Т. А. САРИМСОҚОВ

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ НАЗАРИЯСИ

Т. А. САРИМСОҚОВ

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ НАЗАРИЯСИ

ЎзССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги университетларнинг ва techинститутларнинг механика-математика, физика-математика факультетлари учун дарслик сифатида рухсат этган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1968

2 — 2 — 3
Ўқит. 68.

На узбекском языке

САРЫМСАКОВ ТАШМУХАММАД АЛИЕВИЧ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебник для студентов университетов и педагогических институтов

Спец. редактор кандидат физико-математических наук
Хаджиев Джаввад

Издательство „Ўқитувчи"
Ташкент — 1968

Махсус редактор Ж. Хожиев
Редактор И. Аҳмаджонов
Муқова рассоми С. Владимиров
Бадиий редактор И. Митирев
Техн. редактор Н. Сорокина
Корректор. Ҳ. Зоирова

Теришга берилди 25|I-1968 й. Босишга рухсат этилди 26|VI-1968 й. Қоғози 60×90[1]|16. Физик л. 15,0. Нашр. л. 10,94. Тиражи 10000. Р. 15097.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 269-67. Баҳоси 31 т. Муқоваси 18 т.

Ўзбекистон ССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг 3- босмахонасида терилиб, 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1968. Заказ № 724.

Набрано в типографии № 3, отпечатано в типографии № 1 Государственного комитета Совета Министров УзССР по печати Ташкент, Хамзы, 21.

Қимматли онамнинг хотирасига бағишлайман.

СЎЗ БОШИ

Мазкур китобни ёзишда В. И. Ленин номидаги Тошкент Давлат университетининг физика-математика (кейинчарок эса механика-математика) факультетларида бир неча йиллар давомида ўқилган лекциялардан фойдаланиб:

1. Дарсликнинг илмий жиҳатдан жиддий бўлиши;

2. Унинг ҳажми деярли катта бўлмай, университетларнинг механика-математика ва педагогика институтларининг физика-математика факультетларининг программалари асосида тузилиши;

3. Методологик масалаларни фаннинг тарихий ривожланиши билан узвийлаштириб берилиши каби принципларга риоя қилишни лозим топдик.

Биринчи принцип ўз навбатида «Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси» дарслиги ўз ичига қандай илмий материалларни олиши зарур, деган масалага бевосита боғлиқдир. Бу масала рус тилидаги математик адабиётда асосан П. С. Александров ва А. Н. Колмогоровлар томонидан тузилган ва 1938 йилда биринчи марта нашр этилган «Теория функций действительного переменного» китобида қониқарли ҳал қилинган. Шунинг учун ҳам методологик жиҳатдан юқоридаги 1 ва 2-принципларни бажаришда кўрсатилган дарсликнинг ва бошқа мавжуд манбаларнинг ижобий хислатларидан фойдаландик.

3-принципга келганда эса бу китобда баён этилган илмий фактларни ёритишда биз уларнинг тарихий ривожланиши масаласини кўпроқ назарда тутдик.

Бу дарсликдан педагогика институтларининг физика-математика факультетлари студентлари ҳам фойдалана олишлари учун биз қўшимча XI бобни, асосан педагогика институтларининг программаларига кирган бўлиб, университет программаларига кирмаган материалларга бағишладик.

Юқорида баён этилган принциплар китобда асосан акс эттирилган бўлса, автор мамнун бўлар эди. Қўл ёзмани нашрга тайёрлашда физика-математика фанлари кандидати Ж. Хожиев ўз устига китобнинг илмий муҳаррирлигини олиб, кўп қимматбаҳо маслаҳатлар берди. Унга самимий миннатдорчилигимни билдираман.

Т. А. САРИМСОҚОВ

Тошкент, 1967 йил, август.

АДАБИЁТ

[1] П. С. Александров, **Введение в общую теорию множеств и функций,** Гостехиздат, 1948.

[2] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, **Введение в теорию функций действительного переменного,** ГОНТИ, 1938.

I БОБ

ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИДАН АСОСИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1- §. Тўплам тушунчаси

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич тушунчаларидан биридир. Одатда бу тушунча таърифсиз қабул қилинади. Бунинг сабаби шундаки, бу тушунчага бериладиган таърифнинг ўзи ҳам янада соддароқ тушунчага асосланган бўлиши керак; аммо биз бундай тушунчага эга эмасмиз. Шунинг учун тўплам таърифини қидирмасдан, уни мисоллар билан тушунтирамиз.

Масалан, ўзбек алфавитининг барча ҳарфлари тўплам ҳосил қилади, дейиш мумкин; шунингдек, Тошкент шаҳридаги ҳамма ўрта ва бошланғич мактаблар, ҳамма бутун мусбат сонлар, ҳамма узлуксиз функциялар, бирор китобнинг саҳифалари, тўғри чизиқдаги барча нуқталар ҳам тўплам ташкил этади. Бундай мисолларни чексиз кўп келтириш мумкин. Умуман, тўплам тушунчасини англашда унинг турли нарсаларнинг бирлашмаси (мажмуаси) эканлигини унутмаслик керак.

Берилган тўпламни ҳосил қилган нарсаларни тўпламнинг **элементлари** дейилади. Тўпламнинг элементлари турли нарсалардан, масалан, функциялар, сонлар, мактаблар ва ҳоказолардан иборат бўлиши мумкинлигини юқоридаги мисоллардан кўриб турибмиз. Одатда тўплам берилганда унинг элементлари бир ёки бир неча белгиларга мувофиқ аниқланган бўлади. Бу белгиларга асосланиб, ҳар бир нарса берилган тўпламнинг элементи эканлиги ёки элементи эмаслигини айта олиш мумкин.

Тўплам тушунчаси янада аёнийроқ бўлиши учун шуни айтиб ўтиш керакки, тўпламда бир хил (бир-биридан фарқ қилиб бўлмайдиган) элементлар бўлмайди. Масалан,

$$(x-1)^2(x+1)^3=0$$

тенгламанинг барча илдизлри тўплами $1, 1, -1, -1, -1$ элементлардан иборат бўлмасдан, балки 1 ва -1 элементлардан иборат.

Бундан буён қулайлик учун **бўш тўплам** тушунчасини киритамиз: *агар тўпламнинг бирорта ҳам элементи бўлмаса, ундай* *тўплам бўш тўплам дейилади*. Бўш тўплам $\varnothing$ (баъзан эса Λ ёки 0) билан белгиланади.

Бундан буён тўпламларни латин алфавитининг A, B, C, . . ., X, Y, Z сингари бош ҳарфлари билан, тўпламларнинг элементларини эса a, b, c, . . ., x, y, z каби кичик ҳарфлари билан белгилаймиз. Бирор a нарса A тўпламнинг элементи эканлигини

$$a \in A$$

шаклда ёзиш қабул қилинган; a нарса A тўпламга тегишли эмаслиги

$$a \bar{\in} A$$

кўринишда ёзилади. Ҳар қандай a нарса учун юқоридаги муносабатлардан бири, албатта, ўринли бўлиши табиийдир.

Тўпламлар назариясининг тарихи деярли узоқ эмас. Бу соҳадаги *биринчи* жиддий ишлар XIX асрнинг иккинчи ярмида қилинган. Шунга қарамай, ҳозирги вақтда тўпламлар назарияси математиканинг жуда ҳам кенг ва чуқур ишланган қисмларидан бири бўлиб, бу назария мазкур курснинг (ва ҳатто бутун математиканинг) асосий пойдевори ҳисобланади.

2- §. Тўпламнинг қисмлари ва тўпламлар устида амаллар

Бундан кейин доимо қуйидаги асосий тушунчалар ва амаллар билан иш олиб боришга тўғри келади.

1-таъриф. *Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг қисми дейилади ва бу муносабат*

$$A \subset B$$

шаклда ёзилади.

Таърифдан ҳар қандай A тўпламнинг ўзи ўзининг қисми, яъни

$$A \subset A$$

экани бевосита кўринади.

Бўш $\varnothing$ тўплам эса ҳар қандай тўпламнинг қисмидир.

A ва $\varnothing$ тўпламлар A тўпламнинг **хосмас** қисмлари дейилади; A тўпламнинг ҳамма бошқа қисмлари эса унинг **хос қисмлари** дейилади.

Мисоллар: 1. A тўплам 1 ва 2 рақамлардан, B тўплам эса 1, 2, 3, 4, 5 рақамлардан иборат бўлсин, яъни

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

бўлсин, у ҳолда A тўплам B нинг хос қисми бўлади.

2. $A = \{1, 2, 5, 6\}$ ва $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тўпламларнинг ҳеч бири иккинчисининг қисми эмас.

3. Ҳамма тоқ сонлар тўплами барча бутун сонлар тўпламининг хос қисмидир.

4. A тўплам

$$x^2 - 1 = 0$$

тенгламанинг илдизларидан, B тўплам эса

$$x^4 - 1 = 0$$

тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат бўлса, A тўплам B нинг хосмас қисми бўлади.

2-таъриф. *X ихтиёрий тўплам бўлиб, A тўплам унинг бирор қисми бўлсин. X тўпламнинг A га кирмаган барча элементларидан иборат тўпламни A нинг X га қадар тўлдирувчи тўплами дейилади.*

Тўлдирувчи тўпламни $C_X(A)$ каби белгилаймиз. Мисол учун, агар

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

бўлса, у ҳолда

$$C_B(A) = \{3, 4, 5\}$$

бўлади.

3-таъриф. *Агар A тўплам B тўпламнинг қисми бўлса ва B тўплам A нинг қисми бўлса, A тўплам B тўпламга тенг дейилади ва бу муносабат*

$$A = B$$

шаклда ёзилади; демак, $A = B$ тенглик икки $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабатларнинг биргаликда бажарилишига эквивалентдир.

Масалан, A тўплам 1 ва -1 элементлардан, B эса ушбу

$$(x - 1)^2 (x + 1)^3 = 0$$

тенгламанинг барча илдизларидан иборат бўлса, A тўплам B тўпламга тенг бўлади.

4-таъриф. *A ва B икки ихтиёрий тўплам бўлсин. Агар C тўплам A ва B тўпламларнинг барча элементларидан иборат бўлиб, бошқа элементлари бўлмаса, у ҳолда C тўплам A ва B тўпламларнинг йиғиндиси дейилади ва*

$$A \cup B = C$$

кўринишда ёзилади (1-шакл).

Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, агар бирор элемент A тўпламга ҳам, B тўпламга ҳам кирса, бу элемент C тўпламда бир марта ҳисобланади.

Агар $A \subset B$ бўлса, бу ҳолда $A \cup B = B$, хусусий ҳолда $A \cup A = A$ бўлади.

Мисоллар: 1. A тўплам 1, 2, 3, 4, 5 рақамлардан, B тўплам эса 0, 2, 4, 6, 8 рақамлардан иборат бўлса, бу тўпламларнинг йиғиндиси бўлмиш C тўплам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 рақамлардан иборатдир, яъни:

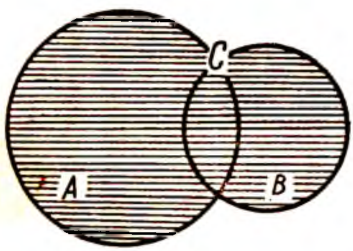
$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

2. A тўплам ҳамма жуфт бутун сонлардан, B тўплам эса 3 га бўлинадиган барча бутун сонлардан иборат, яъни

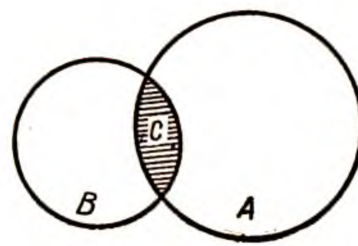
$$A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}, \quad B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$$

бўлса, у ҳолда:

$$C = A \cup B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \ldots\}.$$



1- шакл.



2- шакл.

5- таъриф. *Икки A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг умумий қисми ёки кўпайтмаси дейилади* (2- шакл) *ва*

$$C = A \cap B \text{ ёки } C = A \cdot B$$

кўринишда ёзилади.

Мисоллар: 1. Агар

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

бўлади.

2. Агар

$$A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \ldots\},$$
$$B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \cap B = \{\pm 6, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \ldots\}$$

бўлади.

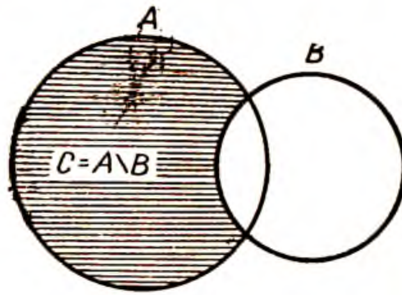
Хусусий ҳолда, ё $A \subset B$, ё $A = B$, ё $B = \varnothing$ бўлса, у ҳолда шунга мос равишда $A \cap B = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ бўлади.

Агар A ва B тўпламларнинг умумий элементлари бўлмаса, у ҳолда $A \cap B = \varnothing$ бўлади.

6-таъриф. *A тўпламнинг B тўпламга кирмаган барча элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг айирмаси дейилади ва унинг учун*

$$C = A \setminus B$$

белги ишлатилади (3-шакл).



3- шакл.

Мисоллар: 1. Агар

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$$

бўлади.

2. Агар

$$A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \ldots\},$$
$$B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \setminus B = \{\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \ldots\}$$

бўлади.

7-таъриф. *Биринчи элементи X тўпламга ва иккинчи элементи Y тўпламга кирган барча (x, y) жуфтлардан иборат тўплам X ва Y тўпламларнинг* ***Декарт (тўғри) кўпайтмаси*** *дейилади, бу кўпайтма одатда*

$$[X, Y]$$

каби белгиланади.

Мисоллар: 1. R — ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб, $X = R$ ва $Y = R$ бўлса, у ҳолда $[R, R]$ — текисликдаги барча нуқталар тўплами бўлади.

2. N — барча бутун сонлар тўплами бўлиб, $X = N$, $Y = N$ бўлса, $[N, N]$ — текисликдаги координаталари бутун бўлган барча нуқталар тўпламидир.

3. Агар R^n фазо n ўлчовли фазо бўлиб, $X = R^k$, $Y = R^l$ бўлса, у ҳолда

$$[R^k, R^l] = R^{k+l}$$

бўлади.

Тўпламлар устидаги юқорида киритилган амаллар ушбу хоссаларга эга:

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

5. $(A \setminus B) \cap C = (B \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Бу тенгликларнинг исботлари бир-бирига ўхшаш бўлгани сабабли, уларнинг биттасини, масалан, 4-тенгликни исбот қилиш билан чекланамиз. 4-тенгликни исбот этиш учун чап томондаги $(A \cup B) \cap C$ тўпламнинг ҳар бир элементи ўнг томондаги $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини ва, аксинча, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ нинг ҳар бир элементи $(A \cup B) \cap C$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини кўрсатиш керак.

$a \in (A \cup B) \cap C$ бўлсин деб фараз қилайлик. Бундан, кўпайтманинг таърифига мувофиқ, $a \in A \cup B$ ва $a \in C$ муносабатлар келиб чиқади; $a \in \cup B$ муносабатдан эса $a \in A$ ёки $a \in B$ муносабатлардан камида биттасининг ўринлилиги келиб чиқади; агар $a \in A$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $a \in A \cap C$ бўлади, агар $a \in B$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $a \in B \cap C$ бўлади. Демак, ҳар иккала ҳолда ҳам $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ муносабат келиб чиқади, яъни 4- тенгликнинг чап томонидаги тўпламнинг ихтиёрий элементи ўнг томондаги тўпламнинг ҳам элементи экан.

Энди $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, йиғиндининг таърифига асосан, $a \in A \cap C$ ёки $a \in B \cap C$ муносабатларнинг камида биттаси ўринли: агар $a \in A \cap C$ бўлса, бундан $a \in A$ ва $a \in C$ муносабатлар келиб чиқади, агар $a \in B \cap C$ бўлса, бундан $a \in B$ ва $a \in C$ муносабатлар келиб чиқади. Демак, $a \in A \cup B$ ва $a \in C$ муносабатлар ҳамма вақт ўринли. Булардан эса $a \in (A \cup B) \cap C$ муносабат келиб чиқади, яъни 4-тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламнинг ихтиёрий элементи чап томондаги тўпламнинг ҳам элементи экан. Шу билан 4-тенглик исбот этилди.

3- §. Тўпламлар системаси. Тўпламни синфларга ажратиш

Энди x бирор ўзгарувчи бўлиб, унинг қийматлари бирор X тўпламни ташкил этсин ва ҳар бир x га A_x тўплам мос келтирилган бўлсин. Элементлари A_x тўпламлардан иборат H тўпламга **тўпламлар тўплами** ёки **тўпламлар системаси** дейилади. Келгусида тўпламлар системасини

$$H = \{A_x\}, \quad (x \in X)$$

шаклда ёзамиз.

Мисоллар: 1. Агар

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

бўлса, у ҳолда

$$H = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$$

бўлади.

2. Агар

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

бўлса, у ҳолда

$$H = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots\}$$

бўлади. Одатда бундай тўпламлар системаси **тўпламлар кетма-кетлиги** дейилади.

3. Агар xOy текисликни олиб, X тўплам деб, Ox ўқни ва A_x тўплам деб Ox ўқни x нуқтада кесиб ўтувчи вертикал тўғри чизиқни олсак, у ҳолда H тўпламлар системаси текисликдаги барча вертикал тўғри чизиқлардан иборат бўлади.

Икки тўпламнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси каби, ихтиёрий тўпламлар системаси $H = \{A_x\}$, $(x \in X)$ ни ҳосил қилувчи A_x тўпламларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси тушунчаларини киритиш мумкин.

$H = \{A_x\}$, $(n \in X)$ тўпламлар системасини ташкил этувчи A_x **тўпламларнинг йиғиндиси** (қисқароқ, тўпламлар системасининг йиғиндиси) деб шундай C тўпламга айтиладики, A_x тўпламларнинг ҳар бири C тўпламнинг қисми бўлиб, C тўпламнинг ҳар бир элементи A_x тўпламларнинг камида биттасига қарашли бўлади. Тўпламлар системасининг йиғиндиси учун

$$C = \bigcup_{x \in X} A_x$$

белги ишлатилади.

Масалан, тўпламлар системаси учун юқорида берилган учинчи мисолда тўпламлар системасининг йиғиндиси текисликдаги барча нуқталардан иборат.

$H = \{A_x\}$, $(x \in X)$ **тўпламлар системасининг кўпайтмаси** деб, шундай C тўпламга айтиладики, C тўпламнинг ҳар бир элементи барча A_x тўпламларга киради ва A_x тўпламларнинг барчасига кирувчи ҳар қандай элемент C тўпламга ҳам киради. Тўпламлар системасининг кўпайтмаси қуйидагича белгиланади:

$$C = \bigcap_{x \in X} A_x.$$

Масалан, X тўплам деб 1 дан катта бўлган барча ҳақиқий сонларни ва A_x тўплам деб

$$|z| < x$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча комплекс сонларни олсак, у ҳолда $C = \bigcap_{x \in X} A_x$ тўплам қуйидаги

$$|z| \leqslant 1$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча комплекс сонлардан иборат бўлади.

Тўпламлар системасининг Декарт кўпайтмаси таърифини, соддалик учун, тўпламлар кетма-кетлиги учун берамиз. $H = \{A_1, A_2, \ldots,$

$A_n, \ldots\}$ тўпламлар кетма-кетлигининг Декарт (тўғри) кўпайтмаси деб, элементлари барча

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots), \quad a_i \in A_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ \ldots$$

кетма-кетликлардан иборат тўпламга айтилади. Тўпламлар кетма-кетлигининг Декарт кўпайтмаси қуйидагидек белгиланади:

$$\prod_{x=1}^{\infty} A_x.$$

Мисоллар: 1. Агар R ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб,

$$A_i = R, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{ва} \quad A_i = \varnothing, \quad i > n$$

бўлса, у ҳолда

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = R^n,$$

n ўлчовли фазодан иборат.

2. Агар $A_i = R$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ бўлса, у ҳолда

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = R^{\infty},$$

яъни координаталарининг сони саноқли (6- § га қаранг) бўлган фазодан иборат.

Агар $H = \{A_x\}$, $(x \in X)$ тўпламлар системаси берилиб, бу системага кирувчи ҳар қандай икки тўпламнинг умумий элементлари бўлмаса ва бу системанинг йиғиндиси M бўлса, у ҳолда M тўплам қисмларга (ёки синфларга) бўлинган дейилади; A_x тўпламлар M тўпламнинг синфлари дейилади. Масалан, натурал сонлар тўплами жуфт ва тоқ сонлардан иборат икки синфга бўлинади.

M тўплам синфларга бўлинган бўлсин. Агар бу тўпламнинг икки a ва b элементлари бир синфга тегишли бўлса, уларни берилган бўлинмага нисбатан эквивалент дейилади ва $a \sim b$ шаклда ёзилади.

Эквивалентлик муносабати қуйидаги хоссаларга эга:

1. Симметриклик хоссаси. *Агар $a \sim b$ бўлса, у ҳолда $b \sim a$.*

2. Транзитивлик хоссаси. *Агар $a \sim b$, $b \sim c$ бўлса, у ҳолда $a \sim c$ бўлади.*

3. Рефлексивлик хоссаси. *Ҳар қандай a элемент ўз-ўзига эквивалент, яъни: $a \sim a$.*

Энди M тўпламда бирор қоидага мувофиқ тўпламнинг баъзи элементларини эквивалент дейиш мумкин бўлсин ва бу эквивалентлик симметриклик, транзитивлик ва рефлексивлик хоссаларига эга бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда бу эквивалентлик муносабати M тўпламни синфларга бўлади.

Шундай эканини исботлаймиз. $M(a)$ синфи деб, M тўпламда a га эквивалент бўлган барча элементлардан иборат тўпламни айтамиз. Рефлексивлик хоссасига кўра, ҳар бир a элемент ўз синфига киради. Энди, агар $M(a) \cap M(b) \neq \varnothing$ бўлса, $M(a) = M(b)$ муносабат ўринли бўлишини кўрсатамиз.

$M(a)$ ва $M(b)$ синфлар умумий c элементга эга бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда, синфларнинг таърифига асосан, $a \sim c$, $b \sim c$; демак, симметриклик хоссасига биноан $c \sim b$, булардан эса, транзитивликка кўра, $a \sim b$.

Энди b' элемент $M(b)$ синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда $a \sim b \sim b'$ ва транзитивликка кўра $a \sim b'$, яъни $b' \in M(a)$. Демак, $M(b) \subseteq M(a)$. a' элемент $M(a)$ синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $a \sim a'$, симметриклик хоссасига асосан $a' \sim a$ ва $a \sim b$ бўлгани учун, транзитивликка кўра, $a' \sim b$, бундан эса $b \sim a'$, яъни $a' \in M(b)$; демак, $M(a) \subseteq M(b)$. Шундай қилиб, $M(b) \subseteq M(a)$ ва $M(a) \subseteq M(b)$, яъни: $M(a) = M(b)$.

Мисол. M сифатида барча натурал сонлар тўпламини оламиз. Агар иккита a ва b натурал сонни 3 га бўлганда улар тенг қолдиққа эга бўлса, бу сонларни эквивалент деймиз. Бу эквивалентлик муносабати M тўпламни 3 та M_0, M_1 ва M_2 қисмларга бўлади. Бу ерда M_i ($i = 0, 1, 2$) тўплам 3 га бўлганда қолдиғи i бўлган барча натурал сонлардан иборат.

4-§. Тўпламларни бир-бирига акс эттириш

Турли тўпламлар орасидаги боғланиш акс эттириш тушунчаси орқали ўрнатилади.

1-таъриф. *Иккита X ва Y тўплам берилган бўлсин. Агар маълум бир қоида бўйича X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўпламнинг биргина элементи мос қўйилган бўлса, X тўплам Y га акс эттирилган дейилади ва бу муносабат*

$$f : X \to Y$$

шаклда ёзилади.

Баъзан

$$f : X \to Y$$

акс эттиришни X тўпламда аниқланган ва қийматлари Y да бўлган функция деб ҳам аталади. Жумладан, Y деб ҳақиқий (комплекс) сонлар тўпламини олсак, у ҳолда

$$f : X \to Y$$

акс эттиришни X тўпламдаги ҳақиқий (комплекс) функция дейилади.

Мисоллар: 1. Агар R ҳақиқий сонлар тўплами бўлса, у ҳолда

$$y = f(x) = x^3$$

функция R ни R га акс эттиради.

2. Дирихле функцияси

$$y = \chi(x) = \begin{cases} \text{агар } x \text{ — рационал бўлса, } 1. \\ \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса, } 0 \end{cases}$$

ҳақиқий сонлар тўпламини 0 ва 1 сонларидан иборат тўпламга акс эттиради.

3. Агар $C_{[a,\ b]}$ билан $[a, b]$ сегментдаги[1] барча узлуксиз функциялар тўпламини белгиласак, у ҳолда

$$f(x) \to \int_a^b f(x)\ dx$$

мослик $C_{[a,\ b]}$ ни R га акс эттиради.

X тўпламнинг Y тўпламга барча акс эттиришларининг ўзи тўплам ҳосил қилади. Бу тўплам Y^x билан белгиланади.

Мисоллар: 1. $\{1, 2\}$ тўпламнинг $\{a, b\}$ тўпламга барча акс эттиришлари тўплами қуйидаги элементлардан иборат:

$$(1 \to a,\ 2 \to a),\ (1 \to a,\ 2 \to b),\ (1 \to b,\ 2 \to a), (1 \to b,\ 2 \to b).$$

2. Ҳақиқий сонлар тўпламининг ўзини ўзига барча акс эттиришлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган барча ҳақиқий функциялардан иборат.

Берилган $f: X \to Y$ акс эттиришда x элементга мос келувчи y элемент учун $y = f(x)$ белги ишлатилади ва уни x нинг тасвири дейилади. Масалан, юқорида келтирилган $y = x^3$ акс эттиришни олсак, бунда 2 сонининг тасвири 8 га тенг, ± 3 нинг тасвири ± 27 га тенг ва ҳоказо. Умуман, X тўпламнинг бирор P қисми берилган бўлса, P тўплам барча элементларининг Y даги тасвирларидан иборат бўлган тўплам P тўпламнинг f акс эттиришдаги тасвири дейилади ва у $f(P)$ билан белгиланади.

Y тўпламнинг ихтиёрий y элементи берилган бўлсин. X тўпламнинг y га ўтувчи барча элементларидан иборат қисми y элементининг асли дейилади ва у $f^{-1}(y)$ шаклда ёзилади. Умуман, Y нинг Q қисми берилса, X нинг Q тўпламга ўтувчи қисми Q нинг асли деб аталади ва $f^{-1}(Q)$ каби ёзилади. Масалан, юқоридаги Дирихле функцияси билан берилган акс эттиришда 0 элементнинг асли барча иррационал сонлар тўплами, 1 элементининг асли эса барча рационал сонлар тўпламидан иборатдир.

---

[1] Иккита a ҳамда b нуқта ва улар орасидаги ҳамма нуқталардан иборат тўплам сегмент дейилади ва $[a, b]$ кўринишда ёзилади; агар тўпламга a кириб, b кирмаса ёки b кириб, a кирмаса ва улар орасидаги ҳамма нуқталар кирса ҳамда тўпламнинг бошқа элементлари бўлмаса, бундай тўплам ярим сегмент (ярим интервал, ярим оралиқ) дейилади ва мос равишда $[a, b)$ ва $(a, b]$ кўринишда ёзилади. Агар тўпламга a ва b нуқталар кирмай, улар орасидаги ҳамма нуқталар кирса ҳамда тўпламнинг бошқа элементлари бўлмаса, бу тўплам интервал (оралиқ) дейилади ва (a, b) кўринишда ёзилади.

Агар Y тўпламнинг ҳар бир элементи X тўпламнинг камида бир элементига мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўплам Y тўпламнинг **устига акс эттирилган** дейилади. Агар Y тўпламда шундай элемент мавжуд бўлсаки, бу элементнинг асли бўш тўплам бўлса, у ҳолда X тўплам Y тўпламнинг **ичига акс эттирилган** дейилади. Мисол учун, ҳақиқий сонлар тўпламини ўзини ўзига акс эттирувчи қуйидаги икки функцияни олайлик:

$$y = x^3, \quad y = x^2.$$

Равшанки, буларнинг биринчиси устига акс эттириш, иккинчиси эса ичига акс эттиришдир.

Ичига акс эттиришни доим устига акс эттиришга келтириш мумкин; бунинг учун бу акс эттиришда Y тўпламни X тўпламининг тасвири билан алмаштириш керак. Шундай қилиб, керак бўлганда, ихтиёрий акс эттиришни устига акс эттириш деб олиш мумкин.

Энди муҳим бир таърифни киритамиз.

2-таъриф. $f: X \to Y$ *устига акс эттириш берилган бўлсин. Агар Y даги ҳар бир элементнинг асли ягона бир элементдан иборат бўлса, у ҳолда бу акс эттириш ўзаро бир қийматли акс эттириш (мослик) дейилади.*

Мисоллар: 1. $y = x^3$ функция ҳақиқий сонлар тўпламини ўзини ўзига бир қийматли акс эттиради.

2. R_+ манфий бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Ушбу

$$y = x^2$$

функция R ни R_+ устига акс эттиради. Бу акс эттириш ўзаро бир қийматли эмас, чунки, масалан, 1 сонининг асли иккита элементдан: 1 ва -1 сонларидан иборат.

Ихтиёрий

$$f: X \to Y$$

устига акс эттириш берилган бўлсин. Бу акс эттириш X тўпламни синфларга ажратади; бу синфлар Y тўплам элементларининг аслларидан (яъни $f^{-1}(y)$ лардан) иборат. Ҳосил бўлган синфлар тўпламини Z билан белгилаймиз. Қуйидаги

$$f^{-1}(y) \to y$$

мослик Z тўпламни Y тўпламга акс эттиради. Равшанки, бу акс эттириш ўзаро бир қийматлидир.

5-§. Тўпламнинг қуввати

Одатда чекли ва чексиз тўпламларни бир-биридан фарқ қиладилар. Элементларининг сони чекли бўлган тўплам **чекли тўплам** дейилади. Математикада кўпинча чексиз тўпламлар билан иш кўришга тўғри келади. Умуман чексиз тўплам дейилганда шундай тўпламни кўзда тутиш керакки, бу тўпламдан битта, иккита ва ҳоказо элементларни олганда, унда яна элементлар қолаверади. Масалан, натурал сонлар тўплами, ҳамма тоқ сонлар тўплами, тўғри чизиқдаги ҳамма нуқталар, ҳамма узлуксиз функциялар тўпламининг ҳар бири чексиз тўпламдир.

Энди иккита чекли A ва B тўпламлар берилган бўлиб, уларни сон жиҳатдан солиштириш керак бўлсин. Бу масалани қуйидаги икки усул билан ечиш мумкин:

1) бу тўпламлар элементларининг сонини ҳисоблаб чиқиб, чиққан сонларни солиштириш;

2) агар шундай бир қоида мавжуд бўлсаки, бу қоидага мувофиқ A тўпламнинг ҳар бир элементига B тўпламдан биргина элементни мос келтирилганда B тўпламнинг ҳар бир элементига A тўпламда ҳам биргина элемент мос келса, яъни A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлса, у ҳолда бу тўпламлар элементларининг сони жиҳатидан бир хил бўлади.

Иккинчи усулни яхшироқ тушуниш учун мисол кўрамиз. Маълум бир аудиториядаги барча стуллар A тўплам ва бу аудиториядаги барча студентлар B тўпламни ҳосил қилсин. Агар ҳар бир студентга битта стул тўғри келса ва, аксинча, ҳар бир стулга битта студент тўғри келса, у ҳолда бу аудиториядаги студентлар сони стуллар сонига тенг деймиз ёки стуллардан иборат бўлган A тўплам билан студентлардан иборат бўлган B тўплам орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд деймиз.

Келтирилган усулларнинг фарқи чексиз тўпламларни солиштирганда кўринади. Биринчи усул бўйича чексиз тўпламларни фарқ қилиб бўлмайди. Аммо иккинчи усул билан, масалан, натурал сонлар тўпламининг барча ҳақиқий сонлар тўпламидан фарқли эканлигини, яъни бу тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд эмаслигини кўрсатиш мумкин (7- § га қаранг).

1- таъриф. *Агар A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд бўлса, у ҳолда бу тўпламлар эквивалент ёки тенг қувватли тўпламлар дейилади ва*

$$A \sim B$$

кўринишда ёзилади.

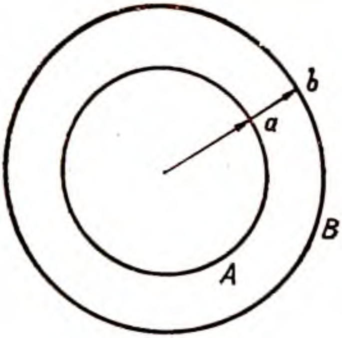
Одатда A тўпламга эквивалент бўлган тўпламлар синфи $\bar{A}$ билан белгиланади ва $\bar{A}$ ни A тўпламнинг **қуввати** ёки **кардинал сони** деб аталади. Чекли тўпламнинг қуввати (кардинал сони) сифатида одатда бу тўплам элементларининг сони олинади.

Тўпламларнинг эквивалентлиги, эквивалентлик тушунчасининг (3- § га қаранг) рефлексивлик, симметрик ва транзитивлик хоссаларига эгалиги бевосита текширилади. Тўпламларнинг эквивалентлигига оид мисоллар келтирамиз.

1. Агар A тўплам ҳамма бутун мусбат сонлардан, B тўплам эса ҳамма бутун манфий сонлардан иборат бўлса, бу тўпламлар эквивалент бўлади. Эквивалентлик, масалан, қуйидагича ўрнатилади: мусбат n сонига манфий $-n$ сони мос қўйилади.

2. Агар A тўплам натурал сонлардан ва B тўплам $\frac{1}{n}$ (n — натурал сон) кўринишидаги сонлардан иборат бўлса, бу тўпламлар ўзаро эквивалент бўлади. Эквивалентлик натурал n сонига $\frac{1}{n}$ сонини мос қўйиш билан ўрнатилади.

3. Агар A ва B иккита радиуслари турлича бўлган айланаларнинг нуқталаридан иборат бўлса, бу тўпламлар эквивалент бўлади. Эквивалентликни, мисол учун, қуйидагича ўрнатиш мумкин: бу айланаларни концентрик жойлаштириб, уларнинг бир радиусда ётган нуқталарини бир-бирига мос келтирамиз; бу мослик айланалар орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатади (4-шакл).



4- шакл.

Чекли тўпламларнинг қуввати сон бўлгани учун уларнинг қувватларини бир-бири билан солиштириш мумкин. Шунингдек, ихтиёрий тўплам қувватларини солиштириш учун қуйидаги таърифни киритамиз.

2-таъриф. *Қувватлари α ва β бўлган A ва B тўпламлар берилган бўлсин:*

$$\bar{\bar{A}} = \alpha, \quad \bar{\bar{B}} = \beta.$$

Агар A ва B тўпламлар эквивалент бўлмаса ва B тўпламда A тўпламга эквивалент B' қисм мавжуд бўлса, B тўпламнинг қуввати A нинг қувватидан катта, A тўпламнинг қуввати эса B тўпламнинг қувватидан кичик дейилади ва

$$\alpha < \beta \text{ ёки } \beta > \alpha$$

шаклда ёзилади.

Масалан, агар

$$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 200\}, \quad \bar{\bar{A}} = 100,$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 150\}, \quad \bar{\bar{B}} = 150$$

бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламга эквивалент эмас, аммо унинг $B' = \{1, 2, \ldots, 100\}$ қисмига эквивалент. Демак,

$$\bar{\bar{A}} = 100 < \bar{\bar{B}} = 150.$$

Равшанки, ҳар қандай чекли тўпламнинг қуввати ҳар қандай чексиз тўпламнинг қувватидан кичик.

Энди чекли тўпламларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1) Ихтиёрий икки A ва B чекли тупламларнинг қувватларини солиштириш мумкин, яъни уларнинг қувватлари учун қуйидаги 3 муносабатдан бири албатта ўринлидир:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}.$$

2) Агар $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ тўплам N_n билан белгиланса, у ҳолда

$$N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n, \ldots$$

тўпламлар барча чекли «эталон» тўпламларни беради, яъни ихтиёрий чекли тўплам $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ тўпламларнинг биригагина эквивалент бўлади.

3) Икки A ва B чекли тўпламлар йиғиндисининг қуввати чекли бўлиб,

$$\overline{\overline{(A \cup B)}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{(A \cap B)}}$$

формула орқали топилади.

Бу фикрларни чексиз тўпламларга умумлаштириш учун қуйидаги саволларга жавоб бериш керак:

1) Бир-бирига эквивалент бўлмаган чексиз тўпламлар мавжудми?

2) Ихтиёрий иккита чексиз тўпламни ўзаро солиштириш мумкинми, яъни ихтиёрий икки A ва B чексиз тўпламлар учун

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$$

муносабатларнинг бири албатта ўринли бўладими?

3) Чексиз «эталон» тўпламлар системасини тузиш мумкинми?

4) Агар чексиз A ва B тўпламлар берилган бўлса, бу тўпламлар йиғиндисининг қуввати нимага тенг?

Ҳозирча биринчи саволгагина ижобий жавоб олинган: масалан, барча натурал сонлар тўплами ва барча ҳақиқий сонлар тўплами ўзаро эквивалент эмас (7-§ га қаранг).

Иккинчи савол фақат маълум шартни қаноатлантирувчи (тўла тартибланган) тўпламлар учунгина ижобий ҳал қилинган ([1] нинг III бобига қаранг).

Учинчи масала ҳали ҳал қилинмаган. Бу саволнинг бир қисми бўлган қуйидаги савол яқин кунларгача **континуум проблемаси** номи билан машҳур эди: N — натурал сонлар тўплами ва R — ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Қуввати $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{R}}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи A тўплам мавжудми? Бу проблема 1963 — 1964 йилларда америка олими П. Д. **Коэн** томонидан ҳал қилинди. Коэннинг олган натижаси анча мураккаб бўлгани учун унинг устида тўхтаб ўтирмаймиз.

Тўртинчи савол ҳам иккинчи савол каби маълум шартни қаноатлантирувчи тўпламлар учун ечилган ([1] нинг III бобига қаранг); аниқроғи, бундай тўпламлар учун қуйидаги теорема исботланган: ***агар***

$$\overline{\overline{A}} \leqslant \alpha, \quad \overline{\overline{B}} \leqslant \alpha$$

бўлса, у ҳолда $\overline{\overline{(A \cup B)}} \leqslant \alpha$. Бу китобда айтилган теореманинг баъзи бир хусусий ҳолларигина исботланади (6, 7-§ га қаранг).

6-§. Саноқли тўпламлар

Чексиз тўпламларнинг энг соддаси натурал сонлар тўпламидир. Шунга асосан қуйидаги таърифни киритамиз.

1-таъриф. *Натурал сонлар тўплами ва унга эквивалент бўлган тўпламларга саноқли тўпламлар дейилади.*

Бу таърифдан кўринадики, ҳар қандай саноқли тўпламнинг элементларини барча натурал сонлар билан *номерлаб* чиқиш имконияти бор; демак, саноқли тўпламни қуйидаги чексиз кетма-кетлик шаклида ёзишимиз мумкин:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

Энди саноқли тўпламларга оид бир неча теоремаларни исбот қиламиз.

6. 1. Теорема. ***Чекли ёки саноқли тўпламларнинг сони чекли ёки саноқли йиғиндиси ҳам чекли ёки саноқли тўпламдир.***

Теореманинг мазмунини тушунишни осонлаштириш учун уни бир неча қисмга ажратамиз:

а) ***ҳадларининг сони чекли бўлган чекли тўпламларнинг йиғиндиси чеклидир;***

б) ***ҳадларининг сони чекли бўлган саноқли тўпламларнинг йиғиндиси саноқли тўпламдир;***

в) ***ҳадларининг сони саноқли бўлган чекли тўпламларнинг йиғиндиси чекли ёки саноқлидир;***

г) ***ҳадларининг сони саноқли бўлган саноқли тўпламларнинг йиғиндиси саноқли тўпламдир.***

Исбот. Биринчи қисм ўз-ўзидан равшан. Қолганларининг ҳаммасини исботламасдан, улардан бирини, масалан, тўртинчисини исботлаймиз; иккинчи ва учинчи қисмларнинг исботи шунга ўхшаш бўлади. Ушбу

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots$$

саноқли тўпламлар берилган бўлсин. Бу тўпламлардан ҳар бирининг элементларини натурал сонлар билан номерлаб чиқамиз:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 : a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_3^{(1)},\ \ldots \\
A_2 : a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(2)},\ \ldots \\
A_3 : a_1^{(3)},\ a_2^{(3)},\ a_3^{(3)},\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_k : a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ a_3^{(k)},\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right| \qquad (1)$$

Бу жадвалдаги элементларни қуйидаги тартибда ёзамиз:

$$b_1 = a_1^{(1)},\ b_2 = a_1^{(2)},\ b_3 = a_2^{(1)},\ b_4 = a_1^{(3)},\ b_5 = a_2^{(2)},\ b_6 = a_3^{(1)},\ \ldots \qquad (2)$$

Бу кетма-кетлик қуйидаги қоида бўйича тузилди: агар $i+k<<j+l$ бўлса, у ҳолда $a_i^{(k)}$ элемент $a_j^{(l)}$ дан илгари ёзилади; агар $i+k=j+l$ ва $i<j$ бўлса, у ҳолда $a_i^{(k)}$ элемент $a_j^{(l)}$ дан илгари ёзилади.

Энди (2) кетма-кетликда бир хил элементлар учраса, уларнинг биттасини олиб қолиб, қолганини ўчирамиз. Натижада янги кетма-кетлик ҳосил бўлади:

$$c_1=b_{n_1},\quad c_2=b_{n_2},\ \ldots,\ c_s=b_{n_s}\ \ldots . \tag{3}$$

Бу кетма-кетлик чекли ёки чексиз бўлади. Охирги кетма-кетликнинг элементларидан тузилган тўплам

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

тўпламга тенг, чунки A нинг ҳар бир $a_i^{(j)}$ элементи (3) кетма-кетликда камида бир марта учрайди ва, аксинча, ҳар бир c_s элемент (2) кетма-кетликда учрайди, демак, A тўпламга киради. (3) кетма-кетликдан A нинг саноқли тўплам эканлиги кўринади.

6. 2. Теорема. ***Ҳар қандай чексиз тўпламнинг саноқли тўпламдан иборат қисми мавжуд.***

Бу теорема саноқли тўпламларнинг чексиз тўпламлар орасида энг соддаси эканлигини кўрсатади.

Исбот. E ихтиёрий чексиз тўплам бўлсин. Бу тўпламдан бирор элемент олиб, уни a_1 билан белгилаймиз. Бунинг натижасида E бўш бўлиб қолмайди, шунинг учун ундан иккинчи бошқа бир элементни олиш мумкин; бу элементни a_2 билан белгилаймиз ва ҳоказо. E тўпламдан элементларни бу тарзда ажратишни чексиз давом эттириш мумкин, чунки E чексиз тўплам. Шундай қилиб, турли элементлардан иборат бўлган ушбу

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

кетма-кетликка эга бўламиз. Бу кетма-кетликнинг элементларидан иборат тўплам E тўпламнинг саноқли қисмидир.

6. 3. Теорема. ***Агар чексиз E тўпламга чекли ёки саноқли A тўплам қўшилса, у ҳолда $E\cup A$ тўплам E тўпламга эквивалент бўлади, яъни:*** $E\cup A\sim E$.

Исбот. 6.2- теоремага асосланиб, тўпламдан бирорта саноқли D қисмини оламиз ва $E\setminus D$ тўпламни P билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$E=P\cup D,\ E\cup A=P\cup(D\cup A)$$

тенгликлар ўринли бўлади. 6.1- теоремага асосан, D ва $D\cup A$ лар саноқли тўплам бўлгани учун $D\sim D\cup A$ муносабат ўринли. Бундан ва $P\sim P$ муносабатдан $P\cup D\sim P\cup(D\cup A)$ ёки $E\sim E\cup A$ муносабат келиб чиқади.

6. 4. Теорема. ***Агар чексиз E тўплам саноқсиз бўлса ва A унинг чекли ёки саноқли қисми бўлса, у ҳолда $E \setminus A$ тўплам E тўпламга эквивалент бўлади.***

Исбот. Ҳақиқатан ҳам $E \setminus A = M$ тўплам чекли ёки саноқли бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда E тўплам ҳам чекли ёки саноқли бўлар эди. 6.3- теоремага асосан, $M \cup A \sim M$; бундан $E \sim E \setminus A$ муносабат келиб чиқади.

6.1 ва 6.3- теоремалардан ҳар қандай чексиз тўплам ўзига эквивалент хос қисмга эга экани кўринади.

Маълумки, чекли тўпламларнинг бундай хоссаси йўқ. Шунинг учун қуйидаги таърифни қабул қилиш мумкин.

2- таъриф. (Дедекинд таърифи.) *Агар E тўплам ўзининг бирор хос қисмига эквивалент бўлса, E тўплам чексиз дейилади.* Аммо бу таъриф кейинроқ бирмунча танқидий мулоҳазаларга учради.

Энди амалда кўп учрайдиган баъзи бир тўпламларнинг қувватларини топишга ўтамиз.

6. 5. Теорема. ***Рационал сонлар тўплами саноқлидир.***

Исбот. R_+ билан мусбат рационал сонлар тўпламини, R_- билан эса манфий рационал сонлар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда ҳамма рационал сонлар тўпламини қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$R = R_+ \cup \{0\} \cup R_-,$$

бу ерда $\{0\}$ билан биргина ноль сонидан иборат тўпламни белгиладик.

Агар R_+ ва R_- тўпламларнинг саноқли эканлиги кўрсатилса, у ҳолда 6.1- теоремага мувофиқ, R ҳам саноқли бўлади.

R_- тўплам R_+ тўпламга эквивалент бўлганлиги учун R_+ нинг саноқли эканлигини исботлаш кифоя.

Маълумки, ҳар қандай мусбат рационал сонни $\frac{p}{q}$ кўринишида ёзиш мумкин (p ва q бутун мусбат сонлардир, бу сонларни ҳатто ўзаро туб деб ҳисоблаш мумкин). R_+ тўпламнинг элементларини номерлашда қуйидаги қоидага амал қиламиз.

Аввал махражи ва суратининг йиғиндиси иккига тенг бўлган рационал сонларни номерлаймиз, сўнг махражи ва суратининг йиғиндиси 3 га тенг сонларни номерлаймиз ва ҳоказо; бу номерлашда икки рационал соннинг махражи ва суратининг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда сурати кичик бўлган рационал сон кичикроқ номерга эга бўлади.

Бу қоидага мувофиқ мусбат рационал сонларни номерлаб чиқсак,

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \; a_3 = \frac{2}{1}, \; a_4 = \frac{1}{3}, \; a_5 = \frac{3}{1}, \; a_6 = \frac{1}{4}, \; a_7 = \frac{2}{3}, \; \ldots$$

кетма-кетликка эга бўламиз. Натижада ҳар бир мусбат рационал сон биргина номерга эга бўлади ва бу кетма-кетликда аниқ бир ўринни эгаллайди. Демак, R_+ саноқли тўплам.

Қуйидаги жумлалар 6.5- теоремага ўхшаш исбот қилинади:

а) координаталари рационал сонлардан иборат бўлган текисликнинг ҳамма нуқталари саноқли тўплам ҳосил қилади;

б) координаталари рационал сонлар бўлган n ўлчовли Эвклид фазосидаги барча нуқталар тўплами саноқлидир.

7- §. Саноқсиз тўпламлар

Тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўплам натурал сонлар тўплами каби кўп учраб турадиган чексиз тўпламлар жумласидандир. Шуниси таажжублики, тўғри чизиқ нуқталари тўплами (ва ҳатто [0, 1] сегментдаги нуқталар тўплами) натурал сонлар тўпламига эквивалент эмас, яъни тўғри чизиқ нуқталарини номерлаб чиқиш мумкин эмас. Бу фикр қуйидаги теоремада исботланади.

7. 1. Теорема. [0, 1] ***сегментнинг нуқталаридан иборат тўплам саноқсиздир.***

Бу теорема 5- § да келтирилган тўпламларни солиштириш усулларининг иккинчиси биринчисидан қулайроқ эканлигини кўрсатади. Биз қуйида бу теореманинг икки хил исботини келтирамиз.

Биринчи исботи: $E = [0, 1]$ сегментнинг нуқталаридан иборат тўплам саноқли деб фараз қилайлик. У ҳолда E нинг барча элементларини номерлаб чиқиш мумкин:

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots, \tag{1}$$

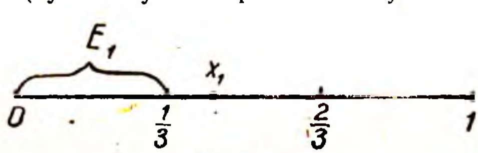
яъни:

$$E = \{x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots\}.$$

E ни $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ нуқталар билан учта тенг сегментга бўламиз:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \; \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \; \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Равшанки, x_1 элемент бу учала сегментнинг ҳар бирига тегишли бўлолмайди. Демак, уларнинг камида биттасига кирмайди. Ўша сегментни E_1 билан белгилаймиз (агар бундай сегментлардан иккита бўлса, уларнинг чапроқдагисини E_1 билан белгилаймиз) (5- шакл). Энди E_1 сегментни учта тенг сегментга бўламиз. Бу сегментларнинг камида биттасига x_2 нуқта кирмайди; ўша сегментни E_2 билан белгилаймиз (бундай тўпламлар иккита бўлса, чапроқдагисини



5- шакл.

E_2 билан белгилаймиз). E_2 сегментни ўз навбатида яна учта тенг сегментга бўламиз; буларнинг орасида x_3 нуқта кирмаганини E_3 билан белгилаймиз ва ҳоказо.

Натижада бири иккинчисининг ичига жойлашган

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

сегментлар кетма-кетлигига эга бўламиз. Бу тўпламларнинг ясалишига кўра, x_n нуқта E_n сегментга кирмайди.

E_n сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^n}$ бўлиб, n ортганда нолга интилади. Лимитлар назариясидаги маълум теоремага асосан, E_n сегментларнинг барчасига кирувчи биргина y нуқта мавжуд:

$$y \in E_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Бу y нуқта E тўпламга тегишли бўлгани учун (1) кетма-кетликда учрайди, яъни шундай m топиладики, бу m учун $y = x_m$ бўлади. Иккинчи томондан,

$$x_m \overline{\in} E_m,\ y \in E_m$$

муносабатлардан $y \neq x_m$ келиб чиқади. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Т е о р е м а н и н г и к к и н ч и и с б о т и. [0, 1] сегментдаги нуқталар тўплами саноқли бўлсин, деб фараз қилайлик; у ҳолда бу тўпламнинг элементларини натурал сонлар билан номерлаб чиқиш мумкин. Номерлаш натижасини (1) кетма-кетлик шаклида ёзамиз. Фаразимизга мувофиқ, $x_k \in [0,\ 1]$ ва [0, 1] сегментнинг ҳар бир элементи (1) кетма-кетликда бўлади. (1) кетма-кетликдаги ҳар бир сонни чексиз ўнли каср кўринишида ёзамиз[1]:

$$\begin{array}{l}
x_1 = 0,\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ \ldots \ a_n^{(1)} \ \ldots \\
x_2 = 0,\ a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ \ldots \ a_n^{(2)} \ \ldots \\
x_3 = 0,\ a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ \ldots \ a_n^{(3)} \ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_m = 0,\ a_1^{(m)} a_2^{(m)} a_3^{(m)} \ \ldots \ a_n^{(m)} \ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Энди [0, 1] сегментда бўлиб, (1) кетма-кетликка кирмайдиган бирор x_0 сонни топа олсак, у ҳолда [0, 1] сегментдаги ҳақиқий сонлар тўпламининг саноқсизлигини исбот этган бўламиз. x_0 сифатида $x_0 = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ \ldots \ b_m \ \ldots \ (b_1 \neq a_1^{(1)},\ b_2 \neq a_2^{(2)},\ \ldots\ ,\ b_m \neq a_m^{(m)},\ \ldots)$ чексиз ўнли касрни олиб, бу каср (1) кетма-кетликка киради деб фараз қилайлик. Бу ҳолда x_0 (1) кетма-кетликдаги бирор x_k сонга тенг, яъни $x_0 = x_k$ бўлиши керак. Аммо бу тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас, чунки $b_k \neq a_k^{(k)}$. Бошқача айтганда, бу натижа қил-

[1] Ҳақиқий сонларни чексиз ўнли касрга ёйишнинг мумкинлиги ҳақида 59- § га қаранг.

ган фаразимизга зид. Демак, [0, 1] сегментдаги сонлар тўплами саноқсиз тўплам экан.

7С. Таъриф. [0,1] *сегментдаги нуқталар тўпламига эквивалент бўлган тўпламларни континуум қувватли тўпламлар дейилади.* Табиий, албатта, континуум қувватига эга бўлган ҳар қандай тўплам саноқсиз тўпламдир.

Энди континуум қувватли тўпламлар ҳақида бир неча теорема исбот қиламиз.

7. 2. **Теорема.** ***Ҳар қандай [a, b] сегмент континуум қувватга эга.***

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар $[a, b]$ сегментнинг ўзгарувчи элементини z билан, $[0, 1]$ сегментнинг ўзгарувчи элементини x билан белгиласак, у ҳолда $z = a + (b - a)\, x$ алмаштириш бу сегментларни бир-бирига ўзаро бир қийматли акс эттиради. Демак, $[a, b]$ сегмент континуум қувватга эга.

Бу теоремадан ва 6. 4- теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади:

7. 3. Натижа. ***Ҳар қандай [a, b) ёки (a, b] ярим оралиқлар ва (a, b) оралиқ континуум қувватга эга.***

7. 4. **Теорема.** ***Континуум қувватга эга бўлган икки E_1 ва E_2 ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$) тўпламларнинг йиғиндиси ҳам континуум қувватга эга.***

Исбот. E_1 тўплам континуум қувватга эга бўлгани сабабли $[0, 1]$ сегментга эквивалент ва E_2 тўплам эса $[1, 2]$ ярим оралиққа эквивалент, натижада E_1 ва E_2 тўпламларнинг йиғиндиси $[0, 2]$ сегментга эквивалент бўлади 7. 1- теоремага асосан, $[0,2]$ сегмент континуум қувватга эга. Демак, $E_1 \cup E_2$ тўплам ҳам континуум қувватга эга.

7. 5. **Теорема.** ***Агар E тўплам $E_1, E_2, E_3 \ldots, E_k, \ldots$ ($E_k \cap E_{k'} = \varnothing$, $k \neq k'$) тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, $E_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ тўпламларнинг ҳар бири континуум қувватга эга бўлса, у ҳолда E тўплам ҳам континуум қувватга эга бўлади.***

Исбот. Ўсиб борувчи ва яқинлашувчи сонларнинг қуйидаги кетма-кетлигини оламиз:

$$a = a_1 \leqslant a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots \to b < +\infty$$

E_1 тўплам $(a_1, a_2]$ ярим оралиққа эквивалент, E_2 тўплам $(a_2, a_3]$ га эквивалент ва ҳоказо. E_n тўплам $(a_n, a_{n+1}]$ ярим оралиққа эквивалент ва ҳоказо. Натижада E тўплам $[a, b]$ оралиққа эквивалент бўлади; бу оралиқ эса континуум қувватга эга. Демак, E тўплам ҳам континуум қувватга эга.

7. 6. Изоҳ. 7. 4 ва 7. 5-теоремаларда $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ва $E_k \cap E_k' = \varnothing$ $(k \neq k')$ шартлар талаб қилинган эди. Аммо бу теоремалар юқоридаги шартларсиз ҳам ўринлидир; буни исботлашни ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Охирги теоремадэн қуйидаги натижалар келиб чиқади:

7. 7. **Натижа.** ***Ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами континуум қувватга эга.***

Бу натижадан ҳамда 6.4 ва 6.5- теоремалардан бевосита қуйидаги натижани оламиз:

7. 8. **Натижа.** ***Ҳамма иррационал сонлар тўплами континуум қувватга эга.***

8- §. Тўпламларнинг қувватларини солиштириш

Икки A ва B тўпламлар берилган бўлса, улар ҳақида қуйидаги мулоҳазаларни юритиш мумкин:

1) бу тўпламлар ўзаро эквивалент;

2) A тўплам B тўпламнинг бирор $B_1(\subset B)$ қисмига эквивалент, аммо B тўплам A нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас (ёки $B\sim A_1(\subset A)$ ва A тўплам B нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас).

3) $A\sim B_1$, $(B_1\subset B)$ ва $B\sim A_1$, $(A_1\subset A)$;

4) A тўплам B нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас ва B тўплам A нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас.

Агар A ва B тўпламлар чекли бўлса, учинчи ва ўртинчи ҳоллар рўй бермайди. A ва B тўпламлар баъзи бир шартларни қаноатлантирганда чексиз тўпламлар учун ҳам тўртинчи ҳолнинг ўринли бўлмаслигини кўрсатиш мумкин (масалан, [1] нинг III бобига қаранг).

Биринчи ҳолнинг чекли ва чексиз тўпламлар учун рўй бериши мумкинлиги олдинги параграфларда келтирилган мисолларда кўрилди. Иккинчи ва учинчи ҳолларнинг содир бўлиши мумкинлиги қуйидаги мисоллардан кўринади.

Иккинчи ҳолга мисол. A — рационал сонлар тўплами ва B — ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Агар B_1 сифатида B тўпламнинг бирор саноқли қисмини олсак, у ҳолда $A\sim B_1$ бўлиб, B тўплам A нинг ҳеч бир қисмига эквивалент эмас (7.1- теоремага асосан).

Учинчи ҳолга мисол. A ва B саноқли тўпламлар бўлсин. Агар A дан саноқли A_1 қисмини ва B дан саноқли B_1 қисмини олсак, у ҳолда $A\sim B_1$ ва $B\sim A_1$ бўлади.

Охирги мисолда $A\sim B$. Бу тасодифий нарса эмас, балки умумий қонуниятдир.

Теорема (Кантор—Бернштейн теоремаси). ***Агар икки A ва B тўпламларнинг ҳар бири иккинчисининг қисмига эквивалент бўлса, у ҳолда улар ўзаро эквивалент бўлади.***

Исбот. Теореманинг шартларига биноан:

$$A\sim B_1\ (B_1\subset B)\ \text{ва}\ B\sim A_1\ (A_1\subset A).$$

A_1 ва B_1 тўпламлар мос равишда A ва B тўпламларнинг хос қисмлари бўлсин, деб фараз қилайлик, чунки акс ҳолда, масалан, $A_1 = A$ бўлса, у ҳолда $B \sim A_1$ дан $B \sim A$ муносабат келиб чиқади.

B ва A_1 тўпламлар эквивалент бўлгани сабабли бирор $f: B \to A_1$ ўзаро бир қийматли акс эттириш мавжуд. Бу акс эттириш $B_1 (\subset B)$ тўпламни A_1 нинг бирор A_2 қисмига акс эттиради. Натижада $A_2 \subset A_1 \subset A$ ва $A \sim B_1$, демак, $A_2 \sim A$.

Агар A_1 нинг A га эквивалентлиги исбот этилса, у ҳолда $A_1 \sim B$ бўлганидан, A нинг B га ҳам эквивалентлиги келиб чиқади.

Ўзаро бир қийматли f акс эттириш билан A ни A_2 га акс эттирганимизда $A_1 (\subset A)$ бирор $A_3 (\subset A_2)$ тўпламга, $A_2 (\subset A_1)$ эса бирор A_4 тўпламга акс эттирилади ва ҳоказо. Бу ўзаро бир қийматли акс эттиришлардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\begin{gathered}
A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3 \\
A_1 \setminus A_2 \sim A_3 \setminus A_4 \\
A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5 \\
A_3 \setminus A_4 \sim A_5 \setminus A_6 \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Бу муносабатларнинг тоқ ўриндагиларини оламиз:

$$\begin{gathered}
A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3 \\
A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5 \\
A_4 \setminus A_5 \sim A_6 \setminus A_7 \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Бу муносабатларнинг чап ва ўнг томонидаги тўпламларни алоҳида қўшиб, ушбу

$$(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots \sim (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \\ \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots \quad (1)$$

эквивалентликка эга бўламиз.

Энди қуйидаги айниятларнинг ўринли эканини исбот қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}
A &= P \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \\
A_1 &= P \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots
\end{aligned}\right\}, \quad (2)$$

бу ерда $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Булардан бирини, масалан, биринчисини исбот этамиз; иккинчисининг исботи шунга ўхшашдир. A тўпламнинг бирор a элементини оламиз ва уни (1) айниятнинг ўнг томонига киришини кўрсатамиз. Бу элемент A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) тўпламларнинг ҳар бирига кириши мумкин, ёки $a \in A_n$, лекин $a \notin A_{n+1}$. Агар $a \in A_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) бўлса, у ҳолда $a \in P$; агар $a \in A_n$ бўлса-ю, лекин $a \notin A_{n+1}$ бўлса, у ҳолда $a \in A_n \setminus A_{n+1}$. Демак, иккала ҳолда ҳам a элемент биринчи айниятнинг ўнг томонидаги тўпламга киради.

Агар a ўнг томоннинг элементи бўлса, у ҳолда $a \in A$, чунки $P \subset A$ ва $(A_n \setminus A_{n+1}) \subset A$.

Айният исбот бўлди.

(2) айниятларни ушбу

$$\begin{aligned} A = [P \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_5 \setminus A_6) \cup \ldots] \cup \\ \cup [(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots]; \\ A_1 = [P \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_5 \setminus A_6) \cup \ldots] \cup \\ \cup [(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots] \end{aligned} \tag{3}$$

кўринишда ёзамиз.

Бу айниятларнинг ўнг томонларини солиштирсак, ҳар бирининг биринчи ўрта қавсдаги ифодалари айнан бир-бирига тенг, иккинчи ўрта қавсдаги ифодалари эса (1) муносабатга мувофиқ ўзаро эквивалент. Модомики, (3) айниятларнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўзаро эквивалент экан, уларнинг чап томонидаги A ва A_1 тўпламлар ҳам ўзаро эквивалент. Шу билан теорема исбот этилди.

Ихтиёрий икки A ва B тўпламларни солиштиришда тўртинчи ҳол истисно этилса, теоремага асосланиб, ушбу натижани айтишимиз мумкин:

A ва B тўпламлар ўзаро эквивалент, демак, улар тенг қувватлидир, ёки булардан бири, масалан, A тўплам иккинчисининг хос қисмига эквивалент, аммо шу билан бирга B тўплам A нинг ва на ўзига, ва на унинг бирор қисмига эквивалент эмас, бу ҳолда A нинг қуввати B нинг қувватидан кичик бўлади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. а) X — бирор тўплам бўлиб, A_1 ва A_2 тўпламлар унинг ихтиёрий қисмлари бўлсин. У ҳолда қуйидаги айниятлар ўринли:

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2),$$
$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2).$$

б) X — бирор тўплам бўлиб, A_α $(\alpha \in I)$ тўпламлар унинг ихтиёрий қисмлари бўлсин. У ҳолда қуйидаги айниятлар исботлансин:

$$X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha),$$
$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha).$$

2. Агар A тупламда n та, B тўпламда m та элемент бўлса, уларнинг $[A, B]$ Декарт кўпайтмасида нечта элемент бор?

3. Қандай A ва B тўпламлар учун $[A, B]$ ва $[B, A]$ тўпламлар тенг бўлади?

4. Учта элементдан иборат барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_3 билан белгилаймиз. Чизиқли алгебрада ўрнига қўйишларни ўзаро кўпайтириш амали киритилган. Иккита a ва b ўрнига қўйишлар берилганда шундай учинчи бир c ўрнига қўйиш топилиб, натижада

$$ac = cb,$$

яъни

$$c^{-1}ac = b$$

муносабат ўринли бўлса, бу икки a ва b ўрнига қўйишларни эквивалент ўрнига қўйишлар деймиз.

а) Киритилган эквивалентлик муносабати рефлексивлик, транзитивлик ва симметриклик хоссаларига эгалиги исботлансин.

б) Киритилган эквивалентлик муносабати S_3 тўпламни синфларга ажратади. S_3 тўплам нечта синфга ажралади? Ҳар бир синфда нечта элемент бор? Ҳар бир синфга кирувчи элементларни топинг.

5. n та элементдан иборат барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_n билан белгилаймиз. S_n тўплам учун 4- масаладаги саволларни ҳал қилинг.

6. A тўплам $\{1, 2, 3\}$ элементлардан, B тўплам эса $\{a, b\}$ элементлардан иборат. A тўпламни B тўпламга неча усул билан акс эттириш мумкин, яъни B^A тўплам нечта элементдан иборат?

7. A тўплам n та элементдан, B тўплам m та элементдан иборат бўлса, B^A тўплам нечта элементдан иборат бўлади?

8. Агар A ва B саноқли тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг $[A, B]$ Декарт кўпайтмаси ҳам саноқлидир. Шуни исботланг.

9. Агар $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ — саноқли тўпламлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси континуум қувватга эгалиги исботлансин.

10. Монотон функциянинг узилиш нуқталари тўплами кўпи билан саноқли эканини исботланг.

11. $(0, 1)$ ва $[0, 1]$ тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатинг.

12. Агар A ва B тўпламлар континуум қувватга эга бўлса, у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга бўлишини исботланг.

13. Агар $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ континуум қувватга эга бўлган тўпламлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эгалиги исботлансин.

14. $[0, 1]$ сегментдаги барча узлуксиз функциялар тўплами континуум қувватга эгалиги исботлансин.

15. $[0, 1]$ сегментдаги барча монотон функциялар тўплами континуум қувватга эгалиги исботлансин.

16. Коэффициентлари рационал бўлган ҳамма кўп ҳадлилардан иборат тўпламнинг саноқлилиги исботлансин.

17. $[0, 1)$ ярим сегмент нуқталари билан $[0, +\infty)$ тўпламнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилсин.

II БОБ

НУҚТАЛИ ТЎПЛАМЛАР

Бу бобда элементлари тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўпламлар билан шуғулланамиз. Келажакда бу тўпламлар **нуқтали тўпламлар** дейилади.

9- §. Лимит нуқта

Тўғри чизиқдаги ξ нуқтанинг **атрофи** деб шу нуқтани ўз ичига олган оралиққа айтилади. Ҳар бир нуқта чексиз кўп атрофга эга.

1- таъриф. *Агар ξ нинг ҳар қандай атрофида E тўпламнинг камида битта ξ дан фарқли нуқтаси бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг* ***лимит нуқтаси*** *дейилади.*

Агар E тўпламнинг ξ элементининг бирор атрофида бошқа элементи бўлмаса, у ҳолда ξ **ёлғиз нуқта** дейилади.

9. 1. Изоҳлар: а) Агар ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у E тўпламга кириши ҳам, кирмаслиги ҳам мумкин (шу параграфдаги 2 ва 4- мисолларга қаранг).

б) ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда ξ нинг ихтиёрий атрофида E тўпламнинг чексиз кўп нуқталари мавжуд. Буни кўрсатиш учун тескарисини фараз қиламиз, яъни ξ нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, бу атрофга E тўпламнинг сони чекли элементларигина киради. Шу элементларни, масалан, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ билан белгилаймиз.

Бу ҳолда ξ нинг лимит нуқта эмаслигини кўрсатамиз. x_i ($i = \overline{1, n}$) нуқталар орасида ξ га энг яқин нуқта битта ёки кўпи билан иккита бўлиши мумкин. ξ га энг яқин нуқтагача бўлган масофани δ билан белгилаймиз, у ҳолда $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ оралиқ ξ дан бошқа (агар $\xi \in E$ бўлса) E тўпламга кирадиган бирорта ҳам нуқтани ўз ичига олмайди. Демак, ξ нуқта E тўплам учун лимит нуқта бўла олмайди.

в) Агар $E_0 \subset E$ ва ξ нуқта E_0 тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда ξ нуқта E нинг ҳам лимит нуқтаси бўлади.

г) Чекли тўплам бирорта ҳам лимит нуқтага эга эмас; унинг ҳар бир нуқтаси ёлғиз нуқта бўлади.

Мисоллар: 1. E_1 тўплам натурал сонлардан иборат. Бу тўпламнинг бирорта ҳам лимит нуқтаси йўқ. Чунки ихтиёрий ҳақиқий a сонни олиб, унинг $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ атрофи олинса, бунда E_1нинг (агар $a \in E_1$ бўлса, a дан бошқа) бирорта ҳам элементи бўлмайди.

2. E_2 тўплам $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ кўринишдаги сонлардан иборат. Бу тўпламнинг биргина $\xi = 0$ лимит нуқтаси бор ва $0 \overline{\in} E_2$.

3. E_3 тўплам $(0, 1)$ оралиқдан иборат. $[0, 1]$ сегментнинг ҳамма нуқталари E_3 нинг лимит нуқталаридир.

4. E_4 тўплам $[0, 1]$ сегментдан иборат. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам $[0, 1]$ сегментдан иборат.

5. E_5 тўплам $(0, 1)$ оралиқдаги ҳамма рационал сонлардан иборат. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам $[0, 1]$ сегментни ҳосил қилади.

