МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

Тошкент
«Янги аср авлоди»
2001

ҚУВАСОЙ ТАДБИРКОРЛИК ЎҚУВ ИЛМИЙ
ИШЛАБ ЧИҚАРИШ МАРКАЗИ

МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

(ўқув қўлланма)

Тошкент
«Янги аср авлоди»
2001

Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланмаси сифатида ҚТЎИИЧМ Илмий кенгаши томонидан тавсия қилинган.

Тузувчи: ф.м.ф.н., доцент **А. Юсупова**
Рецензентлар:
И.Неъматов. ф.м.ф.н., доцент **О. Маматқулов.**,

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Иқтисодий масалаларни ҳал қилиш мутахассислар олдига мураккаб масалаларни қўяди. Бу масалалар турли факторларга боғлиқ ҳамда ўзаро боғлиқ бўлиб, улар вақт давомида ўзгариб туради ва ўзаро бир-бирига таъсири ўзгариб туради. Бу ўзгаришлар иқтисодий масалаларга адекват математик моделларни қуришни мақсадга мувофиқ қилиб қўяди.

Математик модел абстракт шаклда проблемани акс эттиради ва бу проблемага боғлиқ турли - туман характеристикаларни ҳисобга олиш имконини беради. Математик моделдаги таҳлил ва ҳисоб-китоб қўйилган масалаларнинг оптимал ечимини танлаш имконини беради.

Ушбу китоб турли математик моделларни ўрганишга, уларни қуриш, иқтисодий масалаларни ечишга тадбиғи, ечимлар методикасига бағишланади. Унда нафақат оптимал ечимни топиш нима учун шу ечимни танлаш асосланади.

1- бобда математик моделларни қуришнинг этаплари-босқичлари, принциплари қараб чиқилади.

Оптималлик критерий (мезони) бўйича математик моделларни синфларга ажратиш, чегараланишлар структураси, номаълум факторларни ҳисобга олиш каби тушунчалар келтирилади.

Кейинги бобларга турли математик моделлар келтирилади. 2-боб чизиқли оптимизация масалалари, учинчи бобда маҳсус структурали моделларга, тўртинчи бобда ночизиқли программалаштириш масалалари, бешинчи бобда оптимал масалалар графлардаги ечими берилган. Олтинчи бобда динамик режалаштириш принципларини ўрганишга бағишланади.

Ҳар бир бобда масаланинг қўйилиши унинг учун математик моделларни қуриш, уни ҳисоблаш усуллари берилган. Математик моделлаштиришни қўллаб оптимал ечими топиладиган иқтисодий масалалар келтирилган.

Бу масалаларга инвестицияларни режалаштиришни оптималлаштириш, реклама фаолиятини ташкиллаш, штатлар рўйхатини тузиш, кабилар киради. Конкрет расчетлар ҳам китобда келтирилган.

Ушбу китоб иқтисодий ва техника олий ўқув юртлари талабалари учун ҳамда иқтисодда математик моделларни қўллашга қизиқувчилар учун мўлжалланган.

I - боб

МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ ОБЗОРИ

1.1. Операцион тадқиқотлар режаси

Математик моделлар биринчи марта Буюк Британияда 30 йилларда мудофаа системаларини ташкиллашда қўлланган. Бу системани ишлаб чиқишга турли мутахассисликларга эга бўлган олимлар жалб қилинган. Системани ишлаб чиқишда душман томоннинг ҳаракатлари аниқ бўлмаган шароитларда иш кўрилган ва шунга мос математик модел қурилган. Бу вақтга келиб биринчи марта «операцион тадқиқот» термини ишлатилган. Бу ҳарбий операцияларни тадқиқ қилишни англатган. Кейинги йиллар давомида операцион тадқиқот ёки жараёнларни тадқиқ этиш мустақил сифатида ривожланиб бормоқда. Бу фан система ва жараёнларни бошқаришда оптимал ечимларни танлашда кенг қўлланмоқда.

Жараёнларни тадқиқ этиш босқичларига:

1. Жараённи кузатиш ва бошланғич маълумотларни йиғиш;
2. Масалани қўйиш;
3. Математик моделни қуриш;
4. Моделни ҳисоблаш;
5. Моделни текшириш ва натижаларни таҳлил этиш. Агар олинган натижалар тажрибани қаноатлантирмаса, у ҳолда 3 босқичга қайтилади, яъни бошқа модел қурилади ёки 2-босқичга қайтилиб масалани қайтадан қўйилади.
6. Тадқиқот натижаларини қўллашлар киради.

Шундай қилиб «жараёнларни тадқиқ этиш интерацион жараён бўлиб, ундаги ҳар бир босқич тадқиқотчини унинг олдида турган масалани ҳал қилишга яқинлаштиради.

Жараёнларни тадқиқ этишдаги асосий ўрин математик моделни қуриш ва уни ҳисоблашга ажратилади.

1.1. 1 - таъриф. Математик модел — бу жараён ёки системанинг ўзида абстракт шаклда маълум маънода иложи борича тўла акс эттирувчи математик муносабатлар системасидир.

1.2. 2.- таъриф. Иқтисодий-математик модел иқтисодий масалани тадқиқ этишга бағишланган математик моделдир.

Жараённи тадқиқ этиш математик моделини қуриш ва уни ҳисоблаш ҳолатни таҳлил этишга ва жараённи бошқаришга оптимал ечимни танлаш ёки танланган ечимни асослашга имкон беради. Проблема мураккаб бўлиб, у кўплаб факторларга боғлиқ бўлган ҳолда математик моделларни қўллаш зарурдир.

Бундай ҳолларда яхши ўйланмаган ва илмий асосланмаган ечимни қўллаш жиддий хато натижаларга олиб келиши мумкин. Бу ерда оптимал ечим дейилганда «умуман» оптимал ечимни тушуниш керак эмас. Ихтиёрий ечим бир ёки бир неча критерийлар бўйича оптимал бўлади.

Ҳозирги кунда математик моделлаштириш иқтисодиётнинг турли соҳаларида иқтисодий таҳлил қилиш, прогнозлаш ва оптимал ечимни танлаш учун қўллашмоқда. Бу соҳаларга ишлаб чиқаришни режалаш ва оператив бошқариш, меҳнат ресурсларини бошқариш, заҳираларни бошқариш, ресурсларни тақсимлаш, объектларни режалаштириш, инвестицияларни тақсимлаш кабилар киради.

1.2 Математик моделларни қуриш синфлари ва принциплари

Математик моделни қуриш босқичларига қуйидагилар киради:

1. Мақсадни танлаш;

2. Модел параметрларини аниқлаш, яъни тадқиқотчи таъсир олмайдиган факторларни аниқлаш;

3. Бош ўзгарувчиларни танлаш. Бу ўзгарувчилар қийматларни ўзгартириш натижасида кўзланган мақсадга эришилади. Бош ўзгарувчиларнинг қийматлари масаланинг ечими бўлади;

4.Ечим аниқланган соҳаларни аниқлаш, яъни бош ўзгарувчиларни қаноатлантирувчи ечим соҳаларини топиш;

5.Номаълум факторларни, яъни тасодифан ёки аниқмас тарзда ўзгарувчи миқдорларни аниқлаш;

6. Бош ўзгарувчилар, параметрлар ва номаълум факторлар орқали мақсадни ифодалаш, яъни (баъзида самарадорлик мезони ёки масаланинг оптималлиги деб аталувчи) мақсад функцияни тузиш.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

модел параметрлари

x — бош ўзгарувчилар

X — ечимлар соҳаси

ξ — тасодифий ёки аниқмас факторлар

W — мақсад функция

$$W = W(x, \alpha, \xi)$$

Киритилган терминлар ёрдамида математик модел қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$W = W(x, \alpha, \xi \to \max(\min)$$

Масалани ечиш - бу шундай $x^* \in X$ оптимал ечимни топишки, берилган а фиксирланган параметрларда ва ξ номаълум факторларни ҳисобга олган ҳолда W имкони борича максимал (минимал) бўлсин.

Шундай қилиб, оптимал ечим маълум мезонга кўра бошқа ечимлардан (устунроқ) яхшироқ ечимдир.

Математик моделлар қуришнинг асосий принциплари:

1. Моделни аниқ ва ўрганилаётган жараёнга ўхшашлигини текшириш. Бунда биринчидан бошланғич маълумотлар аниқ бўлиши, иккинчидан олиниши керак бўлган натижаларнинг аниқ бўлиши зарур;

2. Математик модел жараёнининг муҳим қирраларини ўзида акс эттириши ва жараённи ўта соддалаштирмаслиги зарур;

3. Математик модел реал жараёнга тўла адекват бўлмайди, шунинг учун уни ўрганишга бир неча моделларни татбиқ этиш зарур. Агар бу моделлар ечимлари бир-бирини инкор этмаса тадқиқотни тугалланган деб ҳисобласа бўлади. Агар ечимлар ўртасидаги фарқлар катта бўлса, масала қайта қўйилиши лозим;

4. Ихтиёрий мураккаб система ҳар доим кичик ва ички таъсирларга нисбатан ўз хосса ва структураларини танлаб олиши, ўзгартирмаслиги зарур.

Математик моделларни қуйидагича синфларга ажратиш мумкин.

(1.1.1. - расм)

Математик моделлар бир критерийли ёки кўп критерийли бўлиши мумкин.

Номаълум факторларни ҳисобга олиш ёки олмаслигига қараб моделлар стохастик, детерминантлашган ва аниқмас элементлари бор моделларга бўлинади.

Стохастик моделлар номаълум факторлар бу тасодифий миқдорлар бўлиб, бу миқдорларнинг тақсимот функциялари ва статистик характеристикалари (математик кутилма, дисперсия ўрта квадратик оғиш) маълум бўлади.

Стохастик моделларга

а) стохастик программалаш моделлар кириб, бу моделларда ё мақсад функцияга ё чегараланишларга тасодифий миқдорлар киритилади. Тасодифий жараёнлар назарияси моделлари вақтга боғлиқ жараёнларни ўрганиб, бу жараёнлар тасодифий равишда ўзгартиради.

Оммавий хизмат назарияси моделлари, улар кўп каналли хизмат кўрсатиш системаларини ўрганади.

Шунингдек, стохастик моделларга фойдалилик назарияси моделлари ҳам киради.

Ўйинлар назарияси моделларида масала ўйинлар кўринишида бўлиб, унда бир неча ўйинчи қатнашади, уларнинг мақсадлари турлича бўлади.

Бу ўқув қўлланмасида детерминантлашган моделлар ўрганилади.

Детерминантлашган моделларда номаълум факторлар ҳисобга олинмайди.

Бундай моделлар ёрдамида кўплаб иқтисодий масалалар ечилади. Мақсад функция ва чегараланишлар кўринишига қараб детерминантлашган моделлар чизиқли, ночизиқли, динамик ва график моделларга бўлинади.

Чизиқли моделларда мақсад функция ва чегараланишларнинг бош ўзгарувчилари чизиқли бўлади. Чизиқли моделлар математик моделлаштиришнинг энг ривожланган бўлими бўлганлигидан кўп масалаларни шу усулга келтиришга ҳаракат қилинади.

Ихтиёрий кўринишдаги чизиқли моделларнинг стандарт ечимлари мавжуд.

Ночизиқли моделларда мақсад функция, чегараланишлар чизиқли бўлмайди. Ночизиқли моделларда ҳисоб-китоб қилишнинг ягона усули мавжуд эмас. Мақсад функция ва чегараланишларнинг кўринишига қараб ечим усуллари ҳам турлича бўлади. Баъзи ночизиқли масалаларни ечиш усуллари умуман мавжуд эмас. Бундай ҳоллардан бир неча чизиқли моделларга келтирилади.

Динамик моделларнинг статик чизиқли ва ночизиқли моделлардан фарқи, уларда вақтни ҳисобга олинишидир. Динамик моделларда оптималлик мезони, умуман олганда, функция бўлмаслиги ҳам мумкин. Динамик моделлардаги ҳисоб - китоблар анча мураккаб бўлиб, ҳар бир конкрет масала учун ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш лозим.

График моделлар масалани график усулда ифодалаш қулай бўлган ҳолларда ишлатилади.

1.3. Ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ишлаб чиқариш буюртмалари таркибини аниқлаш учун тузиладиган математик моделларга мисоллар

Қуйидаги масалани кўриб чиқамиз.

Корхона ишлаб чиқариш буюртмаси ва уни тайёрлашнинг оптимал таркибини аниқланг.

Математик моделини қуриш

1. Мақсад:

а) Маҳсулотни реализация қилишдан олинган даромадни максималлаштириш;

б) Маҳсулот таннархини минималлаштириш;

в) Маҳсулотни тайёрлашга кетган вақтни минималлаштириш.

2. Моделнинг параметрлари:

1) m — ишлаб чиқариш воситалари бирлиги;

2) n — корхона ишлаб чиқариш маҳсулотлар сони;

3) T_i - i — ишлаб чиқариш воситасининг ишлаб

$(i = 1, m)$

чиқариш фонди

e_k - i - типдаги бирлик ҳисобидаги ишлаб чиқариш воситасининг k - маҳсулот ишлаб чиқаришнинг турли усуллари сони.

t - i - типдаги ишлаб чиқариш воситаси ёрдамида l-усул ёрдамида k та маҳсулот ишлаб чиқариш кетган вақти

$i = \overline{1, m}, \qquad l = \overline{1, l_k}, \qquad k = \overline{1, n}$

a_K- k турадиган маҳсулотга бўлган талаб

$k=\overline{1\, n}$

S — тайёр маҳсулотни сақлайдиган омборнинг ўлчамлари.

C_{kj} — k ma номдаги маҳсулотни i- усул билан тайёрлашнинг таннархи.

C_{ok} - k — ma номдаги маҳсулотни ишлаб чиқаришнинг талаб даражасидаги таннархи.

$k=\overline{1\, n}$

$П_k$ — k — турдаги маҳсулотни реализация қилишдан тушган даромад. ($k=\overline{1,n}$)

3.Бош ўзгарувчилари:

X_{ke}- p - усул билан k - турдаги маҳсулотлар сони ($k=1,n$, $l=1,l_k$)

4. Ечимлар соҳасини аниқлаш:

$$\sum_{k=l}^{n}\sum_{l=1}^{l_i} x_{kl} l_{kl}^{i} \le T_i$$

i=1,m — ишлаб чиқариш воситалари ишига бўлган чегараланишлар,

$\sum_{k=l}^{n}\sum_{l=1}^{l_i} x_{kl} \le S$ — омбор ўлчамлари бўйича чегараланишлар.

$\sum_{j=1}^{k} x_{kl} \ge a_k, k=\overline{1,n}$ — талаб бўйича чегараланишлар.

$$\frac{\sum_{l=1}^{l_n} C_{ke} X_{ke}}{aK} \le C_{ok} \quad k=\overline{1,n}$$

таннарх бўйича чегараланишлар

$x_{Kl} \ge 0, k=\overline{1,n}, i=\overline{1l_k}$

5.Самарадорлик мезонини моделнинг бош ўзгарувчилари ва параметрлар орқали ифодалаш

1) Фойдани максималлаштириш

П — умумий фойда

$$П = \sum_{k=1}^{n} П_k \sum_{l=1}^{l_k} X_{kl} \to \max \ (1.3,6)$$

2) Таннархни минималлаштириш чегараланишлар бўлмаган вақтда мезон сифатида олинади.

$$C = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{l_k} C_{kl} X_{kl} \to \min \quad (1.3,7)$$

3) а)Станок-соатларда ифодаланган маҳсулотни ишлаб чиқаришга кетган умумий вақтни минималлаштириш

$$T = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{l_k} C_{Kl} x_{Kl} \to \min \quad (1.3,8)$$

б) Соатларда ифодаланган маҳсулот ишлаб чиқаришга кетган умумий вақтни минималлаштириш.

(1.3,9) да станоклар бир вақтнинг ўзида иш бошлайди ва параллел ишлайди деб фараз қилинади.

Шундай қилиб 3 та бир критерийли чизиқли моделлар қурилади:

(1.3,1) -(1.3,6) — фойдани максималлаштириш;

(1.3.1.)-(1.3.3.) - (1.3.5),(1.3.7) — маҳсулот таннархини минималлаштириш;

(1.3.1)-(1.3.5),(1.3.8), (1.3.1)-(1.3.5.)-(1.3.5) (1.3.9) - лар маҳсулотни тайёрлашга кетадиган вақтни минималлаштириш.

Агар фойда ишлаб чиқарувчи маҳсулотлар сонига ночизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда

$$П = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{l_k} f(x_{kl}) \to \max \quad (1.3,10)$$

бу ерда f ночизиқли функция бўлса, у ҳолда ночизиқли оптимал моделни

(1.3.1.),-(1.3.5.),(1.3.10)

(1.3.1.),-(1.3.5.),(1.3.6) (1.3.8) ва

(1.3.1.),-(1.3.5.),(1.3.6) (1.3.9) — бу моделлар кўп критерийли моделлардир.

Бу масалаларнинг ечими сифатида 4 пунктда ифодаланган чегараланишларни қаноатлантирувчи ва оптималлаш критерийсини экстремумга эришишни таъминловчи қийматлардир.

X_{kl} ; $K=1,n$ $l=1$ l_k

2 -боб

ЧИЗИҚЛИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАР

Кўплаб иқтисодий масалаларни чизиқли математик моделларни тузиш мумкин.

Анъанавий оптимал чизиқли математик моделлар чизиқли программалаш моделлари деб аталади. Бу термин 30 - йилларда пайдо бўлган бўлиб, у вақтда компьютерлар учун программалаш ривожланган эди.

Чизиқли программалаш деганда чизиқли режалаш, яъни чизиқли структурали масалалар ечими бўлган оптимал режани топиш тушунилади. Бу китобдаги «Ночизиқли программалаш», «динамик программалаш» термини юқоридаги каби тушунилади.

2.1. Чизиқли программалашда масаланинг қўйилиши

Умумий ҳолда чизиқли программалашда масала қуйидагича қўйилади: $f=\sum_{j=1}^{n} CX$ (2.1.1)

Функцияни максималлаштириш (минималлаштириш)
Бу ерда чегараланишлар.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i ; (i=\overline{1,m_1}) & (2.1.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge b_1 \quad ,(i=\overline{m_1+1,m_2} & (2.1.3) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad ,(i=\overline{m_2+1,m}), & (2.1.4) \end{cases}$$

бу ерда x_j, $j=\overline{1,n}$ — бош ўзгарувчилар ёки масаланинг ечими l, a_{ij}, $i=\overline{1,n}$ — параметрлар.

f — мақсад функция ёки масаланинг самарадорлиги критерийси (мезони).

Бу ерда функция ҳам, чегараланишлар ҳам чизиқли. Масала n та ўзгарувчи ва m та чегараланишларга эга.

Чизиқли программалаш масаласини ечиш деганда $x_j(j=\overline{1,n})$ ўзгарувчиларнинг (2.1.2)-(2.1.4) шартларни қаноатлантириб (2.1.1) мақсад функцияни максималлаштирувчи (минималлаштирувчи) қийматларни топиш тушунилади.

(2.1.1) — мақсад функция (2.1.2)-(2.1.4) - чегараланишлар кўринишига қараб чизиқли программалаш бир неча турларга бўлинади: умумий чизиқ бир неча турларга бўлинади: умумий чизиқли масала транспорт масаласи ва х.к.з.

Бу бобда умумий чизиқли масала кўрилади. Чизиқли модел билан ечилувчи иқтисодий масалага тўхталамиз.

2.1.1- масала . Корхона уч хил маҳсулот ишлаб чиқариб, уни буюртмачи ва бозорга чиқаради. Буюртмачиларга 1- турдаги маҳсулотдан 1000 та , 2 - турдаги маҳсулотдан 2000 та ва 3- маҳсулотдан 2500 та тайёрланиши керак.

Маҳсулотни тайёрлашга 4 хил хом ашё зарур, 1 та маҳсулотга кетадиган хом ашёнинг умумий ҳажми, ҳар бир турдаги маҳсулотни ишлаб чиқаришдан олинган даромад 2.1.1. жадвалда келтирилган.

2.1.1-жадвал

ресурслар турлари	маҳулот турлари			жаъми ресурслар
	1	2	3	
1	500	300	1000	25000000
2	1000	200	100	30000000
3	150	300	200	20000000
4	100	200	400	40000000
Фойда	20	40	50	

а) Буюртмачилар талабини қондириш,

б) товарларни ортиқча туриб қолмаслиги,

в) Максимал фойда олиш учун ишлаб чиқаришни қандай ташкиллаш зарур?

Математик моделни қуриш

1.2.Пунктда келтирилган босқичларни бажарамиз:

1) мақсад - максимал фойда олиш;

2) Параметрлар сифатида масала шартида келтирилган барча миқдорлар олинади;

3) Бош ўзгарувчилар : x_1 - 1 турдаги маҳсулотлар сони.

x_2- 2 - турдаги маҳсулотлар сони;

x_3 - 3 - турдаги маҳсулотлар сони.

4) Чегараланишлар: Буюртмачиларни таъминлаш, ресурслар захирасидагидан тортиб кетмаслиги, бозордаги бу маҳсулотларни талаб даражасидан ортиб кетмаслиги.

Демак,

$$\begin{cases} x_1 \ge 1000 \\ x_2 \ge 2000 \\ x_3 \ge 25000 \\ x_1 \le 2000 \\ x_2 \le 3000 \\ x_3 \le 5000 \\ 500_{x_1} + 300_{x_2} + 1000_{x_3} \le 25000000 \\ 100_{x_1} + 200_{x_2} + 100_{x_3} \le 30000000 \\ 150x_1 + 300_{x_2} + 200_{x_3} \le 20000000 \\ 100_{x_1} + 200_{x_2} + 400_{x_3} \le 40000000 \end{cases} \qquad (2.15)$$

(2.1.5.) да биринчи бўлиб учта тенгсизлик буюртмачилар талабига мос келади.6,7,8 -тенгсизликлар бозор талабини, қолган 4 та тенгсизлик эса захиралар бўйича чекланишларни ифодалайди.

5) Мақсад функция кўриниши:

$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3$ max (2.1.6)

Формуладаги P даромадни англатади, P нинг максимал қийматини топиш керак.

(2.1.5),(2.1.6) — берилган масаланинг математик моделидир, бунда мақсад функция ва чегараланишлар чизиқлидир. Демак, бу модел чизиқли модел бўлади.

2.2. Иқтисодиётда чизиқли программалаш

Турли маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун турли хом ашё зарур. Ҳар бир хом ашёнинг умумий захираси, ҳар бир турдаги маҳсулотга ҳар бир турдаги кетадиган хом ашё миқдори, ҳар бир турдаги маҳсулотни реализация қилишдан келадиган даромад берилган. Барча маҳсулотларни реализация қилишдан тушадиган жами даромадни топинг.

Математик моделни қуриш

1.2. пунктда берилган босқичлар бўйича:

1) Мақсад - даромадни максималлаш;

2) Параметрларни аниқлаш мақсадида белгилашлар киритамиз:

n — маҳсулот турлари сони,

m — хом ашё турлари сони,

b_i- i турдаги хом ашё захираси

$$i=\overline{1,m}$$

a_{ij} - j-кўринишдаги 1 та маҳсулотни ишлаб чиқаришга i - типдаги хом ашё сони,

$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}$$

P_j - j - кўринишдаги 1 та маҳсулотни реализация қилишдан тушадиган даромад;

3) Бош ўзгарувчилар x_j $(j=\overline{1,n})$ - j - кўринишдаги маҳсулот;

4) Чегараланишлар. Бош ўзгарувчиларнинг манфий қиймат қабул қила олмаслиги ва хом ашёнинг чекланганлиги.

Шундай қилиб, энди математик моделни қуриш мумкин.

$$P=\sum_{j=1}^{n} P_j X_j \rightarrow \max \quad (2.2.1)$$

$$a_1 x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1;$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots a_{2n} x_n \leq b_{2;};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots a_{mn} x_n \leq b_2;$$
$$x_j \geq 0; j=1,n.$$

(2.2.1) ва (2.2.2.) қўйилган масаланинг математик моделидир. Уни ҳисоблаш натижасида оптимал режа, яъни ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча ишлаб чиқариш зарурлиги келиб чиқади.

Инсон учун зарур бўлган озиқ - овқатларнинг минимал миқдорини топиш

Сотувда мавжуд озиқ - овқатлар ассортименти берилган. Ундаги ҳар бир маҳсулот турли фойдали (витамин ва калорийли) моддаларга эга, ҳар бир инсон учун зарур бўлган фойдали моддалар минимуми мавжуд. Минимал маблағ кетадиган озиқ-овқатлар нормасини аниқлаш зарур.

Математик моделни қуриш

1) Мақсад озиқ - овқатлар миқдорини минималлаш;

2) Масаланинг параметрлари.

n — сотувда бўлган турли маҳсулотлар сони,

m — инсонга зарур бўлган фойдали моддалар сони,

a_{ij} - j — маҳсулотда бўлган i - фойдали модда миқдори i=1,m ; j=1,n

b_i — инсон учун зарур бўлган i- модда миқдори i=1,m

C_j - j - маҳсулот бирлигининг баҳоси j=1,n.

3) Бош ўзгарувчилар x_j - j — маҳсулот миқдори;

4) Ечимлар соҳасининг чегараланганлигига қуйидагича ифодаланади.

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \le b_2; \\ x_j \ge 0; j = 1,n. \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

5) Оптималлик мезони

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \min \quad (2.2.5)$$

кўринишга эга

(2.2.4),(2.2.5) — чизиқли математик моделдир.

