда қидирилмокда.** $y(a)=A$, $y(b)=B$ **чегара шартлар учун φ0(x) ни танланг**

A) $\varphi_0(x)=0$ B) $\varphi_0(x)=(A+B)/2$

C) $\varphi_0(x)=A+Bx$ D) $\varphi_0(x)=A+(B-A)(x-a)/(b-a)$

13. $y^{(2)}+qy=f(x), y(a)=\gamma_0, y(b)=\gamma_1$, **чегаравий масала ушбу**

$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + q_i y_i = f_i, \; y_0 = \gamma_0, \; y_n = \gamma_1$ **айирмали схема билан алмаштирилган**

такрибий ечим хатолиги нима? A) $\varepsilon_i = y(x_i)-y_i = O(h)$ B) $\varepsilon_i = y(x_i)-y_i = O(h^3)$

C) $\varepsilon_i = y(x_i)-y_i = O(h^2), i=1..n-1, \varepsilon_0 = \varepsilon_n = 0$ D) $\varepsilon_i = y(x_i)-y_i = O(h^4)$

14. $Ly=y^{(2)}+p(x)y^{(1)}+q(x)y=f(x), y(a)=A, y(b)=B$

масала учун тақрибий ечим $y_n(x)= \varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)$, $\varphi_j(x)$ **-базис функциялар, кўринишда танланган. Энг кичик квадратлар усулида** $\{c_j\}$ **лар қандай топилади?**

A)тўғри жавоб йўқ

B) $\sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j(x_i) = f(x_i) - L\varphi_0(x_i), i = 1,...,n$

C) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

D) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)L\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))L\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

15. $Ly=y^{(2)}+p(x)y^{(1)}+q(x)y=f(x), y(a)=A, y(b)=B$ **масала учун тақрибий ечим** $y_n(x)= \varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_n\varphi_n(x)$, $\varphi_j(x)$ **-базис функциялар, кўринишда танланган. Галёркин усулида** $\{c_j\}$ **лар қандай топилади?**

A)тўғри жавоб йўқ

B) $\sum_{j=1}^{n} c_j L\varphi_j(x_i) = f(x_i) - L\varphi_0(x_i), i = 1,...,n$

C) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

D) $\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b L\varphi_j(x)L\varphi_i(x)dx = \int_a^b (f(x) - L\varphi_0(x))L\varphi_i(x)dx, i = 1,...,n$

16. $Lu=f, lu=g$ **дифференциал масала** $L_h u^h = f^h, l_h u^h = g^h$ **айирмали схема билан алмаштирилган. Айирмали схема хатолиги ?**

A) $\varepsilon^h = u_h - u^h, u_h = \{u(x_i,t_j)\}, u^h = \{u_i^j\}$ B) $r_h = l_h u_h - g^h$ C) $R_h = L_h u_h - f^h$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\}$

17. $Lu=f, lu=g$ **дифференциал масала** $L_h u^h = f^h, l_h u^h = g^h$ **айирмали схема билан алмаштирилган. Айирмали схеманинг ечимдаги хатолиги ?**

A) $\varepsilon^h = u_h - u^h, u_h = \{u(x_i,t_j)\}, u^h = \{u_i^j\}$ B) $r_h = l_h u_h - g^h$ C) $R_h = L_h u_h - f^h$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\}$

18. $Lu=f, lu=g$ **дифференциал масала** $L_h u^h = f^h, l_h u^h = g^h$ **айирмали схема билан алмаштирилган. Чегара шартларнинг аппроксимация хатолиги ?**

A) $\varepsilon^h = u_h - u^h, u_h = \{u(x_i, t_j)\}, u^h = \{u_i^j\}$ B) $r_h = l_h u_h - g^h$ C) $R_h = L_h u_h - f^h$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\}$

19. $Lu=f,\ lu=g$ **дифференциал масала** $L_h u^h = f^h, l_h u^h = g^h$ **айирмали схема билан алмаштирилган. Дифференциал тенглама аппроксимация хатолиги ?**

A) $\varepsilon^h = u_h - u^h, u_h = \{u(x_i, t_j)\}, u^h = \{u_i^j\}$ B) $r_h = l_h u_h - g^h$ C) $R_h = L_h u_h - f^h$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\}$

20. $Lu=f,\ lu=g$ **дифференциал масала** $L_h u^h = f^h, l_h u^h = g^h$ **айирмали схема билан алмаштирилган. Айирмали схема қачон дифференциал масалани аппроксимация қилади дейилади?**

A) $\varepsilon^h = u_h - u^h \to 0, |h| \to 0$ B) $r_h = l_h u_h - g^h \to 0, |h| \to 0$

C) $R_h = L_h u_h - f^h \to 0, |h| \to 0$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\} \to 0, |h| \to 0$

21. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкор схемани кўрсатинг** $t \in [0,T]$,

$\Lambda_x u_i^j = (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2$, i=1..m-1, j=0..n.

A) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^j$ B) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^{j+1}$

C) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x \left(u_i^j + u_i^{j+1}\right)/2;$ D) $\Lambda_t u_i^j = \Lambda_x u_i^j$.

22. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкормас схема** $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^{j+1}$ **нинг турғунлик шарти қандай?**

A) $\tau < h$ B) $\tau < h^2$ C) τ, h-ихтиёрий D) $\tau = h$

23. **Гиперболик тенглама** $u_{tt} = u_{xx} + f$ **учун ошкор схема** $\Lambda_t u_i^j = f_i^j + \Lambda_x u_i^j$ **нинг аппроксимация хатолиги қандай?**

A) $O(\tau + h^2)$ ёки $O(\tau^2 + h^2)$ B) $O(\tau + h^2)$ C) $O(\tau^2 + h^2)$ D) $O(\tau + h)$

24. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкормас схемани кўрсатинг,**

$t \in [0,T]$, $x \in [0,1]$, $\tau = T/n$, $h = 1/m$, $\Lambda_x u_i^j = (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2$, i=1..m-1, j=0..n.

A) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^j$ B) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^{j+1}$ C) $u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x \left(u_i^j + u_i^{j+1}\right)/2;$

D) $\Lambda_t u_i^j = \Lambda_x u_i^j$.

25. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкор схема**

$u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \Lambda_x u_i^j \ (\Lambda_x u_i^j = (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2)$ **нинг турғунлик шарти қандай?** A) $\tau < h$

B) $\tau < 0.5h^2$ C) τ, h-ихтиёрий D) $\tau = h$

26. **Гиперболик тенглама** $u_{tt} = u_{xx}$ **учун айирмали схема** $\Lambda_t u_i^j = \Lambda_x u_i^t$ **нинг турғунлик шарти қандай ?. Бу ерда**

$\Lambda_x u_i^j = (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2$, $\Lambda_t u_i^j = (u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^j + u_{i+1}^{j+1})/\tau^2$

A) $\tau/h^2 > 0.5$ B) $\tau/h^2 < 0.5$ C) τ, h-ихтиёрий. D) $\tau \le h$;

27. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкормас схема қандай ечилади?**

A) Гаусс усули билан B) итерация усули

C) Прогонка усули билан D) реккурент формула

28. **Параболик тенглама** $u_t = u_{xx}$ **учун ошкор схема қандай ечилади?**

A) Гаусс усули B) итерация усули

C) Прогонка усули D) реккурент формула билан

74. **Гиперболик тенглама** $u_{tt} = u_{xx} + f$ **учун ошкор схема**

$\Lambda_t u_i^j = f_i^j + \Lambda_x u_i^j$ $(\Lambda_{xx} u_i^j = (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2)$ **қандай усул билан ечилади?**

A)реккурент формула B)прогонка C)Гаусс D)итерация

29. **Қачон айирмали схема дифференциал масалани** s-**тартиб билан аппроксимация қилади дейилади?**

A) $\varepsilon^h = 0(|h|^s), |h| \to 0$ B) $\mathbf{r_h = O(|h|^s), |h| \to O}$

C) $R_h = O(|h|^s), |h| \to 0$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\} = O(|h|^s), |h| \to 0$

30. Қачон айирмали схема ечими дифференциал масала ечимига s**- тартиб билан яқинлашади дейилади?**

A) $\varepsilon^h = O(|h|^s), |h| \to 0$ B) $r_h = O(|h|^s), |h| \to 0$

C) $R_h = O(|h|^s), |h| \to 0$ D) $\Phi_h = (R_h, r_h\} = O(|h|^s), |h| \to 0$

31. Айирмали схема қачон турғун дейилади?

A)берилганларнинг кичик ўзгаришлари ечимнинг кичик ўзгаришларига сабаб бўлади. B) $\|u^h\| \le C_1 \|f^h\| + C_2 \|g^h\|$ C)ечим берилганлардан узлуксиз боғлиқ D)Барчаси

32. Филлипов теоремаси (айирмали схеманинг яқинлашиши ҳақидаги) теоремасини кўрсатинг.

A) аппроксимация=турғунлик+яқинлашиш

B)аппроксимация ←турғунлик→яқинлашиш

C)аппроксимация+турғунлик→яқинлашиш

D)аппроксимация→турғунлик→яқинлашиш

33. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ **параболик тенглама учун классик ошкор схемани кўрсатинг.**

A) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^{k+1}$

B) $u_{ij}^{k+0.5} - u_{ij}^k = \tau\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+0.5}, u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+0.5} = \tau\Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}$

C) $$\begin{gathered} u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^k\right), \\ u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2} = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}\right) \end{gathered}$$

D) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^k$.

34. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ **параболик тенглама учун классик ошкормас схемани кўрсатинг.**

A) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^{k+1}$

B) $u_{ij}^{k+0.5} - u_{ij}^k = \tau\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+0.5}, u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+0.5} = \tau\Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}$

C) $u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^k\right),\ u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2} = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}\right)$

D) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^k$

35. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ **параболик тенглама учун тежамкор Писмен-Речфорд ўзгарувчан йўналишли схемасини кўрсатинг.**

A) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^{k+1}$

B) $u_{ij}^{k+0.5} - u_{ij}^k = \tau\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+0.5}, u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+0.5} = \tau\Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}$

C) $u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^k\right),\ u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2} = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}\right)$

D) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^k$

36. $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ **параболик тенглама учун Яненконинг тежамкор локаль бир ўлчовли схемасини кўрсатинг.**

A) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^{k+1}$

B) $u_{ij}^{k+0.5} - u_{ij}^k = \tau\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+0.5}, u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+0.5} = \tau\Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}$

C) $u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^k\right),\ u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2} = 0.5\tau\left(\Lambda_{xx}u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_{yy}u_{ij}^{k+1}\right)$

D) $u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k = \tau\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)u_{ij}^k$

37. Писмен-Речфорд,Яненко схемалари қандай хоссаларга эга?

A) ечиш умуман қийин B) қийин ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$ абсалют турғун C)осон ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$,шартли турғун D)осон ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$,абсалют турғун

38. $u_t=u_{xx}+u_{yy}$ **параболик тенглама учун классик ошкор схема қандай хоссаларга эга?**

A)ечиш умуман қийин B)қийин ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$,абсалют турғун C)осон ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$, шартли турғун D)осон ечилади, аппроксимация $0\left(\tau+h^2\right)$,шартли турғун

39. $u_t=u_{xx}+u_{yy}$ **параболик тенглама учун классик ошкормас схема қандай хоссаларга эга?**

A)ечиш умуман қийин B)қийин ечилади, аппроксимация $0(\tau+h^2)$, абсалют турғун C)осон ечилади, аппроксимация $0(\tau+h^2)$,шартли турғун D)осон ечилади, аппроксимация $0(\tau+h^2)$,абсалют турғун

40. **Эллиптик тенглама** $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ **учун ЧАС бу...**

A) $\Lambda_x u_{ij}+\Lambda_y u_{ij}=f_{ij}$ B) $\Lambda_t u_{ij}=\Lambda_x u_{ij}+f_{ij}$ C) $u_i^{j+1}=u_i^j+\tau\Lambda_x u_i^j$ D) $u_i^{j+1}=u_i^j+\tau\Lambda_x u_i^{j+1}$

41. $\int_a^x K(x,t)y(t)dt=f(x)$ **қандай тенглама?**

A)Вольтерраннинг 1- тур интеграл тенгламаси B)Фредгольмнинг 2-тур интеграл тенгламаси C)Фредгольмнинг 1-тур интеграл тенгламаси D)Вольтерранинг 2-тур интеграл тенгламаси

42. $y(x)=-0{,}1\int_0^x \sin(xt)y(t)dt+x^2$ **интеграл тенгламада ядро тақрибий ўзгарувчилари ажраладиган кўринишга келтирилсин.**

A) $K(x,t)\approx xt$ B) $K(x,t)\approx xt+1$

C) $K(x,t)\approx 1+x\sin t$ D) $K(x,t)\approx xt-\frac{(xt)^3}{3!}+\frac{(xt)^5}{5!}$

43. Қандай масала коррект қўйилган дейилади?