Дарҳақиқат, $[0, 1]$ сегментнинг ҳар қандай ξ нуқтасининг ихтиёрий атрофида чексиз кўп рационал сонлар мавжуддир, чунки рационал сонлар тўғри чизиқда зич жойлашган (бу ўқувчига анализ курсидан маълум).

Демак, таърифга мувофиқ $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтаси E_5 тўплам учун ҳам лимит нуқта бўлади.

6. E_6 тўплам E_1 ва E_4 тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни $E_6 = E_1 \cup E_4$. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам $[0, 1]$ сегментдан иборат.

E тўпламнинг ҳамма лимит нуқталаридан иборат бўлган тўплам *ҳосила тўплам* дейилади. Уни E' билан белгилаймиз. Юқоридаги мисолларда келтирилган тўпламларнинг ҳосила тўпламлари қуйидагилардан иборат:

$$E_1' = \varnothing,\ E_2' = \{0\},\ E_3' = [0, 1],$$
$$E_4' = [0, 1],\ E_5' = [0, 1],\ E_6' = [0, 1].$$

Бу мисоллардан кўринадики, берилган E тўплам билан унинг E' ҳосила тўплами орасида турли муносабатлар бўлиши мумкин.

Масалан, юқоридаги мисоллар учун қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$E_1' \subset E_1,\ E_3 \subset E_3',\ E_4 = E_4',\ E_5 \subset E_5',\ E_6' \subset E_6.$$

Аммо E_2 билан E_2' орасида бу муносабатлардан бирортаси ҳам бажарилмайди.

Агар тўплам ёлғиз нуқталардангина иборат бўлса, бундай тўплам *ёлғиз (дискрет)* тўплам дейилади.

Юқоридаги мисолларда келтирилган E_1 ва E_2 тўпламлар ёлғиз тўпламлардир.

Агар тўпламнинг бирорта ҳам ёлғиз нуқтаси бўлмаса, бундай тўпламни *ўзида зич тўплам* деймиз; мисолларимиздаги E_3, E_4, E_5 тўпламлар ўзида зич тўпламлардир.

Агар $E \subset E'$ бўлса, E тўплам ўзида зич тўплам бўлади ва, аксинча.

2-таъриф. *Агар E нинг ҳамма лимит нуқталари ўзига тегишли бўлса (яъни $E' \subset E$ бўлса), у ҳолда E тўплам ёпиқ тўплам дейилади.*

Бу таърифга мувофиқ, чекли (шу жумладан бўш) тўплам, лимит нуқталари бўлмагани сабабли, ёпиқ бўлади.

Масалан, юқоридаги мисолларимизда E_1, E_4, E_6 тўпламлар ёпиқ тўпламлардир.

Агар $E = E'$ бўлса, у ҳолда E тўплам мукаммал тўплам дейилади. Масалан, E_4 мукаммал тўпламдир. Равшанки, мукаммал тўплам ҳам ёпиқ, ҳам ўзида зич тўпламдир.

$\overline{E} = E \cup E'$ тўплам E тўпламнинг ёпиғи дейилади.

Энди қуйидаги масалани кўрамиз. Қандай шарт бажарилганда чексиз тўплам лимит нуқтага эга бўлади?

Масалан, натурал сонлардан иборат бўлган E_1 чексиз тўплам бўлса-да, бирорта ҳам лимит нуқтага эга эмас.

9. 2. Теорема. (Больцано-Вейерштрасс теоремаси). ***Ҳар қандай чегараланган[1] чексиз E тўплам ҳеч бўлмаганда битта лимит нуқтага эга.***

Исбот. E тўплам чегараланганлиги сабабли шундай $[a, b]$ сегмент мавжудки, E тўплам бу сегментда жойлашган бўлади. $[a, b]$ сегментни $\frac{a+b}{2} = c$ нуқта орқали тенг иккига бўлиб, $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларни ҳосил қиламиз. Бу сегментлардан ҳеч бўлмаганда биттасида E тўпламнинг чексиз кўп элементлари бўлади. Ҳақиқатан, агар бу сегментларнинг ҳар бирида E тўпламнинг фақат сони чекли элементларигина бўлганда эди, $[a, b]$ сегментда ҳам E нинг фақат сони чекли элементлари бўлар эди. Бу эса E тўпламнинг чексизлигига зид.

Шундай қилиб, $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларнинг камида бирида E нинг чексиз кўп элементи жойлашган. Шу сегментни (бундай сегментлар иккита бўлса, чапдагисини) $[a_1, b_1]$ билан белгилаймиз. $[a_1, b_1]$ сегментни яна $[a_1, c_1]$ ва $[c_1, b_1]$ $\left(c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$ иккита сегментларга бўламиз. Бу сегментларнинг ҳам ҳеч бўлмаганда бирида E нинг чексиз кўп элементи ётади. Ўша сегментни (бундай сегментлар иккита бўлса, чапдагисини) $[a_2, b_2]$ билан белгилаймиз.

Бу процессни чексиз давом эттириб, ҳар бирида E нинг чексиз кўп элементлари ётадиган ушбу

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \qquad (1)$$

сегментлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз. $[a_n, b_n]$ сегментнинг узунлиги $\frac{b-a}{2^n}$ га тенг ва у $n \to \infty$ да нолга интилади.

Демак, лимитлар назариясидаги маълум теоремага асосан, бу сегментлар кетма-кетлиги биргина умумий ξ нуқтага эга бўлади, яъни:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi. \qquad (2)$$

Энди ξ нуқта E нинг лимит нуқтаси эканлигини исбот этамиз. Бунинг учун ξ нинг ихтиёрий (α, β) атрофини олиб, унда E нинг чексиз кўп элементлари борлигини кўрсатамиз.

---

[1] Бирор сегмент ичига жойлаштириш мумкин бўлган тўпламни чегараланган тўплам дейилади.

Модомики, $\xi \in (\alpha, \beta)$ бўлган экан, (2) га мувофиқ, шундай $[a_n, b_n]$ сегментни топиш мумкинки, n етарлича катта бўлганда, $[a_n, b_n] \subset \subset (\alpha, \beta)$ муносабат бажарилади. $[a_n, b_n]$ сегмент E тўпламнинг чексиз кўп элементларига эга бўлгани учун (α, β) оралиқ ҳам E нинг чексиз кўп элементларига эга, яъни ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси.

9. 3. Изоҳ. Агар чексиз E тўплам лимит нуқтага эга бўлса, у ҳолда E тўплам чегараланган ва чексиз $E_0 (\subset E)$ қисмга эга. Бу фикрнинг исботини ўқувчиларга қолдирамиз.

10- §. Яқинлашувчи тўпламлар ва кетма-кетликлар

E чегараланган тўплам бўлиб, унинг ҳосила тўплами E' бўлсин, у ҳолда, равшанки, E' ҳам чегараланган тўплам бўлади. E' чегараланганлиги учун унинг аниқ юқори β_E ва аниқ қуйи α_E чегаралари мавжуд. Бу чегаралар мос равишда E нинг юқори ва қуйи лимитлари дейилади.

Бошқача айтганда, E тўпламнинг юқори (қуйи) лимити деб E' тўпламнинг юқори (қуйи) чегарасини айтамиз. Одатда E тўпламнинг юқори (қуйи) лимити

$$\beta_E = \overline{\lim}\, E \; (\alpha_E = \underline{\lim}\, E)$$

кўринишда ёзилади.

E тўпламнинг ҳамма лимит нуқталари $[\alpha_E, \beta_E]$ сегментда жойлашганлиги ўз-ўзидан тушунарли.

Агар чегараланган E тўплам биргина ξ лимит нуқтага эга бўлса, у ҳолда E ни яқинлашувчи тўплам деймиз ва E нинг ξ га яқинлашишини $E \to \xi$ кўринишда ёзамиз. Қуйида яқинлашувчи тўпламларга оид икки теоремани исбот қиламиз.

10. 1. Теорема. 1) ***Агар чегараланган E тўплам ξ га яқинлашса, у ҳолда ξ нинг ихтиёрий (x_1, x_2) атрофидан ташқарида E тўпламнинг кўпи билан сони чекли элементларигина бўлиши мумкин.***

2) ***Аксинча, агар ξ нинг ихтиёрий (x_1, x_2) атрофидан ташқарида чексиз E тўпламнинг кўпи билан сони чекли элементлари бўлса, у ҳолда $E \to \xi$.***

Исбот. 1) (x_1, x_2) оралиқ ξ нинг ихтиёрий атрофи бўлсин ҳамда $E \to \xi$ ўринли бўлсин. Чегараланган E тўпламнинг (x_1, x_2) оралиқдан ташқарида чексиз кўп элементлари мавжуд деб, фараз қилайлик. У ҳолда бу элементлардан иборат $E_0 (\subset E)$ тўплам Больцано-Вейерштрасс теоремасига асосан, энг камида битта лимит нуқтага эга бўлади, ана шу лимит нуқта η бўлсин. Бу нуқта E учун ҳам лимит нуқта бўлади.

Демак, E тўплам иккита лимит нуқтага эга, бу эса теореманинг шартига зид.

2) Аксинчасини исбот этамиз. Бу мақсадда ξ нинг E тўплам учун лимит нуқта эканлигини ва ξ нинг ягона лимит нуқталигини кўрсатиш кифоя.

ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси, чунки ξ нинг ихтиёрий атрофида E нинг чексиз кўп элементлари мавжуд.

Энди ξ нинг ягона лимит нуқта эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, E тўплам ξ дан бошқа яна бирорта η лимит нуқтага эга деб фараз қилайлик; масалан, $\eta < \xi$ бўлсин.

Ушбу $x_1 < \eta < x_2 < \xi < x_3$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи учта x_1, x_2, x_3 нуқталарни оламиз. η лимит нуқта бўлганлиги учун унинг (x_1, x_2) атрофида E тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бор. Демак, ξ нинг (x_2, x_3) атрофидан ташқарида E нинг чексиз кўп элементлари мавжуд, бу эса теореманинг шартига зид. Демак, E тўплам биргина лимит нуқтага эга.

10. 2- теорема. ***Ҳар қандай яқинлашувчи E тўплам саноқлидир.***

Исбот. 10. 1. Теоремага мувофиқ,

$$(\xi-1, \xi+1), \left(\xi-\frac{1}{2}, \xi+\frac{1}{2}\right), \ldots, \left(\xi-\frac{1}{n}, \xi+\frac{1}{n}\right), \ldots$$

оралиқларнинг ҳар биридан ташқарида E тўпламнинг сони чекли элементлари бор. E нинг $\left(\xi-\frac{1}{n}, \xi+\frac{1}{n}\right)$ оралиқдан ташқаридаги элементларидан иборат тўпламни E_n билан белгиласак, у ҳолда

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ ёки } E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup \{\xi\}$$

муносабат ўринли, чунки $E_n \subset E$ ва, аксинча, E нинг ихтиёрий элементи E_n тўпламларнинг бирортасига киради. E_n тўпламларнинг ҳар бири чекли; демак, E тўплам кўпи билан саноқли (6. 4- теорема). Энди яқинлашувчи тўплам тушунчасига яқин бўлган яқинлашувчи кетма-кетлик тушунчасини киритамиз.

Агар ҳар бир n учун аниқ x_n сон мос келтирилса, у ҳолда $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сонлар кетма-кетлиги берилган дейилади. Бу кетма-кетлик қисқача $\{x_n\}$ кўринишда ёзилади. Берилган кетма-кетликдаги турли номерли ҳадлар бир-бирига тенг бўлиши ҳам мумкин.

Агар бирор номердан бошлаб кетма-кетликнинг ҳамма элементлари a сонининг ихтиёрий $\varepsilon > 0$ атрофида, яъни $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ $(n > n_0)$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик a сонига **яқинлашувчи кетма-кетлик** дейилади. (Бу таъриф анализдан маълум.)

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$$

кетма-кетликни олайлик; бу кетма-кетлик яқинлашувчи эмас, бироқ тўплам маъносида икки элементдангина иборат.

2. Ушбу

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи, лекин тўплам маъносида 6 элементдан иборат. Бу икки кетма-кетлик тўплам маъносида лимит нуқталарга эга эмас, шунинг учун бу мисоллардаги тўпламларнинг яқинлашувчилиги ҳақида гапиришнинг ҳожати йўқ.

3. Ушбу

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

кетма-кетлик эса тўплам маъносида ҳам, кетма-кетлик маъносида ҳам яқинлашувчи. Сонлар кетма-кетлиги учун Больцано — Вейерштрасс теоремасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

Ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликни ажратиш мумкин.

Бунинг исботини ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

11-§. Ёпиқ тўплам ва ҳосила тўпламларнинг хоссалари

Энди ёпик ва ҳосила тўпламларнинг содда хоссалари билан танишамиз.

11. 1. Теорема. ***Ҳар қандай E тўпламнинг E' ҳосила тўплами ёпиқ тўпламдир.***

Исбот. Агар E' тўпламнинг лимит нуқталари бўлмаса, теоремани исботлаб ўтиришнинг ҳожати йўқ. Энди E' учун x_0 бирор лимит нуқта бўлсин; бу нуқтанинг E' га киришини кўрсатамиз. Бунинг учун x_0 нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий $(x_1,\ x_2)$ оралиқни оламиз. Бу оралиқда E' нинг ҳеч бўлмаганда битта $\xi(\neq x_0)$ элементи бўлади, чунки x_0 нуқта E' учун лимит нуқта. Бу ξ нуқта E тўплам учун лимит нуқта бўлади, чунки $\xi \in E'$. Шунинг учун $(x_1,\ x_2)$ оралиқда E тўпламнинг чексиз кўп элементлари бўлади. Демак, x_0 нуқтанинг ихтиёрий $(x_1,\ x_2)$ атрофида ҳам E тўпламнинг чексиз кўп элементлари мавжуд. Бу эса x_0 нинг E учун лимит нуқта эканлигини кўрсатади, яъни: $x_0 \in E'$.

11. 2. Теорема. ***Агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, $E_1' \subset E_2'$.*** Бу теорема 9. 1-даги в) изоҳнинг бевосита натижасидир.

11. 3. Теорема. ***Ҳар қандай E тўпламнинг $\overline{E}(=E \cup E')$ ёпиғи ёпиқ тўпламдир.***

Исбот. x_0 нуқта $\overline{E}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Агар $x_0 \in \overline{E}$ муносабат кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади. x_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида $\overline{E}$ нинг ҳеч бўлмаганда битта $\xi(\neq x_0)$ нуқтаси бўлади.

Бу ерда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

$$1)\ \xi \in E; \quad 2)\ \xi \in E'.$$

Биринчи ҳолда x_0 нинг ихтиёрий атрофида E нинг ҳеч бўлмаганда битта элементи мавжуд бўлади; демак, E учун x_0 лимит нуқта бўлади, яъни: $x_0 \in E' \subset \overline{E}$.

Агар $\xi \in E'$ бўлса, у ҳолда ξ нинг ихтиёрий (x', x'') атрофида E тўпламнинг чексиз кўп элементлари бўлади, бундан эса x_0 нинг ихтиёрий атрофида E тўпламнинг чексиз кўп элементлари борлиги келиб чиқади. Демак, $\overline{E}$ нинг ҳар бир лимит нуқтаси E учун ҳам лимит нуқта экан, яъни $x_0 \in E' \subset \overline{E}$.

Агар E тўпламнинг ўзи ёпиқ тўплам бўлса, у ҳолда $E' \subset E$, демак, $\overline{E} = E \cup E' = E$, яъни ёпиқ тўпламнинг ёпиғи ўзига тенг.

Қуйидаги теорема бевосита исботланади.

11. 4. Теорема. ***E тўпламнинг ёпиғи бўлган $\overline{E}$ тўплам ўзининг ёпиғи $\overline{\overline{E}}$ га тенг, яъни:***

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$

11. 5. Теорема. ***Икки тўплам йиғиндисининг ҳосила тўплами уларнинг ҳосила тўпламларининг йиғиндисига тенг, яъни: $(A \cup B)' = A' \cup B'$.***

Исбот. Агар $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ муносабатлар бажарилса, теорема исбот бўлади. Бирор ξ нуқта A ва B тўпламларнинг камида бирининг лимит нуқтаси бўлса, $A \cup B$ нинг ҳам лимит нуқтаси бўлади. Шу билан биринчи муносабат исботланди.

Иккинчи муносабатни исбот этиш учун $A \cup B$ нинг бирор ξ лимит нуқтасини оламиз. У ҳолда ξ нинг ихтиёрий атрофида A ва B тўпламлардан камида биттасининг чексиз кўп элементлари бўлади.

Бундан кўринадики, доимо ξ нуқта бу тўпламлардан камида бирининг лимит нуқтаси бўлади, яъни: $\xi \in A' \cup B'$.

11. 6. Натижа. ***Ҳадларининг сони чекли бўлган тўпламлар йиғиндисининг ҳосила тўплами уларнинг ҳосила тўпламларининг йиғиндисига тенг, яъни:***

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ \ldots \ \cup A_n'.$$

7. Изоҳ. Бу натижа, умуман, ҳадларининг сони чексиз бўлган тўпламлар учун ўринли эмас. Бунга мисол келтиришни ўқувчига қолдирамиз.

11. 8. Теорема. ***Сони чекли ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ҳам ёпиқ тўпламдир.***

Бу теорема икки ёпиқ тўплам учун исбот этилса кифоя, чунки индукция йўли билан умумий ҳол ҳам шу ҳолга келтирилиши мумкин.

F_1 ва F_2 ёпиқ тўпламлар бўлсин. Бу тўпламларнинг ёпиқ эканлигидан ва 11. 5- теоремадан

$$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$$

муносабат бевосита келиб чиқади. Бу эса $F_1 \cup F_2$ тўпламнинг ёпиқ эканлигини кўрсатади.

Лекин тўплам ҳадларининг сони чексиз бўлган ҳолда теорема ўринли бўлмаслиги мумкин.

Масалан,

$$F_1=\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\quad F_2=\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right],\ F_3=\left[\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\right],\ \ldots,$$

$$F_n=\left[\frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n+1}\right],\ \ldots$$

тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ тўпламдир. Аммо уларнинг йиғиндиси $[0,\ 1)$ ярим оралиққа тенг; бу тўплам эса ёпиқ эмас, чунки 1 нуқта бу тўплам учун лимит нуқта бўлиб, тўпламнинг ўзига кирмайди.

11. 9. Теорема. ***Ҳадларнинг сони ихтиёрий бўлган (чекли ёки чексиз) ёпиқ тўпламларнинг кўпайтмаси (умумий қисми) ҳам ёпиқ тўпламдир***[1].

Исбот. F_ξ ёпиқ тўплам бўлиб, унинг индекси ξ бирор Γ тўпламнинг элементлари бўйича ўзгарсин, яъни ξ нинг қийматлари Γ тўпламнинг элементи бўлсин, деб фараз қиламиз.

Ушбу

$$\Phi=\bigcap_{\xi\in\Gamma}F_\xi \tag{1}$$

тўпламни тузиб, унинг ёпиқ эканлигини исбот этамиз.

Теореманинг шартига мувофиқ ξ нинг Γ даги ҳар бир қийматида F_ξ тўплам ёпиқдир. (1) муносабатдан $\Phi\subset F_\xi$ $(\xi\in\Gamma)$ муносабат бевосита келиб чиқади. Бундан эса $\Phi'\subset F'_\xi\subset F_\xi$ бўлади (чунки F_ξ ёпиқ). Бу муносабат ξ нинг Γ даги ҳар қандай қийматида ўринли бўлганлиги учун

$$\Phi'\subset\bigcap_{\xi}F_\xi=\Phi$$

муносабат келиб чиқади. Бу эса Φ тўпламнинг ёпиқ эканини кўрсатади.

11. 10. Теорема. (Кантор теоремаси). ***Фараз қилайлик***

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots \tag{2}$$

чегараланган, ёпиқ ва бўш бўлмаган тўпламлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар $F_{n+1}\subset F_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ ***бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг кўпайтмаси*** $\Phi=\bigcap\limits_{\xi=1}^{\infty}F_\xi$ ***бўш бўлмаган ёпиқ тўплам бўлади.***

Бу теорема анализдаги бир-бирининг ичига жойлашган кесмалар ҳақидаги лемманинг умумлашмасидир.

Исбот. Φ тўпламнинг ёпиқ экани 11. 9-теоремадан келиб чиқади. Агар Φ нинг ҳеч бўлмаганда битта элементи борлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади.

---

[1] Шуни эсда тутиш керакки, бўш тўплам ҳам ёпиқ тўплам ҳисобланади.

Аввал (2) кетма-кетликдаги ўзаро тенг тўпламлардан биттасини қолдириб, бошқаларини чиқариб ташлаймиз. Бунинг натижасида Φ тўплам ўзгармайди. (2) кетма-кетликда қолган тўпламларни

$$F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots, F_{n_k}, \ldots \; (F_{n_{k+1}} \subset F_{n_k};\; n_1 = 1) \tag{3}$$

кўринишда ёзамиз.

Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

1. (3) кетма-кетликдаги тўпламларнинг сони чекли.
2. (3) кетма-кетликдаги тўпламларнинг сони чексиз.

Биринчи ҳолда Φ тўплам (3) кетма-кетликдаги сўнгги тўпламга тенг бўлади ва теореманинг шартига мувофиқ у бўш тўплам бўлмайди. Демак, бу ҳол учун теорема исбот бўлди.

Иккинчи ҳолда F_{n_1} тўпламдан F_{n_2} тўпламга кирмайдиган x_1 элементини оламиз, F_{n_2} тўпламдан F_{n_3} тўпламига кирмайдиган x_2 элементни оламиз ва ҳоказо.

Натижада

$$x_1,\; x_2,\; \ldots,\; x_k,\; \ldots \; (x_k \in F_{n_k}) \tag{4}$$

элементлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва бу элементларнинг ихтиёрий иккитаси бир-бирига тенг эмас.

(2) кетма-кетликдаги тўпламларнинг ҳар бири чегараланган, демак, (4) кетма-кетлик ҳам чексиз ва чегараланган тўпламни ташкил этади. Бу тўпламни M билан белгилаймиз. Больцано—Вейерштрасс теоремасига асосан, M тўпламнинг камида битта лимит нуқтаси бор. Бу лимит нуқталардан бири x_0 бўлсин. Бу лимит нуқта Φ тўпламнинг элементи эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун x_0 нуқтанинг F_n тўпламларнинг ҳар бири учун ҳам элемент эканлиги исбот этилса кифоя.

Энди F_n тўплам (2) кетма-кетликдан олинган ихтиёрий тўплам бўлсин.

(3) кетма-кетликнинг тузилишига мувофиқ $F_n = F_{n_k}$ (F_{n_k} — (3) кетма-кетликдаги тўпламлардан бири).

$F_{n_{k+1}} \subset F_{n_k}$ муносабатдан

$$x_k,\; x_{k+1},\; \ldots \tag{5}$$

кетма-кетликнинг ҳамма элементлари $F_{n_k} = F_n$ тўпламга киради, деган хулосани чиқариш мумкин. (5) кетма-кетликнинг элементларидан иборат тўпламни M_k билан белгилаймиз.

M ва M_k тўпламларнинг фарқи $k-1$ элементдан иборат бўлгани учун x_0 нуқта M_k тўплам учун ҳам лимит нуқта бўлади. Демак, x_0 нуқта F_n тўплам учун ҳам лимит нуқта бўлади, чунки $M_k \subset F_n$. Лекин F_n ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in F_n$, яъни x_0 (2) кетма-кетликдан олинган ихтиёрий F_n тўпламнинг элементи экан, демак, x_0 нуқта, кўпайтманинг таърифига мувофиқ, Φ тўплам учун ҳам элемент бўлади.

11. 11. Изоҳ. Агар F_k тўпламларнинг чегараланганлиги талаб қилинмаса, теорема ўз кучини йўқотиши мумкин; масалан, $F_k =$

$=[k+\infty)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ бўлиб, уларнинг умумий қисми бўш тўплам бўлади.

Энди яна тўпламларнинг юқори ва қуйи чегаралари, юқори ва қуйи лимитлари тушунчаларига қайтамиз.

11. 12. Теорема. ***Агар Е тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси*** ξ ***ўзига кирмаса, у ҳолда*** ξ ***нуқта Е тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.***

Исбот. Дарҳақиқат, ξ нуқта E тўпламининг аниқ юқори чегараси бўлсин ва $\xi \overline{\in} E$ муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда аниқ юқори чегара таърифига мувофиқ ҳар қандай $\varepsilon(>0)$ учун $(\xi-\varepsilon; \xi)$ оралиқда E тўпламнинг ҳеч бўлмаганда битта элементи мавжуд бўлади. $\varepsilon(>0)$ ихтиёрий сон бўлганлиги учун ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади. ξ нуқта аниқ қуйи чегара бўлган ҳолда ҳам бу теорема шунга ўхшаш исбот этилади.

11. 13. Натижа. ***Ҳар қандай бўш бўлмаган, чегараланган, ёпиқ тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари ўзига киради.***

11. 14. Теорема. ***Ҳар қандай бўш бўлмаган Е тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси*** $\overline{E}$ ***учун энг ўнг (чап) нуқта бўлади.***

Исбот. Дарҳақиқат, b_E нуқта E тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлса, у ҳолда b_E дан ўнгда E нинг бирорта ҳам элементи бўлмайди.

Демак, E' нинг ҳам b_E дан ўнгда бирорта элементи бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун b_E нуқта $\overline{E}$ тўпламнинг энг ўнг элементи бўлади, чунки b_E дан ўнгда $\overline{E}=E\cup E'$ тўпламнинг бирорта ҳам элементи йўқ. Шунга ўхшаш, агар a_E нуқта E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси бўлса, у ҳолда a_E нуқта $\overline{E}$ тўпламнинг энг чап элементи бўлади.

Юқори ва қуйи лимитларнинг таърифига мувофиқ, E тўпламнинг юқори (қуйи) лимити E' тўпламнинг энг ўнг (энг чап) элементи бўлади.

Агар b_E аниқ юқори (a_E аниқ қуйи) чегара бўлиб, E учун лимит нуқта бўлса, у ҳолда b_E (a_E) нуқта E учун юқори (қуйи) лимит бўлади, яъни E тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси ўзининг юқори (қуйи) лимитига тенг.

12- §. Борель — Лебег теоремаси

Таъриф. *E бирор нуқтали тўплам ва M бирор оралиқлар системаси бўлсин. Агар E нинг ҳар бир нуқтаси учун M системада бу нуқтани ўз ичига оладиган оралиқ мавжуд бўлса, у ҳолда M оралиқлар системаси E тўпламни қоплайди дейилади.*

12. 1. **Теорема.** (Борель—Лебег теоремаси). ***Агар ёпиқ ва чегараланган F тўплам сони чексиз оралиқлар системаси билан қопланган бўлса, у ҳолда бу системадан F ни қоплайдиган сони чекли оралиқлар системасини ажратиб олиш мумкин.***

Исбот. Ёпиқ ва чегараланган F тўпламни қоплайдиган сони чексиз тўпламлар системасини M билан белгилаймиз ва M системада F ни қоплайдиган сони чекли оралиқлар системаси йўқ, деб фараз қиламиз. Бундан F нинг чексиз тўплам эканлиги келиб чиқади. Модомики, F чегараланган тўплам экан, демак, шундай $[a, b]$ сегмент мавжудки, бу сегмент F тўпламни ўз ичига олади, яъни $F \subseteq [a, b]$. $c \left(= \frac{a+b}{2}\right)$ нуқтани олиб $F_1 = F \cap [a, c]$ ва $\Phi_1 = F \cap [c, b]$ тўпламларни тузамиз.

Фаразимизга мувофиқ, бу тўпламларнинг иккаласини бирданига M системадан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қоплаб бўлмайди, чунки акс ҳолда F тўплам ҳам M системадан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қопланган бўлар эди.

Агар F_1 (ёки Φ_1) тўплам M дан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қопланмаган бўлса, у ҳолда $[a_1, b_1]$ билан $[a, c]$ (ёки $[c, b]$) сегментни белгилаймиз. Агар F_1 тўплам ҳам, Φ_1 тўплам ҳам M дан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қопланмаган бўлса, у ҳолда $[a_1, b_1]$ сифатида $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментлардан ихтиёрий биттасини олишимиз мумкин.

Равшанки, $F \cap [a_1, b_1]$ тўплам чексиз бўлади. Энди $c_1 \left(= \frac{a_1+b_1}{2}\right)$ нуқтани олиб, $F_2 = F \cap [a_1, c_1]$ ва $\Phi_2 = F \cap [c_1, b_1]$ тўпламларни тузамиз. Агар F_2 (ёки Φ_2) тўплам M дан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қопланмаган бўлса (фаразимизга мувофиқ ёки F_2, ёки Φ_2 тўплам M дан олинган сони чекли оралиқлар системаси билан қопланмайди), $[a_2, b_2]$ билан $[a_1, c_1]$ (ёки $[c_1, b_1]$) сегментни белгилаймиз.

Бу процессни давом эттириш натижасида

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \tag{1}$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва $F \cap [a_n, b_n] = F_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) тўплам фаразимизга мувофиқ M системадан олинган ҳеч қандай сони чекли оралиқлар системаси билан қопланмайди; демак, бу тўпламларнинг ҳар бири чексиз тўплам бўлади. (1) сегментлар кетма-кетлигида $[a_n, b_n]$ сегментнинг $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ узунлиги n чексизликка интилганда нолга интилади. Демак, бу сегментлар кетма-кетлиги (Кантор теоремасига асосан) сегментларнинг ҳаммаси учун умумий бўлган биргина нуқтага эга бўлади. Бу нуқтани x_0 билан белгилаймиз ва унинг F тўплам элементи эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун $F \cap [a_1, b_1]$

тўпламдан x_1 нуқтани, $F \cap [a_2, b_2]$ тўпламдан x_2 нуқтани ($x_2 \neq x_1$), $F \cap [a_3, b_3]$ тўпламдан x_3 нуқтани ($x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$) ва ҳоказо нуқталарни оламиз.

Энди, (1) га асосан, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ бўлиши кўринади; демак, x_0 нуқта F тўплам учун лимит нуқта бўлади. Лекин F ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in F$. Бундан фойдаланиб теоремани исбот қиламиз. Бунинг учун юқорида қилган фаразимизга зид натижа келтириб чиқарилса кифоя.

Дарҳақиқат, теореманинг шартига мувофиқ, x_0 нуқтани M системадаги бирор $\delta = (\alpha, \beta)$ оралиқ қоплайди. n деярли катта бўлганда $[a_n, b_n]$ сегментнинг узунлиги исталганча кичик қилиниши мумкинлигидан ва $[a_n, b_n]$ сегмент x_0 нуқтани ўз ичига олганлиги сабабли $[a_n, b_n] \subset \delta$ муносабатнинг бажарилиши келиб чиқади. Бу муносабатдан эса $F \cap [a_n, b_n] \subset \delta$ муносабат бевосита келиб чиқади; демак, $F \cap [a_n, b_n]$ тўплам M системадан олинган биргина δ оралиқ билан қопланди. Бу натижа эса $[a_n, b_n]$ сегментларнинг юқорида айтилган хоссасига зид[1]. *

12. 2. Изоҳ. Агар теореманинг шартида F тўпламнинг ёпиқ эканлиги ёки чегараланганлиги бажарилмаса, Борель—Лебег теоремаси ўз кучини йўқотади.

Бу изоҳнинг тўғрилигини мисолларда кўриш мумкин. Тегишли мисолларни тузиш ўқувчига тавсия этилади[2].

13-§. Қуюқланиш нуқталари

1-таъриф. *Агар ξ нуқтанинг ихтиёрий атрофида E тўпламнинг саноқсиз элементлари мавжуд бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг* ***қуюқланиш нуқтаси*** *дейилади.*

Мисол. 9-параграфда мисол сифатида келтирилган E_3, E_4 ва E_6 тўпламларининг қуюқланиш нуқталари $[0, 1]$ сегментдан иборат; E_1, E_2 ва E_5 тўпламларнинг эса бирорта ҳам қуюқланиш нуқтаси йўқ.

Ҳар қандай қуюқланиш нуқтаси лимит нуқталиги ҳамда саноқсиз тўпламларгина қуюқланиш нуқтасига эга бўлиши мумкинлиги таърифдан бевосита келиб чиқади.

Агар (x', x'') оралиқнинг чегара нуқталари x' ва x'' рационал сонлар бўлса, бу оралиқни рационал оралиқ деймиз.

Бундан кейин баъзан қуйидаги теоремалардан фойдаланамиз.

13. 1. Теорема. ***Элементлари рационал оралиқлардан иборат бўлган система саноқли тўпламдир.*** Бу теорема 6. 5-теореманинг натижасидир.

---

[1] Бундан кейин теореманинг исбот бўлганини қисқалик учун * белгини қўйиш билан кўрсатамиз. Бу белги сатрдан бир оз пастга қўйилади.

[2] Мазкур бобнинг охирида келтирилган машқларга мурожаат қилинса ҳам бўлади.

13. 2. **Теорема.** ***(x', x'') оралиқ ихтиёрий ξ нуқтанинг бирор атрофи бўлсин. У ҳолда ξ нуқтани ўз ичига олган ва (x', x'') оралиқда жойлашган (y', y'') рационал оралиқ тузиш мумкин.***

Исбот. Дарҳақиқат, агар y' ва y'' рационал сонлар $x' < y' < \xi$ ва $\xi < y'' < x''$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб олинса, у ҳолда (y', y'') оралиқ теореманинг шартларини қаноатлантирган бўлади.$_*$

13. 3. **Теорема** (Линделёф теоремаси). ***Ҳар қандай саноқсиз E тўпламнинг қуюқланишмас нуқталаридан иборат бўлган тўплам энг кўпи билан саноқли тўпламдир (хусусан, E нинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўплам саноқсиз тўплам бўлади).***

Исбот. ξ нуқта E тўпламнинг қуюқланишмайдиган нуқтаси бўлсин. У ҳолда E тўпламнинг кўпи билан саноқли элементларини ўз ичига олган ξ нуқтанинг (x', x'') атрофи мавжуд. Иккинчи теоремага мувофиқ ξ нинг (y', y''), яъни $(x' < y' < \xi < y'' < x'')$ рационал атрофи ҳам мавжуд ва бу атроф ҳам E тўпламнинг кўпи билан саноқли элементларини ўз ичига олади.

13. 1-теоремага мувофиқ, ҳамма рационал оралиқлардан иборат тўплам саноқли тўпламдир.

Демак, уларни номерлаб чиқиш мумкин.

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_n, \ \ldots \tag{1}$$

ҳамма рационал оралиқлар бўлсин. Юқоридаги мулоҳазага мувофиқ, E тўпламнинг қуюқланишмас ҳар бир нуқтаси (1) кетма-кетликдаги шундай рационал оралиқда жойлашган бўладики, бу оралиқда E тўпламнинг кўпи билан саноқли элементлари бўлади. Фараз қилайлик,

$$\delta_{i_1}, \ \delta_{i_2}, \ \delta_{i_3}, \ \ldots, \ \delta_{i_n}, \ \ldots \tag{2}$$

ана шундай рационал оралиқлар кетма-кетлиги бўлсин.

Натижада, 6. 1-теоремага мувофиқ, (2) кетма-кетликдаги ҳамма рационал оралиқларда E тўпламнинг кўпи билан саноқли элементлари бўлади.

Теорема исбот бўлди, чунки E тўпламнинг ҳар бир қуюқланишмас нуқтаси (2) кетма-кетликдаги рационал оралиқларнинг бирига, албатта киради ва бу оралиқларнинг ҳар бирида E тўпламнинг кўпи билан саноқли элементлари бўлади.$_*$

13. 4. **Теорема.** ***Ҳар қандай E тўпламнинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўплам мукаммал тўплам бўлади.***

Исботи. E тўпламнинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўпламни Q билан белгилаймиз.

Аввало, E тўплам чекли ёки саноқли бўлса, у ҳолда E тўплам (биринчи таърифга мувофиқ) бирорта ҳам қуюқланиш нуқтасига эга бўла олмайди. Демак, Q бўш тўплам бўлади; бўш тўплам учун эса теорема ўринлидир.

Энди E тўплам саноқсиз бўлсин. Теоремани исбот қилиш учун Q нинг ёпиқ эканини ва ўзида зичлигини исботлаш керак.

Дастлаб Q тўпламнинг ёпиқ эканлигини исбот қиламиз. x_0 нуқта Q тўпламнинг ихтиёрий лимит нуқтаси ва (x', x'') унинг ихтиёрий атрофи бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда (x', x'') оралиқда Q нинг ҳеч бўлмаганда битта ξ нуқтаси бўлади ва бу нуқта E тўплам учун қуюқланиш нуқтаси бўлади; демак, ξ нуқтанинг ихтиёрий атрофида ва, шу жумладан, (x', x'') оралиқда E тўпламнинг саноқсиз элементлари мавжуд.

Бундан кўринадики, x_0 нуқта E тўплам учун қуюқланиш нуқтаси, яъни: $x_0 \in Q$. Демак, Q ёпиқ тўплам.

Энди Q нинг ўзида зич тўплам эканини исбот қиламиз. Q ўзида зич бўлмасин, деб фараз қиламиз. У ҳолда Q тўпламнинг камида битта ёлғиз нуқтаси бўлади; бу нуқтани ξ_0 билан (агар бу нуқталар сони бирдан ортиқ бўлса, уларнинг бирортасини ξ_0 билан) белгилаймиз. Бир томондан ξ_0 нинг шундай (x', x'') атрофи мавжудки, бу атрофда Q нинг ξ_0 дан бошқа бирорта ҳам нуқтаси бўлмайди. Аммо, иккинчи томондан ξ_0 нуқта E тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси бўлганлиги учун унинг ихтиёрий атрофида, шу жумладан, (x', x'') оралиқда E тўпламнинг саноқсиз элементлари мавжуд. Линделёф теоремасига мувофиқ E тўпламнинг (x', x'') оралиқдаги қуюқланишмас нуқталари кўпи билан саноқли тўпламни ташкил этади; демак, (x', x'') оралиқда E тўпламнинг саноқсиз қуюқланиш нуқталари мавжуд, яъни ξ_0 нуқтанинг ихтиёрий (x', x'') атрофида Q тўпламнинг саноқсиз элементлари мавжуд экан. Бу натижа эса юқоридаги фаразимизга зид. Демак, Q ўзида зич тўплам экан.

13. 3 ва 13. 4- теоремалардан қуйидаги теорема бевосита келиб чиқади.

13. 5. Теорема (Кантор—Бендиксон теоремаси). ***Ҳар қандай ёпиқ E тўпламни $E = Q \cup M$ кўринишда ёзиш мумкин.***

Бу ерда Q мукаммал тўплам ва E тўпламнинг ҳамма қуюқланиш нуқталаридан иборат, M эса саноқли тўплам бўлиб, E тўпламнинг қуюқланишмас нуқталаридан иборат.

2- таъриф. *Агар E тўпламни иккита ёпиқ, бўшмас ва умумий нуқталарга эга бўлмаган тўпламларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин бўлмаса, E тўпламни* ***туташган тўплам*** *деймиз.*

13. 6. Теорема ***Сегмент туташган тўпламдир.***

Исбот. Ихтиёрий $[a, b]$ сегмент берилган бўлсин. Бу сегментни туташмаган тўплам деб фараз қиламиз. У ҳолда таърифга мувофиқ уни

$$[a, b] = F_1 \cup F_2 \quad (F_1 \cap F_2 = \varnothing)$$

кўринишда ёзиш мумкин; бунда F_1 ва F_2 тўпламлар ёпиқ, бўшмас тўпламлар.

a нуқта F_1 тўпламнинг элементи ва ξ нуқта F_2 тўпламнинг қуйи чегараси бўлсин. Агар $\xi = a$ бўлса, у ҳолда $\xi \in F_1$, аммо ξ нуқта F_2 тўпламга ҳам киради, натижада: $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$, бу эса шартимизга зид.

Агар $\xi \neq a$ бўлса, у ҳолда $[a, \xi)$ ярим оралиқ бутунлай F_1 тўпламга киради; бундан эса ξ нуқта $[a, \xi)$ ярим оралиқнинг лимит нуқтаси ва, демак, F_1 нинг ҳам лимит нуқтаси эканлиги келиб чиқади. Яна шартимизга зид бўлган $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ натижага келдик.*

14-§. Ички нуқталар ва очиқ тўпламлар

Энди ёпиқ тўпламлар билан узвий боғланган очиқ тўпламларни ўрганишга ўтамиз.

1-таъриф. *Агар ξ нуқтани ўз ичига олган ва E тўпламга бутунлай кирган (x', x'') оралиқ мавжуд бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг* ***ички нуқтаси*** *дейилади.*

2-таъриф. *Агар E тўпламнинг ҳамма нуқталари ички нуқталардан иборат бўлса, у ҳолда E тўплам* ***очиқ тўплам*** *дейилади. Бўш тўпламни ҳам очиқ тўплам деб ҳисоблаймиз.*

Мисоллар: 1. Ҳар қандай (a, b) оралиқ очиқ тўпламдир.

2. Ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами очиқ тўплам ҳосил қилади.

Лекин $[a, b]$ сегмент очиқ тўплам ҳосил қилмайди, чунки a ва b нуқталар ички нуқталар эмас.

14. 1. Теорема. ***Сони ихтиёрий бўлган очиқ тўпламларнинг йиғиндиси ҳам очиқ тўпламдир.***

Исбот. $G = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} G_\xi$ тўплам очиқ G_ξ тўпламларнинг йиғиндиси бўлсин (Γ ихтиёрий қувватга эга бўлган тўплам). G тўпламнинг ихтиёрий x элементининг ички нуқта эканлигини кўрсатсак теорема исботланади.

Модомики, $x \in G$ экан, демак, x нуқта G_ξ тўпламларнинг биронтасига киради; G_{ξ_0} шу тўпламларнинг бири бўлсин, яъни $x \in G_{\xi_0}$. Лекин G_{ξ_0} очиқ тўплам бўлганлиги учун шундай (α, β) оралиқ мавжудки, бу оралиқ бутунлай G_{ξ_0} га киради, яъни $(\alpha, \beta) \subset G_{\xi_0}$ ва $x \in (\alpha, \beta) \subset G_{\xi_0}$.

Демак, $(\alpha, \beta) \subset G$ ва x нуқта G тўплам учун ҳам ички нуқта бўлади.*

14. 2. Теорема. ***Сони чекли очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси очиқ тўпламдир.***

Исбот. $P = \bigcap\limits_{\eta=1}^{n} G_\eta$ тўплам очиқ G_η тўпламларнинг кўпайтмаси бўлсин. Агар P бўш тўплам бўлса, у ҳолда таърифга биноан, у очиқ тўплам. P бўш бўлмаса, унинг ихтиёрий x_0 элементини оламиз. У ҳолда кўпайтманинг таърифига мувофиқ, $x_0 \in G_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ва ҳар бир k учун шундай (α_k, β_k) оралиқ топиладики, бу оралиқ бутунлай G_k тўпламга киради, яъни:

$$(\alpha_k, \beta_k) \subset G_k \quad \text{ва} \quad x_0 \in (\alpha_k, \beta_k).$$

Энди $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ва $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ сонларни олиб, (α, β) оралиқни тузамиз; бу оралиқ учун қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subset (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Демак, $(\alpha, \beta) \subset \bigcap_{l=1}^{n} G_l = P$ ва x_0 нуқта P тўпламнинг ички нуқтасидир.*

Агар сони чексиз очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси олинса, у ҳолда теорема ўз кучини йўқотиши мумкин.

Масалан,

$$G_n = \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

тўпламларнинг ҳар бири очиқ тўплам, лекин уларнинг кўпайтмаси

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

ёпиқ тўпламдир.

14. 3. Теорема. ***Агар G тўплам очиқ бўлса, у ҳолда унинг CG тўлдирувчиси ёпиқ бўлади.***

Исбот. CG тўпламни ёпиқ эмас деб фараз қилайлик. У ҳолда CG га кирмайдиган унинг x_0 лимит нуқтаси мавжуд. Демак, $x_0 \in G$; G очиқ тўплам бўлганлиги учун x_0 нуқтанинг шундай (α, β) атрофи мавжудки, бу атрофнинг ҳамма нуқталари G тўпламга киради, яъни $(\alpha, \beta) \subset G$ ва $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Бундан кўринадики, (α, β) оралиқда CG тўпламнинг бирорта ҳам элементи йўқ, бинобарин x_0 нуқта CG тўпламнинг лимит нуқтаси бўла олмайди. Бу натижа эса фаразимизга зид.*

14. 4. Теорема. ***Агар F ёпиқ тўплам бўлса, унинг CF тўлдирувчиси очиқ тўплам бўлади.***

Исбот. CF тўпламнинг ихтиёрий x_0 нуқтасини олиб, унинг ички нуқта эканлигини кўрсатамиз.

F ёпиқ тўплам бўлганлиги учун x_0 нуқта F нинг лимит нуқтаси бўла олмайди, чунки $x_0 \in CF$. Шунинг учун x_0 нуқтани ўз ичига олган ва F тўпламнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмаган (x', x'') оралиқ мавжуддир. Демак, бу оралиқнинг ҳамма нуқталари CF тўпламга киради, яъни x_0 нуқта CF тўпламнинг ички нуқтас бўлади.*

E чегараланган тўплам ва $a = \inf E$ ва $b = \sup E$ бўлсин. У ҳолда $S = [a, b]$ сегмент E ни ўз ичига олган энг кичик сегмент дейилади,

14. 5. Теорема. ***Агар F чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб, S уни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлса, у ҳолда C_sF (= [ab] $\setminus$ F) тўплам очиқ бўлади.***

Исбот. Бу теорема 14. 2, 14. 4-теоремалардан ва ушбу $C_sF = (a, b)\cap CF$ айниятдан бевосита келиб чиқади. Бу айниятни исбот қиламиз. $x_0 \in C_sF$ бўлсин; бундан $x_0 \overline{\in} F$, аммо $a \in F$ ва $b \in F$ (бу муносабатлар 11. 13-натижадан келиб чиқади), шунинг учун $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$. Бундан $x_0 \in (a, b)$ экани кўринади; иккинчи томондан, $x_0 \in CF$.

Демак,

$$x_0 \in (a, b)\cap CF.$$

Аксинча, $x_0 \in (a, b)\cap CF$ бўлсин; у ҳолда $x_0 \in CF$, демак, $x_0 \overline{\in} F$; бундан ва $x_0 \in (a, b)$ муносабатдан $x_0 \in C_sF$ экани келиб чиқади.

14. 6. Натижа. ***Агар очиқ G тўплам [a, b] сегментнинг қисми бўлса, у ҳолда [a, b] $\setminus$ G тўплам ёпиқ тўплам бўлади; агар ёпиқ F тўплам (a, b) оралиқнинг қисми бўлса, у ҳолда (a, b) $\setminus$ F тўплам очиқ тўплам бўлади.***

Лекин F ёпиқ тўплам бўлиб, $[a, b]$ сегментда жойлашган бўлса, у ҳолда $[a, b]\setminus F$ тўплам ёпиқ ҳам, очиқ ҳам бўлмаслиги мумкин.

Масалан, $F = [-1, +1]$; $[a, b] = [-2, 2]$ бўлсин, у ҳолда $[a, b]\setminus F = [-2, -1)\cup(1, +2]$ бўлади. $[-2, -1)$ ва $(1, 2]$ тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ ҳам эмас, очиқ ҳам эмас, чунки -1 лимит нуқта бўлиб $[-2, -1)$ тўпламга кирмайди ва -2 бу тўпламнинг ички нуқтаси эмас; $(1, 2]$ тўплам шунга ўхшаш текширилади.

15-§. Чегараланган очиқ ва ёпиқ тўпламларнинг тузилиши

Чегараланган очиқ ва ёпиқ тўпламларнинг тузилишини ўрганиш келгуси боблар учун катта аҳамиятга эга.

Очиқ G тўплам берилган бўлсин. Агар $(\alpha, \beta)\subset G$ ва $\alpha \overline{\in} G$, $\beta \overline{\in} G$ бўлса, (α, β) оралиқни G тўпламнинг тузувчи оралиғи дейилади.

15. 1. Теорема. ***Очиқ G тўпламга нисбатан тузувчи турли (α_1, β_1) ва (α_2, β_2) оралиқлар умумий нуқтага эга эмас.***

Исбот. (α_1, β_1) ва (α_2, β_2) оралиқлар тўплам маъносида турлича (яъни $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ ларнинг камида бири ўринли) бўлиб, умумий ξ нуқтага эга бўлсин; у ҳолда

$$\alpha_1 < \xi < \beta_1,\ \alpha_2 < \xi < \beta_2$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Бу тенгсизликлардан

$$\alpha_2 < \xi < \beta_1, \quad \alpha_1 < \xi < \beta_2$$

тенгсизликлар бевосита келиб чиқади.

Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

$$\text{ё} \quad \alpha_2 < \alpha_1 \quad \text{ёки} \quad \alpha_2 > \alpha_1.$$

Агар $\alpha_2 < \alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_1 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset G$; сўнгги муносабатлар эса бир вақтда бажарилиши мумкин эмас, чунки $\alpha_1 \bar{\in} G$. Зиддият келиб чиқди.

Агар $\alpha_2 > \alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_2 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset G$; бу муносабатлар ҳам бир вақтда бажарилиши мумкин эмас, чунки $\alpha_2 \bar{\in} G$, яна зиддият келиб чиқди.$_*$

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

15. 2. Натижа. ***Агар очиқ G тўпламга нисбатан икки тузувчи оралиқлар умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу оралиқлар бир-бирига айнан тенг бўлади.***

15. 3. Натижа. ***Бўш бўлмаган очиқ G тўпламга нисбатан тузувчи турли оралиқлар системаси чекли ёки саноқлидир.***

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар ҳар бир тузувчи оралиқдан биттадан рационал нуқта олинса, у ҳолда бу нуқталардан тузилган M тўплам энг кўпи билан саноқли бўлади ва G га нисбатан тузувчи турли оралиқлар системаси M билан бир қийматли муносабатда бўлади.$_*$

15. 4. Теорема. ***Агар G бўш бўлмаган очиқ ва чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда G нинг ҳар бир нуқтаси G га нисбатан тузувчи бирорта оралиққа киради.***

Исбот. a нуқта G тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин. Ушбу $F = [a, +\infty) \cap CG$ тўпламни тузамиз. $[a, +\infty)$ ва CG тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ бўлганлиги учун F тўплам ҳам ёпиқ. F тўпламнинг тузилишидан унинг қуйидан чегараланганлиги ва бўш эмаслиги бевосита кўринади. F нинг қуйи чегарасини α билан белгилаймиз; $\alpha \in F$, чунки F ёпиқ тўплам. $\alpha > a$, чунки a ва ундан чапдаги ҳамма нуқталар F тўпламга кирмайди.

Бундан ташқари, $[a, \alpha) \subset G$. Акс ҳолда, яъни $[a, \alpha) \not\subset G$ бўлганда, шундай b нуқта мавжудки, $b \in [a, \alpha)$ ва $b \bar{\in} G$ муносабатлар ўринли бўлади. Бу муносабатлардан кўринадики, $b \in F$ ва $b < \alpha$; сўнгги тенгсизлик α нинг F учун қуйи чегара эканига зид.

Натижада, α учун

$$1)\ \alpha > a, \quad 2)\ \alpha \bar{\in} G, \quad 3)\ [a, \alpha) \subset G \qquad (A)$$

муносабатларнинг ўринли эканлиги кўрсатилди.

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги муносабатларни қаноатлантирадиган β нуқтанинг мавжудлигини кўрсатиш мумкин:

$$1)\ \beta < a, \quad 2)\ \beta \bar{\in} G, \quad 3)\ (\beta, a] \subset G. \qquad (B)$$

Бунинг учун $F = [-\infty, a] \cap CG$ тўпламни тузиб, юқоридагига ўхшаш мулоҳазалардан фойдаланиш керак.

(*A*) ва (*B*) муносабатлардан (β, α) ораликнинг *G* га нисбатан тузувчи оралиқ эканлиги ва $a \in (\beta, \alpha)$ экани бевосита кўринади.*

Шу параграфдаги теоремалардан ва уларнинг натижаларидан қуйидаги теоремалар келиб чиқади.

15. 5. Теорема. ***G* очиқ, чегараланган ва бўш бўлмаган тўплам бўлиб, (α, β) оралиқ *G* га бутунлай кирган бўлса, у ҳолда *G* нинг тузувчи оралиқлари орасида (α, β) оралиқни бутунлай ўз ичига олган оралиқ мавжуддир.**

15. 6. Теорема. ***Чегараланган ҳар қандай очиқ G $(\neq \varnothing)$ тўпламни $G = \sum_k \delta_k$, $\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(\alpha_k \overline{\in} G, \beta_k \overline{\in} G)$ кўринишда ёзиш мумкин; бу ерда δ_k лар *G* нинг тузувчи оралиқлари $\delta_k \cap \delta_{k'} = \varnothing$ (агар $k \neq k'$ бўлса) ва δ_k оралиқлардан иборат система энг кўпи билан саноқли бўлади.***

Энди бўш бўлмаган, чегараланган, ёпиқ тўпламларнинг тузилишини текширишга ўтамиз.

F чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб, *S* уни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлсин. У ҳолда 14. 5-теоремага асосан, $C_S F$ очиқ тўплам бўлади. Агар $C_S F$ бўш тўплам бўлмаса, унга юқоридаги 15.6-теоремани татбиқ қилиш мумкин. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

15. 7. Теорема. ***Ҳар қандай чегараланган ёпиқ F тўплам ё сегментдир, ёки бирор сегментдан сони чекли ёки саноқли оралиқлар системасини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламдир.***

Чиқариб ташланган оралиқларнинг чегара нуқталари *F* тўпламда қолади.

Аксинча, бирорта сегментдан сони чекли ёки саноқли оралиқлар системаси чиқариб ташланса, у ҳолда ҳосил бўлган тўплам ёпиқдир.

Очиқ $C_S F$ тўпламнинг тузувчи оралиқларини *F* тўпламни тўлдирувчи оралиқлари деймиз.

Юқоридаги мулоҳазалардан бевосита кўринадики, чегараланган ёпиқ $F(\neq \varnothing)$ тўпламнинг ёлғиз нуқталари фақат икки турли бўлиши, яъни бири тўлдирувчи икки оралиқнинг умумий чегараси, иккинчиси эса *a* ва *b* нуқталар (агар бу нуқталар тўлдирувчи оралиқнинг чегара нуқталари бўлса) дан иборат бўлиши мумкин, бу нуқталарнинг бири айтилгандек бўлиб, иккинчиси шундай бўлмаслиги ҳам мумкин.

Бу жумладан қуйидаги теоремани чиқариш мумкин.

15. 8. Теорема. ***Ҳар қандай чегараланган мукаммал $P(\neq \varnothing)$ тўплам, ёки сегментдан иборат, ёки бирорта сегментдан ўзаро кесишмаган, умумий чегара нуқтага эга бўлмаган ва чегаралари шу сегментнинг учларига***

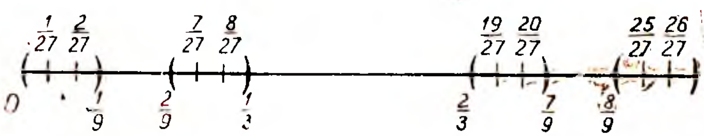
тенг бўлмаган, сони чекли ёки саноқли оралиқларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламдан иборат.

16- §. Кантор тўпламлари

$\Delta_0 = [0, \ 1]$ сегментни олиб, унинг устида қуйидаги амалларни бажарамиз.

Аввал бу сегментни $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ нуқталар билан уч қисмга бўлиб, ундан $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}\right)$ оралиқни олиб ташлаймиз. Натижада $\left[0, \ \frac{1}{3}\right]$ ва $\left[\frac{2}{3}, \ 1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. $\Delta_{00} = \left[0, \ \frac{1}{3}\right]$ ва $\Delta_{01} = \left[\frac{2}{3}, \ 1\right]$ сегментларнинг ҳар бирини яна тенг уч қисмга бўламиз, улардан $\left(\frac{1}{9}, \ \frac{2}{9}\right)$ ва $\left(\frac{7}{9}, \ \frac{8}{9}\right)$ оралиқларни олиб ташлаймиз.

Натижада $\Delta_{000} = \left[0, \ \frac{1}{9}\right]$, $\Delta_{001} = \left[\frac{2}{9}, \ \frac{1}{3}\right]$, $\Delta_{010} = \left[\frac{2}{3}, \ \frac{7}{9}\right]$, $\Delta_{011} = \left[\frac{8}{9}, \ 1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна тенг уч қисмга бўлиб, улардан тегишлича 4 та оралиқни олиб ташлаймиз; натижада 8 та сегмент ҳосил бўлади. Бу процессни чексиз давом эттирамиз (6- шакл).



6- шакл.

Юқоридаги процессни чексиз давом эттириш натижасида $\Delta_0 = [0, \ 1]$ сегментдан ушбу

$$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\left(\frac{1}{9}, \ \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \ \frac{8}{9}\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{27}, \ \frac{2}{27}\right) \cup \right.$$
$$\left. \cup \left(\frac{7}{27}, \ \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \ \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \ \frac{26}{27}\right)\right\} \cup \ \ldots$$

очиқ тўплам олиб ташланган бўлади. 15.8-теоремага мувофиқ, қолган $P_0 (= \Delta_0 \setminus G_0)$ тўплам мукаммал тўпламдир.

G_0 ва P_0 тўпламлар К а н т о р т ў п л а м л а р и дейилади.

Энди бу тўпламлар элементларининг арифметик характеристикасини берамиз. Бунинг учун сонларнинг **учли каср** шаклида ёзилишига мурожаат қиламиз.

Маълумки[1], [0,1] сегмент орасидаги ҳар бир сонни қуйидаги учли каср шаклида ёзишимиз мумкин:

$$0,\ a_1,\ a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots\quad (a_i = 0,\ 1,\ 2;\quad i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Лекин $\frac{i}{3^k}$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots)$ кўринишдаги сонларни, яъни юқоридаги амалларни бажаришда бўлиш нуқталарига тегишли сонларни икки кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3^k} &= \left|\begin{aligned} &0,\ \underbrace{0\ \ldots}_{k-1}\ 010000\ \ldots \\ &0,\ \underbrace{0\ \ldots}_{k}\ 02222\ \ldots \end{aligned}\right. \\ \frac{2}{3^k} &= \left|\begin{aligned} &0,\ \underbrace{0\ \ldots}_{k-1}\ 020000\ \ldots \\ &0,\ \underbrace{0\ \ldots}_{k-1}\ 01222\ \ldots \end{aligned}\right. \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Бу икки кўринишдан бир рақами учрамайдиганини қабул қиламиз. Бошқа ҳар қандай сон учли каср шаклида биргина кўринишда ёзилади.

Юқоридаги амалларни бажаришда $\Delta_0 = [0,1]$ сегментдан $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ оралиқни олиб ташлаган эдик; яъни биринчи амал натижасида [0,1] сегментдан шундай сонлар олиб ташландики, уларни учли каср шаклида ёзганимизда биринчи учли рақами бирга тенг, иккинчи амални бажарганимизда $\Delta_{00} = \left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ ва $\Delta_{01} = \left[\frac{2}{3},\ 1\right]$ сегментлардан тегишлича $\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$ оралиқларни олиб ташлаган эдик; яъни иккинчи амал натижасида шундай сонлар олиб ташланадики, уларни учли каср шаклида ёзганимизда иккинчи учли рақами бирга тенг бўлар эди ва ҳоказо. k- амал бажариш натижасида [0,1] сегментдан шундай сонлар олиб ташланадики, уларни учли каср шаклида ёзганимизда k-учли рақами бирга тенг бўлади. Демак, юқоридаги амалларни бажариш натижасида [0,1] сегментдан бирорта учли рақами бирга тенг бўлган ҳамма сонлар чиқариб ташланган бўлади.

Агар [0,1] сегментдан олинган ихтиёрий x сонининг бирор учли каср рақами бирга тенг бўлса, у G_0 тўпламга киради, акс ҳолда у сон P_0 тўпламга киради, яъни P_0 тўпламга кирган сонларнинг учли рақамлари 0 ва 2 дан иборат.

Теорема. ***P_0 тўплам континуум қувватга эга.***

---

[1] Сонларни учли, умуман p ли касрларга ёйиш ҳақида 59- параграфга қаранг.

Теореманинг биринчи исботи. P_0 тўплам саноқли бўлсин, деб фараз қилайлик, у ҳолда P_0 тўплам

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \tag{1}$$

кўринишда ёзилади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин: x_1 нуқта ё Δ_{00} да, ёки Δ_{01} да ётади ($\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ сегментлар юқорида киритилган); x_1 нуқта ётмаган Δ_{0i} ни σ_1 билан белгилаймиз. σ_1 га кирувчи ҳамда x_2 ни олмаган Δ_{0ij} ни σ_2 билан белгилаймиз ва ҳоказо. Натижада бир-бирининг ичига жойлашган ҳамда n-си x_n нуқтани ўз ичига олмаган

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots \tag{2}$$

сегментлар кетма-кетлигига эга бўламиз. 11. 10-теоремага асосан буларнинг умумий қисми бўш эмас ҳамда P_0 тўпламнинг ясалишига кўра бу кесишма P_0 га тегишли. Демак, умумий қисмининг барча элементлари (1) кетма-кетликда учраши керак, масалан, умумий қисмининг y элементи (1) кетма-кетликда n-ўринда учрасин, яъни $y = x_n$. Аммо σ_n нинг ясалишига кўра, x_n нуқта σ_n га кирмайди, демак, умумий қисмига ҳам кирмайди. Зиддиятлик келиб чиқди.

Теореманинг иккинчи исботи. [0,1] даги ҳар бир сонни ўнли касрга ёйиш мумкин бўлгандек, бу сегментдаги ҳар бир сонни иккили касрга ёйиш мумкин:

$$x = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots, \quad i_s = 0,1.$$

Аксинча, бу кўринишдаги ҳар бир иккили касрга [0,1] даги битта нуқтани мос қўйиш мумкин. Ўнли касрдаги каби [0,1] даги $\frac{N}{2^k}$ сонлар икки усул билан, қолган сонлар эса бир усул билан иккили касрга ёйилади.

Иккинчи томондан, юқорида кўрсатилганидек, P_0 тўпламнинг ҳар бир элементини қуйидаги учли каср шаклида ёзиш мумкин:

$$\xi = 0, j_1 j_2 \ldots j_n \ldots, j_s = 0,2.$$

Аксинча, бу кўринишдаги ҳар бир учли касрга P_0 нинг битта нуқтаси мос келади; P_0 даги $\frac{N}{3^k}$ нуқталар икки усул билан, қолган нуқталар эса бир усул билан бу кўринишдаги учли касрга ёйилади.

Энди [0,1] сегмент билан P_0 орасида ўзаро бир қийматли мосликни ўрнатамиз: [0,1] сегментдан

$$x = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots$$

нуқтани (иккили каср шаклида ёзилган) олиб, унга P_0 тўпламнинг қуйидаги элементини мос қўямиз:

$$\xi = 0, j_1 j_2 j_3 \ldots j_n \ldots,$$

бу ерда $j_s = 0$, агар $i_s = 0$ бўлса ва $j_s = 2$, агар $i_s = 1$ бўлса. Бундан, [0,1] сегменти континуум қувватга эга бўлгани учун, P_0 тўпламнинг ҳам континуум қувватга эгалиги келиб чиқади.*

1. Бирор E тўплам ва унга тегишли бўлмаган ξ нуқта берилган бўлсин. E тўпламдан ξ нуқтагача бўлган масофа $\rho(\xi, E)$ деб $\rho(\xi, x)$ $(x \in E)$ сонларнинг қуйи чегарасига айтилади. $\rho(\xi, E)$ соннинг нолга тенг бўлиши учун ξ нуқта E учун лимит нуқта бўлиши зарур ва кифоялиги исботлансин.

2. E—ёпиқ тўплам бўлиб, ξ унга тегишли бўлмасин. У ҳолда шундай $x \in E$ нуқта мавжудки, унинг учун: $\rho(\xi, x) = \rho(\xi, E)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $\rho(\xi, x)$ сон ξ нуқтадан x гача бўлган масофа. Шуни исботланг.

3. Саноқсиз тўпламнинг камида битта қуюқланиш нуқтаси мавжудлиги исботлансин.

4. K, M, N тўпламларнинг қуюқланиш нуқталарининг тўпламларини мос равишда K^0, M^0, N^0 орқали белгилаймиз. Агар $K = M \cup N$ бўлса, $K^0 = M^0 \cup N^0$ тенглик исботлансин.

5. Ҳар қандай ёпиқ тўплам сони саноқли очиқ тўпламларнинг кўпайтмасига тенглиги исботлансин.

6. (a, b) интервалнинг сони саноқли ўзаро кесишмайдиган ёпиқ тўпламларининг йиғиндисига тенг бўлолмаслиги кўрсатилсин.

7. $[0,1]$ сегмент ҳадларининг сони континуум қувватга эга, ўзаро кесишмайдиган мукаммал тўпламларнинг йиғиндисига ёйилсин.

8. Шундай M тўплам тузингки, $M^{(n)} \neq M^{(n+1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ тенгсизлик ўринли бўлсин.

9. Шундай M тўплам тузингки, $M^{(i)} \neq M^{(i+1)}$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, аммо $M^{(i+1)} = \varnothing$, $i > n$ бўлсин.

10. Борель—Лебег теоремасига тескари теорема ўринлими?

11. M'' тўплами $[0,1]$ даги барча рационал нуқталар тўпламидан иборат бўладиган M тўплам мавжудми?

12. $[0,1]$ да шундай иккита умумий нуқтаси бўлмаган M_1 ва M_2 тўпламлар топилсинки, уларнииг ҳар бири $[0,1]$ нинг ҳамма ерида зич, континуум қувватга эга ва $M_1 \cup M_2 = [0,1]$ тенгликни қаноатлантирсин.

13. $[0,1]$ да шундай ўзаро кесишмайдиган M_1, M_2, $M_3, \ldots$, $M_n, \ldots$ тўпламлар топилсинки, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i = [0,1]$ бўлиб, уларнинг ҳар бири $[0,1]$ нинг ҳамма ерида зич ва континуум қувватга эга бўлсин.

14. $[0,1]$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинми:

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \quad M_i \cap M_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \bar{M}_i = M_i, \quad M_i \neq \varnothing.$$

15. Масалани қуйишдан илгари қуйидаги усул билан Q тўпламни ясаб оламиз.

$\Delta_0 = [0,1]$ сегментни олиб, унинг устида қуйидаги амалларни бажарамиз. Аввал бу сегментни $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ва $\frac{4}{5}$ нуқталар билан беш қисмга бўлиб, ундан $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ оралиқни олиб ташлаймиз. Натижада $\Delta_{00}=\left[0, \frac{1}{5}\right]$ ва $\Delta_{01}=\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. Δ_{00} ва Δ_{01} сегментларнинг ҳар бирини яна тенг беш қисмга бўламиз, улардан $\left(\frac{1}{25}, \frac{4}{25}\right)$ ва $\left(\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)$ оралиқларни олиб ташлаймиз. Натижада $\Delta_{000}=$ $=\left[0, \frac{1}{25}\right]$, $\Delta_{001}=\left[\frac{4}{25}, \frac{1}{5}\right]$, $\Delta_{010}=\left[\frac{4}{5}, \frac{21}{25}\right]$, $\Delta_{011}=\left[\frac{24}{25}, 1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна тенг беш қисмга бўлиб, улардан тегишлича 4 та оралиқни олиб ташлаймиз; натижада 8 та сегмент ҳосил бўлади. Бу процессни чексиз давом эттирамиз. Юқоридаги процессни давом эттириш натижасида $\Delta_0=[0,1]$ сегментдан ушбу

$$G=\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)\cup\left\{\left(\frac{1}{25}, \frac{4}{25}\right)\cup\left(\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\left(\frac{1}{5^3}, \frac{4}{5^3}\right)\cup\left(\frac{21}{5^3}, \frac{24}{5^3}\right)\cup\left(\frac{101}{5^3}, \frac{104}{5^3}\right)\cup\left(\frac{121}{5^3}, \frac{124}{5^3}\right)\right\}\cup\ \ldots$$

очиқ тўплам олиб ташланган бўлади. Қолган $\Delta\setminus G$ тўпламни Q билан белгилаймиз.

Q мукаммал тўплам эканлигини кўрсатинг.

16. Ҳар қандай туташган тўплам ё сегмент, ё интервал, ё ярим сегмент, ё бутун тўғри чизиқ, ё нуқта бўлишини исботланг.

II БОБ

ЎЛЧОВЛИ ТЎПЛАМЛАР

Тўғри чизиқда бирор (a, b) оралиқ (ёки сегмент) берилган бўлса, бу оралиқнинг (сегментнинг) узунлиги ёки ўлчови деб, одатда, $b-a$ сонга айтилади. Энди тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқтали тўплам учун ўлчов тушунчасини киритиш масаласи туғилади. Тўпламнинг ўлчови тушунчасини турлича киритиш мумкин; ўлчов тушунчаси узунлик тушунчасини умумлаштириш натижасида келиб чиққан. Ўлчов назариясини француз математиклари Э. Борель, К. Жордан ва А. Лебег яратган.