2.2.3. Ишлаб чиқариш воситалари бандлигини оптималлаш

Корхона ўзида бор ишлаб чиқариш воситаларидан фойдаланиб, буюртмани бажариши зарур. Ҳар бир ишлаб чиқариш воситаси қурилма учун; ишчи вақти фонди; ҳар бир турдаги бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш таннархи ва самарадорлиги, яъни ҳар бир турдаги бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришга кетадиган бирлик вақт маълум. Маҳсулот тайёрлашга қурилмалар-воситалар ўртасида шундай тақсимлаш зарурки, бунда барча маҳсулотлар таннархи минимал бўлсин.

Математик моделни қурамиз.

1. Мақсад — таннархни минималлаштириш.
2. Параметрлар:

m — буюртмадаги маҳсулотлар турлари сони,
b - i — кўринишдаги маҳсулот сони,
$i = \overline{1,m}$
n — ускуналар сони,

T_j - j — турдаги ускуналар ишлаш вақти фонди ($j=\overline{1,n}$),
C_{ij} - i — кўринишдаги бирлик маҳсулотни j - кўринишдаги ускуналарда тайёрлашдаги таннархи

$i = \overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$

3. Бош ўзгарувчи X_{ij} ($i = 1,m$; $j=1,n$)сифатида i - кўринишдаги маҳсулотни j- кўринишдаги ускунада тайёрлашга кетган вақт.

4. Чекланишлар:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \le T_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} < T_2 \qquad\qquad (2.2.6) \\ -------------------- \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots x_{mn} \le T_n \\ a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} \le b_1; \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} \le b_{2;}; \qquad (2.2.7) \\ -------------------- \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m_2}x_{m2} + \ldots a_{mn}x_{mn} \le b_m; \qquad (2.2.8.) \\ x_{ij} \ge 0; i = 1,m \qquad j = 1,n. \end{cases}$$

5) Оптималлик мезони

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}x_{ij} \to \min$$

функция орқали берилади. Бу ерда С — умумий таннарх.

(2.2.6) - (2.2.9) - масаланинг чизиқли математик моделидир. У mn та номаълум ўзгарувчиларни (2.2.8)чекланишлари ҳисобга олмаганда m+n та чекланишларга эга.

Моделни ечгандан сўнг ускуналарнинг иш билан оптимал бандлиги учун кетадиган вақт аниқланади.

2.2.4. Бичиш

Материаллар (мато)ни бичишга бир неча кўринишдаги, маълум миқдордаги мато кетади. Бу матолардан турлича кийимлар тикилади ва бунда матолар турли усуллар билан бичилади. Турли усулда матолар бичилганда турли сондаги, турлича таннарга эга бўлган кийимлар олиш мумкин. Умумий таннархи минимал бўлган бичиш усулини аниқлаш талаб этилади.

Математик моделни қуриш.

1) Мақсад - таннархи минимал бўлган бичиш усулини аниқлаш.

2) Параметрлар: n- бичиш учун келтириладиган матоларнинг турлари сони.

d_j -j - ($j=\overline{1,n}$) кўринишдаги мато миқдори

m — тайёрланиши зарур бўлган кийимлар турлари сони

b_i- i — кўринишдаги маҳсулотлар сони ($i=\overline{1,m}$)

l — бичимлар турлари сони

a_{ijk} - k — турдаги бичишдаги j - кўринишдаги бирлик матодан бичилган i - турдаги кийим

($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$)

C_o

C_{jk} кўринишидаги бирлик матони k усулда бичиш таннархи

$j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$

3) Бош ўзгарувчилар x_{jk} сифатида k - усулда j - турдаги бирлик мато миқдори олинади ($j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$)

4) Чегараланишлар: Мато миқдори бўйича чеклашлар (2.2.10), ишлаб чиқилган кийимларга бўлган чеклашлар (2.2.11) ва бош ўзгарувчиларнинг манфий эмаслиги ҳақидаги (2.2.12) чеклашлар

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1l}=d_1;$

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2l}=d_2$ (2.2.10)

;————————————————

$x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nl}=d_n;$

$a_{111}x_{11}+a_{112}x_2+\ldots+a_{nl}x_{nl}=b_1;$

(2.2.12.)

- -

$a_{m11}x_{11}+a_{m12}x_{12}+\ldots+a_{mnl}x_{mnl}=b_m;$

$x_{jk}\geq 0$, $j=1,n$, $k=1,n$ (2.2.12)

5) Оптималлик мезони

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} C_{jk} x_{jk} \to \min \qquad (2.2.13)$$

(2.2.10)- (2.2.13) берилган масаланинг чизиқли математик моделидир. У ўз ичига nl номаълум ўзгарувчи ва n+m чеклашларни олади.

2.2.11. Таннархни минималлаш ўрнига ишлаб чиқариш чиқиндиларини минималлаштиришни олиш мумкин. Бунда ҳар бир хилда матони турли усул билан бичганда чиқадиган қийқимлар миқдори аниқ бўлиши лозим.

2.2.5 Товар - тайёр маҳсулотни реализация қилиш режасини тузиш

Фирма турлича товарларни турли воситаларни (техника ёрдамида, қўл кучи ёрдамида, пул маблагларини ишлатиш ёрдамида) реализация қилади.

Ихтиёрий турдаги бирлик товарни реализация қилишга кетадиган воситалар сони, реализация қилувчи воситаларнинг умумий заҳираси маълум . Фирмага товарларни реализация қилиш (максимал даромад келтирувчи) режани тузиш лозим.

Математик моделни қуриш .

1) Мақсад - даромадни максималлаш

2) Параметрлар.

n — реализация қилиш воситалар турларининг сони.

m- реализация қилиш воситалари турларининг сони

b_i - i — кўринишдаги захиралар, $i = \overline{1.m}$

a_{ij} - j — кўринишдаги бирлик товарни реализация қилишда ишлатиладиган i - восита сони , $i = \overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

P_j - j — кўринишдаги бирлик товарни реализация қилишдан (j=1,n) олинадиган даромад.

3) Бош ўзгарувчилар x_j сифатида, j - кўринишдаги товарлар сони, $j=\overline{1,n}$.

4) Чегараланишлар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ , j = \overline{1,n} \qquad (2.2.14)$$

5) Оптимал мезони

$$P = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max \qquad (2.2.15)$$

бу ерда Р — ялпи даромад

(2.2.14)-(2.2.15) чизиқли математик моделни ҳисоблаш натижасида фирмага максимал фойда келтирувчи реализация қилинувчи товарларнинг керакли сони аниқланади.

2.3. Чизиқли программалаш масалаларини ечишнинг график усули

Агар чизиқли программалаш масаласи(ЧПМ)даги ўзгарувчилар сони 2 та ва чеклашлар тенгсизликлари системаси орқали берилса, у ҳолда ЧПМ ни график усулда ечиш мумкин.

2.3.1 - мисол 2 хил кўринишдаги товарни сотишда 4 хил ресурс ишлатилмоқда . 2.3.1. - жадвалда бирлик товарни реализация қилиш учун ресурс нормалари ҳар бир ресурснинг умумий ҳажми берилган.

Биринчи турдаги бирлик товарни реализация қилишдан келадиган даромад 2 шартли бирликни 2 турдан юридик товарни реализация қилишдан келадиган даромад эса 3 шартли бирликни ташкил қилсин.

Савдо корхонасига товарларни реализация қилишдан максимал фойда келтирувчи оптимал реализация режаси тузилсин.

2.3.1. - жадвал

ресурслар	ресурсларни ишлатиш нормалари		ресурслар умумий миқдори
	1 - хил	2 - хил	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Ечим: Бу (2.2.5) мисолнинг n=2, m=4 бўлган хусусий холи.

Математик модел.

$P = 2x_1 + 3x_2 \max$ (2.3.1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.3.2)$$

кўринишига эга

Бу моделда $x_1 x_2$ - мос ҳолда биринчи ва 2- хилдаги реализация қилинувчи товарлар сони. P — фойда тенгсизликлар системаси ресурслар бўйича чекланишларни англатади.

График усулда ечиш $x_1 x_2$ текисликда тенгсизликлар системасидаги ҳар бир тенгсизлик ярим текисликни англатади. Бу ярим текисликларни аниқлаш учун қуйидаги тўғри чизиқларни қурамиз:

$2x_1+2x_2=12$

$x_1+2x_2 = 8$

$4x_1=16$

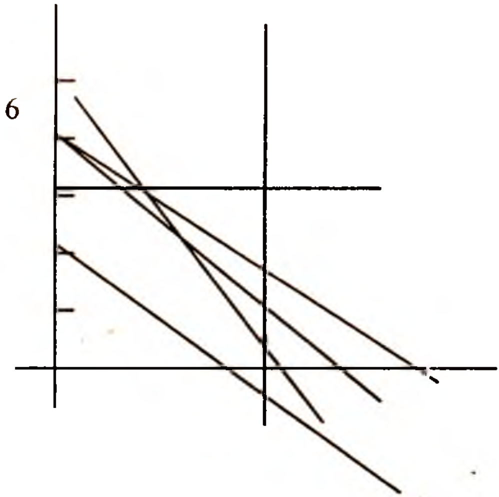
$4x_2=12$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

Координаталар $x_1= 0$; $x_2=0$ бўлган нуқтани қараймиз. У биринчи тенгсизликни $0 \leq 12$ бўлгани учун қаноатлантиради, демак ярим текислик $2x_1+2x_2=12$ тўғри чизиқнинг пастки қисми.

Қолган ярим текисликлар ҳам шу каби аниқланади. ОАВСД - ечимлар соҳасидир.



Р нинг максимал қийматини аниқлаш учун Ечимлар соҳасидаги чегара нуқталарини текширамиз

$2x_1+3x_2 = 6$

$2x_1+3x_2 = 12$

тўғри чизиқларни ясаймиз

f функция n={2,3} нормал вектор йўналишида ўсади. Демак,(0,0) нуқта минимум нуқтасидир. Максимум нуқтани топиш учун тўғри чизиқни n-вектор йўналишида ўзига паралел қилиб суришни, унинг ҳеч бўлмаганда битта нуқтаси ечимлар соҳасига тегишли бўлгунча давом эттирамиз. Бу нуқта x_1 =4, x_2 = 2 нуқтадир. Бу ҳолда

P= 2x4 + 3x4 = 14

Шундай қилиб, 14 шартли бирликдаги максимал фойдани олиш учун биринчи хил маҳсулотдан 4 бирлик, 2 - хил маҳсулотдан 2 бирлик сотиш зарур.

Юқоридаги каби график усулда ечишни

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min) & (2.3.3) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \qquad i = \overline{1,m_1} & \\ ax + ax \ge b_i \qquad i = \overline{m_1 + 1, m} & (2.3.4) \end{cases}$$

кўринишдаги чизиқли математик модел учун қўллаймиз.

Ечиш алгоритми:

1) (2.3.4) тенгсизликларга мос келган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилади ва у x_1 о x_2 текисликда чизилади.

2) Масала шартларини қаноатлантирувчи соҳалар топилади.

3) Соҳаларнинг умумий қисми, яъни m та ярим текисликнинг кесмаси аниқланади.

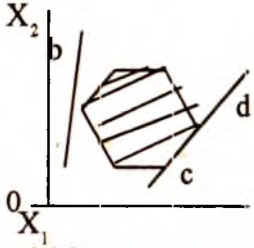
4) Мақсад функциянинг ўсиш (камайиш) йўналиши аниқланади. Буни 2 хил усул билан топиш мумкин.

n(c,c) нормал векторни қуриш мумкин, бунда унинг йўналиши функцияни ўсишини кўрсатса, қарама - қарши бўлган йўналиши функциянинг камайишини кўрсатади. Ёки f=k_1 ва f= k_2 2 та чизиқни қуриб, уларнинг жойлашишига қараб функциянинг ўсиш (камайиш) йўналишини аниқлаш мумкин.

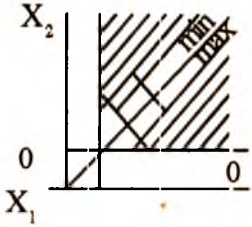
5. Функция максимал ёки минимал қийматга эришадиган нуқтани ечимлар соҳасининг чегаравий нуқта (нуқталари) дан аниқланади.

6. Тўғри чизиқ тенгламаларини биргаликда ечиб нуқтанинг координаталари топилади.

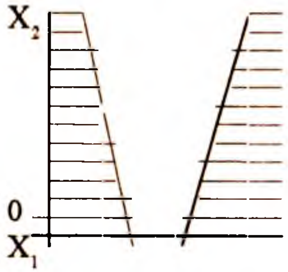
7. Ечимлар соҳаси қуйидагича вариантлар мавжуд. (2.3.2) -2.3.5. - расмлар)



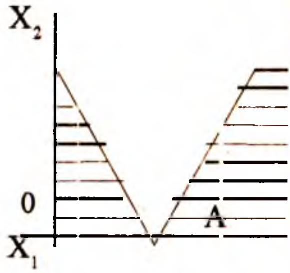
2.3.2-расм ечимлар соҳаси берк тўплам (кўпбурчак)



2.3.3-расм ечимлар соҳаси очиқ тўплам



2.3.4 - расм Ечимлар соҳаси бўш тўплам (2.3.2)чеклаш системаси бирлашмаган



2.3.5-расм Ечимлар соҳаси ягона А нуқта дан иборат.

2.3.2 ва 2.3.3 - расмларда мақсад функция чизиғининг ечимлар соҳаси билан кесишини кўрсатилган. Бунда ечим - ягона В нуқта, ёки чексиз кўп ечим CD тўғри чизиқ (2.3.2-расм)

2.4. Чизиқли программалашнинг асосий масаласи

Чизиқли математик модел ёки чизиқли программалаш масаласи (2.1.1)-(2.1.4) кўринишда бўлади.

Уни ечишнинг энг кўп тарқалган усули Симплекс усулидир. Шуни таъкидлаш керакки, 2-ўзгарувчи қатнашган ҳолда ечимлар соҳаси кўпбурчак бўлса ёки (2.3.2 - расм) n ўзгарувчи қатнашган ҳолда ечимлар соҳаси кўп ўлчовли, кўпқиррали жисмдир. Бу ҳолда ечим одатда кўпқиррали жисмнинг учида жойлашади.

Симплекс усулда ечиш учун аввал масалани каноник (энг содда) кўринишда ёзиш лозим.

$$
\begin{cases}
f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to \max & (2.4.1.) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & \\
\text{———————————} & (2.4.2) \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & \\
x_j \geq 0,\ j = 1, n & \\
 & (2.4.3)
\end{cases}
$$

Бу каноник кўринишдаги ёзувда барча ўзгарувчилар манфий эмас.

Каноник кўринишга келтириш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим.

1) Агар f функциянинг минимумини топиш талаб этилса, f ни f билан алмаштириб - f функциянинг максимуми топилади, чунки

$\min f = -\max(-f)$

2) Агар чеклашлар $\leq$ белгили тенгсизлик бўлса, у ҳолда бу тенгсизликка ўтиш учун тенгсизликнинг чап томонига номанфий ўзгарувчи қўшилади.

3) Агар чеклашда белгили $\geq$ тенгсизлик бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг чап томонидаги манфий бўлмаган қўшимча ўзгарувчи айриш билан тенгсизликдан тенгсизликка ўтилади.

4) Агар масаладаги бирор ўзгарувчи ихтиёрий бўлса, бу ўзгарувчини бошқа 2 та ўзгарувчининг айирмаси билан алмаштирилади.

$x_i \geq 0 \quad x_k' \geq 0$

2.4.1-мисол қуйидаги масалани каноник кўринишда ёзинг: $f=5x_1+2x_2-3x_3$ --min

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ечиш: $f_1=-f=-5x_1-2x_2+3x_3 \rightarrow \min$

Биринчи тенгсизликнинг чап томонидан қўшимча x_4 ўзгарувчини айриб , тенгликка ўтамиз:

$2x_1-3x_2+x_4-x_4=0$

x_3 ўзгарувчини $x_3= x_6 - x_7$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$ ўзгарувчилар билан алмаштирамиз.

У ҳолда

$f=- 5x_1-2x_2+3x_6-3x_7 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_6 - x_7 - x_4 = 10 \\ x_1 - 8x_2 - 2x_6 - 2x_7 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_6 - 7x_7 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

(2.4.1)-(2.4.3) ни чизиқли программалашнинг асосий масаласи (Ч.П.А.М) дейилади.

Асосий масала ҳол доим ҳам ечимга эга бўлавермайди. Биринчидан (2.42) тенгламалар доимо ҳам бирлашган бўлмайди. Иккинчидан (2.4.2) тенгламалар номанфий ечимлар соҳасидан ташқарида биргалашган бўлади.

Учинчидан (2.4.2),(2.4.3) ечими мавжуд, бироқ, ечимлар ичида оптимали йўқ, яъни ечимлар...... сида f чегараланмаган.

Айтайлик (2.4.2) нинг барча тенгламалари чизиқли боғлиқ эмас соҳасида, яъни масала шартини бир-бирига боғланмаган ҳолда ифодалайди. Агар бундай ифодалаш мумкин бўлмаса, ортиқча тенгламани аниқлаш керак.

(2.4.1)-(2.4.3) масалани ечиш учун (2.4.2) да чеклашлари тенгламалар сони унга кирувчи номаълумлар сонидан кичик бўлиши керак; яъни m<n . m = n ,бўлган ҳолда (2.4.2) ягона ечимга эга ва (2.41) функциянинг максималлаштириш маънога эга бўлмай қолади. Агар m > n бўлса, умуман олганда (2.4.2) ечимга эга эмас.

Агар m<n бўлса, (2.4.2) чексиз кўп ечимга эга бўлиб, улардан (2.4.1) ни максималлаштирувчи функцияни танлаб олиш мумкин.

2.5. Симплекс усули

Симплекс усул 2 босқичдан иборат:

1) (2.4.2) (2.4.3) чеклашларни қаноатлантирувчи бошланғич ечимни топиш;

2) (2.4.1) - (2.4.3) масаланинг ечимини кетма - кет яхшилаб , охир-оқибат оптимал ечимни олиш;

(2.4.2) система m та чизиқли боғлиқ бўлмаган тенгламани ўз ичига олади, бу тенгламалар сони системага кўра номаълумлар сонидан кичик. Демак, (2.4.2) системалари m та номаълумга нисбатан масалан $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ га нисбатан ечиб, қолган ўзгарувчилар орқали бу номаълумларни ифодалаш лозим:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} b_i $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ коэффициентлардан фарқланади.

Бу каби ўзгартириш элементлар алгебраик алмаштиришдир. У система ечимини ўзгартирмайди.

Юқоридаги ўзгартиришлардан сўнг (2.4.1)-(2.4.3) қуйидагича кўринишга эга бўлади;

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (2.5.1)$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2.5.2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (2.5.3) \\ x_j \geq 0 \quad , j = \overline{1,n} \end{cases}$$

(2.5.1)-(2.5.3) - кўринишидаги ёзув стандарт ёзув деб аталади.

(2.5.1)-(2.5.3) системани симплекс усулда ечиш алгоритми.

1-қадам Бошланғич ечимни топиш:

m та (базис деб аталувчи) ўзгарувчи танланади. Бунда ҳар бир ўзгарувчи 1 коэффициент билан 1 та тенгламалар 0 коэффициенти билан қолган тенгламаларга кириши керак.

Қолган n-m ўзгарувчилар озод ўзгарувчилар деб аталади. Озод ўзгарувчиларни 0 га тенг деб фараз қилинади, базис ўзгарувчилар эса (2.5.2) системадаги тенгламаларнинг ўнг томонидаги мос сонларга тенг деб олинади.

Айтайлик m та базис ўзгарувчилар $x_1, x_3, \ldots, x_m$ бўлсин. (Агар ўзгарувчилар бошқа тартибда олинса, у ҳолда қайта номерланади). У ҳолда бошланғич ечим

$X_o = \{ x_1=b_1, x_2=b_2, ... ,x_j=b_j . . . , x_m=b_m , x_{m+1}=0, ..., x_n=0\}$ кўринишда бўлади. Агар $b_i \geq 0$ $i = \overline{1,m}$ бўлса бошланғич ечим мавжуд бўлади.

2 - қадам ўтилади.

2 - қадам f функция фақат озод ўзгарувчилар орқали ифодаланади:

$$f = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

бу ерда

$C_j (j = \overline{m+1,n})$ коэффициентлар қиймати (2.5.1) даги C_j коэффициентлардан фарқлидир.

3 - қадам Ечимнинг оптималлиги текширилади.

2.5.3.- жадвал тузилади.

2.5.3- жадвал

Базис ўзгарувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар						Озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	3	-1	1	0	0	15
x_5	1	0	3	0	1	0	7
x_6	-2	8	0	0	0	1	20
f	-5	2	-3	0	0	0	0

Симплекс жадвалнинг чап устунида базис ўзгарувчилар жойлаштирилган, озод ҳадлар устунига эса чеклашларнинг ўнг томонидаги сонлар жойлаштирилган

i- сатр ва j - устун кесишган жойда i- чеклашдаги j- ўзгарувчи олдидаги коэффициент жойлаштирилган.

Охирги сатрда мақсад функциядаги коэффицентлар қарама- қарши ишора билан олинган.

Оптималлик текшириш охирги f - турган сатрдан бошланади. Агар озод ўзгарувчилар олдида турган коэффицентлар номанфий бўлса, у ҳолда олинган ечим оптимал бўлади. Агар бу коэффициентларнинг барчаси мусбат бўлса, олинган ечим ягона бўлади. Агар номанфий коэффициентлардан ҳеч бўлмаганда биттаси 0 га тенг бўлса, у ҳолда масала чексиз кўп ечимга эга бўлади. Агар охирги сатрда ҳеч бўлмаганда 1 та манфий коэффициент бўлиб, бу коэффициент жойлашган устунда бирорта ҳам мусбат элемент бўлмаса, у ҳолда f - мақсад функция ечимлар соҳасида чегараланмаган бўлади. Агар озод ўзгарувчилар олдидаги ҳеч бўлмаса битта коэффицент манфий бўлиб, у турган устунда ҳеч бўлмаганда битта мусбат элемент бўлса, у ҳолда ечим ягона бўлади. 4 - қадамга ўтилади.

4-қадам. Янги ечимни олиш.

4.1. - қадам . Базис ўзгарувчилар ичидан ўзгарувчини танлаш.

Симплекс жадвалнинг охирги сатри кўриб чиқилади. Бу сатрдан абсолют қиймати бўйича энг катта манфий элемент танланади. Бу элемент жойлашган устун ҳал қилувчи устун деб аталади. Айтайлик, бу устун p- устун бўлсин. Бу устундаги x_p ўзгарувчи базис ўзгарувчилар таркибига киритилади.

4.2. - қадам Базис ўзгарувилар орасидан ўзгарувчини чиқариш. Озод ҳадлар устунидаги элементларнинг ҳал қилувчи устун мос элементларига нисбатан топилади. Бунда манфий элементга бўлиш ва 0 га бўлиш натижаларига ∞ тенг . Бу нисбатлар ичидан энг кичиги танланади. Минимал нисбатли элемент жойлашган сатр ҳал қилувчи сатр деб аталади. Айтайлик, у q- сатр бўлсин x_q- q- сатрдаги ўзгарувчи базис ўзгарувчилар сафидан чиқарилади. Симплекс жадвалнинг ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устун кесишмасида жойлашган a_{qp} элемент ҳал қилувчи элемент деб аталади.

4.3. -қадам. Симплекс ўзгаришни бажариш ва янги симплекс жадвалга ўтиш.

Янги симплекс жадвалнинг a_{ij} элементи қуйидаги симплекс ўзгариш орқали ҳисобланади.

$$
\begin{cases}
a_{qj} \; / a_{qp}, i = q & (2.5.4) \\
a_{ij} - a_{ip}a_{qj} \; / a_{qp}, i \neq q & (2.5.5) \\
i = 1, m+1, \qquad j = 1, n+1 \\
a_{m+1\,j} = -c_j \\
a_{in+1} = b_i
\end{cases}
$$

Шундай қилиб, янги симплекс жадвалга ўтишда ҳал қилувчи сатр элементлари ҳал қилувчи элементга бўлинади (2.4.5) симплекс жадвалнинг қолган барча элементлари шу жумладан мақсад функциянинг коэффицентлари ҳам (2.5.5) формула орқали топилади.

Янги ечимлар барча озод ўзгарувчилар 0 га тенг деб олинади, базис ўзгарувчиларнинг ҳар бири эса улар турган сатрдаги озод ҳадларга тенг деб олинади.

Янги симплекс жадвал қурилгандан сўнг 3- қадамга қайтиш зарур.

2.5.1. - Мисол

$F = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$

$$
\begin{cases}
-x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\
-5x_1 - 3x_2 + x_4 = 7 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

Базис ўзгарувчилар x_3 ва x_4 озод ўзгарувчилар x_1, x_2

$X_0 = \{ x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 6, \; x_4 = 7 \}$

Симплекс жадвал қуйидаги кўринишга эга:

2.5.2 - жадвал

Базис ўзга-рувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффицентлар				озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	-1	2	1	0	6
x_4	-5	-3	0	1	7
f	-2	3	0	0	0

f нинг қийматини янада ошириш учун x_1 нинг қийматини ошириш мумкин, чунки, симплекс жадвалнинг охирги сатрдаги x_1 га мос коэффицент манфий чеклашлардан кўриш мумкинки, x_1 ни ихтиёрий қийматини олиб, унга x_3 ва x_4 ни мос ҳолда шундай қолади. Демак f функция қийматини ечимлар соҳасида чексиз ошириш мумкин.

2.5.2. мисол.