A)ечим мавжуд ва ягона, масала турғун B)ечим масаланинг берилганларидан узлуксиз боғлиқC)ечим ягона D)Ечим мавжуд

44. Масала қачон турғун дейилади?

A)Ечим мавжуд B)ечим масаланинг берилганларидан узлуксиз боғлиқ C)ечим ягона D)Ечим мавжуд эмас ва ягона эмас

45. Фредгольмнинг 1-тур интеграл тенгламасида корректликнинг қандай шартлари бузилади?

A)Мавжудлик B)ягоналик C)турғунлик D)барчаси

46. Айниган ядро қандай кўринишга эга?

A) $a_1(x)b_1(t)+...+a_n(x)b_n(t)$ B)ихтиёрий

C)икки функциянинг кўпайтмаси D)икки функциянинг йиғиндиси

47. Айниган ядроли интеграл тенглама қандай соддароқ тенгламага келтирилади?A)ночизиқ тенгламалар системасига B)чизиқли тенгламалар системасига C)транцендент тенгламага D)чизиқли тенгламага

48. Фредгольм 2-тур интеграл тенгламаси тақрибан қандай усуллар билан ечилиши мумкин?

A) Итерация B) квадратура формулаларига асосланган чекли айирмали схема C) айниган ядроли интеграл тенгламага келтириш D) барчаси

49. Фредгольм 1-тур интеграл тенгламасини тақрибий ечиш усули?

A)Тихоновнинг регуляризация усули B)Лаврентьевнинг 2-тур тенгламага келтириш усули C)Ивановнинг квазиечимлар усули D)барчаси

50. Вольтернинг 1-тур интеграл тенгламасини тақрибий ечиш усули?

A)Тихоновнинг регуляризация усули B)Лаврентьевнинг 2-тур тенгламага келтириш усули C)Ивановнинг квазиечимлар усули D)барчаси

ОДТ КМ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2
ОДТ ЧМ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	12
ПДТ,ГДТ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	22
ПДТ2,ЧАС	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	32
ИТ	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	42

Мундарижага

Илова2

Амалий ишлар

6.Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи

Коши масаласининг тақрибий ечими Эйлер, Рунге-Кутта усуллари ҳисоблансин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

N	ОДТ	[a,b]	БШ	h=(b-a)/n	Аниқ ечим
1	$y' - xy = -x^2 \sin x$	$[0, 0.5]$	$y(0) = 1$	0.1	$\cos x + x \sin x$
2	$(1+x)y' - y = 2 - 2\ln(1+x)$	$[0, 0.5]$	$y(0) = 1$	0.05	$1 + x + 2\ln(1+x)$
3	$y' - y = e^{-x}(\cos x - \sin x)$	$[0, 0.5]$	$y(0) = 1$	0.05	$e^{-x}(\cos x + \sin x)$
4	$y' + 2y = e^{-2x}$	$[0,1]$	$y(0) = 1$	0.1	$(1+x)e^{-2x}$
5	$y' - 2y = -4\cos 2x$	$[0, 0.2]$	$y(0) = 1$	0.02	$\cos 2x - \sin 2x$
6	$y' - y = 2e^{-x}$	$[0, 2]$	$y(0) = 2$	0.2	$e^{x} + e^{-x}$
7	$y' - 5y = -2e^{3x}$	$[0, 0.2]$	$y(0) = 2$	0.02	$e^{5x} + e^{3x}$
8	$y' + 2y = 4\cos 2x$	$[0,1]$	$y(0) = 1$	0.1	$\cos 2x + \sin 2x$
9	$y' + y = 6e^{3x}$	$[0,1]$	$y(0) = 2$	0.1	$e^{3x} + e^{-3x}$
10	$y' - y = e^{x}$	$[0,1]$	$y(0) = 1$	0.1	$e^{x}(1+x)$
11	$y' + y = 5e^{2x}$	$[0,1]$	$y(0) = 0$	0.1	$e^{2x} - e^{-3x}$

12	$y'+(3/4)y=(5/4)e^{x/2}$	$[0,1]$	$y(0)=2$	0.1	$e^{x/2}+e^{-3x/4}$
13	$xy'-y=x^2-x-1$	$[1,2]$	$y(0)=0$	0.1	x^2+x
14	$y'+3y=0$	$[0,0.5]$	$y(0)=1$	0.05	$e^{-3x}(\cos x+\sin x)$
15	$y'+2y=2.5e^{3x}+1.5e^{x}$	$[0,1]$	$y(0)=0$	0.02	$-e^{2x}+0.5e^{3x}+0.5e^{x}$
16	$y'-y=0.1e^{2x}-0.5x^2-2x-1$	$[0,1.5]$	$y(0)=5.1$	0.1	$e^{x}+0.1e^{2x}+0.5x^2+3x+4$
17	$y'+y=2\cos x+1+e^{x}$	$[1,1.5]$	$y(0)=2.5$	0.1	$\cos x+\sin x+1+e^{x}/2$
18	$x^2y-xy=-2$	$[1,1.5]$	$y(0)=4$	0.05	$2x+1/x+x^2$
19	$xy'+y=5\ln x-1$	$[1,1.5]$	$y(1)=5$	0.05	$5-\ln x$
20	$y'-y=e^{x}-x^2e^{x}/3$	$[0,0.5]$	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{x}+x^3e^{x}/6$
21	$y-2y=2e^{3x}$	$[0,1]$	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{2x}$
22	$2xy'-y=4x^{-2}$	$[1,2]$	$y(0)=2$	0.1	$3\sqrt{x}-x^{-2}$
23	$2\sqrt{x}y'+y=2\cos\sqrt{x}$	$[1,2]$	$y(0)=1$	0.1	$\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$
24	$10y'-3y=20x-0.3x^3-1$	$[1,2]$	$y(0)=1/3$	0.1	$x^2+0.1x^3+1/3$
25	$y'+y=2e^{x}$	$[0,1]$	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{-x}$
26	$y'+2y=4\cos 2x$	$[0,0.5]$	$y(0)=1$	0.05	$\sin 2x+\cos 2x$
27	$y'+0.5y=1.5e^{x}$	$[0,1]$	$y(0)=1$	0.1	$e^{x}+e^{-x/2}$
28	$y'-y=xe^{-2x}-2(1+x)$	$[0,0.5]$	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{-2x}$

7.Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масала

Иккинчи тартибли чизиқли ОДТ учун чегаравий масала чекли айирмали схема тузилиб Галеркин усуллари ва прогонка усули билан ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\quad \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=\gamma_0,\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=\gamma_1$$