17- §. Тўпламнинг ўлчови

E чегараланган тўплам ва $[a, b]$ шу тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлсин[1]. Фараз қилайлик, δ_1, δ_2, δ_3, . . . сони чекли ёки саноқли оралиқлар системаси бўлиб, бу оралиқларнинг

[1] Бундан кейин асосан чегараланган тўпламлар билан иш кўрамиз.

чегара нуқталари E тўпламга кирмасин, аммо E нинг ҳар бир x нуқтаси $\delta_i (i = 1, 2, \ldots)$ оралиқларнинг бирортасида жойлашган бўлсин. μ_i билан δ_i оралиқнинг узунлигини белгилаймиз. Бундай оралиқлар системасини чексиз кўп тузиш мумкин. У ҳолда $\sum\limits_i \mu_i$ йиғинди ҳам чексиз кўп қийматга эга бўлади, аммо $\sum\limits_i \mu_i > 0$, чунки μ_i оралиқнинг узунлиги. Демак, $\sum\limits_i \mu_i$ йиғиндилар системаси қуйидан чегараланган ва шунинг учун у аниқ қуйи чегарага эга.

1-таъриф. *$\sum\limits_i \mu_i$ йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегарасини E тўпламнинг* **ташқи ўлчови** *деймиз ва уни $\mu^*(E)$ билан белгилаймиз.*

17. 1. Изоҳлар: а) $\sum\limits_i \mu_i > 0$ бўлганлиги учун $\mu^*(E) \geqslant 0$ бўлади.

б) $\mu^*(E) \leqslant b - a$ тенгсизлик ўринли; ҳақиқатан ҳам ҳар қандай $\varepsilon (> 0)$ учун $E \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Бундан:

$$\mu^*(E) < b - a + 2\varepsilon$$

ёки ε ихтиёрий бўлганлиги учун

$$\mu^*(E) \leqslant b - a.$$

Ушбу

$$\mu_*(E) = (b - a) - \mu^*(CE) \quad (CE = [a, b] \setminus E)$$

миқдорни E тўпламнинг *ички ўлчови* деймиз. $\mu_*(E) \geqslant 0$, чунки $CE \subset [a, b]$ ва ўз навбатида $\mu^*(CE) \leqslant b - a$.

17. 2. Теорема. ***E тўпламнинг ташқи ўлчови унинг ички ўлчовидан кичик эмас,*** яъни:

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E).$$

Исбот. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига мувофиқ, ҳар қандай кичик мусбат $\eta (> 0)$ сони учун E тўпламни ўз ичига олган шундай $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ оралиқлар системаси мавжудки, ушбу

$$\sum_i \mu_i < \mu^*(E) + \eta \tag{1}$$

(μ_i сони δ_i оралиқнинг узунлиги) тенгсизлик бажарилади.

Шунга ўхшаш CE тўпламни ўз ичига олган шундай $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots$ оралиқлар системаси мавжудки, булар учун ҳам ушбу

$$\sum_i \mu'_i < \mu^*(CE) + \eta \tag{2}$$

(μ'_i билан δ'_i оралиқнинг узунлиги белгиланган) тенгсизлик бажарилади.

$\{\delta_i\}$ ва $\{\delta'_i\}$ оралиқлар системасининг тузилишига кўра:

$$E \subset \bigcup_i \delta_i \quad \text{ва} \quad CE \subset \bigcup_i \delta'_i.$$

Демак,

$$E \cup CE = [a, b] \subset (\bigcup_i \delta_i) \cup (\bigcup_i \delta'_i). \tag{3}$$

(1), (2) ва (3) муносабатларга мувофиқ:

$$b - a \leqslant \sum_i \mu_i + \sum_i \mu'_i \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(CE) + 2\eta.$$

Бундан:

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) < \mu^*(E) + 2\eta.$$

Ихтиёрий кичик η (> 0) учун сўнгги тенгсизлик бажарилганлиги сабабли, ундан

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)$$

муносабат келиб чиқади.*

Энди тўплам ўлчовининг таърифини берамиз.

2-таъриф. (А. Лебег таърифи.) *Агар E тўпламнинг $\mu^*(E)$ ташқи ўлчови унинг $\mu_*(E)$ ички ўлчовига тенг бўлса, у ҳолда E ни ўлчовли тўплам деймиз ва унинг ўлчовини $\mu(E)$ билан белгилаймиз*, яъни:

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Бу таъриф маъносида ўлчовли тўпламни ***(L) ўлчовли тўплам*** дейилади. Юқоридаги мулоҳазалардан $\mu([a, b]) = b - a$ ва $\mu((a, b)) = b - a$ тенгликларнинг ўринли эканлиги бевосита кўринади.

17. 3. Теорема. ***Агар E тўплами ўлчовли бўлса, у ҳолда CE ҳам ўлчовли тўплам бўлади.***

Исбот. E ўлчовли бўлганлиги учун:

$$\mu(E) = b - a - \mu^*(CE).$$

Ички ўлчовнинг таърифига мувофиқ:

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE)$$

ёки

$$\mu^*(CE) = b - a - \mu_*(E) = b - a - \mu(E). \tag{4}$$

CE тўпламнинг қўшимчаси E га тенг бўлганлиги учун

$$\mu_*(CE) = b - a - \mu(E). \tag{5}$$

(4) ва (5) дан:

$$\mu(CE) = \mu_*(CE) = \mu^*(CE) = b - a - \mu(E)$$

тенгликлар, яъни CE тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.*

Мисол. F ёпиқ тўплам, $[a, b]$ сегмент F ни ўз ичига олган энг кичик сегмент ва $\delta_1, \delta_2, \ldots$ лар F тўпламга нисбатан тўлдирувчи сони чекли ёки саноқли оралиқлар системаси бўлсин. Бу оралиқлар системасининг йиғиндисини G билан белгилаб, қуйидаги муносабатни ёзишимиз мумкин[1]:

$$\mu(G) = \sum_i \mu(\delta_i).$$

Ушбу

$$F = [a, b] \setminus G = CG \tag{6}$$

тенгликдан F тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади, чунки G ўлчовли тўплам.

(6) дан фойдаланиб

$$\mu(F) = b - a - \mu(G) = b - a - \sum_i \mu(\delta_i)$$

тенгликни ёзишимиз мумкин.

Демак, ҳар қандай чегараланган ёпиқ тўплам ўлчовли тўпламдир.

17. 4. Теорема (А. Лебег теоремаси) ***E тўпламнинг ўлчовли бўлиши учун уни***

$$E = G \cup e_1 \setminus e_2 \tag{7}$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги зарур ва кифоядир.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги G, e_1 ва e_2 тўпламлар ихтиёрий берилган $\eta (> 0)$ сонига мувофиқ қуйидагича тузилган: G ўзаро кесишмайдиган сони чекли оралиқлар системасининг йиғиндисидан иборат, e_1 ва e_2 ҳар бири ташқи ўлчови η сонидан кичик бўлган тўпламлар. (7) тенглик бажарилганда қуйидаги муносабат ҳам ўринли бўлади:

$$\mu(G) - \eta < \mu(E) < \mu(G) + \eta. \tag{8}$$

Зарурийлигининг исботи. E тўпламнинг ўлчовли эканлигидан фойдаланиб, уни (7) кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатиш керак. E тўплам ўлчовли бўлгани учун:

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Ташқи ўлчов таърифидан фойдаланиб, ўзаро кесишмайдиган шундай $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасини тузишимиз мумкинки, булар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\sum_i \mu(\delta_i) < \mu(E) + \frac{\eta}{2}, \tag{9}$$

$$E \subset \bigcup_i \delta_i. \tag{10}$$

---

[1] G очиқ тўплам бўлгани учун унинг ўлчови, таърифга биноан, тузувчи оралиқларнинг узунликлари йиғиндисига тенг.

Агар $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасининг сони саноқли бўлса, у ҳолда булардан шундай дастлабки n тасини, қолганлари учун қуйидаги тенгсизлик бажариладиган қилиб, ажратиб оламиз:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(\delta_i) < \eta. \tag{11}$$

Бунинг доимо бажарилиши мумкин, чунки (9) тенгсизликка асосан $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\delta_i)$ қатор яқинлашувчи. Агар $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасининг сони чекли бўлса, у ҳолда буларнинг ҳаммасини олиш керак.

Энди $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ оралиқларнинг йиғиндисини G билан белгилаймиз, яъни:

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i.$$

E тўпламнинг G га кирмаган элементларидан иборат бўлган тўпламни e_1 билан белгилаймиз; (10) муносабатга биноан:

$$e_1 \subset \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \delta_i. \tag{12}$$

G тўпламнинг E тўпламга кирмаган элементларидан иборат бўлган тўпламни e_2 билан белгилаймиз.

G, e_1, e_2 тўпламларнинг тузилишига мувофиқ

$$E = G \cup e_1 \setminus e_2 \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади.

G тўплам ўзаро кесишмайдиган n та оралиқларнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун ўлчовли тўплам бўлади ва

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\delta_i).$$

(11) ва (12) муносабатлардан эса

$$\mu^*(e_1) < \eta$$

тенгсизлик келиб чиқади. Агар $\mu^*(e_2) < \eta$ тенгсизликнинг ўринли эканлиги кўрсатилса, теореманинг зарурийлик қисми исбот этилган бўлади. Буни исбот этиш учун, $CE\,(CE = [a, b] \setminus E)$ тўпламни ўз ичига олган, ўзаро кесишмайдиган ва

$$\sum_{k} \mu(\delta'_k) < \mu(CE) + \frac{\eta}{2} \tag{13}$$

тенгсизликни қаноатлантиридиган $\delta'_1, \delta'_2, \ldots$ оралиқлар системасини тузамиз.

CE тўплам 17. 3-теоремага асосан ўлчовли бўлганлиги учун $\delta'_1, \delta'_2, \ldots$ оралиқлар системасини тузишимиз мумкин.

(9) ва (13) тенгсизликлардан

$$\sum_i \mu(\delta_i) + \sum_k \mu(\delta'_k) < \mu(E) + \mu(CE) + \eta = (b-a) + \eta \qquad (14)$$

муносабат келиб чиқади. Иккинчи томондан,

$$E \subset \bigcup_i \delta_i, \quad CE \subset \bigcup_k \delta'_k;$$

демак,

$$E \cup CE \subset [(\bigcup_i \delta_i) \setminus \bigcup_{i,k} (\delta_i \cap \delta'_k)] \cup (\bigcup_k \delta'_k).$$

Бу муносабатдан

$$b-a \leqslant \sum_i \mu(\delta_i) + \sum_k \mu(\delta'_k) - \sum_{i,k} \mu(\delta_i \cap \delta'_k) \qquad (15)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

(14) ва (15) тенгсизликлардан:

$$(b-a) + \sum_{i,k} \mu(\delta_i \cap \delta'_k) \leqslant \sum_i \mu(\delta_i) + \sum_k \mu(\delta'_k) < (b-a) + \eta. \qquad (16)$$

Бундан:

$$\sum_{i,k} \mu(\delta_i \cap \delta'_k) < \eta. \qquad (17)$$

e_2 тўпламнинг таърифига мувофиқ, уни

$$e_2 = G \cap CE$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. Аммо

$$e_2 = G \cap CE \subset \bigcup_{i,k} (\delta_i \cap \delta'_k),$$

чунки

$$G \subset \bigcup_i \delta_i \text{ ва } CE \subset \bigcup_k \delta'_k.$$

Демак,

$$\mu^*(e_2) \leqslant \sum_{i,k} \mu(\delta_i \cap \delta'_k) \qquad (18)$$

ёки (17) га мувофиқ:

$$\mu^*(e_2) < \eta$$

тенгсизлик ўринлидир.

Кифояликнинг исботи. Энди E тўпламни ушбу

$$E = G \cup e_1 \setminus e_2 \qquad (7)$$

(бу ерда G сони чекли ва ўзаро кесишмайдиган оралиқлар системаси, e_1, e_2 лар ташқи ўлчовлари $\eta(>0)$ сонидан кичик бўлган тўпламлар, яъни:

$$\mu^*(e_1) < \eta, \quad \mu^*(e_2) < \eta, \qquad (19)$$

η — ихтиёрий кичик сон) кўринишда ёзиш мумкин деб, унинг ўлчовли эканини исбот этамиз.

Бунинг учун e_1 тўпламни ўз ичига олган, ўзаро кесишмайдиган ва қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган δ'_1, δ'_2, . . . оралиқлар системасини тузамиз:

$$\sum_i \mu(\delta'_i) < \eta. \tag{20}$$

Шунга ўхшаш, e_2 тўпламни ўз ичига олган, ўзаро кесишмайдиган ва қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган δ''_1, δ''_2, . . . оралиқлар системасини тузамиз:

$$\sum_i \mu(\delta''_i) < \eta. \tag{21}$$

(19) тенгсизликларга биноан, $\{\delta'_i\}$ ва $\{\delta''_i\}$ оралиқлар системасини тузишимиз мумкин.

(7) тенгликдан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни ёзамиз:

$$E \subset G \cup e_1 \subset G \cup (\bigcup_i \delta'_i)$$

ёки

$$\mu^*(E) \leqslant \mu(G) + \sum_i \mu(\delta'_i) < \mu(G) + \eta. \tag{22}$$

Бу тенгсизлик (20) га асосан ёзилган. Бундан ташқари,

$$CE \subset CG \cup e_2 \quad (CG = [a,\ b] \setminus G) \tag{23}$$

муносабат ўринли.

Дарҳақиқат, агар x нуқта CE ва CG тўпламларнинг элементи бўлса, у ҳолда (23) муносабат ўз-ўзидан келиб чиқади. Агар $x \in CE$, лекин $x \overline{\in} CG$ бўлса, у ҳолда $x \in G$ ва (7) тенгликка мувофиқ, $x \in e_2$, демак, бу ҳолда ҳам (23) муносабат ўринли.

(23) муносабатдан эса

$$CE \subset CG \cup (\bigcup_i \delta''_i) \tag{24}$$

муносабат бевосита келиб чиқади, чунки

$$e_2 \subset \bigcup_i \delta''_i.$$

(24) ва (21) муносабатлардан

$$\mu^*(CE) \leqslant \mu(CG) + \sum_i \mu(\delta''_i) < \mu(CG) + \eta \tag{25}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликдан ва тўпламнинг ички ўлчови таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) > b - a - \mu(CG) - \eta = \mu(G) - \eta \tag{26}$$

муносабатни ёзишимиз мумкин, чунки

$$G = [a,\ b] \setminus CG.$$

17. 2- теоремага мувофиқ,

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E). \tag{27}$$

(22), (26), (27) муносабатлардан фойдаланиб,

$$\mu(G) - \eta < \mu_*(E) \leqslant \mu^*(E) < \mu(G) + \eta \tag{28}$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин; булардан эса

$$0 \leqslant \mu^*(E) - \mu_*(E) < 2\eta \tag{29}$$

тенгсизлик бевосита келиб чиқади.

$\eta (> 0)$ ихтиёрий кичик сон бўлганлиги учун (29) дан ушбу

$$\mu_*(E) = \mu^*(E) = \mu(E)$$

тенглик ёки, таърифга мувофиқ, E тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади ва (28) га асосан:

$$\mu(G) - \eta < \mu(E) < \mu(G) + \eta. *$$

18- §. Ўлчовли тўпламлар ҳақида теоремалар

18. 1. Теорема. ***Агар $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ўлчовли тўпламлар бўлса, уларнинг йиғиндиси ҳам ўлчовли тўплам бўлади; йиғиндининг ҳадлари ўзаро кесишмайдиган тўпламлардан иборат бўлса, йиғиндининг ўлчови ҳадлар ўлчовларининг йиғиндисига тенг бўлади.***

Исбот. Теорема ҳадларининг сони икки тўпламдан иборат бўлган ҳол учун исбот этилса кифоя, чунки ҳадларининг сони n та тўпламдан иборат бўлган ҳолни математик индукция ёрдами билан ҳадларининг сони икки тўпламдан иборат бўлган ҳолга келтиришимиз мумкин. E_1 ва E_2 ўлчовли тўпламлар бўлсин.

17. 4- теоремага асосан, E_1 ва E_2 тўпламларни

$$E_1 = G_1 \cup e_1' \setminus e_1'', \quad E_2 = G_2 \cup e_2' \setminus e_2'' \tag{1}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. Бу кўринишда G_1 ва G_2 тўпламларнинг ҳар бири сони чекли ва ўзаро кесишмайдиган оралиқлар системасининг йиғиндисидан иборат; e_1', e_2', e_1'' ва e_2'' ташқи ўлчовлари $\eta (> 0)$ дан кичик бўлган тўпламлар; $\eta (> 0)$ эса аввалдан берилган ихтиёрий кичик сон. Демак,

$$\mu^*(e_1') < \eta, \ \mu^*(e_2') < \eta, \ \mu^*(e_1'') < \eta \text{ ва } \mu^*(e_2'') < \eta. \tag{2}$$

(1) тенгликлардан

$$E_1 \cup E_2 = (G_1 \cup G_2) \cup (e_1' \cup e_2') \setminus e \tag{3}$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $e \subset e_1'' \cup e_2''$ ($\subset$ белги ўрнига тенглик белгисини доимо ишлатиб бўлмайди).

(3) тенгликда $G = G_1 \cup G_2$ тўплами яна сони чекли оралиқлар системасидан иборат бўлиб, уларни тузувчи оралиқларининг ҳаммасини ўзаро кесишмайдиган дейишимиз мумкин.

(2) тенгсизликлардан қуйидаги тенгсизликлар осонгина келиб чиқади:

$$\mu^*(e_1' \cup e_2') < 2\eta, \quad \mu^*(e_1'' \cup e_2'') < 2\eta,$$
$$\mu^*(e) < 2\eta.$$

Натижада, 17. 4-теоремага асосланиб, (3) тенгликдаги $E_1 \cup E_2$ тўпламни ўлчовли тўплам дейишимиз мумкин, бундан ташқари:

$$\mu(G_1 \cup G_2) - 2\eta < \mu(E_1 \cup E_2) < \mu(G_1 \cup G_2) + 2\eta. \tag{4}$$

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот этамиз, E_1 ва E_2 тўпламларнинг умумий қисми бўлмаса, у ҳолда:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Дарҳақиқат, (4) тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \lim_{\eta \to 0} \mu(G_1 \cup G_2) \tag{5}$$

муносабатни ёзишимиз мумкин.

Иккинчи томондан:

$$\mu(G_1 \cup G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2) - \mu(G_1 \cap G_2). \tag{6}$$

(5) ва (6) муносабатлардан:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \lim_{\eta \to 0} \mu(G_1) + \lim_{\eta \to 0} \mu(G_2) - \lim_{\eta \to 0} \mu(G_1 \cap G_2) \tag{7}$$

келиб чиқади.

(1) тенгликлардан 17. 4-теоремага асосан

$$\mu(G_1) - \eta < \mu(E_1) < \mu(G_1) + \eta$$

ва

$$\mu(G_2) - \eta < \mu(E_2) < \mu(G_2) + \eta$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин.

Булардан:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\eta \to 0} \mu(G_1) &= \mu(E_1), \\ \lim_{\eta \to 0} \mu(G_2) &= \mu(E_2) \end{aligned}\right| \tag{8}$$

муносабатлар келиб чиқади.

Агар $\lim_{\eta \to 0} \mu(G_1 \cap G_2) = 0$ тенглик исбот этилса, теореманинг иккинчи қисми исбот этилган бўлади.

(1) тенгликлардан $G_1 \subset E_1 \cup e_1'$ ва $G_2 \subset E_2 \cup e_2''$ муносабатларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Бу муносабатлардан эса:

$$G_1 \cap G_2 \subset (E_1 \cup e_1'') \cap (E_2 \cup e_2'') = (E_1 \cap E_2) \cup$$
$$\cup [e_1'' \cap (E_2 \cup e_2'')] \cup [E_1 \cap e_2''] \subset e_1'' \cup e_2'',$$

чунки E_1 ва E_2 тўпламлар бирорта ҳам умумий элементга эга эмас.

Демак, $\mu(G_1 \cap G_2) < 2\eta$, чунки $\mu^*(e_1'' \cup e_2'') < 2\eta$. Бу тенгсизликдан эса

$$\lim_{\eta \to 0} \mu(G_1 \cap G_2) = 0 \tag{9}$$

муносабат бевосита кўринади.

(7), (8) ва (9) муносабатлардан исбот этилиши керак бўлган тенглик келиб чиқади:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).*$$

18. 2. Теорема. ***Ўлчовли E_1 ва E_2 тўпламларнинг айирмаси ҳам ўлчовли тўпламдир; агар $E_2 \subset E_1$ бўлса, у ҳолда***

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

бўлади.

Исбот. Ушбу

$$C(E_1 \setminus E_2) = CE_1 \cup E_2$$

тенглик ўринли[1].

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун чап томонидаги тўплам ҳам 18. 1-теоремага асосан ўлчовли бўлади; $E_1 \setminus E_2$ тўплам $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламга нисбатан қўшимча тўплам бўлганлиги учун ўлчовли бўлади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот этамиз. Бунинг учун

$$E_1 = (E_1 \setminus E_2) \cup E_2$$

тенгликдан ва 18. 1-теоремадан фойдаланамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $E_1 \setminus E_2$ ва E_2 тўпламлар ўлчовли, ўзаро кесишмайдиган тўпламлардир. Демак, 18. 1-теоремага мувофиқ

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \setminus E_2) + \mu(E_2)$$

---

[1] Бу тенгликни одатдаги усул билан исбот қилиш мумкин, яъни чап томондаги тўпламнинг ҳар бир элементи ўнг томондаги тўпламга киришлигини ва аксинча, ўнг тамондаги тўпламнинг ҳар бир элементи чап томондаги тўпламга киришлигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, $x \in C(E_1 \setminus E_2)$ бўлсин. Бундан, $x \overline{\in} E_1 \setminus E_2$ ёки $x \in E_1$ ва $x \in E_2$, демак, $x \in CE_1 \cup E_2$, ёки $x \overline{\in} E_1$, демак, $x \in CE_1$, бундан $x \in CE_1 \cup E_2$. Натижада $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламнинг ҳар бир элементи $CE_1 \cup E_2$ тўпламга ҳам кирар экан

Энди $x \in CE_1 \cup E_2$ бўлсин; бундан ёки $x \in CE_1$, ёки $x \in E_2$ келиб чиқади. Агар $x \in CE_1$ бўлса, у ҳолда $x \overline{\in} E_1$, демак, $x \overline{\in} E_1 \setminus E_2$, яъни: $x \in C(E_1 \setminus E_2)$. Агар $x \in E_2$ бўлса, у ҳолда $x \overline{\in} E_1 \setminus E_2$, демак, $x \in C(E_1 \setminus E_2)$, яъни $CE_1 \cup E_2$ тўпламнинг ҳар бир элементи $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламга ҳам кирар экан.

ёки

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

тенгликларни ёзишимиз мумкин.

18. 3. Теорема. ***Агар*** $[a, b]^*$ ***сегментда жойлашган ўлчовли*** $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$ ***тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси бўлмиш*** $E\left(=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ ***тўплам ҳам ўлчовли бўлади. Бундан ташқари агар*** $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ***бўлса, у ҳолда:***

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Бу тенглик тўпламлар ўлчовининг тўла аддитивлик хоссасини ифодалайди.

Исбот. Теоремани аввал $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ҳол учун исбот этамиз.

Ушбу

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ ва } B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$$

тўпламларни тузамиз.

$A_n \subset E\,(= A_n + B_n)$ муносабатдан:

$$\mu_*(E) \geqslant \mu_*(A_n) = \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \tag{10}$$

келиб чиқади, чунки A_n тўплам 18. 1-теоремага асосан ўлчовли ва $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. (10) тенгсизлик ҳар қандай n учун ўринли ва $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ қатор яқинлашувчи. Шунинг учун берилган ихтиёрий $\eta (> 0)$ сон учун шундай n сонини топиш мумкинки, қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i) < \eta. \tag{11}$$

Энди кесишмайдиган шундай $\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ оралиқлар системасини тузамизки, улар учун ушбу

$$A_n \subset \bigcup_i \delta_i^{(0)}, \quad \sum_i \mu(\delta_i^{(0)}) < \mu(A_n) + \eta. \tag{12}$$

$$E_{n+k} \subset \bigcup_i \delta_i^{(k)}, \quad \sum_i \mu(\delta_i^{(k)}) < \mu(E_{n+k}) + \frac{\eta}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

муносабатлар бажарилсин. A_n ва E_{n+k} тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун юқоридаги кесишмайдиган оралиқлар системаси мавжуд.

(12) ва (13) муносабатлардан ушбу

$$E \subset \bigcup_k \bigcup_i \delta_i^{(k)}$$

муносабат бевосита келиб чиқади.

Бу муносабатдан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликларни ёзишимиз мумкин:

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k,\, i} \mu(\delta_i^{(k)}) < \mu(A_n) + \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n+k}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} = \mu(A_n) + \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n+k}) + \eta.$$

(11) тенгсизликдан фойдаланиб, ушбу

$$\mu^*(E) < \mu(A_n) + 3\eta \tag{14}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Маълумки,

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E).$$

Бундан, (10) ва (14) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликларни ёзамиз:

$$\mu(A_n) \leqslant \mu_*(E) \leqslant \mu^*(E) \leqslant \mu(A_n) + 3\eta \tag{15}$$

ёки

$$0 \leqslant \mu^*(E) - \mu_*(E) < 3\eta.$$

$\eta (> 0)$ ихтиёрий сон бўлганлиги учун сўнгги муносабатдан

$$\mu_*(E) = \mu^*(E) = \mu(E)$$

тенглик келиб чиқади.

(15) муносабатдан:

$$|\mu(E) - \mu(A_n)| = |\mu(E) - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)| \leqslant 3\eta.$$

Демак,

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

ёки

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Шу билан $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ҳол учун теорема исбот этилди.

Агар $E_1, E_2, \ldots$ тўпламлар ўлчовли бўлиб, умумий нуқталарга эга бўлса, у ҳолда $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ тўпламни

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E)) \cup (E_3 \setminus E_2 \setminus E_1) \cup \ldots$$

кўринишда ёзиб, бу ҳолни исбот этилган ҳолга келтиришимиз мумкин, чунки охирги тенгликнинг ўнг томонидаги

$$E_1, \; E_2 \setminus E_1, \; E_3 \setminus E_1 \setminus E_2, \; \ldots$$

тўпламлар ўзаро кесишмайди.$_*$

18. 4. **Теорема.** ***Ҳар қандай саноқли Е тўплам ўлчовли ва унинг ўлчови нолга тенг***[1]**.**

Исбот E саноқли тўплам бўлганлиги учун унинг элементларини

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots$$

кетма-кетлик шаклида ёзишимиз мумкин. Биргина x_k элементнинг ўзидан иборат бўлган тўпламни E_k билан белгилаймиз.

У ҳолда:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

E_k тўплам, ўлчов таърифига мувофиқ, ўлчовли бўлади ва унинг ўлчови нолга тенг (чунки битта нуқтадан иборат тўпламни узунлиги истаганча кичик бўлган оралиққа жойлаш мумкин). Демак, 18. 3-теоремага мувофиқ E тўплам ҳам ўлчовли бўлади ва унинг ўлчови нолга тенг.$_*$

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, 18. 4-теореманинг тескариси доимо тўғри бўлмайди, яъни ўлчови нолга тенг бўлса, тўпламнинг саноқли бўлиши шарт эмас. Бунинг тўғрилигини кўрсатиш учун, мисол сифатида Канторнинг P_0 тўпламини оламиз. Маълумки, Канторнинг P_0 тўплами G_0 тўпламнинг тўлдирувчиси ва

$$\mu(G_0) = \mu\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} + \mu\left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} +$$
$$+ \mu\left\{\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)\right\} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right\} = 1;$$

демак, $\mu(P_0) = 0$, чунки $P = GG_1$. Лекин бизга маълумки, P_0 саноқсиз тўплам. Бу мисолдан саноқсиз тўпламнинг ўлчови ҳам нолга тенг бўлиши мумкин эканлиги кўринади.$_*$

18. 5. **Теорема.** ***[a, b] сегментда жойлашган, сони чекли ёки саноқли ўлчовли тўпламларнинг кўпайтмаси ҳам ўлчовли тўпламдир.***

---

[1] Бу теорема саноқли тўплам чегараланмаган бўлса ҳам ўринли.

Исбот. E_1, E_2,... ўлчовли тўпламлар бўлиб, уларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда жойлашган бўлсин.

$E = \bigcap\limits_i E_i$ тўпламни тузамиз.

Маълумки,

$$CE = \bigcup_i CE_i \quad (GE = [a, b] \setminus E)$$

ва E_i тўплам ўлчовли бўлганлиги учун CE_i тўплам ҳам ўлчовли тўпламдир. 18. 3-теоремага мувофиқ, CE тўплам ҳам ўлчовлидир. Демак, E ҳам ўлчовли бўлади, чунки у CE тўпламга нисбатан қўшимча тўплам.$_*$

18. 6. Теорема. ***Агар $[a, b]$ сегментда жойлашган ўлчовли $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда***

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аввало $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ ни E билан белгилаймиз ва қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots \cup (E_n \setminus E_{n-1}) \cup \ldots$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\{E_n \setminus E_{n-1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots; E_0 = \varnothing)$ тўпламлар ўлчовли ва ўзаро кесишмайдиган бўлганлиги учун 18. 3-теоремага мувофиқ:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$$

ёки

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}).$$

Аммо 18. 2-теоремага мувофиқ:

$$\mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(E_i) - \mu(E_{i-1});$$

бундан

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(E_n).$$

Демак,

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)._*$$

18. 7. Теорема. ***Агар $[a, b]$ сегментда жойлашган ўлчовли $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда***

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Исбот. Берилган тўпламларнинг кўпайтмасини E билан белгилаймиз, яъни:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Бундан:

$$CE = \bigcup_{n=1}^{\infty} CE_n;$$

$E_n \supset E_{n+1}$ дан $CE_n \subset CE_{n+1}$ муносабат келиб чиқади ва CE_n тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлади, чунки E_n ўлчовли тўплам.

18. 6-теоремага мувофиқ:

$$\mu(CE) = \lim_{n \to \infty} \mu(CE_n).$$

Бундан

$$b - a - \mu(CE) = b - a - \lim_{n \to \infty} \mu(CE_n)$$

ёки

$$b - a - \mu(CE) = \lim_{n \to \infty} [b - a - \mu(CE_n)].$$

Аммо

$$b - a - \mu(CE) = \mu(E)$$

ва

$$b - a - \mu(CE_n) = \mu(E_n).$$

Демак,

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n). \ast$$

18. 8. Теорема (Н. Лузин теоремаси). ***Агар E тўплам ўлчовли бўлиб, унинг ўлчови мусбат бўлса, у ҳолда истаганча кичик $\eta (> 0)$ учун шундай мукаммал $P (\subset E)$ тўплам топиш мумкинки, бу тўплам учун ушбу***

$$\mu(P) > \mu(E) - \eta$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. Ўлчовли E тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент $[a, b]$ бўлсин. CE тўплам ҳам ўлчовли бўлганлиги сабабли ҳар қандай $\eta (> 0)$ учун шундай сони чекли ёки саноқли $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасини топиш мумкинки, булар учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\sum_k \mu(\delta_k) < \mu(CE) + \eta \tag{16}$$

$[a, b]$ сегментдан $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламни F билан белгилаймиз.

F ёпиқ тўплам бўлиб, $F \subset E$ ва

$$\mu(F) = b - a - \sum_k \mu(\delta_k)$$

бўлади. Бундан (16) га мувофиқ:

$$\mu(F) > b - a - \mu(CE) - \eta = \mu(E) - \eta. \qquad (17)$$

Кантор — Бендиксон теоремасидан фойдаланиб, F тўпламни

$$F = P \cup D$$

кўринишда ёзишимиз мумкин; бу ерда P мукаммал тўплам ва у F нинг ҳамма қуюқлашган нуқталаридан иборат, D тўплам энг кўпида саноқли ва $P \cap D = \varnothing$.

18. 4-теоремага асосан, $\mu(D) = 0$; демак,

$$\mu(F) = \mu(P \cup D) = \mu(P).$$

(17) га мувофиқ

$$\mu(P) > \mu(E) - \eta \text{ ва } P \subset F \subset E. *$$

Бу теореманинг моҳияти шундаки, у ҳар қандай ўлчовли тўпламни ўлчови унинг ўлчовига истаганча яқин ва ўзининг қисми бўлган мукаммал тўплам билан алмаштиришга имконият беради.

19-§. Ўлчовли тўпламлар синфи

1-таъриф. *Агар E тўпламни сони саноқли бўлган, очиқ G_1, $G_2, \ldots, G_n, \ldots$ тўпламларнинг кўпайтмаси шаклида ёзиш мумкин бўлса, яъни*

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда уни G_δ типидаги тўплам дейилади.

2-таъриф. *Агар E тўпламни сони саноқли бўлган, ёпиқ F_1, $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ тўпламларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин бўлса, яъни*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда E тўплам F_σ типидаги тўплам дейилади.

3-таъриф. *Агар E тўплам, очиқ ва ёпиқ тўпламлар устида қўшиш ва кўпайтириш амалларини чекли ёки саноқли марта бажариш натижасида ҳосил этилган бўлса, ундай тўпламни Борель ёки (B) тўплам дейдилар. Чегараланган (B) тўпламни (B) ўлчовли тўплам дейдилар.*

Масалан, F_σ ва G_δ тўпламлар Борель тўпламлари бўлади.

Агар F_σ (ёки G_δ) типидаги сони саноқли тўпламларнинг йиғиндиси (ёки кўпайтмаси) олинса, у яна F_σ (ёки G_δ) типидаги тўплам бўлади, яъни янги типдаги тўпламлар ҳосил бўлмайди. Аммо F_σ типидаги сони саноқли тўпламларнинг кўпайтмаси олинса, у ҳолда умуман янги $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш, G_δ типидаги сони саноқли тўпламларнинг йиғиндиси умуман янги $G_{\delta\sigma}$ типидаги тўпламни беради.

$F_{\sigma\delta}$ типидаги тўпламларни йиғиш натижасида $F_{\sigma\delta\sigma}$ типидаги ва $G_{\delta\sigma}$ типидаги тўпламларни кўпайтириш натижасида $G_{\delta\sigma\delta}$ типидаги тўпламлар ҳосил бўлади ва ҳоказо; бунинг натижасида ҳосил бўлган ҳамма тўпламлар (B) тўпламлар синфини ташкил этади. (B) тўпламлар синфи, уларнинг тузилишига кўра, математикада ғоят муҳим аҳамиятга эга.

Теорема. ***Ҳар қандай (B) ўлчовли тўплам (L) ўлчовли бўлади.***

Исбот. Бу теорема 18. 3 ва 18. 5-теоремаларнинг натижасидир.

Лекин бу теореманинг тескариси доимо тўғри эмас, яъни шундай (L) ўлчовли тўпламлар мавжудки, улар (B) ўлчовли бўлмайди. Биринчи марта бундай мисолни москвалик математик М. А. Суслин тузган. У киритган тўпламларга (A) тўпламлар дейилади. Суслин кашф этган (A) тўпламлар синфи (B) тўпламлар синфидан кенгроқ, аммо (A) тўпламлар синфига кирган ҳамма тўпламлар ҳам (L) ўлчовлидир.

Энди қуйидаги савол туғилади.

Чегараланган ва (L) маъносида ўлчовсиз тўплам мавжудми? Бу саволга ижобий жавоб бериш мумкин, лекин бунга тегишли мисолни биз 60-параграфда келтирамиз.

20-§. Витали теоремалари

Таъриф. *E нуқтали тўплам ва S сегментлар системаси бўлсин. Агар ҳар қандай $x (\in E)$ ва ихтиёрий $\varepsilon (> 0)$ учун шундай Δ сегмент мавжуд бўлсаки, ушбу $\Delta \in S$, $x \in \Delta$, $\mu(\Delta) < \varepsilon$ муносабатлар бажарилса, E тўпламни Витали маъносида S сегментлар системаси қоплайди деймиз.* Бу таърифда сегментлар биргина нуқтадан иборат эмас деб фараз қилинади.

20. 1. **Теорема** (Витали теормаси). ***Агар чегараланган E тўплам Витали маъносида S сегментлар системаси билан қопланган бўлса, у ҳолда бу сегментлар систе-***

масидан шундай сони чекли ёки саноқли $\{\Delta_k\}$ сегментларни ажратиб олиш мумкинки, улар учун

$$\Delta_i \cap \Delta_k = \varnothing \quad (i \neq k), \quad \mu^*(E \setminus \bigcup_k \Delta_k) = 0$$

тенгликлар бажарилади.

Исбот (С. Банах исботи). E тўпламни ўз ичига олган ва чегараланган бирор δ оралиқни оламиз; δ оралиққа бутунлай кирмаган сегментларни S системадан чиқариб ташлаймиз. Бунинг натижасида қолган сегментлардан иборат бўлган системани S_0 билан белгилаймиз; S_0 система ҳам E тўпламни қоплайди. Энди S_0 системадан бирор Δ_1 сегментни оламиз; агар $E \subset \Delta_1$ бўлса, у ҳолда теорема исбот этилган бўлади.

Акс ҳолда S_0 системадан ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_n \tag{1}$$

сегментларни оламиз. Агар $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$ бўлса, у ҳолда теорема яна исбот қилинган бўлади; акс ҳолда, яъни $E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k \neq \varnothing$ бўлса, ушбу

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k, \quad G_n = \delta \setminus F_n$$

тўпламларни тузамиз ва S_0 системадан очиқ G_n тўпламга кирган сегментларни оламиз. Бу олинган сегментлар узунликларининг юқори чегарасини λ_n билан белгилаймиз.

Равшанки

$$0 < \lambda_n < \mu(\delta).$$

G_n тўпламга кирган сегментлардан узунлиги $\frac{1}{2}\lambda_n$ дан катта бўлган сегментни олиб, уни Δ_{n+1} билан белгилаймиз, яъни

$$\mu(\Delta_{n+1}) > \frac{1}{2}\lambda_n. \tag{1}$$

G_n тўпламнинг тузилишига биноан Δ_{n+1} сегмент (1) кетма-кетликка кирган бирорта ҳам сегмент билан кесишмайди. Натижада ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_n, \ \Delta_{n+1}$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Агар яна $E \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \Delta_k$ бўлса, у ҳолда теорема исбот этилган бўлади; акс ҳолда юқоридаги процессни чексиз давом эттирамиз.

Натижада ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_n, \ \Delta_{n+1}, \ \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Энди бу сегментлар кетма-кетлиги учун

$$\mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k) = 0 \qquad (2)$$

тенгликнинг бажарилиши кўрсатилса, теорема исбот қилинган бўлади.

Узунлиги Δ_k сегментнинг узунлигидан беш марта катта ва ўрта нуқтаси[1] Δ_k нинг ўрта нуқтаси бўлган сегментни Δ_k' билан белгилаймиз; демак,

$$\mu(\Delta_k') = 5\mu(\Delta_k).$$

$\Delta_k (k > n)$ сегментларнинг ҳаммаси σ оралиқда жойлашганлиги ва ўзаро кесишмаганлиги учун

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k') < +\infty$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k')$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Энди вақтинча ҳар қандай натурал n сони учун

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k' \qquad (3)$$

муносабат бажарилган дейлик. У ҳолда бу муносабатдан ҳамда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k')$ қаторнинг яқинлашувчилигидан (2) тенгликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, теоремани исботлаш учун (3) муносабатни исботлаш қолди. Уни исботлаймиз.

Дарҳақиқат, $x \in E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ бўлсин, у ҳолда ҳар қандай n учун $x \in G_n$ ва S_0 системага кирган шундай Δ сегмент мавжудки, $x \in \Delta \subset G_n$.

Лекин ҳар қандай n учун

$$\Delta \subset G_n \qquad (4)$$

муносабат бажарилмайди, чунки

$$\mu(\Delta) \leqslant \lambda_n < 2\mu(\Delta_{n+1})$$

тенгсизликлар, $\mu(\Delta_{n+1}) \to 0$ учун, бирор n дан бошлаб бажарилмайди.

---

[1] $[a, b]$ сегментнинг ўрта нуқтаси деб $c = \frac{a+b}{2}$ нуқтани айтамиз.

(4) муносабат бирор n дан бошлаб бажарилмаганлиги сабабли худди шу n лар учун

$$\Delta \cap F_n \neq \varnothing$$

муносабат ўринли. Бу муносабатни қаноатлантирадиган энг кичик сонни n_0 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Delta \cap F_n = \varnothing, \quad n < n_0$$
$$\Delta \cap F_{n_0} \neq \varnothing.$$

Булардан ва $F_k \subset F_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots$) дан

$$\Delta \cap \Delta_{n_0} \neq \varnothing \text{ ва } \Delta \subset G_{n_0-1}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Сўнгги муносабатдан эса:

$$\mu(\Delta) \leqslant \lambda_{n_0-1} < 2\mu(\Delta_{n_0}).$$

Бу ва $\Delta \cap \Delta_{n_0} \neq \varnothing$ дан $\Delta \subset \Delta'_{n_0}$ ва, демак, $\Delta \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \Delta'_k$ келиб чиқади. Натижада $x \in \Delta \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \Delta'_k$, яъни (3) муносабат исбот этилди.*

20. 2. **Теорема.** ***20. 1-теореманинг шартлари бажарилганда, ҳар қандай*** $\varepsilon (> 0)$ ***учун шундай сони чекли ва ўзаро кесишмайдиган*** $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ***сегментлар системаси мавжудки, улар учун***

$$\mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k) < \varepsilon.$$

Исбот. δ, S, S_0 лар 20. 1-теоремадаги маънога эга бўлсин.

Ўша теоремага мувофиқ ўзаро кесишмайдиган шундай $\{\Delta_k\}$ ($\Delta_k \subset S_0$, $k = 1, 2, \ldots$) сегментлар мавжудки,

$$\mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k) = 0. \qquad (2)$$

Агар $\{\Delta_k\}$ система сони чекли сегментлардан иборат бўлса, теорема исбот этилган бўлади.

Агар $\{\Delta_k\}$ система сони саноқли сегментлардан иборат бўлса, у ҳолда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) \leqslant \mu(\delta);$$

шунинг учун қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган шундай n сонини кўрсатиш мумкин:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\Delta_k) < \varepsilon. \qquad (5)$$

Иккинчи томондан:

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k\subset(E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k)\cup\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k;$$

(2), (5) ва сўнгги муносабатдан $\mu^*(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k)<\varepsilon$ келиб чиқади. Бу эса исбот этилиши зарур бўлган тенгсизликдир.$_*$

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ўлчовли E_1, E_2, ... тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. E_* билан юқоридаги тўпламлар кетма-кетлигининг чексиз кетма-кетлик қисмига тегишли элементларидан иборат тўпламни белгилаймиз. E_* тўпламнинг ўлчовлилиги исбот этилсин.

2. Ҳар қандай мукаммал тўплам ўлчови нолга тенг бўлган мукаммал қисмга эгалиги кўрсатилсин.

3. Ҳар қандай чегараланган E тўплам учун мос равишда F_σ ва G_δ типидаги шундай A ва B тўпламларни тузиш мумкинки, улар қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради:

$$\mu(A)=\mu_*(E),\quad \mu(B)=\mu^*(E).$$

Шу жумла исбот этилсин.

4. Чегараланган E тўплам ўлчовли бўлиши учун ҳар қандай чегараланган A тўплам учун қуйидаги тенгликнинг бажарилиши зарур ва кифоя:

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap CE).$$

Бу теорема (Каратеодори теоремаси) исбот этилсин.

5. $[a, b]$ сегментдан олинган ҳар қандай δ оралиқ учун шундай ўлчовли E тўплам тузилсинки, унинг учун қуйидаги муносабатлар бажарилсин:

$$\mu(\delta\cap E)>0,\quad \mu(\delta\cap CE)>0.$$

6. E чегараланган тўплам бўлиб, ушбу

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\quad E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ \dots$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда

$$\mu^*(E_n)\to\mu^*(E)$$

ўринли. Бу муносабат исбот этилсин.

7. n ўлчовли фазода ички ва ташқи ўлчовлар тушунчаси киритилсин. Шу бобдаги ўлчов тушунчасига оид қайси теоремалар бу ҳол учун ўринли?

IV БОБ

УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

21- §. Функция тушунчаси ва унинг узлуксизлиги

Биринчи бобда киритилган функция тушунчасини эслатиб ўтамиз.

1-таъриф. *Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор қоидага мувофиқ $У$ тўпламдан биргина y элемент мос келтирилса ва бунинг натижасида $У$ тўпламнинг ҳар бир элементи учун X тўпламида камида битта элемент мос келса, X тўпламда функция берилган дейилади* ва бу муносабат

$$y = f(x)$$

кўринишда ёзилади.

Киритилган таърифда X ва Y тўпламлар элементларининг табиати ихтиёрий бўлиши мумкин. Таърифнинг асосий мазмуни бу икки тўпламнинг элементлари орасидаги муносабатни аниқлашдан иборатдир. Яна шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, таърифга мувофиқ X тўпламнинг турли элементлари учун Y тўпламдан биргина элемент мос келиши ҳам мумкин.

Бу таъриф XIX асрда яшаган немис математиклари Дирихле ва Риман томонидан берилган бўлиб, функциянинг ҳозирги замон таърифи ҳисобланади.

Агар X ва Y тўпламларнинг элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, у ҳолда:

$$y = f(x) \quad (x \in X, \ y \in Y)$$

муносабат математик анализнинг умумий курсида берилган функция тушунчасининг худди ўзи бўлади. Бу ҳолда f ни ҳақиқий ўзгарувчи x нинг функцияси дейилади. Баён қилинаётган бобда мана шундай функциялар билангина шуғулланамиз.

Агар X тўпламнинг элементлари n ўлчовли Эвклид фазосининг нуқталаридан иборат бўлса, яъни $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва Y тўпламнинг элементлари ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$$

n ўзгарувчининг функцияси бўлади.

2-таъриф. (Коши таърифи.) *Бирор E тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун x_0 нуқтанинг шундай (x', x'') атрофи мавжуд бўлиб, $(x', x'') \cap E$ тўпламнинг ҳар бир x элементи учун*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция нуқтали E тўпламнинг x_0 нуқтасида узлуксиз (E тўпламга нисбатан) дейи-

лади. Агар E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда ***узлуксиз*** *дейилади.*

Бир неча ўзгарувчининг функцияси учун ҳам узлуксизлик тушунчаси шунга ўхшаш берилади. n ўлчовли фазонинг бирор E қисми берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун x_i^0 нинг $(i = \overline{1, n})$ шундай $(x_i', x_i'')(i = \overline{1, n})$ атрофи мавжуд бўлсаки, E тўпламнинг координаталари тегишли атрофга кирган ҳар бир $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_i' < x_i < x_i''; i = \overline{1, n})$ нуқтаси учун

$$|f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$ нуқтада **узлуксиз** дейилади.

3- **таъриф.** *Агар x_0 нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлмаса, у ҳолда бу нуқта $f(x)$ нинг узилиш нуқтаси дейилади.*

Бу ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун қандай $\delta > 0$ ни олмайлик,

$$|x - x_0| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар ичида шундай x нуқта мавжудки, унинг учун

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

$f(x)$ функциянинг ихтиёрий E тўпламдаги аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари, тебраниш тушунчалари[1] математик анализнинг умумий курсида E тўплам оралиқдан иборат бўлган ҳол учун қандай берилган бўлса, умумий ҳолда худди шу каби бўлади.

Бу тушунчалар ёрдами билан x_0 нуқтада $f(x)$ функциянинг узлуксизлигини яна қуйидагича бериш мумкин. x_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин (E тўплам ёпиқ ёки ёпиқ бўмаслиги ҳам мумкин). Агар $f(x)$ нинг x_0 нуқтадаги тебраниши нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада E тўпламга нисбатан **узлуксиз** дейилади (**Бэр** таърифи).

Бу таърифдан бевосита кўринадики, агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нуқталар кетма-кетлиги E тўпламдан олинган бўлиб, x_0 нуқтага яқинлашса ва бу нуқта $f(x)$ учун узлуксиз нуқта бўлса, у ҳолда ушбу

$$f(x_n) \to f(x_0) \qquad (n \to \infty)$$

муносабат ўринли бўлади. Сўнгги натижани функциянинг нуқтада узлуксизлиги таърифи сифатида қабул қилиш ҳам мумкин эди (**Гейне** таърифи).

Бу турли таърифларнинг барчаси ўзаро эквивалентдир. Бу эквивалентлик математик анализ курсида тўла баён қилингани учун биз бу ерда бунинг устида тўхтаб ўтирмаймиз.

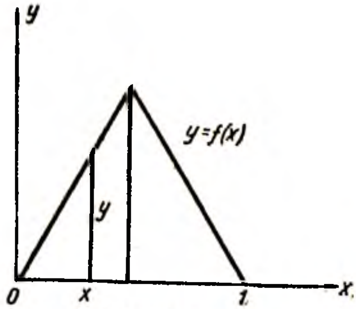
---

[1] Бу тушунчалар ҳақида 55- параграфга қаранг.

Бу таърифлардан узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг (бўлувчи функция нолга тенг бўлмаган ҳолда) узлуксизлиги умумий анализ курсида қандай кўрсатилган бўлса, шу каби кўрсатилади.

Энди узлуксиз функцияларга мисоллар келтирамиз.

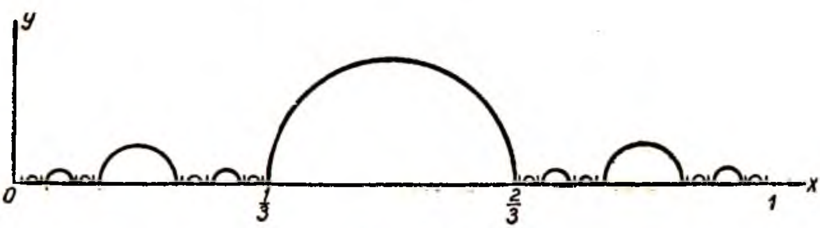
1- мисол. $[0, 1]$ сегментни мунтазам учбурчакнинг асоси сифатида олиб, $y=f(x)$ функция сифатида шундай функцияни оламизки, унинг графиги 7- шаклдаги учбурчакнинг икки ён томонидан иборат бўлсин. Бу функциянинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:



7- шакл.

$$f(x)=\begin{cases} \text{агар } x\in\left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ бўлса, } \sqrt{3}\cdot x, \\ \text{агар } x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ бўлса, } \sqrt{3}(1-x). \end{cases}$$

2- мисол. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда қуйидагича аниқланган: агар $x\in P_0$ бўлса, $f(x)=0$ (бунда P_0— Канторнинг мукаммал тўплами). P_0 га нисбатан тўлдирувчи оралиқларда функциянинг геометрик тасвири диаметри тегишли оралиққа тенг бўлган юқори ярим текисликдаги ярим айланадан иборатдир (8- шакл).



8- шакл.

Бу функциянинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$f(x)=\begin{cases} \text{агар } x\in P_0 \text{ бўлса, } \quad 0 \\ \text{агар } a_n\leqslant x\leqslant b_n \text{ бўлса, } \quad \sqrt{\left(\frac{b_n-a_n}{2}\right)^2-\left(x-a_n-\frac{b_n-a_n}{2}\right)^2}, \end{cases}$$

бунда (a_n, b_n)— Канторнинг P_0 тўпламига нисбатан ихтиёрий тўлдирувчи оралиқ. Бу функция $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлади. Агар $x_0\in(a_n, b_n)$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтада $f(x)$ нинг узлуксизлиги бевосита унинг аналитик ифодасидан кўринади.

Агар $x_0 \in P_0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг истаганча кичик $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ атрофини шундай қилиб оламизки, бу атроф билан кесишган тўлдирувчи (a_n, b_n) оралиқларнинг узунлиги ε дан кичик бўлсин (ε — ихтиёрий мусбат сон).

Демак, $f(x)$ нинг тузилишига мувофиқ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ атрофнинг ҳар бир нуқтасида

$$0 \leqslant f(x) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади; лекин $f(x_0) = 0$, чунки $x_0 \in P_0$, шунинг учун

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқнинг ҳамма нуқталари учун бажарилади. $\varepsilon (> 0)$ ихтиёрий кичик сон бўлганлиги учун $f(x)$ нинг $x_0 (\in P_0)$ нуқтада узлуксизлиги ва шу билан бирга $f(x)$ нинг $[0, 1]$ сегментда ҳам узлуксизлиги келиб чиқади.

22- §. Узлуксиз функцияларнинг асосий хоссалари

1- таъриф. *Агар x нинг E даги ҳамма қийматлари учун шундай ўзгармас K сони мавжуд бўлсаки, унинг учун*

$$|f(x) \leqslant K$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция E тўпламда чегараланган дейилади.

22. 1. Теорема. ***Агар $f(x)$ функция чегараланган ва ёпиқ E тўпламда берилган бўлиб, бу тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда чегараланган бўлади.***

Исбот. $f(x)$ ни E тўпламда чегараланмаган деб фараз қиламиз. У ҳолда ҳар қандай натурал n сони учун E тўпламда шундай x_n нуқта топиладики, унинг учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$f(x_n) > n. \tag{1}$$

E чегараланган бўлганлиги учун

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

нуқталар кетма-кетлиги ҳам чегараланган бўлади. Больцано—Вейерштрасс теоремасига мувофиқ $\{x_n\}$ кетма-кетликдан бирорта x_0 нуқтага яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмни ажратиб олиш мумкин. E ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in E$. $f(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлганлиги учун

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots, f(x_{n_k}), \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $f(x_0)$ га тенг бўлади (Гейне таърифига қаранг). Иккинчи томондан (1) муносабатга асосан:

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

яъни k нинг бирор қийматидан бошлаб $\{f(x_{n_k})\}$ кетма-кетлик элементларининг абсолют қиймати истаганча катта n_k сондан катта бўлади, демак, $\{f(x_{n_k})\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўла олмайди. Бу эса юқоридаги натижага зид.*

22. 2. **Теорема.** ***Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функциянинг қабул қиладиган қийматларидан иборат Φ тўплам ёпиқ тўпламдир.***

Исбот. Φ тўпламнинг ҳар қандай лимит нуқтасини ўзига киришлигини исбот қиламиз. y_0 нуқта Φ тўпламнинг ихтиёрий лимит нуқтаси ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ нуқталар Φ тўпламдан олинган ва y_0 нуқтага яқинлашувчи кетма-кетлик бўлсин. Φ тўпламнинг y_n элементига E тўпламдан мос келган нуқтани x_n билан белгилаймиз (функциянинг таърифига кўра камида битта шундай нуқта мавжуд), яъни

$$y_n = f(x_n) \ (x_n \in E).$$

E чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ кетма-кетлик камида битта x_0 лимит нуқтага эга бўлади (Больцано—Вейерштрасс теоремасига асосан) ва бу лимит нуқта E тўпламга киради, яъни: $x_0 \in E$.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик x_0 нуқтага яқинлашувчи ва $f(x)$ функция x_0 да узлуксиз бўлгани учун: $f(x_n) \to f(x_0)$; иккинчи томондан, $y_n = f(x_n) \to y_0$. Демак, $y_0 = f(x_0)$. $x_0 \in E$ бўлгани учун $y_0 \in \Phi$ муносабат келиб чиқади.*

Φ ёпиқ тўплам бўлганлиги учун унинг қуйи ва юқори чегаралари ўзига киради, булар $f(x)$ нинг энг кичик ва энг катта қийматлари бўлади.

Бу мулоҳазадан эса бевосита натижа сифатида қуйидаги теорема келиб чиқади.

22. 3. **Теорема.** (Вейерштрасс теоремаси). ***Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда берилган узлуксиз $f(x)$ функциянинг қийматлари орасида энг кичик ва энг катта қиймати мавжуддир.***

2-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, ушбу*

$$|x' - x''| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи E тўпламдаги ҳамма x' ва x'' нуқталар учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция E тўпламда ***текис узлуксиз*** *дейилади.*

Бу таърифни функция узлуксизлигининг иккинчи таърифи билан солиштирганда қуйидаги фарқ кўринади.

Функция узлуксизлигининг иккинчи таърифидаги (21-§) $\varepsilon > 0$ сони (x', x'') атрофни танлаб олишга ва ўз навбатида бу атрофни танлаб олиш x_0 нуқтага ҳам боғлиқ бўлиши мумкин эди. Шу параграфдаги текис узлуксизлик таърифида (x', x'') атрофни танлаб олиш биргина $\varepsilon (> 0)$ га боғлиқдир.

Ҳар қандай текис узлуксиз функция оддий маънода ҳам узлуксиздир, аммо бунинг тескариси доимо тўғри бўлмайди. Бу фикрни тасдиқловчи мисоллар ўқувчига умумий анализ курсидан маълум.

Аммо узлуксиз $f(x)$ функция ёпиқ тўпламда берилган бўлса, унинг учун Канторнинг қуйидаги теоремаси ўринлидир.

22. 4 **Теорема.** ***Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда берилган ҳар қандай узлуксиз $f(x)$ функция бу тўпламда текис узлуксиз бўлади.***

Исбот. $f(x)$ функцияни E тўпламда узлуксиз, лекин текис узлуксиз эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда ҳар қандай $\delta > 0$ сони учун шундай $\varepsilon > 0$ сони ва E тўпламда шундай икки x' x'' нуқта мавжудки, бу нуқталар учун

$$|x' - x''| < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Энди δ га кетма-кет $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ қийматларни бериб,

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин, бу ерда x'_n ва $x''_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

E чегараланган тўплам бўлганлиги учун

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$$

кетма-кетликдан бирорта x_0 нуқтага яқинлашувчи

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots$$

кетма-кетлик қисмини ажратиб олишимиз мумкин. E ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in E$ бўлади. (2) га мувофиқ

$$|x_0 - x''_{n_k}| \leq |x_0 - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x''_{n_k}| \leq |x_0 - x'_{n_k}| + \frac{1}{n_k}$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин.

Бу муносабатлардан эса

$$x''_{n_1}, x''_{n_2}, \ldots, x''_{n_k}, \ldots$$

кетма-кетликнинг ҳам x_0 нуқтага яқинлашиши бевосита келиб чиқади. $x_0(\in E)$ нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги учун, x_0 нинг шундай (x', x'') атрофини топиш мумкинки, $(x', x'')\cap E$ тўпламнинг ҳар қандай элементи учун

$$|f(x_0)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди $\{x'_{n_k}\}$ ва $\{x''_{n_k}\}$ кетма-кетликларнинг x_0 нуқтага яқинлашувчилигидан фойдаланиб, шундай n_0 сонини топиш мумкинки, $k>n_0$ бўлганда x'_{n_k} ва x''_{n_k} нуқталар (x', x'') оралиққа кирган бўлади, чунки бу оралиқ x_0 нинг атрофи.

Демак, $k>n_0$ бўлганда:

$$|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\leqslant|f(x'_{n_k})-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x''_{n_k})|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин; бу натижа эса (2) муносабатларга зид.*

23-§. Узлуксиз функциялар кетма-кетлиги

Функциялар кетма-кетлиги билан кейинги бобда тўлароқ шуғулланамиз. Бу ерда эса узлуксиз функциялар кетма-кетлигига оид биргина теореманинг исботини келтириш билан чегараланамиз. Бу теорема келгусида зарур бўлади.

E тўпламида

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

функциялар кетма-кетлиги аниқланган бўлсин. Агар

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \ldots,\ f_n(x_0),\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги бирор лимитга эга бўлса, у ҳолда (1) кетма-кетликни $x_0(\in E)$ нуқтада яқинлашувчи деймиз; бу лимитни $f(x_0)$ билан белгилаймиз. Агар (1) кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик E тўпламда яқинлашувчи дейилади ва лимит функцияни $f(x)$ билан белгилаймиз.

Бу таърифни аниқроқ қуйидагича ифода қилиш мумкин.

1-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon(>0)$ сон ва ҳар қандай $x_0(\in E)$ нуқта учун шундай натурал n_0 сони мавжуд бўлсаки, барча $n\geqslant n_0$ учун*

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (1) кетма-кетлик E тўпламда $f(x)$ функцияга яқинлашувчи деймиз.

Бу таърифда n_0 сони ε га ва x_0 нуқтага боғлиқдир.

2-таъриф. *Агар 1- таърифда n_0 сони ε сонигагина боғлиқ бўлиб, x_0 нуқтани танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, яъни*

$$|f_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0)$$

тенгсизлик x нинг E тўпламдаги ҳамма қийматлари учун бажарилса, у ҳолда (1) кетма-кетлик E тўпламда текис яқинлашади дейилади.

Бу икки таъриф орасидаги фарқни ўқувчи умумий анализ курсида мисолларда кўрган.

Текис яқинлашиш тушунчаси математикада асосий тушунчалардан ҳисобланади ва бу тушунча математик анализда систематик равишда қўлланади.

23. 1. **Теорема.** ***Агар E тўпламда аниқланган***

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

узлуксиз функциялар кетма-кетлиги шу тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашса, у ҳолда лимит функция $f(x)$ ҳам E тўпламда узлуксиз бўлади.

Исбот. E тўпламдан ихтиёрий x_0 нуқтани оламиз. Бу нуқтада $f(x)$ нинг E га нисбатан узлуксизлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади.

(1) кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашувчи бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\varepsilon\,(> 0)$ сон учун шундай натурал n_0 сонини топиш мумкинки, E тўпламнинг ҳамма x нуқтаси учун

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geqslant n_0) \tag{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $f_n(x)$ функция x_0 нуқтада E тўпламга нисбатан узлуксиз бўлганлиги учун x_0 нуқтанинг шундай (x', x'') атрофи мавжудки, $(x', x'') \cap E$ тўпламнинг ҳар қандай x нуқтаси учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

(2) тенгсизликда x ни x_0 га алмаштирилса, ушбу

$$|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

муносабат ҳосил бўлади.

(2), (3), (4) тенгсизликлардан $(x', x'') \cap E$ тўпламнинг ихтиёрий x нуқтаси учун қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| + \\ + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.*$$

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

23. 2. Натижа. ***Агар бирор узлуксиз функцияларнинг***

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

кетма-кетлиги узлукли $f(x)$ функцияга яқинлашса, бу яқинлашиш текис яқинлашиш бўлмайди.

Шундай қилиб, узлуксиз функциялар кетма-кетлигининг текис яқинлашиши лимит функциянинг узлуксиз бўлиши учун кифоя экан; аммо бу шарт зарурий шарт эмас. Зарурий ва кифоявий шартларни XX асрнинг бошларида итальян математиги Арцела топган.

24-§. Узлуксиз функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг тузилиши

Маълумки, узлуксиз $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи деб

$$f_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{1}$$

ифоданинг $\delta \to 0$ даги лимитига (агар бу лимит мавжуд бўлса) айтилади.

Агар $\delta \to 0$ да $f_\delta(x)$ лимитга эга бўлмаса, у ҳолда x нуқтада ҳосила мавжуд бўлмайди.

Бу параграфда узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг тузилиши қандай эканлигини аниқлаймиз.

Теорема. ***Узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ мавжуд бўлган тўплам $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам бўлади. Хусусан, бу тўплам ўлчовлидир.***

Исбот. Ушбу

$$|\delta_1| \leqslant \frac{1}{m},\ |\delta_2| \leqslant \frac{1}{m} \tag{2}$$

тенгсизликлар бажарилганда қуйидаги

$$|f_{\delta_1}(x) - f_{\delta_2}(x)| \leqslant \frac{1}{n} \tag{3}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталардан иборат тўпламни $F_{m,n}$ билан белгилаймиз. $F_{m,n}$ тўплам ёпиқ бўлади, чунки унинг лимит нуқтаси x_0 га яқинлашувчи ҳар қандай $\{x_k\}$ ($x_k \in F_{m,n}$, $k = 1, 2, \ldots$) кетма-кетликнинг элементлари учун δ_1 ва δ_2 лар (2) тенгсизликни қаноатлантирганда (3) тенгсизлик бажарилади ва бунинг чап томони узлуксиз функция бўлганлиги учун x_0 нуқтада ҳам (3) тенгсизлик бажарилади, яъни x_0 нуқта $F_{m,n}$ тўпламга киради.

Энди

$$B_n = \bigcup_m F_{m,\, n} \text{ ва } D = \bigcap_n B_n$$

тўпламларни тузамиз. D тўплам тузилишига мувофиқ, $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам бўлади.

Агар $f(x)$ нинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг D тўпламга тенглиги кўрсатилса, теорема исбот қилинган бўлади

Агар x нуқтада $f'(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда ҳосиланинг таърифига мувофиқ ихтиёрий натурал n сони учун шундай $\varepsilon(>0)$ сони топиладики, $|\delta| \leqslant \varepsilon$ бўлганда

$$|f'(x) - f_\delta(x)| \quad \frac{1}{2n}$$

тенгсизлик бажарилади; яъни n ҳар қандай натурал қийматга эга бўлганда $x \in B_n$ бўлади, чунки

$$|f_{\delta_1}(x) - f_{\delta_2}(x)| \leqslant |f_{\delta_1}(x) - f'(x)| + |f'(x) - f_{\delta_2}(x)| <$$
$$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Демак, $x \in D$, чунки $D = \bigcap_n B_n$.

Энди аксинча, x нуқта D тўпламнинг элементи бўлса, бу нуқтада ҳосиланинг мавжудлигини кўрсатамиз.

(1) ифодадаги δ сонига $\frac{1}{m}$ $(m = 1\ \ 2.\ \ \ .)$ кўринишидаги қийматларни бериб, ушбу $\{f_{\frac{1}{m}}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини тузамиз. x нуқта B_n тўпламнинг элементи бўлганлиги учун, шундай m_0 сонини топиш мумкинки, $m \geqslant m_0$ бўлганда ушбу

$$|f_{\frac{1}{m}}(x) - f_{\frac{1}{m_0}}(x) \leqslant \frac{1}{n} \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан маълум Коши белгисига мувофиқ $\{f_{\frac{1}{m}}(x)\}$ кетма-кетлик лимитга эга; бу лимитни $f_0(x)$ билан белгилаймиз.

Энди $x \in B_n$ бўлганлиги сабабли ўша m_0 да $|\delta| \leqslant \frac{1}{m_0}$ ни қаноатлантирувчи δ учун

$$|f_\delta(x) - f_{\frac{1}{m_0}}(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

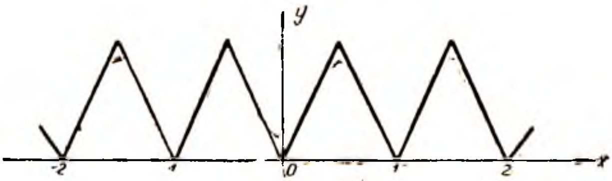
тенгсизлик ҳам бажарилади, яъни $f_\delta(x)$ $\delta \to 0$ да $f_0(x)$ га яқинлашади.

Демак, $f_0(x)$ ҳосиланинг таърифига мувофиқ $f'(x)$ га тенг бўлади ёки D нинг ҳар бир нуқтасида ҳосила мавжуддир.*

25- §. Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функция мисоли

Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функцияларни биринчи марта Вейерштрасс тузган. Қуйида келтириладиган мисолни Ван-дер-Варден тузган.

$\varphi_0(x)$ функциянинг x нуқтадаги қиймати $|n_x - x|$ га тенг бўлсин; бу ерда n_x сони x га энг яқин бўлган бутун сон. $\varphi_0(x)$ нинг геометрик тасвири 9- шаклда берилган бўлиб, даври бирга тенг



9- шакл.

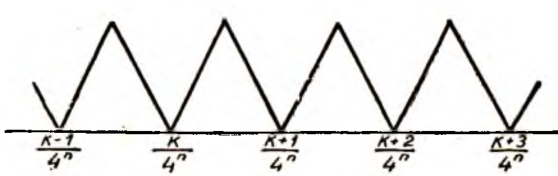
бўлган даврий функциядир. Бу функция ҳар бир $\left[\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}\right]$ (k — бутун сон) сегментда чизиқли бўлиб, унинг бурчак коэффициенти ± 1 га тенг бўлади.

Энди

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi_0(4^n x)}{4^n}$$

функцияни тузамиз.

Бу функция ҳам даврий бўлиб, унинг даври $\frac{1}{4^n}$ га тенг (10- шакл); ҳар бир $\left[\frac{k-1}{2\cdot 4^n}, \frac{k}{2\cdot 4^n}\right]$ сегментда $\varphi_n(x)$ чизиқли функция ва унинг бурчак коэффициенти ± 1 га тенг.



10- шакл.