F=5x-2x+3x→ max

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + 3x_3 \le 7 \\ -2x_1 + 8x_2 \le 20 \end{cases}$$

Масала шартини каноник ҳолда ёзиш учун х,х,х ўзгарувчиларни киритамиз.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + [_4 \le 15 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 \le 7 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_6 \le 20 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

Бошланғич ечим $x_0\{ x_1=0, x_2=0 , x_3=0 , x_4= 15 , x_5=7, x_6=20\}$

f функция озод ўзгарувчилар орқали ифодаланганлиги учун симплекс жадвални тузиш мумкин.

2.5.3 - жадвал

Базис ўзга-рувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффицентлар						озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	3	1	1	0	0	15
x_5	1	0	-3	0	1	0	7
x_6	-2	8	0	0	0	1	20
f	-5	2	3	0	0	0	0

$F=5x_1-2x_2+3x_3$ дан кўринадиган x_2 нинг қийматини ошириш функцияни камайишига олиб келади, шунинг учун x_2 ни базис ўзгарувчиларга киритишнинг маъноси йўқ. x_1 ва x_3 ни ошириш функция қийматини оширади, бироқ x_1 ни ошириш x_3 га қараганда функцияни кўпроқ оширади (5>3) Демак , x_1 базис ўзгартувчи бўлиши керак. Симплекс жадвалнинг охирги сатридаги абсолют қиймат бўйича энг катта манфий коэффицент (-5) ҳам янги базис ўзгарувчи қайси эканлигини (0,1) кўрсатади.

Min (15/3, 7/1, 20/-2) = (5,7,+∞) = 5

Демак, базисдан x_4 ўзгарувчини чиқариш керак. Ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устунлар кесишмасига турган элемент a_{11} = 3 экан.

Нима учун a_{11} танланганлигини изоҳлайди.

Агар симплекс жадвалдан чеклашларга ўтадиган бўлсак, у ҳолда 1-тенгламада x_1 ни қолган ўзгарувчилар (жумладан (x_4) орқали ифодалаш керак ва x_1 ни 2 ва 3 - тенгламаларга киритиб, бу тенгламалардан x_4 ни чиқариш керак.

Айтайлик базис ўзгарувчилар ичидан бошқа ўзгарувчини, масалан x_5 ни чиқарайлик. Бунинг учун x_1 ни 2 тенгламадан x_5 ва x_3 орқали ифодалаймиз.

$x_1=7- 3x_3 - x_5$

буни 1 - тенгламага қўйиб $3(7-3x_3-x_5)+3x_2-x_3+x_4=15$

$3x_2-10x_3+x_4-3x_5= -6$

x_1 нинг ифодасини 2-тенгламага қўйиб

$-2(7-3x_3-x_5)+8x_2+x_6=70$

$8x_2+6x_3+2x_5+x_6=34$ га эга бўламиз

$$\text{Яъни}\begin{cases}3x_2-10x_3+x_4-3x_5=-6\\ x_1+3x_3+x_5=7\\ 8x_2+6x_3+2x_5+x_6=34\end{cases}$$

га эга бўламиз, x_1,x_4,x_6 — базис ўзгарувчилар десак, $X_1=\{x_1=7, x_2=0, x_3=0, x_4=-6, x_6=34\}$

Бу ечимда $x_4=-6$, бу $x_4\geq 0$ шартни инкор этганлиги учун x_1 йўл қўйиладиган ечим бўла олмайди. Демак, x_5ни базис ўзгарувчиларга киритиш мумкин эмас, x_6 ни базис ўзгарувчилар ичидан чиқариш x_1 ни x_6 орқали ифодалашни англатади.

$-2x_1+8x_2+x_6=20$

$+x_1-4x_2-x_6/2=-10$

янги ечимда x1=-10, x1 ўзгарувчининг номанфий бўлишлиги шартини бузади.

2.6. Иқтисодий -математик моделни ҳисоблашга доир мисол

Корхонада ўз маҳсулотини 4 хил усул ёрдамида яъни телевидения, радио, газета ва эълонларни ёпиштириш усуллари ёрдамида реклама қилади. Реклама фаолиятини таҳлил қилиш фойдани улар мос ҳолда 10, 5 ,7 ва 4 шартли бирликларга орттиришини кўрсататди. Бу бирликлар рекламага сарфланган 1 шартли бирлик ҳисобига олинган.

Реклама учун 50000 бирлик маблағ ажратилган. Корхона маъмурияти телевидение учун умумий маблағнинг 40% дан ортмаган, радио ва газеталар учун 50 фоиздан ортмаган ҳолда сарфлашни режалаштирган.

Корхона реклама фаолиятини қандай режалаштирса максимал фойда олади?

Ечиш. Масаланинг математик моделини тузамиз. Мақсад - фойдани максималлаштириш.

Масала шартидаги барча сонлар параметрлар бўлади.

Бош ўзгарувчилар:

x_1 — телевидениеда қилинадиган реклама учун сарфланадиган маблағлар миқдори.

x_2 — радиода қилинадиган реклама учун сарфланадиган маблағлар миқдори.

x_3 — газетада қилинадиган реклама учун сарфланадиган маблағ миқдори.

x_4 — эълон ёпиштириш йўли билан қилинадиган реклама учун кетадиган маблағ миқдори.

Ечимлар соҳаси:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50000 \\ x_1 \le 20000 \\ x_2 + x_3 \le 25000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

кўринишга эга. У умумий маблағ миқдори бўйича чеклашларни, маблағлар турлари сони бўйича чеклашларни ва бош ўзгарувчиларнинг номанфийлиги чеклашларни ўз ичига олади.

Оптималлик критерийси қуйидагича:

$P = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$ (2.6.2)

(2.6.1.) (2.6.2) - реклама фаолиятини ташкиллашнинг математик моделидир.

(2.6.2.) - Чеклашлар ва мақсад функция чизиқли бўлганлиги учун бу масала чизиқли программалаш масаласидир.

Масалани каноник (энг содда) кўринишга келтириш учун (2.6.1) нинг чап томонига қўшимча ўзгарувчилар киритамиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50000 \\ x_1 + x_6 = 20000 \\ x_2 + x_3 + x_7 = 25000 \qquad (2.6.3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(2.6.1), (2.6.3) масалани симплекс усулда ечиш мумкин.

Ечиш: 1- қадам . Бошланғич ечим:

$X_0=\{x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=50000, x_6=20000, x_7=25000\}$

2- қадам $P = 10x_1+5x_2+7x_3+4x_4$ озод ўзгарувчилар орқали ифодаланди.

3- қадам Ечимнинг оптималлигини текшириш

2.6.1.- симплекс жадвални тузамиз

2.6.1.- жадвал

Базис ўзгарувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффицентлар							озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	1	1	1	0	0	50000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	20000
x_7	0	1	1	0	0	0	1	25000
P	-10	-5	-7	-4	0	0	0	0

Ечим оптимал эмас, чунки охирги сатрда манфий сонлар бор.

4 - қадам. Янги ечимни олиш.

Охирги сатрда абсолют қиймати бўйича сон - 10, 1 - устун ҳал қилувчи устундир, демак x_1 ни базис ўзгарувчиларга киритамиз. Базис ўзгарувчилар сафидан чиқариладиган ўзгарувчини топайлик. Бунинг учун озод ҳадлар устунидаги сонларни ҳал қилувчи устун элементларига бўлиб, улардан энг кичигини танлаймиз:

$$\min\left\{ \frac{50000}{1}; \frac{20000}{1}; \frac{25000}{1} \right\} = 20000$$

Демак 2- сатр ҳал қилувчи сатр экан. Бу x_6 ўзгарувчини базис ўзгарувчилардан чиқариш лозимлигини кўрсатади. Ҳал қилувчи элемент $a_{21} = 1$

Янги симплекс жадвални тузамиз (2.5.4) ва (2.5.5) формулалар бўйича янги симплекс жадвални тузишда учбурчак қоидасини ишлатиш қулай.

Учбурчак қоидаси янги симплекс жадвалнинг элементини топиш учун эски симплекс жадвалнинг ўша жойида турган элементдан бу элемент билан бир устунда турувчи ҳал қилувчи сатр элементини берилган сатрнинг ҳал қилувчи элемент билан бир устунда жойлашган элементига кўпайтмасини ҳал қилувчи элементга нисбати айрилади. Мисол сифатида 2.6.1. жадвалда a_{12} ва a_{35} элементларни топиш учун чизилган учбурчакларни келтириш мумкин.

Шундай қилиб, ҳал қилувчи сатрнинг барча элементлари ҳал қилувчи элементга бўлинади. Қолган элементлар эса учбурчак қоидаси билан топилади.

Янги симплекс жадвал қуйидаги кўринишга эга:

2.6.2. - жадвал

Базис ўзгарувчилар	Узгарувчилар олдидаги коэффицентлар							озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	1	1	1	1	-1	0	30000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20000
x_7	0	1	1	0	0	0	1	25000
P	0	-5	-7	-4	0	10	0	200000

$X_2=\{x_1\}=20000\ x_2=0\ x_3=0\ x_4=0\ x_5=0{:}\ x_6 = 0\ x_1=25000)\}$
$R = 200000$

Янги ечим қуйидаги кўринишга эга:

$X_1=\{x_1=20000\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=30000,\ x_6 = 0,\ x_7=25000\}$

$P_1=200000$

Шундай қилиб, фойда 200000 бирликка ортди. Бу ечим оптимал ечим эмас, чунки охирги сатрда манфий сонлар бор.

Оптималлаштириш жараёнини давом эттирамиз.

Ҳал қилувчи устун — 3 - устундир, чунки абсолют максимал қиймати бўйича манфий сон (-7) шу 3- устун жойлашган.

$$\min\left\{ \frac{50000}{1}; \frac{20000}{0}; \frac{25000}{1} \right\} = 25000$$

Ҳал қилувчи элемент a33=1

Янги симплекс жадвал (2.6.3 - жадвал)га ўтамиз.

2.6.3. - жадвал

Базис ўзгарувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффицентлар							озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	0	0	1	1	-1	-1	5000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20000
x_3	0	1	1	0	0	0	1	25000
P	0	2	0		0	10	7	375000

$X_2=\{x_1=20000\ x_2=0,\ x_3=25000,\ x_4=0,\ x_5=5000,\ x_6 = 0\ x_7=0\}$

P=375000

Фойда ўсди, лекин x_2 ечим оптимал ечим эмас, чунки охирги сатрда ҳали манфий сон бор.

Янги ечимга ўтамиз. Ҳал қилувчи устун — 4 - устундир. Демак, x_4 ўзгарувчи базис ўзгарувчилар сафига киритилади.

$$\min\left\{ \frac{5000}{1}; \frac{20000}{0}; \frac{25000}{1} \right\} = 5000$$

ҳал қилувчи сатр — биринчи сатр ва x_5 ўзгарувчи базис ўзгарувчилар ичидан чиқарилади. Янги симплекс жадвал қуйидаги кўринишга эга.

Базис ўзгарувчилар	Ўзгарувчилар олдидаги коэффицентлар							озод ҳадлар
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	0	0	1	1	-1	-1	5000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20000
x_3	0	1	1	0	0	0	1	25000
P	0	2	0	0	4	-6	3	395000

Охирги ечимнинг оптимал эканлигини симплекс жадвал охиридаги сонларнинг манфий эмаслиги кўрсатиб турибди. Бу ечим ягона, чунки охирги сатр элементларининг барчаси x_2,x_5,x_6,x_7, озод ўзгарувчиларга мос келиб , улар мусбатдир.

$X^*=\{x_1=20000,\ x_2=0,\ x_3=25000,\ x_4=5000,\ x_5=0,\ x_6 = 0,\ x_7=0\}$

$P = 395000$

Шундай қилиб, максимал фойда — 395 00 ни олиш учун маблағни қуйидагича тақсимлаш керак. 20 000 бирлик маблағни телевидениедаги рекламага, 20 000 бирлик маблағни газетадаги рекламага ва 5000 бирлик маблағни эълонлар ёпиштириш орқали бажариладиган рекламага сарфлаш зарур.

Бу ҳолда радио орқали реклама беришни ташкиллаш мақсадга мувофиқ эмас.

Юқоридаги таҳлил бошланғич ечим рўй бериши мумкин, агар бошланғич ечимда манфий сонлар $b_i<0$ бўлса, бошланғич ечимни қуйидаги алгоритм бўйича топилади:

1- қадам f - функцияни озод ўзгарувчилар орқали ифодалаш.

2- қадам. Симплекс жадвал тузиш.

3- қадам . Базис ўзгарувчилар таркибига киритиладиган базис ўзгарувчиларни танлаш.

Бунинг учун абсалют қиймати энг катта манфий сон бўлган сатр ва бу сон ётган ҳал қилувчи устун топилади.

Бу устунда ётувчи ўзгарувчи базис ўзгарувчилар сафига киритилади. Агар қаралаётган сатрда манфий сон бўлмаса, у ҳолда берилган система бирлашмаган бўлиб, бошланғич масала ечимига эга эмас.

4- қадам . Базис ўзгарувчилар сафига чиқариладиган ўзгарувчини танлаш.

Озод ҳадлар устуни элементларининг ҳал қилувчи мос элементларига нисбати топилади. Сурати ҳам махражи ҳам манфий бўлган нисбатлар қаралиб, улардан энг кичиги танланади. Минимал нисбатга мос сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб, бу сатрдаги ўзгарувчи базис ўзгарувчилар сафидан чиқарилади. Ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устун кесишган жойдаги элемент ҳал қилувчи элемент бўлади.

4- қадам (2.5.4) (2.5.5.) формулалар бўйича симплекс ўзгаришлар ўтказилиб, янги симплекс жадвал тузилади.

Агар янги симплекс жадвалда барча ҳадлар мусбат бўлса, у ҳолда 3- қадамга ўтиш мумкин.Акс ҳолда алгоритмнинг 2 - қадамига ўтилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, симплекс усулнинг шахсий компьютерда ишлаб чиқиш учун турли программалар тузилган. Тадқиқотчи фақат чизиқли моделни тузиш ва бошланғич маълумотларни компьютерга киритиш керак, қолган ишларни компьютер маълум секундларда бажаради.

2.7. Чизиқли программалашнинг қўшма масаласи. *Иқтисодий интерпритацияси*

Қуйидаги кўринишдаги чизиқли программалаш масаласини кўриб чиқайлик:

$f = c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n — \max$ (2.7.1)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \quad ,\ldots. x_n \ge 0
\end{cases}
\qquad (2.7.2)
$$

Бу масалада мақсад функцияни максималлаштириш талаб қилинади. Масалада n та ўзгарувчи ва m ≤ та белгили тенгсизлик бор.

Бу масалага қўшма масала қуйидаги кўринишга эга:

$q=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \to \min$ (27.3)

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \ldots. y_m \ge 0
\end{cases}
\qquad (2.7.4)
$$

Қўшма масалада мақсад функцияни минималлаштириш зарур.

Шунингдек ундаги чеклаш n та тенгсизлик ≥ белгили бўлиб, m та ўзгарувчи қатнашади. Мақсад функциянинг коэффицентлари b_1, b_2 ,..., b_m чизиқли масаласининг озод ҳадлари бўлади. Қўшма масаладаги $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — озод ҳадлари бошланғич масаланинг коэффицентлари бўлади. Қўшма масаланинг коэффицентлар матрицаси бошланғич масала матрицасига транспортланган бўлади, яъни сатрлар мос устунларга алмаштирилган.

(2.7.1), (2.7.2.) ва (2.7.3), (2.7.4) — қўшма масалалардир.

Қўшма масалалар учун қуйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема (ягоналилик). Агар қўшма масалалардан бири оптимал ечим x* га эга бўлса, улардан иккинчиси ҳам оптимал ечим y* га эга бўлади. Бунда мақсад функцияларнинг оптимал қийматлари $f^*=f(x^*)$ df $q^*=q(y^*)$ тенг бўлади.

Бу қўшма моделларнинг иқтисодий маъноси қуйидагича:

Айтайлик, x $j=\overline{1,n}$ бош ўзгарувчилар сифатида қандайдир корхона ишлаб чиқарган маҳсулотлар сонини, b_i, j = 1, - сифатида эга і ресурслар сонини (миқдорини) a_{ij}(i=1,m j=1,n) сифатида j кўринишидаги 4 та маҳсулотни тайёрлаш учун сарфланадиган і -типдаги ресурс миқдори.(j-j кўринишдаги 1 та маҳсулотни реализация қилишдан тушадиган даромад . У ҳолда (2.7.1), (2.7.2) модел максимал фойда келтирувчи махсулотни ишлаб чиқаришнинг режаси — модели бўлади.

Айтайлик, корхона ишлаб чиқаришни тўхтатишга ва ресурсларни сотишга қарор қилган бўлсин. $У_i$ орқали і бирлик ресурснинг баҳосини белгилайлик . Ресурсларнинг нархларига қуйидаги чегараланишлар қўйилади: биринчидан бу нархлар жуда юқори бўлмаслиги керак, бу ҳолда ресурсларни сотиб бўлмайди. Иккинчидан ресурсларни сотишдан олинган фойда тайёр маҳсулотни сотишдан келадиган фойдадан кўп бўлиши керак. 1 - шартни (2.7.3) формула, 2- шартни(2.74.) формула ифодалайди. (2.7.4.) тенгсизликларнинг ҳар бирининг чап томонида маҳсулотни тайёрлашга мўлжалланган барча ресурсларни сотишдан тушадиган фойда , ўнг томонида j-маҳсулотни сотишдан тушадиган фойда кўрсатилган.

Шундай қилиб,(2.7.3)-(2.7.4) қўшма масала қуйидаги иқтисодий масалага мос келади: Ресурсларни шундай минимал нархда сотиш зарурки, бунда келадиган фойда тайёр маҳсулотни сотишдан кўра кўпроқ бўлсин. $y_1, y_2, ..., y_m$ ўзгарувчилар қийматларини яширин нархлар деб аталади.

Қўшма масалаларнинг қўйилиши қўшилган иқтисодий масалани чуқурроқ ўрганишга имкон беради.

2.8. Бутун сонли чизиқли программалаштириш. *Гомаро усули*

Агар чизиқли программалаш масаласидаги ўзгарувчилар маҳсулот сонини билдирса, у ҳолда оптимал ечим бутун сонларда ифодаланиши лозим. Бундай масалалар жумласига кўплаб иқтисодий масалалар киради. Масалан корхоналар ўртасида буюртмаларни тақсимлаш, масалали ишлаб чиқариш воситаларнинг бандлиги масаласи, рейслар бўйича транспортлар тақсимоти масаласи. Ялпи ёки кўп сондаги маҳсулот ишлаб чиқаришни режалаш масаласи кўрилаётган бўлса, оптимал ечимни топишда ечим яхлитланади.

Ечими бутун сонларда ифодаланадиган чизиқли программалаш масаласи бутун сонли чизиқли программалаш масаласи (Б.С.Ч.П.М) деб аталади.

(Б.С.Ч.П.М) нинг математик модели қуйидагича:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j - \max(\min) & (2.8.1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = \overline{1, m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = \overline{1, m_2 + 1, m} \end{cases}$$

$$x_j \in Z, \qquad j = \overline{1, n} \qquad (2.8.2)$$

Бу ерда Z — бутун сонлар тўплами.

Б.С.Ч.П.М ни Гомори усулида ҳам ечиш мумкин. Гомори усули 2 босқичдан иборат:

1-босқич. Масалани симплекс усулда ечилади ва ечим бутунлиги текширилади. Агар ечимда ҳеч бўлмаганда битта каср сон бўлса, 2 - босқичга ўтилади, акс ҳолда ҳисоб - китоб тўхтатилади.

2-босқич қўшимча чеклашларни тузиш ва кенгайтирилган масалани симплекс усулда ечиш. Бунда қўшимча шартларда бутун бўлмаган ечимлар тушиб қолади.

Қўшимча чеклашлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) Ихтиёрий ечим уни қаноатлантиради.

2) Ихтиёрий бутун бўлмаган ечим уни қаноатлантирмайди.

Қўшимча шартлар — кесим қандай тузилишини изоҳлаймиз.

Айтайлик, 1 босқич бажарилган бўлсин,

$X=\{ x_1=b_1, X_2=b_2, \ldots, x_i=b_i, \ldots x_m=b_m, x_{m+1}=0, \ldots x_n=0\}$

b_{i} каср сон

i - чеклашни қарайлик

$b_i= x_i+a_{im+1}+a_{im+2}x_{m+2}+\ldots+a_{1n}x_n$

b_i каср сон, ўнг томондаги ўзгарувчилар эса бутун, демак ҳеч бўлмаганда битта a_{ij} $(j=m+1,n)$ каср бўлиши керак.

Чап ва ўнг томондаги чеклашлардан каср қисмини қарайлик.

{ч} орқали ч сонининг каср қисмини белгилайлик . Йиғиндининг каср қисми қўшилувчилар каср қисмларининг йиғиндисидан катта эмас. Шунинг учун

$\{x_i+ a_{im+1}+ a_{im+2}x_{m+2}+\ldots+ a_{in}x_n\}\leq$

$\{x_i\} + \{ a_{im+1}x_{m+1}\}+\ldots+\{ a_{in}x_n\}$

Кўпайтманинг каср қисми бутун сон ва каср сон кўпайтмасидан катта эмас, демак

$\{x_i\} + \{ a_{im+1}x_{m+1}\}+\ldots$

У ҳолда $\{a_{ij}\} = q_{ij}$

$\{b_i\} = q_i$ белгилашлар киритайлик, охирги тенгликдан

$q_{im+1}x_{m+1} + q_{im+2}x_{m+2} + \ldots + q_{in}x_n \geq q_i$

Тенгсизликнинг чап қисмида қўшимча манфий бўлмаган ўзгарувчини айриб

$q_{im+1}x_{m+1} + q_{im+2}x_{m+2} + \ldots + q_{in}x_n = q_i$

$x_{n+1} \geq 0$

Бу қўшимча шартлар ёрдамида берилган масалани кенгайтирдик. Бу масала симплекс усулда ечилади.

Агар симплекс усулда ечилганда бир неча каср ечимлар бўлса, у ҳолда қўшимча чеклашларни каср қисми энг катта бўлган сон учун тузилади.

3- боб

ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШНИНГ МАХСУС МАСАЛАЛАРИ

Чизиқли оптималлаш масалалари ичида махсус тузилишга эга бўлган икки синфни ажратиш мумкин: транспорт масаласи ва

Бу масалалар қуйидаги иқтисодий масалаларнинг оптимал ечимини топишда қўлланилади:

а) юкларни ташишининг оптимал режасини тузиш;

б) ходимларнинг оптимал штат жадвалини тузиш;

В) корхона йўналишини оптималлаш;

г) савдо агентларида оптимал фойдаланиш.

Бу ҳолларда самарадорлик мезони сифатида чизиқли функция, ҳамда чизиқли чеклашлар олинади. Шунинг учун ечимни топиш учун ҳам чизиқли оптималлаш усуллари , жумладан симплекс усул қўлланилади. Аммо бу масалаларнинг махсус тузилиши, уларнинг ечими учун қулай усулларни ишлаб чиқиш имконини беради.

Бу усуллардан баъзиларини келтирамиз.

3.1. Транспорт моделини қуриш

Конкрет масала учун транспорт моделини қурайлик.

3.1.1. Мисол. Маълум иқтисодий зонадаги тўртта корхона битта хом ашё махсулот ишлаб чиқаради. Хар бир корхонанинг бу хом ашёга талаби мос ҳолда: 120,50, 190 ва 110 шартли бирликка тенг. Хом ашёни асосан 3 та таъминотчи етказиб беради. Хом ашё таъминотчиларининг таклифи мос ҳолда 160,140 ва 170 шартли бирликка тенг. Ҳар бир талабгорга хом ашё ихтиёрий таъминотчи томонидан берилиши мумкин. Хом ашёни ташиш нархлари қуйидаги матрица орқали берилган.

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

С матрицанинг i сатр ва j устун кесишган жойида i таъминотчилардан j- истеъмолчига шартли бирлик хом ашёни ташиб беришнинг нархи жойлашган

$i=1,2,3$ $j=1,2,3,4$.

Юк ташишларнинг шундай режасини тузиш керакки, бунда умумий кетган харажат минимал бўлсин.

Математик моделни қуриш:

Мақсад - умумий харажатни минималлаштириш.

Бу мақсадга хом ашё ташишни оптимал ташкиллаш орқали эришилади. Демак, номаълумлар сифатида ҳар бир таъминотчидан ҳар бир истеъмолчига етказиладиган хом ашё миқдорини белгилаш мумкин.

Айтайлик x_{ij} - i- таъминотчидан j истеъмолчига етказиладиган хом ашё миқдори бўлиш.

Масаланинг параметрлари: таъминотчилар ва истеъмолчилар сонлари, талаб ва таклиф миқдори, ташиш нархлари берилган.

Масаладаги чеклашлар — бу хом ашёга бўлган талаб ва таклиф хом ашёнинг барча таъминотчилари таклифларининг йиғиндиси барча истеъмолчилар талаблари йиғиндисидан кичик бўлмаслиги керак. Бу масалада талаб ва умумий таклифга тенг.

$120+50+190+110 = 160+140+170=470$

Ҳар бир таъминотчидан ташиб кетиладиган хом ашё миқдори бу таъминотчидан бор хом ашё етказилган хом ашё унинг талабига тенг бўлиши керак. Охирги чеклаш — барча x_{ij} ўзгарувчиларнинг номанфийлиги шартлари.

Самарадорлик мезони (мақсад функция) сифатида харажатлар жами S, яъни ҳар бир таъминотчидан ҳар бир истеъмолчига етказиладиган хом ашё миқдорининг улар бирлик нархига кўпайтмаси йиғиндиси олинади.