№	Тенгламалар	№	Тенгламалар
1	$y''+2xy'+3y=1.5$, $y'(0,6)=1.1, 0.4y(1)+y'(1)=2$	16	$y''+\mathrm{ctg}x\,y'-y=3$ $y(0)=1, y(\pi/2)=1.6$
2	$y''-xy'+3y=x+1$ $y(0.8)-0.5y'(0.8)=1, y(1.8)=1$	17	$y''+(0.1+2x)y'-(5x+1)y=1.2$ $y(0)=2.2\ \ y(1)+0.4y'(1)=1.8$

3	$y''+y'/3+xy=2$ $y(0.6)=1.4,\ 2y(1.6)-1.5y'(1.6)=1.8$	18	$y''+\sin x y'-2y=3x+1$ $y(0)=1.2,\ y(\pi/4)=1.8$
4	$y''-0.6y'/x=x$ $y(0)=1,\ y(1)-0.5y'(1)=1.8$	19	$y''+(0.3+1)y'-1.8xy=1.4$ $y(0)=2,\ y(1)+0.8y'(1)=2.6$
5	$y''+xy'-y/(2x)=1,$ $y(2)+2y'(2)=1,\ y(2.8)=2.5$	20	$y''+(0.2x+1)y'-4y=3x,$ $y(1.1)=1.7,\ y(2.1)+2.4y'(2.1)=3.6$
6	$y''+0.4xy'-2yx=4x,$ $y(0.2)-1.5y'(0.2)=1,\ y(1.2)-0.5y'(1.2)=2$	21	$y''+(0.4x+1)y'-1.4y=2x+1$ $y(0)+1.4y'(0)=1.6,\ y'(0.6)=4.2$
7	$y''+(1.5)y'-(3x+0.5)y=4$ $y(0.6)=1.4,\ 2y(1.6)-1.5y'(1.6)=1.8$	22	$y''-(3x+1)y'+\cos x y=3x\sin x$ $y(0)+1.2y'(0)=3.3,\ y(\pi/2)-1.4y(\pi/2)=4.2$
8	$y''+\sin x y'+2yx=1.2$ $y(0)=1.4,\ y(\pi/2)-2y'(\pi/2)=2.2$	23	$y''+(2.3x+4)y'-6xy=4x$ $y(0)-1.2y'(0)=1.2,\ y'(0.8)=1.4$
9	$y''-\sin x y'+(x+1)y=2x+1$ $y(0.1)=1.4$ $y(1.1)-2.3y'(1.1)=2.3$	24	$y''+(3x+1)y'-\cos x y=\sin x$ $y(1.1)-1.4y'=1$ $y(2.1)-2.1y'(2.1)=2$
10	$y''+\cos x y'+(3x^2+1)y=-2.2x$ $y(0)=0.5,\ y(1)=2.4$	25	$y''-(3x+1)y'-4x=2$ $y(0)+1.4y'-4x=2,\ y'(0.4)=2.5$
11	$y''-3xy'-1.5y=x+1$ $1.2y(1.1)+0.6y'(1.1)+2=1.4$ $y(1.2)-0.5y'(1.2)=2.1$	26	$y''+y'/(3x)-y=3/x$ $y(0.6)=1.3$ $0.5y(1.6)-1.2y'(1.6)=2.4$
12	$y''-(x+1)y'+3xy=2x^2$ $y(1.4)=1,\ y(2.4)-3.2y'(2.4)=1.2$	27	$y''-3xy'-y/(2x)=0.7$ $y(0.4)=1.4,\ y(0.7)+1.4y'(0.7)=2.1$
13	$y''-(2x+1)y'-3xy=x$ $1.1y(0)-0.2y'(0)=1.1, y(1)+0.5y'(1)=2$	28	$y''+2x^2y'+y=x+1$ $y(0.7)-2y'(0.7)=1, y(1.7)-3y'(1.7)=2.3$
14	$y''-(x+3)y'-(4x+1)y=2x$ $y(0)=1.4\ ,\ y'(1)=2.4$	29	$y''-y'/2+2y/x=x/4$ 1.1y(1.1)-y?(1.1)=0.9,3y(1.6)+0.5y′(1.6)=1.8
15	$y''+(2x+0.5)y'+xy=1.7,$ $y(0)=1,\ 2y(1)+0.5y'(1)=1.4$	30	$y''+3y'-y/x=x+1,$ $y(0.5)=1,\ y(0.8)-2y'(0.8)=1.4$

9.5.Индивидуал топшириқлар.

Параболик дифференциал тенглама

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = \mu_1(t), u(1,t) = \mu_2(t)$.

учун ошкор ва ошкормас схемалар тузилсин ва ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

№	$u(x,t)$	$u(x,0)$	$u(0,t)$	$u(1,t)$	$f(x,t)$
1	$x(1-x)\sin t$	0	0	0	$(x-x^2)\cos t + 2\sin t$
2	$x(1-x)\cos t$	$x(1-x)$	0	0	$(x^2-x)\sin t + 2\cos t$
3	$x(1-x)\exp t$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\exp t$
4	$x(1-x)\mathrm{s}ht$	0	0	0	$(x-x^2)\mathrm{c}ht + 2\mathrm{s}ht$
5	$x(1-x)cht$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2)\mathrm{s}ht + 2cht$
6	$x(1-x)\sin 2t$	0	0	0	$2(x-x^2)\cos 2t + 2\sin 2t$
7	$x(1-x)\cos 2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x^2-x)\sin 2t + 2\cos 2t$
8	$x(1-x)\exp 2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\exp 2t$
9	$x(1-x)\mathrm{s}h2t$	0	0	0	$2(x-x^2)\mathrm{c}h2t + 2\mathrm{s}h2t$
10	$x(1-x)ch2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2)\mathrm{s}h2t + 2ch2t$
11	$\alpha x^3 + \beta t^2$	αx^3	βt^2	$1+\beta t^2$	$2\beta t - 6\alpha x$
12	$\alpha x^3 + \beta t^3$	αx^3	βt^3	$1+\beta t^3$	$3\beta t^2 - 6\alpha x$

Гиперболик дифференциал тенглама

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$, $u(x,0) = g_1(x), u_t^{(1)}(x,0) = g_2(x)$, $u(0,t) = \mu_1(t), u(1,t) = \mu_2(t)$.