Энди

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

функционал қаторни тузамиз. $|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{4^n}$ бўлганлиги учун бу қатор текис яқинлашувчи ва $\varphi_n(x)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун, 23. 1-теоремага мувофиқ, $f(x)$ ҳам узлуксиз функция бўлади. Ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтани ўз ичига олган қуйидаги сегментлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$\Delta_n = \left| \frac{k_n - 1}{2\cdot 4^n}; \frac{k_n}{2\cdot 4^n} \right| \quad (k_n \text{ — бутун сон})$$

Δ_n сегментда доимо

$$|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

тенгликни қаноатлантирувчи x_n нуқталарни танлаб олишимиз мумкин. $\frac{1}{4^{n+1}}$ сонда $\varphi_k(x)$ $(k > n)$ функциянинг даври $\frac{1}{4^{k+1}}$ бутун сон марта жойлашгани учун $k > n$ ларда

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = 0,$$

$k \leqslant n$ ларда $\varphi_k(x)$ функция Δ_k ва $\Delta_n \subset \Delta_k$ оралиқларда чизиқли бўлгани учун $k \leqslant n$ да

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \pm 1.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \begin{cases} 0, & k > n, \\ \pm 1, & k \leqslant n \end{cases}$$

тенгликлар ўринли. Булардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1) = \begin{cases} \text{бутун жуфт сонга} & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса,} \\ \text{бутун тоқ сонга} & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса} \end{cases}$$

Бу муносабат эса

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

ифоданинг n чексизга интилганда ҳеч қандай чекли лимитга эга бўла олмаслигини бевосита кўрсатади.

Аммо n чексизга интилганда: $x_n \to x$.

Демак, $f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлмайди. x ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун $f(x)$ бирорта нуқтада ҳам ҳосилага эга эмас.

26-§. Функциянинг ҳосила сонлари

Маълумки, $f(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

мавжуд бўлиши ва бўлмаслиги мумкин, лекин қуйидаги тўрт ифоданинг ҳар бири аниқ бир маънога эга бўлиб; ё чекли қийматга, ёки $+\infty$ га, ёки $-\infty$ га тенг:

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^{+}f(x);$$

$$\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_{+}f(x);$$

$$\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^{-}f(x);$$

$$\underline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_{-}f(x).$$

$D^{+}f$, $D_{+}f$, $D^{-}f$, $D_{-}f$ миқдорлар f нинг *ҳосила сонлари* дейилади.

Агар $D^{+}f=D_{+}f$ $(D^{-}f=D_{-}f)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция *ўнг (чап) ҳосилага эга* дейилади ва бу ҳосилалар $f'_{+}(x)$ $(f'_{-}(x))$ билан белгиланади.

Табиийки, функциянинг одатдаги маънода ҳосиласи мавжуд бўлиши учун юқоридаги тўртта ҳосила сонларнинг бир-бирига тенг бўлиши зарур ва кифоядир.

Мисоллар. 1) $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада турли ўнг ва чап ҳосилаларга эга.

2)

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функция учун $x=0$ нуқтада:

$$D_{+}f=-1,\ D^{+}f=1,\ D_{-}f=-1,\ D^{-}f=1.$$

3)

$$f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x}, & x>0\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad, & x=0\\ cx\sin^2\frac{1}{x}+dx\cos^2\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

бу ерда $a<b$; $c<d$.

$x = 0$ нуқтада:

$$D_+ f = a,\ D^+ f = b,\ D_- f = c,\ D^- f = d.$$

Бу мисоллар, ҳақиқатан ҳам, ҳосила сонларнинг турли бўлиши мумкинлигини кўрсатади.

Ҳосила сонлардан IX бобда фойдаланамиз.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция шундай бўлсаки, $E\{f(x) > a\}$ ва $E\{f(x) < a\}$ тўпламлар ҳар қандай a да очиқ бўлса, бу функциянинг узлуксизлиги исботлансин.

2. Чегараланган $f(x)$ функциянинг Δ сегментдаги тебраниши деб, бу функциянинг шу сегментдаги аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларнинг айирмасига айтилади. $f(x)$ функциянинг Δ сегментдаги тебранишини $\omega(f, \Delta)$ билан белгилаймиз. Агар $\Delta_1 \subset \Delta_2$ бўлса, у ҳолда $\omega(f, \Delta_1) \leqslant \omega(f, \Delta_2)$ бўлиши исботлансин.

3. ξ — бирор нуқта бўлсин. Δ ўртаси ξ бўлган сегмент бўлиб, узунлиги нолга интилганда $\omega(f, \Delta)$ нинг лимитга интилиши исботлансин. Бу лимит $f(x)$ нинг ξ нуқтадаги тебраниши дейилади ва $\omega(f, \xi)$ билан белгиланади.

4. $f(x)$ функциянинг ξ нуқтада узлуксиз бўлиши учун $\omega(f, \xi) = 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя. Шу исботлансин.

5. $f(x)$ ихтиёрий функция бўлсин. $\omega(f, \xi) \geqslant a$ (a ихтиёрий сон) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ξ лар тўплами ёпиқ тўплам эканлиги исботлансин.

6. Ихтиёрий функциянинг узлукли нуқталари тўплами (бўш ёки бўш бўлмаган) шундай тўпламки, бу тўплам кўпи билан сони саноқли ёпиқ тўпламларнинг йиғиндисига тенг, яъни F_σ типидаги тўпламлардир. Шу кўрсатилсин.

7. $[0, 1]$ сегментдаги барча рационал сонларни номерлаб чиқамиз:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

ва $f(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x - r_n|.$$

Бу функциянинг $[0, 1]$ да узлуксизлиги исботлансин.

8. Агар $f(x)$ функция туташган E тўпламда узлуксиз бўлса, бу функциянинг E тўпламда қабул қиладиган қийматлари тўплами Φ ҳам туташган эканлиги исботлансин.

V БОБ

ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАР

27-§. Ўлчовли функциянинг таърифи ва унинг хоссалари

Узлуксиз функция тушунчасига баъзи маънода яқин ва математик анализ учун муҳим аҳамиятга эга бўлган ўлчовли функция тушунчасини келтирамиз.

Аввал баъзи белгиларни киритамиз: a бирор ҳақиқий сон бўлсин; ўзгарувчи x миқдорнинг $f(x) > a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат бўлган тўпламни $E\{f(x) > a\}$ билан белгилаймиз. Шунга ўхшаш $E\{f(x) \geqslant a\}$, $E\{f(x) \leqslant a\}$, $E\{f(x) = a\}$, $E\{a < f(x) < b\}$ тўпламларнинг ҳар бири ўзгарувчи x нинг катта қавс ичида ёзилган муносабатларни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат.

1-таъриф. *Агар ҳар қандай ҳақиқий a сони учун $E\{f(x) > a\}$ тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда ўлчовли E тўпламда берилган $f(x)$ функция*[1] *ўлчовли функция дейилади.*

Бундан кейин $E\{f(x) > a\}$ тўпламни $E\{f > a\}$ кўринишда ёзамиз.

Бу таърифда (L) маъносида ўлчовли тўпламлар ҳақида гап борганлиги учун $f(x)$ функция ҳам (L) ўлчовли дейилади. Агар E ва $E\{f > a\}$ тўпламлар (B) ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам (B) ўлчовли дейилади.

27. 1. Теорема. ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса*[2]*, у ҳолда ҳар қандай a ва b лар учун***

$$1)\ E\{f \leqslant a\},\ 2)\ E\{a < f \leqslant b\},\ 3)\ E\{f = a\},$$
$$4)\ E\{f \geqslant a\},\ 5)\ E\{f < a\}$$

тўпламларнинг ҳар бири ҳам ўлчовли бўлади.

2. ***Агар ихтиёрий a ва b ларда 1), 2), 4), 5) тўпламларнинг бирортаси ўлчовли бўлса, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.***

Исбот. 1) E ва $E\{f > a\}$ тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун

$$E\{f \leqslant a\} = E \setminus E\{f > a\}$$

айниятдан $E\{f \leqslant a\}$ тўпламнинг ўлчовчи эканлиги келиб чиқади.

2) $E\{a < f \leqslant b\} = E\{a < f\} \cap E\{f \leqslant b\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли, демак, $E\{a < f \leqslant b\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

---

[1] $f(x)$ функция E тўпламда чексиз қийматларга эга бўлиши ҳам мумкин, аммо қийматининг ишораси доимо аниқ бўлиши керак. Бу талабни келгусида қулайлик учун киритдик.

[2] Бу ерда ва келгусида ўлчовли тўплам ва функциялар (L) маъносида ишлатилади.

3) $E\{f=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left\{a-\frac{1}{n}<f\leqslant a+\frac{1}{n}\right\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлгани учун 18. 5- теоремага мувофиқ, бу тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

4) $E\{f\geqslant a\}=E\{f>a\}\bigcup E\{f=a\}$ тенглик ўринли. Бу ерда ҳам ўнг томондаги тўпламлар ўлчовли, демак, $E\{f\geqslant a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

5) $E\{f<a\}=E\{f\leqslant a\}\setminus E\{f=a\}$ тенгликдан $E\{f<a\}$ тўпламнинг ўлчовлилиги келиб чиқади.

Юқоридаги 1) — 5) тенгликлар бизга 1- бобдан маълум бўлган усул билан исбот этилади. Теореманинг иккинчи қисми биринчи қисмига ўхшаш исботланади.$_*$

27. 2. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция E тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли E_1 қисмида ҳам ўлчовли бўлади.***

Исбот. 1- таърифга мувофиқ, ҳар қандай ҳақиқий a учун $E_1\{f>a\}$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади. Бу тўпламнинг ўлчовлилиги ушбу

$$E_1\{f>a\}=E_1\bigcap E\{f>a\}$$

тенгликдан бевосита келиб чиқади, чунки E_1 ва $E\{f>a\}$ тўпламларнинг ҳар бири теореманинг шартига мувофиқ ўлчовли, демак, 18. 5- теоремага мувофиқ $E_1\{f>a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.$_*$

27. 3. **Теорема.** $\{E_k\}$ ***сони чекли ёки саноқли, ҳар бири $[a, b]$ сегментда бутунлай жойлашган, ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар $f(x)$ функция бу тўпламларнинг ҳар бирида ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ уларнинг $E=\bigcup_k E_k$ йиғиндисида ҳам ўлчовли бўлади.***

Исбот. 1- таърифга ва теореманинг шартига мувофиқ ҳар қандай k учун E_k ва $E_k\{f>a\}$ тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлади. Демак, 18. 3 га мувофиқ $E=\bigcup_k E_k$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

Энди

$$E\{f>a\}=\bigcup_k E_k\{f>a\}$$

тенгликдан эса $f(x)$ функциянинг E тўпламда ўлчовли эканлиги келиб чиқади.$_*$

27. 4. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда ўзгармас k сонига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўлчовли функция бўлади.*** Дарҳақиқат.

$$E\{f>a\}=\begin{cases}\text{агар } k>a \text{ бўлса, } E,\\ \text{агар } k\leqslant a \text{ бўлса, } 0.\end{cases}_*$$

27. 5. Теорема. ***Агар $f(x)$ ўлчовли функция бўлиб, k ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $f(x)+k$ ва $kf(x)$ функциялар ҳам ўлчовли бўлади.***

Исбот. Ушбу

$$E\{f+k>a\}=E\{f>a-k\},$$

$$E\{kf>a\}=\begin{cases}\text{агар } k>0 \text{ бўлса, } & E\left\{f>\frac{a}{k}\right\},\\ \text{агар } k<0 \text{ бўлса, } & E\left\{f<\frac{a}{k}\right\}\end{cases}$$

тенгликлардан $f(x)+k$ ва $kf(x)$ функцияларнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Агар $k=0$ бўлса, иккинчи тенгликнинг ўнг томони ўз маъносини йўқотади, аммо бу ҳолда $kf(x)$ айнан нолга тенг бўлганлиги учун 27. 4-теоремадан $kf(x)$ функциянинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.*

27. 6. Теорема. ***Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $E\{f>\varphi\}$ тўплам ўлчовли бўлади.***

Исбот. Ушбу

$$E\{f>\varphi\}=\bigcup_r [E\{f>r\}\cap E\{\varphi<r\}]$$

(йиғинди r нинг ҳамма рационал қийматлари бўйича олинади) тенгликдан $E\{f>\varphi\}$ тўпламнинг ўлчовлилиги бевосита келиб чиқади.*

27. 7. Теорема. ***Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)+\varphi(x)$ ва $f(x)-\varphi(x)$ функциялар ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.***

Исбот. Ушбу

$$E\{f+\varphi>a\}=E\{f>a-\varphi\},$$
$$E\{f-\varphi>a\}=E\{f>a+\varphi\}$$

тенгликлар ёрдами билан бу теореманинг исботи 27. 6-теоремага келтирилади.*

27. 8. Теорема. ***Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot\varphi(x)$ функция ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.***

Исбот. Агар $f(x)=\varphi(x)$ бўлса, у ҳолда $f^2(x)$ нинг ўлчовлилиги $a\geqslant 0$ бўлганда

$$E\{f^2>a\}=E\{f>\sqrt{a}\}\cup E\{f<-\sqrt{a}\}$$

тенгликдан, $a<0$ бўлганда

$$E\{f^2>a\}=E$$

тенгликдан кўринади.

Умумий ҳолда теореманинг тўғрилиги

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{1}{4}[f(x)+\varphi(x)]^2-\frac{1}{4}[f(x)-\varphi(x)]^2$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки ўнг томондаги функциялар 27. 7 ва 27. 8- теоремаларга асосан ўлчовли бўлади.*

27. 9. **Теорема.** ***Агар $\varphi(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлиб, $\varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\varphi(x)}$ функция ҳам E да ўлчовли бўлади.***

Теореманинг исботи

$$E\left\{\frac{1}{\varphi} > a\right\} = E\{1 > a\varphi\}$$

тенгликдан бевосита келиб чиқади.*

27. 10. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса ва $\varphi(x) \neq 0$, у ҳолда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функция ҳам ўлчовли бўлади.***

Бу теореманинг тўғрилиги ушбу

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)}$$

муносабатдан ва 27. 8- теоремадан бевосита келиб чиқади.*

27. 11. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ бу тўпламда ўлчовли бўлади.***

Исбот. Аввало $F = E\{f \leqslant c\}$ тўпламнинг ёпиқлигини исбот қиламиз. Дарҳақиқат, агар x_0 бу тўплам учун лимит нуқта бўлса ҳамда $x_n \to x_0$ $(x_n \in F)$ бўлса, у ҳолда $f(x_n) \leqslant c$ ва функциянинг узлуксизлигига мувофиқ: $f(x_0) \leqslant c$; бундан: $x_0 \in F$, демак, F ёпиқ тўплам.

Энди теореманинг тўғрилиги

$$E\{f > c\} = E \setminus E\{f \leqslant c\} = E \setminus F$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки E ва F тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли.*

2- таъриф. Агар

$$\mu(E\{f \neq \varphi\}) = 0 \text{ бўлса, } f(x) \text{ ва } \varphi(x)$$

функциялар E тўпламда ўзаро эквивалент дейилади.

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг эквивалентлилиги $f \sim \varphi$ кўринишида ёзилади. Икки эквивалент функция E тўпламда бир вақтда ўлчовли ёки ўлчовсиз бўлиши таърифдан бевосита кўринади.

3- таъриф. *Агар бирор хосса ўлчови нолга тенг $A(\subset E)$ тўпламда бажарилмай, $E(\mu(E) > 0)$ тўпламнинг қолган қисмида (яъни $E \setminus A$ тўпламда) бажарилса, у ҳолда бу хосса E тўпламда деярли бажарилади дейилади.*

Масалан, E тўпламда ўзаро эквивалент бўлган икки функция бир-бирига деярли тенг.

28- §. Ўлчовли функциялар кетма-кетлиги. Лебег, Рисс, Егоров теоремалари

28. 1. Теорема. *Ўлчовли E тўпламда ўлчовли $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция E да ўлчовли бўлади.

Исбот. Ихтиёрий ўзгармас a сонини олиб,

$$E_{m,k} = E\left\{f_k > a + \frac{1}{m}\right\}$$

ва

$$F_{m,n} = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_{m,k}$$

тўпламларни тузамиз. 18. 5- теоремага мувофиқ бу тўпламлар ўлчовли бўлади.

Агар

$$E\{f > a\} = \bigcup_{m,n} F_{m,n}$$

тенгликни исбот қилсак, у ҳолда 18. 3- теоремага асосан 28. 1- теорема исбот қилинган бўлади.

Бу тенгликни исбот қилиш учун қуйидаги икки муносабатнинг тўғрилигини кўрсатиш кифоя:

$$E\{f > a\} \subset \bigcup_{m,n} F_{m,n} \qquad (1)$$

$$\bigcup_{m,n} F_{m,n} \subset E\{f > a\}. \qquad (2)$$

x_0 нуқта $E\{f > a\}$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин, яъни $f(x_0) > a$; бу тенгликдан фойдаланиб, етарли катта натурал m сони учун ушбу

$$f(x_0) > a + \frac{1}{m}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Аммо $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$; демак, шундай натурал n сонини топиш мумкинки, унинг учун

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m} \text{ (агар } k \geqslant n \text{ бўлса)}$$

ёки

$$x_0 \in E_{m,k}$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бундан кўринадики,

$$x_0 \in \bigcap_{k=n}^{\infty} E_{m,k} = F_{m,n} \subset \bigcup_{m}\bigcup_{n} F_{m,n},$$

яъни $E\{f>a\}$ тўпламнинг ихтиёрий x_0 элементи $\bigcup\limits_{m,n} F_{m,n}$ тўпламга ҳам кирар экан.

Демак, (1) муносабат исбот бўлди. Энди (2) муносабатни исбот қиламиз. $x_0 \in \bigcup\limits_{m,n} F_{m,n}$ бўлсин; у ҳолда шундай m ва n натурал сонлар мавжудки, улар учун $x_0 \in F_{m,n}$ муносабат ўринли. Сўнгги муносабатдан, барча $k \geqslant n$ учун

$$x_0 \in E_{m,k}$$

ёки

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}$$

муносабат келиб чиқади.

k га нисбатан лимитга ўтсак, қуйидаги тенгсизликни ёза оламиз:

$$f(x_0) \geqslant a + \frac{1}{m} > a$$

ёки бошқача айтганда:

$$x_0 \in E\{f>a\},$$

Демак, (2) муносабат ҳам исбот бўлди.*

28. 2. Изоҳ. Агар

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

муносабат E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида эмас, балки E тўпламда деярли бажарилганда ҳам (яъни бу муносабат бажарилмаган нуқталардан иборат бўлган тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса) теорема ўз кучини сақлайди. Бунинг тўғрилигини кўрсатишни ўқувчининг ўзига тавсия қиламиз.

Таъриф (Ф. Рисс таърифи). *Ўлчовли E тўпламда деярли чекли*[1], *ўлчовли $f(x)$ функция ва деярли чекли, ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат σ сони учун ушбу*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) = 0$$

муносабат[2] *бажарилса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашади дейилади ва $f_n \Rightarrow f$ кўринишда ёзилади.*

Қуйидаги Лебег, Егоров, Лузин теоремаларини исбот қилишда функцияларни деярли чекли деб алоҳида айтиб ўтирмаймиз.

---

[1] Агар $f(x)$ функциянинг чексиз қийматга эга бўлган нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, $f(x)$ ни E тўпламда деярли чекли деймиз.

[2] Агар x_0 нуқтада $f_n(x_0)$ ва $f(x_0)$ функциялар чексиз қийматга эга бўлиб, ишоралари бир хил бўлса, аниқмасликка йўл қўймаслик учун, x_0 нуқтани $E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}$ тўпламга киритамиз.

28. 3. **Теорема** (А. Лебег теоремаси). ***Ўлчовли E тўпламда $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича ҳам яқинлашувчи бўлади.***

Исбот. 28. 1 ва 28. 2- ларга биноан $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

Қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$A = E\{|f| = +\infty\},\ A_n = E\{|f_n| = +\infty\},\ B = E\{f_n \not\to f\},$$

$$C = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup B,\ E_k(\sigma) = E\{|f_k - f| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \quad P = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Бу тўпламларнинг ҳар бири теореманинг шартларига кўра ўлчовли ва

$$\mu(C) = 0. \tag{3}$$

Ушбу

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$$

муносабатларга ва 18. 7- теоремага мувофиқ

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\sigma)) = \mu(P). \tag{4}$$

Энди

$$P \subset C \tag{5}$$

муносабатни исбот қиламиз. Бунинг учун P тўпламдан ихтиёрий x_0 элементни оламиз. Агар $x_0 \notin C$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

бўлади. Демак, шундай натурал n сони топиладики, унинг учун

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma \ (k \geqslant n)$$

тенгсизлик бажарилади, ёки бошқача айтганда:

$$x_0 \notin E_k(\sigma),\ (k \geqslant n)$$

бундан $x_0 \notin R_n(\sigma)$ ва $x_0 \notin P$ муносабатлар ҳосил бўлади. Шу билан (5) муносабат исбот бўлди. (3), (4), (5) муносабатлардан

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\sigma)) = 0$$

тенглик келиб чиқади. Шу билан, Ф. Рисс таърифига мувофиқ, теорема ҳам исбот этилди, чунки

$$E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$$

ва, демак,

$$\mu(E_n(\sigma)) = \mu(E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) \leqslant \mu(R_n(\sigma)) \to 0,\ n \to \infty.*$$

Лекин теореманинг тескариси доимо тўғри бўлмайди, яъни ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқмайди.

Мисол $[0, 1)$ ярим оралиқда сони чекли

$$f_1^{(k)}(x),\ f^{(k)}(x),\ \ldots,\ f_k^{(k)}(x)\ (k = 1, 2, \ldots)$$

функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб,

$$f_l^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right) \\ 0, & x \overline{\in} \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right) \end{cases} \quad (l = \overline{1, k})$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу функцияларни

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x) = f_2^{(1)}(x),\ \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x),\ \ldots$$

кетма-кетлик кўринишида ёзамиз. Бу функциялар кетма-кетлиги ўлчов бўйича нолга интилади; дарҳақиқат, агар $\varphi_n(x) = f_l^{(k)}(x)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\sigma\ (0 < \sigma \leqslant 1)$ сон учун

$$E\{|\varphi_n| \geqslant \sigma\} = \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\mu(E\{|\varphi_n| \geqslant \sigma\}) = \frac{1}{k} \to 0,\ n \to \infty,$$

чунки $n \to \infty$ да k ҳам чексизликка интилади. Иккинчи томондан $\varphi_n(x) \to 0$ муносабат $[0, 1)$ ярим оралиқнинг бирорта ҳам нуқтасида бажарилмайди. Ҳақиқатан ҳам, агар $x_0 \in [0, 1)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай k учун шундай l сони топиладики, улар учун ушбу

$$x_0 \in \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right)$$

муносабат бажарилади, демак, $f_l^{(k)}(x_0) = 1$. Бошқачасига айтганда

$$\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \ldots,\ \varphi_n(x_0),\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлигида бир сони чексиз марта учрайди. Демак, бу кетма-кетлик x_0 нуқтада 0 га яқинлашмайди. x_0 нуқта ихтиёрий бўлгани учун $\varphi_n(x)$ кетма-кетлиқ $[0, 1]$ нинг ҳеч қандай нуқтасида 0 га интилмайди.

Бу мисолдан ва Лебег теоремасидан ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаси деярли яқинлашиш тушунчасига қараганда кенгроқ эканлиги кўринади; деярли яқинлашиш тушунчаси эса ҳар бир нуқтада яқинлашиш тушунчасидан кенгроқдир.

28. 4. **Теорема.** ***Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда ўлчов бўйича $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларга яқинлашса, бу функциялар ўзаро эквивалент бўлади.***

Исбот. Ҳар қандай $\sigma\ (> 0)$ учун

$$E\{|f - g| \geqslant \sigma\} \subset E\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup E\left\{|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

муносабат доимо ўринли. Бу муносабатдан эса $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ўзаро эквивалентлиги бевосита кўринади, чунки теореманинг шартига кўра ўнг томондаги тўпламларнинг ҳар бирининг ўлчови $n \to \infty$ да нолга интилади; демак, $\mu(E\{|f-g| \geqslant \sigma\}) = 0$ тенглик ўринли, яъни

$$f \sim g. *$$

Ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаси деярли яқинлашиш тушунчасига нисбатан кенгроқ бўлса ҳам, қуйидаги теорема ўринлидир.

28. 5. Теорема (Ф. Рисс теоремаси). ***Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда бу функциялар кетма-кетлигидан шундай $\{f_{n_i}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги қисмини ажратиб олиш мумкинки, улар E тўпламда $f(x)$ га деярли яқинлашувчи бўлади.***

Исбот. Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\{\sigma_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ ва $\{n_i\}$ сонлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$\sigma_n > 0, \ \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \ \varepsilon_n > 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty, \ n_1 < n_2 < \ldots$$

ва

$$\left.\begin{array}{l} \mu(E\{|f_{n_1} - f| \geqslant \sigma_1\}) < \varepsilon_1 \\ \mu(E\{|f_{n_2} - f| \geqslant \sigma_2\}) < \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu(E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}) < \varepsilon_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \qquad (6)$$

Сўнгги тенгсизликларни ёзишга ҳақлимиз, чунки $n \to \infty$ да:

$$\mu(E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) \to 0.$$

Энди $\{f_{n_i}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини E тўпламда деярли яқинлашувчи эканлигини кўрсатсак, теорема исбот қилинган бўлади. Ушбу

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}, \ Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m$$

тўпламларни тузамиз. $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ муносабатлардан ва 18. 7-теоремага мувофиқ

$$\mu(R_m) \to \mu(Q), \ m \to \infty$$

муносабат келиб чиқади.

Иккинчи томондан, (6) га мувофиқ:

$$\mu(R_m) < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Демак, $\mu(R_m) \to 0$, $m \to \infty$, чунки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$. Бундан эса ўз навбатида

$$\mu(Q) = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Энди $E \setminus Q$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $\{f_{n_l}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз.

Бирор m_0 учун $x_0 \in E \setminus Q$ муносабатдан $x_0 \overline{\in} R_{m_0}$ муносабат келиб чиқади. Бундан, агар $k \geqslant m_0$ бўлса, $x_0 \overline{\in} E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}$. Демак,

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \sigma_k \quad (k \geqslant m_0)$$

ва $\sigma_k \to 0$ да $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$, яъни $\{f_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда деярли яқинлашади.*

28. 6. Теорема (Д. Ф. Егоров теоремаси). ***Ўлчовли E тўпламда $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $\varepsilon (> 0)$ учун шундай ўлчовли $P (\subset E)$ тўпламни топиш мумкинки, унинг учун $\mu(P) > \mu(E) - \varepsilon$ муносабат бажарилади ва $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги P да $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.***

Исбот. Шу параграфдаги Лебег теоремасини исбот қилишда ушбу

$$\lim_{n \to \infty} \mu(R_n(\sigma)) = 0$$

муносабатни келтириб чиқарган эдик, бу ерда:

$$R_n(\sigma) = \bigcap_{k=n}^{\infty} E\{|f_k - f| \geqslant \sigma\}.$$

Энди қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{\sigma_k\}$ ва $\{\delta_k\}$ сонлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$\sigma_{k+1} < \sigma_k, \ \sigma_k \to 0 \ (k \to \infty)$$

$$\delta_k > 0, \ \mu(R_n(\sigma_k)) < \delta_k \ \text{ва} \ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty.$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k$ қаторнинг яқинлашувчилигидан фойдаланиб, теореманинг шартида берилган ε учун шундай m_0 сонини топамизки, унинг учун

$$\sum_{k=m_0}^{\infty}\delta_k<\varepsilon \tag{7}$$

тенгсизлик бажарилсин.

Қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$e=\bigcup_{k=m_0}^{\infty}R_{n_k}(\sigma_k),\quad P=E\setminus e.$$

(7) га асосан $\mu(e)<\varepsilon$, демак, $\mu(P)>\mu(E)-\varepsilon$.

Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг P да $f(x)$ функцияга текис яқинлашишини исбот қилсак, теорема исбот этилган бўлади.

$x\in P$ бўлсин, демак, $x\overline{\in}e$. m ни шундай танлаймизки, $m\geqslant m_0$ ва $\sigma_m<\varepsilon$ бўлсин ($\sigma_m\to 0$ бўлгани учун бундай m сони мавжуд). У ҳолда $x\overline{\in}R_{n_m}(\sigma_m)$. Бошқача айтганда, $k\geqslant n_m$ бўлганда

$$x\overline{\in}E\{|f_k-f|\geqslant\sigma_m\}.$$

Бундан ушбу

$$|f_k(x)-f(x)|<\sigma_m\ (k\geqslant m_0)$$

муносабат ва бундан эса

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon\ (k\geqslant n_{m_0})$$

муносабат бевосита келиб чиқади.

$\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг P тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашиши сўнгги муносабатдан кўринади, чунки бунда n_m сони ε сонигагина боғлиқ бўлиб, x га боғлиқ эмас.$_*$

28. 7. Изоҳ. 18. 8- теоремага мувофиқ Егоров теоремасида P тўплам сифатида мукаммал тўпламни олиш мумкин эди.

29- §. Лузин теоремаси

Функциялар назариясида узлуксиз функциялар синфи ғоят катта аҳамиятга эга. 27.11- теоремадан маълумки, ҳар қандай узлуксиз функция ўлчовли функция бўлади.

Энди узлуксиз функциялар билан ўлчовли функциялар орасида (уларнинг тузилиши маъносида) қандай муносабат бор, деган савол туғилади. Бу саволга Лузин теоремаси жавоб беради.

Теорема (Н. Н. Лузин теоремаси).

Агар f(x) функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\varepsilon(>0)$ ***сон учун шундай ёпиқ F(***$\subset E$***)***

тўпламни топиш мумкинки, у тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлади ва

$$\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$$

муносабат ўринли.

Исбот. E тўпламни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{-n \leqslant f(x) < n\}.$$

Сўнгра

$$E_n = E\{-n \leqslant f(x) < n\} \subset E\{-(n+1) \leqslant f(x) < n+1\}$$

муносабатдан ва 18.6- теоремадан ушбу

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E\{-n \leqslant f(x) < n\})$$

муносабат келиб чиқади. Бу тенгликдан фойдаланиб, ҳар қандай $\varepsilon\,(>0)$ ва етарли катта бўлган натурал N сони учун ушбу

$$\mu(E_N) = \mu(E\{-N \leqslant f(x) < N\}) > \mu(E) - \varepsilon \tag{1}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин.

Энди $[-N, N]$ сегментни тенг $2nN$ қисмга бўламиз (n — ихтиёрий натурал сон);

$$a_0^{(n)} = -N,\ a_1^{(n)} = -N + \frac{1}{n},\ a_2^{(n)} = -N + \frac{2}{n},\ \ldots,\ a_k^{(n)} = -N + \frac{k}{n},\ \ldots,\ a_{2nN}^{(n)} = N.$$

$$E_k^{(n)} \text{ билан } E\{a_{k-1}^{(n)} \leqslant f(x) < a_k^{(n)}\}\quad (k = 1, 2, \ldots, 2nN)$$

тўпламни белгилаймиз. Ушбу

$$E_N = E\{-N \leqslant f(x) < N\} = \bigcup_{k=1}^{2nN} E_k^{(n)},\ E_k^{(n)} \cap E_l^{(n)} = \varnothing\quad (k \neq l)$$

тенгликлар ўз-ўзидан тушунарли. $E_k^{(n)}$ тўпламнинг ҳар биридан (18.8-теоремага асосан) ўлчови қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган ёпиқ $F_k^{(n)}$ тўплам қисмини ажратиб оламиз:

$$\mu(F_k^{(n)}) > \mu(E_k^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n \cdot 2nN}.$$

F_n билан $F_k^{(n)}$ тўпламларнинг k бўйича йиғиндисини белгилаймиз, яъни $F_n = \bigcup_{k=1}^{2nN} F_k^{(n)}$. Ёпиқ F_n тўпламнинг ўлчови

$$\mu(F_n) = \sum_{k=1}^{2nN} \mu(F_k^{(n)}) > \sum_{k=1}^{2nN} \mu(E_k^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu(E_N) - \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Ёпиқ F_n тўпламда $f_n(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\text{агар } x \in F_k^{(n)} \text{ бўлса, } f_n(x) = a_{k-1}^{(n)}.$$

$f_n(x)$ функция F_n тўпламда узлуксиз бўлади.

Агар x нуқта F_n тўпламнинг элементи бўлса, у $F_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \ldots, 2nN$) тўпламларнинг биригагина киради.

Агар $x \in F_k^{(n)} (\subset E_k^{(n)})$ бўлса, у ҳолда:

$$a_{k-1}^{(n)} \leqslant f(x) < a_k^{(n)}.$$

Демак,

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < a_k^{(n)} - a_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{n}, \ (x \in F_n \text{ бўлса}),$$

ёки x нинг F_n дан олинган ҳамма қийматлари учун

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли, чунки

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{2nN} F_k^{(n)}.$$

Энди $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ тўпламни оламиз. Ушбу

$$F_n \subset E_N, \ F_n = E_N \setminus (E_N \setminus F_n) \tag{3}$$

ва (2) муносабатлардан

$$\mu(E_N \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{4}$$

ни оламиз. (4) ва

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

дан

$$F = E_N \setminus [\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_N \setminus F_n)]$$

муносабатни топамиз. Бундан ва (4) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\mu(F) > \mu(E_N) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu(E_N) - \varepsilon. \tag{5}$$

Ҳар қандай натурал n сон учун

$$F_n \supset F$$

муносабат бажарилганлиги учун $f_n(x)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлади ва қуйидаги

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \quad (x \in F)$$

тенгсизлик бажарилади. Сўнгги тенгсизлик F тўпламнинг ҳар қандай элементи учун ўринли; демак, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги F тўпламда узлуксиз ва унда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

23.1- теоремага асосан $f(x)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлади ва (1), (5) муносабатларга асосан

$$\mu(F) > \mu(E_N) - \varepsilon > \mu(E) - 2\varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади.*

Баъзи авторлар функциянинг Лузин теоремасида ифодаланган хоссаларини ўлчовли функциянинг таърифи сифатида оладилар ва ундан функциянинг Лебег маъносида ўлчовли эканлигини келтириб чиқарадилар.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[0,1]$ да $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ узлуксиз функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. E—бу кетма-кетликнинг $[0,1]$ даги барча яқинлашиш нуқталари тўплами бўлсин. E тўплам $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам эканлиги исботлансин.

2. $[0,1]$ да $f(x)$ га яқинлашувчи

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлса, $f(x)$ нинг ўлчовлилиги исботлансин.

3. $[0,1]$ да аниқланган ихтиёрий функциянинг узилиш нуқталари тўплами F_σ типидаги тўплам эканлиги исботлансин.

4. $[0,1]$ да F_σ типидаги ихтиёрий E тўплам берилган. $[0,1]$ да аниқланган шундай $f(x)$ функция тузилсинки, бу функциянинг узилиш нуқталари тўплами E тўпламдан иборат бўлсин.

5. $[0,1]$ да аниқланган ўлчовли $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган ва $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу функцияларнинг суперпозицияси $g(f(x))$ ўлчовлими?

6. $[0,1]$ да ўлчовли ва деярли чекли $f(x)$ функция берилган. $[0,1]$ да аниқланган шундай камаювчи $g(x)$ функция мавжудлиги исботлансинки, ҳар қандай a учун

$$\mu(E\{g > a\}) = \mu(E\{f > a\})$$

тенглик ўринли бўлсин.

7. $[0,1]$ аниқланган ўлчовли ва деярли чекли $f(x)$ функция берилган. Ушбу

$$\mu(E\{f \geqslant h\}) \geqslant \frac{1}{2},\ \mu(E\{f \geqslant H\}) < \frac{1}{2},\ H > h$$

шартларни қаноатлантирувчи h сонининг мавжудлиги ва ягоналиги исботлансин (Л. В. Канторович масаласи).

VI БОБ

ЛЕБЕГ ИНТЕГРАЛИ

30- §. Чегараланган функциянинг Лебег интеграли

Ўлчовли тўпламлар ва ўлчовли функциялар тушунчаси билан танишгандан сўнг чегараланган ўлчовли функциялар учун Лебег интеграли таърифини бериш мумкин. Агар ўлчовли $f(x)$ функция бирорта E тўпламда аниқланган бўлса, у тўпламни бошиданоқ $[a, b]$ сегмент билан алмаштириб олишимиз мумкин; бунинг учун E тўпламни ўз ичига олган энг кичик Δ сегментни олиб, унинг $\Delta \setminus E$ қисмида $f(x)$ функцияни айнан нолга тенг қилиб олиш керак.

Аввало Лебег интегралини ўлчовли E тўпламнинг характеристик функцияси учун аниқлаймиз.

Ушбу

$$f_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E \end{cases}$$

функцияни E тўпламнинг *характеристик функцияси* дейилади.

Бу хусусий ҳол учун Лебег интеграли қуйидагича аниқланади:

$$(L) \int_a^b f_E(x)dx = \mu(E).$$

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} k, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E \end{cases}$$

функция учун Лебег интегралини

$$(L) \int_a^b f(x)dx = k\mu(E)$$

формула билан аниқлаймиз.

Умумий ҳолга ўтиш учун A ва B билан $f(x)$ функциянинг мос равишда аниқ қуйи ва аниқ юқори чегараларини белгилаймиз ҳамда $[A, B]$ сегментни қуйидагича n қисмга бўламиз:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Сўнгра

$$e_\nu \; (\nu = \overline{0, n-1})$$

билан

$$y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиган нуқталардан иборат тўпламни белгилаймиз. $f(x)$ функция ўлчовли бўлганлиги учун e_ν $(\nu=\overline{0, n-1})$ тўпламлар ўлчовли бўлади.

Энди ушбу

$$s=\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(e_\nu), \quad S=\sum_{\nu=0}^{n-1} y_{\nu+1}\mu(e_\nu)$$

йиғиндиларни тузамиз (s ва S ни мос равишда қуйи ва юқори йиғиндилар деймиз) ва қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. *Агар* $\lambda_{n}\ (=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n-1} |y_{\nu+1}-y_\nu|)$ *нолга интилганда* $(n\to\infty)$ s *ва* S *йиғиндиларининг лимити мавжуд бўлиб, бир-бирига тенг бўлса ва бу лимит* y_ν *нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимитни* $f(x)$ *функциянинг* E *тўпламдаги Лебег интеграли дейилади ва бу интеграл юқоридаги хусусий ҳоллар каби, ушбу* $(L)\int\limits_E f(x)dx$ *символ билан белгиланади.*

Теорема. ***Агар*** $f(x)$ ***функция*** E ***тўпламда ўлчовли ва чегараланган бўлса, у ҳолда унинг учун Лебег интеграли мавжуддир.***

Исбот. Чегараланган ва ўлчовли $f(x)$ функцияни олиб, унинг учун s ва S йиғиндиларнинг умумий лимитга эга эканлигини кўрсатамиз. Бу функция чегараланганлиги учун унинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари мавжуд; улар мос равишда A ва B бўлсин. $[A, B]$ сегментни қуйидагича n_1 ва n_2 қисмларга бўламиз:

$$A=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_{n_1-1}<y_{n_1}=B, \tag{1}$$

$$A=y'_0<y'_1<y'_2<\ldots<y'_{n_2-1}<y'_{n_2}=B. \tag{2}$$

Бўлиниш нуқталарини шундай қилиб оламизки, улар учун ушбу

$$\begin{cases} y_{\nu+1}-y_\nu\leqslant\lambda\ (\nu=\overline{0,n_1-1}) \\ y'_{\nu+1}-y'_\nu\leqslant\lambda\ (\nu=\overline{0,n_2-1}) \end{cases}$$

тенгсизликлар бажарилсин; бу ерда $\lambda=\max\{\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}\}$,

$$\lambda_{n_1}=\max_{0\leqslant\nu\leqslant n_1-1}(y_{\nu+1}-y_\nu),\quad \lambda_{n_2}=\max_{0\leqslant\nu\leqslant n_2-1}(y'_{\nu+1}-y'_\nu).$$

Қуйидаги муносабатларнинг ўринли эканлиги ўз-ўзидан кўринади:

$$S-s=\sum_{\nu=0}^{n_1-1}(y_{\nu+1}-y_\nu)\,\mu(e_\nu)\leqslant\lambda\sum_{\nu=0}^{n_1-1}\mu(e_\nu)=\lambda\mu(E),$$

$$S'-s'=\sum_{\nu=0}^{n_2-1}(y'_{\nu+1}-y'_\nu)\,\mu(e'_\nu)\leqslant\lambda\sum_{\nu=0}^{n_2-1}\mu(e'_\nu)=\lambda\mu(E).$$

Энди (1) ва (2) бўлиниш нуқталарни, яъни y_ν, y'_ν нуқталарнинг ҳаммасини бўлувчи нуқталар сифатида оламиз ва тегишли s'', S'' йиғиндиларни тузамиз. Бунинг натижасида s ва s' йиғиндилар камаймайди, S ва S' йиғиндилар эса ортмайди, яъни

$$\begin{cases} s \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S, \\ s' \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S' \end{cases} \tag{3}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Дарҳақиқат, агар $(y_\nu, \ y_{\nu+1})$ оралиқни бирорта янги ξ нуқта ёрдами билан (y_ν, ξ), $(\xi, y_{\nu+1})$ оралиқларга бўлсак, у ҳолда ушбу

$$y_\nu \mu(e_\nu) \leqslant y_\nu \mu \{E(y_\nu \leqslant f < \xi)\} + \xi \mu \{E(\xi \leqslant f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан кўринадики, қуйи йиғинди s бунинг натижасида камаймайди.

Шунга ўхшаш, ушбу

$$y_{\nu+1} \mu(e_\nu) \geqslant \xi \mu \{E(y_\nu \leqslant f < \xi)\} + y_{\nu+1} \mu \{E(\xi \leqslant f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизликни ҳам ёзишимиз мумкин; бундан ҳам кўринадики, янги ξ нуқтани киритиш натижасида S йиғиндининг тегишли ҳади ортмас экан, демак, юқори йиғинди S нинг ўзи ҳам ортмайди.

(3) муносабатлардан кўринадики, (s, S) ва (s', S') оралиқлар (s'', S'') оралиқдан иборат умумий қисмга эга экан. Демак, s, s', S ва S' сонларнинг ҳаммаси узунлиги $2\lambda\mu(E)$ дан катта бўлмаган оралиқда жойлашгандир. λ ни истаганча кичик қилиш мумкинлигидан ва математик анализдаги умумий яқинлашиш принципига мувофиқ s, S йиғиндиларнинг умумий лимитга эга эканлиги келиб чиқади.

Демак, юқорида берилган таърифга мувофиқ ҳар қандай чегараланган ўлчовли $f(x)$ функция учун Лебег интеграли доимо мавжуд.*

31- §. Риман ва Лебег интегралларини солиштириш

Математик анализнинг умумий курсидан маълумки, $[a, b]$ сегментда берилган ва чегараланган $f(x)$ функциянинг Риман интегралини аниқламоқчи бўлсак, аввало у сегментни қуйидагича n қисмга бўламиз:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

ва қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu), \quad S = \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu);$$

бу ерда m_ν ва M_ν сонлар $f(x)$ функциянинг $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ сегментдаги мос равишда аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари, s, S йиғиндилар Дарбу йиғиндиларидир.

Агар $\lambda_n \left(= \max\limits_{0<\nu<n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\right)$ нолга интилганда, s ва S йиғиндиларнинг лимити мавжуд бўлиб, бир-бирига тенг бўлса ва бу лимитлар x_ν нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ функцияни $[a, b]$ сегментда Риман маъносида интегралланувчи функция дейилади.

Энди бу таърифни 30-§ да берилган Лебег интегралининг таърифи билан солиштирсак, икки нарсани сезамиз:

а) Лебег интегралини таърифлашда чегараланган $f(x)$ функциянинг аргументи ўзгарадиган $[a, b]$ сегментни эмас, балки $f(x)$ функциянинг ўзининг қийматлари ўзгарадиган $[A, B]$ сегментни n қисмга бўлган эдик;

б) Лебег интегралини таърифлашда тўплам ўлчови тушунчасидан фойдаландик; бу тушунчасиз Лебег интеграли таърифини бериб бўлмас эди.

Риман ва Лебег интегралларини таърифлашда қуйи ва юқори йиғиндиларни тузиб, лимитга ўтган эдик. Агар берилган функция чегараланган ва ўлчовли бўлса-да, Риман маъносидаги интеграл таърифини беришда тузилган қуйи ва юқори йиғиндилар лимитга эга бўлмаслиги мумкин. Лекин Лебег маъносида бундай функциялар учун интеграл доимо мавжуд.

Агар бирор $f(x)$ функциянинг Риман маъносида интеграли мавжуд бўлса, унинг Лебег маъносида ҳам интеграли мавжудлигини ва бу икки маънодаги интегралларнинг бир-бирига тенглигини 32-§ да исбот қиламиз.

Демак, интегралнинг Лебег таърифи унинг Риман таърифига кўра умумийроқ экан.

Бу фикрни мисол билан тушунтирамиз. $(0, 1)$ оралиқнинг рационал нуқталаридан иборат тўпламнинг характеристик функциясини оламиз. Бу функция учун Риман интеграли мавжуд эмас, аммо Лебег интеграли мавжуд ва унинг таърифига мувофиқ бу функциянинг интеграли нолга тенг, чунки рационал нуқталардан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг (30-§ даги характеристик функциялар учун Лебег интегралининг таърифига қаранг).

Теорема (А. Лебег теоремаси.) ***$[a, b]$ сегментда $f(x)$ функциянинг Риман интеграли мавжуд бўлиши учун унинг бу сегментда деярли узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.***

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун, аввало чегараланган бўлиши кераклиги Риман интегралининг таърифидан бевосита кўринади.

Чегараланган $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги узилиш нуқталаридан иборат бўлган тўпламни Q билан белгилаймиз ва $Q_n = Q\left\{\omega(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ бўлсин; бу ерда $\omega(x)$ билан $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги тебраниши белгиланган. Ҳар бир узилиш нуқта Q_n тўплам ларнинг бирига, албатта киради, шунинг учун

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n. \tag{1}$$

Энди Q_n тўпламнинг ёпиқлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, агар x_0 нуқта Q_n тўплам учун лимит нуқта бўлса, у ҳолда x_0 ни ўз ичига олган ҳар қандай оралиқ Q_n тўпламнинг ҳеч бўлмаганда битта нуқтасига эга бўлади, демак, бу оралиқда $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{n}$ дан кичик бўлмайди. Демак, Q_n ёпиқ тўплам ва шунинг учун у ўлчовли бўлади. (1) тенгликдан Q тўпламнинг ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади. $\mu(Q) > 0$ деб фараз қиламиз, у ҳолда Q_n тўпламлар орасида шундай Q_r тўплам топиладики, унинг учун ушбу

$$\mu(Q_r) = \alpha > 0 \tag{2}$$

муносабат бажарилади. Дарҳақиқат, агар

$$\mu(Q_p) = 0, \ p = 1, 2, \ldots$$

бўлганда эди, у ҳолда

$$\mu(Q) = \lim_{n \to \infty} \mu(Q_n) = 0 \tag{3}$$

бўлар эди, чунки

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots .$$

(3) муносабат фаразимизга зид, шунинг учун (2) муносабат ўринли. Энди $[a, b]$ сегментни n та $[a_k, a_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ сегментларга бўлиб, ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \tag{4}$$

йиғиндини тузамиз; бу ерда ω_k билан $f(x)$ функциянинг $[a_k, a_{k+1}]$ сегментдаги тебраниши белгиланган. Бу йиғиндидан Q_r тўпламнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмаган $[a_k, a_{k+1}]$ сегментларга тегишли ҳадларни чиқариб ташлаймиз. Q_r тўплам бўш бўлмаганлиги учун (чунки $\mu(Q_r) > 0$), (4) йиғиндидан ҳамма ҳадлар чиқиб кетмайди. Демак, ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geqslant \sum_k{}' \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geqslant \frac{1}{r} \sum_k{}' (a_{k+1} - a_k) \tag{5}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади; бу ерда $\sum'$ билан чиқариб ташлаш натижасида қолган сегментларга тегишли ҳадлар йиғиндиси белгиланган. Аммо:

$$\sum_k{}' (a_{k+1} - a_k) \geqslant \mu(Q_r) = \alpha,$$

чунки $\sum'$ га кирган ҳадларга тегишли $[a_k, a_{k+1}]$ сегментлар системаси Q_r тўпламни бутунлай ўз ичига олади. Шунинг учун, (5) тенгсизликдан ушбу

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geqslant \frac{\alpha}{r}$$

тенгсизлик келиб чиқади; бундан эса

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \neq 0 \quad \left(\delta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (a_{k+1} - a_k)\right)$$

муносабат ёки $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралга эга эмаслиги келиб чиқади.

Демак, агар $[a, b]$ сегментда чегараланган $f(x)$ функция учун $\mu(Q) > 0$ бўлса, у ҳолда бу функция Риман маъносида интегралланувчи бўлмас экан. Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг интегралланувчи бўлиши учун, унинг $[a, b]$ сегментда чегараланган ва деярли узлуксиз бўлиши зарур экан.

Кифоялиги. Чегараланган ва деярли узлуксиз $f(x)$ функцияни $[a, b]$ сегментда Риман маъносида интегралга эга эмас, деб фараз қилайлик. У ҳолда шундай $\varepsilon (> 0)$ сони топиладики, унинг учун $[a, b]$ сегментни ҳар қандай сегментчаларга бўлганда ҳам ушбу

$$\sum_k \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geqslant \varepsilon \tag{6}$$

тенгсизлик бажарилади. Энди натурал r сонни ушбу

$$r > \frac{2(b-a)}{\varepsilon} \tag{7}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб оламиз ва $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаган нуқталардан иборат Q_r тўпламнинг ўлчови мусбат эканлигини исбот қиламиз.

Бунинг учун

$$\sum_k \omega_k (a_{k+1} - a_k)$$

йиғиндини тузамиз ва уни

$$\sum_k \omega_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_k{}' \omega_k (a_{k+1} - a_k) + \sum_n{}'' \omega_k (a_{k+1} - a_k) \tag{8}$$

кўринишда ёзамиз; бу ерда $\sum'$ ва $\sum''$ тегишлича $\omega_k < \frac{1}{r}$ ва $\omega_k \geqslant \frac{1}{r}$ ли ҳадларнинг йиғиндисидан иборат. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланган бўлганлиги учун шундай k (>0) сони мавжудки, унинг учун ушбу

$$|f(x)| < k \quad (x \in [a, b])$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан

$$0 \leqslant \omega_k < 2k$$

тенгсизлик келиб чиқади. (7) ни ҳисобга олиб, ушбу

$$\sum_k{}' \omega_k (a_{k+1} - a_k) < \frac{1}{r} \sum_k{}' (a_{k+1} - a_k) \leqslant \frac{b-a}{r} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (9)$$

$$\sum_k{}'' \omega_k (a_{k+1} - a_k) < 2k \sum_k{}'' (a_{k+1} - a_k) = 2kl \qquad (10)$$

муносабатларни ёзамиз; бу ерда

$$l = \sum_k{}'' (a_{k+1} - a_k).$$

(6), (8), (9), (10) муносабатлардан

$$\varepsilon \leqslant \sum_k \omega_k (a_{k+1} - a_k) < \frac{\varepsilon}{2} + 2kl$$

муносабатлар келиб чиқади, бундан эса $l > \frac{\varepsilon}{4k} > 0$.

Энди $[a, b]$ сегментни тенг $2^n (n = 1, 2, \ldots)$ қисмга бўламиз. Юқоридагига ўхшаш бу бўлишларнинг ҳар бирига тегишли l_n сон ушбу

$$l_n \geqslant \frac{\varepsilon}{4k}$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$[a, b]$ сегментни тенг 2^n қисмга бўлганими да $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаган сегментчаларнинг йиғиндисида (тўплам маъносида) тузилган тўпламни H_n билан ва уларнинг умумий қисмини H билан белгилаймиз, яъни:

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Ушбу $H_{n+1} \subset H_n$ муносабат ўринли, чунки $(n+1)$ бўлишга тегишли бирорта сегментча учун $\omega_k \geqslant \frac{1}{r}$ бўлса, у ҳолда n бўлишга тегишли бирор сегментча бу сегментчани ўз ичига олади ва узунлиги икки марта катта бўлгани учун унда $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмайди, албатта.

Демак,

$$\mu(H) = \lim_{n\to\infty} \mu(H_n) = \lim_{n\to\infty} l_n \geqslant \frac{\varepsilon}{4k}. \tag{11}$$

H тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ нинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаганлиги учун ушбу

$$H \subset Q_r \subset Q$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин. Бундан эса (11) га мувофиқ қуйидаги

$$\mu(Q) \geqslant \mu(Q_r) \geqslant \frac{\varepsilon}{4k} > 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан кифоялик ҳам исбот бўлди.*

32-§. Чегараланган функция Лебег интегралининг асосий хоссалари

32. 1. Теорема (ўрта қиймат ҳақидаги теорема). *Агар E тўпламда ўлчовли $f(x)$ функция учун $m \leqslant f(x) \leqslant M$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда*[1]*:*

$$m\mu(E) \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant M\mu(E).$$

Исбот. s ва S йиғиндиларнинг тузилишига мувофиқ ушбу

$$m\mu(E) \leqslant s \leqslant S \leqslant M\mu(E)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин. Бу тенгсизликларда тегишли лимитга ўтилса, юқоридаги муносабатлар келиб чиқади.*

Лебег интегралининг қуйидаги 32. 2, 32. 3 ва 32. 4- хоссалари, унинг таърифидан ва 32. 1-теоремадан бевосита келиб чиқади.

32. 2. Натижа. *Агар E тўпламда ўлчовли $f(x)$ функция манфий бўлмаса, у ҳолда унинг интеграли ҳам манфий бўлмайди, яъни агар $f(x) \geqslant 0$ бўлса,*

$$\int_E f(x)dx \geqslant 0.$$

32. 3. Натижа. *Агар $\mu(E) = 0$ ва ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда чегараланган бўлса, у ҳолда $\int_E f(x)dx = 0$.*

32. 4. Натижа. *Агар c ўзгармас сон бўлса, у ҳолда*

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx.$$

---

[1] Интеграл символи олдида L ҳарфи ёзилмаган бўлса-да, келгусида у интегрални Лебег интеграли деб тушунамиз.

32. 5. **Теорема.** *Агар $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E_k \cap E_{k'} = 0, k \neq k')$ ва $f(x)$ ўлчовли бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f(x)dx; \tag{1}$$

бу тенгликларда E ва E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ тўпламлар ўлчовли деб ҳисобланади.

Интегралнинг бу хоссасини унинг **тўла аддитивлик** хоссаси дейилади.

Исбот. Аввал ушбу

$$E = E_1 \cup E_2 \quad (E_1 \cap E_2 = 0)$$

хусусий ҳолни кўрамиз. $f(x)$ функция E тўпламда чегараланганлиги учун шундай A ва B сонлар мавжудки, улар учун ушбу

$$A \leqslant f(x) \leqslant B$$

тенгсизликлар бажарилади. $[A, B]$ сегментни $y_0, y_1, \ldots, y_n$ нуқталар билан n қисмга бўлиб, қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$e_\nu = E(y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}),$$
$$e'_\nu = E_1(y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}),$$
$$e''_\nu = E_2(y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}).$$

Ушбу $e'_\nu \cup e''_\nu = e_\nu (e'_\nu \cap e''_\nu = 0)$ тенглик ўз-ўзидан тушунарли.

Булардан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(e_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(e'_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(e''_\nu).$$

Бу тенгликда $\lambda_n \left(\lambda_n = \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant n+1} (y_{\nu+1} - y_\nu)\right)$ ни нолга интилтириб лимитга ўтилса, Лебег интегралининг таърифига мувофиқ

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx$$

тенглик келиб чиқади.

Агар $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ (n—натурал сон) бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{E_i} f(x)dx \tag{2}$$

тенгликни юқоридаги хусусий ҳолдан математик индукция ёрдами билан бевосита келтириб чиқариш мумкин.

Энди умумий ҳолга ўтамиз, яъни

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i \quad (E_k\cap E_{k'}=0,\ k\neq k')$$

бўлсин. Бундан $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ келиб чиқади. $\mu(E)<+\infty$ бўлганлиги учун

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\mu(E_i)\to 0,\ n\to\infty. \tag{3}$$

$\bigcup_{i=n+1}^{\infty}E_i$ ни R_n билан белгилаймиз. Ҳадларининг сони чекли бўлгани учун (2) тенгликка асосан

$$\int_E f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}f(x)dx+\int_{R_n}f(x)dx \tag{4}$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. 32. 1-хоссага мувофиқ:

$$A\mu(R_n)\leqslant\int_{R_n}f(x)dx\leqslant B\mu(R_n). \tag{5}$$

(3) га асосан $\mu(R_n)\to 0,\ n\to\infty$. Демак, (5) дан:

$$\int_{R_n}f(x)dx\to 0,\ n\to\infty.$$

(4) ва охирги муносабатлардан (1) тенглик келиб чиқади.*

32. 6. **Теорема.** ***Агар ўлчовли E тўпламда ўлчовли $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар берилган бўлса, у ҳолда:***

$$\int_E(f_1(x)+f_2(x))dx=\int_E f_1(x)dx+\int_E f_2(x)dx. \tag{6}$$

Исбот. Аввал хусусий ҳолни кўрамиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялардан бири, масалан, $f_2(x)$ функция E тўпламда ўзгармас c сонга тенг бўлсин. Бу ҳолда Лебег интеграли таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\int_E(f_1(x)+f_2(x))dx=\int_E f_1(x)dx+c\mu(E) \tag{7}$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Энди $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ ихтиёрий чегараланган ўлчовли функциялар бўлсин.

$f_1(x)$ функциянинг қийматлари ўзгарадиган $[A,\ B]$ сегментни $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$ нуқталар ёрдами билан n та қисмга бўламиз ва ушбу

$$e_\nu=E(y_\nu\leqslant f_1(x)<y_{\nu+1})\quad (\nu=\overline{0,\ n-1})$$

тўпламларни тузамиз.

32. 5-теоремадан ва (7) тенгликдан фойдаланиб

$$\int\limits_E \{f_1(x) + f_2(x)\}dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{e_\nu} [f_1(x) + f_2(x)]dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{e_\nu} [y_\nu + f_2(x)]dx = s + \int\limits_E f_2(x)dx$$

муносабатларни ёзамиз.

Шунга ўхшаш y_ν ўрнига $y_{\nu+1}$ ёзилса, ушбу

$$\int\limits_E \{f_1(x) + f_2(x)\}dx \leqslant S + \int\limits_E f_2(x)dx$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак,

$$s + \int\limits_E f_2(x)dx \leqslant \int\limits_E \{f_1(x) + f_2(x)\}dx \leqslant S + \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Энди бу муносабатларнинг чап ва ўнг томонида $\lambda_n (= \max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n-1} (y_{\nu+1} - y_\nu))$ нолга интилганда лимитга ўтилса, (6) тенглик келиб чиқади.$_*$

Интегралнинг 32. 3, 32. 5 ва 32. 6-хоссаларидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

32. 7. Натижа. ***Агар ўлчовли $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар E тўпламда эквивалент бўлса, у ҳолда:***

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Исбот. Дарҳақиқат, ўлчови нолга тенг e тўпламда $f(x) \neq g(x)$ бўлсин ва $E \cap C_E e$ тўпламда $f(x) \equiv g(x)$ бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_E (f-g)dx = \int\limits_e (f-g)dx + \int\limits_{E\cap C_E e} (f-g)dx$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл нолга тенг, чунки $\mu(e) = 0$. Иккинчи интеграл ҳам нолга тенг, чунки $E \cap C_E e$ тўпламда $f(x) \equiv g(x)$.$_*$

32. 8. Теорема. ***Агар E тўпламда ўлчовли $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар берилиб, $f(x) \leqslant \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда***

$$\int\limits_E f(x)dx \leqslant \int\limits_E \varphi(x)dx. \qquad (8)$$

Исбот. $f(x)$ функцияга тегишли y_ν бўлиш нуқталарини олиб, e_ν тўпламларни тузамиз. e_ν тўпламда ушбу $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant y_\nu$ тенгсизликлар бажарилади.

Демак,

$$\int\limits_E \varphi(x)dx = \sum_\nu \int\limits_{e_\nu} \varphi(x)dx \geqslant \sum_\nu y_\nu\, \mu(e_\nu).$$

Бу муносабатнинг ўнг томонидаги йиғинди $\int\limits_E f(x)dx$ га интилади, шунинг учун бундан (8) тенгсизлик келиб чиқади.$_*$

32. 9. **Теорема.** *Қуйидаги*

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_E |f(x)|dx \tag{9}$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Ушбу

$$E_1 = E\{f(x) \geqslant 0\}, \quad E_2 = E\{f(x) < 0\}$$

тўпламларни оламиз.

Энди (9) тенгсизлик

$$\left|\int\limits_E f(x)dx\right| = \left|\int\limits_{E_1} f(x)dx - \int\limits_{E_2} |f(x)|dx\right| \leqslant \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} |f(x)|dx,$$

$$\int\limits_E |f(x)|dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} |f(x)|dx$$

муносабатларнинг чап ва ўнг томонларини солиштиришдан бевосита келиб чиқади.$_*$

32. 10. **Теорема.** *Агар $f(x) \geqslant 0$ ва $\int\limits_E f(x)dx = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда деярли нолга тенг.*

Исбот. M сони билан $f(x)$ функциянинг юқори чегарасини белгилаб, ушбу

$$E_n = E\left\{\frac{M}{n+1} < f(x) \leqslant \frac{M}{n}\right\}$$

$$E_+ = E_1 \cup E_2 \cup \ldots; \ E_+ \subset E$$

тўпламларни тузамиз. Равшанки, $E\{x : f(x) > 0\} = E_+$ ва ушбу

$$\mu(E_n) \leqslant \frac{n+1}{M} \int\limits_{E_n} f(x)dx \leqslant \frac{n+1}{M} \int\limits_{E_+} f(x)dx = 0$$

муносабатлар ўринли. Демак, $\mu(E_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Бундан:

$$\mu(E_+) = 0._*$$

32. 11. **Теорема.** *Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция учун Риман интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция учун Лебег интеграли ҳам мавжуд бўлиб, бу интеграллар ўзаро тенг бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда Риман интеграли мавжудлигидан қуйидаги хулосалар келиб чиқади: 1) $f(x)$ чегараланган; 2) $f(x)$ нинг узилиш нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг ёки $f(x)$ деярли узлуксиз.

$f(x)$ нинг $[a, b]$ сегментда деярли узлуксизлигидан, Лузин теоремасига мувофиқ, унинг $[a, b]$ сегментда ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Бу хулосалардан эса $f(x)$ функция учун Лебег интегралининг мавжудлиги келиб чиқади (30-§ даги теоремага қаранг).

Энди $f(x)$ функциянинг Риман ва Лебег интеграллари ўзаро тенглигини исбот қиламиз.

$[a, b]$ сегментни n та $[x_k, x_{k+1}]$ сегментчаларга бўламиз ва Лебег интегралининг 32.1-хоссасидан фойдаланиб, ушбу

$$m_k(\Delta x_k) \leqslant (L) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \leqslant M_k(\Delta x_k) \tag{10}$$

тенгсизликларни ёзамиз; бу ерда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, m_k ва M_k мос равишда $f(x)$ нинг $[x_k, x_{k+1}]$ сегментдаги қуйи ва юқори чегаралари. (10) дан:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (L) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S, \tag{11}$$

бунда s ва S йиғиндилар $f(x)$ нинг $[a, b]$ сегментдаги Дарбу йиғиндилари.

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда Риман интеграли мавжуд бўлганлиги учун, унинг таърифига мувофиқ, ушбу

$$\lim_{\alpha_n \to 0} s = \lim_{\alpha_n \to 0} S = (R) \int_a^b f(x)dx \tag{12}$$

муносабатлар ўринли бўлади; бу ерда $\alpha_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\Delta x_k)$.

(11) ва (12) муносабатлардан бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$(R) \int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx. *$$

33-§. Лебег интеграли остида лимитга ўтиш

Ўлчовли E тўпламда аниқланган ўлчовли ва чегараланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бу кетма-кетлик ўлчовли $F(x)$ функцияга одатдаги маънода (ёки деярли, ёки ўлчов маъносида) яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \tag{1}$$

муносабат доимо ўринлими, деган савол туғилади. (1) муносабатнинг, умуман айтганда, доимо ўринли эмаслигини қуйидаги мисолда кўриш мумкин.

Масалан, $f_n(x)$ функция $[0,1]$ сегментда қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}\left(0,\ \frac{1}{n}\right),\\ n, & x\in\left(0,\ \frac{1}{n}\right).\end{cases}$$

У ҳолда ҳар қандай $x(\in[0,1])$ учун ушбу

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

тенглик ўринлидир, лекин

$$\int_0^1 f_n(x)dx=1,$$

яъни (1) муносабат бажарилмас экан.

Энди, $f_n(x)$ функциялар кетма-кетлиги учун қандай шартлар бажарилганда (1) муносабат ўринли бўлади, деган савол туғилади. Бу саволга А. Лебегнинг қуйидаги теоремаси жавоб беради.

33. 1. Теорема (А. Лебег теоремаси). ***Ўлчовли E тўпламда ўлчовли ва чегараланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бу кетма-кетлик ўлчовли $F(x)$ функцияга ўлчов маъносида яқинлашувчи бўлсин. Агар E тўпламнинг ҳамма элементлари учун ва ҳар қандай натурал n сони учун ушбу***

$$|f_n(x)|<K$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган K сони мавжуд бўлса, у ҳолда бундай функциялар кетма-кетлиги учун (1) муносабат ўринли бўлади.

Исбот. E тўпламда ушбу

$$|F(x)|\leq K \tag{2}$$

тенгсизлик деярли бажарилади; дарҳақиқат, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликдан Рисс теоремасига асосан шундай $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик қисмини ажратиб олишимиз мумкинки, у $F(x)$ функцияга деярли яқинлашади:

$$f_{n_k}(x)\xrightarrow{\text{деярли}}F(x).$$

Энди

$$|f_{n_k}(x)|<K$$

тенгсизликда лимитга ўтилса, (2) муносабат келиб чиқади. Ихтиёрий $\sigma(>0)$ сон учун

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-F|\geqslant\sigma);$$

$$B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma)$$

тўпламларни тузамиз. У ҳолда

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \leqslant \int_E |f_n(x) - F(x)|dx = \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx +$$

$$+ \int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx. \tag{3}$$

$A_n(\sigma)$ тўпламда

$$|f_n(x) - F(x)| < 2K$$

тенгсизлик деярли бажарилганлиги учун қуйидаги

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|dx < 2K\mu(A_n(\sigma)) \tag{4}$$

муносабат келиб чиқади. Иккинчи томондан (32. 1- хосса)

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \leqslant \sigma\mu(B_n(\sigma)) \leqslant \sigma\mu(E).$$

(3), (4) ва охирги муносабатлардан:

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| < 2K\mu(A_n(\sigma)) + \sigma\mu(E). \tag{5}$$

Ихтиёрий кичик $\varepsilon(> 0)$ сон учун, $\sigma(> 0)$ ни

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \tag{6}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб оламиз. Теореманинг шартига мувофиқ ҳар қандай $\sigma(> 0)$ учун

$$\mu(A_n(\sigma)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Демак, шундай натурал n_0 сон мавжудки, унинг учун

$$2K\mu(A_n(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant n_0) \tag{7}$$

муносабат ўринли бўлади.

Энди (5) тенгсизликни (6), (7) ларга мувофиқ қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0).$$

Бу муносабатдан эса теореманинг исботи келиб чиқади.*

33. 2. Изоҳ. Агар теореманинг шартида $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $F(x)$ га деярли яқинлашса ва $|f_n(x)| < K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тенгсизлик E тўпламда деярли бажарилса, у ҳолда теорема ўз кучини сақлайди.

34- §. Чегараланмаган функциянинг Лебег интеграли Жамланувчи функциялар

Ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда аниқланган бўлсин. Аввал $f(x)$ ни E тўпламда манфий эмас, яъни $f(x) \geqslant 0$ $(x \in E)$ деб фараз қиламиз ва ушбу

$$[f(x)]_n = \begin{cases} \text{агар } f(x) \leqslant n \text{ бўлса, } f(x) \\ \text{агар } f(x) > n \text{ бўлса, } n \end{cases}$$

функцияни тузамиз. Бу функция E тўпламда ўлчовли ва чегараланган, демак, унинг Лебег интеграли мавжуддир.

1-таъриф. *Агар*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f(x)]_n dx \tag{1}$$

мавжуд бўлса, бу лимитни $f(x)$ $(\geqslant 0)$ *функциянинг* E *тўпламда Лебег интеграли дейилади ва у* $\int_E f(x)dx$ *билан белгиланади.*

E тўпламда ўлчовли ва мусбат $f(x)$ функция Лебег интегралига эга бўлиши учун

$$\int_E [f(x)]_n dx$$

интегралларнинг чегараланган бўлиши зарур ва кифоядир, чунки

$$\int_E [f(x)]_n dx \leqslant \int_E [f(x)]_{n+1} dx$$

тенгсизлик n нинг ҳамма қийматлари учун бажарилади.

Манфий функциянинг ҳам Лебег интеграли худди шунга ўхшаш аниқланади.

Умумий ҳолда, яъни ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда ихтиёрий ишорага эга бўлса, E тўпламни икки ўзаро кесишмайдиган E_1 ва E_2 қисмларга ажратамиз:

$$E_1 = E\{f(x) \geqslant 0\},$$
$$E_2 = E\{f(x) < 0\};$$

яъни E_1 нинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ манфий эмас, E_2 нинг ҳар бир нуқтасида эса $f(x)$ манфий.