Шундай қилиб математик модел

$S = 7x_{11}\ \ 8x_{12}+x_{13}+2x_{14}+4x_{21}+5x_{22}+9x_{23}$
$+8x_{24}+9x_{31}+2x_{32}+6x_{34}$ — min

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{4}=160 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=140 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=170 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=50 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=190 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=170 \\ 160+140+170=120+50+90+170 \\ xij \geq 0, i=1,2,3, \\ j=1,2,3,4 \end{cases}$$

Мақсад функция ва чеклашлар чизиқли, демак берилган масала чизиқли программалаш масаласи, бироқ у махсус структурага эга бўлиш учун уни транспорт масаласи ёки транспорт модели дейилади..

3.2. Балансланган ва балансланмаган транспорт масаласи

Умумий ҳолда транспорт масаласи қуйидагича: бирор маҳсулот учун n та таъминотчи b_i n та истеъмолчиси бор, i - - таъминотчининг етказиб берадиган маҳсулоти a_i шартли бирликда (i = 1,m), j — истеъмолчининг талаби b_j - шартли бирликда (j=1,n), ташиш учун сарфлар c_i(i=1,m, j=1,n)

Ҳар бир истеъмолчига ҳар бир таъминотчи етказиб берадиган маҳсулот миқдорини , яъни оптимал режани тузиш талаб этилади. Бунда умумий кетган харажат минимал бўлиши керак. Шунингдек, транспорт масаласида ташишларга кетган харажат ташиладиган юкларга чизиқли боғлиқ деб фараз қилинади.

Айтайлик x_{ij} - i - таъминотчидан j- истеъмолчига етказиладиган маҳсулот миқдори бўлсин.

$$\begin{cases} S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min & (3.2.1) \\ \sum_{i=1}^{m} xy \le a_j \qquad i = 1,m & (3.2.2) \\ \sum_{i=1}^{m} xy \ge b_j, \qquad j = 1,n & (3.2.3) \\ \sum_{i=1}^{m} ai \ge \sum_{j=1}^{n} bj & (3.2.4) \\ x_y \ge 0 \quad i = 1,m \qquad j = 1,n & (3.2.5) \end{cases}$$

(3.2.1)-(3.2.5) — транспорт масаласининг умумий кўриниши (ёзуви).

3.2.1-таъриф: (3.2.2)-(3.2.5) чеклашларни қаноатлантирувчи (x_{ij}) - сонлар тўплами (i= 1,m , j= 1,n) га юк ташишлар режаси ёки транспорт масаласи режаси дейилади.

Транспорт масаласининг ечими деганда шундай x_{ij} (i= 1,m; j= 1,n)сонларни топишга айтиладики, бу сонлар (3.2.2) - (3.2.5) шартларни қаноатлантирган ҳолда S мақсад функцияни минималлаштирсин. Бунда (3.2.1) мақсад функция жами харажатларни , (3.2.2) чеклашлар ҳар бир таъминотчидан олиб чиқиладиган маҳсулот миқдори унда мавжуд бўлган маҳсулот миқдоридан ошиб кетмаслигини, (3.2.3) чеклаш ҳар бир истеъмолчига етказиб берилаётган маҳсулот миқдори унинг талабидан ортиб кетмаслигини англатса,(1.4.) чеклаш жами таклиф жами талабдан ортиб кетмаслик шартини англатади.

3.2.2.- таъриф. (3.2.1)-(3.2.5)- балансланмаган транспорт масаласи (модели) деб аталади.

3.2.3- таъриф . (3.2.1)-(3.2.5) да (.3.2.2)-(3.2.2.) чеклашлар тенглик кўринишида бўлса, бу масала балансланган транспорт масаласи (модели) деб аталади.

Ихтиёрий балансланмаган транспорт масаласини балансланган транспорт масаласига келтириш мумкинлигини кўрсатайлик.

Айтайлик , жами таклиф жами талабдан кўп бўлсин, яъни,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.2.6)$$

(n+1) — қалбаки истеъмолчини

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

каби киритамиз. Бу истеъмолчига (барча таъминотчилардан) танилган юк нархи 0 га тенг:

$$C_{\text{шт}+1} = 0, i = 1,m$$

Бу ҳолда (3.2.2)-(3.2.3) тенгсизликлар тенгликка айланади ва

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$$

тенглик қўшилади.

Баъзида ялпи таклиф ялпи талабдан кам бўлади:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.2.7)$$

(3.2.7) чеклашлар бор транспорт масаласи балансланмаган бўлиб, уни балансланган транспорт масаласига келтириш мумкин. Бунинг учун (m+1) — қалбаки таъминотчини киритамиз.

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$$

(m+1) — қалбаки таъминотчидан танилган юк нархи

$C_{m+1j}=0$, $j = \overline{1,n}$

(3.2.7.) тенгсизлик тенгликка

$$\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

айланади.

Балансланган транспорт масаласини кўрайлик:

$$S=\sum_{j=1}\sum ayxy\to \min \qquad (3.2.8.)$$

$$\sum_{j=1} xy=a_j \qquad i=1,m \qquad (3.2.9.)$$

$$\sum_{i=1} xy=b_i \qquad j=1,n \qquad (3.2.10)$$

$$\sum_{j=1} a_j=\sum_{j=1}^{n} b \quad (3.2.11)$$

$x_y\geq 0 \quad j= 1,m \quad j= 1,n \quad (3.2.12)$

Юқорида айтилганидек, бу масалани симплекс усулда ечиш мумкин. Унинг махсус кўриниши (барча чеклаш тенглик кўринишида, номаълумлар олдидаги коэффицент 1 га тенг)га эга.

Транспорт масаласини ечиш учун тарнспорт жадвалини тузамиз. (3.2.1- жадвал)

3.2.1- жадвал

Таъминотчилар тартиби нашри	Истеъмолчилар тартиб номери						таклиф
	1	2	-	j	.....	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}		c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}		c_{2n}	a_2
...	...		...	...	...	...	...
i	c_{11}	c_{12}		c_{ij}		c_{in}	a_j
...	...		...	...	...	...	...
m	c_m	c_{m2}	...	c_{mj}		c_{mn}	a_m
талаб	b_1	b_2	...	b_j		b_n	

Юқори сатрда истеъмолчилар номерлари, чап устунда таъминотчилар номерлари ёзилган. Ўнг устунда ҳар бир таъминотчининг таклифлари, охирги сатрда ҳар бир истеъмолчининг талаблари ёзилган. I- сатр ва j- устун кесишган жойда i- таъминотчидан j- истеъмолчига ташиладиган юк нархи ёзилган.

Транспорт масаласининг ечими 2 босқичдан иборат:

1- босқич .(3.2.9)-(3.2.12) шартларни қаноатлантирувчи бошланғич ечим (x_{ij}) ($i= 1,m$,$j = 1,n$) ни топиш;

2- босқич. (3.2.8) - функцияни минимумга келтирувчи бошланғич ечимни яхшиловчи янги (x_{ij}) ечимни топиш.

Шуни таъкидлаш керакки, транспорт масаласида m n та ўзгарувчи қатнашади. (3.2.9),(3.2.10) чизиқли эркли эмас, чунки уларнинг ўнг томонлари (3.2.11) билан боғлиқ . Транспорт масаласи чеклашларидаги чизиқли эркли тенгламалар сони m+n та эмас, m+ n-1 тага тенг. Шундай қилиб, бу масаладаги номаълумлар сони уларни боғловчи тенгламалардан кўп.

(3.2.9),(3.2.10) тенгламалар системасини m+n-1 та базис ўзгарувчиларга нисбатан ечиш мумкин. Қолган mn-(m+n-1) ўзгарувчилар озод ўзгарувчилардир. Олинган ечим оптималликка текширилади. Агар олинган ечим оптимал бўлмаса, у ҳолда базис ўзгарувчилар таркибини ўзгартирган ҳолда оптимал ечим ахтарилади. Бу из-лаш то оптимал ечим топилгунга қадар давом эттирилади.

3.3. Юк ташишнинг бошланғич режасини аниқлаш

«Шимоли - ғарбий» бурчак, минимал элемент, Фогел усуллари

Қуйи транспорт масаласининг бошланғич ечимини топишнинг уч усули билан танишамиз.

1) «Шимоли - ғарбий» бурчак.

2) Минимал элемент.

3) Фогел методи.

1-усул «Шимоли - ғарбий» бурчак усули

1 - қадам . Транспорт жадвали тузилади.

2 - қадам. Бу жадвални чап юқори (шимоли-ғарбий) бурчакдан бошлаб тўлдирилади. Тўлдириш жараёнида сатр бўйича ўнг устун бўйлаб пастга юрамиз. Биринчи сатр ва биринчи устун кесишган жойда мумкин бўлса маҳсулот минимал сони $x_{11}=\min(a_1,b_1)$ жойлашади. Агар $a_1<b_1$ бўлса, $x_{11}=a_1$, яъни биринчи таъминотчининг таклифи бутунлай ишлатилади. Биринчи сатр ўчирилади ва устун бўйича пастга тушилади. Биринчи сатр ва 2 - сатр кесишган катакчада $x_{21}=\min(a_2,b_1-a_1)$ элемент жойлашади. Агар $b_1-a_1< a_2$ бўлса, у ҳолда $x_{21}=b_1-a_1$ демак, 1 - истеъмолчининг талаби қондирилса 1 - устун ўчирилади ва 2 - сатр бўйича ўнгга юрилади. 2 - сатр ва 2-устун кесишган жойдаги катакча тўлдирилгандан сўнг, 2 - сатрнинг учинчи катакчасига ёки 2 - устуннинг 3-катакчасига ўтилади. Бу жараён талаб ва таклиф тўла қондирилгунча давом эттирилади. Охирги навбатда n - устун ва m - устун ва m-сатр тўлдирилади.

3.3.1-мисол. Транспорт жадвали 3.3.1 бўйича бошланғич ечимни «Шимоли-ғарбий» бурчак усулида топинг.

3.3.1 - жадвал

IV	1	2	3	4	таклиф
1	120^{7}	40^{8}	^{1}	^{2}	160
2	4	10^{5}	130^{9}	^{8}	140
3	9	^{2}	60^{3}	110^{6}	170
талаб	120	50	190	110	

1-катакчада x_{11}= min (160,120)=120. 1-истеъмолчининг талаби қондирилди. 1 - устун ўчирилади. 1 - пунктдан ортган хом ашё 160-120=40 шартли бирликка тенг. 1 - сатр бўйича ўнгга юрамиз: x_{21}= min(160-120,50) = 40 Таъминотчининг таклифи тўла қондирилди. 1-сатр ўчирилади, 2 - истеъмолчига 50 - 40=10 шартли бирлик етишмаяпти. 2 - устун бўйича пастга юрамиз x_{22}= min(140,50-40)=10. 2-устун ўчирилади. 2 - сатр бўйича ўнгга юрамиз x_{23}= min(140 - 10,90) = 130. 2- сатр ўчирилади 3- устун бўйича пастга юрамиз x_{33} = min(170,190-130)=60. 3- истеъмолчининг талаби қаноатлантирилди. 3- сатр бўйича ўнгга юрамиз x_{34}= min(170-160,110) = 110 Жадвал тўлдирилди.) дан фарқли x_{ij}лар сони 6 га тенг . Масаладаги базис ўзгарувчилар сони 3+4-1=6. Қолган 3 4 - 6 = т6 ўзгарувчи озод ўзгарувчилар бўлиб, уларнинг қиймати 0 га тенг.

Бошланғич юк ташиш режаси

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} = 120 & x_{12} = 40 & x_3 = 0 & x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 & x_{22} = 10 & x_{23} = 130 & x_{24} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{23} = 60 & x_{34} = 110 \end{pmatrix}$$

Бу юк ташиш режаси

S=120 7+ 40 3+ 10 5 + 130 9+ 60 3+ 110 6 = 3220.

Бу усул энг содда усулдир. Бу усулда олинган ечим оптимал бўлиши эҳтимоли жуда кичик.

2- усул Минимал элемент усули

3- қадам. Транспорт жадвали тузилади.

2- қадам .Энг кичик элемент жойлашган катакча танланади.

4- қадам. Танланган катакчага «шимоли- ғарбий» бурчак усули бўйича элементлар жойлаштирилади.

5- Агар бу усул бўйича таъминотчи талаби қондирилса, у ҳолда мос сатр ўчирилади. Агар талаб қондирилса мос устун ўчирилади. Агар барча сатр ва устунлар ўчирилса, у ҳолда режа тузилган бўлади. Акс ҳолда 2 - қадамга қайтилади.

3.3.2 - мисол 3.1.1. - мисолдаги транспорт масаласининг бошланғич ечимини минимал элемент усулидан фойдаланиб топинг.

Ечим 3.2.2. - жадвалда берилган

3.2.2. - жадвал

№	1	2	3	4	таклиф	сатрлар бўйича айрималар
1	[illegible]	^{8}	50^{1}	110^{2}	160	1 5 - -
2	120^{4}	20^{5}	^{9}	^{13}	140	1 1 1 1
3	^{9}	30^{2}	140^{3}	^{5}	170	1 1 1 7
талаб	120	50	190	110		
устун	3	3	2	4		
бўйича	3	3	2	-		
айирма-	5	3	5	-		
лар	5	3	-	-		

Минимал элемент $C_{13}=1$, $x_{113}= \min(160,190) = 160/$

1 - сатр ўчирилади, қолган катакчалар учун минимал элемент C_{32}, $x_{32} = \min(170,50) = 50$. 2 - устун ўчирилади. Қолган катакчалар учун минимал элемент $C_{33}=3 x_{33}= \min(170-50,190-160)= 30$. Учинчи устун ўчирилади. Қолган катакчалар учун минимал элемент $c_{34} =6$, $x_{34} = \min(170-50-30,110)= 90$, охирги катак учун

$x_{24}= \min(140-120,110-90)=20$

Юк ташишлар режаси

$$X_1 \begin{pmatrix} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=160 & x_{14}=0 \\ x_{12}=120 & x_{22}=0 & x_{23}=0 & x_{24}=0 \\ x_{31}=0 & x_{32}=50 & x_{33}=30 & x_{34}=0 \end{pmatrix}$$

Бу ташиш умумий нархи

S_2 = 160 1+120x4+20x8+50x2+30x3+90x6=1530

Минимал элемент усули билан топилган ечимдаги умумий нарх (харажат) «шимоли-ғарбий» бурчак усулидагига кўра кам бўлади.

Фогел усули

1- қадам . Транспорт жадвали тузилади.

2- қадам . Ҳар бир сатр ва ҳар бир устун учун энг кичик нарх ва унга яқин бўлган нарх айирмаси топилади.

3- қадам . Энг катта айирмали сатр ёки устундаги энг кичик элементли катакча ажратилади.

4- қадам. Танланган катакча имкони борича талаб ва таклифга қўйиладиган чегараланишларни қаноатлантирувчи сон ёзилади. Сўнг ё сатр ё устун ўчирилади.

Агар барча катакчалар тўлдирилса ёки ўчирилса у ҳолда юк ташишлар режаси тузилган бўлади. Акс ҳолда 2- қадамга қайтилади.

Фогел усулида ноқулай маршрут танланганлиги учун тўланадиган штрафлардан фойдаланилади.

3.3.3.- мисол . 3.1.1.- мисолдаги транспорт масаласининг бошланғич ечимини Фогел усулидан фойдаланиб топинг.

Ечим : Сатрлар бўйича, айирмаларни 3.3.3 жадвалнинг ўнг томонига , устунлар бўйича фарқлар эса 3.3.3-жадвалнинг пастки қисмига ёзилади. Максимал фарқни доирача орқали белгилаймиз.

3.3.3 - жадвал

№	1	2	3	4	таклиф	сатрлар бўйича фарқлар
1	[illegible]	3	50^{1}	110^{2}	160	1 5 - -
2	120^{4}	20^{5}	^{9}	8	140	1 1 1 1
3	^{9}	30^{2}	140^{2}	^{5}	170	1 1 1 7
талаб	120	50	190	110		
устунлар бўйича фарқлар	3 3 5 5	3 3 3 3	2 2 5 -	4 - - -		

1-сатрдаги энг кичик нарх 1. Унга яқин бўлган нарх эса 2 га тенг. Фарқ 2-1-1- га тенг. 2- сатрдаги энг кичик нарх4, унга яқини 2-5,3- сатрдаги энг кичиги 2 га, унга яқини 3. Фарқлар барча сатрлар бўйича 1 га тенг.

3-устунда энг кичик нарх c_{21}=4 . Унга яқин нарх c_{11}=7 c_{11}-c_{21}=7-4=3. 2- устундаги энг кичик нарх C_{32}=2. Унга яқин қиймат C_{22}=5, C_{22}-C_{32}=5-2=3

4-устунда C_{13}=1 , C_{33}=3 C_{33}-C_{13}= 3-1=2

5-устунда C_{14}=2 C_{34}=4 C_{3}-C_{14}=6-2=4

Юқоридаги фарқлардан Энг каттаси 4, 4- устунда жойлашган. Бу устундаги энг кичик нарх C_{14}=2 1- сатрда жойлашган. Бу катакчага мумкин бўлган энг катта қиймат

x_{14}=min (110,160)=110 жойлаштирилади. 4- истеъмолчининг талаби тўла қондирилганлиги учун 4 - устун ўчирилади. Шу амални такроран бажариши:

1- сатр: минимал нарх C13=1. Унга яқин нарх C11=7 C11-C13=7-1=6.

2- сатр: минимал нарх C_{21}=4, C_{22}=5 , C_{22} - C_{21} = 5 - 4 =1

3- сатр: C_{32}=2 , C_{33}=3 , C_{33}-C_{32} =3-2=1

1-устун: минимал нарх C_{21}=4 C11=7, C_{11}-C_{21}=7-4=3

2-устун : C_{32}=2, C_{22}=5 , C_{22}- C_{32}=5-2=3

3-устун: C_{13}=1 , C_{33}=3 , C_{33}-C_{13}=3-1=2

Максимал фарқ 6 га тенг бўлиб, у 1- сатрда жойлашган, 1- сатрдаги минимал нарх C_{13}=1га тенг тенглигидан x13=min(160-110190)=50 ни шу катакчага жойлаймиз, сўнг 1-сатрни ўчирамиз. 1- сатр ва 4-устундан ташқари барча устун ва сатрларга шу амалларни такрорлаймиз.

2-сатр : $C_{21}=4$, $C_{11}=7$, $C_{11}-C_{21}=7-4=3$

3-сатр : $C_{22}=5$, $C_{22}-C_{32}=5-2=3$

1-устун: C_{21} $C_{13}=1$ $C_{33}=3$ $C_{33}-C_{13}=3-1=2$

2-устун: $C_{14}=2$ $C_{34}=6$ $C_{34}-C_{14}=6-2=4$

3-устун:

Максимал фарқ 6 ва у 3-устунда жойлашган. Бу устундаги минимал нарх $C_{33}=3$

$x_{33}=\min(170,190-50)=140$

3-истеъмолчи талаби тўла қондирилди, демак 3-устун ўчирилади.

Ўчирилмаган сатр ва устунлар учун фарқларни яна ҳисоблаймиз:

2-сатр: $C_{21}=4$, $C_{22}=5$, $C_{22}-C_{21}=5-4=1$

3- сатр: $C_{32}=2$ $C_{31}=9$ $C_{31}-C_{32}=9-2=7$

1-устун: $C_{21}-4$ $C_{31}=9$, $C_{31}-C_{21}=9-4=5$

2-устун: $C_{32}=2$ $C_{22}=5$ $C_{22}-C_{32}=5-2=3$

Максимал фарқ 3-сатрда, бу сатрдаги минимал нарх $C_{32}=2$, $x_{32}=\min(170-140,50)=30$

3- таъминотчининг таклифи қондирилгани учун 3-сатр энг кичик ўчирилади, 1 та, яъни 2- сатр қолди. Бу сатрда энг аввало нархли катакча $C_{21}=4$ $x_{21}=\min(140,120)=120$ билан тўлдирилади.

2-таъминотчи таклифининг қолган қисмини бўш катакчага $x_{22}=\min(140-120,50-30)=20$ ни ёзамиз.

Фогел усули билан топилган юк ташиш режаси қуйидаги кўринишга эга:

$$X_1=\begin{cases} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=160 & x_{14}=0 \\ x_{21}=120 & x_{22}=0 & x_{23}=0 & x_{24}=20 \\ x_{31}=0 & x_{32}=50 & x_{33}=30 & x_{34}=90 \end{cases}$$

$$X_1=\begin{cases} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=50 & x_{14}=110 \\ x_{21}=120 & x_{22}=20 & x_{23}=0 & x_{24}=0 \\ x_{31}=0 & x_{32}=30 & x_{33}=140 & x_{34}=0 \end{cases}$$

Бу режа бўйича кетган жами харажат

$S_3= 50x1+110x2+120x4+20x5+30x2+140x3=1430$

$S_3<S_2<S_1$

Шундай қилиб, битта транспорт масаласини турли усуллар билан ечиб, турлича ечимларни олиш мумкин. Бунда юк ташиш харажатлари $S_1=3220$, $S_2=1530$, $S_2=1430$.

Фогел усули кўп меҳнат талаб қилади, бироқ бу усул билан топилган ечим оптимал ечимга яқин ёки оптимал ечимнинг ўзи бўлади.

Бошланғич ечимни топиш усуллари хилма-хил . Бошланғич ечим сифатида (3.2.9)-(3.2.12) шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонларни олиш мумкин.

3.4. Транспорт масаласининг оптимал режаси Потенциаллар усули

3.4.1.- таъриф. Агар n та таъминотчи, n та истеъмолчи қатнашшган транспорт масаласини ечишда тўлдирилган катакчалар сони m+n-1 та бўлса, у ҳолда юк ташишлар режаси - биргаликда бўлади.Агар тўлдирилган катакчалар сони m+n-1 дан кичик бўлса, у ҳолда режа - биргалашмаган бўлади.

Юк ташишлар режаси биргаликда бўлса, у ҳолда ечимнинг қайси бир босқичида талаб ва таклиф биргаликда қаноатлантирилади. Режанинг оптималлигини баҳолаш учун -«қалбаки» харажатлар киритилади «қалбаки» харажатлар дейилганда режа амалга юк ташилмайдиган маршрутлар тушунилади. Қалбаки харажатлар билан ҳаққоний харажатлар солиштирилади, агар барча маршрутлар бўйича «қалбаки» харажатлар реал харажатлардан кўп бўлмаса, у ҳолда бу режа оптимал бўлади.

Агар ҳеч бўлмаганда битта маршрутда «қалбаки» харажатлар реал харажатлардан кўп бўлса, у ҳолда юк ташишлар режасини янада яхшилаш имкони бор. Режага янги маршрутни киритиш дегани базис ўзгарувчиларга янги ўзгарувчини киритишни англатади.

Потенциалллар методи ёрдамида транспорт масаласининг оптимал режасини олиш

1-қадам. «Шимоли-ғарбий»бурчак, минимал элемент Фогел усуллари ёки ихтиёрий усул ёрдамида бошланғич ечимини олиш.

2-қадам . Режанинг биргаликда ёки биргаликда бўлмаганлигини текшириш. Агар олинган режа биргаликда бўлмаса, у ҳолда бўш катакчаларни 0 сони билан шундай тўлдириш керакки, банд катакчаларнинг умумий сони m+n-1 га тенг бўлсин.

3-қадам. Режанинг оптималлигини текшириш.

4-қадам. Таъминотчи ва истеъмолчилар потенциалларини текшириш. Транспорт жадвалининг тўлдирилган катакчалари учун тенгламалар системаси тузилади:

$U_i+V_i = C_{ij}$, бу ерда i — тўлдирилган катак сатри номери, j — тўлдирилган катак устуни номери U_i - i — таъминотчи потенциали ,V_j-j — истеъмолчи потенциали.

C_{ij} -i — пунктдаги j - пунктга ташиладиган юк нархи, Системадаги тенгламалар сони m+n та. Бу системани ечиш учун номаълумлардан ихтиёрий биттаси танланади. Одатда $U_i = 0$ деб олинади. Тенгламалар системасини ечиб U_i ва V_j $i=1,m$ $j=1,n$ потенциалларнинг қийматлари топилади.

3.2- қадам. Бўш катакчалар учун (қалбаки харажатлар) потенциаллар йиғиндиси топилади:

$Cl_{qp}=U_q+V_p$, бу ерда q df p бўш катакча турган сатр ва устун номерлари , U_q-q — таъминотчи потенциали, V_p-p — истеъмолчи потенциали. Cl_{qp} - қалбаки харажатлар.

3.3.- қадам. Оптималликни текшириш

Ҳар бир бўш катакча учун Cl_{qp} ва C_{qp} лар ўртасидаги фарқлар: $\Delta_{qp} = Cl_{qp} - C_{qp}$ тузилади. Агар барча $\Delta_{qp} \leq 0$ бўлса, у ҳолда режа оптимал. Агар ҳеч бўлмаганда битта катак учун $\Delta_{qp} > 0$ бўлса, у ҳолда режани яхшилаш мумкин.

4- қадам . Режани яхшилаш

4.1.- қадам . Базис ўзгарувчилар таркибига киритилувчи ўзгарувчини танлаш. Мусбат айирма максимал қийматга эга бўлган катакча танланади, агар улар бир нечта бўлса, улардан ихтиёрийси танланади. Бу катакчага мос келган ўзгарувчи базис ўзгарувчилар сафига киритилади.