чекли айирмали схема тузиб ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

№	$u(x,t)$	$u(x,0)$	$u_t^{(0)}(x,0)$	$u(0,t)$	$u(1,t)$	$f(x,t)$
1	$x(1-x)\sin t$	0	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\sin t$
2	$x(1-x)\cos t$	$x(1-x)$	0	0	0	$(x-x^2+2)\cos t$
3	$x(1-x)\exp t$	$x(1-x)$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\exp t$
4	$x(1-x)\mathrm{s}ht$	0	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)sht$
5	$x(1-x)cht$	$x(1-x)$	0	0	0	$(x-x^2+2)cht$
6	$x(1-x)\sin 2t$	0	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\sin 2t$
7	$x(1-x)\cos 2t$	$x(1-x)$	$-2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\cos 2t$
8	$x(1-x)\exp 2t$	$x(1-x)$	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\exp 2t$
9	$x(1-x)\mathrm{s}h2t$	0	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)sh2t$
10	$x(1-x)ch2t$	$x(1-x)$	0	0	0	$2(x-x^2+2)ch2t$
11	$\alpha x^3 + \beta t^2$	αx^3	0	βt^2	$1+\beta t^2$	$2\beta - 6\alpha x$
12	$\alpha x^3 + \beta t^3$	αx^3	0	βt^3	$1+\beta t^3$	$6\beta t - 6\alpha x$

Эллиптик дифференциал тенглама

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y),\ u(0,y) = g_1(y), u(1,y) = g_2(y), u(x,0) = g_3(x), u(x,1) = g_4(x)$$

эллиптик дифференциал тенглама айирмали схема тузилсин ва ечилсин . Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

№	$u(x,y)$	$u(0,y)$	$u(1,y)$	$u(x,0)$	$u(x,1)$	$f(x,y)$
1	$(x-x^2)(y-y^2)$	0	0	0	0	-4
2	$(x-x^2)\sin\frac{\pi y}{2}$	0	0	0	$(x-x^2)$	$[(x-x^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\sin\frac{\pi y}{2}$
3	$(x-x^2)\cos\frac{\pi y}{2}$	0	0	$(x-x^2)$	0	$[2-(x-x^2)(\frac{\pi}{2})^2]\cos\frac{\pi y}{2}$
4	$(y-y^2)\sin\frac{\pi x}{2}$	0	$y-y^2$	0	0	$[(y-y^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\sin\frac{\pi x}{2}$
5	$(y-y^2)\cos\frac{\pi x}{2}$	$y-y^2$	0	0	0	$[(y-y^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\cos\frac{\pi x}{2}$
6	$\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}$	0	$\cos\frac{\pi y}{2}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi y}{2}$	0
7	$(x-x^2)\mathrm{s}hy$	0	0	0	$(x-x^2)\mathrm{s}h1$	$(x^2-x-2)shy$
8	$(x-x^2)\mathrm{c}hy$	0	0	$(x-x^2)$	$(x-x^2)\mathrm{c}h1$	$(x^2-x-2)chy$
9	$(y-y^2)\mathrm{s}hx$	0	$(y-y^2)\mathrm{s}h1$	0	0	$(y-y^2+2)\mathrm{s}hx$
10	$(y-y^2)\mathrm{c}hx$	$y-y^2$	$(x-x^2)\mathrm{c}h1$	0	0	$(y-y^2+2)\mathrm{c}hx$
11	$\alpha x^3+\beta y^3+xy$	βt^3	$\alpha+\beta y^3+y$	αx^3	$\alpha x^3+\beta+x$	$6\alpha x+6\beta y$
12	$\alpha x^4+\beta y^3+xy$	βt^3	$\alpha+\beta y^3+y$	αx^4	$\alpha x^4+\beta+x$	$12\alpha x+6\beta y$

Мундарижага

Илова 3

КОМПАКТ ЛАБОРАТОРИЯ ИШЛАРИ

6-лаборатория иши-2 соат**.**

Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи Эйлер, такомиллашган Эйлер,предиктор-корректор, Рунге-Кутта усуллари билан ечилсин.

а) $u'=\alpha u^2+\beta/u^2$,u(1)=1,[a,b]=[1,2]

б) $u' = u - (\propto u + \beta v)v, u(0) = 1,$

$v' = e^u - (u+\propto v)v, v(0) = 0,$,[a,b]=[0,1]

Қийматлар аниқ ечимники билан солиштирилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

3-курс, 6-семестр, 8 соат.

7-лаборатория иши.

Оддий дифференциал тенглама учун чегара масала чекли айирмали схема тузиб прогонка усули билан ечилсин.

$x^2u''+xu'-4u=8ax^2-b\cos(x)(x^2+1)-bx\sin(x)$, $u=ax^4+b\cos(x)$, $u(0)=b$, $u(1)=a+b\cos(1)$.

Қийматлар аниқ ечимники билан солиштирилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар

8-лаборатория иши.

Параболик ва гиперболик дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш

Параболик тенглама

$u_t-u_{xx}=3bt^2-6ax$, $(u=ax^3+bt^3)$,

$u(x,0)=ax^3$, $u(0,t)=bt^3$, $u(1,t)=a+bt^3$

чекли айирмали схема тузиб ечилсин.Қийматлар аниқ ечимники билан солиштирилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

Гиперболик тенглама

$u_{tt}-u_{xx}=6bt-6ax$, $(u=ax^3+bt^3)$,

$u(x,0)=ax^3$, $u_t(x,0)=3bt^2$, $u(0,t)=at^3$, $u(1,t)=a+bt^3$

чекли айирмали схема тузиб ечилсин.Қийматлар аниқ ечимники билан солиштирилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

9-лаборатория иши.

Эллиптик дифференциал тенгламани тақрибий ечиш

$u_{xx}+u_{yy}=12ax^2+2by^2+2bx^2+12cy^2$, $(u=ax^4+bx^2y^2+cy^4)$,

$u(0,y)=ax^4$, $u(1,y)=a+by^2+cy^4$, $u(x,0)=cy^4$, $u(x,1)=ax^4+bx^2+c$,

чекли айирмали схема тузиб ечилсин.Қийматлар аниқ ечимники билан солиштирилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

10-лаборатория иши.

Интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш

Қуйидаги интеграл тенгламалар турли хил усуллар билан ечилсин.