Агар

$$\int_{E_1} f(x)dx, \quad \int_{E_2} f(x)dx$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг E тўплам бўйича интегралини

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx \tag{2}$$

формула билан аниқлаймиз.

2-таъриф. *Ўлчовли $f(x)$ функциянинг E тўпламда, юқоридаги маънода, интеграли мавжуд ва чекли бўлса, ундай функцияни E тўпламда жамланувчи функция деймиз.*

Энди жамланувчи функцияларнинг хоссалари билан танишамиз.

34. 1. **Теорема.** ***Ўлчовли $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлиши учун, $|f(x)|$ функциянинг жамланувчи бўлиши зарур ва кифоядир; агар $|f(x)|$ жамланувчи бўлса, у ҳолда ушбу***

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$$\int_E |f(x)|dx = \int_{E_1} f(x)dx - \int_{E_2} f(x)dx$$

тенгликнинг ўринли экани ўз-ўзидан кўринади. Бундан ва (2) тенгликдан теорема бевосита келиб чиқади, чунки E_2 тўпламнинг таърифига мувофиқ $\int_{E_2} f(x)dx \leqslant 0$ бўлади.$_*$

Қуйидаги 34. 2 — 34. 7-хоссалар шунга ўхшаш осон исбот этилади; бу хоссаларда учрайдиган функциялар ўлчовли деб ҳисобланади.

34. 2. **Теорема.** ***Агар k ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $\int_E kf(x)dx = k\int_E f(x)dx$.***

34. 3. **Теорема.** ***Агар $f \sim g$ бўлса ва булардан бирининг интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчисининг ҳам интеграли мавжуд бўлади ва***

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

34. 5. **Теорема.** ***Агар $f(x) \geqslant 0$ ва $\int_E f(x)dx = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда деярли нолга тенг.***

34. 6. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда E нинг ҳар қандай ўлчовли E_0 қисмида ҳам $f(x)$ жамланувчи.***

34. 7. **Теорема.** ***$f(x)$ ва $F(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлиб, булар орасида $|f(x)| \leqslant F(x)$ $(x \in E)$***

муносабат ўринли бўлсин. Агар $F(x)$ жамланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ ҳам жамланувчи бўлади ва

$$\int_E |f(x)|dx \leqslant \int_E F(x)dx.$$

34. 8. Теорема (интегралнинг тўла аддитивлиги ҳақида). ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлса ва E ўзаро кесишмайдиган сони саноқли, ўлчовли E_1, E_2, ..., E_n, ... ($E_k \cap E_{k'} = \varnothing$, $k \neq k'$) тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда:***

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

Исбот. Аввало теоремани $f(x) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун исбот этамиз. 32. 5-хоссага асосан

$$\int_E [f(x)]_n dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} [f(x)]_n dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx \tag{3}$$

муносабат ўринли бўлади. (3) тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\int_E f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx \tag{4}$$

муносабатни ёзишимиз мумкин. Иккинчи томондан 32. 5 га асосан ихтиёрий натурал m сон учун

$$\int_E [f(x)]_n dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k} [f(x)]_n dx.$$

Бу муносабатда аввал n ни, сўнг m ни чексизга интилтириб, ушбу

$$\int_E f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \tag{5}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (4) ва (5) тенгсизликлардан, биз кўраётган ҳол учун, теореманинг исботи келиб чиқади. $f(x) < 0$ бўлган ҳол учун ҳам теорема худди шунга ўхшаш исбот этилади.

Умумий ҳол учун теореманинг исботи (2) формуладан ва юқорида кўрилган ҳоллардан бевосита келиб чиқади.

34. 9. Теорема. ***Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар E тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг $f(x)+g(x)=\varphi(x)$ йиғиндиси ҳам жамланувчи бўлади ва***

$$\int_E \varphi(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

Исбот. 1. Аввал $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар манфий бўлмаган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $[\varphi]_n \leqslant [f]_n + [g]_n \leqslant [\varphi]_{2n}$ бўлади. Демак, $\int\limits_E [\varphi]_n dx \leqslant \int\limits_E [f]_n dx + \int\limits_E [g]_n dx \leqslant \int\limits_E [\varphi]_{2n} dx$. Бундан, $n \to \infty$ да ушбу

$$\int\limits_E \varphi(x)dx \leqslant \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx \leqslant \int\limits_E \varphi(x)dx$$

муносабатлар келиб чиқади. Шу билан кўрилаётган хусусий ҳол учун теорема исбот бўлди.

2. Агар $f(x) \geqslant 0$, $g(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $E^+ = E\{\varphi(x) \geqslant 0\}$ тўпламда ушбу $f(x) = \varphi(x) + (-g(x))$ тенглик ўринли бўлади. Шунга ўхшаш $E^- = E\{\varphi(x) < 0\}$ тўпламда ушбу

$$-g(x) = f(x) + (-\varphi(x))$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликлардан фойдаланиб, 2-ҳолни 1-ҳолга келтиришимиз мумкин.

3. $f(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$. 4. $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ ҳоллар ҳам, 2-ҳолга ўхшаш, 1-ҳолга келтирилади.

Энди теоремани умумий ҳолда ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш учун ушбу

$$E^+ = E\{\varphi \geqslant 0\} = E_1\{f \geqslant 0,\ g \geqslant 0,\ \varphi \geqslant 0\} \cup E_2\{f \geqslant 0,\ g < 0,\ \varphi \geqslant 0\} \cup E_3\{f < 0,\ g \geqslant 0,\ \varphi \geqslant 0\},$$

$$E^- = E\{\varphi < 0\} = E_1\{f \geqslant 0,\ g < 0,\ \varphi < 0\} \cup E_2\{f < 0,\ g \geqslant 0,\ \varphi < 0\} \cup E_3\{f < 0,\ g < 0,\ \varphi < 0\}$$

тенгликлардан ва 34. 8-теоремадан фойдаланилса кифоя.*

34. 10. **Теорема.** (Интегралнинг абсолют узлуксизлиги ҳақида.) ***Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлса ва $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$ тўпламлар кетма-кетлигининг ҳар бири E нинг қисми (яъни $E_n \subset E$) бўлиб, $\mu(E_m) \to 0$ $(m \to \infty)$, у ҳолда $\int\limits_{E_m} f(x)dx \to 0$ $(m \to \infty)$ ва ихтиёрий берилган $\varepsilon(>0)$ учун шундай $\delta(>0)$ сони мавжудки, $\mu(E_m) < \delta$ бўлганда***

$$\int\limits_{E_m} f(x)dx < \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. (2) формулага асосланиб, теоремани $f(x) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун исбот этсак кифоя. $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлганлигидан ихтиёрий $\varepsilon(> 0)$ учун шундай натурал n сони мавжудки, унинг учун ушбу

$$\int\limits_E \{f(x) - [f(x)]_n\}\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

тенгсизлик бажарилади.

Демак,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\int\limits_E f_m(x)dx \geqslant \int\limits_E [f(x)]_n dx. \tag{15}$$

Агар $f(x)$ функция деярли чекли бўлса, у ҳолда (15) дан $n\to\infty$ да бевосита (14) келиб чиқади. Агар бирорта ўлчови мусбат e тўпламда $f(x)=+\infty$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий n учун ушбу

$$\int\limits_E [f(x)]_n dx \geqslant n\mu(e)$$

тенгсизлик бажарилади, демак, (14) тенгсизликнинг ўнг томони чексизга тенг бўлади.*

34. 13. Теорема. ***Е тўпламда манфий бўлмаган, ўсиб борувчи, ўлчовли***

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

бўлса, у ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x)dx. \tag{16}$$

Исбот. 34. 12-теоремага мувофиқ:

$$\int\limits_E f(x)dx \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_E f_n(x)dx. \tag{17}$$

Теореманинг шартига кўра $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx$ мавжуд ва

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_E f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E f(x)dx. \tag{18}$$

Иккинчи томондан, ҳар қандай n учун

$$f_n(x) \leqslant f(x)$$

ва бундан:

$$\int\limits_E f_n(x)dx \leqslant \int\limits_E f(x)dx.$$

Демак, n га нисбатан лимитга ўтганда ҳам

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx \leqslant \int\limits_E f(x)dx. \tag{19}$$

Энди (16) муносабат (17), (18) ва (19) лардан келиб чиқади.*

Бу теоремадан натижа сифатида бевосита қуйидаги теоремани келтириб чиқариш мумкин.

34. 14. Теорема. *E тўпламда ўлчовли* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... *функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар* $\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ва* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x) = f(x)$ *бўлса, у ҳолда:*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E \varphi_n(x)dx.$$

Буни исботлаш учун 34. 13- теоремани $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$ функциялар кетма-кетлигига татбиқ қилиш керак.

34. 15. Натижа. 34. 14-*теореманинг шартлари бажарилса ва ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E \varphi_n(x)dx < +\infty$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда E тўпламда

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = 0 \tag{20}$$

муносабат деярли бажарилади.

Исбот. Бу ҳолда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ функция жамланувчи ва, демак, деярли чекли бўлади. Шунинг учун $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ қатор деярли яқинлашади ва бу қаторнинг яқинлашиш нуқталарида (20) муносабат ўз-ўзидан бажарилади.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Лебег интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласини ёзиш мумкинми?

2. P_0— II бобда киритилган Кантор мукаммал тўплами бўлсин. Агар

$$f(x) = \begin{cases} x \in P_0 \text{ бўлса, } 0, \\ x \in [0,1] \setminus P_0 \text{ бўлса, } 1 \end{cases}$$

бўлса,

$$\int_0^1 f(x)dx$$

ҳисоблансин.

3. Q — II боб, 15- масалада тузилган тўплам бўлсин. Агар

$$f(x)=\begin{cases} x\in Q \text{ бўлса, } 0, \\ x\in[0,1]\setminus Q \text{ бўлса, } 1 \end{cases}$$

бўлса,

$$\int_0^1 f(x)dx$$

ҳисоблансин.

4. Q — II боб, 15- масаладаги тўплам бўлсин. Агар

$$f(x)=\begin{cases} x\in Q \text{ бўлса, } 1, \\ x\in[0,1]\setminus Q \text{ бўлса, } x \end{cases}$$

бўлса,

$$\int_1^0 f(x)dx$$

ҳисоблансин.

5. Агар $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., $F(x)$ — функциялар E тўпламда ўлчовли бўлиб, E да аниқланган ихтиёрий ўлчовли $g(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)dx=\int_E F(x)g(x)dx$$

муносабат ўринли бўлса, бундан

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)$$

муносабатнинг деярли ўринлилиги келиб чиқадими?

6. (Е. Титчмарш масаласи.) P_0 — II бобда киритилган Кантор тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция P_0 да 0 ва P_0 га қўшма бўлиб, узунлиги 3^{-n} га тенг интервалда n га тенг бўлса,

$$\int_0^1 f(x)dx=3$$

исботлансин.

7. Агар $f_n(x)\geqslant 0$ ва $\int_E f_n(x)dx\to 0$, бўлса, у ҳолда $f_n(x)\Rightarrow 0$, аммо $f_n(x)$ нинг 0 га деярли яқинлашиши шарт эмас. Шуни исботланг.

8. Ушбу

$$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\to 0$$

муносабат $f_n(x)\Rightarrow 0$ га эквивалент эканини кўрсатинг.

VII БОБ

КВАДРАТИ БИЛАН ЖАМЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР

Квадрати билан жамланувчи функциялар синфи математиканинг турли соҳаларида муҳим татбиқларга эга бўлган функциялар синфидир. Бу функциялар синфи ўз хоссалари билан n ўлчовли Эвклид фазосига жуда яқин. Бу бобда мана шу функциялар билан шуғулланамиз.

35-§. L_p синфлари ва асосий тенгсизликлар.

Бундан кейин E билан тўғри чизиқдан олинган ўлчовли тўпламни белгилаймиз.

Таъриф. *Функцияларнинг $L_p(E)$ синфи деб ушбу*

$$\int_E |f(x)|^p dx$$

интеграли мавжуд бўлган барча ўлчовли $f(x)$ функциялар тўпламини айтилади.

Мисоллар: 1) $L_1(a, b)$ синфи (a, b) оралиқда жамланувчи бўлган функциялардан иборат. Бу синфни одатда L билан белгилайдилар.

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функция $L_2(0, \infty)$ синфига киради.

3) Агар ўлчовли $f(x)$ функция чекли (a, b) оралиқда чегараланган бўлса, у ҳолда ҳар қандай $p(\geqslant 0)$ учун, $f(x) \in L_p(a, b)$.

4) Ушбу $|f| \leqslant \frac{1+f^2}{2}$ тенгсизликдан чегараланган E тўпламлар учун $L_2(E) \subset L(E)$ муносабат бевосита келиб чиқади. Аммо, аксинчаси (яъни, $L \subset L_2$) ўринли эмас. Масалан, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функция $(0,1)$ оралиқда жамланувчи бўлиб, унинг квадрати $\left(f^2(x) = \frac{1}{x}\right)$ шу оралиқда жамланувчи бўлмайди. Дарҳақиқат,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty.$$

35.1. Теорема (Буняковский—Щварц тенгсизлиги). *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_2 синфга кирса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x) \in L$ ва*

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left\{\left[\int |f(x)|^2 dx\right]\left[\int |g(x)|^2 dx\right]\right\}^{1/2} \qquad (1)$$

муносабатлар ўринли.

Исбот. $f(x)\cdot g(x)$ кўпайтманинг жамланувчилиги ушбу

$$2|g(x)\cdot f(x)| \leqslant f^2(x) + g^2(x)$$

муносабатдан бевосита келиб чиқади. (I) тенгсизликнинг ўринлилигини кўрсатиш учун қуйидаги

$$\int(\lambda f + g)^2dx = \lambda^2\int f^2dx + 2\lambda\int f\cdot g dx + \int g^2dx = a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geqslant 0$$

тенгсизликка мурожаат қиламиз. Бу ерда: $a = \int f^2(x)dx$, $b = \int f(x)g(x)dx$ ва $c = \int g^2(x)dx$. Маълумки, $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ ифода λ нинг ҳамма ҳақиқий қийматларида манфий бўлмаслиги учун $a (> 0)$, b, c коэффициентлар ушбу

$$b^2 \leqslant ac$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва кифоядир. Бундан эса (I) тенгсизлик бевосита келиб чиқади.*

35. 2. **Натижа.** ***Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $L_p (p \geqslant 2)$ га кирса, у ҳолда: $f(x)\cdot g(x) \in L_{p/2}$.*** ((I) тенгсизлик $f^{p/2}\cdot g^{p/2}$ функцияга татбиқ қилинсин).

35. 3. **Натижа.** ***Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_2 га кирса, у ҳолда $f \pm g$ ҳам L_2 га киради.***

Бу натижа $(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$ тенгликдан келиб чиқади, чунки унинг ўнг томонидаги функциялар жамланувчи функциялардир.

35. 4. **Теорема** (Хёлдер тенгсизлиги). ***Агар $f(x) \in L_p$, $g(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}$ $(p > 1)$ бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x) \in L$ ва***

$$\left|\int f(x)\cdot g(x)dx\right| \leqslant \left\{\int |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx\right\}^{\frac{p-1}{p}} \qquad (11)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$$|g(x)| \leqslant |f(x)|^{p-1} \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталардан иборат тўпламни A билан белгилаймиз. Демак, (1) га асосан, A тўпламда

$$|f(x)\cdot g(x)| \leqslant |f(x)|^p \qquad (2)$$

тенгсизлик ўринли ва $f(x)\cdot g(x)$ функция A тўпламда жамланувчи бўлади, чунки $f(x) \in L_p$. A тўпламнинг тўлдирувчиси CA тўпламда эса

$$|f(x)| < |g(x)|^{\frac{1}{p-1}}$$

ёки

$$|f(x)\cdot g(x)| < |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} \qquad (3)$$

тенгсизликлар бажарилади, яъни $f(x)\cdot g(x)$ функция CA тўпламда ҳам жамланувчи бўлади, чунки $g(x)\in L_{\frac{p}{p-1}}$. Демак, $f(x)\cdot g(x)$ E тўпламда ҳам жамланувчидир. (2) ва (3) тенгсизликларга асосан:

$$\left|\int f\cdot g dx\right| \leqslant \int_A |f\cdot g| dx + \int_{CA} |f\cdot g| dx \leqslant \int_A |f|^p dx + \int_{CA} |g|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad \int_{CA} |f|^p dx \leqslant \int_{CA} |g|^{\frac{p}{p-1}} dx \text{ ва } \int_A |g|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqslant \int_A |f|^p dx,$$

$$\left(I_1 = \int |f|^p dx, \quad I_2 = \int |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right). \tag{4}$$

Агар $I_1 = 0$ ёки $I_2 = 0$ ҳоллар истисно қилинса ва (4) тенгсизликдаги $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни мос равишда

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} f(x) \text{ ва } \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} g(x)$$

функциялар билан алмаштирилса, (4) нинг чап томони ўзгармайди, аммо ўнг томонидаги ҳар бир ҳад $I_1^{\frac{1}{p}} \cdot I_2^{1-\frac{1}{p}}$ га тенг бўлади. Демак,

$$\left|\int f\cdot g dx\right| \leqslant I_1^{\frac{1}{p}} \cdot I_2^{1-\frac{1}{p}} = \left\{\int |f|^p dx\right\}^{1/p} \left\{\int |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} \tag{II}$$

Агар I_1 ёки I_2 лардан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ ёки $g(x)$ функция нолга эквивалент бўлиб, (II) тенгсизлик ўринлилигича қола беради*.

35. 5. **Теорема.** (Минковский ва Коши тенгсизликлари). ***Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_p $(p \geqslant 1)$ синфига кирса, у ҳолда:***

$$\left\{\int |f+g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int |f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int |g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{III}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Хёлдер тенгсизлигига биноан:

$$\int |f+g|^p dx = \int |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} dx \leqslant \int |f|\cdot|f+g|^{p-1} dx +$$

$$+ \int |g|\cdot|f+g|^{p-1} dx \leqslant \left\{\int |f|^p dx\right\}^{1/p} \left\{\int |f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left\{\int |g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int |f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

Бу муносабатнинг икки томонини

$$\left\{\int |f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

миқдорга бўлинса, (III) тенгсизлик келиб чиқади.*

$p = 2$ бўлса, (III) дан Кошининг

$$\left\{\int |f + g|^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int f^2 dx\right\}^{1/2} + \left\{\int g^2 dx\right\}^{1/2} \qquad \text{(IV)}$$

тенгсизлиги келиб чиқади.

Бу тенгсизлик L_2 синфини ўрганишда катта аҳамиятга эга.

36- §. Норма. Ўрта маънода яқинлашиш ва суст яқинлашиш

$L_2 = L_2(a, b)$ синфидан олинган ҳар бир $f(x)$ функцияга

$$+\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

сонни мос қўямиз ва бу сонни $f(x)$ нинг нормаси деймиз ва нормани $\|f\|$ билан белгилаймиз.

L_2 синфида норма тушунчасининг киритилиши, унга фазо сифатида қараш имконини беради. Бу эса норманинг қуйидаги хоссаларига асосланган:

1. $\|f\| \geqslant 0$; $f(x) \sim 0$ бўлгандагина $\|f\| = 0$.
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.
3. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ (учбурчак аксиомаси).

1 ва 2- муносабатлар норманинг таърифидан бевосита кўринади, 3- тенгсизлик Коши тенгсизлигидан келиб чиқади. Нормадан фойдаланиб L_2 фазода Эвклид фазоси учун ўринли бўлган кўпгина фактларни исбот этиш мумкин. Тегишли фактлар қуйида келтирилади. Шунинг учун ҳам бу бобнинг бошида биз L_2 фазони n ўлчовли Эвклид фазосига хоссалари маъносида яқин деб айтган эдик. L_2 синфига биринчи марта немис математиги Д. Хилберт бундай нуқтаи назардан қараган; шу сабабли L_2 синфини Хилберт фазоси деб ҳам атайдилар. Бу фазода икки f ва g нуқталар (L_2 нинг элементларини унинг нуқталари ҳам дейилади) орасидаги масофа сифатида улар айирмасининг нормасини қабул қиламиз, яъни:

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Албатта, икки эквивалент функция бу фазода биргина нуқта сифатида қабул қилинади. Юқоридаги норманинг хоссалари $\rho(f, g)$ масофа учун ҳам ўринли бўлади, чунки ρ ни норма орқали ифода қилдик.

Масофа ёрдами билан Хилберт фазосида нуқталар кетма-кетлиги учун яқинлашиш тушунчасини (демак, лимит нуқта тушунчасини) киритиш мумкин.

1-таъриф. *Агар* $\rho(f_n, f) = \|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ *бўлса, у ҳолда* $f(\in L_2)$ *нуқтани* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ $(f_n \in L_2,\ n = 1, 2, \ldots)$ *нуқ-*

талар кетма-кетлигининг лимити деймиз ва

$$f_n \to f \text{ ёки } \lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{1}$$

кўринишида ёзамиз.

Келтирилган яқинлашиш тушунчаси билан одатдаги функциялар кетма-кетлигининг яқинлашиши орасидаги фарқни доимо эсда тутмоқ керак.

Норманинг таърифига мувофиқ (1) муносабатни яна қуйидагича ёзишимиз ҳам мумкин:

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \to 0.$$

Юқорида берилган таъриф маъносидаги яқинлашишни ўрта маънода яқинлашиш дейилади. Бу яқинлашиш тушунчасига оид бир неча хоссани исбот қиламиз.

36. 1. **Теорема.** ***Ўрта маънода яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик биргина лимитга эга.***

Исбот. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик икки турли f ва $g(\sim f)$ лимитларга эга деб фараз қилайлик; яъни $f_n \to f$ ва $f_n \to g$ $(n \to \infty)$ бўлсин. Учбурчак аксиомасидан фойдаланиб

$$\|f - g\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилади; демак, биринчи аксиомага мувофиқ $f \sim g$ ёки f ва g функциялар L_2 фазода, илгари айтганимиздек, бир нуқтанигина тасвирлайди; бу эса фаразимизга зид.*

36. 2. **Теорема.** ***Агар $f_n \to f$ бўлса, у ҳолда $\|f_n\| \to \|f\|$.***

Исбот. Бу факт қуйидаги муносабатдан бевосита келиб чиқади:

$$|\|f_n\| - \|f\|| \leqslant \|f_n - f\|$$

(чунки $\|f_n\| \leqslant \|f\| + \|f_n - f\|$ ва $\|f\| \leqslant \|f_n\| + \|f_n - f\|$).*

Норманинг бу исбот қилинган хоссаси унинг узлуксизлиги дейилади.

Энди ўрта маънода яқинлашиш тушунчаси деярли ва ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаларига нисбатан қандай муносабатда эканлигини аниқлаймиз.

36. 3. Теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ ***функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик $f(x)$ га ўлчов бўйича ҳам яқинлашади.***

Исбот. Ҳар қандай мусбат σ сони учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b (f_n - f)^2 dx \geqslant \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 dx \geqslant \sigma^2 \mu(A_n(\sigma));$$

бу ерда

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \geqslant \sigma).$$

Теореманинг шартига мувофиқ:

$$\rho(f_n, f) \to 0, \ n \to \infty;$$

демак,

$$\lim_{n\to\infty} \mu[E(|f_n - f| \geqslant \sigma)] = \lim_{n\to\infty} \mu[A_n(\sigma)] = 0,$$

яъни

$$f_n \Rightarrow f, \ n \to \infty.\ast$$

Исбот этилган теоремадан ва Рисс теоремасидан фойдаланиб қуйидаги теоремани айтиш мумкин.

36. 4. Теорема. ***Агар*** $\{f_n(x)\}$ ***функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода*** $f(x)$ ***га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликдан деярли яқинлашувчи*** $\{f_{n_k}(x)\}$ ***кетма-кетлик қисмини ажратиб олиш мумкин.***

2-таъриф. *Агар* $\{f_k(x)\}$ *функциялар кетма-кетлиги учун ушбу*

$$\rho^2(f_m, f_n) = \int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx \to 0 \qquad (2)$$

муносабат бажарилса (m билан n бир-бирига боғлиқ равишда чексизга интилганда), бу кетма-кетликни фундаментал кетма-кетлик деймиз.

Бу таърифнинг биринчи таърифдан фарқи шундаки, бу ерда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимити ҳақида бирор нарса дейилмайди.

Бу таъриф ҳақиқий сонларнинг яқинлашиши ҳақидаги Коши белгисига ўхшашдир.

Математик анализдан маълумки, сонлар кетма-кетлиги учун яқинлашишнинг Коши белгиси бажарилса, у кетма-кетлик лимит нуқтага эга бўлади.

Мана шунга ўхшаш факт L_2 фазодан олинган кетма-кетликлар учун ҳам ўринлими ёки йўқми, яъни агар бирорта $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун (2) муносабат бажарилса, (1) муносабат ҳам бажариладими, деган савол туғилади.

Бунга аксинча саволнинг ўринли эканлиги ўз-ўзидан равшан. Юқоридаги саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

36. 5. Теорема (Фишер теоремаси). ***Агар*** $\{f_n(x)\}$ ***функциялар кетма-кетлиги фундаментал бўлса, у ҳолда*** L_2 ***фазода шундай*** $f(x)$ ***функция топиладики, бу функцияга*** $\{f_n(x)\}$ ***кетма-кетлик ўрта маънода яқинлашади.***

Исбот. Кетма-кетликнинг фундаменталлигидан фойдаланиб, ҳар бир натурал k сони учун шундай натурал n_k ва n_{k+1} сонларни мос келтирамизки, улар учун ушбу

$$\int_a^b [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]^2 dx < \frac{1}{3^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

муносабатлар бажарилсин. Бундан

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\|<+\infty$$

экани келиб чиқади.

Буняковский — Шварц тенгсизлигига биноан:

$$\int_a^b|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|dx\leqslant\sqrt{a-b}\,\|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\|;$$

демак, $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|dx$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

34. 15-теоремага мувофиқ:

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\{f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\}$$

қатор ҳам деярли яқинлашади. Бундан эса $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетликнинг деярли яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $f(x)$ функцияни қуйидагича тузамиз:

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x), & \text{агар } x \text{ нуқтада бу лимит чекли қийматга эга бўлса,}\\ 0, & \text{агар тегишли нуқтада бу лимит мавжуд бўлмаса ёки } \infty \text{ га тенг бўлса.}\end{cases}$$

Тузилган $f(x)$ функцияни L_2 фазога киришлигини ва $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ўрта маънода лимити эканлигини кўрсатамиз. Аввал $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, Фату теоремасига (34. 12) мувофиқ:

$$\varlimsup_{\nu\to\infty}\int_a^b[f_{n_k}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2dx\geqslant\int_a^b[f_{n_k}(x)-f(x)]^2dx;$$

лекин:

$$\int_a^b[f_{n_k}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2dx<\varepsilon\ (k>n_0,\ \nu>n_0);$$

бу ерда n_0 сони $\varepsilon(>0)$ га боғлиқ. Демак,

$$\int_a^b[f_{n_k}(x)-f(x)]^2dx<\varepsilon\quad(k>n_0)$$

ёки

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b[f_{n_k}(x)-f(x)]^2dx=0,\tag{3}$$

яъни $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик ўрта маънода $f(x)$ функцияга яқинлалашади. Энди $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликни ҳам $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашишини кўрсатамиз.

Коши тенгсизлигига мувофиқ:

$$\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2dx\right\}^{1/2}=\left\{\int_a^b [(f-f_{n_k})+(f_{n_k}-f_n)]^2dx\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_a^b [f-f_{n_k}]^2dx\right\}^{1/2}+\left\{\int_a^b [f_{n_k}-f_n]^2dx\right\}^{1/2}, \qquad (4)$$

бу ерда ўнг томоннинг биринчи ҳади (3) га асосан $n\to\infty$ нолга интилади, иккинчи ҳади ҳам $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигига асосан n ва $n_k\to\infty$ да нолга интилади.

Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ўзи ҳам ўрта маънода $f(x)$ функцияга яқинлашар экан. $f_n-f\in L_2$ экани (4) дан кўринади, у ҳолда $f(x)$ нинг L_2 га кириши

$$f(x)=(f(x)-f_n(x))+f_n(x)\in L_2$$

тенгликдан келиб чиқади.*

36. 6. Натижа. ***Фишер теоремасининг шарти бажарилганда ушбу***

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2(x)dx=\int_a^b f^2(x)dx$$

муносабат ҳам ўринли бўлади.

Исбот. Коши тенгсизлигига мувофиқ:

$$\left\{\int_a^b f_n^2(x)dx\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{1/2}+\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2dx\right\}^{1/2},$$

$$\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_a^b f_n^2(x)dx\right\}^{1/2}+\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2dx\right\}^{1/2}.$$

Булардан ва $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашишидан:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2(x)dx=\int_a^b f^2(x)dx$$

тенглик келиб чиқади.*

L_2 фазонинг Фишер теоремасида келтирилган хоссасига унинг тўлалик хоссаси дейилади, бу хосса тўғри чизиқ нуқталаридан иборат фазонинг тўлалик хоссасига ўхшашдир.

3-таъриф. *$L_2(a, b)$ фазодан олинган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси деб қуйидаги*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=(f, \varphi)$$

сонни айтилади.

4- таъриф. *Агар* $\{f_n(x)\}$ $(f_n \in L_2)$ *функциялар кетма-кетлиги ва ихтиёрий* $\varphi(x)$ $(\in L_2)$ *функция учун*

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ *кетма-кетликни* $f(x)$ *га суст яқинлашади дейилади.*

36. 7. Теорема. ***Агар*** $\{f_n(x)\}$ ***функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода*** $f(x)$ ***га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик*** $f(x)$ ***га суст маънода ҳам яқинлашади.***

Исбот. Теореманинг шартига ва Буняковский—Шварц тенгсизлигига асосан

$$|(\varphi, f_n - f)| = |(\varphi, f_n) - (\varphi, f)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

муносабат ўринли бўлади.*

Бу параграфда келтирилган тушунчаларнинг ва хоссаларнинг, масалан, норма, ўрта ва суст маънода яқинлашиш ва уларга оид теоремаларнинг $L_p(a, b)$ $(p \geqslant 1)$ синфи учун ҳам ўринлилигини кўрсатиш мумкин.

37- §. Ортонормал системалар

Ушбу

$$\frac{1}{2}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

қатор **тригонометрик қатор** дейилади; бу ерда $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ коэффициентлар ўзгармас сонлардир[1].

(1) қаторни $f(x)$ функцияга яқинлашади деб фараз қилиб, a_n ва b_n коэффициентларни $f(x)$ функция орқали ифода қиламиз. Бунинг учун қуйидаги

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

тенгликнинг икки томонини $\cos mx$ га (m — натурал сон) кўпайтириб $[0, 2\pi]$ сегментда ҳадлаб интеграллаймиз[2].

Натижада ушбу

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$$

---

[1] Француз математиги Фурье иссиқликнинг тарқалиш масаласи билан шуғулланиши натижасида берилган функцияни (1) қатор шаклида тасвир этиш масаласини қўйган.

[2] (1) қатор $f(x)$ га шундай яқинлашсинки, натижада уни ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлсин. Масалан, бу яқинлашиш $[0, 2\pi]$ сегментда текис бажарилса, (1) қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин.

тенгликларга асосланиб,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx \tag{3}$$

формулаларга эга бўламиз.

Лекин $f(x)$ функция олдиндан берилган бўлса, уни (1) қатор шаклида тасвир этиш мумкинлиги, умуман айтганда ҳеч қаердан келиб чиқмайди. Шунинг учун масалага бир оз бошқача қараймиз, яъни масалани қаторни ёзишдан эмас, балки функцияни беришдан бошлаймиз ва бу функцияни тригонометрик функциялар ёки уларга ўхшаш бошқа функциялар системаси орқали ифода қилишга уринамиз.

Келгусида бизга қуйидаги таърифлар зарур бўлади.

1-таъриф. *Агар*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\cdot\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{4}$$

тенгликлар бажарилса, $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x,$ ..., $\varphi_n(x)$, ... *функциялар кетма-кетлиги* $[a, b]$ *сегментда ортонормал системани ташкил этади дейилади.*

Масалан,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

функциялар кетма-кетлиги $[-\pi, \pi]$ сегментда ортонормал системани ташкил этади.

2-таъриф. $\{\varphi_k(x)\}$ *ортонормал система ва* $f(x)$ *функция* L_2 *фазодан олинган ихтиёрий функция бўлсин.* $c_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$*сонни* $f(x)$ *функциянинг* $\{\varphi_k(x)\}$ *системага нисбатан Фурье коэффициенти ва* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ *қаторни Фурье қатори дейилади.*

Энди $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ йиғиндини тузиб, бу йиғинди билан $f(x)$ функция орасида L_2 фазода аниқланган масофага нисбатан қандай муносабат бўлиши мумкин, деган масала билан шуғулланамиз.

Бунинг учун қуйидаги миқдорни ҳисоблаб чиқамиз:

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b [S_n(x) - f(x)]^2 dx,$$

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b (S_n^2 - 2f\cdot S_n + f^2)dx = \int_a^b S_n dx - 2\int_a^b f\cdot S_n dx + \int_a^b f^2 dx, \quad (5)$$

$$\int_a^b S_n^2 dx = \sum_{i,\,k=1}^{n} c_i c_k(\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

$$\int_a^b f\cdot S_n dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(f, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \text{ чунки } (f, \varphi_k) = c_k.$$

Демак, (5) тенгликни ушбу

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \quad (6)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. Бу формулани **Бессел айнияти** дейилади. Бу миқдор манфий бўлмаганлиги учун:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Бу тенгсизлик n нинг ҳамма натурал қийматлари учун ўринли; демак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \quad (7)$$

(7) ни **Бессел тенгсизлиги** дейилади. Агар (7) да тенглик бажарилса, яъни

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \quad (8)$$

бўлса, у ҳолда бу тенгликни **ёпиқлик формуласи** ёки **Парсевал тенглиги** дейилади.

3-таъриф. *Агар (8) тенглик L_2 дан олинган ихтиёрий $f(x)$ функция учун бажарилса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ система L_2 да ёпиқ дейилади.*

(6) дан (8) га асосан:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(S_n, f) = 0.$$

Демак, ёпиқлик формуласи бажарилганда йиғинди $S_n(x)$ Ҳилберт фазосидаги масофа маъносида (ёки ўрта маънода) $f(x)$ га яқинлашар экан.

37. 1. **Теорема (Рисс—Фишер теоремаси).** $\{c_n\}$ *сонлар кетма-кетлиги учун* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ *қатор яқинлашувчи бўлиб,*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

$[a, b]$ да аниқланган ортонормал функциялар кетма-кетлиги бўлсин, у ҳолда L_2 фазода биргина шундай $f(x)$ функция мавжудки, унинг учун: а) *c_k сонлар Фурье коэффициенти бўлади;* б) *ёпиқлик формуласи бажарилади.*

Исбот. Аввало $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигидан $\{S_n(x)\}$ $\left[S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]$ йиғиндилар кетма-кетлигини тузамиз ва $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $\rho^2(S_m, S_n)$ $(m > n)$ масофани ҳисоблаймиз.

$$\rho^2(S_m, S_n) = \int_a^b \left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx = \sum_{l,\ k=n+1}^{m} c_l c_k(\varphi_l, \varphi_k) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k.$$

Теореманинг шартига кўра, ҳар қандай $\varepsilon(>0)$ учун $m > n > n_0$ бўлганда

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлади.

Демак,

$$\rho^2(S_m, S_n) < \varepsilon,\ m > n > n_0.$$

Бу муносабат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатади. Бундан Фишер теоремасига мувофиқ, $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг бирор $f(x)$ функцияга ўрта маънода яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади, яъни $\rho^2(S_n, f) \to 0$, $n \to \infty$. 36. 7- теоремага мувофиқ, бундан $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га суст маънода ҳам яқинлашувчилиги келиб чиқади, яъни ҳар қандай $g(x)(\in L_2)$ учун:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\cdot S_n(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx. \qquad (1)$$

Аммо $n > k$ бўлганда

$$\int_a^b \varphi_k(x)\cdot S_n(x)dx = \int_a^b\left[\sum_{l=1}^{n} c_l(\varphi_l, \varphi_k)\right]dx = c_k;$$

бундан ва (1) дан:

$$(\varphi_k, f) = \int_a^b \varphi_k(x) \cdot f(x) dx = c_k,$$

яъни c_k сон f нинг Фурье коэффициенти эканлиги, демак, теореманинг а) қисми исбот этилди.

Теореманинг б) қисми $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ функцияга ўрта маънода яқинлашишидан, яъни ушбу

$$\rho^2(S_n, f) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

муносабатдан келиб чиқади.

Энди $f(x)$ нинг биргиналигини исбот қиламиз. Рисс— Фишер теоремасининг а) ва б) шартларини қаноатлантирадиган функция иккита деб фараз қиламиз ва иккинчи функцияни $g(x)$ билан белгилаймиз. У ҳолда а) шартга мувофиқ c_k сонлар f ва g функциялар учун Фурье коэффициенти бўлади ва б) шартга кўра:

$$\rho(S_n, f) \to 0, \quad \rho(S_n, g) \to 0.$$

Булардан $\rho(f, g) = 0$ ёки $f \sim g$. Аммо L_2 фазода ўзаро эквивалент функцияларни битта элемент деб ҳисоблаганимиз учун а) ва б) шартларни қаноатлантирадиган функциянинг биргиналиги келиб чиқади.*

4-таъриф. *Агар L_2 (a, b) фазода $\{\psi_k(x)\}$ функциялар системасига ортогонал бўлган бирорта ҳам функция мавжуд бўлмаса*[1], *бу функциялар системасини тўла система дейилади.*

37. 2. Изоҳ. Бу таърифда $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар системасининг ортонормал бўлиши талаб қилинмайди.

37. 3. **Теорема.** $\{c_k\}$ ***сонлар кетма-кетлиги учун,*** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ ***бўлиб,*** $\{\varphi_n(x)\}$ ***ортогонал функциялар системаси бўлсин. У ҳолда*** L_2 ***фазода Фурье коэффициентлари*** c_k ***ларга тенг бўлган биргина*** $f(x)$ ***функциянинг мавжуд бўлиши учун*** $\{\varphi_n(x)\}$ ***функциялар системасининг тўла бўлиши зарур ва кифоядир.***

Исбот. Кифоялиги. $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормал функциялар системаси бўлиб, $f(x)$, $g(x)$ функциялар бу системага нисбатан бир хил Фурье коэффициентларига эга бўлсин; яъни

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Айнан нолга тенг функцияга эквивалент бўлган функция ҳар қандай функциялар системасига ортогонал бўлганлиги учун бу таърифда бундай функциялар истисно қилинади.

Бундан
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\varphi_k(x)dx = 0.$$
$\{\varphi_k(x)\}$ системанинг тўлалиги таърифига мувофиқ $f - g \sim 0$. Шу билан кифоялик исботланди.

Зарурлиги. Теореманинг шартини қаноатлантирувчи функция биргина $f(x)$ бўлиб, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасини тўла эмас деб фараз қилайлик; у ҳолда айнан нолга тенг функцияга эквивалент бўлмаган шундай $\omega(x)$ функция топиладики, унинг учун
$$\int_a^b \omega(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$
Бундан кўринадики, $\omega(x) + f(x)$ функция ҳам теореманинг шартини қаноатлантиради. Бу эса $f(x)$ нинг биргиналигига зид.$_*$

37. 4. **Теорема.** ***Ортонормал $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасининг тўла бўлиши учун унинг ёпиқ бўлиши зарур ва кифоядир.***

Исбот. Кифоялиги. $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси ёпиқ бўлсин. Агар бирорта $f(x)$ ($\in L_2$) функция бу системага нисбатан ортогонал бўлса, у ҳолда:
$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$
Бундан ёпиқлик формуласига мувофиқ
$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0 \text{ ёки } f \sim 0$$
муносабат келиб чиқади. Бу эса $\{\varphi_n(x)\}$ системанинг тўлалигини кўрсатади.

Зарурлиги. Энди, аксинча, $\{\varphi_n(x)\}$ система тўла бўлсин. Ёпиқлик формуласи бирорта $\psi(x)$ функция учун ўринли эмас, деб фараз қиламиз. У ҳолда: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|\psi\|^2$ $(c_k = (\psi,\ \varphi_k))$.

Рисс—Фишер теоремасига мувофиқ, шундай $f(x)$ функция топиладики, унинг учун ушбу
$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = c_k, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$
тенгликлар бажарилади ва $f(x) - \psi(x)$ функция $\{\varphi_n(x)\}$ системага нисбатан ортогонал бўлади, яъни:
$$\int_a^b [f(x) - \psi(x)]\varphi_k(x)dx = 0 \quad \text{ёки } f \sim \psi.$$
Сўнгги муносабатлар $\|f\| < \|\psi\|$ тенгсизликка зид.$_*$

1. L_2 фазода суст яқинлашишдан ўлчов бўйича яқинлашиш келиб чиқмаслигига мисол тузинг.

2. Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги L_2 фазода $f(x)$ га суст яқинлашса, у ҳолда $\|f_n\| \leqslant M$ бўлишини исбот қилинг.

3. Агар $\int\limits_0^1 f(x)\varphi(x)dx$ ҳар қандай $f(x)$ $(\in L_2(0,1))$ функция учун мавжуд бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \in L_2$ бўлишини исботланг.

4. Сони чекли функциялар системасининг L_2 да тўла бўла олмаслигини кўрсатинг.

5. L_p $(p \geqslant 1)$ фазонинг тўлалиги кўрсатилсин.

6. Агар $p > 1$ бўлиб, Минковский тенгсизлигида тенглик белгиси ўринли бўлса, у ҳолда $g(x) = kf(x)$ тенглик исбот этилсин.

7. L_p фазода $(p > 1)$ ўрта маънода $\{f_n(x)\}$ $(f_n \in L_p)$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ $(\in L_p)$ га яқинлашсин. У ҳолда ушбу

$$\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^r dx \to 0, \quad n \to \infty, \quad (1 \leqslant r < p)$$

муносабатнинг ўринлилиги кўрсатилсин.

8. Ушбу

$$f(x) = x^\alpha$$

функция қандай α ларда $L_p[0,1]$ фазога тегишли бўлади?

VIII БОБ

ЎЗГАРИШИ ЧЕГАРАЛАНГАН ФУНКЦИЯЛАР. СТИЛЬТЬЕС ИНТЕГРАЛИ

38-§. Ўзгариши чегараланган функциялар

Муҳим ва кўпгина татбиқларга эга бўлган функциялар орасида ўзгариши чегараланган функциялар синфи катта аҳамиятга эга.

Таъриф. *$[a, b]$ сегментда аниқланган $\Phi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментни*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

нуқталар билан ихтиёрий n қисмга бўлганимизда a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ва ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1})| < K \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ўзгармас K сони мавжуд бўлса у ҳолда $\Phi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган дейилади.

Келгусида (1) тенгсизликнинг чап томонидаги йиғиндининг аниқ юқори чегарасини ($[a, b]$ сегментни қисмларга турлича бўлишлар тўпламига нисбатан) $V_a^b(\Phi)$ билан белгилаймиз ва бу сонни $\Phi(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги т ў л а ў з г а р и ш и деймиз.

М и с о л л а р: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва монотон ўсувчи $\Phi(x)$ функция (яъни, агар $x \leqslant y$ бўлса, $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$) чегараланган ўзгаришга эга, чунки унинг учун (1) кўринишдаги ҳар қандай йиғинди $\Phi(b) - \Phi(a)$ га тенг.

Шунга ўхшаш, $[a, b]$ сегментда аниқланган ва монотон камаювчи $\Phi(x)$ функция ҳам (яъни, агар $x \leqslant y$ бўлса, $\Phi(x) \geqslant \Phi(y)$) чегараланган ўзгаришга эга.

2) $[a, b]$ сегментда чегараланган ва Л и п ш и ц шартини[1] қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган бўлади. Дарҳақиқат, Липшиц шартига мувофиқ:

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| \leqslant A\,(a_{k+1} - a_k);$$

бундан: $V_a^b(f) \leqslant A(b-a)$, яъни f нинг ўзгариши чегараланган.

Энди ўзгариши чегараланган функцияларнинг тузилиши ва хоссаларини ўрганишга ўтамиз.

38. 1. Т е о р е м а. ***$[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган икки $\Phi_1(x)$ ва $\Phi_2(x)$ функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси ҳам ўзгариши чегараланган функциялар бўлади.***

И с б о т. Дарҳақиқат, $[a, b]$ сегментни ихтиёрий n қисмга бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Phi_1(a_i) - \Phi_1(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |\Phi_2(a_i) - \Phi_2(a_{i-1})|$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин; бу ерда: $\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$. Бундан

$$V_a^b(\Phi) \leqslant V_a^b(\Phi_1) + V_a^b(\Phi_2)$$

[1] Агар ихтиёрий x, y ($\in [a, b]$, $x \leqslant y$) нуқталар учун $|f(x) - f(y)| \leqslant A(y - x)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи мусбат ва ўзгармас A сони мавжуд бўлса, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Л и п ш и ц ш а р т и н и қ а н о а т л а н т и р а д и дейилади.

ёки $\Phi(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланганлиги бевосита келиб чиқади. Айирма учун ҳам теорема шунга ўхшаш исботланади.

Энди $\Phi_1(x)$ ва $\Phi_2(x)$ функцияларнинг кўпайтмасини оламиз:

$$\Phi(x) = \Phi_1(x)\cdot\Phi_2(x).$$

$p = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |\Phi_1(x)|$, $q = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |\Phi_2(x)|$ бўлсин. Бу ҳолда:

$$|\Phi(a_{k+1}) - \Phi(a_k)| \leqslant |\Phi_1(a_{k+1})\cdot\Phi_2(a_{k+1}) - \Phi_1(a_k)\cdot\Phi_2(a_{k+1})| + \\ + |\Phi_1(a_k)\cdot\Phi_2(a_{k+1}) - \Phi_1(a_k)\Phi_2(a_k)| \leqslant q|\Phi_1(a_{k+1}) - \Phi_1(a_k)| + \\ + p|\Phi_2(a_{k+1}) - \Phi_2(a_k)|.$$

Бундан

$$V_a^b(\Phi) \leqslant qV_a^b(\Phi_1) + pV_a^b(\Phi_2),$$

яъни $\Phi_1\cdot\Phi_2$ функциянинг ўзгариши чегараланган.*

38. 2. **Теорема.** ***Агар $a < c < b$ бўлса, у ҳолда:***

$$V_a^b(\Phi) = V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi). \tag{2}$$

Исбот. Агар c нуқта бўлиш нуқталаридан бирига тенг, масалан, $c = a_m$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| = \sum_{i=0}^{m-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| + \\ + \sum_{i=m}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| \tag{3}$$

тенглик ўринли бўлади. $[a, b]$ сегментни ихтиёрий майда қисмларга бўлиш ҳисобига бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндини $V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi)$ сонга истаганча яқин қилиш мумкин. Шунинг учун

$$V_a^b(\Phi) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| \geqslant V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi) \tag{4}$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин.

Иккинчи томондан, ихтиёрий қисмларга бўлинган $[a, b]$ сегментни олиб, қўшимча c бўлиш нуқтаси киритилса, (1) тенгсизликнинг чап томони ортишигина мумкин. Шунинг учун c бўлиш нуқтасими ёки бўлиш нуқтаси эмасми, бари бир, (3) га мувофиқ қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| \leqslant V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi).$$

Бу тенгсизлик чап томонининг юқори чегараси олинса, ушбу

$$V_a^b(\Phi) \leqslant V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi) \tag{5}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

(2) тенглик (4) ва (5) тенгсизликларнинг натижасидир.*

38. 3. **Теорема.** ***[a, b] сегментда ўзгариши чегараланган ҳар қандай Φ(x) функция икки монотон ўсувчи функциянинг айирмаси сифатида ёзилиши мумкин.***

Исбот. Қуйидаги

$$F(x) = V_a^x(\Phi), \ G(x) = V_a^x(\Phi) - \Phi(x)$$

функцияларни киритиб, уларнинг ҳар бирининг монотон ўсувчилиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади.

38. 2- теоремага мувофиқ:

$$V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) = V_x^y(\Phi) \geqslant 0 \ [\text{агар } y \geqslant x \text{ бўлса}],$$

яъни $F(x)$ монотон ўсувчи функция. $G(x)$ функция ҳам монотон ўсувчи. Дарҳақиқат, $y \geqslant x$ бўлсин. У ҳолда:

$$G(y) - G(x) = V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) - \Phi(y) + \Phi(x) =$$
$$= V_x^y(\Phi) - [\Phi(y) - \Phi(x)] \geqslant 0,$$

чунки

$$V_x^y(\Phi) \geqslant |\Phi(y) - \Phi(x)|.*$$

Сўнгги теореманинг моҳияти шундаки, бунинг ёрдами билан ўзгариши чегараланган функцияларнинг баъзи хоссаларини монотон ўсувчи функцияларнинг хоссасидан келтириб чиқариш мумкин ва аксинча. Масалан, ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функция бирон x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $G(x)$ функциялар ҳам шу нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлади. Масалан, бу жумлани $F(x)$ функция учун исбот этамиз.

$\Phi(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксизлигидан фойдаланиб, ихтиёрий берилган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сонни топамизки, агар $x_1 - x_0 < \delta$ ва $x_1 > x_0$ бўлса,

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин.

Энди $[x_0, b]$ сегментни n та $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ қисмга бўламизки, улар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| > V_{x_0}^b(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

x_1 нуқтани олишда $x_1 < x_0 + \delta$ тенгсизликка риоя қилишимиз керак. У ҳолда (6) га мувофиқ:

$$V_{x_0}^b(\Phi) < \sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) -$$

$$- \Phi(x_k)| + \varepsilon < V_{x_1}^b + \varepsilon$$

ёки

$$V_{x_0}^{x_1}(\Phi) = V_{x_0}^b(\Phi) - V_{x_1}^b(\Phi) < \varepsilon;$$

бундан эса $F(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтада ўнгдан узлуксизлиги бевосита келиб чиқади.

38. 4. **Натижа.** ***Агар ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $G(x)$ функциялар ҳам шу сегментда узлуксиз бўлади.***

38. 5. **Натижа.** ***Бирон функциянинг $[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлиши учун, унинг иккита монотон ўсувчи функциянинг айирмаси сифатида ёзишнинг мумкинлиги зарур ва кифоядир.***

Бу натижа 38. 1 ва 38. 3- теоремалардан бевосита келиб чиқади.

Энди узлуксиз ва ўзгариши чегараланмаган функцияга мисол келтирамиз.

$$\Phi(x) = x \cos \frac{\pi}{x}, \quad (x \neq 0)$$

$$\Phi(0) = 0$$

бўлсин. Бу функция $x = 0$ нуқтанинг атрофида сони чексиз максимум ва минимум нуқталарга эга. Қуйидаги жадвални тузамиз:

$$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\Phi(x) = -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$$

Бундан кўринадики:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\Phi\left(\frac{1}{k}\right) - \Phi\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \ldots + \frac{2n+1}{n(n+1)} > 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

яъни $\Phi(x)$ функциянинг $[0, 1]$ сегментдаги ўзгариши: $V_0^1(\Phi) = +\infty$.

38. 6. **Теорема.** ***Агар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функция бирон***

$x_0 (\in [a, b])$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтада $\varphi(x) = V_a^x(\Phi)$ функция ҳам узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_0 < b$ бўлсин; $\varphi(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $[x_0, b]$ сегментни шундай

$$x_0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

n та қисмга бўламизки, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун қуйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| > V_{x_0}^b(\Phi) - \varepsilon. \quad (7)$$

Чап томондаги йиғинди бўлиш нуқталари кўпайганда ўсишигина мумкин; шунинг учун x_1 нуқтани қуйидаги тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлаб оламиз:

$$|\Phi(x_1) - \Phi(a_0)| < \varepsilon.$$

У ҳолда (7) дан:

$$V_{x_0}^b(\Phi) < 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| \leqslant 2\varepsilon + V_{x_1}^b(\Phi).$$

Бундан:

$$V_{x_0}^{x_1} = V_a^{x_1} - V_a^{x_0} = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) < 2\varepsilon \text{ ёки } \varphi(x_0 + 0) - \varphi(x_0) < 2\varepsilon;$$

ε ихтиёрий бўлганлиги учун:

$$\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0).$$

$\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0)$ тенглик ҳам худди шунга ўхшаш исбот этилади, яъни $\varphi(x)$ функция (агар $x_0 > a$ бўлса) x_0 да чапдан узлуксиз. Хусусий $x_0 = b\,(x_0 = a)$ ҳолда $\varphi(x)$ ни x_0 нуқтада чапдангина (x_0 нуқтада ўнгдангина) узлуксизлигини кўрсатиш кифоя.$_*$

38. 7. Теорема. ***$[a, b]$ сегментда аниқланган функцияларнинг чексиз системаси $P = \{f\}$ берилган бўлиб, бу функциялар системаси бирон ўзгармас M сони билан чегараланган бўлса, яъни:***

$$|\Phi(x)| \leqslant M \quad (x \in [a, b];\ \Phi \in P) \quad (8)$$

бўлса, у ҳолда ихтиёрий саноқли $E \subset [a, b]$ тўплам учун P системадан шундай $\{\Phi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини ажратиб олиш мумкинки, бу кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлади.

Исбот. E тўплам саноқли бўлганлиги учун унинг элементларини $\{x_k\}$ кетма-кетлик шаклида ёзиб, ушбу

$$H_1 = \{\Phi(x_1)\} \quad (\Phi \in P)$$

тўпламни тузамиз; бу ерда Φ нинг ўзи P системада ўзгаради.

(8) шартга кўра H_1 тўплам чегараланган бўлади. Демак, Больцано — Вейерштрасс теоремасига мувофиқ бу тўпламдан яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин:

$$\Phi_1^{(1)}(x_1),\ \Phi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots;\ \lim_{n\to\infty}\Phi_n^{(1)}(x_1)=a_1.$$

Энди қуйидаги чегараланган кетма-кетликни тузамиз:

$$\Phi_1^{(1)}(x_2),\ \Phi_2^{(1)}(x_2),\ \ldots,$$

бу кетма-кетликка ҳам Больцано — Вейерштрасс теоремасини татбиқ қилиб. x_2 нуқтада яқинлашувчи

$$\Phi_1^{(2)}(x_2),\ \Phi_2^{(2)}(x_2),\ \Phi_3^{(2)}(x_2),\ \ldots;\ \lim_{n\to\infty}\Phi_n^{(2)}(x_2)=a_2$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Бу процессни чексиз давом эттириб қуйидаги яқинлашувчи, сони саноқли кетма-кетликларни тузишимиз мумкин:

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi_1^{(1)}(x_1),\ \Phi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots;\ \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(1)}(x_1)=a_1\\
\Phi_1^{(2)}(x_2),\ \Phi_2^{(2)}(x_2),\ \ldots;\ \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(2)}(x_2)=a_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_1^{(m)}(x_m),\ \Phi_2^{(m)}(x_m),\ \ldots;\ \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(m)}(x_m)=a_m\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right| \tag{9}$$

Бу кетма-кетликларнинг m- си $(m-1)$- сидан (функцияларнинг номерларини сақлаб қолган ҳолда) ажратиб олинган. (9) кетма-кетликларнинг диагоналида жойлашган элементлардан қуйидаги

$$\Phi_1^{(1)}(x),\ \Phi_2^{(2)}(x),\ \Phi_3^{(3)}(x),\ \ldots \tag{10}$$

кетма-кетлик тузилса бу кетма-кетлик саноқли E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлиб, биз излаган кетма-кетлик бўлади. (10) кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашади, чунки агар $x_k \in E$ бўлса, у ҳолда $\{\Phi_n^{(n)}(x_k)\}$ кетма-кетлик тузилишига кўра $n\to\infty$ да a_k га яқинлашади.*

38. 8. **Теорема.** ***[a, b] сегментда аниқланган ва ўсувчи функциялар системаси (чексиз) $P=\{\Phi\}$ берилган бўлиб, бу функциялар системаси бирон ўзгармас M сони билан чегараланган, яъни***

$$|\Phi(x)|\leqslant M\quad (x\in[a,\ b];\ \Phi\in P)$$

бўлсин, у ҳолда P системадан [a, b] сегментнинг ҳар бир нуқтасида ўсувчи бирон $\varphi(x)$ функцияга яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин.

Исбот. 38. 7-теоремадаги саноқли E тўплам сифатида $[a, b]$ сегментдан ҳамма рационал нуқталарни ва a нуқтани (агар a иррационал бўлса) олиб, берилган P системага шу теоремани татбиқ қиламиз. У ҳолда P системадан E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида чекли лимитга эга бўлган $H = \{\Phi^{(n)}(x)\}$ кетма-кетликни ажратиб олишимиз мумкин, яъни:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^{(n)}(x_k) = a_k. \tag{11}$$

Энди E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида қиймати (11) лимитнинг ўнг томонига тенг $\psi(x)$ функцияни кўрамиз, яъни $\psi(x) = a_k$ $(x_k \in E)$. $\psi(x)$ функция E тўпламда аниқланган бўлиб, ўсувчи функция бўлади, чунки P системадан ажратиб олинган $\{\Phi^{(n)}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг ҳар бир элементи ўсувчи функция (теореманинг шартига кўра). Демак, агар x_i ва x_j нуқталар E тўпламга тегишли бўлиб, $x_i < x_j$ бўлса, у ҳолда:

$$\psi(x_i) < \psi(x_j).$$

Энди $\psi(x)$ функцияни $(a, b]$ ярим ораликнинг ҳамма иррационал нуқталарида қуйидагича аниқлаймиз:

$$\psi(x) = \sup_{x_k < x} \{\psi(x_k)\},$$

бу ерда x_k ва x мос равишда E тўпламнинг рационал ва иррационал нуқталари. Равшанки, $\psi(x)$ функция узилишига кўра $[a, b]$ сегментда ўсувчи функциядир. Демак, $\psi(x)$ функциянинг узилиш нуқталаридан иборат Q тўплам кўпи билан саноқли бўлади[1].

---

[1] Бу фактнинг ўринлилигини кўрсатиш учун $|\psi(x+0) - \psi(x)| > \frac{1}{k}$ (бунда k (>0) ихтиёрий бутун сон) тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат тўпламнинг чекли эканини кўрсатиш кифоя.

Дарҳақиқат, агар бу тўплам чексиз бўлса, ундан яқинлашувчи (ўсиб ёки камайиб борувчи) кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Бу кетма-кетлик яқинлашадиган ξ нуқтада $\psi(\xi - 0)$ ёки $\psi(\xi + 0)$ лимитлардан камида биттаси мавжуд бўлмас эди; бу эса фаразимизга зид. Бу фактни қуйидагича ҳам исботлаш мумкин.

$\psi(x)$ монотон функция бўлгани учун унинг чап ва ўнг лимитлари мавжуд:

$$\psi(x+0) = \lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi>x}} \psi(\xi), \quad \psi(x-0) = \lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi<x}} \psi(\xi)$$

Ушбу $(\psi(x-0);\ \psi(x+0))$ узилиш интервалининг узунлиги бўлган сон $\psi(x)$ нинг x нуқтадаги сакраши дейилади. $\psi(x)$ монотон функция бўлгани учун турли узилиш нуқталарининг узилиш интерваллари $(\psi(x+0);\ \psi(x-0))$ кесишмайди (кўпи билан умумий учга эга бўлиши мумкин). Агар бундай узилиш интервалларининг ҳар биридан биттадан рационал сонни танлаб олсак, у ҳолда бундай интервалларнинг сони кўпи билан саноқли бўлади. Узилиш интерваллари билан узилиш нуқталари орасида бир қийматли мослик бўлгани учун узилиш нуқталари ҳам кўпи билан саноқли бўлади.

Агар x_0 нуқта $\psi(x)$ нинг узлуксиз нуқтаси бўлса, у ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^{(n)}(x_0) = \psi(x_0). \tag{12}$$

Дарҳақиқат, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун E тўпламда шундай x_i ва x_j нуқталар мавжудки, улар учун:

$$x_i < x_0 < x_j \text{ ва } \psi(x_j) - \psi(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

муносабатлар ўринли.

(11) га мувофиқ x_i ва x_j нуқталар учун шундай натурал n_0 сони мавжудки, улар учун $n > n_0$ бўлганда ушбу

$$|\Phi^{(n)}(x_i) - \psi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Phi^{(n)}(x_j) - \psi(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

$\psi(x)$ нинг тузилишига мувофиқ, бу муносабатларга асосланиб, $n > n_0$ бўлганда қуйидаги тенгсизликларни ёзишга ҳам ҳақлимиз:

$$\psi(x_0) - \varepsilon < \Phi^{(n)}(x_i) \leqslant \Phi^{(n)}(x_j) < \psi(x_0) + \varepsilon.$$

Аммо

$$\Phi^{(n)}(x_i) \leqslant \Phi^{(n)}(x_0) \leqslant \Phi^{(n)}(x_j).$$

Шунинг учун $n > n_0$ бўлганда

$$\psi(x_0) - \varepsilon \leqslant \Phi^{(n)}(x_0) \leqslant \psi(x_0) + \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади ва бундан ($\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлганлиги учун) (12) муносабат келиб чиқади. Натижада ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^{(n)}(x) = \psi(x) \tag{13}$$

тенглик $[a, b]$ сегментнинг кўпи билан саноқли Q қисмидагина бажарилмаслиги мумкин. Шуни назарда тутиб, 38. 7-теоремани H кетма-кетликка татбиқ қиламиз; E тўплам сифатида Q нинг (13) муносабат бажарилмаган нуқталарини оламиз. Бунинг натижасида H кетма-кетликдан $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи $H_1 = \{\Phi_n(x)\}$ кетма-кетлик қисмини ажратиб олиш мумкин. Энди $\varphi(x)$ сифатида ушбу

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$$

функция олинса, у ўсувчи бўлиб, биз излаган функция бўлади. *

38. 9. **Теорема** (Хелли теоремаси). ***$[a, b]$ сегментда аниқланган функциялар системаси (чексиз) $H = \{\Phi(x)\}$ берилган бўлиб, бу функциялар системаси ва уларнинг $[a, b]$ сегментда тўла ўзгариши бирон ўзгармас M сони билан чегараланган, яъни***

$$|\Phi(x)| \leqslant M, \quad V_a^b(\Phi) \leqslant M \quad (x \in [a, b], \ \Phi \in H)$$

бўлсин, у ҳолда Н системадан [a, b] сегментнинг ҳар бир нуқтасида бирон ўзгариши чегараланган Ф(x) функцияга яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин.

Исбот. H системанинг ихтиёрий Φ элементи учун қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$|F(x)| = |V_a^x(\Phi)| \leqslant M; \quad |G(x)| = |F(x) - \Phi(x)| \leqslant 2M.$$

$\{F(x)\}$ системага 38. 8- теоремани татбиқ қилиб, ундан бирон $f(x)$ функцияга яқинлашувчи $\{F_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини ажратиб оламиз, яъни:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x).$$

Ҳар бир $F_n(x)$ функцияга $G_n(x) = F_n(x) - \Phi_n(x)$ функцияни мос келтириб $\{G_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигига 38. 8- теоремани татбиқ қиламиз. Натижада $[a, b]$ сегментда бирон $\varphi(x)$ га яқинлашувчи $\{G_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ҳосил бўлади, яъни:

$$\lim_{k\to\infty} G_{n_k}(x) = \varphi(x),$$

у ҳолда $\{F_{n_k}(x) - G_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги H системадан ажратиб олинган бўлиб, $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$ функцияга $[a, b]$ сегментда яқинлашади.*

39- §. Стильтьес интеграли

Бу параграфда Риман маъносида интеграллаш процессининг умумлаштирилган муҳим бир ҳоли — Стильтьес интеграли билан шуғулланамиз. Бу интеграл тушунчаси эҳтимолликлар назариясида ва назарий механиканинг баъзи масалаларини ҳал қилишда ғоят катта аҳамиятга эга. Шунинг учун Стильтьес интеграли тушунчасини англатишни мисоллардан бошлаймиз.

1)

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

лар ва буларга мос равишда

$$p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n \quad \left(p_i \geqslant 0, \; \sum_i p_i = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

сонлар берилган бўлсин. Бу ҳолда тасодифий ўзгарувчи ξ миқдор берилган дейилади; бунда x_i лар ξ нинг қийматлари, p_i лар эса уларнинг мос эҳтимоллари. φ билан ξ нинг бирон функцияси белгиланса, у ҳолда $\varphi(\xi)$ функция ҳам тасодифий ўзгарувчи бўлади ва унинг математик кутилиши, таъриф бўйича қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$M\{\varphi(\xi)\} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, p_i. \tag{1}$$

Бу ҳолда тасодифий ўзгарувчи ξ нинг қийматларини (a, b) оралиққа тегишлилик эҳтимоли $\sum\limits_{a<x_i<b} p_i$ га тенг.

Агар тасодифий ўзгарувчи ξ узлуксиз миқдор бўлса, у ҳолда унинг қийматларининг (a, b) оралиққа тегишлилиги эҳтимоли юқоридагига ўхшаш

$$\int_a^b p(x)\,dx, \quad p(x) \geqslant 0 \text{ ва } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

га тенг. У ҳолда $\varphi(\xi)$ нинг математик кутилиши ушбу

$$M\{\varphi(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,p(x)\,dx \tag{2}$$

формула билан аниқланади.

2) Иккинчи мисол сифатида қуйидаги масалани кўрамиз. Текисликда x ўқининг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталарида, мос равишда $m_1, m_2, \ldots, m_n$ массалар жойлашган бўлсин. Механикадан маълумки, бирлик масса y ўқининг $y = 1$ нуқтасида потенциал ҳосил қилади ва бу потенциал x_i нуқтадаги массага тўғри пропорционал ва текисликдаги $(y = 1,\ x = 0)$ ва $(y = 0,\ x = x_i)$ нуқталар орасидаги масофага тескари пропорционал, яъни x_i нуқтадаги масса ушбу

$$\varphi_i = \frac{cm_i}{\sqrt{1 + x_i^2}}$$

потенциални ҳосил қилади. Демак, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталардаги $m_1, m_2, \ldots, m_k$ массалар $(y = 1,\ x = 0)$ нуқтада қуйидаги потенциални ҳосил қилади:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = c \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{1 + x_i^2}}. \tag{3}$$

Агар массаларнинг x ўқидаги тақсимоти узлуксиз бўлиб, $x_1 < x < x_2$ оралиқдаги масса ушбу

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,dx$$

интегралга тенг бўлса, у ҳолда потенциал φ қуйидаги интегралга тенг бўлади:

$$\varphi = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m(x)}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx. \tag{4}$$

Энди табиий равишда юқоридаги (1), (2) ва (4) тенгликларнинг ўнг томонидаги ифодалар хусусий ҳоли бўладиган шундай интеграллаш аппарати тузиш мумкин эмасми, деган савол туғилади. Бу саволга Стильтьес интеграли ижобий жавоб беради.

Энди Стильтьес интегралининг умумий таърифини, унинг мавжудлик шартларини келтирамиз ва хоссаларини ўрганамиз.

$[a, b]$ сегментда икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Риман интегралини таърифлашдагидек $[a, b]$ сегментни қуйидаги нуқталар билан n қисмга бўламиз:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b; \ \max_{1 \le i \le n} (a_i - a_{i-1}) = \alpha_n. \qquad (5)$$

Ҳар бир $a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i$ қисмдан бирон x_i нуқтани олиб, ушбу

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} \qquad (6)$$

йиғиндини тузамиз.

Таъриф. *Агар α_n нолга интилганда S йиғинди $[a, b]$ нинг қандай бўлинганидан ва x_i нуқталарнинг қандай танланишидан қатъи назар аниқ бир I лимитга интилса, у ҳолда шу лимит Стильтьес интеграли дейилади ва бундай ёзилади:*

$$\lim_{\alpha_n \to 0} S = I = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Бу ерда лимитга ўтиш a_i ва x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ нуқталарни танлаб олишга, яъни $[a, b]$ сегментни қисмларга қандай бўлишга ва бу қисмлардан нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаслиги керак.

Бу таърифнинг аниқ мазмуни қуйидагича: ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон мавжудки, $\alpha_n < \delta$ бўлганда $(\alpha_n = \max_i (a_i - a_{i-1}))$

$$|I - S| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. $f(x)$ ни интегралланувчи функция, $\varphi(x)$ни интегралловчи функция дейилади. Ўз-ўзидан равшанки, агар $\varphi(x) = x$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг Стильтьес интеграли унинг Риман интегралининг худди ўзи бўлади, яъни Риман интеграли Стильтьес интегралининг хусусий ҳоли экан.