4.2. -қадам . Базис ўзгарувчилар сафидан чиқарилувчи ўзгарувчи танланади

4.1-қадамдаги катакчани танлаш қуйидагича амалга оширилади. Бўш катакчадан бошланиб, шу катакчада тугайдиган цикллар кўпбурчак (жумладан тўртбурчак) шаклида тузилиб, кўпбурчак учлари катакчаларда жойлаштирилади. Бўш катакчага шартли равишда «+» белги қўйилади. Қолган учлардаги катакчаларга «-» ва «+» белги навбати билан қўйилади. Сўнг қайта тақсимлаш қуйидагича амалга оширилади: «-» белгили катакчалардан энг кичик сонлиси танланади, бу сон «+» белгили катакчаларга қўшилади ва «-» белгили катакчалардан айирилади. Бундай қайта тақсимотда умумий баланс ўзгармайди. Бунда бўш катак ҳам тўлади. «-» белгили энг кичик сонли катакча эса бўшайди, унга мос келган ўзгарувчи эса базис ўзгарувчилар сафидан чиқарилади.

Янги режа учун 2-қадамга қайтилади.

3.4.1.- мисол .3.11. мисолдаги транспорт масаласи учун оптимал режа тузинг .

3.41 - жадвал

№	1	2	3	4	Таклиф
1	7	8	160^{-1}	+2	160
2	120	5	9	20	140
	4			8	
3	9	50 2	30 3	90	170
				6	
Талаб	120	50	190	110	

Тўлдирилган катакчалар сони 4+3-1=6 га тенг, яъни берилган режа бузилмаган (айнимаган) таъминотчилар ва истеъмолчилар потенциалларини аниқлаш учун $U_i+V_j=C_{ij}$ тенгламалар системасини тўлдирилган катакчалар учун аниқлаймиз.

$U_1+U_3=1$ $\quad U_1=0$ $\quad V_1=0$

$U_2+U_1=4$ $\quad U_2=4$ $\quad V_2=0$

$U_2+V_4=8$ $\quad U_3=2$ $\quad V_3=1$

$U_3+V_2=2$ $\quad V_4=4$

$U_3+V_3=3$

$U_3+V_4=6$

Бўш катакчалар учун фарқларни топамиз

$\Delta_{11}= (U_1+V_1) - C_{11}=(0+0)-7 = - 7$

$\Delta_{12}= (U_1+V_2) - C_{12}=(0+0)-8 = - 8$

$\Delta_{14}= (U_1+V_4) - C_{14}=(0+4)-2 = - 2$

$\Delta_{22} = (U_2+V_2) - C_{22}=(4+0)-5 = -1$

$\Delta_{23} = (U_2+V_3) - C_{23} = (4+1) -9 = -4$

$\Delta_{31} = (U_3+V_1) - C_{31} = (2+0) -9 = -7$

Мусбат фарқ $\Delta_{14}=2$ натижа олинди. 1 - сатр ва 4- устунни тўлдирамиз. Улар кесишган катакчадан бошланиб, шу ерда тугайдиган циклни тузамиз. Циклнинг учи сифатида (3.4.0,(3.3),(1,3)-1 - ўринда сатр номери, 2- ўринда устун номери туради. (1.4.) катакчага «+», (3.4) катакчага «-» (3,3), катакчага «+»,(1.3) «-» қўйилади Маҳсулот сонини қайта тақсимланади. «-» белгили энг кичик сон жойлашган катакча (3.4) даги сон $x_{34}=90$ дир. «-» белгили катакчалардан 90 айирилиб, «+» белгили катакчаларга 90 қўшилади. Янги (3.4.2) жадвални ҳосил қиламиз.

№	1	2	3	4	Таклиф
1		^{8}	70^{-1}	90^{+2}	160
2	120^{4}	$^{+5}$	^{9}	20^{8}	140
3	^{9}	50^{2}	120^{+3}	^{6}	170
Талаб	120	50	190	110	

Янги режа айнимаган режадир. Унинг оптималлигини текширамиз.

$U_1+V_3=1$	$U_1=0$	$V_1=-2$
$U_1+V_4=2$	$U_2=6$	$V_2=0$
$U_2+V_1=4$	$U_3=2$	$V_3=1$
$U_2+V_4=8$		$V_4=2$
$U_3+V_2=2$		
$U_3+V_3=3$		

Мусбат фарқ $\Delta_{22}=1$ (2.2) катакчани тўлдирамиз. Циклга (2.2), (3.2),(3.3),(1.3),(1.4) (2.4),(2.2) катакчалар киради «-» белгили катакчалардаги минимал сон $x_{24}=20$ дир. Бу сонни қайта тақсимлаш натижасида .3.4.4 - жадвални ҳосил қиламиз.

3.4.3- жадвал

№	1	2	3	4	Таклиф
1	^{7}	^{8}	50^{1}	110^{2}	160
2	120^{4}	20^{5}	^{9}	^{8}	140
3	^{9}	30^{2}	140^{3}	^{6}	170
Талаб	120	50	190	110	

Олинган айнимаган режанинг оптималлигини текширамиз:

$$\begin{array}{lll} U_1+V_3=1 & U_1=0 & V_1=-1 \\ U_1+V_4=2 & U_2=5 & V_2=0 \\ U_2+V_1=4 & U_3=2 & V_3=1 \\ U_2+V_2=2 & & V_4=2 \\ U_3+V_2=2 & & \\ U_3+V_3=3 & & \end{array}$$

Қуйидаги айирмаларни тузамиз.

$$\Delta_{11}=(U_1+V_1)-C_{11}=-1-7=-8$$
$$\Delta_{12}=(U_1+V_2)-C_{12}=0-8=-8$$
$$\Delta_{22}=(U_2+V_3)-C_{22}=6-9=-3$$
$$\Delta_{24}=(U_2+V_4)-C_{23}=7-8=-1$$
$$\Delta_{31}=(U_3+V_1)-C_{31}=1-9=-8$$
$$\Delta_{34}=(U_3+V_4)-C_{34}=4-6=-2$$

Барча айирмалар манфий , демак олинган режа оптимал.

$$X^*=\begin{bmatrix} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=50 & x_{14}=110 \\ x_{21}=120 & x_{22}=20 & x_{23}=0 & x_{24}=0 \\ x_{31}=0 & x_{32}=30 & x_{33}=140 & x_{34}=0 \end{bmatrix}$$

Бу режа Фогел усули билан устма-уст тушади.

Харажатлар:

$S_*=50x1+110x2+120x4+20x5+30x2+140x3=1430$

3.5. Транспорт моделларига олиб келинадиган иқтисодий масалалар

Бу параграфда транспорт моделлари орқали оптимал ечимлари топиладиган бир неча иқтисодий масалалар келтирилади.

3.5.1. Ишлаб чиқариш воситаларини (қурилмаларини) оптимал тақсимлаш

ı та турли қурилмаларни n та ишчи участкаларига тақсимлаш лозим. I- кўринишдаги бирлик қурилманинг j-участкадаги самарадорлиги P_{ij} ($i=1,m$, $j= 1,n$), j- участканинг қурилмага эҳтиёжи b_j ($j=1,n$) га тенг, i- кўринишдаги қурилма захираси a_i га тенг ($i=1,m$). Қурилмаларни шундай тақсимлаш зарурки, ялпи самарадорлик энг максимал бўлсин.

Ечим . Бу масала транспорт масала бўлиб, самарадорлик ишлатиладиган қурилмаларга чизиқли боғлиқ бўлади. Бу масалада таъминотчи сифатида турли қурилмалар, истеъмолчи сифатида ишчи участкалари олинади.

Таклиф сифатида қурилмалар захираси, талаб сифатида қурилмаларга ишчи участкаларида бўлган эҳтиёж тушунилади.

X_{ij}-j- ишчи участкаларига мўлжалланган j - кўринишдаги бирлик қурилмалар сонидир.

Ушбу масаланинг математик модели:

$$P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} X_{ij} \rightarrow \max$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad ,i = 1,m; \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \qquad ,j = 1,n; \\
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \\
x_{ij} \geq 0, i = 1,m \qquad j = 1,n
\end{cases}
$$

Қурилган модел балансланган.Агар қурилмалар захираси ва унга бўлган талаб тенг бўлмаса балансланган моделга ўтиш 32-$ кўрсатилган.

Бу масалада мақсад функция P ни максималлаштириш талаб қилинади. Стандарт транспорт масаласига ўтиш учун P функцияни P'=-P га алмаштириш ва P' функциянинг минимумини топиш талаб этилади.

$$
P' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} -P_{ij} X_{ij} \rightarrow \min
$$

Транспорт жадвалида бу ҳолда нархлар ўрнига $P_{шо}$ самарадорлик қарама-қарши ишора билан олинади.

3.5.2. Фирмадаги штатлар сонининг оптималлигини текшириш

Фирма бўш ўринларга ходимларни олмоқда . Фирмада ҳар бир группасида b_i вакант ўрни бўлган n та гуруҳга эга. Вакант ўринларни эгаллаш учун номзодлар тест синовларини топшириш учун m та гуруҳга бўлинадилар, ҳар бир гуруҳда a_i тадан номзод бор. I- чи гуруҳдаги номзодни j- мансабни эгаллаш учун ўқитишга c_{ij}

харажат сарфлаш талаб қилинади. (Хусусан баъзи $c_{ij}=0$, яъни номзод вакант ўринга тўла мос келади ёки $c_{ij}=\infty$, яъни номзод бу вакант ўринга умуман мос келмайди.).

Номзодларни вакант ўринларга шундай тақсимлаш керакки, ходимларни ўқитишга кетадиган харажатлар минимал бўлади.

Ечиш: Айтайлик, номзодларнинг умумий сони вакант ўринларга тенг бўлсин. (Агар ундай бўлмаса, 3.2- даги каби ўзгаришлар қилиш керак). Бу масала транспорт моделига мос келади. Таъминотчилар сифатида вакант ўринлар гуруҳи олинади. Таклиф сифатида (номзодлар сони) ҳар бир гуруҳдаги номзодлар сони, талаб сифатида ҳар бир гуруҳда вакансиялар сони олинади. Харажатлар сифатида ходимларни қайта тайёрловга кетадиган харажатлар олинади.

Математик модел қуйидаги кўринишга эга:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=\overline{1,m}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i, j=\overline{1,n}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j; \\ x_{ij} \geq 0, i=1,\overline{m}, j=1,n \end{cases}$$

Бу масала транспорт масаласи ечиш усуларидан фойдаланиб ечилади.

3.6 Тайинланувлар ҳақидаги масала

n та иш ва уларни бажаришга n та талабгор бор. i — талабгор j — ишни бажаришга кетадиган харажат C_{ij}- (ij=1,n) га тенг. Ҳар бир талабгор фақат битта ишни бажариши мумкин ва ҳар бир ишга фақат битта талабгор қўйилади. Талабгорларни ишлар бўйича шундай тақсимлаш лозимки, бунда кетадиган харажат минимал бўлсин.

Берилган масалани қуйидагича ифодалайлик . Айтайлик x_{ij}- ўзгарувчи бўлиб, у i- талабгор j- ишни бажарганда 1 қиймат қабул қилади, акс ҳолда эса 0 қиймат қабул қилади. У ҳолда ҳар бир талабгор фақат 1 та ишни бажаради деган шарт.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,n$$

билан ифодаланади.

Ҳар бир ишни фақат битта талабгор бажаради деган шарт эса

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

билан ифода этилади. Мақсад функция

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

кўринишга эга. Бу функцияга фақат $x_i \neq 0$ га мос келувчи C_{ij}(i,j=1,n) лар киради.

Бу масаланинг математик модели

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \to \min \quad (3.6.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,m}; & (3.6.2) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}; & (3.6.3) \\ x_{ij} \in \{0,;1\}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}; & (3.6.4) \end{cases}$$

Бу масалани ечиш дегани x_{ij} нинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (3.6.2) - (3.6.4) шартларни қаноатлантирган ҳолда (3.6.1) функцияни минималлаштирсин. (3.6.1)-(3.6.4) масала чеклашлар ва мақсад функция чизиқли бўлганлиги учун бу масала чизиқли программалаш масаласи бўлиб, у симплекс усулда ечилиши мумкин. Шунингдек (3.6.1)-(3.6.4) масала транспорт масаласи бўлиб, ундаги чеклашларнинг ўнг томони 1 га тенг, ўзгарувчилар эса фақат 2 та қиймат қабул қила олади, холос

3.7. Венгер усули

3.6. Пунктдаги масалани ечиш учун 3.7.1 - жадвални тузамиз.

3.7.1 - жадвал

№	1	2	...	j	...	n
1	C_{11}	C_{12}		C_{1j}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}
...	...	...	...	...	...	...
n	C_{in}	C_{n2}	...	C_{nj}	...	C_{nn}

Чап устунда талабгорлар номерлари, юқори сатрда ишларнинг номери ёзилган, i- сатр ва j- устун кесишган жойда талабгорнинг j- ишни бажаришга кетадиган харажати i- жойлашган .

Венгер усулда қуйидаги принципга амал қилинади: масалан ечимнинг оптималлиги сатр(устун) элементларининг бир хил микдорга камайишдан ўзгармайди. Ечим оптимал деб ҳисобланади, агар барча шу йўсинда ўзгартирилган харажатлар $C_{ij} \geq 0$ бўлиб шундай x_{ij} сонлар тўпламини топиш мумкин бўлсаки,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} = 0$$

Ушбу усул алгоритми қуйидаги қадамлардан иборат.

1-қадам.Ҳар бир сатрда 0 ларни ҳосил қилиш. Бунинг учун сатрдаги энг кичик сон сатрнинг барча сонларидан айирилади.

2-қадам . Ҳар бир устунда 0 ларни ҳосил қилиш учун ҳам устундаги энг кичик сон устуннинг барча сонларидан айирилади.

3-қадам. Оптимал ечимни излаш. 0 лар сони энг кам сатр олинади. 1 та нул белгиланади. Сўнг барча қолган 0 лар ҳамда белгиланган 0 ётувчи устундаги 0 лар ўчирилади.

Шу каби амаллар барча сатрлар учун бажарилади. Агар белгиланган 0 лар сони n бўлса, у ҳолда ечим оптимал бўлади, акс ҳолда 4 - қадамга ўтилади.

4-қадам. Барча 0 ларни ўз ичига олувчи сатр ва устунларнинг минимал сонини топиш.

Бунинг учун

1) Белгиланган нул бўлмаган барча сатрларни белгилаш.

2) Белгиланган сатрда ётувчи 0 ли катакчалар бор устунларни белгилаш.

1) Ҳеч бўлмаганда 1 та белгиланган устунда жойлашган белгиланган 0 ли катакча жойлашган барча сатрларни белгилаш.

2),3) амаллар белгиланган 0 лар қолмагунча давом эттирилади. Сўнг белгиланмаган. Сатр ва белгиланган устунларнинг ҳар бири ўчирилади.

Бу қадам мақсади - барча нулларни ҳеч бўлмаганда бир марта кесиб ўтувчи горизонтал ва вертикал тўғри чизиқларни энг кам сонда чизиш.

5- қадам. Баъзи 0 ларнинг ўрниларини алмаштириш

Тўғри чизиқлар ўтказилган катакчалардан энг кичик сон жойлашганини танлаш. Ўчирилмаган устунлардаги ҳар бир сондан танланган сонни айириш, ўчирилган сатрлардаги барча сонларга танланган сонни қўшиш. Бажарилган бу амал оптимал ечимни ўзгартирмайди. Шунинг учун 3 - қадамдан бошлаб цикл яна қайта бажарилади.

3.7.1-мисол . Институт тўртта тадқиқот ишни бажариш учун буюртма олди. 1- проект натижалари 2 - проект учун, 2-проект натижалари 3- проект учун, 3- проект натижаси 4- проект учун зарур. Проектларга илмий раҳбари сифатида тўртта олим номзодлари кўрсатилган. Ҳар бир олим проектни реализация қилишга ўзи учун керакли вақтни баҳолади.

Кетадиган вақт матрицаси.

$$T=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

i- сатр ва j - устун кесишган жойда j - проектни i- олим қанча вақтда бажара олиши кўрсатилган. Бу ерда вақт бирлиги сифатида ой олинган. Ҳар бир проектни бажариш учун шундай илмий раҳбарни танлаш кераки, барча проектни бажариш учун минимал вақт кетсин.

Ечиш. X_{ij} ўзгарувчини қуйидагича киритамиз:

$$X_{ij}=\begin{cases}1, & \text{агар } j\text{- проект } i\text{- проект раҳбар бўлса ;}\\ 0, & \text{акс ҳолда}\end{cases}$$

Мақсад функция

$$C=3x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+8x_{14}+2x_{21}+4x_{22}+4x_{23}+5x_{24}+4x_{31}+7x_{32}+2x_{33}+8x_{34}+9x_{41}+7x_{42}+3x_{43}+8x_{44} \to \min$$

кўринишга эга.

Ушбу масалани венгер усулида ечамиз. Бу жадвалнинг i-сатр ва j-устун кесишган жойида j-проектни i- олим томонидан бажариш учун кетадиган вақт t_{ij} ёзилган ҳар бир сатрда минимал элементни танлаб уни 3.7.2 - жадвалнинг ўнг устунига ёзамиз.

3.7.2.- жадвал

№	1	2	3	4	
1	3	7	5	8	3
2	2	4	4	5	2
3	4	7	2	8	2
4	9	7	3	8	3

Ҳар бир сатрдаги элементлардан шу сатр минимал элементини айириш натижасида янги 3.7.3 жадвалга ўтамиз. Бу жадвалнинг охирги сатрига ҳар бир устуннинг минимал элементини ёзамиз.

№	1	2	3	4
1	0	4	2	5
2	0	2	2	3
3	2	5	0	6
4	6	4	0	5
	0	2	0	3

Минимал элементни ҳар бир устун элементларидан айириш натижасида 3.7.4 - жадвал ҳосил қиламиз.

3.7.4.- жадвал

№	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	$\cancel{0}$	0	2	$\cancel{0}$
3	2	3	0	3
4	6	2	$\cancel{0}$	2

нуллар(0) сони энг кам бўлган сатрларни белгилаймиз. Улар биринчи, учинчи ва тўртинчи сатрлар бўлиб, уларда 1 тадан 0 бор. 1 - устундаги 0 ни ўчирамиз. Бунинг маъноси, биринчи олим 1- проектнинг илмий раҳбари этиб тайинланса, 2- олим 1-проектнинг раҳбари бўла олмаслигини англатади. 3- сатрдаги 0 ни белгилаймиз ва 4 - сатр 3- устунда жойлашган 0 ни ўчириш 4- олимнинг 3 - проектга илмий раҳбар бўла олмаслигини англатади.

2-сатрдаги ихтиёрий битта, 0 белгилаймиз Айтайлик 2 - устундаги 0 ни белгилаб, 4- устундаги 0 ни ўчирамиз. Бу ўчириш 2 - олим 2 - проект раҳбари бўлганлиги учун у 4- проект раҳбари бўла олмайди.

Белгиланган нуллар сони 3 та , яъни ечим тўла эмас, Шунинг учун алгоритмнинг 4-қадамига ўтамиз.

Барча нулларни ўз ичига олувчи сатр ва устунлар шундай тўпламини олайликки, уларда сатр ва устунлар сони минимал бўлсин (3.7.5 - жадвал)

3.7.5.- жадвал

№	1	2	3	4
1	0	0	2	2
2	$\cancel{0}$	2	2	$\cancel{0}$
3	2	3	0	3
4	6	2	$\cancel{0}$	2

бирорта ҳам белгиланган 0 ли бўлмаган 4 - сатрни белгитлайлик. 4 - сатрдаги ўчирилган 0 3- устунда ётганлиги учун бу устунни ҳам белгилаймиз, сўнг 3 - устундаги ўчирилган 0 ли 3- сатрни ҳам белгилаймиз. Қолган катакчалардаги минимал элемент 2 га тенг. Бу сонни ўчирилмаган (1-,2-,4-_) устунлардаги сонлардан айирамиз. Натижада 3.7.6.- жадвални ҳосил қиламиз.

№	1	2	3	4
1	~~-2~~	0	2	0
2	-2	-2	2	-2
3	~~0~~	1	0	1
4	4	0	~~0~~	0

энди 2 сонини ўчирилган сатрлардаги ҳар бир элементга қўшамиз ва натижада 3.7.7. жадвални ҳосил қиламиз.

3.7.7.- жадвал

№	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	~~0~~	0	4	~~0~~
3	~~0~~	1	0	1
4	4	~~0~~	~~0~~	0

3.7.7жадвалдаги 0 ни яна белгилаймиз. Бу белгилаш тўла, чунки унда ўчирилган 0 лар сони 4 га тенг. У ҳолда ечим қуйидаги кўриниш олади:

1-олим 1 - проект илмий раҳбари бўлиб тайинланди.

$X_{11}=1$

мос ҳолда 2 - олим 2- проектнинг $x_{22}=1$, 3- олим 3-проект $x_{33}=1$ ва 4-олим 4-проектнинг илмий раҳбари этиб тайинланди. Тўртала проектни бажаришга кетадиган вақт:

$C=3+4+2+8=17$

Бу ечим ягона ечим эмас. Агар 2-сатрда аввал 4- нулни эмас, балки 2-нулни белгиласак, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

3.7.8.- жадвал

№	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	$\cancel{0}$	0	4	$\cancel{0}$
3	$\cancel{0}$	1	0	1
4	4	0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$

1- олим 1-проектнинг илмий раҳбари $x_{11}=1$,

2- олим 4-проектнинг илмий раҳбари $x_{24}=1$

3- олим 3-проектнинг илмий раҳбари $x_{33}=1$

4- олим 2-проектнинг илмий раҳбари $x_{42}=1$

Проектни бажариш вақти эса ўзгармади.

$C=3\ \ 1+5\ \ \ \ \ 1+2\ \ \ 1+7\ \ \ 1=17$

Шундай қилиб 2 та оптимал ечим топилди.

Венгер усулидаги алгоритмда барча устунларни барча сатрлар билан алмаштирилса, натижа ўзгармайди.

3.8. Иқтисодий масалаларни ечишда қўлланилиши

Юқоридаги масалада илмий тадқиқот ишлари учун илмий раҳбарни тайинлашнинг оптимал ечими топилган эди. Шу типдаги ечимларни яна қатор бошқа иқтисодий масалаларни ечишга қўллаш мумкин.

3.8.1. Бозорни оптимал тадқиқ этиш

Бозорни ўрганувчи гуруҳга n та турли жойдан маълумотларни олиш зарур. Унинг ихтиёрида n та кун бўлиб, ҳар бир кунда 1 тадан жойда a_j $(j=1,n)$ та сўровларни ўтказиш ният бор. Ҳар бир жойда маваффақиятли сўров ўтказиш эҳтимоли p матрица билан берилган. Матрицалиги p_{ij} элементи i- кунда j- жойда муваффақиятли сўров ўтказиш эҳтимолини англатади $(i=1,n\ ,\ j=1,n)$

Ечиш: $r_{ij}=p_{ij}a_j$ миқдорни киритамиз. Бу миқдор i-кун j-жойда ўтказилган муваффақиятли сўровлар сонини англатади

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{агар } i \text{ кун } j \text{ жойда сўров ўтказилса} \\ 0, \text{ акс ҳолда.} \end{cases}$$

Масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга эга:

$$R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \in \{0;1\}, i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}; \end{cases}$$

R функция сўровларнинг умумий сонини англатади. Уни максималлаштириш зарур.

1 ва 2- чеклашлар 1 кун давомида фақат битта жойда сўров ўтказиш мумкинлигини англатади. Бу масалани венгер усулида ечиш учун қарама - қарши функцияга ўтилади ва k_{ij} ларнинг қиймати қарама- қарши ишора билан олинади.

3.8.3. Савдо агентларидан оптимал фойдаланиш

Савдо фирмаси ўз маҳсулотларини n та турли шаҳарларда сотади. b_j- орқали j- шаҳар (j=1,n) аҳолисининг сотиб олувчанлик имконияти шартли бирликда белгиланган. Маҳсулотларни фирманинг n та агенти тарқатади ва ҳар бир агентни фақат 1 та шаҳарга юбориш мумкин. i- агентнинг профессионал даражаси a_i(i=1,n) га тенг деб олиб, фирманинг маҳсулотларини сотишдан максимал фойда олиш учун ўз агентларини шаҳарлар бўйича қандай тақсимлаш кераклигини топиш зарур.

$C_{ij}=a_i b_j$ параметрни киритамиз. У j -шаҳардаги i- агентнинг товарларни сотиш имкониятини англатади. Бош ўзгарувчилар x_{ij}, $i=1,n$, $j=1,n$ ни

$$X_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ агар i - агент j - шаҳарга жўнатилган бўлса} \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$$

каби киритамиз.

Бу масаланинг математик модели

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i=\overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j=\overline{1,n}; \\ x_{ij} \in \{0;1\}, i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n}; \end{cases}$$

Биринчи ва иккинчи чеклашлар ҳар бир шаҳарга фақат битта агент юбориш мумкинлигини, шунингдек, 1 та агент 2 та шаҳарда ишлай олмаслигини англатади. Бу ерда С — мақсад функция сифатида барча шаҳарлардаги барча агентларнинг товарларни сотиш имкониятлари йиғиндиси олинади.

4- боб

НОЧИЗИҚЛИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАР

4.1. Ночизиқли программалаш масаласининг қуйилиши

Умумий ҳолда ночизиқли программалаш масаласида (Н.П.М) қуйидагича:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ — } \max(\min) & (4.1.1) \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i \text{ , } i=\overline{1,m_1} & \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_i \text{ , } i=\overline{m_1+1m_2} & \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \text{ , } i=\overline{m_1+1m_2} & (4.1.2.) \end{cases}$$

бу ерда x_1-Н.П.М нинг ечими ёки бош ўзгарувчилар $j=\overline{1,n}$

b_i- фиксирланган параметрлар, $j=1,m$

$f_1,q_i,(j =1,n)$ - n ўзгарувчили функциялар. Агар f ва q_i лар чизиқли бўлса, у ҳолда (4.1.1.) (4 1.2) чизиқли программалаш масаласи бўлади.