1. $y(x)+\int_0^{0.5}\frac{(1+t)y(t)}{2+\sin\beta\pi(x+t)}dt=1+\alpha\sin\pi x.$
2. $y(x)-\int_0^{0.8}\frac{y(t)}{1+\gamma e^{-tx}}dt=\delta ch(x).$
3. $y(x)-\int_0^{1}\frac{\cos(\mu xt)y(t)}{t}dt=f(x).$
4. $y(x)-\int_0^{1}(1+t)\,(e^{\sigma xt}-1)y(t)\,dt=f(x).$

ОРАЛИҚ НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ
5 семестр 1-ОН

Ночизиқ тенглама

1. Ночизиқ тенглама ечими. Илдизларни ажратиш.
2. Ночизиқ тенглама учун кесмани 2 га бўлиш усули.
3. Ночизиқ тенглама учун итерация усули
4. Ночизиқ тенглама итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтириш.
5. Ночизиқ тенглама учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Назарий баҳо.

6. Ночизиқ тенглама учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Амалий баҳо.
7. Ночизиқ тенглама учун Ньютон усули. Геометрик маъноси.
8. Ночизиқ тенглама учун Ньютон усули Қолдиқ ҳаднинг баҳоси
9. Ночизиқ тенглама учун Ньютон усулида бошланғич итерацияни танлаб олиш.
10. Ночизиқ тенглама учун соддалашган Ньютон усули

Ночизиқ тенгламалар системаси

1. НТС ечими. Илдизларни ажратиш.
2. НТС ечимннинг мавжуд бўлмаслик ҳоллари
3. НТС учун итерация усули
4. НТС га итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтириш
5. НТС учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Назарий баҳо.
6. НТС учун итерация усулининг қолдиқ ҳади. Амалий баҳо.
7. НТС учун Ньютон усули. Геометрик маъноси.
8. НТС учун Ньютон усули Қолдиқ ҳаднинг баҳоси
9. НТС учун соддалашган Ньютон усули
10. НТС учун ажраладиган Ньютон усули

Чизиқли тенгламалар системаси

1. ЧАТС да Крамер қоидаси
2. ЧАТС да ечимни текшириш
3. ЧАТС да Гаусс усули
4. ЧАТС да Гаусс усули билан детерминантларни ҳисоблаш
5. ЧАТС да Гаусс усули билан тескари матрицани ҳисоблаш
6. ЧАТС да итерация усули.
7. ЧАТС да содда итерация усули
8. ЧАТС да Зейдель итерация усули. Назарий баҳо.
9. ЧАТС да итерация усулининг хатолиги. Амалий баҳо.
10. ЧАТС ни ечиш мумкин бўлган содда ҳоллар (учбурчак, уч диогналли матрицали системаларни ечиш).

5 семестр 2-ОН

Интерполяция

1.Интерполяция масаласи.
2.Кўпҳадлар билан интерполяциялаш
3.Бўлинган айирмалар
4.Ньютон интерполяция кўпҳади
5.Лагранж интерполяция кўпҳади
6. Ньютон интерполяция кўпҳади қолдиғи
7. Лагранж интерполяция кўпҳадининг қолдиғи
8. Сплайнларнинг таърифи
9.Чизиқли ва параболик сплайнлар
10.Кубик сплайн

Тақрибий дифференциаллаш

1.Тақрибий дифференциаллаш масаласи
2. $f^{(1)}(x_i)$ **ҳосила учун ўнг биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила**
3. $f^{(1)}(x_i)$ **ҳосила учун чап биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила**

4. $f^{(1)}(x_i)$ **ҳосила учун марказий биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила**

5. $f^{(1)}(x_0)$ **ҳосила учун ўнг чегаравий биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила**

6. $f^{(1)}(x_n)$ **ҳосила учун чап чегаравий биринчи тартибли чекли айирмали ҳосила**

7. $f^{(2)}(x_i)$ **ҳосила учун марказий иккинчи тартибли чекли айирмали ҳосила**

8. $f^{(1)}(x_0) \approx N_2^{(1)}(x_0)$ **тақрибий дифференциаллаш формуласи**

9. $f^{(1)}(x_1) \approx N_2^{(1)}(x_1)$ **тақрибий дифференциаллаш формуласи**

10. $f^{(1)}(x_2) \approx N_2^{(1)}(x_2)$ **тақрибий дифференциаллаш формуласи**

Тақрибий интеграллаш

1. Тақрибий интеграллаш формуласи

2.Ньютон-Котес квадратура формуласи $J_h^{NK}(f)$

3. Ньютон-Котес квадратура формуласининг қолдиғи

$$r_h^{NK}(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)dx$$

4. Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$

5. Тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиғи $r_h^{TT}(f) = h^2 f^{(2)}(\xi)/24$

6. Трапециялар формуласи $J_h^{T}(f)$

7. Трапециялар формуласининг қолдиғи $r_h^{T}(f) = -h^2 f^{(2)}(\xi)/12$

8. Содда Симпсон формуласи $J_h^{C}(f) = h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3$,

9. Содда Симпсон формуласининг қолдиғи $r_h^{C}(f) = -h^5 f^{(4)}(\xi)/90$

10. Мураккаб Симпсон формуласи ва унинг қолдиғи $J_h^{C}(f) = h(f_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + f_{2m})/3$, $r_h^{C}(f) = -h^4 f^{(4)}(\xi)/180$

6-семестр, 1-ОН
ОДТ учун Коши масаласи

1. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш сабаблари ва усуллари.
2. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Итерация усули
3. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Қаторга ейиш усули
4. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Эйлер усули ва хатолиги
5. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Такомиллашган Эйлер усули
6. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Прогноз коррекция усули
7. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Рунге-Кутта усули, хатолиги
8. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Эйлер усулининг хатолиги хатолиги
9. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Такомилашган Эйлер усули хатолиги
10. ОДТ учун Коши масаласини тақрибий ечиш. Прогноз коррекция усули хатолиги

ОДТ учун чегара масала

1. ОДТ учун чегара масаланинг қўйилиши ва тақрибий ечиш усуллари ва сабаблари
2. ОДТ учун қаторга ейиш усули
3. ОДТ учун проекцион усуллар. Базис функцияларни танлаш

4. ОДТ учун Ритц усули
5. ОДТ учун коллокация усули
6. ОДТ учун Галёркин усули
7. ОДТ учун энг кичик квадратлар усули
8. ОДТ учун чекли айирмалар усули
9. ОДТ учун чекли айирмали схемани ечишнинг прогонка усули
10. Прогонка усулининг турғунлиги

Чекли айирмали схемалар (ЧАС)