Теорема. ***Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ узлуксиз ва $\varphi(x)$ ўзгариши чегараланган функциялар бўлса, у ҳолда Стильтьес интеграли I мавжуд бўлади.***

Исбот. $f(x)$ нинг $[a, b]$ сегментда узлуксизлигига мувофиқ ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ бўлганда $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ бўлади. $[a, b]$ сегментни (5) га ўхшаш $\alpha_n < \delta$ бўладиган қилиб n та қисмга бўламиз, шу бўлишга мос S йиғиндини [(6) формулага қаранг] тузамиз. Сўнг ҳар бир $[a_{i-1}, a_i]$ сегментни майдароқ қисмларга бўламиз:

$$a_{i-1} = a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \ldots < a_{i,n_i} = a_i.$$

Бу бўлинишларга мос S' йиғиндини тузамиз:

$$S'=\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_l} f(x_{l,\,j})\,[\varphi(a_{l,\,j})-\varphi(a_{l,\,j-1})]\quad (a_{l,\,j-1}\leqslant x_{l,\,j}\leqslant a_{l,\,j}).$$

$|f(x_{l,\,j})-f(x_l)|\leqslant\varepsilon$ экани равшан, чунки:

$$a_l-a_{l-1}\leqslant\alpha_n<\delta \text{ ва } a_{l-1}\leqslant x_l\leqslant a_l,\ a_{l-1}\leqslant x_{l,\,j}\leqslant a_l.$$

Шунинг учун S' йиғиндидаги ҳамма $f(x_{l,\,j})$ ни мос равишда $f(x_l)$ билан алмаштирилса, натижада ҳосил бўлган йиғинди билан S' йиғинди орасидаги фарқнинг абсолют қиймати ушбу

$$\varepsilon\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_l}|\varphi(a_{l,\,j})-\varphi(a_{l,\,j-1})|\leqslant\varepsilon V_a^b(\varphi)$$

миқдордан катта бўлмайди. Аммо бу алмаштириш натижасида S' йиғинди S йиғиндига алмашади ва $|S-S'|\leqslant\varepsilon V_a^b(\Phi)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $[a,\ b]$ сегментни икки усул билан шундай қисмларга бўламизки, улар учун тегишли α сонларнинг (α бўлиш натижасида ҳосил бўлган қисмлар узунликларининг максимуми) ҳар бири δ дан катта бўлмасин. Бу икки бўлишга мос йиғиндиларни S_1 ва S_2 билан белгилаймиз ва бу икки бўлишни бирлаштиришдан (яъни икки усулга кирган ҳамма бўлиш нуқталаридан тузилган янги бўлиш) ҳосил бўлган бўлишга мос йиғиндини S' билан белгилаймиз. Юқоридаги мулоҳазаларга мувофиқ равшанки:

$$|S_1-S'|\leqslant\varepsilon V_a^b(\varphi) \text{ ва } |S_2-S'|\leqslant\varepsilon V_a^b(\varphi).$$

Демак,

$$|S_1-S_2|\leqslant 2\varepsilon V_a^b(\varphi). \tag{7}$$

Ушбу

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \tag{8}$$

йиғиндиларнинг кетма-кетлигини тузамиз; буларни тузишда S_n йиғиндига тегишли a_l-a_{l-1} айирмаларнинг максимумини $n\to\infty$ да нолга интиладиган қилиб оламиз. У ҳолда $|S_{n+p}-S_n|$ ҳам n ортиб борганда ҳар қандай натурал p учун нолга интилади, яъни ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай натурал n сони мавжудки, номери бундан катта бўлган йиғиндиларга тегишли α сонлар $\delta\,(>0)$ дан катта бўлмайди, демак, уларнинг айирмасининг модули (7) га мувофиқ $2\varepsilon V_a^b(\varphi)$ дан катта бўлмайди. Демак, Коши критерийсига мувофиқ $\{S_n\}$ йиғиндилар кетма-кетлиги бирон лимитга эга бўлади, бу лимитни I билан белгилаймиз. Агар ихтиёрий S^* йиғинди берилган бўлиб, унинг учун $\alpha<\delta$ бўлса, у ҳолда (8) кетма-кетликдан олинган номери деярли катта S_m йиғинди билан S^* йиғиндинииг орасидаги фарқнинг абсолют қиймати ҳам $2\varepsilon V_a^b(\varphi)$ дан катта бўлмайди, яъни:

$$|S^* - I| = \lim_m |S_m - S^*| \leqslant 2\varepsilon V_a^b(\varphi).$$

Натижада α камайиб нолга интилганда унга тегишли S^* йиғинди (унинг (8) кетма-кетликка кириш-кирмаслигидан қатъи назар) I га интилади.* Энди Стильтьес интеграли ёрдами билан (1), (2) ва (3), (4) тенгликларни умумий равишда қандай ёзиш мумкинлигини кўрсатишни ўқувчига тавсия қиламиз.

10-§. Стильтьес интегралининг асосий хоссалари

40. 1. Хосса.

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b \{f(x) + \psi(x)\}\,d\varphi(x)$$

тенглик ўринли ва бунинг чап томонининг мавжудлигидан ўнг томонининг мавжудлиги келиб чиқади.

Исбот. Дарҳақиқат,

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + \psi(x_i)]\,\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\{\varphi(a_i) -$$

$$- \varphi(a_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\,\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = S_1 + S_2.$$

Агар α_n нолга интилганда S_1 ва S_2 йиғиндилар мос равишда I_1 ва I_2 лимитларга интилса, у ҳолда $S = S_1 + S_2$ йиғинди $I = I_1 + I_2$ йиғиндига интилади; бу ерда:

$$I_1 = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x),\quad I_2 = \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) \text{ ва } I = \int_a^b \{f(x) + \psi(x)\}\,d\varphi(x).$$

40. 2. Хосса.

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\,d\{\varphi(x) + \psi(x)\}$$

тенглик ўринли ва бу ерда ҳам чап томоннинг мавжудлигидан ўнг томоннинг мавжудлиги келиб чиқади.

Бу хосса 40. 1-хоссага ўхшаш исботланади.

40. 3. Хосса. *Агар $a < b < c$ бўлса, у ҳолда:*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_b^c f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^c f(x)\,d\varphi(x).$$

Бу тенглик интегралларнинг ҳаммаси мавжуд бўлганда ўринли. Бу хоссанинг исботи юқоридаги 40. 1- хоссанинг исботи каби содда, аммо бунда ўнг томондаги интегралга мос йиғиндини тузишда, яъни $[a, c]$ сегментни қисмларга бўлишда b нуқтани бўлиш нуқтаси қилиб олиш керак. Яна шуни ҳам айтмоқ лозимки, $\int_a^c f(x)\,d\varphi(x)$ интегралнинг мавжудлигидан $\int_a^b f d\varphi$ ва $\int_b^c f d\varphi$ интегралларнинг мавжудлиги келиб чиқади. Лекин аксинчаси умуман ҳар вақт ўринли эмас. Бунга мисол келтирамиз. $[-1, +1]$ сегментда қуйидагича тузилган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар берилган бўлсин:

$$f(x) = \begin{cases} \text{агар } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } \quad 0 < x \leqslant 1 \text{ бўлса, } \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса } x, \\ \text{агар } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса, } 0. \end{cases}$$

Равшанки,

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,d\varphi(x) = 0, \qquad \int_0^1 f(x)\,d\varphi(x) = 0,$$

чунки $[-1,0]$ сегментда $f(x) = 0$ ва $[0,1]$ сегментда $\varphi(x) = 0$. Аммо

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,d\varphi(x)$$

интеграл мавжуд эмас, чунки $[-1, +1]$ сегментни қисмларга бўлганимизда $a_{i-1} < 0 < a_i$ қисмга мос ҳад (ноль нуқта бўлиш нуқтаси бўлмаган ҳолда) қуйидагича бўлади:

$$\sigma_i = \{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} f(x_i) = -\frac{a_{i-1}}{x_i} \quad (\text{агар } x > 0 \text{ бўлса}).$$

Бундан кўринадики, x_i нолга истаганча яқин бўлганда σ_i сони истаганча катта қилиниши мумкин, демак, тегишли йиғинди лимитга эга бўлмайди.

40. 4. Хосса. $\int_a^b kf(x)\,dh\varphi(x) = kh\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ (k ва h ўзгармас сонлар).

40. 5. Хосса. ***Ушбу*** $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ ва $\int_a^b \varphi(x)\,d f(x)$ ***интегралларнинг бирининг мавжудлигидан иккинчисининг мавжудлиги келиб чиқади ва қуйидаги тенглик ўринли;***

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_a^b \varphi(x)\,df(x) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) =$$
$$= [f(x)\varphi(x)]_a^b. \qquad (1)$$

Бу тенгликни бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Исбот. $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ интеграл мавжуд деб фараз қилиб, 39-параграфдаги (6) йиғиндига ўхшаш қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_{i-1}).$$

$a_n = b$, $a_0 = a$ бўлганлиги учун йиғиндидан $[f(x)\varphi(x)]_a^b$ ифодани қўшиб ва айириб ташланса, ушбу:

$$S = f(x_n)\varphi(a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\varphi(a_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1})\varphi(a_i) - f(x_1)\varphi(a_0) =$$
$$= [f(x)\varphi(x)]_a^b - \{[f(b) - f(x_n)]\varphi(b) + \sum_{i=1}^{n-1}\varphi(a_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)] +$$
$$+ [f(x_1) - f(a)]\varphi(a)\} = [f(x)\varphi(x)]_a^b - S'$$

тенглик келиб чиқади; бу ерда S' — сўнгги катта қавс ичидаги ифода.

S' йиғиндининг тузилишига диққат билан қаралса, у ҳам S йиғиндига ўхшаш тузилган бўлиб, бундаги фарқ S' да $[a, b]$ сегментни бўлиш нуқталари сифатида $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нуқталар иштирок этаётгани; $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ нуқталар (яъни S ни тузишда бўлиш нуқталари сифатида олинган нуқталар) эса тегишлича $x_1 \leqslant a_1 \leqslant x_2$, $x_2 \leqslant a_2 \leqslant x_3$, $\ldots$, $x_{n-1} \leqslant a_{n-1} \leqslant x_n$ тенгсизликларни қаноатлантиришидадир. Равшанки, $\alpha_n = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(a_{i+1} - a_i)$ нолга интилганда, $\beta_n = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i)$ ҳам нолга интилади. Фаразимизга мувофиқ, $\alpha_n \to 0$ да S нинг лимити мавжуд, демак,

$$S' = [f(x)\varphi(x)]_a^b - S$$

тенгликдан, юқоридаги мулоҳазага мувофиқ, $\beta_n \to 0$ да S' нинг лимити мавжудлиги келиб чиқади. Бу лимит эса Стильтьес интегралининг таърифига кўра $\int_a^b \varphi(x)\,df(x)$ га тенг. Аксинча, сўнгги интеграл мавжуд деб фараз қилсак эди, юқоридагига ўхшаш, $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ интегралнинг мавжудлигини кўрсатиш мумкин эди.*

41-§. Стильтьес интеграли остида лимитга ўтиш

41. 1. Теорема. *[a, b] сегментда аниқланган ўзгариши чегараланган $\varphi(x)$ функция ва $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи узлуксиз $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)d\varphi(x)=\int_a^b f(x)\,d\varphi(x). \tag{1}$$

Исбот. Теореманинг шартига кўра $f(x)$ функция узлуксиз бўлади, шунинг учун сўнгги муносабатнинг ўнг томонидаги интеграл мавжуд (39- параграфдаги теоремага асосан).

39- параграфнинг (6) тенглигидаги S йиғинди учун қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}\right|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\sum_{i=1}^{n}|\varphi(a_i)-$$
$$-\varphi(a_{i-1})|\leqslant M_f V_a^b(\varphi),$$

бу ерда

$$M_f=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

Бундан, равшанки:

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\,\varphi(x)\right|\leqslant M_f V_a^b(\varphi),$$

у ҳолда:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,d\,\varphi(x)-\int_a^b f(x)\,d\,\varphi(x)\right|\leqslant M_{f_n-f}V_a^b(\varphi).$$

Лекин теореманинг шартига кўра:

$$M_{f_n-f}\to 0 \quad (n\to\infty);$$

демак, (1) муносабат ўринли.

41. 2. Теорема (Хелли теоремаси). *[a, b] сегментда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция ва бу сегментнинг ҳар бир нуқтасида чекли $\varphi(x)$ функцияга яқинлашувчи $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар натурал n сонининг ҳамма қийматлари учун ушбу*

$$V_a^b(\varphi_n)\leqslant M \tag{2}$$

тенгсизлик бажарилса (М ўзгармас ва n га боғлиқ бўлмаган сон), у ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x)=\int_a^b f(x)\,d\varphi(x). \qquad (3)$$

Исбот. (2) га асосан:

$$V_a^b(\varphi)\leqslant M \qquad (4)$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин; дарҳақиқат. $[a, b]$ сегментни ихтиёрий m та қисмга бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{m}|\varphi_n(a_i)-\varphi_n(a_{i-1})|\leqslant M \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Бундан $n\to\infty$ да лимитга ўтилса,

$$\sum_{i=1}^{m}|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|\leqslant M$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Аммо $[a, b]$ ни m қисмга бўлиш ихтиёрийлигидан (4) тенгсизлик келиб чиқади.

Энди ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $[a, b]$ сегментни шундай m та $[a_{i-1}, a_i]$ қисмларга бўламизки, у қисмларнинг ҳар бирида интегралланувчи $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{\varepsilon}{3M}$ дан кичик бўлсин. У ҳолда:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,d\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}\int_{a_{i-1}}^{a_i}[f(x)-f(a_{i-1})]\,d\varphi(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}f(a_{i-1})\int_{a_{i-}}^{a_i}d\varphi(x) \text{ ва } \int_{a_{i-1}}^{a_i}d\varphi(x)=\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1}) \ (i=\overline{1, m}).$$

Равшанки:

$$\left|\int_{a_{i-1}}^{a_i}[f(x)-f(a_{i-1})]\,d\varphi(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi),$$

чунки

$$|f(x)-f(a_{i-1})|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

Бундан:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{a_{i-1}}^{a_i}[f(x)-f(a_{i-1})]\,d\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}\sum_{i=1}^{m}V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi)=\frac{\varepsilon}{3M}V_a^b(\varphi)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})[\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})] + \alpha\frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha| \leqslant 1).$$

Шунга ўхшаш:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})[\varphi_n(a_i) - \varphi_n(a_{i-1})] + \alpha_n\frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha_n| \leqslant 1).$$

$\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигига қўйилган шартларга асосан, шундай натурал n_0 сони мавжудки, $n > n_0$ бўлганда ушбу

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})[\varphi_n(a_i) - \varphi_n(a_{i-1})] - \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})[\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})]\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n > n_0$ бўлганда, бу тенгсизликка асосан қуйидаги тенгсизликни ҳам ёзишимиз мумкин:

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right| < \varepsilon.$$

ε нинг ихтиёрийлигидан ва бу тенгсизликдан биз исбот этмоқчи бўлган (3) муносабат келиб чиқади.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ўзгариши чегараланган ва узлуксиз функцияни икки ўсувчи ва узлуксиз функцияларнинг айирмаси сифатида ёзиш мумкинлиги кўрсатилсин.

2. Монотон функция саноқли ва ҳар ерда зич тўпламдан иборат узилиш нуқталарига эга бўлиши мумкинлиги мисолда кўрсатилсин.

3. Ҳар қандай ўзгариши чегараланган функцияни узилиш нуқталарида поғонали ва ўзгариши чегараланган узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси сифатида ёзиш мумкинлиги исбот этилсин.

4. 41. 2-теорема (Хелли теоремаси) ёрдами билан: $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ ($f(x)$ узлуксиз ва $g(x)$ ўзгариши чегараланган функция) интегрални ҳисоблаш масаласини $g(x)$ функция узлуксиз бўлган ҳолга келтириш мумкинлиги кўрсатилсин.

5. Ушбу $f(x) = x^p \sin(x^q)$ $(x \neq 0)$; $f(0) = 0$ функция p ва q параметрларнинг $(-\infty < p,\ q < +\infty)$ қандай қийматлари учун $[0, 1]$ сегментда тўла ўзгариши чегараланган бўлади ва уларнинг қандай қийматлари учун ўзгариши чегараланган бўлмайди?

6. Қуйидаги функциянинг [0, 1] сегментда тўла ўзгариши ҳисоблансин:

$$f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 0.$$

7. Агар $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|^p$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $p(>0)$ тартибли Липшиц шартини қаноатлантиради.

Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция p- тартибли Липшиц шартини қаноатлантирса, $g(x)$ функция q- тартибли Липшиц шартини қаноатлантирса ва $p+q>1$ бўлса, у ҳолда: $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ мавжуд бўлишини исботланг.

IX БОБ

ЛЕБЕГНИНГ АНИҚМАС ИНТЕГРАЛИ. АБСОЛЮТ УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

42-§. Монотон функциянинг ҳосиласи

Бу параграфда мазкур боб учун зарур бўлган монотон функцияларга оид баъзи фактларни ва улардан келиб чиқадиган натижаларни келтирамиз.

42. 1. Теорема (Лебег теоремаси). *$[a, b]$ сегментда аниқланган ихтиёрий монотон функция бу сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга.*

Исбот. Аввал теоремани узлуксиз монотон функциялар учун исбот этиб, сўнгра узлуксиз бўлмаган монотон функциялар учун ўринлилигини кўрсатамиз. Бунинг учун узлуксиз функцияларга оид қуйидаги леммани исбот қиламиз.

42. 2. Лемма (Ф. Рисс леммаси). *$[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. E тўплам $[a, b]$ сегментнинг шундай ички x нуқталаридан иборатки, бу нуқталарнинг ҳар биридан ўнгда*

$$\varphi(\xi) > \varphi(x) \quad (x < \xi) \tag{1}$$

муносабатни қаноатлантирадиган ξ нуқта мавжуд бўлсин. У ҳолда E очиқ тўплам бўлиб, уни тузувчи

(a_k, b_k) ораликларнинг ҳар бирида $\varphi(a_k) \leqslant \varphi(b_k)$ тенгсизлик бажарилади.

Лемманинг исботи. E очиқ тўплам, чунки $\xi > x_0$ ва $\varphi(\xi) > \varphi(x_0)$ бўлса, у ҳолда φ нинг узлуксизлигига мувофиқ x_0 нинг бирон атрофидан олинган x нинг ҳамма қийматлари учун ҳам ушбу $\xi > x$, $\varphi(\xi) > \varphi(x)$ тенгсизликлар ўринлилигича қолади. Агар, масалан, φ камаювчи функция бўлса, у ҳолда E бўш тўплам бўлади.

Энди (a_k, b_k) оралиқ E га нисбатан тузувчи ораликларнинг бири бўлсин. Бу тузувчи оралиқдан олинган ихтиёрий x нуқта учун $\varphi(x) \leqslant \varphi(b_k)$ тенгсизликнинг ўринлилиги кўрсатилса, у ҳолда x ни a_k га интилтириб, бизга зарур тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Дарҳақиқат, x_1 нуқта x ва b_k нуқталар орасида бўлиб (яъни $x < x_1 < b_k$), ушбу

$$\varphi(x_1) \geqslant \varphi(b_k) \tag{2}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ва b_k га энг яқин нуқта бўлсин. У ҳолда $x_1 = b_k$ тенгликнинг ўринлилигини кўрсатамиз. Агар бундай бўлмаса, E нинг таърифига кўра шундай $\xi_1 < b_k$ нуқта мавжудки, унинг учун

$$\varphi(x_1) < \varphi(\xi_1) \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли; иккинчи томондан:

$$\varphi(\xi_1) \leqslant \varphi(b_k). \tag{4}$$

Сўнгги (2), (3) ва (4) тенгсизликлар зиддият ҳосил қилади. Демак, $x_1 = b_k$ ва юқоридаги мулоҳазага кўра $\varphi(a_k) \leqslant \varphi(b_k)$, яъни лемма исботланди.

42. 3. Изоҳ. (1) шартларни қаноатлантирувчи x нуқтани, қулайлик учун, ўнгга кўтарилиш нуқтаси деймиз. Чапга кўтарилиш нуқтаси таърифи ҳам шунга ўхшаш берилади: агар x нуқта учун

$$\xi < x, \quad \varphi(\xi) > \varphi(x)$$

шартларни қаноатлантирувчи ξ нуқта топилса, x чапга кўтарилиш нуқтаси дейилади. Юқоридагига ўхшаш чапга кўтарилиш нуқталари тўплами очиқлиги ҳамда бу тўпламни тузувчи (a_k, b_k) оралиқларда

$$\varphi(a_k) \geqslant \varphi(b_k)$$

муносабатларнинг ўринлилигини кўрсатиш мумкин.

Энди монотон $f(x)$ функцияни $[a, b]$ егментда узлуксиз деб, теореманинг исботига ўтамиз, масалан, $f(x)$ камаймайдиган бўлсин. Ушбу

$$\text{а) } D_+ f < +\infty, \quad \text{б) } D^+ f \leqslant D_- f$$

тенгсизликларнинг ($D^+ f$, $D_+ f$ ва $D_- f$ белгилар тўғрисида 26- § га қаралсин) деярли ўринлилигини фараз қилган ҳолда теоремани исботлаймиз.

атлантирган ҳолда, барча рационал қийматларни қабул қилади, яъни

$$E^* = \bigcup_{\substack{c<C \\ C,c \in R}} E_{cC}, \tag{5}$$

бу ерда R — рационал сонлар тўплами. Аммо қўш рационал сонлардан иборат бўлган тўплам саноқли бўлгани учун (5) йиғинди ҳадларининг сони саноқли. Демак, агар E_{cC} ларнинг ҳар бирининг ўлчови ноль эканлиги кўрсатилса, E^* тўпламнинг ўлчови ҳам нолълиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, теоремани исботлаш учун E_{cC} тўпламнинг ўлчови ноль эканлигини кўрсатиш кифоя.

$x \in E_{cC}$ бўлсин. У ҳолда $D_- f < c$ бўлганлиги учун, x дан чапда ётувчи ҳамда

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c \tag{6}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ξ нуқта мавжуд. $\xi - x < 0$ бўлгани учун (6) тенгсизликдан

$$f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, x нуқта $g(x) = f(x) - cx$ функциянинг чапга кўтарилиш нуқтаси. Бу функцияга Рисс леммасини ва унинг изоҳини татбиқ қилиб, чапга кўтарилиш нуқталаридан иборат бўлган очиқ тўпламнинг тузувчи оралиқлари учун

$$f(a_k) - ca_k \geqslant f(b_k) - cb_k$$

ни, бундан эса

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant c(b_k - a_k) \tag{7}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Юқорида олинган x нуқта топилган (a_k, b_k) оралиқларнинг бирида ётади. Бу нуқтада

$$D^+ f > c$$

бўлгани учун (a_k, b_k) оралиқда

$$\xi > x, \quad \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c \tag{8}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқтани топиш мумкин. Кейинги ясашларимизни (a_k, b_k) оралиқларнинг ичида бажарамиз.

(8) тенгсизликлар x нуқтанинг $f(x) - Cx$ функция учун ўнгга кўтарилиш нуқтаси эканлигини кўрсатади. Бу функциянинг (a_k, b_k) оралиқдаги барча ўнгга кўтарилиш нуқталари тўплами очиқ бўлиб,

Дарҳақиқат, б) тенгсизликни $f_1(x) = -f(-x)$ функцияга татбиқ қилинса, қуйидаги тенгсизликнинг деярли бажарилиши келиб чиқади:

$$D^+f_1 = D^-f \leqslant D_-f_1 = D_+f.$$

Бундан ва а), б) лардан ушбу

$$D^+f \leqslant D_-f \leqslant D^-f \leqslant D_+f \leqslant D^+f < \infty$$

тенгсизликларнинг деярли бажарилиши келиб чиқади; булардан эса чекли ҳосиланинг деярли мавжудлиги аниқ кўриниб турибди.

Теоремани тўла исботлаш учун а) ва б) тенгсизликларни исботлаш қолди.

а) тенгсизликни исбот этмоқ учун

$$E_\infty = \{x : D^+f(x) = \infty\} \text{ ва } E_c = \{x: D^+f(x) > c\}$$

тўпламларни киритамиз; $E_\infty \subset E_c$ экани равшан. Агар $D^+f(x) > c$ бўлса, у ҳолда шундай $\xi(> x)$ нуқта мавжудки, унинг учун:

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c.$$

Бундан, агар $g(x) = f(x) - cx$ деб олсак, у ҳолда: $g(\xi) > g(x)$. Демак, E_c тўплам $g(x)$ функция учун юқоридаги леммада аниқланган (a_k, b_k) оралиқларда жойлашган. Шу билан бирга, ўша леммаларга асосан, ушбу

$$f(b_k) - cb_k \geqslant f(a_k) - cak \text{ ёки } c(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k)$$

тенгсизликлар бажарилади. Бундан:

$$c\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \leqslant f(b) - f(a).$$

Бу тенгсизликлардан кўринадики, c етарли катта бўлганда (a_k, b_k) оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси истаганча кичик қилиниши мумкин. Демак, E_∞ тўпламнинг ўлчови нолга тенг, яъни а) муносабат деярли ўринли.

б) тенгсизлиги ҳам юқоридаги мулоҳазаларни кетма-кет татбиқ қилиш билан исбот этилиши мумкин. Бу тенгсизликка тескари бўлган

$$D^+f > D_-f$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами E^* ушбу

$$D_-f < c < C < D^+f$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами E_{cC} ларнинг йиғиндисига тенг; бунда c ва C сонлар, $c < C$ муносабатни қанобу тўплам (a_{kj}, b_{kj}) $(j=1, 2, \ldots)$ тузувчи оралиқларнинг йиғиндисига тенг, шу билан бирга бу оралиқларнинг чегарасида

$$f(a_{kj}) - Ca_{kj} \leqslant f(b_{kj}) - Cb_{kj}$$

ёки

$$f(b_{kj}) - f(a_{kj}) \geqslant C(b_{kj} - a_{kj}).$$

Буни j индекс бўйича йиғиб

$$\sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{1}{C} \sum_j [f(b_{kj}) - f(a_{kj})] \leqslant \frac{1}{C} [f(b_k) - f(a_k)]$$

ни ҳосил қиламиз. (7) дан фойдаланиб

$$\sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C} (b_k - a_k)$$

га, k бўйича йиғиб эса

$$\sum_k \sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C} \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{c}{C} (b - a) \tag{9}$$

муносабатларга эга бўламиз. Кўринадики, (a_{kj}, b_{kj}) оралиқлар системаси, (a_k, b_k) оралиқлар системаси каби, E_{cC} тўпламни қоплайди, аммо (a_{kj}, b_{kj}) оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси (a_k, b_k) лар узунликларининг йиғиндисидан кичик.

E_{cC} тўпламнинг ҳар бир x нуқтаси учун (a_{kj}, b_{kj}) оралиқларнинг ичида юқоридаги ясашларни қайтариш мумкин. Натижада янги учинчи хил (a_{kjm}, b_{kjm}) $(m=1, 2, \ldots)$ системани ва тўртинчи хил (a_{kjmn}, b_{kjmn}) $(m, n=1, 2, \ldots)$ системани ҳосил қиламиз ва булар учун:

$$\sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \frac{c}{C} \sum_m (b_{kjm} - a_{kjm}) \leqslant \frac{c}{C} (b_{kj} - a_{kj}).$$

Бу ифодани k ва j бўйича йиғиб ва (9) дан фойдаланиб

$$\sum_k \sum_j \sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^2 \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^2 (b - a)$$

тенгсизликларни ёза оламиз.

Бу ифода кўрсатадики, тўртинчи қадамда олинган (a_{kjmn}, b_{kjmn}) оралиқларнинг (E_{cC} тўпламни қоплаган ҳолда) узунликлари йиғиндиси илгариги қадамда олинган оралиқларнинг узунликлари йиғиндисидан кичик. Агар юқоридаги ясашларни давом эттирсак, у ҳолда p-қадамдаги оралиқлар системаси ҳам E_{cC} тўпламни қоплайди ва бу системадаги оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси $\left(\frac{c}{C}\right)^p (b-a)$

дан катта бўлмайди ва, демак, p етарли катта бўлганда, уни ихтиёрий сондан кичик қилиниши мумкин. Бундан E_{cc} тўпламнинг ўлчови нолга тенглиги келиб чиқади.

Шу билан теорема узлуксиз монотон функциялар учун исбот қилинди.

Энди теоремани узлукли монотон функциялар учун исботлаймиз.

Эслатамизки, ихтиёрий монотон функция фақат биринчи турдаги узилишларга эга бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳар қандай нуқтада $f(x)$ функциянинг ўнг ва чап лимитлари мавжуд:

$$f(x+0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi), \quad f(x-0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi)$$

Дарҳақиқат, бирор томондан бир нечта турли лимит қийматларнинг мавжуд бўлиши функциянинг монотонлигига зид. $(f(x-0), f(x+0))$ оралиқ узилиш оралиғи, бу оралиқнинг узунлиги, яъни $f(x+0)-f(x-0)$ га $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги **сакраши** дейилади. $f(x)$ функция монотон бўлгани учун турли узилиш оралиқлари (кўпи билан умумий учга эга бўлиши мумкин) кесишмайди; агар ҳар бир оралиқдан биттадан рационал сонни танлаб олсак, бундай оралиқларнинг сони кўпи билан саноқли бўлишини кўрамиз. Демак, монотон функциянинг узилиш нуқталари кўпи билан саноқли экан.

Узлукли монотон функциянинг ҳосиласи мавжудлигини текшириш учун Рисс леммасини умумлаштирамиз. $f(x)$ функция узлуксиз бўлмаса ҳам кўпи билан биринчи турдаги узилишга эга бўлган функция бўлсин. Агар x нуқта учун

$$x < \xi, \ \max[f(x), \ f(x-0), \ f(x+0)] < f(\xi-0)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ξ нуқта мавжуд бўлса, x нуқта ўнгга кўтарилиш нуқтаси дейилади (42 3- изоҳдаги таъриф билан солиштиринг). Юқорида келтирилган Рисс леммасидаги мулоҳазаларни такрорлаб, барча ўнгга кўтарилиш нуқталаридан иборат бўлган тўпламнинг очиқлигини ва бу тўпламни тузувчи $(a_k, \ b_k)$ оралиқларда

$$f(a_k+0) \leqslant f(b_k-0)$$

тенгсизликнинг ўринлилигини ҳосил қиламиз. Бу эса теореманинг исботини ўзгаришсиз ўтказиш учун кифоя. Шу билан теорема тўла исботланди.

38. 3 ва исботланган теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

42. 4. Натижа (Лебег натижаси). ***Ўзгариши чегараланган ҳар қандай функция деярли ҳар бир нуқтада чекли ҳосилага эга.***

42. 5. **Теорема (Фубини теоремаси).** ***[a, b] сегментда ушбу***

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ \ldots \tag{10}$$

қатор берилган бўлиб, унинг ҳадлари камаймайдиган (ўсиб бормайдиган) функциялар бўлсин. У ҳолда бу қаторни деярли ҳар бир нуқтада ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни деярли ҳар бир нуқтада:

$$S'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ \ldots$$

Исбот. Теореманинг умумийлигини чегараламасдан $f_n(a)=0$ ва ҳамма f_n функцияларни камаймайдиган деб фараз қилиш мумкин. $f_n'(x)$ ва $S'(x)$ лар деярли ҳар бир нуқтада мавжуд, демак, $[a, b]$ да ўлчови $b-a$ га тенг бўлган шундай E тўплам мавжудки, бунинг ҳар бир нуқтасида ҳам $f_n'(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, ҳам $S'(x)$ лар мавжуд. $x\,(\in E)$ ва ихтиёрий ξ учун, ушбу

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n(\xi)-f_n(x)]}{\xi-x}=\frac{S(\xi)-S(x)}{\xi-x}$$

муносабатни ёзамиз. Чап томондаги ифоданинг ҳадлари манфий бўлмагани сабабли бундан ихтиёрий натурал N учун:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}[f_n(\xi)-f_n(x)]}{\xi-x}\leqslant\frac{S(\xi)-S(x)}{\xi-x}.$$

Бундан $\xi\to x$ да лимитга ўтиб

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\leqslant S'(x)$$

тенгсизликни ва N ни ∞ га интилтириб, $f_n'(x)$ ларнинг манфий эмаслигини ҳисобга олинса,

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\leqslant S'(x) \tag{11}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди охирги (11) муносабатда ҳақиқатда деярли ҳар бир нуқтада тенглик ўринлилигини кўрсатамиз. (10) муносабат ўринли бўлгани учун, шундай k топиладики, (10) қаторнинг S_{n_k} хусусий йиғиндиси учун:

$$0\leqslant S(b)-S_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}\quad(k=1,\ 2\ \ldots).$$

Ушбу

$$S(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{i > n_k} f_i(x)$$

айирма камаймайдиган функция эканлигидан барча x учун

$$0 \leqslant S(x) - S_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k}.$$

Бундан

$$\sum_{k=1}^{\infty} [S(x) - S_{n_k}(x)]$$

қаторнинг $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчанлиги (ҳатто текис яқинлашувчанлиги) келиб чиқади. У ҳолда (11) муносабатни исботлаганимиз каби, ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} [S'(x) - S'_{n_k}(x)]$$

қаторнинг деярли ҳар бир нуқтада яқинлашувчанлигини келтириб чиқарамиз. Бу қаторнинг умумий ҳади $S'(x) - S'_{n_k}(x)$ деярли ҳар бир нуқтада нолга интилади, демак, деярли ҳар бир нуқтада $S'_{n_k}(x) \to S'(x)$. Иккинчи томондан, агар (11) муносабатда $<$ ишораси турганда эди, ҳеч қандай хусусий йиғиндилар $S'(x)$ га интила олмас эди. Шундай қилиб, (11) да деярли ҳар бир нуқтада тенглик бўлиши керак. Бизга эса шуни исботлаш керак эди.$_*$

Энди ҳосиласи деярли ҳар бир нуқтада ноль бўлган ҳамда ҳеч қандай оралиқда ўзгармас сонга тенг бўлмаган монотон узлуксиз функцияга, яъни жиддий монотон узлуксиз функцияга мисол келтирамиз. (0, 1) дан бирор t сонини танлаб олиб, индукция ёрдами билан $[0, 1]$ сегментда аниқланган қуйидаги функциялар кетма-кетлигини тузамиз: $\varphi_0(x) = x$; $\varphi_n(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, ҳар бир $(\alpha, \beta) = (k \cdot 2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ (k — натурал сон) кўринишдаги оралиқда чизиқли бўлсин. У ҳолда $\varphi_{n+1}(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз: $x = \alpha$ ва $x = \beta$ нуқталарда $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$ (α, β) оралиқнинг ўртасида, яъни $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ нуқтада:

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1-t}{2}\varphi_n(\alpha) + \frac{1+t}{2}\varphi_n(\beta);$$

бу ерда t юқорида танлаб олинган сон, $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ оралиқларда эса $\varphi_{n+1}(x)$ ни чизиқли деб ҳисоблаймиз.

Равшанки, бундай аниқланган $\varphi_n(x)$ функциялар ўсувчи функциялардир ва

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant 1.$$

Шунинг учун $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетлик бирор камаймайдиган $\varphi(x)$ функцияга яқинлашади. Бу $\varphi(x)$ функциянинг узлуксиз, жиддий ўсиб борувчи ва деярли ҳар бир нуқтада ҳосиласи нолга тенг эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун [0, 1] сегментдан бирон x нуқтани оламиз ва ҳар бири бу нуқтани ўз ичига олган ва бир-бирининг ичига жойлашган (α_n, β_n) оралиқлар кетма-кетлигини тузамиз, бу ерда

$$\alpha_n = k_n \cdot 2^{-n}, \quad \beta_n = (k_n + 1) \cdot 2^{-n}.$$

Равшанки,

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1}) - \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n)].$$

Бундан ва

$$\varphi_p(\alpha_p) = \varphi(\alpha_p), \quad \varphi_p(\beta_p) = \varphi(\beta_p)$$

тенгликлардан

$$\varphi(\beta_{n+1}) - \varphi(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)]$$

тенгликни, бундан эса

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \varepsilon_k t}{2} \quad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин. Бундан

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) > 0$$

ва $n \to \infty$ да

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \to 0$$

муносабатлар келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ узлуксиз, жиддий ўсувчи функция ва унинг ҳосиласи (мавжуд бўлган нуқталарда) қуйидаги ифоданинг $n \to \infty$ даги лимит қийматига тенг:

$$\frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon_k t).$$

Аммо бу ифоданинг лимити ёки аниқ бўлмайди, ёки чексиз, ёки нолга тенг. Натижада ҳосила мавжуд бўлган ҳамма нуқталарда: $\varphi'(x) = 0$.

42. 1- теоремага асосан ҳосила деярли ҳар бир нуқтада мавжуд. Демак, деярли ҳар бир нуқтада $\varphi'(x) = 0$.*

43-§. Лебегнинг аниқмас интеграли

1. Анализнинг умумий курсидан маълумки, $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция ва унинг Риман маъносидаги аниқмас интеграли

$$F(x)=\int_{a}^{\beta} f(t)\,dt+F(0) \tag{1}$$

учун ҳар бир нуқтада

$$F'(x)=f(x) \tag{2}$$

муносабат ўринли; $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич (примитив) функциясидир.

Шунга ўхшаш ибора Лебег интеграли учун ҳам ўринлими, яъни агар $f(x)$ жамланувчи бўлиб, узлуксизлиги талаб қилинмаса, (1) ва (2) муносабатлар сақланадими? Бу масала 43. 2- теоремада ечилади.

Дастлаб қуйидаги теоремани исботлаймиз.

43. 1. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ жамланувчи функция бўлса, у ҳолда унинг Лебег маъносидаги аниқмас интеграли***

$$\boldsymbol{F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt+C}$$

ўзгариши чегараланган функция бўлади.

Исбот. $F(x)$ нинг $[a, b]$ да мавжудлиги $f(x)$ нинг жамланувчилигидан келиб чиқади. Агар $f(x)$ функция манфий бўлмаса, бу ўз-ўзидан равшан, чунки бу ҳолда $F(x)$ функция камаймайдиган бўлади ва, демак, унинг ўзгариши чегараланган. Агар $f(x)$ ишораси турли қийматларга эга бўлса, уни икки манфий бўлмаган функцияларнинг айирмаси сифатида ёзишимиз мумкин, яъни:

$$f(x)=f_{+}(x)-f_{-}(x), \tag{3}$$

бу ерда:

$$f_{+}(x)=\begin{cases}\text{агар } x \text{ нуқтада } f(x)\geqslant 0 \text{ бўлса, } f(x),\\ \text{агар } x \text{ нуқтада } f(x)<0 \text{ бўлса, } 0.\end{cases}$$

$$f_{-}(x)=\begin{cases}\text{агар } x \text{ нуқтада } f(x)\geqslant 0 \text{ бўлса, } 0\\ \text{агар } x \text{ нуқтада } f(x)<0 \text{ бўлса, } -f(x).\end{cases}$$

Демак, бу ҳолда $F(x)$ иккита камаймайдиган функциянинг айирмасига тенг бўлиб, яна ўзгариши чегараланган бўлади.*

43. 2. **Теорема** (Лебег теоремаси). ***Жамланувчи $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли $F(x)$ деярли ҳар бир нуқтада қиймати $f(x)$ га тенг ҳосилага эга.***

Исбот. 42. 4- натижага ва 43. 1- теоремага мувофиқ $F(x)$ функция деярли ҳар бир нуқтада ҳосилага эга. Энди (2) тенгликнинг деярли ҳар бир нуқтада ўринлилигини $f(x)$ манфий бўлмаган ҳол учун кўрсатиш кифоя, чунки умумий ҳол (3) муносабат ёрдамида бу ҳолга келтирилади. $f(x)$ манфий бўлмагани учун унга монотон ўсиб яқинлашувчи поғонали $\psi_n(x)$ функциялар кетма-кетлиги мавжуд[1]. Равшанки $\psi_n(x)$ нинг аниқмас интеграли $F_n(x)$ деярли ҳар бир нуқтада $F'_n(x)$ ҳосилага эга ва $F'_n(x) = \psi_n(x)$, сўнгра $F(x)$ функцияни 33. 1- теоремага асосан

$$F_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [F_{k+1}(x) - F_k(x)]$$

қатор сифатида ёзсак ва бу қаторга 42- § даги Фубини теоремасини татбиқ қилсак, теорема исботланади.

43. 3. **Теорема.** ***$[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функцияга нисбатан бошланғич $F(x)$ функциянинг тўла ўзгариши чегараланган ва***

$$V_a^b(F) = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Исбот. $[a, b]$ сегментни ихтиёрий n та қисмга бўлиб, ҳар бир $[a_{k-1}, a_k)$ қисмда ўзгармас ε_k ($|\varepsilon_k| \leqslant 1$) қийматга эга бўлган поғонали $\varepsilon(x)$ функцияни тузамиз. У ҳолда:

$$\int_a^b \varepsilon(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [F(a_k) - F(a_{k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |F(a_k) - F(a_{k-1})| \leqslant V_a^b(F).$$

$[a_{k-1}, a_k)$ ярим сегментлардан энг каттасининг узунлиги истаганча кичик қилиб олинса ва

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & F(a_k) - F(a_{k-1}) > 0 \\ 0, & F(a_k) - F(a_{k-1}) = 0 \\ -1, & F(a_k) - F(a_{k-1}) < 0 \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [F(a_k) - F(a_{k-1})]$ йиғинди $V_a^b(F)$ га истаганча яқин қилиниши мумкин. Демак,

$$V_a^b(F) = \sup_{|\varepsilon(x)| \leqslant 1} \int_a^b \varepsilon(x) f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (4)$$

---

[1] $\psi_n(x)$ функцияларни, масалан, қуйидагича олиш мумкин:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n, & \text{агар } x \text{ нуқтада } f(x) \geqslant n \text{ бўлса,} \\ \dfrac{i-1}{2^n}, & \text{агар } x \text{ нуқтада } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^n},\ i = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Равшанки, $\psi_n(x)$ функция поғонали бўлиб, $n \to \infty$ да монотон ўсиб $f(x)$ га яқинлашади.

Сўнгги тенгсизликда, ҳақиқатда, тенглик муносабати ўринлилигини кўрсатамиз. Бунинг учун $f(x)$ га деярли яқинлашувчи поғонали $\psi_n(x)$ функциялар кетма-кетлигини оламиз ва қуйидаги функцияни тузамиз:

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} \text{агар } n\psi_n(x) \geqslant 1 \text{ бўлса, } 1 \\ \text{агар } -1 < n\psi_n(x) < 1 \text{ бўлса, } n\psi_n(x), \\ \text{агар } n\psi_n(x) \leqslant -1 \text{ бўлса, } -1. \end{cases}$$

У ҳолда деярли $f(x) > 0$ бўлган нуқталарда $\lim\limits_n \lambda_n(x) = 1$, деярли $f(x) < 0$ бўлган нуқталарда $\lim\limits_n n\lambda_n(x) = -1$.

Бундан:

$$\lim_n \lambda_n(x) f(x) = |f(x)|.$$

Иккинчи томондан, ушбу

$$|\lambda_n(x) f(x)| \leqslant |f(x)|$$

тенгсизлик ўринли бўлганлиги учун ва 33. 2- изоҳга асосан:

$$\lim_n \int_a^b n\psi_n(x) f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Бунга ва (4) га мувофиқ:

$$V_a^b(F) = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2. 43. 2- теоремани кучайтириш мақсадида қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. *$[a, b]$ сегментда бирор ўлчовли $f(t)$ функция аниқланган бўлсин. Агар $x\,(\in [a, b])$ нуқтада*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt = 0$$

муносабат бажарилса, у ҳолда бу нуқта $f(x)$ нинг Лебег нуқтаси дейилади.

43. 4. Теорема. ***Агар x нуқта $f(t)$ функциянинг Лебег нуқтаси бўлса, у ҳолда бу нуқтада аниқмас интеграл***

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

нинг ҳосиласи $f(x)$ га тенг.

Исбот. Равшанки,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \{f(t) - f(x)\}\,dt,$$

ёки

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt.$$

Агар x нуқта $f(t)$ нинг Лебег нуқтаси бўлса, у ҳолда сўнгги тенгсизликдан $F'(x)=f(x)$ келиб чиқади.*

43. 5. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлса, у ҳолда $[a, b]$ сегментнинг деярли ҳар бир нуқтаси $f(x)$ нинг Лебег нуқтасидир.***

Исбот. Аввало, деярли ҳар бир $x \in [a, b]$ нуқтада 43. 2 га мувофиқ қуйидаги тенглик ўринли:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} |f(t)-r|\,dt = |f(x)-r| \quad (r \text{ — рационал сон}),$$

чунки $f(t)$ билан бирга $[a, b]$ сегментда $|f(t)-r|$ функция ҳам жамланувчидир.

Сўнгги муносабат бажарилмаган нуқталардан иборат Q_r тўпламнинг ўлчови нолга тенг. Ҳамма рационал сонларни номерлаб чиқиб, ушбу

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{r_n} \cup Q(|f|=+\infty)$$

тўпламни киритамиз; бу ерда $Q(|f|=+\infty)$ тўплам $f(x)$ нинг қиймати чексизга тенг бўлган нуқталардан иборат. $\mu(Q)=0$ бўлганлиги учун $P=[a, b]\setminus Q$ тўплам нуқталари $f(t)$ нинг Лебег нуқталари эканлиги кўрсатилса теорема исбот этилади.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сонни ва P тўпламдан ихтиёрий x_0 нуқтани олиб, шундай рационал r_n сонни топамизки, унинг учун

$$|f(x_0)-r_n|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда:

$$\big||f(t)-r_n|-|f(t)-f(x_0)|\big|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ёки

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-r_n|\,dt-\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизликлар ҳам бажарилади. Лекин $|h|<\delta$ бўлганда (δ сони ε га боғлиқ) ушбу

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-r_n|\,dt-|f(x_0)-r_n|\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади ёки (5) тенгсизликка мувофиқ:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-r_n|\,dt<\frac{2}{3}\varepsilon;$$

демак,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни x_0 Лебег нуқтаси.$_*$

43. 4 ва 43. 5- теоремалардан бевосита қуйидаги натижага келамиз:

43. 6. Натижа. ***Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлиб,***

$$F(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx$$

бўлса, у ҳолда $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида $F'(x)=f(x)$.

43. 7. Теорема. ***Жамланувчи $f(x)$ функциянинг ҳар бир узлуксиз нуқтаси унинг Лебег нуқтаси бўлади.***

Исбот. x_0 нуқта $f(x)$ нинг узлуксиз нуқтаси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун, шундай $\delta>0$ сонини мос келтириш мумкинки, $|t-x_0|<\delta$ бўлганда

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

бўлади.

Бундан

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon$$

тенгсизлик ёки x_0 нуқта $f(x)$ нинг Лебег нуқтаси эканлиги келиб чиқади.$_*$

44- §. Абсолют узлуксиз функциялар

Энди абсолют узлуксиз функциялар синфини киритамиз. Бу функциялар синфи, ўзгариши чегараланган функциялар синфидан торроқ бўлиб, жамланувчи функцияларнинг аниқмас интеграли билан яқин боғланган.

1- таъриф. $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon(>0)$ учун шундай $\delta(>0)$ мавжуд бўлсаки, қуйидаги сони чекли ва ҳар иккиси ўзаро кесишмайдиган

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \left(\bigcup_{k=1}^{n}[a_k, b_k]\subset[a, b],\ \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta\right)$$

ҳар қандай сегментлар системаси учун ушбу

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз дейилади.

Таърифдан равшанки, ҳар қандай абсолют узлуксиз функция одатдаги маънода ҳам узлуксиз; буни кўрсатиш учун юқоридаги таърифда $n=1$ қилиб олиш кифоя.

Абсолют узлуксиз функцияга мисол сифатида Липшиц шартини, яъни ушбу

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant k|x_2-x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи функцияни олишимиз мумкин.

44. 1. **Теорема.** ***Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси ҳам абсолют, узлуксиз функциялар бўлади. Бундан ташқари, агар берилган сегментда $\varphi(x)$ нолга тенг бўлмаса, у ҳолда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳам ўша сегментда абсолют узлуксиз бўлади.***

Исбот. Йиғинди ва айирманинг абсолют узлуксизлиги қуйидаги тенгсизликдан бевосита келиб чиқади:

$$|\{f(b_k)\pm\varphi(b_k)\}-\{f(a_k)\pm\varphi(a_k)\}|\leqslant|f(b_k)-f(a_k)|+$$
$$+|\varphi(b_k)-\varphi(a_k)|.$$

H_f ва H_φ лар билан мос равишда $|f(x)|$ ва $|\varphi(x)|$ ларнинг аниқ юқори чегарасини белгилаб, ушбу

$$|f(b_k)\varphi(b_k)-f(a_k)\varphi(a_k)|=|\{f(b_k)\varphi(b_k)-f(a_k)\varphi(b_k)\}+$$
$$+\{f(a_k)\varphi(b_k)-f(a_k)\varphi(a_k)\}|\leqslant H_\varphi|f(b_k)-f(a_k)|+$$
$$+H_f|\varphi(b_k)-\varphi(a_k)|$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин. Бундан эса $f(x)\varphi(x)$ кўпайтманинг абсолют узлуксизлиги келиб чиқади.

Теореманинг шартига кўра: $|\varphi(x)|\geqslant\lambda>0$, чунки $\varphi(x)$ нолга тенг эмас. Шунинг учун

$$\left|\frac{1}{\varphi(b_k)}-\frac{1}{\varphi(a_k)}\right|\leqslant\frac{|\varphi(b_k)-\varphi(a_k)|}{\lambda^2},$$

яъни $\frac{1}{\varphi(x)}$ абсолют узлуксиз ва, демак, $f(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}$ ҳам абсолют узлуксиз бўлади.

44. 2. **Теорема.** ***$[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз функция бу сегментда чегараланган ўзгаришга эга.***

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. $\varepsilon = 1$ га мос δ сонини олиб, узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлган ўзаро кесишмайдиган ва сони чекли (n та) оралиқлар системасини тузамиз:

$$\{(a_k, b_k)\}$$

у ҳолда ушбу

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$$

тенгсизликлар ўринли.

Энди $[a, b]$ сегментни, ҳар бирининг узунлиги δ дан кичик, m та қисмга бўламиз, яъни:

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = b$$

ва

$$c_{k+1} - c_k < \delta \ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Сўнгра, $[c_k, c_{k+1}]$ сегмент ўзаро кесишмайдиган ва сони чекли қандай қисмларга бўлинмасин, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$V_{c_k}^{c_{k+1}}(f) \leqslant 1 \text{ ва, демак, } V_a^b(f) \leqslant m,$$

яъни $f(x)$ нинг ўзгариши чегараланган. *

Бу теоремадан кўринадики, узлуксиз-у, аммо абсолют узлуксиз бўлмаган функциялар мавжуд экан (38. 5- теоремадан кейинги мисолга қаранг).

44. 3. **Теорема.** ***Ҳар қандай абсолют узлуксиз $F(x)$ функцияни иккита камаймайдиган абсолют узлуксиз функцияларнинг айирмаси шаклида ифода қилиш мумкин:***

$$F(x) = V(x) - G(x), \ V(x) = V_a^x[F].$$

Исбот. Теоремани исботлаш учун 44. 2 ва 38. 3- теоремаларга асосан $V(x)$ ва $G(x)$ функцияларнинг абсолют узлуксизлигини исботлаш кифоя. Агар $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини кўрсатсак, 44. 1- теоремага асосан, $G(x) = V(x) - F(x)$ ҳам абсолют узлуксиз бўлади. $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини исботлаймиз.

Ихтиёрий ε ни олиб, $F(x)$ нинг абсолют узлуксизлиги шартидан δ ни топамиз. Узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлган $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ оралиқларни олиб,

$$\sum_{k=1}^{n}\{V(b_k) - V(a_k)\} = \sum_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}[F] \quad (1)$$

йиғиндини қурамиз. Бу йиғинди

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k}|F(x_{k,\ j+1})-F(x_{kj})| \tag{2}$$

йиғиндиларнинг юқори чеграсига тенг, бу ерда $a_k = x_{k_0} < x_{k_1} < \ldots < x_{kn_k} = b_k$ эса $(a_k,\ b_k)$ оралиқларнинг ихтиёрий бўлинмасидир. Равшанки,

$$b_k - a_k = \sum_{j=0}^{n_k-1}(x_{k,\ j+1} - x_{kj}).$$

Барча $(a_k,\ b_k)$ оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси δ дан кичик бўлгани учун, $F(x)$ нинг абсолют узлуксизлигига асосан, ҳар бир (2) ифода ε дан катта эмас. Аммо у ҳолда (1) ҳам ε дан катта бўлмайди, бу эса $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини кўрсатади.$_*$

44. 4. Теорема. ***[a, b] сегментда абсолют узлуксиз f(x) функция берилган бўлиб, унинг қийматлари [A, B] сегментда жойлашган бўлсин. Агар [A, B] сегментда берилган ψ(y) функция Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда мураккаб ψ(f(x)) функция абсолют узлуксиз бўлади.***

Исбот. $\psi(y)$ Липшиц шартини қаноатлантиради, яъни

$$|\psi(y_2)-\psi(y_1)| \leq k\,|y_2 - y_1)$$

тенгсизлик ўринли. Демак, ихтиёрий ўзаро кесишмайдиган, сони чекли (n та) ва $[a,\ b]$ сегментда жойлашган $\{(a_k,\ b_k)\}$ оралиқлар системаси учун ушбу

$$\sum_{k=1}^{n}|\psi[f(b_k)]-\psi[f(a_k)]| \leqslant k\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|$$

муносабат ўринли.

Агар $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ йиғинди истаганча кичик бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг абсолют узлуксизлигига мувофиқ бу муносабатнинг ўнг томони ҳам истаганча кичик бўлади.$_*$

44. 5. Теорема. ***Агар [a, b] сегментда аниқланган абсолют узлуксиз f(x) функциянинг ҳосиласи f′(x) деярли ҳар бир нуқтада нолга тенг бўлса, у ҳолда f(x) ўзгармас сонга тенг.***

Исбот. $f'(x) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат тўпламни E билан белгилаб, ихтиёрий $\varepsilon (> 0)$ сонни оламиз. Агар $x \in E$ бўлса, у ҳолда етарли кичик $h (> 0)$ сони учун ушбу

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} < \varepsilon \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $[x, x+h]$ (h мусбат ва (3) тенгсизликни қаноатлантиради) сегментлар системаси Витали маъносида (20-параграфга қаранг) E тўпламни қоплайди.

Шунинг учун 20.2- теоремага мувофиқ ҳар иккиси ўзаро кесишмайдиган, сони чекли ва $[a, b]$ сегментда жойлашган шундай

$$\sigma_1=[x_1, x_1+h_1], \ \sigma_2=[x_2, x_2+h_2], \ \ldots, \ \sigma_n=[x_n, x_n+h_n]$$

($x_k < x_{k+1}$) сегментлар системасини тузишимиз мумкинки, E тўпламнинг булар қопламаган қисмининг ташқи ўлчови, олдиндан берилган ихтиёрий $\delta > 0$ сондан кичик қилиниши мумкин.

$[a, b]$ сегментдан $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ сегментларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган оралиқлар

$$[a, x_1), (x_1+h_1, x_2), (x_2+h_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}+h_{n-1}, x_n),$$
$$(x_n+h_n, b] \tag{4}$$

лардан иборат бўлиб, булар узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлади, чунки:

$$b-a=\mu(E) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k)+\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k\right) < \sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k)+\delta$$

ёки

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) > b-a-\delta.$$

Энди $f(x)$ нинг абсолют узлуксизлигидан фойдаланиб δ ни шундай кичик қилиб олинган дейишимиз мумкинки, унинг учун $f(x)$ функциянинг (4) оралиқлар системасидаги орттирмаларининг йиғиндисининг модули ε дан кичик, яъни:

$$\left|\{f(x_1)-f(a)\}+\sum_{k=1}^{n-1}\{f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\}+\{f(b)-f(x_n+h_n)\}\right|<\varepsilon \tag{5}$$

бўлсин.

Иккинчи томондан σ_k сегментларнинг тузилишига кўра:

$$|f(x_k+h_k)-f(x_k)| < \varepsilon h_k;$$

бундан:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k+h_k)-f(x_k)\}\right| < \varepsilon(b-a), \tag{6}$$

чунки:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k=\sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) \leqslant b-a.$$

(5) ва (6) лардан:

$$f(b)-f(a) < \varepsilon(1+b-a)$$

ва ε нинг ихтиёрийлигидан

$$f(b) = f(a)$$

тенглик келиб чиқади.

Аммо юқоридаги мулоҳазаларни ҳар қандай $[a, x]$ $(a < x \leqslant b)$ сегмент учун жорий этишимиз мумкин эди. Шунинг учун $[a, b]$ сегментдан олинган ихтиёрий x учун ҳам

$$f(x) = f(a),$$

яъни $f(x)$ функция ўзгармас сонга тенг экан.$_*$

44. 6. **Натижа.** ***Агар икки абсолют узлуксиз $f(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг ҳосилалари $f'(x)$ ва $\psi'(x)$ ўзаро эквивалент бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг айирмаси ўзгармас сонга тенг.***

2-таъриф. *Агар 43-параграфдаги (1) нинг ўнг томонидан олинган интеграл остидаги $f(t)$ функция жамланувчи бўлса, у ҳолда унинг чап томонидаги $F(x)$ функцияни Лебегнинг аниқмас интеграли дейилади.*

44. 7. **Теорема.** ***Лебегнинг аниқмас интеграли $F(x)$ абсолют узлуксиз функциядир.***

Исбот. Маълумки ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай δ сони мавжудки, агар e тўпламнинг ўлчови δ дан кичик, яъни $\mu(e) < \delta$ бўлса, у ҳолда:

$$\left| \int_e f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Хусусий ҳолда, яъни ўзаро кесишмайдиган сони чекли $\{(a_k, b_k)\}$ $(k = \overline{1, n})$ оралиқлар системасининг узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлса, у ҳолда:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Аммо

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt = F(b_k) - F(a_k);$$

булардан:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{F(b_k) - F(a_k)\} \right| < \varepsilon,$$

яъни $F(x)$ абсолют узлуксиз.$_*$

44. 8. **Теорема** (Лебег теоремаси). ***$[a, b]$ сегментда аниқланган абсолют узлуксиз $F(x)$ функциянинг ҳосиласи $\varphi(x)$ жамланувчи ва ҳар бир x учун:***

$$\int_a^x \varphi(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

Исбот. 44. 3- теоремага асосан абсолют узлуксиз функцияни иккита камаймайдиган абсолют узлуксиз функцияларнинг айирмаси шаклида ифодалаш мумкин; шунинг учун теоремани камаймайдиган абсолют узлуксиз функциялар учун исботлаш кифоя.

44. 2- теорема ва 42. 4- натижага асосан $F(x)$ нинг ҳосиласи деярли ҳар бир нуқтада мавжуд; уни $\varphi(x)$ билан белгилаймиз. $\varphi(x)$ нинг жамланувчанлигини кўрсатамиз.

$F(x)$ нинг ҳосиласи ушбу

$$\Phi_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

нисбатнинг лимитига тенг[1]. $F(x)$ камаймайдиган бўлгани учун $\Phi_h(x)$ манфий эмас ва $h\to 0$ да $[a, b]$ нинг деярли ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ га яқинлашади. $\varphi(x)$ нинг жамланувчанлигини кўрсатиш учун 34. 12- (Фату) теоремасидан фойдаланамиз. Бунинг учун $\Phi_h(x)$ функциялардан $[a, b]$ сегмент бўйича олинган интегралларнинг чегараланганлигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, ушбу

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Phi_h(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h}F(x)\,dx-\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta}F(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h}F(x)\,dx-\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h}F(x)\,dx$$

ифода $h\to 0$ да $F(\beta)-F(\alpha)$ га интилади ва, демак, чегараланган бўлади. Шундай қилиб, Фату теоремасини татбиқ қилиш мумкин. Бу теоремадан $F'(x)=\varphi(x)$ нинг жамланувчанлиги билан бирга

$$\int_{\alpha}^{\beta}F'(x)\,dx\leqslant F(\beta)-F(\alpha)\leqslant F(b-0)-F(a+0)$$

тенгсизлик ҳам келиб чиқади. Агар $\alpha\to a$, $\beta\to b$ бўлса, у ҳолда $F'(x)$ ҳосила $[a, b]$ да жамланувчи ва

$$\int_{a}^{b}F'(x)\,dx\leqslant F(b-0)-F(a+0).$$

$F(x)$ функция a ва b нуқталарда узлуксиз бўлгани учун

$$\int_{a}^{b}F'(x)\,dx\leqslant F(b)-F(a). \tag{7}$$

$F(x)$ абсолют узлуксиз бўлганда (5) тенглик ўринли бўлишини кўрсатамиз[2].

---

[1] Агар $x+h$ сони $[a, b]$ сегментдан ташқарига чиқиб кетса, $F(x)$ ни ўзгармас қилиб давом эттирамиз.

[2] 42- § нинг охирида келтирилган мисолдан кўринадики, узлуксиз (ҳатто жиддий монотон узлуксиз) функциялар учун (5) да $<$ ишораси бўлиши мумкин.

Ушбу

$$G(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

функцияни киритамиз. $G(x)$ функция 44. 7- теоремага асосан абсолют узлуксиз ва 43. 6- натижага асосан деярли ҳар бир нуқтада $G'(x) = \varphi(x)$. Аммо иккинчи томондан $F'(x) = \varphi(x)$; шунинг учун $H(x) = F(x) - G(x)$ айирманинг ҳосиласи деярли ҳар бир нуқтада нолга тенг.

Демак, 44. 5- теоремага асосан $H(x)$ ўзгармас C_0 сонга тенг. У ҳолда:

$$F(x) = G(x) + H(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi + C_0.$$

Агар $x = a$ бўлса, $C_0 = F(a)$. Шу билан теорема тўла исбот этилди.

Шундай қилиб, абсолют узлуксиз функция ўз ҳосиласининг аниқмас интегралидир.

44. 7- ва 44. 8- теоремалардан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади.

44. 9. Натижа. ***$F(x)$ функция бирор жамланувчи функциянинг аниқмас интеграла бўлиши учун абсолют узлуксиз бўлиши зарур ва кифоя.***

45- §. Бошланғич функцияни тиклаш

Бу ерда яна илгари 43- параграфда қўйилган масалага қайтамиз. Аниқроқ қилиб айтганда $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ ҳар бир нуқтада мавжуд бўлиб, чегараланмаган бўлса, ушбу

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \tag{1}$$

тенглик ўринлими, деган масалани қараймиз.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода **б о ш л а н ғ и ч ф у н к ц и я** дейилади.

44- параграфдаги сўнгги асосий натижадан, $f(x)$ абсолют узлуксиз функция бўлса, бу масала ижобий жавобга эга экани кўринади. Аммо биз (1) тенгликнинг бажарилиш шартларини $f(x)$ нинг ўзига боғламай, балки унинг ҳосиласи $f'(x)$ га боғлаб, унинг ўринлилигини билмоқчимиз. Бу масалага тегишли қуйидаги теоремани келтирамиз.

45. 1. Т е о р е м а. ***Агар ҳосила функция $f'(x)$ ҳар бир нуқтада мавжуд бўлиб, чекли ва жамланувчи бўлса, у ҳолда (1) тенглик ўринли.***

Исбот. Теореманинг исботи қуйидаги учта леммага асосланган.

45. 2. Лемма. *$[a, b]$ сегментда бирор чекли $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функциянинг ҳосила сонлари манфий бўлмаса, у ҳолда $\varphi(x)$ ўсувчи функциядир.*

Исбот. Бирор $\varepsilon > 0$ олиб,

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)$$

функцияни тузамиз.

Фараз қилайлик, $\varphi_1(b) < \varphi_1(a)$ бўлсин. Агар $c = \frac{a+b}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi_1(b) - \varphi_1(c), \ \varphi_1(c) - \varphi_1(a)$$

айирмаларнинг камида биттаси манфий. $[a_1, b_1]$ билан $[a, c]$, $[c, b]$ сегментларнинг $\varphi_1(b_1) < \varphi_1(a_1)$ муносабатни қаноатлантириладиганини (иккаласи ҳам қаноатлантирилса, чапдагисини) белгилаймиз. Агар $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ бўлса,

$$\varphi_1(b_1) - \varphi_1(c_1), \ \varphi_2(c_1) - \varphi_1(a_1)$$

айирмаларнинг камида бири манфийдир. $[a_2, b_2]$ билан $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ сегментларнинг $\Phi_1(b_2) < \Phi_1(a_2)$ муносабатни қаноатлантирадиганини (иккаласи ҳам қаноатлантирилса, чапдагисини) белгилаймиз.

Бундай ясашларни давом эттириб $\varphi_1(b_n) < \varphi_1(a_n)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\{[a_n, b_n]\}$ сегментлар кетма-кетлигини қурамиз.

x_0 нуқта $[a_n, b_n]$ сегментларнинг ҳаммасига тегишли нуқта бўлсин. У ҳолда ҳар бир n да

$$\Phi_1(b_n) - \Phi_1(x_0), \ \Phi_1(x_0) - \Phi_1(a_n)$$

айирмаларнинг биттаси манфий. Агар $\varphi_1(b_n) < \varphi_1(x_0)$ бўлса, $h_n = b_n - x_0$ ва агар $\varphi_1(b_n) \geqslant \varphi_1(x_0)$ бўлса, $h_n = a_n - x_0$ деб оламиз. Равшанки

$$\Delta_n = \frac{\varphi_1(x_0 + h_n) - \varphi_1(x_0)}{h_n} < 0.$$

Агар бу кетма-кетликдан чекли ёки чексиз лимитга эга бўлган $\{\Delta_{n_k}\}$ кетма-кетлик қисмини танлаб олсак, ҳосила сон учун

$$D\varphi_1(x_0) \leqslant 0$$

тенгсизлик олинади. Аммо бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки

$$D\varphi_1(x) \geqslant \varepsilon.$$

Шундай қилиб, $\varphi_1(b) < \varphi_1(a)$ тенгсизликнинг бўлиши мумкин эмас, демак,

$$\varphi_1(b) \geqslant \varphi_1(a),$$

яъни:

$$\varphi(b)+\varepsilon b \geqslant \varphi(a)+\varepsilon a.$$

Бундан ε сон ихтиёрий бўлгани учун:

$$\varphi(b) \geqslant \varphi(a).$$

Бу ерда a ва b лар ихтиёрий бўлгани учун лемма исботланди.

45. 3. Лемма. ***[a, b] сегментда ўлчови нолга тенг бўлган ихтиёрий E тўплам берилган бўлсин. У ҳолда шундай ўсувчи узлуксиз g(x) функция мавжудки, E тўпламнинг ҳар бир x нуқтасида:***

$$g'(x)=+\infty.$$

Исбот. Ҳар бир натурал n сони учун ушбу

$$G_n \supset E, \ \mu G_n < \frac{1}{2^n}$$

шартларни қаноатлантирувчи очиқ тўпламни тузамиз. $G_n \cap [a, x]$ тўпламнинг ўлчовини $\psi_n(x)$ билан белгилаймиз, яъни

$$\psi_n(x)=\mu\{G_n \cap [a, x]\},$$

$\psi_n(x)$ функция ўсувчи, манфий эмас, узлуксиз ва

$$\psi_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Шунинг учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи; бу қаторни $g(x)$ билан белгилаймиз. $g(x)$ функция манфий эмас, ўсувчи ва узлуксиз.

n сони берилган ва $x_0 \in E$ бўлса, у ҳолда $|h|$ етарли кичик бўлганда $[x_0, x_0+h]$ сегмент бутунлай G_n нинг ичида ётади. Бундай h ларда (қулайлик учун $h>0$ дейиш мумкин) ушбу

$$\psi_n(x_0+h)=\mu\{G_n \cup [a, x_0] \cup G_n \cap (x_0, x_0+h)\}=\psi_n(x_0)+h$$

муносабат ўринли. Бундан:

$$\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=1.$$

Аммо бундан, натурал N сони қандай бўлмасин, $|h|$ етарли кичик бўлганда

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=N.$$

Демак,

$$g'(x_0)=+\infty.$$

Лемма исботланди.

45. 4. Лемма. ***[a, b] сегментда чекли $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар [a, b] сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функциянинг барча ҳосила сонлари манфий бўлмаса ва [a, b] нинг ҳеч қандай нуқтасида $\varphi(x)$ нинг ҳеч бир ҳосила сони $-\infty$ га тенг бўлмаса, у ҳолда $\varphi(x)$ ўсувчидир.***

Исбот. $\varphi(x)$ функция ҳосила сонларидан камида биттаси манфий бўлган $[a, b]$ сегментнинг нуқталари тўпламини E билан белгилаймиз. Лемманинг шарти бўйича

$$\mu E = 0.$$

45. 3- леммага асосан шундай узлуксиз ўсувчи $g(x)$ функция мавжудки, E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида

$$g'(x) = +\infty.$$

Бирор $\varepsilon > 0$ олиб, ушбу

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \varepsilon g(x)$$

функцияни киритамиз ва $\Phi(x)$ нинг ҳеч бир ҳосила сони $[a, b]$ сегментнинг ҳеч қандай нуқтасида манфий бўлолмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $g(x)$ ўсувчи бўлгани учун ушбу

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \geqslant \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

тенгсизлик ўринли, бундан эса $[a, b]$ сегментнинг E тўпламга тегишли бўлмаган ихтиёрий x нуқтасида

$$D\Phi(x) \geqslant 0$$

ни топамиз (чунки E дан ташқарида $\varphi(x)$ нинг ҳосила сонлари манфий эмас). Агар $x \in E$ бўлса, ушбу

$$\frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n}$$

ифода қуйидан чегараланганлиги (чунки акс ҳолда $\varphi(x)$ нинг бирор ҳосила сони учун $D\varphi(x) = -\infty$ бўларди) ва $g'(x) = +\infty$ бўлгани учун: $\Phi'(x) = +\infty$. Шундай қилиб, $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай нуқтаси учун

$$D\Phi(x) \geqslant 0.$$

Бундан, 45. 2- леммага асосан, $\Phi(x)$ ўсувчи, яъни $x < y$ да

$$\Phi(x) \leqslant \Phi(y),$$

яъни:

$$\varphi(x) + \varepsilon g(x) \leqslant \varphi(y) + \varepsilon g(y).$$

ε сонни нолга интилтириб, ушбу

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$$

ифодани оламиз. Шуни исботлаш керак эди.*

Теореманинг исботи. Қуйидаги функцияларни киритамиз.