Ночизиқли программалаш масаласининг ечими дегани - x_j $j=(1,n)$ бош ўзгарувчиларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар(4.1.2) чеклашларни қаноатлантирган ҳолда f функцияни максималлаш (минималлаш) тирсин.

Ночизиқли программалаш масаласини чизиқли программалаш масаласидан фарқи ,улар учун ягона ечим йўли йўқлигидадир.

Мақсад функция (4.1.1) нинг кўринишига қараб, (4.1.2) - чеклашларнинг кўринишига қараб бир неча махсус усуллар ишлаб чиқилган. Бу усулларга лагранж кўпайтувчилари, квадратик ва қоварик программалаш, градиент усули ечим топишнинг қатор бошқа тақрибий усуллари, график усуллар киради.

Шуни таъкидлаш лозимки иқтисодий масалаларнинг ночизиқли моделлари кўп ҳолда сунъий бўлади. Кўплаб иқтисодий проблемалар чизиқли моделларга олиб келинади. Шунинг учун ночизиқли моделлар ушбу китобда қисқа баён этилган.

4.2. Ночизиқли программалаш масаласининг геометрик интерпритацияси

Ечимнинг график усули

Икки ўзгарувчили ночизиқли математик программалаш масаласини кўриб чиқайлик:

$$F(x_1,x_2)\ max \qquad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2)\le b_i\ , \ i=\overline{1,m_1} \\ q_i(x_1, x_2)\ \le b_i\ , \ i=\overline{m_1+1,m_2} \\ q_i(x_1, x_2) = b_i\ , \ \overline{i=m_2+1,m} \end{cases} \qquad (4.2.2.)$$

(4.2.2) чеклашлар 4- ўлчови фазода қандайдир соҳани англатади. Н.П.М. график усулда ечиш деганда (4.2.2.) чеклашлар соҳасидан $f(x_1,x_2)=C$ чизиқ ўтувчи нуқтани топишни англатади.

Бу нуқта (4.2.4.) чеклашлар соҳасининг четки нуқталарида ҳам соҳанинг ички нуқталарида ҳам ётиши мумкин. Соҳанинг ички нуқтаси бўла олиши чизиқли программалаш масаласида учрамайди.

Н.П.М ни график усулда ечиш алгоритми.

1- қадам x_1 0x y текисликда (4.2.2) шартларни қаноатлантирувчи соҳа қурилади. Чеклашлар биргалашмаган бўлса, у ҳолда соҳа бўш тўпламдан иборат бўлади ва (4.2.10-(4.2.2) масала ечимга эга бўлмайди. Акс ҳолда 2- қадамга ўтилади.

2- қадам. $f(x_1,x_2)=C$ (бу ерда C ўзгармас сон) функция графиги чизилади.

3- қадам. F функциянинг ўсиш (максималини топиш зарур бўлганда) ёки камайиши(минималини топиш зарур бўлганда) йўналиши аниқланади.

4-қадам. Ечимлар соҳасида $f(x_1,x_2) = C$ функциянинг максимум ёки минимум нуқтаси топилади ёки бу соҳада функциянинг чегараланмаганлиги аниқланади.

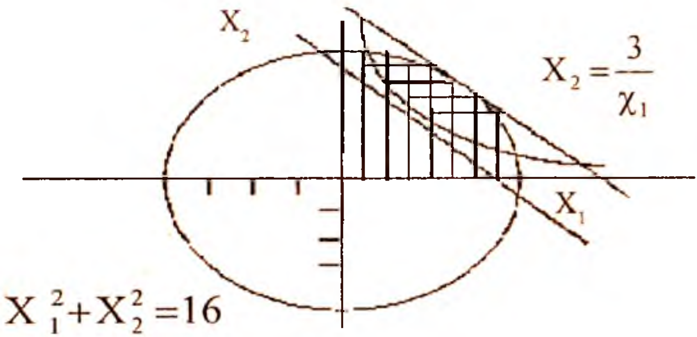
5- қадам . 4- қадам топилган нуқта учун x_1 ва x_2 ҳамда бу нуқтадаги f функция қиймати ҳисобланади.

4.2.1- мисол.

$f = 2x_1+3x_2$ –– max(min)

$$\begin{cases} x_1x_2 \geq 3 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Алгоритмга асосан x_1 оx_2 текисликда ечимлар соҳасини чизамиз (4.2.1-расм).



$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ чеклашлар x_1 о x_2 текисликнинг I - чорагини англатади. 1- чеклашга мос ярим текисликнинг чегараси $x_2 = \dfrac{3}{x_1}$ гипербола чизиғидир. Тенгсизликни гиперболадан юқорида етган нуқталар қаноатлантиради.

2- чеклашга мос ярим текисликнинг чегараси маркази (0,0) нуқтада бўлиб, радиуси 4 га тенг бўлган айланадир. Изланган ярим текислик вертикал штрихлар билан чизиб кўрсатилган. Ечимлар соҳаси горизонтал штрихларда ифодаланган.Функция n(2,3) нормал вектор йўналишида ўсади. Шундай қилиб А нуқта максимум нуқта, В нуқта минимум нуқта.

А нуқта $x_1^2 + x_2^2 = 16$ айланага ўтказилган уринманинг ox_1 ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчак тангенси $2x_1+3x_2=C_1$ тўғри чизиқнинг шу ўқ билан ҳосил қилган бурчак тангенси билан устма-уст тушмоқда. Бу бурчаклар тангенслари бу функциялар ҳосилаларининг x_1 нуқтадаги қийматларига тенг эканлигини эслаш кифоя.

$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{C_1}{3}$ тўғри чизиқ учун бу тангенс -2/3 га тенг бўлса,

$X_1^2+X_2^2=16$ ифодадан ошкормас функциянинг x_1 бўйича ҳосиласини ҳисоблаб

$$2x_1+2x_2x'_2=0$$

$$x'_2=-\frac{x_1}{x_2}$$

га эга бўламиз. Тангенсларни тенглаб

$$\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2}{3}$$

$$3x_1-2x_1 = 0$$

га эга бўламиз. Бу тенгламага А нуқта орқали ўтувчи айлана тенгламасини қўшиб система ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \end{cases}$$

Уни ечиб, оптимал ечимни топамиз:

$$X_1 = \frac{12}{\sqrt{3}};\ X_2 = \frac{12}{\sqrt{3}};\ f_{max} = \frac{52}{\sqrt{13}};$$

Шу каби В нуқтанинг координаталарини топамиз. $2x_1+3x_2=C_2$ тўғри чизиқ билан ox_1 ўs ҳосил қилган бурчак тангенси $x_1x_2=3$ функция графигига ўтказилган уринманинг шу ўқ билан ҳосил қилган бурчак тангенслари тенг.

$$X_2 = \frac{3}{x_1} \qquad X_2 = -\frac{3}{x_1^2}$$

у ҳолда $-\dfrac{3}{x_1^2} = -\dfrac{2}{3}$

тенгламани ҳосил қиламиз. 2 - тенглама сифатида В нуқта ётувчи гипербола тенгламаси олинади:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{x_1^2} = -\dfrac{2}{3} \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадан

$$X_1 = \frac{3}{\sqrt{2}};\ X_2 = \sqrt{2}$$

$$f_{\min} = \frac{12}{\sqrt{2}};$$

оптимал ечимга мос f функциянинг минимал қиймати топилган.

4.3. Лагранж кўпайтувчилари усули

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \qquad (4.3.1)$$

$$\begin{cases} q_q(x\ \ , x_2, \ldots, x_n) = b_1; \\ q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{cases}$$

(4.3.2)

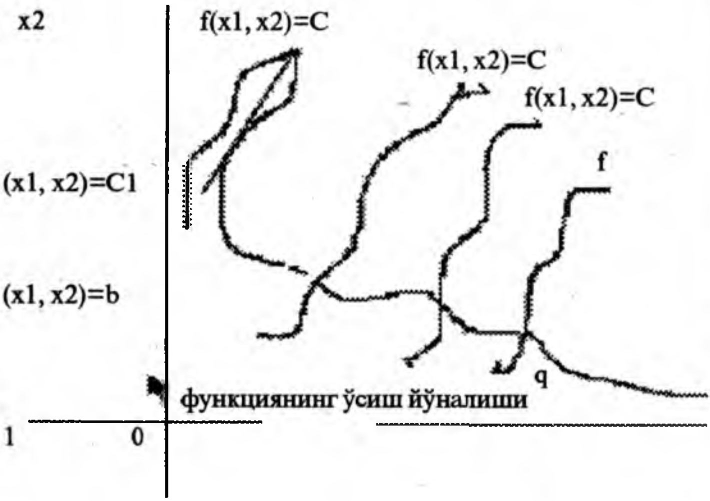
кўринишдаги ночизиқли программалаш масаласини ечиш талаб қилинсин. Бу ерда f ва $q_i(i=1,n)$ узлуксиз функциялар бўлиб, уларнинг $x_j(j=1,n)$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалари ҳам узлуксиз бўлсин. Бу масалани ечиш учун Лагранж кўпайтувчилари усули қўлланилади. Бу усул моҳиятини икки ўзгарувчили Н.М.П масаласи

$f(x_1,x_2)$ — max

$q(x_1,x_2) = b$

да кўриб чиқамиз.

$x_1 0 x_2$ текисликда $q(x_1,x_2) = b$ тенглама қандайдир графикни ифодалайди (4.3.1- расм). Унда $f(x_1,x_2)$ функциянинг бир неча чизиқлари (масалан, ўсиш тартибида) кўрсатилган:



4.3.1.- расм

А нуқта f функциянинг максимал нуқтаси бўлиб, унда f $(x_1,x_2)=C$ ва q $(x_1,x_2)=b$ функциялар графиклари ўтказилган уринмалар устма -уст тушади вектор - нормаллар пропорционалдир. Бу векторларни k ва *l* билан белгилаб

$$\bar{e} = \lambda \bar{k}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда γ— пропорционаллик коэффиценти.

$\bar{e}$ ва $\bar{k}$ векторларнинг координаталари f ва q функцияларнинг нуқтадаги хусусий ҳосилалари қийматига тенг.

$$\bar{e} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right);$$

$$\bar{k} = \left(\frac{\partial \quad q}{\partial \quad x_2}; \frac{\partial \quad q}{\partial \quad x_2} \right);$$

А нуқтада пропорционаллик шартидан

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2};$$

ни ҳосил қиламиз. x_1 ва x_2 нинг қийматларини топиш учун бу тенгламаларга А нуқтанинг $q(x_1,x_2)=b$ функция графигига тегишлилик эканлигидан фойдаланамиз.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2};$$

$$q(x_1, x_2) = b$$

оптимал ечимни берувчи системани ҳосил қиламиз

$$f(x_1, x_2, \gamma) = f(x_1, x_2)_+ \gamma \, (b - q(x_1, x_2))$$

У ҳолда охирги системани қуйидагича қайта ёзилади:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial q}{\partial x_1}; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial q}{\partial x_2}; \\ q(x_1, x_2) = b \end{cases}$$

F функция Лагранж функцияси деб аталади.

Лагранж кўпайтувчилари усули билан (4.3.1.)-(4.3.2)-масалани ечиш алгоритми:

1-қадам . Лагранж функцияси тузилади.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n, \gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(b_i - q_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

2-қадам. Лагранж функциясининг x_j ва $\gamma_i (i=1,n),(j=1,m)$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалари аниқланиб, улар 0 га тенгланади.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q}{\partial x_j} = 0, j = 1,n; \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, i = 1,m \end{cases} \quad (4.3.3)$$

3-қадам.(4.3.3) система ечилади ва $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияни экстремум нуқталари топилади.

4-қадам. 3-қадамда олинган натижаларнинг экстремум эканлиги текширилиб, f функциянинг экстремал қиймати топилади.

4.4. Ишлаб чиқариш харажатлари ночизиқли бўлган ҳолда унинг иқтисодий- математик моделини кўриш

Ўрганилган усулни маҳсулотни реализация қилишни оптималлаштириш масаласини ҳал қилишга татбиғини кўрамиз.

4.4.1- мисол. Фирма автомобилларни икки хил усулда, яъни магазинда сотади ва савдо агентлари орқали реализация қилади. x_1 та автомобилни магазинда сотиш харажатлари $4x_1+x_1^2$ шартли бирликни, x_2 та автомобилни савдо агентлари орқали сотиш харажатлари x_2^2 шартли бирликни ташкил қилади. Агар 200 та автомобилни сотиш керак бўлса, унинг харажатларини минималлаштирувчи оптимал ечимни аниқланг.

Ечиш. Математик моделни қурайлик. Мақсад функция — харажатларнинг умумий қиймати

$R=4x_1+x_1^2+x_2^2$

Бош ўзгарувчилар — 1 ва 2-усул билан реализация қилинган x1 ва x2 - автомобиллар сони.

У ҳолда математик модел:

$$R=4x_1+x_1^2+x_2^2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=200, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Уни ҳисоблаш учун Лаграж усулидан фойдаланамиз. Лаграж функцияси

$F(x_1,x_2,\gamma)= 4x_1+ x_1^2 +x_2^2+\gamma\ (200- x_1 - x_2)$

кўринишга эга.F функциядан x_1,x_2 ва γ лар бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз ва уларни 0 га тенглаймиз.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1+4 - \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0$$

системани ечиб, $x_1=99$, $x_2=101$, $f(x_1, x_2)=20398$

2-тартибли хусусий ҳосилалардан тузилган детерминант

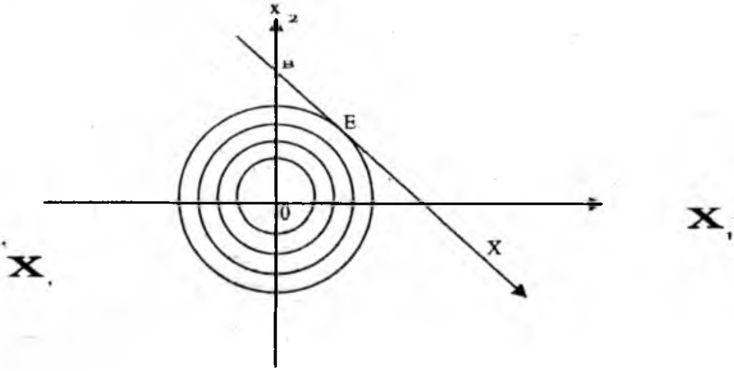
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

кўринишга эга. Демак, $f(x_1,x_2)$ функция экстремумининг мавжудлиги ҳақидаги етарли шартга кўра $f(x_1,x_2)$функция $x_1=99$, $x_2=101$ нуқтада экстремумга эга:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} = 2 > 0$$

бўлганлигидан f функция бу нуқтада минимумга эга. Шундай қилиб, харажатлар минимал бўлиши учун магазин орқали 99 та , савдо агентлари орқали 101 та автомобилни реализация қилиниши зарур. Бунда кетган харажат 20398 шартли бирликни ташкил қилади.

Бу масалани график усулда ҳам ечиш мумкин эди



4.4.1- расм

Ечимлар соҳаси сифатида АВ кесма,

$f = x_1^2+4x_1+x_2^2=(x_1+2)^2+x_2^2-4$функцияни $(x_1+2)^2+x_2^2-4=C$концентрик (маркази (-2,0) нуқтада радиуси $\sqrt{C}$га тенг) айланалар ифодалайди.

Расмдан кўринадики, функция ечимлар соҳасининг Е нуқтасида минимал қийматга эришади ва $x_2=200-x_1$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффиценти $(x_1+2)^2+x_2^2=C$айланага ўтказилган уринманинг ox_1 ўқ билан ҳосил қилган бурчаги коэффицентига тенг бўлади. Охирги тенгликдан x_1 бўйича ҳосила олиб,

$2(x1+2)+2x2x'_2=0,$

$x'_2=-\frac{x_1+x_2}{x_2}$

га эга бўламиз. Охирги тенгликни тўғри чизиқнинг бурчак коэффицентига тенглаб ва бу тенгламага Е нуқта ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини қўшиб,

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1 + x_2}{x_2} = -1 \\ x_1 + x \ \ = 200 \end{cases}$$

га эга бўламиз Охирги $x_1=99, x_2=101$, $f(x_1,x_2) = 20398$

5 боб

ГРАФЛАР ЁРДАМИДА ЕЧИЛАДИГАН ОПТИМАЛЛАШ МАСАЛАЛАРИ

Қатор масалаларни график усулда ифодалаш талай қулайликларга эга. Масалан, қарорни қабул қилиш жараёнини, ишлаб чиқариш фаолиятини амалга оширишни, маҳсулотларни ташишни ва ҳ.зо масалаларни график кўринишда ифодалаш мумкин. График структураларни таҳлил қилиш бу масалаларнинг оптимал ечиш имконини беради. График структураларни қуриш ва уларни тадқиқ этишнинг қатор усуллари ишлаб чиқилган. Бу бобда графлар назариясининг асосий тушунчалари ва уларни транспорт масалаларида қўллаш усуллари келтирилади.

5.1. Графлар назариясининг асосий тушунчалари

Айтайлик бўш бўлмаган X тўплам берилган бўлсин ва U тўплам X тўпламнинг жуфт элементларидан тузилган тўплам бўлсин, U тўпламдаги жуфтликлар, ҳамда жуфтликлардаги сонлар такрорланиши мумкин. X ва U тўплам G=(X,U) графни ифодалайди.

X тўплам элементлари графнинг учлари, U тўплам элементлари графнинг қирралари дейилади.

Агар Г тўпламда жуфтликлар такрорланса, у ҳолда G граф псевдограф ёки каррали қиррага эга дейилади. Агар U даги жуфтликлар элементлари тартиблашмаган бўлса Gни ориентлашмаган граф деб аталади

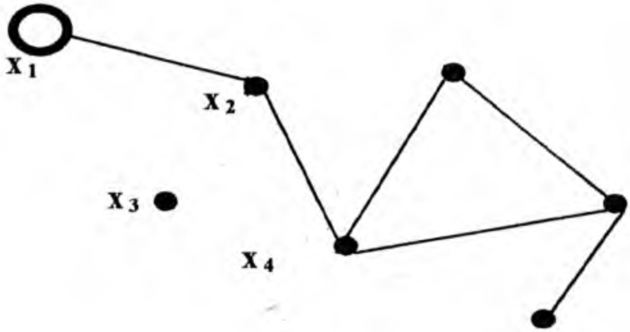
Агар улар тартиблашган бўлса G ориентлашган граф деб аталади, U тўпламнинг элементлари ёйлар дейилади.

Граф нуқта ва чизиқлар ёрдамида берилади. 5.1.1 расмда ориентлашмаган граф берилган.

Бу граф учун учлар тўплами X ва қирралар тўплами U қуйидаги кўринишга эга:

$X=\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6\}$

$U=\{(x_1\ x_1), (x_1 x_2), (x_2\ x_3),(\ x_3\ x_4),(x_3\ x_5),(x_4\ x_5),(\ x_5\ x_6)\}$



5.1.1.-расм

Ориентлашган графлар учун қатор асосий тушунчаларни киритамиз. Боши ва охири устма-уст тушувчи қирра тугма деб аталади. Бу ҳолда $(x_1\ x_1)$-тугмадир.

Агар иккита учларни бирлаштирувчи қирра мавжуд бўлса, у ҳолда бу учлар қўшни учлар деб аталди.

Агар уч бирор қирранинг боши ёки охири бўлса бу уч ва қиррани инцидент деб аталади.

Учнинг даражаси деб унга инцидент бўлган қирралар сонига айтилади ва у d(x) орқали белгиланади. Даражаси 0 га тенг бўлган учга ажратиб қўйилган уч дейилади. Даражаси 1 га тенг уч ўтмас ёки осилган уч деб аталади.

5.1.1-расмда ифодаланган граф учун ажратиб қўйилган уч x_7,чунки $d(x_7)=0$ бўлса, ўтмас ёки осилган уч x_6, чунки $d(x_6)=1$. Қолган учун $d(x_2)=2$, $d(x_3)=3$, $d(x_4) = 2$, $d(x_5) = 3$, $d(x_1) =3$

Графдаги маршрут дейилганда учлар ва қирраларнинг шундай кетма-кетлигига айтиладики, бунда олдин келувчи қирранинг охири кейинги келувчи қирранинг боши билан устма-уст тушади.

5.1.1 - расмда маршрут (x_1 x_2; x;$_3$ x_5; x_3 x_2)

Маршрут 6 та қиррани ўз ичига олганлиги учун унинг узунлиги 6 га тенг.

Занжир деб, шундай маршрутга (йўналишга) айтиладики,унда барча қирралар жуфт-жуфти билан фарқланади.

Занжирга мисол-(x_4 x_3 ;x_2; x_1; x_1)

Занжир узунлиги 4 га тенг .Занжир содда занжир деб аталади, агар ундаги барча қирралар жуфт-жуфти билан бир-биридан фарқланса,

содда занжир - (x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;)

Боши ва охири устма-уст тушувчи (содда) занжирга (содда) цикл дейилади.

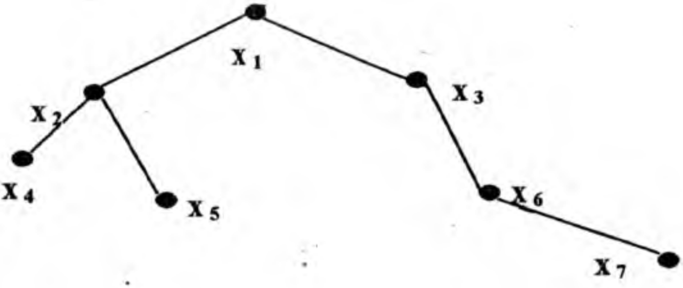
5.1.1.-расмда (x_3;x_4;x_5; x_3)- содда циклга мисол бўлади.

Gграфнинг граф остиси G_1 деб, шундай X_1 учлар ва U_1 қирралар тўпламига айтиладики, бунда X_1<X, U_1<U.

Графости хос графости дейилади, агар у графнинг ўзидан фарқли бўлса.

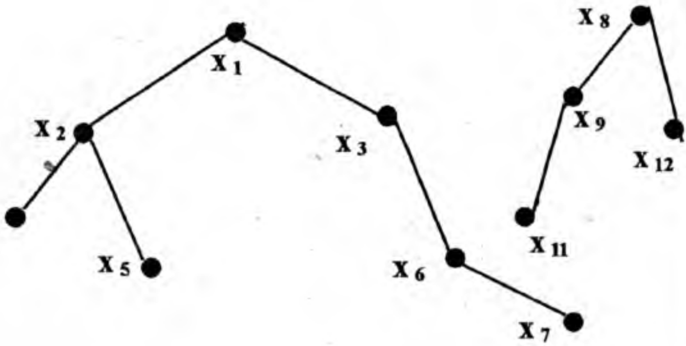
Учлар орасидаги масофа деб, бу учларни бирлаштирувчи энг қисқа занжир узунлигига айтилади. Графнинг диаметри деб, унинг учлари орасидаги энг катта масофага айтилади.

Циклларга эга бўлган граф дарахт деб аталади.(5.1.2-расм)



5.1.2- расм

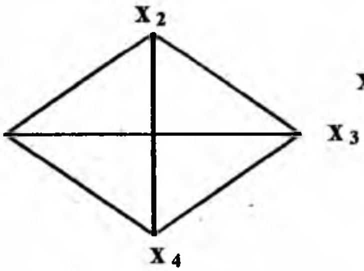
x_1 уч дарахтнинг илдизи бўлади. Дарахтлар тўплами-га ўрмон деб аталади.

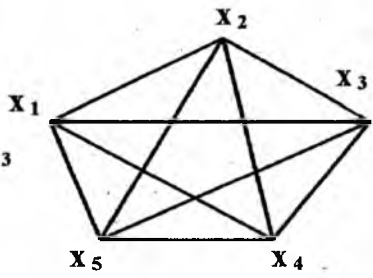


5.1.3-расм.

Граф тўла деб аталади, агар унинг ихтиёрий иккита учи қирра билан боғланган бўлса, nта қиррали тўла граф k_n орқали белгиланади.

5.1.4 (а,б) - расмларда K_4 ва K_5 графлар ифодаланган.





Граф муттасил d даражали дейилади, агар унинг барча учлари d даражага эга бўлса,

K_4- 3-даражали муттасил граф.

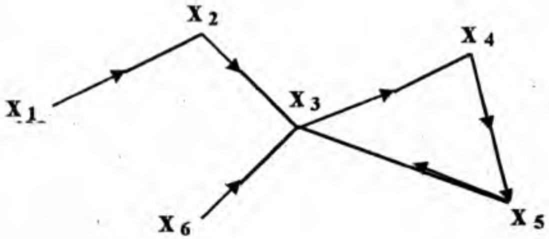
K_5- 4 - даражали муттасил граф.

Барча учлари 1 даражали бўлган граф жуфт бирлашган граф дейилади. Граф икки улушли деб аталади, агар унинг учлари тўплами x ни иккита тўплам остига шундай бўлиш мумкин бўлсаки, бунда ҳар бир қирра турли тўплам остидан олинган учларни бирлаштирса.Графнинг барча учларини ўз ичига олувчи содда циклга гамилтон цикл дейилади.

K_4 учун содда цикл $(x_1;x_2;x_3;x_4;x_1)$

Ориентирланган графда ҳар бир ёй йўналишга эга бўлади ва бу йўналиш кўрсатилади.

(5.1.5-расм)



Ориентирлашган графдаги контур деб, занжир эса йўл деб аталади. 5.1.5 - расмдаги графда (x_2,x_3,x_4,x_5)йўл бўлади(x_2,x_3,x_5) кетма-кетлик йўл бўлади, чунки x_3 ва x_5 ни туташтирувчи ёй мавжуд эмас.