1. ХҲДТ лар учун бошланғич-чегара масалаларнинг қўйилиши
2. ҲУ да масалани тақрибий ечиш этаплари. Дифференциал масала ва уни дискретлаш.
3. Чекли айирмали схема тушунчаси (ЧАС). Аниқ ва тақриби ечим
4. ЧАС да тақрибий ечим хатолиги ва уни аниқлаш учун ЧАС
5. ЧАС нинг асосий тушунчалари: тафовут, аппроксимация хатолиги, яқинлашиш, турғунлик
6. ЧАС нинг яқинлашиши ҳақидаги Филлипов теоремаси
7. ЧАС да аппроксимация хатолигини аниқлаш усуллари
8. ЧАС да аппроксимация турғунликни аниқлаш усуллари
9. Кўчиш тенгламаси учун ЧАС тузиш
10. Кўчиш тенгламаси учун ЧАСни текшириш

6 семестр, 2-ОН

Параболик дифференциал тенглама

1. ПДТ учун бошланғич –чегара масала. Аниқ ечиш усуллари.
2. ПДТ учун ошкор схема тузиш.
3. ПДТ учун ошкормас схема тузиш.
4. ПДТ учун ошкор схема аппроксимация хатолигини текшириш
5. ПДТ учун ошкор схема турғунлигин текшириш
6. ПДТ учун ошкормас схема аппроксимация хатолигини текшириш
7. ПДТ учун ошкормас схема турғунлигин текшириш
8. ПДТ учун ошкор схемани ечишнинг реккурент формулалар усули
9. ПДТ учун ошкормас схемани ечишнинг прогонка усули
10. ПДТ учун Галёркин усули

Гиперболик дифференциал тенглама

1. ГДТ учун бошланғич –чегара масала. Аниқ ечиш усуллари.
2. ГДТ учун ошкор 1 тартибли схема тузиш.
3. ГДТ учун ошкор 2 тартибли схема тузиш.
4. ГДТ учун ошкор 1 тартибли схема аппроксимация хатолигини текшириш
5. ГДТ учун ошкор 1 тартибли схема турғунлигин текшириш
6. ГДТ учун ошкор 2 тартибли схема аппроксимация хатолигини текшириш
7. ГДТ учун ошкор 2 тартибли схема турғунлигин текшириш
8. ГДТ учун ошкор 1 тартибли схемани ечишнинг реккурент формулалар усули
9. ГДТ учун ошкор 2 тартибли схемани ечишнинг реккурент формулалар усули
10. ГДТ учун Галёркин усули

Эллиптик дифференциал тенглама ва кўп ўзгарувчили ПДТ

1. ЭДТ учун бошланғич –чегара масала. Аниқ ечиш усуллари.
2. ЭДТ учун ЧАС тузиш.
3. ЭДТ учун ЧАС нинг ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги. Максимум принципи.
4. ЭДТ учун ЧАС аппроксимация хатолигини текшириш
5. ЭДТ учун ЧАС турғунлигини текшириш
6. Кўп **ўзгарувчили ПДТ учун классик ЧАСлар**
7. Кўп **ўзгарувчили ПДТ учун тежамкор ЧАСлар**
8. Кўп **ўзгарувчили ПДТ учун тежамкор ЧАСларни ечиш**
9. ЭДТ учун ЧАС ни ечишнинг итерация-Липман усули
10. ЭДТ учун Галёркин усули

Интеграл тенгламалар

1. Интеграл тенгламалар ва уларнинг турлари
2. Коррект ва коррект қўйилмаган масалалар
3. 1- тур Фредгольм интеграл тенгламасининг нокорректлиги
4. 2-тур Фредгольм интеграл тенгламаси учун итерация усули
5. 2-тур Вольтер интеграл тенгламаси учун итерация усули
6. Айниган ядроли интеграл тенгламаларни ечиш
7. 2-тур Фредгольм интеграл тенгламаси учун квадратуралар усули
8. 2-тур Вольтер интеграл тенгламаси учун квадратуралар усули
9. Интеграл тенгламаларда ядрони аппроксимация қилиш усули
10. Дифференциал ва интеграл тенгламалар орасида боғланиш

Мундарижага

Илова 4

Буюк математиклар

№			
	Архимед	38 й. биз.эр.	грек математиги
	Ал-Хоразмий		ўзбек математики
	Ал-Беруний		ўзбек математики
	Ал-Форобий		туркистонлик математик
	Ибн Сино		ўзбек математики, табиби, файласуфи
	Насриддин ат Тусий		озарбайжонлик
	Омар Хайём		эронлик математик
	Декарт Рене	1596-1650	француз математиги
	Ферма П.	1601-1665	француз математиги
	Грегори Джеймс	1638-1675	шотланд математиги
	Ньютон Исаак	1642-1727	инглиз математиги
	Лейбниц Г.	1646-1716	немис математиги
	Котес Роджер	1682-1716	инглиз математиги
	Тейлор Б.	1685-1731	инглиз математиги
	Эйлер Леонард	1701-1783	Швейц. математиги
	Симпсон Томас	1710-1761	шотланд математиги
	Лагранж Жозеф де Луи	1736-1813	француз математиги
	Лаплас П.	1749-1827	француз математиги
	Лежандр А	1752-1833	француз математиги
	Фурье Ж.	1772-1837	француз математиги
	Гаусс Карл	1777-1855	немис математиги
	Больцано Б.	1781-1848	француз математиги
	Коши Огньюст	1789-1857	француз математиги
	Лобачевский Николай Иванович	1792-1856	рус математиги
	Родриг Бенжамен	1794-1851	француз математиги
	Лобатто Рехюэл	1797-1866	голланд математиги
	Абель Н.	1802-1829	француз математиги
	Остроградский М.В.	1802-1862	рус математиги
	Дирихле П.	1805-1859	француз математиги
	Вейерштрасс Карл	1813-1897	немис математиги
	Адамс Джон Кауч	1819-1892	инглиз математиги
	Стокс Давид	1819-1905	Инглиз математиги
	Чебышев Пафнутий Льв-ч	1821-1894	рус математиги
	Эрмит Шарль	1822-1901	француз математиги
	Риман Бертран	1826-1866	гемис математиги
	Кристофель Элвин Бруно	1829-1900	немис математиги
	Нейман Карл Готфрид	1832-1925	немис математиги
	Лагерр Эдмон Никола	1834-1886	француз математиги
	Кантор Г.	1845-1918	немис математиги
	Миттаг-Лефлер М.	1846-1927	
	Ковалевская София	1850-1891	рус математиги
	Пуанкаре Анри	1854-1912	француз математиги
	Марков Андрей Андреевич	1856-1922	рус математиги
	Рунге Карл ДавидТельме	1856-1927	немис математиги
	Пикар Шарль Эмиль	1856-1941	француз математиги
	Ляпунов Л.М.	1857-1918	рус математиги