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \text{агар } f'(x) \leqslant n & \text{бўлса, } f'(x) \\ \text{агар } f'(x) > n & \text{бўлса, } n. \end{cases}$$

Равшанки,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |f'(x)|. \tag{2}$$

Бундан, 34. 7- теоремага асосан, $\varphi_n(x)$ нинг жамланувчилиги келиб чиқади. Ушбу

$$R_n(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_n(x)\,dx$$

белгини киритиб, $R_n(x)$ нинг ўсувчилигини кўрсатамиз. Деярли ҳар бир нуқтада

$$R_n'(x) = f'(x) - \varphi_n(x) \geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун, $R_n(x)$ нинг бирор ҳосила сони манфий бўлган нуқталар тўпламининг ўлчови нолга тенг. Иккинчи томондан, $\varphi_n(x) \leqslant n$ бўлгани учун:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt \leqslant n.$$

Бундан эса:

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n.$$

Охирги муносабат $R_n(x)$ функциянинг ҳеч бир ҳосила сони $-\infty$ га тенг бўлолмаслигини кўрсатади. Шунинг учун, 45. 4- леммага асосан $R_n(x)$ ўсувчидир. Демак,

$$R_n(b) \geqslant R_n(a),$$

яъни:

$$f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Аммо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x).$$

Буни ва (2) ни кўзда тутиб, 34. 11- теоремани татбиқ қилсак,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx$$

муносабатни оламиз. Демак,

$$f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Агар юқоридаги мулоҳазаларни $-f(x)$ функцияга татбиқ қилсак

$$f(b)-f(a)\leqslant\int_a^b f'(x)\,dx$$

муносабатни оламиз. Охирги икки муносабатдан

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)\,dx$$

келиб чиқади. Бу билан теорема тўла исботланди.

Энди иккита мисол келтирамиз.

1. Ушбу

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}\qquad(0<x\leqslant 1)$$

$$f(0)=0$$

функция $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}-x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}\qquad(x>0)$$

$$f'(0)=0$$

ва бу ҳосила жамланувчи функция бўлади, чунки

$$|f'(x)|\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot$$

Шунинг билан $f(x)$ функция 45. 1- теореманинг шартларини қаноатлантиради ва, демак,

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt.$$

2. Ушбу

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}\qquad(0<x\leqslant 1)$$

$$f(0)=0$$

функция ҳам $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга, аммо унинг ҳосиласи жамланувчи функция бўлмайди. Дарҳақиқат, агар $\alpha<\beta\leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $[\alpha, \beta]$ сегментда $f'(x)$ чегараланган ва шунинг учун:

$$\int_\alpha^\beta f'(t)\,dt=\beta^2\cos\frac{\pi}{\beta^2}-\alpha^2\cos\frac{\pi}{\alpha^2}\cdot$$

Агар $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}$, $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(t)\,dt = \frac{1}{2n}$$

бўлади. Лекин $[\alpha_n, \beta_n]$ сегментлар $n = 1, 2, \ldots$ бўлганда ўзаро кесишмайди; шунинг учун, агар $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ бўлса, у ҳолда:

$$\int\limits_E f'(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty,$$

яъни $f'(x)$ жамланувчи эмас. Бу мисол кўрсатадики, Лебег маъносида интеграллаш процесси ҳам ҳосила-функция ёрдами билан бошланғич функцияни тиклаш масаласини тўла ҳал қилмас экан. Бу масалани Лебегнинг интеграллаш процессини умумлаштирувчи Перрон-Данжуа интеграллаш процесси тўла ҳал қилади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[-1, +1]$ сегментда аниқланган шундай функция тузилсинки, бу функция 0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин.

2. $[0, 1]$ даги узлуксиз функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталари тўплами D ўлчовли эканлигини ва $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам эканини исботланг.

3. $[0, 1]$ даги узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ (бу функция илгариги масалада киритилган D тўпламда аниқланган) ўлчовли эканлиги исботлансин.

4. $[0, 1]$ да аниқланган узлуксиз $f(x)$ функциянинг $[0, 1]$ нинг ҳар бир нуқтасида $f'(x)$ ҳосиласи мавжуд бўлсин. $f'(x)$ функция $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлолмаслиги исботлансин.

5. $f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган бўлиб, бу оралиқнинг ҳар бир нуқтасида $f'(x)$ ҳосиласи мавжуд бўлсин. У ҳолда $f'(x)$ функция (a, b) ва $f'(a)$ ва $f'(b)$ орасидаги барча қийматларни қабул қилиши исботлансин.

6. Агар $f'(x)$ ҳар бир нуқтада мавжуд бўлса, у биринчи турдаги узилишга эга бўлолмаслиги исботлансин.

7. $[0, 1]$ даги барча рационал сонларни номерлаб чиқамиз:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

ва

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x - r_n|$$

функцияни тузамиз (IV боб, 7- масалага қаранг). Бу функция [0,1] сегментнинг барча иррационал нуқталарида ҳосилага эга бўлиб, рационал нуқталарида ҳосиласи мавжуд эмаслиги исботлансин.

8. [0, 1] да узлуксиз $f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу функциянинг n- ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталари тўпламини $D^{(n)}$ билан белгилаймиз. Бу тўпламнинг ўлчовли экани исботлансин.

9. $[a, b]$ да аниқланган $f(x)$ функция берилган бўлиб, у $[a, b]$ нинг деярли ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга. Бундан $f(x)$ нинг ўзгариши чегараланганлиги келиб чиқадими? (Бу масалани 42. 3- теорема билан солиштиринг.)

X БОБ

МЕТРИК ФАЗОЛАР

46- §. Метрик фазо тушунчаси. Мисоллар

Математик анализнинг асосий амалларидан бири лимитга ўтиш тушунчасидир. Бу амални тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўпламда жорий этишда биз икки нуқта орасидаги масофа тушунчасидан доимо фойдаланиб келган эдик. Аммо лимитга ўтиш масаласига кенгроқ қараладиган бўлса, асосий мазмун олинган тўплам элементларининг табиий тузилишида эмас, балки унинг икки элементи орасида масофа тушунчасини кирита билишдадир. Бу мулоҳаза француз математиги М. Фрешени 1906 йилда метрик фазо тушунчасига олиб келди.

Таъриф. *Агар бирон X тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўпайтмаси $[X, X]$ ни $[0, \infty)=R^1_+$ тўпламга акс эттирувчи $\rho(x, y)$ функция мавжуд бўлиб, у қуйидаги шартларни (ёки метрик аксиомаларни) қаноатлантирса, X тўплам метрик фазо ташкил этади дейилади:*

1) $\rho(x, y)\geqslant 0$ ва $\rho(x, y)=0$ муносабат $x=y$ бўлгандагина бажарилади,

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (симметриклик аксиомаси),

3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ (учбурчак аксиомаси).

$\rho(x, y)$ функцияни эса метрика дейилади. Метрик фазонинг элементларини унинг нуқталари деб ҳам юритилади. Метриканинг юқоридаги хоссаларига одатдаги тўғри чизиқ, текислик ва Эвклид фазоларидаги масофа тушунчаларини умумийлаштириш деб ҳам қараш мумкин.

Энди бир неча мисол келтирамиз.

1. X — ихтиёрий тўплам бўлсин; ушбу

$$\rho(x,\ y) = \begin{cases} \text{агар } x \neq y & \text{бўлса, } 1. \\ \text{агар } x = y & \text{бўлса, } 0 \end{cases}$$

функция метрик фазо аксиомаларини қаноатлантиради.

2. n ўлчовли векторлардан иборат $R^n = \{x : x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\}$ тўпламда икки $x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ ва $y = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ векторлар учун масофа ушбу

$$\rho(x,\ y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2\right)^{1/2} \qquad (1)$$

кўринишда киритилса, у ҳолда R^n метрик фазони ташкил этади; бу эса маълум Эвклид фазосидир.

1 ва 2- аксиомаларнинг бажарилиши ўз-ўзидан равшан. Учбурчак аксиомасини Коши — Буняковский[1] тенгсизлигидан келтириб чиқарамиз.

Учта

$$x = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n),\ y = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n),\ z = (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$$

нуқтани олиб, ушбу белгилашларни киритамиз:

$$d_i = b_i - a_i,\ e_i = c_i - b_i, \text{ бундан: } c_i - a_i = d_i + e_i.$$

У ҳолда

$$\rho^2(x,\ z) = \sum_{i=1}^{n}(c_i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_i + e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} d_i e_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \sum_{i=1}^{n} e_i^2} + \sum_{i=1}^{n} e_i^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}\right)^2 = (\rho(x,\ y) + \rho(y,\ z))^2. \text{ Бундан:}$$

$$\rho(x,\ z) \leqslant \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z).*$$

Шуни ҳам айтиш керакки, агар n ўлчовли векторлар тўпламида масофа бошқача киритилса, у яна метрик фазо бўлиб, юқоридаги

---

[1] Яъни: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i$ тенгсизликдан келтириб чиқарамиз. Бу тенгсизлик эса ушбу

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - b_i a_j)^2$$

айниятдан бевосита келиб чиқади.

Эвклид фазосидан фарқли бўлади. Масалан, R^n тўпламда метрикани ушбу

$$\rho(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \tag{2}$$

формула билан ҳам бериш мумкин; бу масофа учун метрика аксиомаларининг ўринли эканини кўрсатишни ўқувчига тавсия этамиз.

3. l_2 — Ҳилберт фазоси қуйидагича аниқланади:

$$l_2 = \left\{ x : x = (a_1,\ a_2,\ \ldots);\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty \right\},$$

яъни l_2 нинг элементлари ҳамма ҳақиқий сонлар кетма-кетлигидан иборат бўлиб, бу сонлар квадратларининг йиғиндисидан иборат қатор яқинлашувчи ва

$$\rho(x,\ y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)^2 \right]^{1/2};$$

бу ерда

$$x = (a_1,\ a_2,\ \ldots) \in l_2,$$
$$y = (b_1,\ b_2,\ \ldots) \in l_2.$$

Биринчи ва иккинчи аксиомаларнинг ўринлилиги равшан, учбурчак аксиомасининг бажарилишини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, ихтиёрий натурал n сони учун

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 \right]^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли (2- мисолга қаранг). Бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги ҳадларнинг ҳар бири $n \to \infty$ да лимитга эга, чунки $x \in l_2$ ва $y \in l_2$. Демак, (3) нинг чап томонидаги ифода ҳам камаймайдиган ва чегараланган бўлганлиги учун лимитга эга. (3) да x ни $(-x)$ га алмаштириб

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + a_k)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} \tag{4}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. (4) дан учбурчак аксиомасини келтириб чиқариш жуда осон. Бунинг учун l_2 фазодан учта:

$$x = (a_1,\ a_2,\ \ldots),\ y = (b_1,\ b_2,\ \ldots),\ z = (c_1,\ c_2,\ \ldots)$$

нуқталарни оламиз ва 2- мисолдагидек қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$d_i = b_i - a_i,\ e_i = c_i - b_i;\ \text{равшанки,}\ c_i - a_i = d_i + e_i.$$

(4) тенгсизликдан фойдаланиб, 2 мисолдаги каби усул билан

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-a_i)^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-b_i)^2\right)^{1/2}$$

ёки $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$ тенгсизликни чиқарамиз.

Келгуси мисолларда ҳам биринчи ва иккинчи аксиомаларнинг бажарилиши ўз-ўзидан равшан бўлганлиги учун биз уларнинг исботи устида тўхтамаймиз.

4. X тўплам $[a, b]$ сегментда аниқланган ҳамма узлуксиз функциялардан иборат. Бу тўпламда метрикани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(x, y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{5}$$

Учбурчак аксиомасининг бажарилишини кўрсатамиз. Ихтиёрий $t\in[a, b]$ нуқта ва $x(t), y(t), z(t)\in X$ функциялар учун ушбу

$$|x(t)-z(t)|=|[x(t)-y(t)]+[y(t)-z(t)]|\leqslant|x(t)-y(t)|+$$
$$+|y(t)-z(t)|\leqslant\max_t|x(t)-y(t)|+\max_t|y(t)-z(t)|=$$
$$=\rho(x, y)+\rho(y, z)$$

муносабатлар бажарилади. Бундан:

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

Бу фазони $C[a, b]$ билан белгилашади.

5. $L_p[a, b]\,(p\geqslant 1)$ фазоси ҳам метрик фазо (VII бобга қаранг).

Бу фазодан олинган икки функциянинг фарқ қиладиган нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, уларни битта нуқта деб ҳисоблаймиз. Ушбу

$$x(t)\in L_p[a, b] \text{ ва } y(t)\in L_p[a, b]$$

функциялар учун масофани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho(x, y)=\left(\int_a^b[x(t)-y(t)]^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{6}$$

Учбурчак аксиомаси Минковский тенгсизлигидан бевосита келиб чиқади (VII бобга қаранг).

6. X тўплам ҳамма чегараланган ҳақиқий сонлар кетма-кетлигидан иборат, яъни:

$$X=\{x: x=(a_1, a_2, \ldots);\ |a_k|<M_x,\ k=1, 2, \ldots\}.$$

Агар иккита $x=(a_1, a_2, \ldots)$ $(|a_k|\leqslant M_x,\ k=1, 2, \ldots)$, $y=(b_1, b_2, \ldots)$ $(|b_k|\leqslant M_y,\ k=1, 2, \ldots)$ нуқталар учун масофа

$$\rho(x, y)=\sup_i|a_i-b_i| \tag{7}$$

тенглик билан аниқланса, бу тўплам ҳам метрик фазога айланади.

Дарҳақиқат учбурчак аксиомаси қуйидагича текширилади:

$$|a_i - c_i| \leqslant |a_i - b_i| + |b_i - c_i| \leqslant \sup_i |a_i - b_i| + \sup_i |b_i - c_i| =$$

$$= \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

$$[z = (c_1, c_2, \ldots), \ |c_i| \leqslant M_z, \ i = 1, 2, \ldots]$$

Бундан:

$$\sup_i |a_i - c_i| = \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Бу фазони m билан белгиланади.

7. X тўплам ҳамма яқинлашувчи сонлар кетма-кетлигидан иборат, яъни:

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \ldots); \ \lim_n a_n = \alpha\}$$

Равшанки, $X \subset m$, яъни X нинг ҳар бир элементи m нинг ҳам элементидир. Демак, X да m даги масофа киритилса, у ҳам метрик фазони ташкил этади. Бу фазони c билан белгилайдилар.

8. X тўплам ҳамма ҳақиқий сонлар кетма-кетлигидан иборат, яъни:

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \ldots)\}.$$

Бу тўпламда икки $x = (a_1, a_2, \ldots)$ ва $y = (b_1, b_2, \ldots)$ нуқталар учун масофани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(x, y) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \tag{8}$$

Учбурчак аксиомаси ушбу

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \tag{9}$$

тенгсизликдан келиб чиққани учун дастлаб (9) ни исбот этамиз. a ва b ларнинг ишоралари бир хил, масалан, $a > 0$, $b > 0$ бўлсин; у ҳолда:

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} = \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} < \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}.$$

Энди a билан b нинг ишоралари турли бўлсин ва, масалан, $|a| \geqslant |b|$. У ҳолда:

$$|a + b| \leqslant |a|. \tag{10}$$

Иккинчи томондан, $f(x) = \frac{x}{1 + x}$ функция ўсувчи, чунки $f'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0$. Бундан ва (10) дан

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |a|}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, (9) тенгсизлик доим ўринли. Энди учбурчак тенгсизлигини исботлаймиз. (9) га мувофиқ:

$$\rho(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - c_k|}{1 + |a_k - c_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k + b_k - c_k|}{1 + |a_k - b_k + b_k - c_k|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|b_k - c_k|}{1 + |b_k - c_k|} = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

бу ерда $z = (c_1, c_2, \ldots)$, шу билан учбурчак аксиомаси исботланди. Бу метрик фазо s ҳарфи билан белгиланади.

9. X тўплам $[a, b]$ сегментда аниқланган ҳамма ўлчовли функциялардан иборат. Агар икки функция бир-биридан фарқ қиладиган нуқталардан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, уларни тўпламнинг битта элементи деб ҳисоблаймиз.

Икки $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар орасидаги масофани ушбу

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt \tag{11}$$

формула билан аниқлаймиз. 8- мисолдагидек бу ҳол учун ҳам учбурчак аксиомаси бажарилади; қолган икки аксиоманинг ўринлилиги равшан. Бу фазо $S[a, b]$ билан белгиланади.

47- §. Метрик фазода яқинлашиш тушунчаси

Таъриф. *Метрик X фазода бирон $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ бўлса, бу кетма-кетлик X фазонинг x элементига яқинлашади ($x_n \to x$ ёки $\lim\limits_n x_n = x$) дейилади; бу яқинлашишни (бошқа яқинлашишлар билан адаштирмаслик учун)* метрика маъносида яқинлашиш *ҳам дейилади.*

Бу x нуқтани $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

47. 1. Теорема. ***Ҳар бир яқинлашувчи кетма-кетлик биргина лимит нуқтага эга бўлиши мумкин.***

Исбот. Дарҳақиқат, $x_n \to x$ ва $x_n \to y$, яъни лимит нуқталар иккита бўлсин: x ва y. У ҳолда учбурчак аксиомасига мувофиқ:

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Аммо бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилади; демак, $\rho(x, y) = 0$, яъни $x = y$.

47. 2. Теорема. *$\rho(x, y)$ масофа x ва y элементларнинг узлуксиз функцияси, яъни агар $x_n \to x$ ва $y_n \to y$ бўлса, у ҳолда:*

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).$$

Исбот. Аввало ихтиёрий $x, y, z, u \in X$ тўрт нуқта учун

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \tag{1}$$

тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан ҳам, учбурчак аксиомасидан фойдаланиб

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \tag{2}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Бундан:

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u),$$

бу тенгсизликда x, y лар билан мос равишда z, u ларнинг ўринлари алмаштирилса:

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \tag{3}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (2) ва (3) лардан (1) келиб чиқади. (1) дан (z ва u мос равишда x_n ва y_n билан алмаштирилса) теореманинг шартига кўра:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Бундан:

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).*$$

Қуйидаги теореманинг тўғрилиги ўз-ўзидан кўриниб турибди.

47. 3. Теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашса, у ҳолда у кетма-кетликнинг ихтиёрий $\{x_{n_k}\}$ қисми ҳам шу нуқтага яқинлашади.*

47. 4. Теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашса, у ҳолда $\rho(x_n, x_0)$ сонлар тўплами чегараланган бўлади (бу ерда $x_0 (\in X)$ аниқ бир нуқта).*

Исбот. Дарҳақиқат, учбурчак аксиомасига кўра:

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) \leqslant M + \rho(x, x_0) = K,$$

чунки $\rho(x_n, x)$ яқинлашувчи сонлар кетма-кетлиги бўлганлиги учун чегараланган бўлади; M эса уларнинг юқори чегараси.

Энди метрик X фазода баъзи бир геометрик тушунчаларни киритамиз.

Ушбу

$$S(a, r) = \{x : \rho(x, a) < r\} \quad (\bar{S}(a, r) = \{x : \rho(x, a) \leqslant r\})$$

тўплам шар (ёпиқ шар), a нуқта шарнинг маркази, $r (> 0)$ сони унинг радиуси дейилади. Ушбу $\{x : \rho(x, a) = r\}$ тўплам маркази a нуқтада, радиуси r бўлган сфера дейилади. $a (\in X)$ нуқтанинг ε атрофи деб, шу нуқта маркази бўлган ва радиуси ε га тенг шарга айтилади; бу атрофни $S(a, \varepsilon)$ билан белгилаймиз. Равшанки, x_0 нуқта бирон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимит нуқтаси бўлиши учун x_0 нинг ихтиёрий атрофи бирон номердан бошлаб шу кетма-кетликнинг ҳамма элементларини ўз ичига олиши зарур ва кифоядир.

Агар $A(\subset X)$ тўпламнинг ҳамма элементлари бирон шарнинг ичида жойлашган бўлса, A тўплам метрик X фазода **чегараланган** дейилади.

Баъзан фазода элементлар кетма-кетлигининг лимити тушунчаси (метрика тушунчаси киритилмаган ҳолда) бевосита аниқланган бўлиши ҳам мумкин. Агар бу фазода метрика киритилиб, шу метрика маъносида аниқланган лимит нуқта тушунчаси, бевосита киритилган лимит нуқта тушунчаси билан бир хилда бўлса[1], у ҳолда бу фазо **метрикалаштирилган** фазо дейилади.

Энди 46- параграфда мисол сифатида келтирилган метрик фазоларда яқинлашишнинг конкрет маъносини аниқлаш билан шуғулланамиз.

1. 1- мисолдаги фазодан олинган бирон кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун бирон номердан бошлаб у кетма-кетликнинг ҳамма элементлари бир-бирига тенг бўлиши керак.

2—3. R^n ва l_2 фазолардан олинган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x элементга яқинлашиши учун x_n нуқта координаталарининг мос равишда x нинг координаталарига яқинлашиши зарур ва кифоя.

Дарҳақиқат, агар R^n да $\rho(x_n, x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_i^{(k)} - a_i)^2\right)^{1/2} \to 0$ $(k \to \infty)$, у ҳолда $a_i^{(k)} \to a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(k \to \infty)$ ва, аксинча, l_2 фазода ҳам худди шунга ўхшаш муносабатлар бажарилади.

4. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C[a, b]$ фазонинг элементларидан тузилган ва $x_n(t) \to x(t)$ бўлсин, яъни:

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Бундан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сон мавжудки, $n > n_0$ бўлганда:

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Демак, $t(\in [a, b])$ нинг ҳамма қийматлари учун $n > n_0$ бўлганда:

$$|x_n(t) - x(t)|| < \varepsilon.$$

Бу эса $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $x(t)$ га текис яқинлашишининг худди ўзидир. Равшанки, аксинча, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $[a, b]$ сегментда $x(t)$ га текис яқинлашса, у ҳолда $\rho(x_n, x) \to 0$. Демак,

---

[1] Бошқача айтганда, бирон кетма-кетлик учун бевосита аниқланган лимит нуқта билан метрика ёрдами билан киритилган лимит нуқта бир-бирига тенг бўлса.

$C[a, b]$ фазода метрика маъносида яқинлашиш маълум текис яқинлашиш тушунчасига эквивалент экан.

5. $L_p[a, b]$ фазода метрика маъносида $\rho(x_n, x) = \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \to 0 \quad (n \to \infty)$ яқинлашишни *p*-даражали ўрта маънода яқинлашиш дейилади. $p = 2$ бўлганда ў та маънода яқинлашади дейилади (2- даражали сўзлари қўшилмайди).

6. $\{x_k\}$ кетма-кетлик m фазонинг элементларидан тузилган ва $x_k \to x \ (k \to \infty)$ бўлсин; бу ерда

$$x_k = (a_1^{(k)}, \ a_2^{(k)}, \ \ldots), \ x = (a_1, \ a_2, \ \ldots)$$

ва

$$\rho(x_k, \ x) = \sup_i |a_i^{(k)} - a_i| \to 0 \ (k \to \infty).$$

Сўнгги муносабатдан кўринадики, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ сони мавжудки, унинг учун $k > n_0$ бўлганда

$$\rho(x_k, \ x) = \sup_i |a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon.$$

Бундан, i нинг ҳамма қийматлари учун $k > n_0$ бўлганда:

$$|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon.$$

Аксинча $k > n_0$ бўлганда i нинг ҳамма қийматлари учун

$$|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $\rho(x_k, \ x) \to 0$ бўлиши равшан. Демак, m фазода метрика маъносида яқинлашиш координаталар бўйича текис яқинлашиш билан эквивалент экан.

7. c фазо m нинг қисм-фазоси бўлганлиги учун бу фазода ҳам яқинлашиш маъноси худди m фазодагидекдир.

8. s фазода метрика маъносида яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишга (умуман айтганда текис эмас!) эквивалент. Дарҳақиқат,

$$x_k = (a_1^{(k)}, \ a_2^{(k)}, \ \ldots), \ x = (a_1, \ a_2, \ \ldots) \text{ ва } x_k \to x \ (k \to \infty)$$

бўлсин. У ҳолда $k > n_0(\varepsilon)$ бўлганда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon.$$

Бундан ҳар қандай i учун ҳам $k > n_0(\varepsilon)$ бўлганда:

$$\frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon.$$

Лекин бу тенгсизликнинг чап томонида i ни тайинлаб қўйиб, k бўйича лимитга ўтилса, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$|a_i^{(k)} - a_i| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Аксинча, i нинг ҳар бир қиймати учун $k \to \infty$ да $|a_i^{(k)} - a_i| \to 0$ бўлсин. $\varepsilon (> 0)$ ни ихтиёрий қилиб олиб, натурал k сонни

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлаб оламиз. У ҳолда:

$$\rho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ўнг томондаги йиғиндида ҳадларнинг сони чекли бўлганлиги учун, k ни аниқлаб қўйиб, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ни шу қадар катта қилиб оламизки, $n > n_0$ бўлганда

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. Натижада $n > n_0$ бўлганда $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

48-§. Ёпиқ ва очиқ тўпламлар

1-таъриф. *Метрик X фазода бирон M тўплам берилган бўлсин. Агар x_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг камида битта, x_0 дан фарқли, элементи мавжуд бўлса, яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун*

$$S(x_0, \varepsilon) \cap (M \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$$

ўринли бўлса, x_0 нуқта M нинг лимит нуқтаси дейилади. Агар $M = \overline{M} = M \cup M'$ тенглик бажарилса, M тўплам ёпиқ тўплам дейилади; бу ерда M' билан M нинг ҳамма лимит нуқталаридан иборат тўплам белгиланган. $\overline{M}$ тўплам M нинг ёпиғи дейилади. $\overline{M}$ тўплам аниқланишига кўра ёпиқ тўплам бўлади.

Турли метрик фазоларда ёпиқ тўпламларга мисоллар келтирамиз.

1. Бизга маълумки, тўғри чизиқдаги ҳар қандай $[a, b]$ сегмент ёпиқ тўплам бўлади.

2. Ҳар қандай метрик фазода ёпиқ $\overline{S}(a, r)$ шар ёпиқ тўпламдир; хусусан, $C[a, b]$ фазода қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган функциялардан иборат тўплам ёпиқ тўпламдир:

$$|f| \leq K.$$

3. Ҳар қандай метрик фазода чекли тўплам ёпиқ; шу жумладан бўш тўплам ҳам ёпиқ ҳисобланади.

2-таъриф. *Агар x нуқтанинг M тўпламда бутунлай жойлашган атрофи мавжуд бўлса, x нуқта M тўпламнинг* ички нуқтаси *дейилади. Агар M тўпламнинг ҳамма нуқталари ички бўлса, у очиқ тўплам дейилади.*

Масалан, тўғри чизиқда ҳар қандай (a, b) оралиқ очиқ тўплам бўлади. Ҳар қандай метрик X фазода $S(a, r) = \{x : \rho(a, x) < r\}$ шар очиқ тўплам бўлади; хусусан, $|f| < K$ тенгсизликни қаноатлантирадиган, $C[a, b]$ фазодан олинган функциялардан иборат тўплам очиқ тўплам бўлади.

Метрик фазода ёпиқ ва очиқ тўпламлар учун, худди иккинчи бобдагидек, қуйидаги хоссалар ўринли.

48. 1. Хосса. ***x_0 нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, унинг ихтиёрий атрофида M нинг чексиз кўп элементлари мавжуд.***

Буни исбот этишни ўқувчига тавсия қиламиз. Бу ерда ва кейинги ибораларда киритилаётган тўпламларни метрик X фазодан олинган, деб фараз қиламиз.

48. 2. Хосса. ***Ҳар қандай $M (\subset X)$ тўпламнинг ёпиғининг ёпиғи M нинг ёпиғига тенг: $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.***

Исбот. $x \in \overline{\overline{M}}$ бўлсин. У ҳолда бу нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $\overline{M}$ га тегишли x_1 нуқта топилади; сўнг x_1 нуқтанинг ε_1 атрофини оламиз, бу ерда $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1)$. $S(x_1, \varepsilon_1)$ нинг тузилишига кўра $S(x_1, \varepsilon_1) \subset S(x, \varepsilon)$ экани равшан. Аммо $x_1 \in \overline{M}$ демак, x нинг ε_1 атрофида M га тегишли x_2 нуқта мавжуд; $\varepsilon_1 < \varepsilon$ бўлганлиги учун $x_2 \in S(x, \varepsilon)$. Лекин $S(x, \varepsilon)$ шар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи бўлганлиги учун $x \in \overline{M}_*$.

48. 3. Хосса. ***Агар $M_1 \subset M_2$ бўлса, у ҳолда $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$. Бўш тўпламнинг ёпиғи ҳам бўш тўплам.*** Бу хосса ўз-ўзидан равшан.

48. 4. Хосса. ***Йиғиндининг ёпиғи ҳадлари ёпиқларининг йиғиндисига тенг, яъни:***

$$\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2.$$

Исбот. $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ бўлсин; у ҳолда x нуқтанинг ихтиёрий $S(x, \varepsilon)$ атрофида $M_1 \cup M_2$ га тегишли x_1 элемент мавжуд. Агар $x \overline{\in} M_1$ ва $x \overline{\in} M_2$ бўлса, у ҳолда x нинг шундай $S(x, \varepsilon_1)$ ва $S(x, \varepsilon_2)$

атрофлари мавжудки, бу атрофлар мос равишда M_1 ва M_2 тўпламлар билан кесишмайди, яъни: $S(x, \varepsilon_1) \cap M_1 = \varnothing$ ва

$$S(x, \varepsilon_2) \cap M_2 = \varnothing.$$

У ҳолда x нуқтанинг $S(x, \varepsilon)$ атрофи ($\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$) $M_1 \cup M_2$ тўплам билан кесишмаган бўлиб, зиддият ҳосил бўлар эди. Демак, бундан келиб чиқадики, x нуқта $\overline{M_1}$ ёки $\overline{M_2}$ тўпламлардан камида биттасига тегишли, яъни:

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Тескари муносабатнинг ўринлилиги $\overline{M_1} \subset \overline{M_1 \cup M_2}$ ва $\overline{M_2} \subset \overline{M_1 \cup M_2}$ муносабатлардан ва 48. 3- хоссалардан келиб чиқади.*

48. 5. Теорема. ***Сони чекли ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси яна ёпиқдир.***

Исбот. Бу теоремани икки ёпиқ тўплам учун исбот қилинса кифоя: F_1 ва F_2 ёпиқ тўпламлар ва x улар йиғиндисининг, яъни $F_1 \cup F_2 = F$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Модомики, F учун x лимит нуқтадир, демак унинг ихтиёрий ε атрофида F нинг чексиз кўп элементлари мавжуд. У ҳолда $S(x, \varepsilon)$ да ёки F_1 нинг, ёки F_2 нинг чексиз кўп элементлари мавжуд бўлади; яъни x нуқта ёки F_1 учун, ёки F_2 учун лимит нуқта бўлади. Аммо уларнинг ҳар бири ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x \in F_1$ ёки $x \in F_2$ муносабатлардан бири, албатта, ўринли. Бундан эса $x \in F$ муносабат келиб чиқади, бу эса F нинг ёпиқлигини кўрсатади.*

48. 6. Теорема. ***Сони ихтиёрий бўлган ёпиқ тўпламларнинг кўпайтмаси ёпиқ тўплам бўлади.***

Исботи. $\{F_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ёпиқ тўпламлар системаси ва x улар кўпайтмасининг, яъни $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = F$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда x нинг ихтиёрий ε атрофида F нинг камида битта x дан фарқли x_1 элементи мавжуд ва, демак, α нинг ҳамма қийматлари учун $x_1 \in F_\alpha$, чунки F_α лар ёпиқ. Демак, бундан: $x_1 \in \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = F$, яъни F ёпиқ тўплам.*

48. 7. Теорема. ***M тўпламнинг $\overline{M}$ ёпиғи M ни ўз ичига олган энг кичик ёпиқ тўпламдир.***

Исбот. F ихтиёрий ёпиқ тўплам бўлиб, M ни ўз ичига олсин, яъни $M \subset F$, у ҳолда M нинг ҳамма лимит нуқталаридан иборат M' тўплам F га киради, чунки F ёпиқ, яъни: $M' \subset F$. Демак, $\overline{M} = M \cup M' \subset F$. Шундай қилиб, $\overline{M}$ тўплам M ни ўз ичига олган ихтиёрий ёпиқ F тўпламнинг қисми экан.*

48. 8. Теорема. ***$G (\subset X)$ тўпламнинг очиқ бўлиши учун, унинг тўлдирувчиси $F = X \setminus G$ тўпламнинг ёпиқ бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. а) Зарурлиги. G очиқ бўлсин; у ҳолда ҳар бир $x (\in G)$ нуқта бутунлай G га кирадиган атрофга эга. Демак, бу атроф F билан кесишмайди. Бундан равшанки, F тўпламнинг бирорта ҳам лимит нуқтаси G га кирмайди, яъни F ёпиқ тўплам.

б) Кифоялик. $F = X \setminus G$ ёпиқ бўлсин; у ҳолда G дан олинган ихтиёрий нуқта G да бутунлай жойлашган атрофга эга, яъни G очиқ тўплам бўлади.

48. 9. Натижа. ***Бўш $\varnothing$ тўплам ва X фазо ҳам очиқ, ҳам ёпиқ тўпламлардир.***

48. 10. **Теорема.** ***Сони ихтиёрий бўлган очиқ тўпламларнинг йиғиндиси ва сони чекли бўлган очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси очиқ тўпламлар бўлади.***

Исбот. $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ очиқ тўпламлар системаси бўлсин. У ҳолда уларнинг тўлдирувчилари $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$ 48. 8-теоремага асосан, ёпиқ тўпламлар бўлади ва $X \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ тенгликка ва 48. 6-теоремага биноан $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ йиғинди очиқ тўпламдир.

Шунга ўхшаш, агар G_i тўпламларнинг ҳар бири очиқ бўлса $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ тўплам очиқ бўлади, дарҳақиқат, $F_i = X \setminus G_i$ ва $\bigcup\limits_i F_i = F$ тўпламлар ёпиқ бўлади (48. 5-теоремага биноан). Демак, $G = X \setminus F = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ очиқ тўплам бўлади. Ўқувчиларга бу теоремани 48. 5 ва 48. 6- теоремаларга бадиққат солиштиришларини тавсия қиламиз.

49-§. Тўла метрик фазолар

Ҳақиқий сонлар тўплами тўла экани, бошқача айтганда ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги учун Коши белгиси бажарилса, бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши математик анализнинг умумий курсидан маълум. Бу факт, яъни тўғри чизиқнинг тўлалиги унинг муҳим хоссаларидан бири бўлиб, математик анализда катта аҳамиятга эга.

Энди тўғри чизиқнинг бу хоссаси ҳар қандай метрик фазо учун ҳам ўринлими, деган саволни қўйиш мумкин. Масалани аниқроқ ифода қилиш учун қуйидаги таърифни киритамиз.

1-таъриф. *Агар метрик X фазодан олинган $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши белгисини қаноатлантирса, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай натурал n_ε сон мавжуд бўлсаки, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ тенгсизлик n ва m сонларнинг n_ε дан катта бўлган ҳамма қийматлари учун бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик* фундаментал кетма-кетлик *дейилади.*

Агар X фазода ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у тўла фазо дейилади. Равшанки, ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал бўлади. Юқоридаги саволни энди қуйидагича ифода қилиш мумкин: ҳар қандай метрик фазо тўла бўладими? Бу саволга бериладиган жавоб ҳар доим ижобий бўлавермайди.

Мисоллар: 1. X тўплам ҳамма рационал сонлардан иборат; бу тўпламда масофа $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ формула билан аниқланади. Равшанки, X метрик фазо; аммо бу фазо тўла эмас, чунки $\left\{r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ тўплам рационал сонлар кетма-кетлигидан иборат бўлиб, рационал сонга яқинлашмайди.

2. $[a, b]$ сегментда аниқланган ҳамма ҳақиқий функциялардан иборат тўпламни олиб, унда масофани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Коши — Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, бу масофа учун учбурчак аксиомасининг ўринлилигини кўрсатиш қийин эмас. Метриканинг қолган икки аксиомаси ўз-ўзидан равшан. Демак, бу метрик фазо ва у $C^2[a, b]$ кўринишда ифодаланади; аммо бу фазо ҳам тўла эмас, чунки бу метрикада узлуксиз функциялар кетма-кетлиги яна узлуксиз функцияга яқинлашиши шарт эмас. Конкрет мисол келтирамиз. Масалан, $\{\varphi_n(t) = \operatorname{arctg} nt,\ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ узлуксиз функциялар кетма-кетлиги фундаментал, лекин бирорта ҳам узлуксиз функцияга яқинлашмайди. Бу кетма-кетлик метрика маъносида узлукли

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

функцияга яқинлашади.

46- параграфда мисол сифатида келтирилган ҳамма метрик фазолар тўла.

Бу хоссани уларнинг баъзилари учунгина исботлаймиз.

3. $C[a, b]$ фазонинг тўлалиги. Бу фазодан $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма-кетликни олиб, унинг яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. $n, m \to \infty$ да

$$\rho(x_n, x_m) \to 0 \tag{1}$$

экани берилган. $C[a, b]$ фазода яқинлашиш текис яқинлашиш тушунчаси билан эквивалент эканлигини 47- параграфда кўрсатган эдик. Шунинг учун (1) дан $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик учун Кошининг текис яқинлашиш шартининг бажарилиши келиб чиқади. $x_0(t)$ функция, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлиб, узлуксиз функция бўлади, чунки яқинлашиш текис яқинлашишдир. Натижада $\rho(x_n, x_0) \to 0$, $x_0(t) \in C[a, b]$ ва, демак, $C[a, b]$ фазо тўла фазодир.

4. l_2 фазонинг тўлалиги. Бу фазодан олинган $\{x_n\}$ ($x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} < +\infty$) кетма-кетлик фундаментал бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун, шундай натурал n_0 сон мавжудки, улар учун:

$$\rho^2(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon, \ m, \ n > n_0. \tag{2}$$

Бундан, ҳар қандай k учун:

$$(a_k^{(n)} - a_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \ m, \ n > n_0;$$

яъни ҳар бир k учун $\{a_k^{(n)}\}$ ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи. Бу кетма-кетликнинг лимитини a_k билан белгилаб, $x = (a_1, a_2, \ldots)$ элементни ҳосил қиламиз. Агар $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$ ва, 47-параграфдаги мисолларда юритилган мулоҳазаларга мувофиқ, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ муносабатларнинг ўринлилиги кўрсатилса, l_2 фазонинг тўлалиги исбот этилган бўлади.

(2) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 = \sum_{i=1}^{p} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon,$$

бу ерда p ихтиёрий натурал сон. Бундан ихтиёрий p учун:

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon,$$

ёки p билан m ни аниқлаб қўйиб, n бўйича лимитга ўтилса, ушбу

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик ихтиёрий p учун ўринли; шунинг учун бунда p бўйича лимитга ўтиш мумкин. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - a_i^{(m)})^2 \leqslant \varepsilon; \tag{3}$$

бундан ва $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)})^2 < +\infty$ муносабатдан қуйидаги тенгсизлик бевосита келиб чиқади:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty.$$

Демак, $x = (a_1, \ a_2, \ldots) \in l_2$. Сўнгра $\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлганлиги учун (3) дан

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x_m, \ x) = 0$$

тенглик келиб чиқади.

5. m фазонинг тўлалиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлсин. $x_n = (a_1^{(n)}, \ a_2^{(n)}, \ldots) \in m$ бўлганлиги учун $|a_i^{(n)}| < M_n$ $(i = 1, 2, \ldots)$ тенгсизлик ўринли ва ихтиёрий ε учун шундай натурал n_0 сон мавжудки, улар учун:

$$\rho(x_n, \ x_m) < \varepsilon, \ n, \ \ m > n_0$$

ёки

$$\sup_i |a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| < \varepsilon, \ n, \ \ m > n_0.$$

Бундан:

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| < \varepsilon, \cdot n, \ \ m > n_0 \qquad (4)$$

муносабатнинг i га нисбатан текис бажарилиши келиб чиқади. Демак, ихтиёрий i учун $\{a_i^{(n)}\}$ кетма-кетлик n бўйича яқинлашувчи бўлади; унинг лимитини a_i билан белгилаб,

$$x = (a_1, \ a_2, \ \ldots)$$

элементни ҳосил қиламиз ва $x \in m$, $\rho(x_n, \ x) \to 0$ муносабатларнинг ўринлилигини исбот қиламиз.

(4) да m га нисбатан лимитга ўтилса:

$$|a_i^{(n)} - a_i| \leqslant \varepsilon \ \ n > n_0 \qquad (5)$$

тенгсизлик келиб чиқади ва бу ҳамма i лар учун ўринли. Бундан:

$$|a_i| \leqslant |a_i^{(n_0+1)} - a_i| + |a_i^{(n_0+1)}| < \varepsilon + M_{n_0+1}$$

тенгсизликни ҳамма i лар учун ҳосил қилиш мумкин, яъни $x = (a_1, \ a_2, \ \ldots) \in m$ муносабат келиб чиқади. (5) дан равшанки: $\sup_i |a_i^{(n)} - a_i| \leqslant \varepsilon$, $n > n_0$ ёки $\rho(x_n, \ x) \leqslant \varepsilon$, $n \geqslant n_0$. $\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлганлиги учун бундан

$$\rho(x_n, \ x) \to 0 \text{ ёки } x_n \to x \ \ (n \to \infty)$$

муносабат келиб чиқади. Демак, m фазо тўла фазодир.

6. S фазонинг тўлалиги, 47- §, 8- пунктда келтирилган яқинлашиш маъносидан осонгина келтириб чиқарилиши мумкин.

Энди метрик фазоларни тўлалигига оид баъзи теоремаларни келтирамиз.

49. 1. **Теорема.** ***Тўла метрик X фазода $\bar{S}_n = \bar{S}_n(a_n, \varepsilon)$ ёпиқ шарлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, булар учун қуйидаги шартлар бажарилсин:***

$$\bar{S}_{n+1} \subset \bar{S}_n \ \ (n = 1, \ 2, \ \ldots) \text{ ва } \varepsilon_n \to 0, \ n \to \infty.$$

У ҳолда бу шарларнинг умумий қисми биргина нуқтадан иборат бўлади.

Исбот. Қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l,\ \ldots \tag{6}$$

бунда a_l нуқта $\overline{S}_l$ шарнинг маркази. Теореманинг шартига кўра $a_{n+p} \in \overline{S}_n$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$; шунинг учун

$$\rho(a_{n+p},\ a_n) \leqslant \varepsilon_n$$

ёки

$$\rho(a_{n+p},\ a_n) \to 0;\ n \to \infty.$$

Демак, (6) кетма-кетлик фундаментал кетма-кетликдир. X тўла фазо бўлганлиги учун бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади ва унинг лимити $a \in X$.

Энди ихтиёрий $\overline{S}_m$ ёпиқ шарни оламиз (m — аниқ, натурал сон); у ҳолда $a \in \overline{S}_m$, чунки $a_m,\ a_{m+1},\ \ldots$ нуқталар. $\overline{S}_m$ га киради ва $\overline{S}_m$ ёпиқ. m ихтиёрий бўлганлиги учун

$$a \in \overline{S}_m,\ m = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Демак,

$$a \in \bigcap_m \overline{S}_m.$$

Энди $\bigcap\limits_m \overline{S}_m$ га a нуқтадан бошқа яна бирор b элемент ҳам тегишли деб фараз қиламиз. У ҳолда, бир томондан, ҳар қандай n учун

$$0 < \rho(a,\ b) = \alpha \leqslant \rho(a,\ a_n) + \rho(a_n,\ b) \leqslant 2\varepsilon_n$$

муносабат ўринли; иккинчи томондан, $n \to \infty$ да $\varepsilon_n \to 0$. Ҳосил бўлган зиддиятдан $a = b$ тенглик келиб чиқади. *

49. 2. Теорема. ***Агар метрик X фазода, 49. 1-теореманинг шартларини қаноатлантирадиган ҳар қандай ёпиқ шарлар кетма-кетлиги бўш бўлмаган умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда X фазо тўла бўлади.***

Исбот. Фундаментал $\{x_n\}$ кетма-кетликни олиб, ҳар қандай натурал $p(>0)$ сон учун қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган натурал n_k сонни танлаб оламиз:

$$\rho(x_{n_k+p},\ x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Ушбу $\overline{S}_k = \overline{S}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$ ёпиқ шарларни қараб чиқамиз.

Равшанки, $\overline{S}_{k+1} \subset \overline{S}_k$, чунки $x \in \overline{S}_{k+1}$ бўлса, у ҳолда:

$$\rho(x,\ x_{n_k}) \leqslant \rho(x,\ x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}},\ x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

яъни $x \in \overline{S_k}$. Теореманинг шартига кўра бу ёпиқ шарларнинг ҳаммасига тегишли x_0 элемент мавжуд. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_0 га яқинлашиши кўрсатилса, теоремамиз исбот этилган бўлади. $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик қисми бўлиб x_0 га яқинлашади, чунки

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \to 0.$$

У ҳолда бутун $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам x_0 га яқинлашади, чунки ушбу

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

тенгсизликнинг ўнг томони n ва n_k етарли катта бўлганда истаганча кичик қилиниши мумкин.*

Бу параграфни қуйидаги муҳим таъриф ва исботсиз келтирилган теорема билан тугатамиз.

2-таъриф. *Агар X ихтиёрий метрик фазо бўлиб, шундай X^* фазо мавжуд бўлсаки,* а) *X фазо X^* нинг қисми ва* б) *X тўпламнинг ёпиғи X^* га тенг, яъни $\overline{X} = X^*$ бўлса, бу ҳолда X тўплам X^* нинг* ҳамма ерида зич *дейилади. Агар шу билан бирга X^* тўла бўлса, X^* метрик фазо X фазонинг тўлдирувчиси дейилади.*

Масалан, тўғри чизиқдаги ҳамма рационал сонлардан иборат бўлган тўплам метрик фазо бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўзи унга нисбатан тўлдирувчи фазо бўлади. Булардан биринчиси тўла фазо эмас, иккинчиси эса тўла фазо.

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

49. 3. **Теорема.** ***Ҳар қандай метрик фазо тўлдирувчи фазога эга.***

50-§. Сепарабел фазолар

Таъриф. *X метрик фазо бўлсин. Агар X нинг ҳамма ерида зич ва саноқли ёки чекли тўплам мавжуд бўлса, у ҳолда X сепарабел фазо дейилади.*

Равшанки, агар X да чекли A тўплам зич бўлса, у ҳолда $X = A$.

Мисоллар. 1. R^n сепарабел фазо.

Дарҳақиқат, R^n фазода координаталари рационал сонлардан иборат ҳамма нуқталар тўплами A саноқли бўлиб, R^n нинг ҳамма ерида зич бўлади.

2. $C[a, b]$ — сепарабел фазо. Коэффициентлари рационал сонлардан иборат ҳамма кўп ҳадлилар тўпламини P билан белгилаймиз. P саноқли ва $C[a, b]$ нинг ҳамма ерида зич бўлади. P нинг саноқлилиги равшан. Унинг $C[a, b]$ фазонинг ҳамма ерида зичлиги математик анализдаги маълум Вейерштрасс теоремасидан келиб чиқади.

3. l_p — сепарабел фазо. A тўплам қуйидаги кўринишда бўлган нуқталардан иборат тўплам бўлсин:

$$A = \{x : x = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0 \ldots)\};$$

бу ерда r_i лар ихтиёрий рационал ва n ихтиёрий натурал сон. A нинг l_p да зичлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, $x = (a_1, a_2, \ldots) \in l_p$ ихтиёрий элемент ва $\varepsilon > 0$ ихтиёрий сон бўлсин; n натурал сон бўлиб, унинг учун

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. A тўпламдан шундай $x_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, \ldots)$ элементни оламизки, бу нуқта учун

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда:

$$[\rho(x, x_0)]^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i - r_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

ёки

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳам бажарилади. Сўнгги тенгсизликдан ва x нинг l_p нинг ихтиёрий элементи эканлигидан A нинг l_p нинг ҳамма ерида зичлиги келиб чиқади.

4. s — сепарабел фазо. A тўплам 3- мисолдагидек бўлиб, $x = (a_1, a_2, \ldots) \in S$ ихтиёрий элемент бўлсин. Ҳар бир a_n учун, унга яқинлашувчи $\{r_n^{(k)}\}$ рационал сонлар кетма-кетлигини тузамиз, яъни $k \to \infty$ да $r_n^{(k)} \to a_n$.

Энди A дан ушбу

$$\{x^{(k)}\} \quad [x^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_n^{(k)}, 0, 0, \ldots)]$$

элементлар кетма-кетлиги олинса, у ҳолда ўз-ўзидан равшанки, $k \to \infty$ да

$$x^{(k)} \to x.$$

Демак, A тўплам саноқли бўлиб s нинг ҳамма ерида зич, чунки x ундан олинган ихтиёрий элемент эди.

5. m фазо сепарабел эмас. Бу фазодан қуйидаги тўпламни оламиз:

$$Q = \{x : x = (a_1, a_2, \ldots) \in m, \ a_i = 0 \text{ ёки } 1\}.$$

Равшанки, Q континуум қувватга эга. Агар Q дан икки турли x ва y элементлар олинса, улар орасидаги масофа $\rho(x, y) = \sup\limits_i |a_i -$

$- b_i| = 1$. Бундан фойдаланиб m сепарабел эмаслигини исбот этамиз. Бунинг учун m нинг ҳамма ерида зич ва саноқли A тўплам мавжуд деб фараз қиламиз. A нинг ҳар бир элементи атрофида радиуси $\varepsilon = \frac{1}{3}$ тенг шарни оламиз. У ҳолда бу шарларнинг йиғиндисида m фазонинг ҳамма элементлари жойлашган бўлади. Аммо элементлари юқоридаги шарлардан иборат тўплам саноқли бўлганлиги учун, уларнинг ҳеч бўлмаганда биттасининг ичида m нинг камида иккита турли x, y элементлари жойлашган бўлади. Шу икки x ва y элементлар кирган шарнинг маркази x_0 нуқтада бўлсин. У ҳолда ушбу

$$1 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

зиддият келиб чиқади. Бу зиддият эса қилган фаразимиз натижасида ҳосил бўлди. Демак, m фазо сепарабел эмас.

51-§. Метрик фазода компактли тўпламлар

Тўғри чизиқнинг ажойиб хоссаларидан бири шуки, унда жойлашган ва чегараланган ҳар қандай тўплам камида битта лимит нуқтага эга. Бу факт эса Больцано — Вейерштрасс теоремасидан келиб чиқади. Лекин ихтиёрий метрик фазода бундай содда натижа, умуман айтганда, ўринли бўлмайди. Шунинг учун қуйидаги саволнинг қўйилиши табиий. Метрик фазода қандай тўпламлар синфи учун Больцано — Вейерштрасс теоремасининг мазмуни сақланиб қолади? Мана шу саволнинг қўйилиши муносабати билан қуйидаги муҳим таърифни киритамиз.

1-таъриф. *Агар метрик X фазодан олинган M тўпламнинг элементларидан тузилган ихтиёрий кетма-кетликдан бирон $x(\in X)$ элементга яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин бўлса, бу тўплам* компактли тўплам *дейилади.*

Агар бу хосса X фазонинг ўзи учун ўринли бўлса, у ҳолда X компактли фазо дейилади. Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра тўғри чизиқда ҳар қандай чегараланган тўплам компактли тўплам бўлади.

Равшанки, компактли тўпламнинг ихтиёрий қисми яна компактли тўплам бўлади.

51. 1. Теорема. ***Компактли тўплам чегараланган бўлади.***

Исбот. $A(\subset X)$ компактли тўплам бўлиб, чегараланган бўлмасин, деб фараз қиламиз. A дан ихтиёрий x_1 нуқтани марказ қилиб олиб, радиуси $r_1 = 1$ га тенг бўлган $S(x_1, r_1)$ шарни қурамиз. A чегараланмаганлиги сабабли бу шарда бутунлай жойлашмайди.

$S(x_1, r_1)$ шарга кирмаган A тўпламнинг бирон x_2 элементини оламиз. У ҳолда: $\rho(x_1, x_2) > r_1$. Энди радиуси $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ га тенг $S(x_1, r_2)$ шарни қуриб, A тўпламнинг бу шарга кирмаган бирон x_3 элементини оламиз; бундай элемент мавжуд, чунки A чегараланмаган тўплам ва $r(x_1, x_3) \geqslant r_2$. Сўнгра радиуси $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ га тенг $S(x_1, r_3)$ шарни қурамиз ва бу процессни, A тўплам чегараланмаганлиги сабабли чексиз давом эттиришимиз мумкин. Натижада $\{x_n\}$ $(x_n \in A)$ кетма-кетлик ва ўсиб борувчи $\{r_n\}$ сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлиб, ушбу

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

тенгсизликлар бажарилади.

Энди ихтиёрий $n > m \geqslant 2$ натурал сонлар учун

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n \geqslant r_{n-1} \geqslant r_m; \quad \rho(x_1, x_m) + 1 = r_m$$

муносабатлар ўринли. Шунинг учун

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

тенгсизликдан:

$$r_m \leqslant (r_m - 1) + \rho(x_m, x_n)$$

ёки

$$\rho(x_m, x_n) \geqslant 1$$

муносабатлар келиб чиқади.

Сўнгги муносабат кўрсатадики, на $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўзи ва на унинг қисми фундаментал бўла олмайди, демак, яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин эмас. Бу эса зиддиятга олиб келади, чунки $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг элементлари компактли A тўпламдан олинган. *

Бу теореманинг тескариси, умуман айтганда, ўринли эмас, яъни тўплам чегараланган бўлса у компактли бўлиши шарт эмас. Бунга l_2 фазодан конкрет мисол келтирамиз. l_2 фазодан ушбу

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \; e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \; e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

элементлардан иборат чегараланган тўпламни тузамиз, бу элементларнинг ихтиёрий иккитаси орасидаги масофа $\rho(e_m, e_n) = \sqrt{2}$ $(m \neq n)$ га тенг, шунинг учун бу кетма-кетлик ва унинг ҳеч қандай қисми яқинлашувчи бўлмайди, демак, тузилган тўплам компактли тўплам эмас.

Метрик фазода компактлик тушунчаси билан яқиндан боғлиқ бўлган тушунчани киритамиз.

2- таъриф. *A метрик X фазодан олинган бирор тўплам ва $\varepsilon > 0$ бирор сон бўлсин. Агар A дан олинган ихтиёрий x элемент учун B да шундай y элемент мавжуд бўлсаки, булар учун $\rho(x, y) < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса $B (\subset X)$ тўплам A тўпламга нисбатан ε-тўрга эга дейилади. Агар B чекли тўплам бўлса, у ҳолда A* тўла чегараланган *дейилади.*

Мисоллар. 1) R^n фазода ҳар қандай чегараланган A тўплам чекли ε-тўрга эга, яъни A тўла чегараланган.

2) Текисликда координаталари бутун сонлардан иборат тўплам $\frac{\sqrt{2}}{2}$-тўрни ташкил этади.

3) l_2 фазода A тўпламни қуйидагича аниқлаймиз. Агар

$$|a_1| \leqslant 1, \ |a_2| \leqslant \frac{1}{2}, \ \ldots, \ |a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}, \ \ldots$$

тенгсизликлар бажарилса, $x = (a_1, a_2, \ldots) \in A$ бу тўплам ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун чекли ε-тўрга эга. Дарҳақиқат, берилган $\varepsilon > 0$ учун натурал n сонни $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ бўладиган қилиб танлаб оламиз. A дан олинган ҳар бир $x = (a_1, a_2, \ldots)$ нуқтага шу тўпламнинг ўзидан олинган

$$x^* = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \qquad (1)$$

нуқтани мос қўямиз. У ҳолда

$$\rho(x, x^*) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) кўринишдаги нуқталардан иборат B тўплам R^n фазода чегараланган; демак, B тўплам ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун чекли $\frac{\varepsilon}{2}$-тўрга эга, натижада A тўплам ε-тўрга эга бўлиб, тўла чегараланган бўлади.

4) Юқоридаги $\{e_n\}$ кетма-кетликдан иборат тўплам чегараланган бўлиб, тўла чегараланган эмас. Агар $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлса, унинг учун сони чекли ε-тўрни қуриб бўлмайди.

Компактлик, тўлалик ва тўла чегаралангалик тушунчалари орасида қандай боғланиш борлигини қуйидаги теоремадан кўриш мумкин.

51. 2. Теорема. ***Тўла метрик X фазода жойлашган A тўпламнинг компактли бўлиши учун, унинг тўла чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.***

Исбот. Зарурийлик. Компактли A тўпламни тўла чегараланмаган, яъни бирон $\varepsilon > 0$ учун A да чекли ε-тўр йўқ, деб фараз қилайлик. У ҳолда A дан олинган ихтиёрий x_1 нуқта учун, шундай x_2 нуқта мавжудки, $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Сўнгра шундай x_3 нуқта мавжудки, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$ бўлади ва ҳоказо. Бу процессни давом эттириб, қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирадиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни тузамиз:

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon, \ m \neq n.$$

Равшанки, бундай кетма-кетликдан ҳеч қандай яқинлашувчи кетма-кетлик қисмини ажратиб олиш мумкин эмас. Бу эса A нинг компактлилигига зид.

Кифоялик. Энди X тўла фазо бўлиб, $A(\subset X)$ тўла чегараланган тўплам бўлсин. A нинг компактлилигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик A нинг элементларидан тузилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon_k = \frac{1}{k} (k = 1, 2, \ldots)$ учун A да мос равишда чекли ε_k-тўрни қурамиз:

$$a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ \ldots,\ a_{p_k}^{(k)}.$$

Марказлари ε_1-тўрни ташкил этувчи нуқталарда жойлашган ва радиуслари 1 га тенг шарларни қурамиз. Бу сони чекли шарлар A тўпламни бутунлай қоплайди. Улардан камида биттаси, масалан, уни S_1 билан белгилайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз $\{x_n'\}$ кетма-кетлик қисмини ўз ичига олади. Сўнгра марказлари $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ — тўрни ташкил этувчи нуқталарда жойлашган ва радиуслари $\frac{1}{2}$ га тенг шарларни қурамиз. Бу шарларнинг сони ҳам чекли бўлганлиги учун, улардан камида биттаси, масалан, уни S_2 билан белгилайлик, $\{x_n'\}$ кетма-кетликнинг чексиз $\{x_n''\}$ кетма-кетлик қисмини ўз ичига олади ва ҳоказо. Бу процессни чексиз давом эттирамиз.

Энди қуйидаги кетма-кетликларнинг

$$\begin{array}{l} x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n',\ \ldots \\ x_1'',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n'',\ \ldots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

диагоналида жойлашган элементлардан кетма-кетлик тузамиз:

$$x_1',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n^{(n)},\ \ldots \qquad (2)$$

Бу кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади, чунки $x_n^{(n)}$ элементдан бошлаб (2) кетма-кетликнинг ҳамма элементлари S_n шарда (бу шарнинг радиуси $\frac{1}{n}$ га тенг) жойлашган бўлади. Аммо метрик X фазо тўла бўлганлиги учун (2) кетма-кетлик лимитга эга, яъни A тўпламдан олинган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_n^{(n)}\}$ кетма-кетликни ҳосил қилдик, демак, A компактли тўплам.*

51. 2-теоремада зарурий ва кифоявий шартлар берилган бўлсада, бу теоремадан конкрет метрик фазоларда фойдаланиш осон эмас. Махсус метрик фазоларда жойлашган тўпламларнинг компактлилигини аниқлаш учун одатда махсус компактлилик белгилари ахтарилади. Биз бу масала билан икки s ва $C[a, b]$ фазоларда иш кўрамиз.

51. 3. Теорема (s фазода компактлилик белгиси ҳақидаги теорема). ***A тўплам s фазодан олинган бўлиб, A_i унинг i-номерли ($i = 1, 2, \ldots$) координаталаридан тузилган тўплам бўлсин. A нинг компактли бў-***

лиши учун A_i тўпламларнинг чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.

Сонлардан иборат A_i тўпламнинг юқори чегараси i га боғлиқ бўлиши ҳам мумкин.

Исбот. Зарурлиги. Бизга маълумки, s фазода яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишдир (2- §, 8- мисол). A тўплам компактли (47- §, 8- мисол) бўлганлиги учун A_i лар ҳам компактли ва, демак, чегараланган бўлади, чунки A_i тўғри чизиқда жойлашган тўплам.

Кифоялиги. $A(\subset S)$ шундай тўплам бўлсинки, унинг учун юқорида тузилган A_i тўпламларнинг ҳар бири чегараланган бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon(>0)$ ни олиб, натурал p сонни $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^p}<\varepsilon$ муносабат ўринли бўладиган қилиб танлаб оламиз. Сўнгра ҳар бир $x=(a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots)$ $(\in S)$ элементга $y=(a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, \ldots)$ $(\in S$ элементни мос қўямиз. Бу кўринишда тузилган y элементлардан иборат тўпламни B билан белгилаймиз. Равшанки,

$$\rho(x, y)=\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|a_k|}{1+|a_k|}<\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\varepsilon;$$

яъни B тўплам A га нисбатан ε-тўрни ташкил этар экан. Аммо B эса, тузилишига кўра, R^n фазода бутунлай жойлашган ва чегараланган тўплам. Демак, B чекли ε-тўрга эга, натижада A тўплам ҳам чекли ε-тўрга эга, яъни A тўла чегараланган ва 51. 2- теореманинг кифоялик шартига ва s нинг тўлалигига мувофиқ A компактли тўплам бўлади. *

Энди $C[a, b]$ фазода компактлик белгисини берамиз. Бу белгини ифода қилиш учун қуйидаги икки тушунчани келтирамиз. $[a,b]$ сегментда аниқланган бирор $\Phi=\{\varphi(t)\}$ функциялар системаси берилган бўлсин. Агар t нинг ҳамма қийматлари ва Φ системанинг ҳамма элементлари учун

$$|\varphi(t)|\leqslant K \quad (t\in[a, b],\ \varphi\in\Phi)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган K сони мавжуд бўлса, Φ функциялар системаси текис чегараланган дейилади. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ сони мавжуд бўлсаки,

$$|t_1-t_2|<\delta$$

тенгсизлик бажарилганда Φ системага тегишли ихтиёрий $\varphi(t)$ функция учун

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<\varepsilon$$

бўлса, Φ система *текис даражада узлуксиз* дейилади.

51. 4. Теорема (Арцела теоремаси). ***[a, b] сегментда аниқланган узлуксиз функциялар системаси C [a, b]***

фазода компактли бўлиши учун, бу функциялар системасининг текис чегараланган ва текис даражада узлуксиз бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Зарурлиги. Φ тўплам $C[a, b]$ фазода компактли бўлсин. У ҳолда 51. 2- теоремага мувофиқ, ихтиёрий $\varepsilon (> 0)$ учун Φ да чекли $\frac{\varepsilon}{3}$-тўрни ташкил этувчи

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \tag{3}$$

функциялар мавжуд бўлади. Бу функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли чегаралангандир, яъни:

$$|\varphi_i| \leqslant K_i, \ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Чекли $\frac{\varepsilon}{3}$-тўрнинг таърифига кўра, Φ дан олинган ҳар қандай φ элемент учун (3) даги сони чекли функциялар орасида шундай φ_i функция топиладики, унинг учун

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t) - \varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли. Натижада:

$$|\varphi| \leqslant |\varphi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K, \ K = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} K_i + \frac{\varepsilon}{3},$$

яъни Φ система текис чегараланган. Сўнгра (3) кетма-кетликдаги чекли $\frac{\varepsilon}{3}$ - тўрни ташкил этувчи, функцияларнинг ҳар бири узлуксиз ва уларнинг сони чекли, демак, улар $[a, b]$ да текис узлуксиз; демак, берилган $\frac{\varepsilon}{3}$ учун, шундай δ_i сони мавжудки, бунинг учун қуйидагиларни ёзишимиз мумкин: агар $|t_1 - t_2| < \delta_i$ бўлса, $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Агар $|t_1 - t_2| < \delta$ бўлса ($\delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta_i$), у ҳолда ихтиёрий $\varphi \in \Phi$ учун φ_i нинг (3) функциялар орасида $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизликни қаноатлантирадиганини олиб, ушбу

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2) + \varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1)| + |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| + |\varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

муносабатларни ёза оламиз. Шунинг билан Φ системанинг текис даражада узлуксизлиги ҳам кўрсатилди, яъни теореманинг зарурлик қисми исбот этилди.

Кифоялиги. Φ система текис чегараланган ва текис даражада узлуксиз бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун унга нисбатан $C[a, b]$ да чекли ε - тўр мавжуд бўлса, бу системанинг $C[a, b]$ фазода компактлилиги кўрсатилган бўлади.

K ва δ қуйидаги муносабатларни қаноатлантирадиган сонлар бўлсин: $|\varphi| \leqslant K$ (ҳамма $\varphi(\in \Phi)$ учун); агар $|t_1 - t_2| < \delta$ бўлса, $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ (ҳамма $\varphi(\in \Phi)$ учун).

Энди $[a, b]$ сегментни

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

нуқталар билан ҳар бирининг узунлиги δ дан кичик n та қисмларга бўлиб, бу нуқталарнинг ҳар биридан вертикал тўғри чизиқ ўтказамиз. Ординаталар ўқида $[-K, K]$ сегментни

$$y_0 = -K < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$$

нуқталар билан ҳар бирининг узунлиги $\frac{\varepsilon}{5}$ га тенг m та қисмга бўлиб, бу нуқталарнинг ҳар бирида горизонтал тўғри чизиқларни ўтказамиз. Натижада ушбу $[a \leqslant t \leqslant b, -K \leqslant y \leqslant K]$ тўғри тўртбурчак қисмларга бўлиниб, бу қисмларининг горизонтал томонлари $\frac{\varepsilon}{5}$ ва вертикал томонлари δ дан кичик бўлади, яъни тўғри тўртбурчакда тўр тузилди. Энди ҳар бир $\varphi(\in \Phi)$ функцияга учлари (t_k, y_l) нуқтада жойлашган синиқ $\psi(t)$ функцияни мос қўямиз (агар функциянинг графиги туташган кесмалардан иборат бўлса, бу функцияни синиқ деймиз). Тузилган тўрнинг учларида, тузилишига кўра $\psi(t_k) - \varphi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5} (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ тенгсизлик бажарилади. Сўнгги ва

$$|\varphi(t_{k+1}) - \psi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

тенгсизликлардан:

$$|\psi(t_k) - \psi(t_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$[t_k, t_{k+1}]$ сегментда $\psi(t)$ чизиқли функция бўлганлиги учун

$$|\psi(t_k) - \psi(t)| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

тенгсизлик t нинг $[t_k, t_{k+1}]$ сегментдаги ҳамма қийматлари учун бажарилади.

Энди $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий t нуқтасини олиб, чапдан унга энг яқин турган t_k нуқтани оламиз (бу бўлиш нуқтаси). У ҳолда:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant |\varphi(t) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - \psi)t_k)| +$$
$$+ |\psi(t_k) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$$

тенгсизлик ўринлидир. Демак, сони чекли синиқ $\psi(t)$ функциялар Φ системага нисбатан чекли ε-тўрни ташкил этади, яъни Φ система тўла чегараланган системадир.

52-§. Қисқартириб акс эттириш принципи ва унинг татбиқлари

Тўла метрик фазоларда берилган турли тенгламаларнинг ечимларининг мавжудлиги ва ягоналигини исбот этишда қисқартириб акс эттириш принципи муҳим ва фойдали метод сифатида ишлатилиши мумкин. Ҳозир мана шу принцип билан ўқувчини қисқача таништирамиз. T метрик X фазонинг ўзини-ўзига акс эттириши бўлсин. Агар X фазодан олинган ихтиёрий x ва y элементлар учун

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, y). \tag{1}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган $\alpha (0 < \alpha < 1)$ сони мавжуд бўлса у ҳолда T ни **қисқартириб акс эттириш** дейилади. (1) га мувофиқ, агар $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ бўлса, у ҳолда $Tx_n \to Tx_0$, яъни T акс эттириш узлуксиз бўлади.