Учнинг даражаси ўрнига баъзида учнинг кириш ярим ва чиқиш ярим даражаси киритилади. Агар уч ёйнинг боши бўлса, бу ёйни учдан чиқувчи деб аталади, агар уч ёйнинг охирида бўлса у ҳолда ёй кирувчи деб аталади.

X нинг чиқиш ярим даражаси деганда бу учдан чиқувчи ёйлар сони $d^-(x)$ кириш ярим даражаси, $d^+(x)$ деганда бу учга кирувчи ёйлар сони тушунилади.

5.1.5.-расмда ифодаланган графни қараб чиқайлик;

$d^-(x_3)=1$, $d^-(x_1)=1$

$d^+(x_3)=3$, $d^+(x_1)=0$

Шундай қилиб граф ёрдамида турли структураларни ўрганиш мумкин. Агар структура етарлича мураккаб бўлса, уни ечиш учун компьютерлардан фойдаланилади. Бунда графларни график усулда эмас, балки икки ўлчовли массив ёки матрица кўринишда ёзиш қулай бўлади.

Графларни қулай усулда ифодаловчи матрицаларнинг бир неча тури маълум.

n та сатр ва n та устунли $[A]_{nxn}$матрица n-та учли графнинг матрицаси деб аталади, агар унинг ҳар бир элементи қуйидаги формула ёрдамида топилса.\

$$A_{ij} = \begin{cases} 1,\text{агар i ва j-учлар қирра ёки ёй ёрдамида} \\ \text{бирлаштирилса} \\ \\ 0, \text{акс ҳолда} \end{cases}$$

каррали қирра(ёй)га эга бўлган граф учун 1 ўринга i ва j учлар орасидаги қирра(ёй)лар сони ёзилади. 5.1.1-расмдаги ориентлаштирилган граф учун матрица 7x7 ўлчовли бўлиб, уни

1 2 3 4 5 6 7

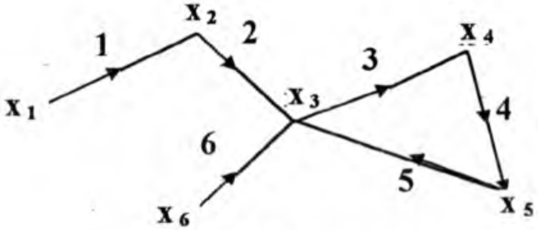
$$A = \begin{bmatrix} 1100000 \\ 1010000 \\ 0101100 \\ 0010100 \\ 0011010 \\ 0000100 \\ 0000000 \end{bmatrix}$$

кўринишда бўлади. Ориентирланган графни аралаш матрица, ориентирланган графни инцидент матрица ифодалайди.

nта учли m та қиррали ориентирланган графнинг инцидент матрицаси деб,n та сатрли m та устунли b_{ij} элементли матрицага айтилади.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар } i\text{- уч } j\text{-қирранинг боши бўлса} \\ -1, & \text{агар } i\text{- уч } j\text{-қирранинг охири бўлса} \\ 2, & \text{агар } i\text{- уч } j\text{-қирранинг учи ва охири бўлса} \\ 0, & \text{агар } i\text{- уч } j\text{-қирра инцидент бўлмаса} \end{cases}$$

5.1.5 - расмдаги граф ёйларни номерлаб чиқайлик.(5.1.6-расм)



5.1.6-расм

Унинг матрицаси

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5.2. Транспорт тармоқлари максимал поток (оқим)ини қуриш

5.2.1 - таърифь . Икки қутбли транспорт тармоғи S деганда, ихтиёрий ориентирлашган тугмаларсиз, X учлар тўпламига U ёйлар тўпламига эга бўлган граф тушунилади, бунда X ва U тўпламларга қуйидаги шартлар қўйилади.

1.$U \in U$ ёй кирмаган $S \in X$ битта ва фақат битта уч мавжуд. Бу уч тармоққа кириш учи ёки унинг манбаси деб аталади.

2.$U \in U$ ёй чиқмаган $t \in X$ битта ва фақат битта уч мавжуд. Бу учни тармоқдан чиқиш учи дейилади.

3.Тармоқнинг ёйлари тўплами U да номанфий функция C:U R 0 аниқланган бўлиб, у ҳар бир ёй $u \in U$ га C(u)- номанфий ҳақиқий сонни мос қўяди . Бу C(u)-сон ёйнинг ўтказиш қобилияти дейилади.

5.2.2-таъриф . S=(X, U) тармоқда $S \in X$дан кириб $t \in X$дан чиқувчи оқим деб ихтиёрий номанфий ҳақиқий функция $\varphi\ u \rightarrow R^{+} \cup 0$ га айтилади. Бундаφ функция учун қуйидаги шартлар бажарилиши зарур.

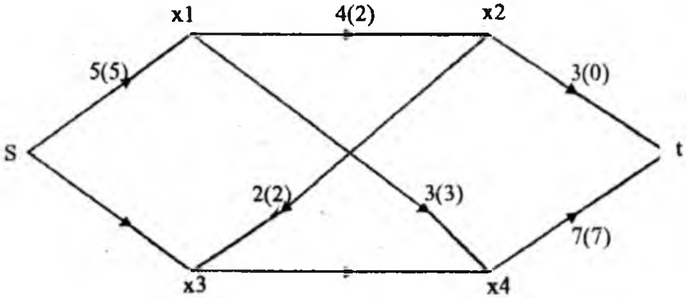
1) $0 \leq \varphi$ (u) ихтиёрий ёй учун

2) $$\sum_{u \in U_x^+} \varphi_{(u)} - \sum_{u \in U_x^-} \varphi_{(u)=0}$$

ихтиёрий $X \in X$, $X \neq S$, $X \neq t$ уч учун бу ерда U_x^+- x учга кирувчи ёйлар тўплами U_x^--x учдан чиқувчи ёйлар тўплами.

Изоҳ. 5.2.2.- таърифдаги 1-шарт ҳар бир ёйдаги оқим миқдори шу ёйнинг ўтказа олиш қобилиятидан ортиб кета олмаслигини англатса, 2- шарт тармоқнинг ҳар бир учига кирганда ва чиққанда оқим миқдори ўзгармаслигини англатади. Демак, S ёй кирувчи ёйдан чиқувчи оқим миқдори чиқишга кирувчи оқим миқдори + га тенг . Бу миқдор оқим миқдори деб аталади. φ_s орқали белгиланади.

5.2.1 - мисол.



5.2.1.-расм

Тармоқ берилган

S = (X,U)

X = $\{S, x_1, x_2, x_3, x_4, t\}$;

U = $\{(Sx_1), (Sx_3), (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2 t), (x_2 x_3), (x_4 t)\}$

Ҳар бир ёйнинг ўтказа олувчилиги ёйнинг тепасига ёзилган. Уларнинг ёнига қавсларнинг ичига ёйдан ўтаётган оқим қиймати ёзилган.

Ихтиёрий $u \in U$ учун $\varphi(u) \leq C(U)$

x_1, x_2, x_3, x_4 учларга 2-шартнинг бажарилишини текширамиз:

x_1: 5-2-3=0

x_2: 2-2=0

x_3: 2+2-4=0

x_4: 3+4-7=0

1- ва 2- шартлар бажарилмоқда, демак қавслар, сонлар оқимни ташкил қилар экан.

Транспорт тармоғини унда ўтаётган оқим билан биргаликда информацион компьютер тармоғида информация - маълумотни узатишни моделлаштириш учун фойдаланиш мумкин.

Манба сифатида информация берувчи фирма, истеъмолчи ишлатувчи сифатида, бу ахборотни ўзгартириш ҳуқуқига эга бўлмаганлар асосий ишлатувчи сифатида олинган маълумотлар билан ишлаши мумкин.

Транспорт тармоғи ёрдамида маҳсулотлар захиралари бўлган ишлаб чиқариш системаларини моделлаштириш мумкин. Бу ишлаб чиқариш системаси хом ашё, тайёр маҳсулот , техник ва транспорт воситаларни ўз ичига олади. Бунда хом ашё омбори тармоққа кириш вазифасини, тайёр маҳсулот омбори тармоқдан чиқиш вазифасини, станоклар эса, тармоқ учлари вазифасини бажаради. Тармоқ учлар орасидаги транспортировка тушунилади. Оқим оралиқ учларда йўқолиши ёки тўпланиши мумкин эмаслиги сабабли бу моделга браксиз ишлаб чиқариш мос келади.

5.2.3- таъриф. $A< X \quad A \neq X$, $t \in X \backslash A$ тармоқ учлари тўпламидаги $(x_j)<U$, $x_i \in A$, $x_j \in X\text{-}A$ ёйлар тўпламига $S = (XU)$, тармоқнинг кесими деб аталади ва у P(A) орқали белгиланади.

Бошқача қилиб айтганда, тармоқ кесими шундай ёйлар тўпламики, тармоқнинг кириш ва чиқишини боғловчи ихтиёрий йўл ҳеч бўлмаганда кесимнинг битта ёйидан ўтади. Кесим олиб ташланса тармоққа кириш- чиқишдан узилиб қолади.

5.2.4- таъриф. Кесимнинг ўтказувчанлиги ёки C(A) кесимнинг миқдори деб, унга кирувчи ёйларнинг ўтказувчанлиги йиғиндисига айтилади.

$$C(A)=\sum_{u \in P(A)} c(u)$$

5.2.2 - мисол. 5.2.1 -мисолдан тармоқ кесимини қуриш.

а) $A_1=\{ S_1, x_1, x_3 \}$

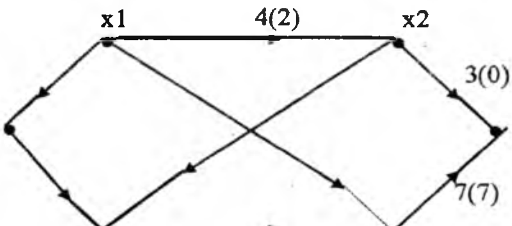
Ечиш: $X \backslash A_1 = \{ x_2, x_4, t \}$

5.2.3 - таърифга кўра кесимга A_1ва $X \backslash A_1$ тўпламлар учларини бирлаштирувчи ёйларгина киради. Шу билан бирга ёйнинг боши A_1 га, охири эса $X \backslash A_1$ га кириши керак.

$P(A_1) = \{ (x_1,x_2),(x1,x_4), (x_3,x_4)\}$,
$C(A_1) = 4+3+5=12$

5.2.2. а - расм
б) $A_2=\{ S_1,x_1,x_2\}$
$x \backslash A_2=\{x_3,x_4,t \}$
$P(A_2)=\{(S,xx),(x_1,x_4),(x_2,x_3),(x_2,t)\}$, $C(A_2)= 6+2+3+3=14$

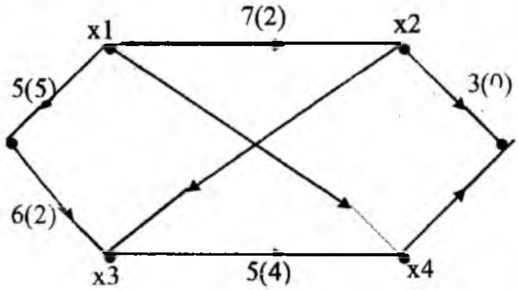
Кесим 5.2.2 б - расмда кўрсатилган.



5.2.2. в - расм

в) $A_3=\{S,x_3,x_4\}$
Ечиш:$X \backslash A_3=\{x_1,x_2,t\}$:
$P(A_3)= \{(S,x_1),(x_4,t)\}$ $C(A_3) =5+7=12$

5.2.2-расмда кўрсатилган



5.2.2 - в расм

5.2.1. - теорема. Агар $S \in A$, $t \in X \backslash A$ бўлиб, S манбадан t га ўтувчи ихтиёрий оқим миқдори φ қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади.

$\varphi_S = \varphi\ (A,x\backslash A) - \varphi\ (x\backslash A,A).$

5.2.3. - мисол.

$P(A1)=\{(x_1,x_2),\ (x_1,x_4),(x_3,x_4)\}$ кесим учун

$\varphi\ (A,x\backslash A)= \varphi\ (x_1,x_2)+ \varphi\ (x_1,x_4)+ \varphi\ (x_3,x_4)=2+3+4=9$

$\varphi\ (x\backslash A,A)= \varphi\ (x_2,x_3)=2$

$\varphi\ (A,x\backslash A)=\varphi\ (x\backslash A,A)=9-2=7$

$\varphi_S=\varphi\ (Sx_1)+\varphi\ (Sx_3)=5+2=7$

$\varphi_S=\varphi\ (A,x\backslash A)-\varphi\ (x\backslash A,A)..$

б) $P(A_2)= \{(\ S,x_3),\ (x_1,x_4),(\ x_2,x_3),\ (x_2,t)\}\};$ кесим учун

$\varphi\ (A,x\backslash A)=\varphi\ (S,x_3)+\varphi\ (x_1,x_4)+\varphi\ (x_2,x_3)+$

$\varphi\ (x_2,t)=2+3+2+0=7$

Боши X\A тўпламга , охири A тўпламга қарашли бўлган ёйлар йўқ.

φ (x\A,A)..=0

φ (A,x\A) -φ (x\A,A)=7=φS

в) $P(A_3)=\{(S,x_1), (x_4,t)\}$;

φ (A,x\A)= φ (x_2,x_3)+φ (x_1,x_4) = 5

φ (A,x\A) -φ (x\A,A)=12-5=7=φS

5.2.5- таъриф . Тармоқнинг S кириши ва t чиқишни ажратувчи минимал кесим дейилганда минимал ўтказиш қобилиятига эга бўлган ихтиёрий P(A), ($S\in A$),$t\in X$\A) кесимга айтилади.

5.2.2 -(Форд ва Фалкерсон) теоремаси

Киришдан чиқишга йўналган ҳар бир оқим миқдори минимал кесимнинг ўтказувчанлигидан катта эмас, бунда минимал кесимнинг ўтказувчанлигига тенг бўлган максимал оқим мавжуд бўлади.

Максимал оқимни қуриш алгоритм оқимни катталаштиришга асосланган.

5.2.6.- таъриф.

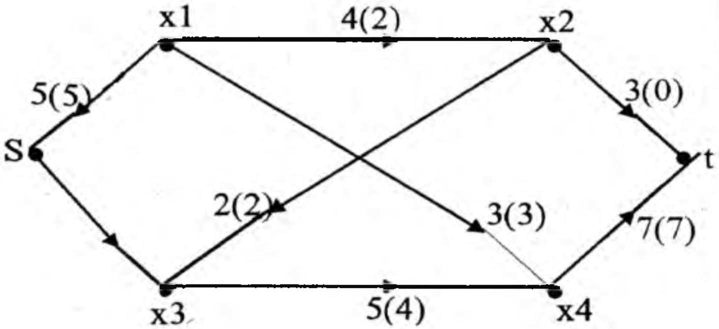
S тармоқнинг $X_1\in X$ ва XOX ёйларни бирлаштирувчи ёй йўл қўйиладиган ёй дейилади, агар қуйидаги шартлардан бири бажарилса,

а) Ёй йўналиши оқим йўналиши билан устма-уст тушади ва бу ердаги оқим қиймати ёйнинг ўтказувчанлигидан кичик бўлади $U=(X_i,X_j)$, $\varphi(U)>0$.

1-шартни қаноатлантирувчи ёйлар ортадиган ёйлар,

2- шартни қаноатлантирувчи ёйлар камаювчи ёйлар деб аталади.

5.2.4- мисол 5.2.1-мисолдаги тармоқ учун ортадиган занжир қурайлик.



5.2.3- расм

Ўсувчи занжир (sx_3,x_4x_1,x_2t) занжирнинг барча ёйлари йўл қўйиладиган ёйлардир. (Sx3) ёй 5.2.6- таърифнинг 2 - шартини қаноатлантиради. Унинг йўналиши оқим йўналиши билан бир хил, бу ёйдаги оқим ёйнинг ўтказувчанлигидан кичик 2<6

(x_2x_4) ёй 1- шартни қаноатлантиради.

(x_4x_1) ёй 2- шартни қаноатлантиради, у оқим йўналишига қарама-қарши , бу ёй бўйича нулдаги фарқли оқим ўтади:3>0.

(x_1,x_2) ёй 1- шартни қаноатлантиради

(x_2t) ёй 2- шартни қаноатлантиради.

Занжирнинг ортишини билиш ундан ўтувчи оқимни

$\delta = \min\{\Delta(U)\}$

миқдорга ошириш имконини беради.

Бу ерда

$C(U)$ - $\varphi(U)$, агар U — ортувчи ёй бўлса

$\Delta(U) = \varphi(U)$, агар U — камаювчи ёй бўлса

Бунда ҳар бир ортувчи ёйда оқим δ га камаяди. Охирги тенглик ортувчи ёйдаги оқимни максимал қийматга ортиши - бу ёйнинг ўтказувчанлигидан, ундан ўтувчи оқим айирмасига тенгдир. Оқимни максимал даражада камайтириш бу ёйдан ўтувчи оқим қиймати миқдорида бўлади. Оқимни бундай ўзгартирганда

$$\sum_{U \in U_x^+} \varphi(U) - \sum_{U \in U_x^-} \varphi(U) = 0$$

шарт ўзгармайди.

5.2.5-мисол. 5.2.4- мисолдаги ортувчи занжир бўйича оқимни орттирамиз. Бунинг учун бу занжирнинг ҳар ёйи учун

Δ (U) ларни ҳисоблаймиз.

Δ $(Sx_3)=6-2=4$

Δ $(x_3,x_4) = 5 - 4=1$

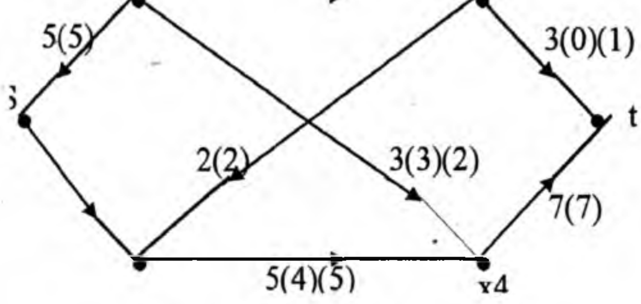
Δ $(x_4,x_1) = 3$

Δ $(x_1,x_2)=4-2=2$

Δ $(x_2,t)=3-0=3$

$\varphi=\{ \min 4, 1, 3, 2, 3 \}=1$

Оқимнинг янги қийматлари қавслар ичида аввалги қиймат ёнида ёзилган (5.2.4- расм).



5.2.4-расм

Максимал оқимни қуриш алгоритми. 1-қадам . Агар оқим бошланғич қиймати берилмаган бўлса, уни бериш одатда уни 0 га тенг деб олинади.

2-қадам. Тармоқнинг киришидан чиқишга қараб ўсиб борувчи занжирни қуриш. Агар бундай занжир мавжуд бўлмаса, максимал оқим қурилган бўлиб, унинг қиймати

$$\varphi_s = \sum_{U \in U_x^-} \varphi(U) - \sum_{U \in U_+^+} \varphi(U) = 0$$

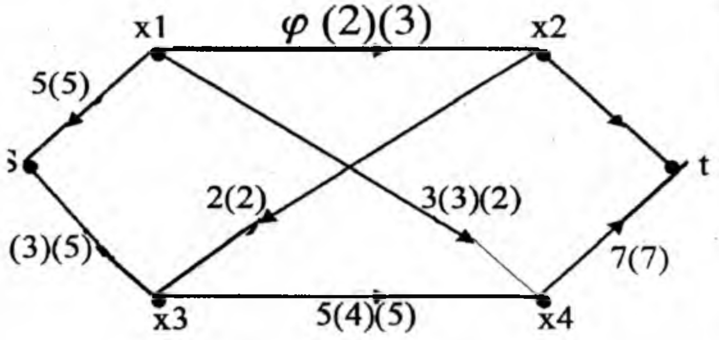
Акс ҳолда 3- қадамга ўтилади, қурилган занжир бўйлаб оқим қийматини б га ошириши 2 - қадамга ўтиш.

5.2.6- мисол .5.2.5 мисолдаги тармоқ учун максимал оқимни (5.2.5а- расм)

Ўсиб бораётган занжирларни олиб, улардаги ўтувчи оқимни ошириб борамиз. Оқимнинг янги қиймати қавс ичида ёзилиб, унинг эски қиймати ёнига ёзилади.

1) Ўсувчи (ортиб борувчи) занжир ($Sx_3x_4x_1x_2t$)

б=min{ 6-3,2,3-1 } = min{ 3,2,2 } = 2

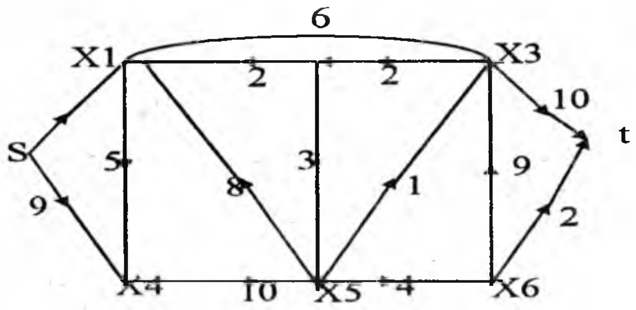


5.2.5 - а расм

Ўсувчи занжирлар бошқа йўқлиги, масалан tга кирувчи 2 оқим миқдори кираётган ёйларнинг ўтказувчанлигига тенг, шунинг учун уларни катталаштиришнинг иложи йўқ. Бундай ёйлар тўйинган ёйлар деб аталади.

$\varphi_S=5+5=3+7=10$

б) 5.2.5 б расмда кўрсатилган тармоқ учун максимал оқимни қуринг.



5.2.5. б - расм

Бунда бошланғич ечим берилмаган. Уни 0 га тенг деб оламиз. Ўсувчи занжирларни кетма-кет ясаймиз. Натижа 5.2.5 в расмда кўрсатилган:

1) (Sx_4x5x_6t),

$\delta = min\ \{9\text{-}0,10\text{-}0,4\text{-}0,2\text{-}0\}=2$

2) $(S\ x_4\ x_5x_1\ x_3\ t)$,

$\delta =\min\ \{ 9\text{-}2,10\text{-}2,8\text{-}0,6\text{-}0,10\text{-}0\}=6$

3) $(S\ x_4\ x_5\ x_6\ x_3\ t)$,

$\delta =\min\ \{ 9\text{-}8,10\text{-}8,4\text{-}2,9\text{-}0,10\text{-}6\}=1$

(Sx_4) ва (x_6t) ёйлар тўйинди. Шунинг учун бу ёйлардан ўтувчи бошқа заанжирларни қараб чиқиш зарурати йўқ.

4) $(Sx_1\ x_5\ x_3\ t)$,

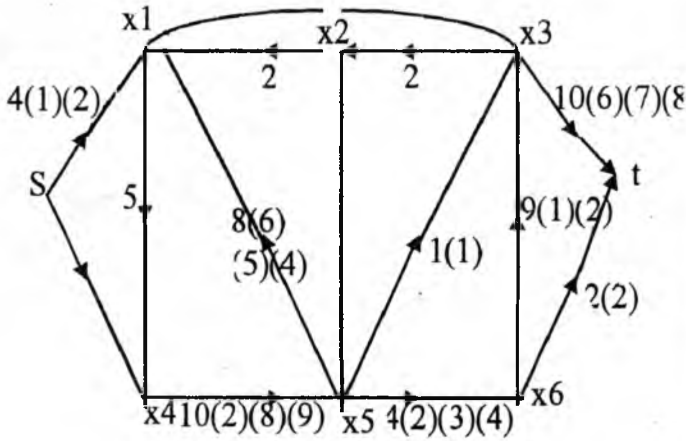
$\delta =\min\ \{ 4\text{-}0,\ 6,\ 1\text{-}0,\ 10\text{-}7 \} = 1$

5) $(S\ x_{1=}\ x_5\ x_6\ x_3\ t)$,

$\delta =\min\ \{ 4\text{-}1,\ 5,\ 4\text{-}3,\ 9\text{-}1,\ 10\text{-}8 \} = 1$

Ўсувчи занжирлар бошқа йўқ.

Оқим миқдори φ_S=2+9=11 га тенг.



5.2.5 в - расм.

5.2.6 Тармоқ бўйича максимал оқим бир неча усул билан берилиши мумкин. Бунга 5.2.5 в мисолда кенгаювчи бошқа занжирларни қуриб ишонч ҳосил қилиш мумкин.

5.2.2 теоремага асосан қурилган оқим максимал бўлишини оқим қийматига тенг бўлган кесим кўрсатади.

5.2.7.мисол 5.2.6. а мисолдаги оқим максимал эканлигини исботланг:

$A = \{ S, x_1, x_2, x_3, x_4 \}$

тўпламни тузайлик кесим $P(A) = \{(x_2t),(x_4t)\}$

$C(X) = 7+3=10$

кесимнинг ўтказувчанлиги оқим қийматига тенг, демак, берилган оқим максимал.

б) 5.2.6 б мисолдаги оқим максималлигини исботланг:

$A = \{ S, x_1, x_4, x_5, \}$

Бу тўпламдаги кесим

$P(A) = (x_1,x_3),(x_5\ x_3),(\ x_5\ x_6)\}$

Бу кесимнинг ўтказувчанлиги

$C(A) = 6 + 1 + 4 = 11$

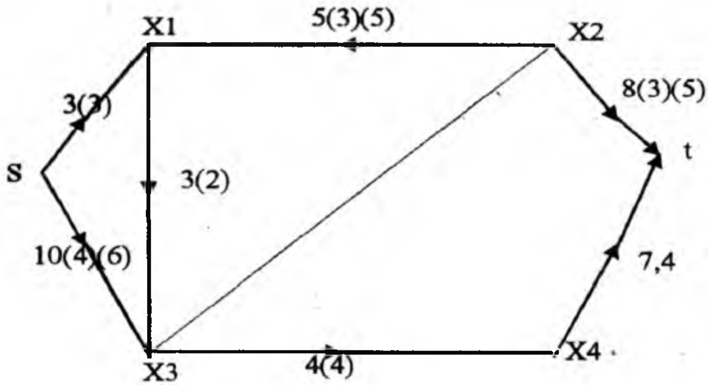
$C(A)$ нинг қиймати оқим қиймати билан устма-уст тушади, демак 5.2.6 б мисолдаги оқим максимал экан.