	Пеано Д.	1858-1932	итальян математиги
	Вольтерра Вито	1860-1940	итальян математиги
	Гильберт Давид	1862-1943	немис математиги
	Стеклов В.А.	1864-1926	рус математиги
	Фредгольм Эрик Икар	1866-1927	швед математиги
	Кутта Мартин Вильгельм	1867-1994	немис математиги
	Галёркин Борис Григорьевич	1871-1945	рус математиги
	Борель Эмиль	1871-1956	француз математиги
	Штермер Фредрик Карл Мюлерц	1874-1957	норвеж математиги
	Бернштейн Сергей Натанович	1880-1968	рус математиги
	Ричардсон Льюис Фрай	1881-1953	инглиз математиги
	Тихонов Андрей Ник-ч	1908 туғ.	рус математиги
	Соболев Сергей Львович	1908-2003	рус математиги
	Колмогоров Ан.Н.		рус математиги

Мундарижага

Илова 5

АДАБИЁТЛАР:

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1973-Т. 1-632 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений - М.: Физматгиз, 1966-Т1,2.
3. Годунов С.К. Рябенький Р.С. Разностные схемы-М.: Наука, 1977.
4. Дьяченко В.Ф. Основные понятия выч.-ной математики М.:Наука, 1977.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. , Мирошниченко В.Л Методы сплайн функций М.:Наука, 1980.350 с.
6. Калиткин Н.И. Численные методы.- М.:Наука, 1978.
7. Зеленский К.Х, Игнатенко В.И., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики.- Киев, 1999 г. 352 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастирный П.И. Вычислительные методы,Т.1, М.:Наука, 1976 , Т.2- М.:Наука 1977.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.:Наука, 1981 г, 416 с.
10. Самарский А.А.Теория разностных схем.- М.:Наука 1977. 656 с.
11.Н.В.Копчёнова, И.А.Марон. ВМ в примерах и задачах.-М.:Наука,1972.
12. Исроилов М.И.Ҳисоблаш методлари.- Т.: Ўкитувчи.2003.
13. Волков Е.А.Численные методы. - М.:Наука, 1987, 248 с.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.Численные методы - М.:Наука,1987.-600 с.
15. Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривкин Г.С Задачи по вычислительной математике - М.:Наука,1980. 144 с.
16. Плис А.И. Сливина И.А. Лабораторный практикум по ВМ - М.:Наука, 1983г.
17. Турчак Л.И.Основы численных методов-М.: Наука, 1987-326 с.
18. Абдукодиров А.А., Фозилов Ф.И., Умрзоқов Т.И.ҲМ ва дастурлаш.- Т.:Ўзбекистон, 1996й, 256 бет.
19. Ф.Б.Бадалов, Ғ. Шодмонов. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари.-Т.:Фан,2000.-276 б.
20.Е.М.Мудров. Программы для ПК на языке Бейсик, Паскаль, Фортране. Томск, МП Раско,1992.-272 с.
21.А.Абдуҳамидов, С.Худойназаров.Ҳисоблаш усулларидан машқлар ва лаборатория ишлари.Т.:Ўзбекистон,1995.
22.П.-Ж.Лоран. Аппроксимация и оптимизация.М.:Мир,1975.

23.А.Н.Тихонов,В.Я.Арсенин.Методы решения некорректных задач.М.:Наука, 1980.
24.Я.Т.Гринчишин, В.И.Ефимов, А.Н.Ломакович. Алгоритмы и программы на языке Бейсик.М.:Просвещение.-1988 .-160 с.
25.Ю.П.Боглаев. ВМ и программирование. - М.:ВШ,1999-544 с.
26. Web-сайтлар:
www.exponenta.ru;techno.edu.ru;toehelp.ru;math.msu.ru.www.ziyonet.uz;
27.Т.Е.Шуп. Прикладные числ. методы в физике и технике. - М.:ВШ,1990-256 с.
28.В.М.Вержбицкий.Численные методы . -М.:ОНИКС 21 век ,2005-400 с.
29.В.В.Воеводин. Линейная алгебра.-М.:Наука,1974-338 с.
30.Ё.У.Соатов. Олий математика, 5-жилд.-Т.:1998.-352 б.
31.К.И.Бабенко.Основы численного анализа.-М.:Наука,1986.-744 с.
32.Қобулов В.Қ.Функционал анализ ва ҳис. математикаси.Т.:Ўқитувчи,1976 й.
33. Бойзоқов А., Қаюмов Ш Ҳисоблаш мат.-каси асослари. Т.: ТДИУ, 2000.
34.Б.Х.Ҳўжаёров Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари. Т.: «Ўз. - н» 1995.
35.ХолматовТ.Х.,Тойлоқов Н.Ш. Амалий математика ва компьютернинг дастурий таъминоти. Т.: «Меҳнат»,2000.
36.Сиддиқов А. Сонли усуллар ва программалаш. Т.: «Ўзбекистон»,2001.
37.Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов решения задачи многомерной задачи математической физики. Н.:Наука, 1967.
38.С.А.Немнюгин.Turbo Pascal.-СПб.:Питер, 2002.-496 с.
39.Л.В.Канторович, Г.П.Акилов.Функциональный анализ.М.:Наука, 1977.
40. Бахвалов Н.С.,Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: ВШ,2000.
41. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику-М.: Наука, 2004.
42.Asrayev Z.R. «Hisoblash usullari». Ma’ruzalar matni. Buxoro – 2006 . znuz_901_20090626190428.rar.
43. Ro`ziyev R.A., O`tapov T.U. «Sonli usullar» fanidan ma’ruza matnlari to’plami. Navoiy-2008.- znuz_749_20110126112150.rar
44. Имомов А. Ҳисоблаш математикаси (усуллари). Наманган, НамДУ,2007.- znuz_749_20101020110737.zip
45. А.С.Амридинов, А.И.Бабаяров, Б.Б.Бабажанов.«Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. СамДУ-2008.- znuz_662_20080519191437.rar.
46. E.M. Mirzakarimov. Amaliy mashg’ulotlar uchun sonli hisoblash usullari va dasturlash. FerPI-2009. znuz_notauth_20100417145959.1271498399.54.rar.
47. Эшназарова М., Имомов А., Мелибоев Х. “Ҳисоблаш усуллари” масофавий курси. Ўзб. Давлат Патент гувоҳномаси, BGU №00280, Тошкент, 2012.

Мундарижага