Теорема (қисқартириб акс эттириш принципи). ***Тўла метрик X фазода аниқланган ҳар қандай қисқартириб акс эттириш биргина қўзғалмас нуқтага эга, яъни $Tx = x$ тенгламанинг биргина ечими мавжуддир.***

Исбот. Метрик X фазодан ихтиёрий x_0 нуқтани олиб, ушбу

$$x_1 = Tx_0, \ x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ x_3 = Tx_2 = T^3x_0, \ \ldots, \ x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0, \ \ldots$$

кетма-кетликни тузамиз ва бу кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, (1) ва учбурчак аксиомасига мувофиқ:

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(T^nx_0, T^mx_0) = \rho(T^nx_0, T^n_{x_{m-n}}) \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \rho(x_0, x_1).$$

n деярли катта бўлганда бу тенгсизликнинг ўнг томони истаганча кичик қилиниши мумкин, чунки $\alpha < 1$. Демак, $\{x_n\}$ кетмакетлик фундаменталдир. X фазо тўла бўлганлиги учун $\{x_n\}$ кетмакетликнинг фундаменталлигидан унинг яқинлашувчилиги келиб чиқади, яъни:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

T узлуксиз акс эттириш бўлганлиги учун:

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Демак, x қўзғалмас нуқта.

Энди қўзғалмас нуқтанинг ягоналигини исбот қиламиз. Дарҳақиқат, $Tx = x$ ва $Ty = y$, яъни қўзғалмас нуқта иккита бўлсин.

У ҳолда $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, y)$ $(\alpha < 1)$; бундан

$$\rho(x, y) = 0 \text{ ёки } x = y. *$$

Бир неча мисол келтирамиз.

1. $y = \varphi(x)$ тенгламада φ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган бўлиб, Липшиц шартини қаноатлантирсин ва $[a, b]$ сегментни ўзини ўзига акс эттирсин, яъни:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \alpha |x_2 - x_1| \quad (0 < \alpha < 1),$$

у ҳолда

$$x_0, \ x_1 = \varphi(x_0), \ x_2 = \varphi(x_1), \ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити φ акс эттиришнинг ягона қўзғалмас нуқтаси бўлади.

2. Қуйидаги тенгламани текширамиз:

$$y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Бу тенглама n ўлчовли векториал фазони ўзининг ўзига акс эттиришини ифода қилади ва буни $y = Tx$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Қисқартириб акс эттириш принципини бу тенгламага татбиқ қилиш учун тегишли шартларни аниқлашимиз керак, яъни қандай шартлар бажарилганда бу акс эттириш (1) тенгсизликни қаноатлантиради. Бу шартларни аниқлаш эса берилган фазода метриканинг киритилишига боғлиқдир. Масалан:

$$\text{а) } \rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i - \beta_i|; \ x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$$y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n);$$

Бу ҳолда ихтиёрий иккита

$$x' = (\alpha_1'; \alpha_2', \ldots, \alpha_n'), \ x'' = (\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n'')$$

нуқталар учун:

$$\rho(Tx', Tx'') = \rho(y', y'') = \max_i |\beta_i' - \beta_i''| = \max \left| \sum a_{ik} (\alpha_k' - \alpha_k'') \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_k |a_{ik}| \cdot |\alpha_k' - \alpha_k''| \leqslant \max_i \sum_k |a_{ik}| \max_k |\alpha_k' - \alpha_k''| =$$

$$= \rho(x', x'') \max_i \sum_k |a_{ik}|.$$

Бундан (1) шарт бажарилиши учун

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \leqslant \alpha < 1 \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлиши керак. Демак, (3) муносабат бу хусусий ҳол учун қисқартириб акс эттириш шартини беради.

б)

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Бу ҳолда:

$$\rho(Tx', Tx'') = \rho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i' - \beta_i''| =$$

$$= \sum_i \left| \sum_k a_{ik} (\alpha_k' - \alpha_k'') \right| \leqslant \sum_i \sum_k |a_{ik}| \cdot |\alpha_k' - \alpha_k''| \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x', x'') \max_k \sum_i |a_{ik}|.$$

Бундан қисқартириб акс эттириш шарти қуйидагидан иборат бўлади:

$$\sum_i |a_{ik}| \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

в)

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Бу ҳолда Коши — Буняковский тенгсизлигига биноан:

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} (\alpha_k' - \alpha_k'') \right)^2 \leqslant \sum_i \sum_k a_{ik}^2 \rho^2(x', x'').$$

Бу ҳолда қисқартириб акс эттириш шарти қуйидагича бўлади:

$$\sum_{i,k} a_{ik}^2 \leqslant \alpha' < 1. \tag{5}$$

Юқорида кўрилган уч ҳол учун топилган қисқартириб акс эттириш шартларининг ҳаммаси кифоявий шартлардир. (3), (4) ва (5) шартларнинг ҳар бири бажарилганда, шу параграфдаги теореманинг исботидагидек, (2) тенгламанинг биргина ечимга эгалигини кўрсатиш мумкин.

3. Охирги мисол сифатида ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6}$$

$$y_0 = \varphi(x_0) \text{ (бошланғич шарт)} \tag{7}$$

дифференциал тенгламани кўриб чиқамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ функция, (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олган текисликдаги бирон G соҳада аниқланган узлуксиз ва

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K |y_1 - y_2|$$

Липшиц шартини қаноатлантиради, деб фараз қиламиз (K — ўзгармас сон).

Энди (6) тенгламани бирон $[x_0 - c,\ x_0 + c]$ сегментда, (7) бошланғич шартни қаноатлантирадиган биргина $y = \psi(x)$ ечимга эгалигини исбот этамиз (бу эса Пикарнинг маълум теоремасидир).

Аввало (6) тенглама, (7) шарт бажарилганда, қуйидаги содда интеграл тенглама шаклида ёзилиши мумкин:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \psi(t))\,dt. \tag{8}$$

$f(x,\ y)$ функция G соҳада узлуксиз бўлганлиги учун, $(x_0,\ y_0)$ нуқтани ўз ичига олган, бирон $G' \subset G$ соҳада чегараланган бўлади, яъни $|f(x,\ y)| < d$. Сўнг c сонни шундай танлаб оламизки, унинг учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

а) Агар $|x - x_0| \leqslant c$, $|y - y_0| \leqslant cd$ бўлса, у ҳолда: $(x,\ y) \in G'$.

б) $$Kc < 1.$$

$[x_0 - c,\ x_0 + c]$ сегментда аниқланган ва $|\psi(x) - y_0| < cd$ тенгсизликни қаноатлантирадиган узлуксиз $\{\psi\}$ функциялар системасини C_1 билан белгилаймиз ва бу системада метрикани қуйидагича киритамиз:

$$\rho(\psi_1,\ \psi_2) = \max_x |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

Метрик C_1 фазо тўла, чунки у тўла $C[a,\ b]$ фазонинг ёпиқ қисмидир. Ушбу

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi(t))\,dt \tag{9}$$

акс эттиришда $x \in [x_0 - c,\ x_0 + c]$ бўлсин. У ҳолда бу акс эттириш C_1 фазони ўзини ўзига қисқартириб акс эттиради. Дарҳақиқат, $\varphi \in C_1$ ва $x \in [x_0 - C,\ x_0 - C,\ x_0 + c]$ бўлсин. У ҳолда

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi(t))\,dt \right| \leqslant cd$$

муносабат ўринли ва, демак, (9) акс эттириш C_1 фазони ўзини ўзига акс эттиради. Энди:

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,\ \varphi_1(t)) - f(t,\ \varphi_2(t))|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant Kc \max_t |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = Kc\,\rho(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Бундан $Kc < 1$ бўлганлиги учун (9) акс эттиришнинг қисқартирувчи акс эттириш эканлиги келиб чиқади. Демак, шу параграфдаги теоремага кўра (8) тенглама C_1 фазода бошланғич (7) шартни қаноатлантирадиган биргина ечимга эга.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Қандай α ва β лар учун ушбу

$$\rho(x, y) = |x^\alpha - y^\alpha|^\beta$$

функция тўғри чизиқда метрикани беради?

2. $[a, b]$ да аниқланган ҳамда узлуксиз ҳосилага эга бўлган функциялар тўпламини $C_1[a, b]$ билан белгилаймиз. $C_1[a, b]$ да қуйидаги функцияни аниқлаймиз:

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)| + |f'(a) - g'(a)|,$$

$\rho(f, g)$ нинг $C_1[a, b]$ да метрика эканлиги исботлансин.

3. Барча бир номаълумли кўпҳадлилар тўплами S ни олиб, ихтиёрий иккита

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

кўпҳадлилар учун қуйидаги функцияни тузамиз:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - b_i|^2};$$

бу ерда, агар $i > n$ бўлса, $a_i = 0$ ва агар $i > m$ бўлса; $b_i = 0$. $\rho(f, g)$ функциянинг S да метрика эканлигини исботланг ҳамда бу метрикага нисбатан S нинг тўлдирувчисини топинг.

4. 3- масала

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leqslant i < \infty} |a_i - b_i|$$

функция учун ечилсин.

5. 4- масалада компактлилик белгисининг зарурий ва кифоявий шарти топилсин (бу масалани 51. 4- теорема билан солиштиринг).

6. Қисқартириб акс эттириш принципини (52- § га қаранг) ушбу

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

тенгламага метрика

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{s} |a_i - b_i| + \max_{s+1 \leqslant j \leqslant n} |a_j - b_j|$$

бўлганда татбиқ этилсин.

7. 6- масала метрика

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{s_1} |a_i - b_i| + \max_{s_1+1 \leqslant j \leqslant s_2} |a_j - b_j| + \left(\sum_{k=s_2+1}^{n} |a_k - b_k|^2\right)^{1/2}$$

бўлганда ечилсин.

XI БОБ

ҚЎШИМЧАЛАР

53- §. Қувватлар устида амаллар. Ихтиёрий катта қувватларнинг мавжудлиги

Икки чекли A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар A да n та, B да m та элемент бўлса, у ҳолда бу тўпламлар йиғиндиси $A\cup B$ да $n+m$ та элемент бўлади. Тўпламнинг қуввати тушунчаси чекли тўплам элементларининг сони тушунчасининг умумлаштирилган ҳоли бўлганлиги сабабли, ихтиёрий қувватларни қўшиш амали таърифини қуйидагича бериш мумкин.

Икки A ва B тўпламлар умумий элементларга эга бўлмасин, α ва β тегишлича A ва B ларнинг қувватлари бўлсин. $A\cup B$ тўпламнинг қувватига α ва β қувватларнинг йиғиндиси дейилади ва

$$\alpha+\beta$$

шаклида ёзилади.

Тўпламлар системаси $\{X_\tau,\ \tau\in I\}$ берилган бўлиб, бу системадаги тўпламлар ўзаро кесишмасин ва X_τ нинг қуввати α_τ бўлсин. Барча α_τ қувватларнинг йиғиндиси деб, тўпламлар системаси йиғиндисининг қувватига айтилади.

Масалан, ω — саноқли тўпламнинг қуввати, c — континуум қуват бўлса, 6 ва 7- параграф теоремаларига асосан:

$$\begin{gathered}\omega+\omega=\omega\\ \omega+c=c\\ c+c=c\end{gathered}\tag{1}$$

Сони саноқли ω ларнинг йиғиндиси ҳам ω га, сони саноқли c ларнинг йиғиндиси c га тенг.

53. 1- изоҳ. (1) формулаларга қараб қуйидаги гипотезани айтиш мумкин: агар A чексиз тўплам бўлиб, қуввати α га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha+\alpha=\alpha$. Бу гипотеза ихтиёрий чексиз қувват учун ҳозиргача исботланмаган; аммо у тўла тартибланган тўпламлар учун ўринли ([1] га қаранг).

Энди қувватлар кўпайтмасининг таърифига ўтамиз.

A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда n ва m га тенг бўлсин. A ва B ларнинг Декарт кўпайтмаси $A\times B$ $n\cdot m$ та элементдан иборат.

Бунга кўра ихтиёрий тўпламлар учун қуйидаги таърифни бериш мумкин.

A ва B — ихтиёрий тўпламлар ва α, β — уларнинг қувватлари бўлсин. α ва β қувватларнинг кўпайтмаси деб, A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A\times B$ нинг қувватига айтилади ва

$$\alpha\cdot\beta$$

шаклида ёзилади.

Тўпламлар системасининг Декарт кўпайтмасидан фойдаланиб, сони ихтиёрий қувватларнинг кўпайтмасини ҳам таърифлаш мумкин.

Масалан, N натурал сонлар тўплами бўлса, $N \times N$ ҳам саноқли тўплам бўлгани учун

$$\omega \cdot \omega = \omega;$$

агар R тўғри чизиқ нуқталари тўплами бўлса, $R \times R$ текислик нуқталари тўплами бўлгани ва R ҳам $R \times R$ ларнинг қувватлари c бўлгани учун (54- § га қаралсин)

$$c \cdot c = c.$$

53. 2. Изоҳ. Ҳар қандай чексиз α кувват учун

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha$$

муносабатни гипотеза сифатида ёзиш мумкин. Бу гипотеза ҳам тўла тартибланган тўпламлар учунгина исботланган.

53. 3. Изоҳ. Ихтиёрий қувватларнинг чекли сонлардан фарқи (1) формулаларданоқ кўринади; иккинчи муҳим бир фарқ шуки, сони ихтиёрий қувватларни қўшиш ва кўпайтириш мумкин. Учинчи фарқ шундаки, қувватларнинг айирмаси тушунчасини (қувватларнинг йиғиндиси, тўпламларнинг йиғиндиси орқали таърифланганидек) тўпламларнинг айирмаси орқали таърифлаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $A \times B$ тўпламлар берилиб, A нинг қуввати α, B нинг қуввати β бўлса, A, B тўплам, α ва β лар ўзгармаган ҳолда, чексиз, чекли ёки бўш бўлиши мумкин, шунинг учун бу тўпламнинг қуввати тўғрисида ҳеч нарса айтиш мумкин эмас ва, демак, $\alpha - \beta$ аниқ бир маънога эга эмас.

Агар A, B — чекли тўпламлар бўлиб, n, m мос равишда бу тўпламлар элементларининг сони бўлса, A тўпламни B тўпламга барча акс эттирилишлари сони m^n га тенг. Ҳақиқатан ҳам, A тўпламнинг ҳар бир x элементи, B элементларининг сони m та бўлгани учун B га m та усул билан акс эттирилиши мумкин.

A да n та элемент бўлгани ҳамда ҳар бир элемент бошқа элементларга боғлиқмас равишда B га m усул билан акс эттирилиши мумкинлиги сабабли A нинг B га барча акс эттирилишлари сони m^n га тенг. Бунга кўра ихтиёрий қувватларни даражага кўтаришни қуйидагича таърифлаш мумкин.

A ва B тўпламлар берилиб, A нинг қуввати α, B нинг қуввати β га тенг бўлсин. У ҳолда A нинг B га барча акс эттирилишлари тўплами B^A нинг қувватига β нинг α - даражаси дейилади ва β^α шаклида ёзилади.

Масалан, N натурал сонлар тўплами ва $Z_2 = \{0, 1\}$ тўплам бўлса, N нинг Z_2 га ҳар бир акс эттирилишини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n & \ldots \end{matrix}$$

бу ерда $i_s = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Бундан чиқадики, N нинг Z_2 га ҳар бир акс эттирилишига

$$0,\ i_1\ i_2\ \ldots\ i_s\ \ldots$$

иккили касрни мос қўйиш мумкин. Натижада Z_2^N тўплам билан бутун қисми ноль бўлган барча иккили касрлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлади. Аммо бутун қисми ноль бўлган барча иккили касрлар тўплами c континуум қувватга эга.

Шундай қилиб, агар N нинг қуввати ω бўлса, Z_2^N нинг қуввати 2^ω бўлиб,

$$2^\omega = c.$$

Бу ерда, умуман, чекли сонлар учун $2^\alpha > \alpha$ тенгсизлик ўринли.

Бу ҳол тасодифий ҳол эмас, бунда қуйидаги умумий теорема ўринли:

53. 4. Теорема. ***А бирор тўплам бўлиб, унинг қуввати α бўлса, у ҳолда А нинг барча қисм-тўпламлари системасининг қуввати 2^α А нинг қувватидан катта, яъни:*** $2^\alpha > \alpha$.

Исбот. Бирор $A = \{a\}$ тўплам берилган бўлиб, $B = \{b\}$ тўплам A нинг барча қисм-тўпламларидан тузилган система бўлсин. Бу системага, хусусан A нинг бир элементли қисмлари, бўш тўплам ва A нинг ўзи киради.

B нинг қуввати A нинг қувватидан катталигини исботлаш учун B да A га эквивалент бўлган қисм борлигини, аммо B нинг A га эквивалент эмаслигини исботлаш керак.

B дан A нинг бир элементли қисмларидан иборат қисмий системани ажратиб олсак, бу қисмий система A га эквивалент бўлиши равшан.

Энди B нинг A га эквивалент эмаслигини кўрсатамиз.

Аксини фараз қилайлик, яъни $A \sim B$ бўлсин. У ҳолда B системанинг элементлари билан A нинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин, яъни B ва A нинг элементлари маълум бир жуфтларга боғланган бўлади:

$$A_\tau \leftrightarrow a,\ A_\tau \in B,\ a \in A.$$

Бу жуфтларнинг бирортасини олайлик: $A_\tau \leftrightarrow a$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: ё A_τ тўплам A нинг қисми бўлгани учун a ни ўз ичига олади ёки A_τ тўплам A нинг қисми бўла туриб, a ни ўз ичига олмайди.

Бу ҳолларга қараб A тўпламнинг элементини мос равишда 1- ёки 2- *тур элементлар* дейилади. Демак, 1- тур элементлар шундай элементларки, уларнинг

$$A_\tau \leftrightarrow a$$

жуфтларидаги A_τ тўплам a ни ўз ичига олади, 2- тур элементлар шундай элементларки, уларнинг

$$A_\tau \leftrightarrow a$$

жуфтларидаги A_τ тўплами a ни ўз ичига олмайди. Барча 2- тур элементлар тўпламини A' билан белгилаймиз. A' нинг

$$A' \leftrightarrow a$$

жуфтини оламиз. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: ё a элемент 1- тур элемент, ё 2- тур элемент. Агар a 1- тур элемент бўлса, a элемент A' га кириши керак, аммо A' тузилишига кўра, 2- тур элементлардан иборат. Демак, бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас. Агар a 2- тур элемент бўлса, a элемент, бир томондан, таърифга асосан A' га кирмаслиги керак, иккинчи томондан, A' нинг тузилишига кўра, a элемент A' га кириши керак. Яна қарама-қаршиликка келдик. Демак, бу ҳолнинг ҳам бўлиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, A' тўпламнинг мавжудлиги қарама-қаршиликка олиб келаяпти. Демак, A ва B тўпламлар ўзаро эквивалент эмас.

Умуман қуйидаги теорема ўринли.

53. 5. Теорема. ***Агар X ва Y тўпламларнинг қувватлари мос равишда α ва β бўлиб, $\beta > 1$ бўлса, у ҳолда:***

$$\beta^\alpha > \alpha.$$

Ўқувчи бу теорема ҳақида П. С. Александровнинг китобига қараши мумкин.

53. 4- теорема аслида қуйидаги тасдиқни умумлаштиради: ***Агар n натурал сон бўлиб, $n > 1$ бўлса,***

$$2^n > n$$

тенгсизлик ўринли.

Шунга ўхшаш, $n > 4$ да

$$2^n > n^2$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун қуйидаги тасдиқ тўғри бўлса керак: ***агар α қувват $\alpha > 4$ тенгсизликни қаноатлантирса,***

$$2^\alpha > \alpha^2$$

тенгсизлик ўринли. Аммо бу тасдиқ ҳозиргача исботланмаган.

54- §. Тўпламларнинг Декарт кўпайтмасининг қуввати

Энди тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини текшириш билан шуғулланамиз.

54. 1. Теорема. ***Агар A ва B саноқли тўпламлар бўлса, уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам саноқли бўлади.***

Исбот. A ва B лар саноқли бўлгани учун уларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}$$
$$B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}$$

Бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини эса қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ \ldots,\ (a_1,\ b_n),\ \ldots \\ (a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_2,\ b_n),\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_n,\ b_1),\ (a_n,\ b_2)\ \ldots,\ (a_n,\ b_n),\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\}$$

Бу жадвалдаги элементларни 6. 1- теоремадагидек, қуйидагича номерлаб чиқамиз:

$$c_1 = (a_1,\ b_1),\ c_2 = (a_1,\ b_2),\ c_3 = (a_2,\ b_1),\ c_4 = (a_1,\ b_3),$$
$$c_5 = (a_2,\ b_2),\ c_6 = (a_3,\ b_1),\ c_7 = (a_1,\ b_4),\ \ldots \qquad (1)$$

Бу кетма-кетлик қуйидаги қоида бўйича тузилди: агар $i+k<j+e$ бўлса, у ҳолда $(a_i,\ b_k)$ элемент $(a_j,\ b_e)$ дан илгари ёзилади; агар $i+k=j+e$ ва $i<j$ бўлса, у ҳолда $(a_i,\ b_k)$ элемент $(a_j,\ b_e)$ дан илгари ёзилади.

(1) кетма-кетлик эса $A \times B$ тўпламнинг саноқлилигини кўрсатади.*

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади:

54. 2. Теорема. ***Агар $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ саноқли тўпламлар бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси***

$$A = A_1 \times A_2 \times \ \ldots \ \times A_n$$

ҳам саноқлидир.

54. 3. Натижа. ***n ўлчовли фазодаги барча координаталари бутун сонлардан иборат нуқталар тўплами саноқлидир.***

Бу натижанинг исботи барча бутун сонлар тўплами M нинг саноқлилигидан ва n ўлчовли фазодаги бутун координатали нуқталар тўплами

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \ \ldots \ \times M}_{n \text{ марта}}$$

га тенг бўлганлигидан келиб чиқади.

54. 4. Натижа. ***n ўлчовли фазодаги барча рационал координатали нуқталар тўплами R^n саноқлидир.***

Бунинг исботи рационал сонлар тўплами R нинг саноқлилигидан (1- бобга қаранг) ва

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ марта}}$$

тенгликдан келиб чиқади.

Энди $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Ушбу

$$B_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

кетма-кетликни тузамиз. Барча B_n тўпламларнинг

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

йиғиндисига $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ кетма-кетликнинг чала Декарт кўпайтмаси деймиз.

54. 5. Теорема. ***Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг чала Декарт кўпайтмаси ҳам саноқлидир.***

Исботи. $B_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ тўпламларнинг саноқлилиги юқоридаги 54. 1- теоремадан, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ тўпламнинг саноқлилиги эса 6. 1- теоремадан келиб чиқади.

54. 6. Натижа. ***Барча рационал коэффициентли кўп ҳадлиларнинг тўплами P саноқлидир.***

Исботи. Даражаси $n-1$ дан катта бўлмаган рационал коэффициентли кўп ҳадлилар тўплами P^{n-1} аслида n ўлчовли фазодаги барча рационал координатали нуқталар тўпламини ташкил этади, демак, 54. 4- натижага асосан саноқлидир. P тўплам, P^{n-1} тўпламларнинг йиғиндисига тенг, яъни $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{n-1}$ бўлгани учун саноқлидир.*

54. 7. Натижа. ***Барча алгебраик[1] сонлар тўплами саноқлидир.***

Исбот. Бутун коэффициентли кўп ҳадлилар тўплами саноқли бўлгани учун ҳамда ҳар бир кўп ҳадли сони чекли илдизга эга бўлгани учун алгебраик сонлар тўплами сони саноқли чекли тўпламларнинг йиғиндисига тенг. Бу тўплам эса 6. 1- теоремага асосан саноқлидир.

54. 8. Натижа. ***Трансцендент сонлар тўплами континуум қувватга эга.***

Бунинг исботи 54. 7- натижадан ҳамда 6 ва 7- параграфлардаги теоремалардан бевосита келиб чиқади.

---

[1] Агар бирор сон коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган бирор кўпҳаднинг илдизи бўлса, бу сон алгебраик сон дейилади. Бу таърифни қаноатлантирмайдиган сонлар трансцендент сонлар дейилади.

Энди саноқсиз тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан шуғулланамиз.

54. 9. Теорема. ***Агар А ва В тўпламлар континуум қувватга эга бўлса, уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга.***

Исбот. A ва B континуум қувватга эга бўлгани учун $A = I = [0, 1]$ ва $B = I = [0, 1]$ деб олиш мумкин. У ҳолда $A \times B$ нинг элементлари текисликдаги $I^2 = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ квадратнинг нуқталари тўпламидан иборат. Теоремани исботлаш учун бу квадратнинг нуқталари билан $I = [0, 1]$ сегментнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли муносабатни ўр атиш кифоя. Бундай муносабат қуйидагича ўрнатилади: агар $(p, q) \in I^2$ бўлиб,

$$p = 0,\ p_1 p_2 \ldots p_n \ldots,$$
$$q = 0,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

чексиз ўнли касрга ёйилса, бу (p, q) га I даги ушбу

$$0, p_1 q_1\ p_2 q_2\ p_3 q_3 \ldots p_n q_n \ldots$$

элементни мос қўямиз. Равшанки, бу мослик ўзаро бир қийматлидир.*

Индукция йўли билан қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

54. 10. Теорема. ***Агар $A_1, \ldots, A_n$ континуум қувватли тўпламлар берилган бўлса, уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга.***

Бу теоремадан ҳамда n ўлчовли фазо n та тўғри чизиқнинг Декарт кўпайтмасига тенг бўлгани ва тўғри чизиқ нуқталари тўплами континуум қувватга эга бўлганидан қуйидаги натижани ҳосил қилиш мумкин.

54. 11. Натижа. ***n ўлчовли фазо континуум қувватга эга.***

55-§. Функциянинг тебраниши. Функциянинг узилиш нуқталари тўпламининг тузилиши

Бирор E тўпламда берилган $f(x)$ функция $x \to x_0$ да ($x, x_0 \in E$ ва x_0 нуқта E нинг лимит нуқтаси) ҳеч қандай лимитга интилмаслиги мумкин. Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг x нуқта E бўйича x_0 га интилгандаги юқори ва қуйи лимитлари ўрганилади. Юқори ва қуйи лимитларнинг таърифларини эслатамиз.

Ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун x_0 нуқтанинг ε атрофи $U(x_0, \varepsilon)$ ни олиб, M_ε ва m_ε билан мос равишда $f(x)$ функциянинг $E \cap U(x_0, \varepsilon)$ тўпламда қабул қиладиган қийматларининг юқори ва қуйи чегараларини белгилаймиз. Шундай қилиб:

$$M_\varepsilon = \sup_{x \in E \cap U(x_0, \varepsilon)} (f(x)), \quad m_\varepsilon = \inf_{x \in E \cap U(x_0, \varepsilon)} (f(x))$$

ε сони камайганда M_ε фақат камайиши мумкин, шунинг учун ε нолга интилганда аниқ бир лимитга интилади, яъни $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon$ мавжуд; бу лимитни (агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $M_\varepsilon = +\infty$ бўлса, у $+\infty$ га тенг бўлади) $f(x)$ функциянинг x нуқтанинг E тўплам бўйича x_0 нуқтага яқинлашгандаги **юқори лимити** дейилади ва

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}} f(x) \quad \text{ёки қисқарок} \quad \overline{\lim_{x_0,\ E}} f$$

билан белгиланади.

ε камайганда m_ε сони фақат ортиши мумкин, шунинг учун $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon$ мавжуд, уни $\underline{\lim}_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)$ ёки $\underline{\lim}_{x_0,\ E} f$ билан белгилаб, $f(x)$ функциянинг x нуқтанинг E тўплам бўйича x_0 нуқтага интилгандаги **қуйи лимити** дейилади. Шуни айтиш керакки,

$$\underline{\lim}_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) = -\infty$$

тенглик фақат ҳар қандай ε учун $m = -\infty$ тенглик бажарилгандагина ўринли. Доимо:

$$\underline{\lim}_{x_0,\ E} f \leqslant \overline{\lim}_{x_0,\ E} f$$

экани равшан. Хусусан, агар $x_0 \in E$ бўлса, у ҳолда:

$$\underline{\lim}_{x_0,\ E} f \leqslant f(x_0) \leqslant \overline{\lim}_{x_0,\ E} f\ .$$

Агар $E = R^1$ ёки мос равишда R^2 бўлса, қуйидаги содда белгиларни ишлатамиз: $\underline{\lim}_a f$, $\overline{\lim}_a f$.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги теорема ҳосил қилинади:

55. 1. **Теорема.** ***Бирор E тўпламда аниқланган f(x) функция x ўзгарувчи E тўплам бўйича a га яқинлашганда аниқ бир лимитга эга бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя:***

$$\underline{\lim}_{a,\ E} f = \overline{\lim}_{a,\ E} f.$$

Бу ҳолда:

$$\lim_{a,\ E} f = \underline{\lim}_{a,\ E} f = \overline{\lim}_{a,\ E} f.$$

Бу теоремадан ва функциянинг узлуксизлиги таърифидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

55. 2. **Натижа.** ***f(x) функция ўзининг аниқланиш соҳасига тегишли a нуқтада узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя:***

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f;$$

бу ҳолда ўз-ўзидан

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f = f(a)$$

муносабат ўринли.

55. 3. **Изоҳ.** Агар $\overline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$ бўлса (бу фақат a нуқта E га кирмаган ҳолдагина бўлиши мумкин, чунки $a \in E$ ҳолда: $\overline{\lim}_{a,\,E} f \geqslant f(a)$), у ҳолда $\underline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$, шунинг учун ҳам

$$\lim_{a,\,E} f = -\infty.$$

Шунга ўхшаш, агар $\underline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$ бўлса, у ҳолда:

$$\lim_{a,\,E} f = +\infty.$$

Таъриф. *f функция E тўпламда аниқланган бўлсин. Ушбу*

$$\omega_{a,\,E} f = \overline{\lim}_{a,\,E} f - \underline{\lim}_{a,\,E} f$$

ифодага f функциянинг $a \in E$ нуқтадаги (E тўплам бўйича) тебраниши *дейилади.*

Бу $\overline{\lim}_{a,\,E} f$, $\underline{\lim}_{a,\,E} f$ лар чекли бўлса, $\omega_{a,\,E}$ сон манфий эмас; агар қуйидаги шартларнинг камида биттаси бажарилса:

$$\overline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty, \quad \underline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty,$$

у сон $+\infty$ га тенг, ҳеч қандай учинчи ҳолнинг, яъни $\overline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$ ёки $\underline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$ ҳолнинг бўлиши мумкин эмас, чунки $f(x)$ функция a нуқтада аниқ $f(a)$ қийматни қабул қилади ва

$$\overline{\lim}_{a,\,E} f \geqslant f(a) \geqslant \underline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Шундай қилиб, $\omega_{a,\,E} f$ ё манфий бўлмаган сон, ё $+\infty$ га тенг. Агар E сегмент ёки интервал бўлса, $\omega_{a,\,E} f$ белги ўрнига соддароқ $\omega_a f$ белгини ишлатамиз.

Энди юқоридаги натижани қуйидагича айтиш мумкин:

55. 4. **Теорема.** ***E тўпламда аниқланган $f(x)$ функциянинг $a \in E$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун $f(x)$ нинг бу нуқтаса E бўйича тебраниши нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.***

Бу теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз.

55. 5. **Теорема.** ***Тўғри чизиқдаги бирор очиқ ёки ёпиқ E тўпламда аниқланган f функциянинг узлуксиз нуқталаридан иборат C тўплам G_δ типидаги тўпламдир*** (у бўш ёки E га тенг бўлиши ҳам мумкин).

Бу теорема билан қуйидаги теорема эквивалентдир.

55. 6. Теорема. *f функциянинг узлукли нуқталаридан иборат D тўплам F_σ типидаги тўпламдир*[1].

Бу теореманинг исботи қуйидаги леммага асосланган.

55. 7. Лемма. *Берилган ε учун ушбу*

$$\omega_{x,\,E} f \geqslant \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталардан иборат $E_f(\varepsilon)$ тўплам ёпиқдир.

Лемманинг исботи. a нуқта $E_f(\varepsilon)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда a нуқтанинг ихтиёрий $U = U(a, \eta)$ атрофида $\omega_{a',\,E} f \geqslant \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи a' нуқта мавжуд.

M ва m билан мос равишда f функциянинг a даги юқори ва қуйи чегараларини белгилаймиз. U да a' нуқтанинг бирор атрофи жойлашганлиги учун

$$M \geqslant \overline{\lim}_{a'} f; \quad \underline{\lim}_{a'} f \geqslant m.$$

Шунинг учун

$$M - m \geqslant \omega_{a',\,E} f \geqslant \varepsilon.$$

Агар $\omega_{a,\,E} f < \varepsilon$ бўлганда эди, у ҳолда U ни шундай танлаш мумкин бўлардики, натижада $M - m < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўларди.

55. 6-теореманинг исботи. 55. 4-теоремага асосан f функциянинг барча узилиш нуқталари тўплами $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_f\left(\frac{1}{n}\right)$ йиғиндига тенг. Аммо леммага асосан $E_f\left(\frac{1}{n}\right)$ тўплам ёпиқ. Шу билан 55. 6-теорема, демак, 55. 5-теорема ҳам исботланади$_*$.

56-§. Узлуксиз чизиқлар. Жордан ва Пеано чизиқлари

Текисликдаги чизиқ деганда биз текисликда ҳаракат қилувчи моддий нуқтанинг изини тасаввур қиламиз. Бу, албатта, ҳеч қандай таъриф эмас. Жордан чизиқнинг аниқ таърифини қуйидагича берган:

Текисликдаги чизиқ деб, x, y координаталари

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t) \qquad (1)$$

[1] Бу теоремадан $R \setminus D$ тўпламнинг G_δ типидаги тўплам эканлиги бевосита келиб чиқади; аммо $C = E \cap (R \setminus D)$, E тўплам очиқ ёки ёпиқ бўлгани учун, G_δ типдаги тўплам ҳамда иккита G_δ типидаги тўпламлар кўпайтмаси G_δ — тўплам бўлгани учун, C ҳам G_δ тўпламдир.

тенгламаларни қаноатлантирувчи текисликдаги барча нуқталар тўпламини айтилади, бу ерда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ лар $t_0 \leqslant t \leqslant T$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялардир.

Бу маънодаги чизиқ Жордан чизиғи дейилади.

Жорданнинг таърифи бизнинг чизиқ тўғрисидаги тасаввуримизга тўғри келади. Ҳақиқатан ҳам, агар t ўзгарувчини вақт деб қарасак, у ҳолда (1) тенгламалар t вақтнинг $[t_0, T]$ оралиқдаги турли қийматларида текисликда ҳаракат қилувчи нуқтанинг координаталарини ифодалайди

Шуниси қизиқки, $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ узлуксиз функцияларни шундай танлаш мумкин эканки, текисликдаги бирор квадрат ичидаги ҳар бир нуқтанинг координатаси бирор $t \in [t_0, T]$ да (1) тенгламалар билан аниқланади.

Шундай қилиб, Жордан чизиғи t ўзгарувчи $[t_0, T]$ сегментда ўзгарганда квадратнинг ичидаги ҳар бир нуқтадан ўтиб, квадратнинг юзини тўлдириши мумкин.

Айтиб ўтилган хоссага эга бўлган чизиқлар Пеано чизиқлари дейилади, чунки бундай чизиқларнинг мавжудлигини Пеано кўрсатган. Агар $[t_0, T]$ сегментдаги турли t ларга текисликнинг турли нуқталари мос келса, (1) тенгламалар билан берилган Жордан чизиғи содда ёй ёки каррали нуқтасиз Жордан чизиғи дейилади. Агар $t = t_0$ ва $t = T$ ларда (1) тенглама текисликда биттагина нуқтани ифодаласа, яъни Жордан чизиғининг бошланғич нуқтаси $M_0 \{\varphi(t_0), \psi(t_0)\}$ ва охирги нуқтаси $M \{\varphi(T), \psi(T)\}$ устма-уст тушса, Жордан чизиғи ёпиқ бўлади. Агар $[t_0, T]$ сегментда t_0 ва T лардан бошқа текисликда битта нуқтани ифодаловчи турли t_1 ва t_2 лар мавжуд бўлмаса, ёпиқ Жордан чизиғи содда ёпиқ контур ёки каррали нуқтасиз ёпиқ Жордан чизиғи дейилади.

Агар Жордан чизиғини ифодаловчи (1) тенгламалар t нинг икки ёки ундан ортиқ қийматларида текисликда биттагина нуқтани ифодаласа, бундай нуқтани Жордан чизиғининг каррали нуқтаси дейилади.

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

56. 1. **Теорема.** ***Ҳар қандай содда ёпиқ Жордан чизиғи текисликни иккита очиқ тўпламга ажратади, бу тўпламларнинг бири чизиққа нисбатан ички бўлиб, иккинчиси эса ташқи бўлади.***

56. 2. **Теорема.** ***Ҳар қандай Пеано чизиғи каррали нуқталарга эга.***

57-§. Тўғриланувчи чизиқлар

Ушбу

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

тенгламалар Жордан чизиғини ифодаласин, бу ерда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$

$[t_0, T]$ сегментдаги узлуксиз функциялар. $[t_0, T]$ сегментни ушбу

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$$

нуқталар билан ихтиёрий n қисмга бўламиз ва

$$x_k = \varphi(t_k),$$
$$y_k = \psi(t_k)$$

белгилашларни киритамиз.

Учлари

$$M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n(x_n, y_n)$$

нуқталардан иборат бўлган синиқ чизиқни тузамиз. Бу синиқ чизиқни Жордан чизиғи **ичига чизилган** синиқ чизиқ деб атаймиз. Бу синиқ чизиқнинг M_k ва M_{k+1} нуқталарини туташтирувчи кесманинг узунлигини c_k билан белгилаймиз. Тузилган синиқ чизиқнинг периметри

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

га тенг. Аммо

$$c_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

бўлгани учун:

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

$[t_0, T]$ сегментнинг элементар қисмлари сони n ни (ёки синиқ чизиқ қисмлари сонини) чексизга шундай интилтирамизки, барча $[t_k, t_{k+1}]$ кесмаларнинг узунлиги $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ (ёки синиқ чизиқнинг барча қисмлари узунлиги) нолга интилсин. Агар бунинг натижасида Жордан чизиғининг ичига чизилган синиқ чизиқнинг периметри p бирор чекли лимитга интилса ҳамда бу лимит $[t_0, T]$ сегментнинг бўлинишига боғлиқ бўлмаса, бу лимитни берилган **Жордан чизиғининг узунлиги**, чизиқни эса **тўғриланувчи чизиқ** дейилади.

Теорема. ***Жордан чизиғи***

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t), \quad t \in [x_0, T]$$

тўғриланувчи бўлиши учун $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Зарурлиги. Берилган чизиқ тўғриланувчи бўлсин деб фараз қилайлик. Бу Жордан чизиғининг ичига чизилган синиқ чизиқнинг периметри

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

нинг лимити мавжуд демакдир. Δt_k лар нолга интилганда p нинг лимити мавжудлигидан $[t_0, T]$ сегментнинг барча бўлинишларига мос келувчи p ларнинг қийматлари тўплами чегараланганлигидан келиб чиқади. Бундан ва ушбу

$$|x_{k+1}-x_k| \leqslant c_k, \quad |y_{k+1}-y_k| \leqslant c_k$$

тенгсизликлардан ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| \quad \text{ва} \quad \sum_{k=0}^{n-1}|y_{k+1}-y_k|$$

йиғиндиларнинг чегараланганлиги, яъни $x=\varphi(t)$ ва $y=\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда чегараланган ўзгаришга эгалиги келиб чиқади.

Кифоялиги. $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлсин. Бу демак ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| \quad \text{ва} \quad \sum_{k=0}^{n-1}|y_{k+1}-y_k|$$

йиғиндилар чегараланган демакдир. Аммо, равшанки.

$$c_k \leqslant |x_{k+1}-x_k| + |y_{k+1}-y_k|$$

ва

$$p=\sum_{k=0}^{n-1}c_k$$

периметр чегараланган. p периметрнинг барча қийматлари тўплами чегараланганлиги учун у юқори чегара L га эга.

Энди Δt_k лар нолга интилганда (ва демак, синиқ чизиқ бўлакларининг узунлиги нолга интилганда), ўзгарувчи p периметрнинг L га интилишини кўрсатамиз. Бунинг учун, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топилишини кўрсатиш керакки, барча k лар учун

$$|\Delta t_k|<\delta$$

бўлганда

$$|p-L|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлсин.

Ҳақиқатан ҳам, юқори чегаранинг таърифига асосан, $[t_0, T]$ сегментнинг ҳар қандай бўлинишида ҳам

$$p \leqslant L, \tag{1}$$

аммо $[t_0, T]$ сегментни S_0 нуқталар системаси билан шундай n та қисмга бўлиш мумкинки, бу бўлинишга мос келувчи синиқ чизиқнинг периметри p_0 учун

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<p_0 \leqslant L \tag{2}$$

тенгсизлик ўринли.

$[t_0, T]$ сегментни S нуқталар системаси билан элементар $[t_k, t_{k+1}]$ сегментларга бўлиб, δ сонини шундай кичик қилиб танлаймизки, натижада

$$|\Delta t_k| < \delta$$

ҳамда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг $[t_k, t_{k+1}]$ сегментдаги тебранишлари $\omega_k(\varphi)$ ва $\omega_k(\psi)$ лар $\frac{\varepsilon}{8n}$ дан кичик бўлсин. $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар узлуксиз бўлгани учун бундай δ доим топилади. Иккинчи бўлинишга (яъни S система нуқталари ёрдами билан тузилган бўлинишга) мос келувчи синиқ чизиқнинг периметрини p билан белгилаймиз. S_0 ва S системаларни бирлаштириш натижасида ҳосил бўлган S' нуқталар системасини олиб, $[t_0, T]$ сегментни S' нуқталар системаси билан бўламиз. Бу бўлинишга мос келувчи синиқ чизиқнинг периметрини p' билан белгилаймиз. Равшанки,

$$p' \geqslant p, \tag{3}$$

чунки S' система S системага янги нуқталарни қўйиш натижасида ҳосил қилинган, бундай бўлиниш эса синиқ чизиқнинг периметрини фақат ошириши мумкинлиги равшан.

Энди шуни назарда тутиш керакки, t_k ва t_{k+1} нуқталарининг орасига бирор янги τ_k нуқта киритилса, у ҳолда синиқ чизиқ периметри

$$c_k' + c_k''$$

дан ортиқ ўзгаролмайди. Бу ерда c_k' ва c_k'' эски c_k бўлакни алмаштирган икки янги бўлакларнинг узунликлари.

Аммо

$$c_k' \leqslant |\varphi(\tau_k) - \varphi(t_k)| + |\psi(\tau_k) - \psi(t_k)|,$$
$$c_k'' \leqslant |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\tau_k)| + |\psi(t_{k+1}) - \psi(\tau_k)|.$$

Булардан

$$c_k' + c_k'' \leqslant 2\{\omega_k(\varphi) + \omega_k(\psi)\}$$

муносабат келиб чиқади; бу ерда $\omega_k(\varphi)$ ва $\omega_k(\psi)$ лар $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг $[t_k, t_{k+1}]$ сегментдаги тебранишлари.

Шундай қилиб, агар t_k ва t_{k+1} орасига янги бир бўлиниш нуқтаси киритилса, у ҳолда синиқ чизиқнинг периметри $2\{\omega_k(\varphi) + \omega_k(\psi)\}$ дан ортиққа оша олмайди. Буни назарда тутиб, ҳамда $[t_0, T]$ сегментнинг иккинчи бўлинишида ихтиёрий k учун

$$\omega_k(\varphi) < \frac{\varepsilon}{8n}; \quad \omega_k(\varphi) \quad \frac{\varepsilon}{8n}$$

эканлигини эслаб, учинчи бўлинишни (яъни S' системага мос келувчи бўлинишни) иккинчи бўлиниш нуқталари системаси S' га биринчи бўлиниш нуқталари системаси S_0' ни бирлаштириш натижасида ҳосил қилинган, деб қараш мумкинлигидан, учинчи бўлинишга оид периметр

$$n \cdot 2\left(\frac{\varepsilon}{8n} + \frac{\varepsilon}{8n}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

сондан ортиққа оша олмайди.

Бу демак,

$$p' < p + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

(2), (3) ва (4) тенгсизликлардан:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < p + \frac{\varepsilon}{2}$$

ёки

$$L - \varepsilon < p. \tag{5}$$

(1) ва (5) тенгсизликлардан:

$$L - \varepsilon < p < L.$$

Шундай қилиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики,

$$|\Delta t_k| < \delta$$

бўлганда

$$|L - p| < \varepsilon,$$

яъни: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} p = L$. Бу эса берилган чизиқнинг тўғриланувчи эканлигини кўрсатади.

58- §. Квадратланувчи ва кубланувчи соҳалар. Тўпламнинг Жордан маъносидаги ўлчови

Текисликда содда ёпиқ контур C берилган бўлсин. A билан C нинг ичида ётган соҳани белгилаймиз. Энди g билан A соҳа ичида ётувчи ихтиёрий кўп бурчакли соҳанинг юзини, g' билан эса A ни ўз ичига олган ихтиёрий кўп бурчакли соҳанинг юзини белгилаймиз. Бундай кўп бурчакли соҳаларни чексиз кўп усуллар билан тузиш мумкин, шунинг учун g ва g' лар чексиз кўп турли қийматларни қабул қилади. Равшанки, $\{g\}$ тўплам юқоридан чегараланган, шунинг учун бу тўплам аниқ юқори чегара Q га эга; $\{g'\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган, шунинг учун аниқ қуйи чегара Q' га эга. Доим $g \leqslant g'$ бўлгани учун

$$Q \leqslant Q'.$$

Агар Q ва Q' лар тенг бўлса, уларнинг қиймати

$$p = Q = Q'$$

ни A соҳанинг **юзи** дейилади. Бу ҳолда A соҳани **квадратланувчи соҳа** дейилади, бу термин билан A соҳанинг юзи P га тенг бўлган квадрат билан солиштириш мумкинлиги қайд қилиб ўтилади. Агар A соҳа учун $Q < Q'$ тенгсизлик ўринли бўлса, A

соҳанинг юзи тўғрисида гапириш маънога эга эмас. Бу ҳолда A соҳа баъзи бир маънода Q ва Q' сонлар билан аниқланади. Шунинг учун Q ни A нинг ички юзи, Q' ни эса A нинг ташқи юзи дейилади.

Уч ўлчовли фазодаги соҳаларни ўлчаш масаласи ҳам шунга ўхшаш ҳал қилинади: A соҳада ётувчи барча кўп ёқли соҳа ҳажмларининг аниқ юқори чегарасига A соҳанинг ички ҳажми, A соҳани ўз ичига олувчи барча кўп ёқли соҳа ҳажмларининг аниқ қуйи чегарасига A соҳанинг ташқи ҳажми дейилади. Агар A соҳанинг ички ҳажми ташқи ҳажмига тенг бўлса, бу соҳа кубланувчи соҳа дейилади.

Энди тўғри чизиқдаги тўпламлар билан шуғулланамиз.

Тўғри чизиқдаги тўпламларнинг ўлчовини турлича киритиш мумкин. Жордан тўғри чизиқдаги тўпламнинг ўлчовини қуйидагича беради: $[a, b]$ сегментда бирор E тўплам берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментни ушбу

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

нуқталар билан элементар сегментларга бўламиз:

$$\alpha_k = [x_k, \ x_{k+1}], \ (k = 0, \ 1, \ldots, \ n-1)$$

s билан E тўпламга тегишли барча α_k сегментларнинг узунлигини, s' билан эса E тўпламнинг камида битта нуқтасини ўз ичига олган барча α_k сегментларнинг узунлигини белгилаймиз. $[a, b]$ сегментни чексиз усул билан бўлиш мумкинлигидан s ва s' ларнинг чексиз турли қийматлар қабул қилиши келиб чиқади. s қийматлар тўплами юқоридан чегараланганлиги сабабли аниқ юқори чегарага эга, s' қийматлар тўплами қуйидан чегараланганлиги сабабли аниқ қуйи чегарага эга. Доимо $s \leqslant s'$ бўлишидан S ларнинг аниқ юқори чегараси, s' ларнинг аниқ қуйи чегарасидан катта эмас. Агар бу аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралар бир-бирига тенг бўлса, E тўплам Жордан маъносида ўлчовли дейилади. Агар аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралар тенг бўлмаса, E нинг ўлчови тўғрисида гапириш маънога эга эмас. Бу ҳолда E ўлчовлимас ва s ларнинг аниқ юқори чегарасини E нинг ички ўлчови ва s' ларнинг қуйи чегарасини E нинг ташқи ўлчови дейилади.

Бу таърифлардан илгариги параграфда киритилган юзларни ва ҳажмларни ўлчаш билан Жордан маъносида тўғри чизиқдаги тўпламларни ўлчашнинг моҳиятлари бир хил экани кўринади.

59-§. Ҳақиқий сонларни p ли касрларга ёйиш

Кўп масалаларда ҳақиқий сонларни ўнли касрларга, иккили ва учли касрларга, умуман p ли касрларга ёйишдан фойдаланилади. Тўлалик учун биз бу параграфда шу масала билан шуғулланамиз.

Аввал биз ҳақиқий сонларни чексиз ўнли каср шаклида ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. Агар x ҳақиқий сон бўлиб, бутун n сонига тенг бўлса, у ҳолда уни ушбу

$$x = n,\ 0\ 0 \ldots 0 \ldots$$

кўринишда ёзамиз. Агар x бутун сон бўлмаса, у ҳолда x сони n ва $n+1$ бутун сонлар орасида бўлади, яъни: $n \leqslant x < n+1$. Энди $[n,\ n+1]$ сегментни 10 та узунлиги бир-бирига тенг бўлган сегментларга бўламиз:

$$\Delta_0 = \left[n,\ n+\frac{1}{10}\right],\ \Delta_1 = \left[n+\frac{1}{10},\ n+\frac{2}{10}\right],\ \ldots,\ \Delta_9 = \left[n+\frac{9}{10},\ n+1\right]$$

x ни $n + \frac{m}{10^p}$ (m, p — натурал сонлар) кўринишдаги сон эмас, деб фараз қилсак, x сон Δ_i ($i = 0,\ 1, \ldots, 9$) сегментларнинг биридагина жойлашган бўлади; чунки. акс ҳолда, ушбу $x \in \Delta_i$, $x \in \Delta_{i+1}$ муносабатлар ўринли ва $x = n + \frac{i+1}{10}$ кўринишда бўлиб қолади, бу эса фаразимизга зид. Бинобарин, $x \in \Delta_{i_1}$ ($i_1 = 0,\ 1, \ldots, 9$) бўлсин; i_1 ни x нинг биринчи ўнли рақами деймиз. $\Delta_{i_1} = \left[n + \frac{i_1}{10},\right.$ $\left.n + \frac{i_1+1}{10}\right]$ сегментни яна узунлиги бир-бирига тенг 10 та сегментга бўламиз:

$$\Delta_{i_1 0} = \left[n + \frac{i_1}{10},\ n + \frac{i_1}{10} + \frac{1}{10^2}\right]$$

$$\Delta_{i_1 1} = \left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{1}{10^2},\ n + \frac{i_1}{10} + \frac{2}{10^2}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_{i_1 9} = \left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{9}{10^2},\ n + \frac{i_1+1}{10}\right].$$

Юқоридаги фаразимизга мувофиқ x бу сегментларнинг биридагина ётади, x жойлашган сегмент $\Delta_{i_1 i_2}$ ($i_2 = 0,\ 1, \ldots, 9$) бўлсин. i_2 ни x нинг иккинчи ўнли рақами деймиз. $\Delta_{i_1 i_2}$ сегментни яна узунлиги бир-бирига тенг 10 та сегментга бўлиб, x ни ўз ичига олган биргина сегментни $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ ($i_3 = 0,\ 1, \ldots, 9$) билан белгиласак, x нинг учинчи ўнли рақамини аниқлаган бўламиз. Бу амални юқоридаги фаразимизга асосланиб, чексиз давом эттиришимиз мумкин. Натижада ушбу

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва бу сонларнинг ҳар бири ёки 0, ёки 1, ёки 2, ..., ёки 9 га тенг бўлади. i_k ни x нинг k-ўнли рақами деб, x ни

$$x = n,\ i_1 i_2 \ldots i_k \ldots$$

кўринишда ёзамиз. Демак, юқоридаги фаразимиз бажарилганда ҳар қандай ҳақиқий x сонини чексиз ўнли каср кўринишида ёзишимиз мумкин. Энди ҳақиқий x сони $n+\frac{m}{10^p}$ кўринишда бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда x ушбу

$$x=n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2}{10^2}+\ldots+\frac{i_p}{10^p}.$$

чекли ўнли каср шаклида ёзилади ва бунда:

$$0\leqslant i_k\leqslant 9 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Бу ҳол учун юқоридаги амалларни бажарсак, x ушбу

$$[n,\ n+1],\ \left[n+\frac{i_1}{10},\ n+\frac{i_1+1}{10}\right],\ \left[n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2}{10^2},\ n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2+1}{10^2}\right],\ \ldots$$

$$\ldots,\ \left[n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2}{10^2}+\ldots+\frac{i_p-1}{10^{p-1}},\ n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2}{10^2}+\ldots+\frac{i_{p-1}+1}{10^{p-1}}\right]$$

сегментларнинг ҳар бири ичида жойлашган бўлади.

Лекин бу сегментлардан сўнггисини яна узунлиги бир-бирига тенг 10 қисмга бўлсак, у ҳолда x ушбу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} i_{p-1}}$ сегментнинг ўнг охири ва $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} i_p}$ сегментнинг чап охири бўлиб қолади, яъни x бўлиниш нуқталардан бири бўлади. Бу ҳолда x нинг p ўнли рақами бир қийматга эга эмас, балки икки i_p-1 ва i_p қийматга эга бўлади ва бу ҳол $p+1$, $p+2$ ва ҳоказо ўнли рақамлар учун ҳам ўринли бўлади.

Шунга мувофиқ x сон $\Delta_{i_1} \ldots i_p-1$ сегментнинг ўнг охири бўлса, у

$$x=n,\ i_1 i_2\ \ldots\ i_{p-1} i_p-1\ 999\ \ldots$$

кўринишда ва x сон $\Delta_{i_1 \ldots i_p}$ сегментнинг чап охири бўлса, у ушбу

$$x=n,\ i_1 i_2\ \ldots\ i_{p-1} i_p\ 000\ \ldots$$

кўринишда ёзилади. Бу эса арифметикадан маълум бўлган элементар фактдир, яъни ҳар қандай $n+\frac{m}{10^p}$ кўринишдаги оддий касрни икки кўринишда ёзиш мумкин.

(Масалан, 0,124999 . . = 0, 125000 . . .).

Демак, ҳар қандай ҳақиқий $x\left(\neq n+\frac{m}{10^p}\right)$ сон биргина ушбу

$$x=n,\ i_1 i_2\ \ldots\ i_p\ \ldots=n+\frac{i_1}{10}+\frac{i_2}{10^2}+\ldots+\frac{i_p}{10^p}+\ldots$$

чексиз каср кўринишида ёзилиши мумкин; агар $x=n+\frac{m}{10^p}$ бўлса, бу ҳолда x ни

$$x = n,\ i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\ i_p - 1\,999 \ldots = n,\ i_1 i_2 \ldots i_{p-1} i_p 000 \ldots$$

икки кўринишда ёзиш мумкин.

Энди, аксинча, ҳар бир чексиз ўнли каср учун биргина ҳақиқий сон мос келишини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, ушбу

$$n,\ j_1 j_2 \ldots j_q \ldots \ (j_k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 9,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{1}$$

чексиз ўнли каср берилган бўлсин. Қуйидаги

$$[n,\ n+1],\ \left[n + \frac{j_1}{10},\ n + \frac{j_1+1}{10}\right],\ \left[n + \frac{j_1}{10} + \frac{j_2}{10^2},\ n + \frac{j_1}{10} + \frac{j_2+1}{10^2}\right], \ldots$$

$$\ldots,\ \left[n + \frac{j_1}{10} + \ldots + \frac{j_q}{10^q},\ n + \frac{j_1}{10} + \ldots + \frac{j_q+1}{10^q}\right], \ldots \tag{2}$$

сегментларни тузамиз.

Математик анализнинг умумий курсидан маълумки, агар Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m сегментлар кетма-кетлиги берилган бўлса ва бу сегментларнинг узунлиги чексиз камайиб борувчи бўлиб, уларнинг катта номерлиси кичик номерлисининг ичида жойлашган бўлса (яъни $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$ бўлса), у ҳолда бу сегментларнинг ҳаммасига кирадиган биргина нуқта мавжуддир. (2) сегментлар кетма-кетлиги учун бу шартларнинг бажарилиши бевосита кўриниб турибди. Шунинг учун (2) сегментлар кетма-кетлигининг ҳаммасига кирадиган биргина нуқта мавжуддир; бу нуқтани x билан белгилаймиз.

Энди x ни чексиз ўнли каср шаклида ёзамиз. Агар j_k рақамларнинг ҳаммаси бирор номердан бошлаб ё 0, ёки 9 га тенг бўлмаса, у ҳолда x биргина усул билан (1) кўринишда ёзилади. Агар $j_p = j_{p+1} = \ldots = 0$ (ёки 9) бўлса, у ҳолда $x = n + \frac{m}{10^p}$ бўлади, яъни x чекли ўнли каср бўлади. Ҳар сафар бу ҳолни ажратмаслик учун чекли ўнли касрнинг икки кўринишидан доимо бирини қабул қилиш мумкин эди.

Юқоридаги мулоҳазаларни баён этишда $[n,\ n+1]$ сегментни ҳар сафар тенг ўн қисмга бўлмай, тенг 2, ёки тенг 3, ёки тенг p (p — натурал сон) қисмларга бўлсак, x ни чексиз иккили, чексиз учли, чексиз p ли касрлар кўринишида ёзишимиз мумкин. Кўп ҳолларда ҳақиқий сонларни чексиз иккили каср кўринишида ёзишдан фойдаланадилар.

60-§. Ўлчовсиз тўплам мисоли

Энди ўлчовсиз тўпламлар мавжудлигини кўрсатамиз ҳамда барча ўлчовсиз тўпламлардан тузилган системанинг қувватини ҳисоблаймиз.

53- параграфга асосан тўғри чизиқнинг барча қисмларидан тузилган тўпламлар системасининг қуввати 2^c га тенг, бу ерда c — континуум қуввати. Ўлчовли тўпламлардан тузилган тўпламлар системасининг қувватини ҳисобласак ҳам худди шу натижага келамиз, яъни қуйидаги теорема ўринли.

60. 1. Теорема. ***Ўлчовли тўпламлардан тузилган тўпламлар системаси М нинг қуввати 2^c га тенг, яъни: $\overline{M} = 2^c$.***

Исбот. Ўлчовли тўпламлардан тузилган система, тўғри чизиқдаги барча тўпламлардан тузилган системанинг қисми бўлгани учун, унинг қуввати 2^c дан катта эмас, яъни:

$$\overline{M} \leqslant 2^c,$$

тескари тенгсизлик $\overline{M} \geqslant 2^c$ эса қуйидаги теоремадан келиб чиқади.

60. 2. Теорема. ***Ўлчови нолга тенг бўлган тўпламлардан тузилган S системанинг қуввати 2^c га тенг.***

Исбот. Юқоридагига ўхшаш, дастлаб

$$\overline{S} \leqslant 2^c$$

тенгсизлик олинади. Тескари тенгсизлик ўринлилигини кўрсатиш учун ўлчови нолга ҳамда қуввати c га тенг бўлган бирор ўлчовли E тўпламни оламиз (бунинг учун, масалан, Канторнинг мукаммал P_0 тўпламини олиш мумкин). E нинг ҳар қандай қисми (ҳар қандай қисмининг ташқи ўлчови ноль бўлгани учун) ўлчовли тўплам бўлиб, ўлчовли нолга тенг. Демак, $2^E \subset S$. Аммо

$$\overline{E} = c \text{ ва } \overline{(2^E)} = 2^c$$

бўлгани учун

$$\overline{S} \geqslant 2^c.$$

Бу ва юқоридаги тенгсизликлар 60. 2- теореманинг исботини беради.

Шу билан 60. 1- теорема ҳам исботланди.

60. 1- теорема кўрсатадики, тўғри чизиқда умуман «қанча» тўплам бўлса, ўлчовли тўпламлар ҳам «шунча». Демак, бу йўл билан ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини аниқлаб бўлмайди.

Шу сабабли биз ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатиш учун бевосита мисол келтирамиз.

60. 3. Теорема. ***Чегараланган ўлчовсиз тўплам мавжуд.***

Исбот. Чегараланган ўлчовсиз тўплам мисоли қуйидагича қурилади. Бунинг учун $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ сегментнинг нуқталари орасида эквивалентлик тушунчасини киритамиз: агар x ва y нинг айирмаси $x - y$ сон рационал бўлса, улар эквивалент дейилади. Бу эквивалентлик 3- § да киритилган эквивалентлик тушунчасининг барча хоссаларига эга. Шунинг учун ўша параграфга асосан $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ сегмент ўзаро эквивалент бўлган элементлардан иборат $K(x)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ синфларга ажралади, бунда $x \in K(x)$ ҳамда турли синфлар кесишмайди. Шундай қилиб, $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ сегмент ўзаро кесишмайдиган синфларга бўлинади. Энди бу синфларнинг ҳар биридан биттадан элемент танлаб олиб, бу танлаб олинган элементлар тўпламини A билан белгилаймиз.

A тўпламнинг ўлчовсиз эканлигини исботлаймиз. $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўпламини номерлаб чиқамиз:

$$r_0 = 0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots$$

A_k билан A тўпламни r_k сонига силжитишдан ҳосил бўлган тўпламни белгилаймиз, бунда агар $x \in A$ бўлса, у ҳолда $x + r_k \in A_k$ ва агар $x \in A_k$ бўлса, у ҳолда $x - r_k \in A$.

Хусусан, $A_0 = A$. A_k тўплам A тўпламдан r_k га силжитиш орқали ҳосил қилингани учун

$$m_* A_k = m_* A = \alpha,$$

$$m^* A_k = m^* A = \beta. \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Дастлаб $\beta > 0$ эканини исботлаймиз. Равшанки,

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Бундан, 18- § га асосан:

$$1 = m^*\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \leqslant m^*\left[\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^* A_k,$$

яъни

$$1 \leqslant \beta + \beta + \beta + \ldots$$

Бундан:

$$\beta > 0. \tag{1}$$

Энди $\alpha = 0$ эканини исботлаймиз. Равшанки,

$$A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$$

ва

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Бундан:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

Бундан эса 18- § га асосан:

$$3 = m_*\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right] \geqslant m_*\left[\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right] \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k$$

Бундан

$$\alpha + \alpha + \alpha + \ldots \leqslant 3.$$

ва

$$\alpha = 0. \tag{2}$$

(1) ва (2) муносабатларни солиштириб

$$m_* A < m^* A$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу A тўпламнинг ўлчовсизлигини кўрсатади. $_*$

Ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатдик. Энди ўлчовсиз тўпламлар «қанча» эканини аниқлаймиз.

60. 4. Теорема. ***Ўлчовсиз тўпламлардан тузилган тўпламлар системасининг қуввати 2^c га тенг.***

Исбот. Ушбу

$$\overline{\overline{H}} \leqslant 2^c \tag{3}$$

тенгсизлик юқоридаги теоремалардаги тенгсизликлар каби исботланади. Тескари тенгсизликни исботлашда қуйидаги леммага асосланамиз.

60. 5. **Лемма.** ***Агар A тўплам ўлчовсиз бўлиб, B тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг йиғиндиси $A \cup B$ ўлчовсиз бўлади.***

Лемманинг исботи. Агар $A \cup B$ ўлчовли бўлганда эди, у ҳолда 18. 2- теоремага асосан $(A \cup B) \setminus B = A$ ҳам ўлчовли бўлар эди. Бу эса лемманинг шартига зид. $_*$

Теореманинг исботига ўтамиз.

60. 1- теоремага асосан ўлчовли тўпламлар системаси M нинг қуввати 2^c га тенг. 60. 3- теоремада тузилган A тўпламга M даги тўпламларнинг ҳар бирини қўшиб, янги L тўпламлар системасини ҳосил қиламиз. 60. 5- леммага асосан L даги тўпламларнинг ҳар бири ўлчовсиз. Демак,

$$L \subset H.$$

Бундан:

$$\overline{\overline{L}} \leqslant \overline{\overline{H}}. \tag{4}$$

Аммо, тузилишига кўра, L система M га эквивалент бўлгани учун

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{L}}.$$

Бундан ва 60. 1- теоремадан

$$\overline{\overline{L}} = 2^c.$$

(1) дан эса

$$2^c \leqslant \overline{\overline{H}} \tag{5}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. (3) ва (5) лар теоремани исботлайди. $_*$

61-§. Кўп ўзгарувчилар функцияларининг Лебег интеграли. Фубини теоремаси

Соддалик учун Лебег интегралини икки ўзгарувчининг функцияси учун аниқлаймиз.

Лебег интеграли тушунчасини киритиш учун аввал текисликда ўлчови нолга тенг тўплам тушунчасини киритамиз. Бирор $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ тўғри тўртбурчакни ва ундан бирор M тўпламни оламиз. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлган чекли ёки саноқли $D_i = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ тўғри тўртбурчаклар билан M тўпламни қоплаш мумкин бўлса M нинг ўлчови нолга тенг дейилади.

D тўғри тўртбурчак сони чекли $D_1, D_2, \ldots, D_m$ тўғри тўртбурчакларга бўлинган бўлсин. D_i ларнинг ҳар бирида ўзгармас сонга тенг бўлган функцияга п о ғ о н а л и ф у н к ц и я дейилади. Агар поғонали $h(x, y)$ функция D_j да h_j га тенг бўлса, у ҳолда бу функция учун Лебег интеграли қуйидагича аниқланади:

$$\int_D h(x, y)\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{m} h_j |D_j|,$$

бу ерда $|D_j|$ сон D_j тўғри тўртбурчакнинг юзи. Энди ихтиёрий функция учун Лебег интеграли 30-§ даги каби берилади. VI бобда бир ўзгарувчи функциясининг Лебег интеграли учун олинган хоссалар икки ўзгарувчининг (ва, умуман n ўзгарувчининг) функцияларига деярли ўзгаришсиз ўтказилади; булар устида биз тўхтаб ўтирмаймиз.

Аммо бу ҳолда муҳим бир янги масала — такрорий интеграллаш масаласи пайдо бўлади.

Икки ўзгарувчининг узлуксиз функциясини икки каррали Риман интеграли иккита бир ўзгарувчининг интеграллари орқали қуйидаги формула бўйича берилади:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Лебег интеграли учун ҳам шунга ўхшаш формула ўринли.

Т е о р е м а (Ф у б и н и т е о р е м а с и). $\varphi(x, y)$ ***функция*** $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ ***тўғри тўртбурчакда жамланувчи бўлсин. У ҳолда: 1) агар бу функцияда y ни танлаб олиб, x нинг функцияси деб қарасак, деярли ҳар бир y учун*** $\varphi(x, y)$ ***функция x нинг жамланувчи функциясидир, 2) ушбу***

$$\int_a^b \varphi(x, y)\,dx$$

интеграл $c \leqslant y \leqslant d$ ***сегментда y нинг жамланувчи функциясидир, 3) ушбу***

$$\iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right\} dy \qquad (1)$$

тенглик ўринли. Агар x ва y ларнинг ўринларини алмаштирсак, ушбу

$$\int_a^b \left\{\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right\} dx = \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Теореманинг умумийлигини камайтирмаган ҳолда $\varphi(x, y)$ функцияни манфий эмас деб олиш мумкин. Бу ҳолда $\varphi(x, y)$ функцияга монотон ўсиб деярли яқинлашувчи поғонали $h_n(x, y)$ функциялар кетма-кетлиги мавжуд. Ушбу

$$g_n(y) = \int_a^b h_n(x, y)\,dx$$

функцияларни киритамиз. Бу функциялар $h_n(x, y)$ функцияларнинг узилиш чизиқларига мос келмаган барча y лар учун аниқланган. $g_n(y)$ функциялар кетма-кетлиги $n \to \infty$ да монотон ўсувчи. Ундан ташқари, поғонали функциялар учун (1) формула ўринли бўлади ва $g_n(y)$ функцияларнинг интеграллари юқоридан чегараланган:

$$\int_c^d g_n(y)\,dy = \int_c^d \left\{\int_a^b h_n(x, y)\,dx\right\} dy = \iint_D h_n(x, y)\,dx\,dy \to$$

$$\to \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad (2)$$

34. 13- теоремага асосан $g_n(y)$ функциялар кетма-кетлиги деярли ҳар бир y да яқинлашувчи. $g_n(y)$ функциялар кетма-кетлиги яқинлашадиган бирор $y = \eta$ ни танлаб оламиз. У ҳолда деярли ҳар бир x да

$$h_n(x, \eta) \to \varphi(x, \eta).$$

Демак, 34. 13- теоремага асосан, $\varphi(x, \eta)$ функция x га нисбатан жамланувчи ва деярли ҳар бир η да:

$$\int_a^b h_n(x, \eta)\,dx \to \int_a^b \varphi(x, \eta)\,dx. \qquad (3)$$

Бундан чиқадики,

$$\int_a^b \varphi(x, y)\,dx \qquad (4)$$

интеграл деярли ҳар бир y учун маънога эга. (2), (3) ва 34. 13- теоремага асосан (4) интеграл x нинг ўлчовли функцияси ва

$$\int_c^d \left\{\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right\} dy = \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

МУНДАРИЖА

49 т.

«ЎҚИТУВЧИ»