Конкрет масалаларнинг моделларини тузишда ориентирланмаган ёйли тармоқлар ишлатилади. Ориентирланмаган тармоқлардан фойдаланиш тадқиқотчига оптимал ечимни танлаш имкониятларини кенгайтиради. Масалан бирор ишлаб чиқариш участкасида деталлар тайинланган тартибда амалга оширилаётган бўлса, деталлар тайёрлаш босқичларининг ўрнини алмаштириш натижасида деталларни ишлаб чиқариш самарадорлигини ошириш мумкин.

Ориентацияси фиксирланган тармоқлардаги оқимнинг максимал қийматини тармоқдаги баъзи йўналишларни ўзгартириш оқибатида ошириш мумкин.

Ориентирланмаган қирра бўйича оқим турли томонга оқиши мумкин. Ориентирланмаган тармоқда максимал оқимни қуриш учун, унинг ҳар бир қиррасини 2 та қарама-қарши йўналишига эга бўлган ёйлар билан алмаштириш зарур, бунда бу 2 ёйнинг ўтказувчанлиги қирранинг ўтказувчанлиги билан бир хил бўлиши керак.

5.2.8- мисол .5.2.6 - расмдаги тармоқ учун максимал оқимни қуриш талаб қилинсин.



5.2.6-расм

Sдан tга қараб ўсиб борувчи занжирларни қарайлик:

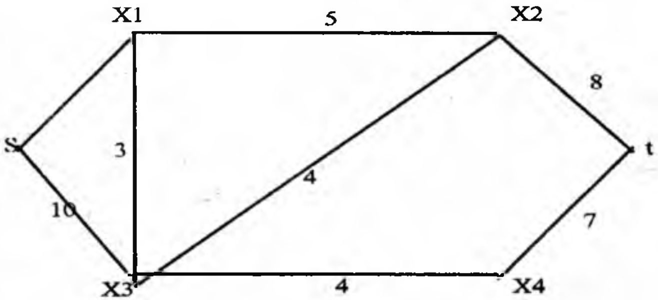
1) $(S\ x_1, x_2 t)$, $\delta = \min \{ 3, 5, 8 \} = 3$

2) $(S\ x_3, x_4\ t)$, $\delta = \min \{ 10, 4, 7 \} = 3$

3) $(S\ x_3, x_1 x_2\ t)$, $\delta = \min \{ 6, 3, 2, 5 \} = 2$

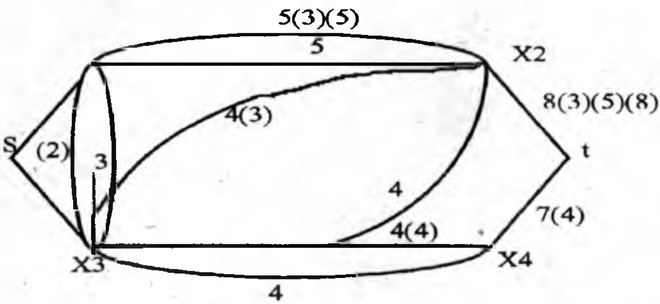
Максимал оқим $\varphi_s = 3+6 = 5+4 = 9$

Шундай структурали ориентирланмаган тармоқни қарайлик (5.2.7-расм)



5.2.7- расм

Максимал оқимни аниқлаш учун ҳар бир қиррани қарама-қарши йўналган 2 та ёйлар билан алмаштирамиз. (5.2.8- расм)



5.2.8- расм

Манбадан чиқувчи ёйлар бир томонга йўналган бўлади.

S дан t га ортиб борувчи максимал оқимни аниқлайлик:

1) (Sx_1x_2t)

δ =min { 3,5,8} = 3

2) (Sx_4t)

δ =min {10,4,7} = 4

3) ($Sx_3x_1x_2t$)

δ =min {6,3,2,5} = 2

3) (Sx_3x_2t)

δ =min {4,4,32 } = 3

Максимал оқим US=12 худди шу структурали, аммо ориентирланган тармоқдагидан кўра кўпроқ.

Умумий ҳолда, ориентирланмаган тармоқдаги максимал оқим шу структурали ориентирланган тармоқдаги оқимдан кичик бўлмайди.

5.3. Шох ва чегара усули

Айтайлик самарадорлик мезонини бош ўзгарувчилар функцияси сифатида ифодалаш мумкин бўлмасин ёки бу функция мураккаб кўринишда бўлиб, унинг учун ечиш усули мавжуд бўлмасин. Бундай ҳолда оптимал ечимни олиш учун барча ечим вариантларини кўриб чиқиш лозим. Бироқ унга жуда кўп вақт кетади. Масалан m та деталли партияни n та станокда ишлашлар жадвалини тузиш талаб қилинсин. Бу жадвални $(m)^n$ та турли вариантларини кўриб чиқиш керак .

Масалан 9 та деталли партияга 6 та станокда ишлов берилсин, унинг тахминан 10^{30}та варианти мавжуд, бу жуда катта сон бўлганлигидан бу вариантларнинг ҳар бирини кўриб чиқиш имкони бўлмайди.

Вариантлар сонини қисқартириш учун шохлар ва чегара усулидан фойдаланиш мумкин.

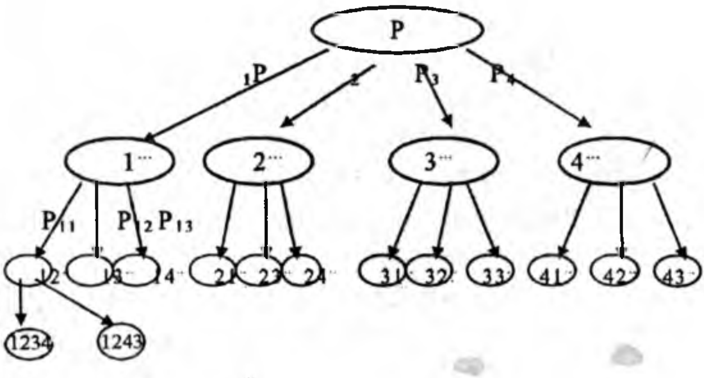
Шохлар ва чегара усули бу масала ечимлари тўпламидан бирор йўналиши бўйича ечимларни танлашни англатади. Унинг график ифодаси дарахт шаклида, яъни циклларга эга бўлмаган график кўринишга эга. Бу дарахтнинг илдизи барча вариантлар тўплами, дарахтнинг учлари қисман тартиблашган ечим вариантларидир.

5.3.1- мисол . 4 та детални қайта ишлаш жадвалини тузинг.

Аниқлик учун деталларни 1,2,3,4 номерлар билан белгилаймиз.

P — ечимлар дарахтининг илдизи сифатида жадвалнинг барча вариантлари тўплами, P_i — учлар сифатида i - номерли детал биринчи қайта ишланувчи ечимлар вариантлари тўплами остиси, Pij - i ва j номерлар биринчи қайта ишланувчи ечимлар вариантлари тўплам остиси олинади.(5.3.1- расм)

Деталлар сони ортиши билан вариантлар сони ҳам ортиб боради ва оптимал ечимни олиш учун шохлар ва чегара усули қўлланилади.



5.3.1.- расм

Унинг моҳияти қуйидагича, ҳар қандай уч ҳам шохланмайди, Аввало учлар қаралади ва ҳар бир уч баҳоланади. Энг яхши баҳо олган уч шохланади. Қийинчилик шу баҳони олишдан иборат.

Ҳар бир учга ечим вариантлари тўплами мос келади. Ҳар бир ечим вариантига эса f(x) самарадорлик мезонининг маълум қиймати мос келади. Бу қийматлардан энг яхшисини (максимал ёки минималини) олишнинг қулай усули уни учнинг баҳоси сифатида олишдир. Бирор барча вариантларни кўриб чиқмасдан f нинг аниқ қийматини ҳисоблаш мумкин эмас. Шунинг учун f нинг аниқ қиймати эмас, балки унинг (минималлаштириш масаласидан) қуйидан баҳоси ёки (максималлашда) юқоридан баҳоси олинади. Вариантлар қуйидаги олинадиган баҳо тўпламининг қуйи чегара баҳоси, юқоридан олинадиган баҳони юқори чегара баҳоси деб аталади.

Учнинг баҳоси қуйидаги хоссаларига бўйсунади

1. (минималлаштиришда баҳо ечимларининг берилган тўплам остисида f функциянинг қийматидан катта бўлмаслиги, максималлаштиришда эса баҳо f функциянинг қийматидан кичик бўлмаслиги керак.

2. Қуйидаги даража тўплам остилари учун баҳо минималлаштиришда (максималлаштиришда) ундан кўра юқори даражадаги тўплам ости учун баҳодан кичик (катта) бўлмаслиги керак.

3. Охирги босқичда олинган ечимнинг ягона вариантидаги баҳо бу ечим учун f нинг аниқ қиймати билан устма-уст тушиши керак.

Шохлар ва чегаралар усули алгоритми

1. Биринчи даражада учлар ясалади. Ҳар бир уч учун қуйи (юқори) чегара баҳоси ҳисобланади. Энг яхши баҳо олган уч шохланади.

2. і- даражадаги барча уч учун баҳо ҳисобланади. Бунда ҳам энг яхши баҳо олган уч шохланади.

3. 2-пунктдаги амаллар охирги аниқ ечим олгунча давом эттирилади.

Унинг учун f нинг аниқ қиймати ҳисобланади. Агар бу қиймати оралиқ учлардаги баҳодан ёмон бўлмаса, у ҳолда оптимал ечим топилган деб ҳисобланади.

Агар бу қиймат қатъий яхши бўлса, у ҳолда оптимал ечим ягона. Агар f функциянинг охирги учдаги қиймати қолган учлардаги f функция баҳосидан яхши бўлмаса, у ҳолда 2 қадамга қайтилади.

Шохлар ва чегаралар усули барча ечимларнинг барча вариантларини кўриб чиқишни кафолатламайди.

Савдо агенти маҳсулотларни бир неча жойларда реализация қилади. Савдо агенти ёки коммивояжер энг кичик маршрут билан барча пунктларни айланиб чиқиб, яна орқага қайтиш лозим. Бу масалани минимал узунликка эга бўлган гамильтон циклини топишга доир масаладир.

5.3.2 - мисол . Коммивояжер масаласини пунктлар сони 5 га тенг бўлгани ҳам учун ечамиз.

Иккита қўшни пунктлар орасидаги масофа 5.3.1 жадвалда берилган.

5.3.1 - жадвал

-	A	B	C	D	E
A	0	70	120	110	130
B	70	0	∞	20	50
C	120	∞	0	30	120
D	110	20	30	0	50
E	130	50	120	50	0

узунликка тенг масофа И ва С пунктларни бирлаштирувчи маршрут йўқлигини англатади.

Йўл 5 бўғимдан бўлиб, уларнинг ҳар бири узунлиги 320 дан кам эмас, қуйидан 4 га бахо сифатида минимал узунликка эга бўлган бўғин узунлигини бўғинларнинг умумий сонига кўпайтмаси олинади.

4=5 20 = 100

Шохланишнинг ҳар бир қадамида йўлнинг маолум узунлигига 20 ни қолган бўғинларнинг сонига кўпайтмаси қўйилади. Дарахт 5.3.2- расмда кўрсатилган . Дарахтнинг илдизи сифатида А пунктдан чиқувчи йўллар тўплами олинади.

320 бирлик тенг бўлган минимал узунликка эга бўлган йўллар $A \to C \to D \to E \to B \to A$ ва $A \to B \to E \to D \to C \to A \to A \to C \to E$ ва $A \to E \to C$ учлар щохланмаслиги керак, чунки уларга яна битта крнкрет пункт қўшилса, йўлнинг узунлиги 320 дан ортиб кетади.

5.3.2- расм

6 боб

ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШ

Қатор иқтисодий ва ишлаб чиқариш масалаларини моделлаштиришда оптималлик мезонига вақтнинг таъсири ва жараёнининг вақт давомида ўзгаришини ўрганиш талаб қилинади. Юқоридаги масалаларни ечиш учун динамик режалаш усули қўлланилади. Бу усул статик оптимал масалаларга қараганда анча мураккабдир.

6.1. Динамик программалаш

Масаланинг қўйилиши.

Айтайлик m та қадамга бўлинувчи масала қаралаётган бўлсин. Масалан, корхона фаолиятини бир неча йилга режалаштириш талаб қилинган бўлсин. Инвестицияларни босқичма-босқич, режалаштириш, узоқ вақт давомига ишлаб чиқариш қувватларини режалаштириш каби масалалар ўрганилаётган бўлсин.

Умумий самарадорлик кўрсаткичини W орқали, оралиқ самарадорликларни φ_i $(i=1,m)$ орқали белгилайлик. Агар W афоритивлик қонунига, яъни

$$W=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i \quad (6.1.1)$$

га бўлинса, у ҳолда бу масаланинг оптимал ечимини динамик программалаш усули билан топиш мумкин.

Шундай қилиб динамик программалаш бу кўп босқичли, кўпқадамли жараёнлар учун оптималлаш усули бўлиб, ундаги самарадорлик мезони (6.1.1.) хоссага эга.

Динамик программалаш масалаларида самарадорлик мезони ютуқ деб аталади. Бу жараёнлар бошқарилиши мумкин бўлган жараёнлар бўлиб, унда ютуқ миқдори бошқаришни тўғри танлашга боғлиқ бўлади.

6.1.1-таориф i - қадамдаги ютуқ олиш xi(i=1,m) ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, бу ўзгарувчини босқичдаги бошқарув деб ҳам аталади.

6.1.2-таъриф. Жараённи умуман бошқариш деганда босқичдаги бошқарувлар кетма- кетлигига айтилади.

$X= (x_1, x_2 ... .x_m)$

6.3.1. - таъриф . Оптимал бошқариш x*- бюу x бошқарувнинг шундай қийматики , бу қийматда W*(X) максимал (агар ютуқни камайтириш лозим бўлса минимал) бўлади.

$W^*=W(x^*)= \max\{W|x)\}; x\in X$ (6/2)

бу ерда ч - ечимлар соҳаси.

Оптимал бошқариш x* оптимал босқичдаги бошқарувлар кетма- кетлиги ёрдамида аниқланади.

$X^*=(x_1^*x_2^*,....x^*_m)$

Динамик программалаш усули асосида. Бўлинманинг оптималлик мезони туради. Бу мезон моҳияти эса қуйидагича: бошқарувни ҳар бир қадамда шундай танлаш керак. Ютуқлар жорий босқичда ҳам, қолган босқичлардаги барча ютуқлар йиғиндиси ҳам оптимал бўлсин. Бу қоидани изоҳлайлик. Динамик программалаш масаласини ечишда бошқарув ҳар бир қадамда танланилади, бу бошқарув оптимал ютуққа олиб келиши зарур. Агар барча босқичлар бир - бирига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу босиқчда максимал ютуқ олиб келувчи бошқарув оптимал бўлади. Бироқ ҳар доим ҳам босқичларнинг бир-бирига боғлиқ эмаслигини таъминлаб бўлмайди. Масалан, эски техникани янгиси билан алмаштирилганда маълум маблағлар сарф қилинади. 1 - йили янги техникани ишлатиш катта фойда бермаслиги мумкин, бироқ кейинги йиллар у катта фойда келтиради. Аксинча раҳбар бу жорий йилда яхши фойда олишни кўзлаб, эски техника ишлатаверса, жорий йилда у фойда келтириб, келгуси йилларда эса зарар келтириши мумкин. Юқоридаги мисол кўп босқичли жараёнларда босқичлар-122ни бир-бирига боғлиқ бўлишини, демак, ҳар бир қадамдаги бошқарувчи танлашда унинг келгуси босқичларга таъсирини ҳам ҳисобга олиш зарур.

Иккинчи томондан қараганда жорий босқичда бошқарувни танлашда ундан олдинги босқични қандай якунланганлигини ҳам ҳисобга олиш зарур. Масалан, I-йилда корхонага сарф қилинувчи маблағларни аниқлашда, (i-1) - йилда қанча фойда олинганлигини ва (I-1) йилда қанча маблағ сарфланганлигини билиш зарур. Шундай қилиб жорий босқичдаги бошқарувни танлашда 1) ундан олдинги қадамда рўй бериши мумкин бўлган барча ҳолларни 2) жорий босқичдаги бошқарув жараёнини кейинги босқичларга таъсирини ҳисобга олиш зарур.

Динамик программалаш масаласида биринчидан, ҳар бир қадамни босищда аввалги қадамда рўй бериши мумкин бўлган барча вариантларни ҳисобга олиб бориш ва ҳар бир вариант учун шартли оптималлаштиришни олиб бориш керак. Юқоридаги 2 - шарт бажарилишини таъминлаш учун эса динамик программалаш масалаларида шартли оптималлаш тескари, яъни жараён охирги босқичдан 1- босқичга қараб олиб борилади. Аввал m — охирги босқич оптималлаштирилади. Бунда xm охирги босқич бўлганлиги учун унинг кейинги босқичларга таъсирни ҳисобга олиш керак эмас.

(m-1) қадам тугалланиши турли вариантларини фараз қилган ҳолда xm учун шартли оптимал бошқарув топилади. Худди шу каби (m-1) - қадам учун бошқарувни танлашда (m-2) - қадам якунланишининг турли ҳолларини ҳисобга олган ҳолда (m-1) қадамдаги оптимал ечим шундай танланадики, у m-1 ва m-охирги икки қадамда оптимал ютуқ келтирсин. Бу амаллар то 1-қадамгача келтирилади. 1- босқичда ундан олдинги босқичлар ҳақида фараз қилишнинг кераги йўқ, чунки 1-босқичдан аввал системанинг қандай ҳолатда эканлиги маълум бўлади. Унинг учун босқичли оптимал ечим шундай танланадики, у биринчи ва қолган барча босқичларда оптимал ютуқ келтирсин.

6.2. Динамик программалаш математик моделини тузиш

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

S — жараён ҳолати

S_i-i — қадам олдидан жараён ҳолати турли вариантлари тўплами.

W_i-i — қадам бошлаб жараён охиригача олинган ютуқ $i = 1,m$.

Динамик программалаш учун математик модел тузиш қуйидаги босқичлардан иборат:

1. Масалани қадам (босқич)ларга бўлиш.

Агар қадам жуда кичик бўлса, ҳисоб-китоблар кўпайиб кетади, агар қадам жуда катта бўлса, босқичли оптималлаш жараёни мураккаблашади.

2. S жараён ҳолати ҳар бир қадамда ифодаланувчи ўзгарувчиларни ва бу ўзгарувчиларга қўйиладиган шартларни танлаш.

Бунда тадқиқотчи қизиқтирувчи факторларни ўзгарувчи сифатида танлаши керак. Масалан, корхона фаолиятини режалаштиришда йиллик даромадни ўзгарувчи сифатида танлаш мумкин.

3. Босқичдаги бошқарувлар тўплами x_i ,$i=1,m$ ни ва уларга қўйиладиган шартларни (чегаралашларни) аниқлаш.

4. Ютуқ

$$\varphi_i(S,x_i) \quad (6.2.1)$$

ни аниқлаш

5. X_i бошқарув таъсирида S ҳолат ўтадиган S' ҳолатни аниқлаш.

$$S' = f_i(S,x_i) \quad (6.2.2)$$

бу ерда fi - i қадамда S ҳолатдан S' холатга ўтиш функцияси.

6. S моделлаштирилувчи жараённинг охирги қадамидаги шартли оптимал ютуқни англатувчи тенгламаларни тузиш.

$W_m(S) = \max (\varphi_m(S, X_m))$ (6.2.3)

7. Динамик программалашнинг асосий функционал тенгламасини тузиш. Бу тенглама S жараённинг i- қадамидан охирги қадамигача ҳолатининг шартли оптимал ютуқни аниқлайди ва бунда у (i+1) - қадамдан охирги қадамгача ҳолатнинг шартли оптимал ютуғи орқали ифодаланади.

$$W_i(S) = \max_{X_m \in X} \{\varphi_i(S, X_i)+W_i+(f_i(S,x_i))$$

(6.2.4) тенгламага аввал маълум бўлган $W_{i+1}(S)$ функцияда Қ ўрнига янги $S' = f_i(S,X_i)$ ҳолат қўйилади. Бу i-қадамда X_i бошқарувчи таъсири остида S ҳолатдан S' ҳолатга ўтишни англатади.

Шуни таъкидлаш керакки, динамик программалаш модели структураси чизиқли программалашнинг статик моделларидан фарқланади.

Ҳақиқатдан ҳам чизиқли программалаш моделларида бош ўзгарувчилар бу бир вақтнинг ўзида моделлаштирилувчи жараёнларнинг ҳолати ҳамдир. Динамик моделларда эса xi- бошқарувчи ўзгарувчилар алоҳида ва бу бошқарув таъсирида S жараён ҳолатининг ўзгариши алоҳида киритилади.

Шундай қилиб, динамик моделлар анча мураккаб моделлар бўлиб, бу моделларда қўшимча фактор — вақт ҳам ҳисобга олинади.

6.3. Динамик программалаш масаласини ечиш босқичлари

Олдинги параграфда баён этилган 1-7 пунктлар бажарилгандан сўнг математик модел қурилган деб ҳисобланади ва ундан кейинги босқич — уни ҳисоблашга ўтилади.

Динамик программалаш масаласини ечиш босқичлари

1.Охирги қадам учун барча мумкин бўлган Sm ҳолатлар тўпламини аниқлаш

2. (6.3.2) формула бўйича охирги m-қадамдаги ҳар бир $S \in S_m$ ҳолат учун шартли оптималлаш ўтказилади ва $X(S)$ - $(S \in S_m)$ шартли бошқарув аниқланади.

3. i-қадамда S_i мумкин бўлган ҳолатлар тўплами аниқланади i= 2,3,....,m-1

4. i-қадамда (i= 2,3,....,m-1) ҳар бир $S \in S_i$ ҳолат учун (6.2.4) формула бўйича шартли оптималлаш ўтказилади ва $X_i(S)$, $S \in S_i$, i= 2,3,....,m-1 шартли оптимал бошқарув аниқланади.

5. Оптимал ютуқ $W_1(S_i)$ системанинг бошланғич ҳолати аниқланади ва $X_1(S_1)$ оптимал бошқарув (6.2.4) формулада i=1 деб фараз қилиб топилади. Бу масаланинг оптимал ечими $W = W_1(X_1)$ бўлади.

6. Бошқарувнинг шартсиз оптимал бошқарувини текшириш. Бунинг учун 1-қадамда топилган оптимал бошқарув $X_1 = X_1(S_1)$ ни (6.2.2) формулага қўямиз ва системанинг кейинги ҳолати $S_2=f_2(S_1,X_1)$ни топилади . Ўзгартирилган ҳолат учун$X_2=X_2(S_2)$ оптимал топилади, у (6.2.2.) формулага қўйилади ва ҳ.зо.

6.4. Ишлаб чиқариш воситаларини алмаштиришнинг оптимал стратегиясини танлаш - динамик программалаштириш масаласи сифатида

Умумий ҳолда масала қуйидагича қўйилади:

m йил давомида ишлаб чиқариш воситаларидан фойдаланишнинг оптимал стратегияси аниқланади, бунда t «ёш» даги воситадан ҳар i йилда олинган фойда максимал бўлиши керак.

Қуйидагилар маълум: ч(t) -t ёшдаги ишлаб чиқариш воситасининг бир йил давомида ишлаб чиқарган маҳсулотдан тушган фойда 1 (t) - воситанинг ёшига боғлиқ харажатлар

c(t) — t ёшдаги воситанинг қолдиқ баҳоси P — янги ишлаб чиқариш воситасининг нархи. Бу ерда ишлаб чиқариш воситасининг «ёши» дейилганда уни эксплуатацияқилиш йилларда ифодаланган даври тушунилади.

Математик моделни қуриш учун қуйидаги босқичлар бажарилиши керак:

1. Қадамлар сонини аниқлаш. Қадамлар сони ишлаб чиқариш воситаси ишлатилган йиллар сонига тенг қилиб олинади.

2. Система ҳолатларини аниқлаш. Система ҳолати қурилма «ёши» t билан характерланади t = qm.

3. Бошқарувни аниқлаш i - қадам бошида 2 та бошқарувдан бири (воситаларни янгилаш ёки янгиламаслик) танланади. Бу 2- вариантнинг ҳар бирига 1 та сон мос қўйилади.

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{агар восита алмаштирилмаса(янгиланмаса)} \\ 1, & \text{агар восита янгиланса} \end{cases} \qquad (6.4.1.)$$

4. i- қадамда ютиш функциясини аниқлаш *I*-i йил охирида воситани ишлатишдан олинган фойдани ифодалайди:

$$\varphi_i(t) \begin{cases} ч(t)\text{-}l(t), \text{ агар } i \text{ йил бошида восита янгиланмаса} \\ c(t)\ \text{-}p+ч(0)\text{-}l(0), \text{ агар восита янгиланса} \end{cases} \qquad (6.4.2)$$

Шундай қилиб, ишлаб чиқариш воситаси ишлатилгандан сўнг сотилмаса, уни ишлатишдан олинган фойда унда ишлаб чиқилган маҳсулот баҳосидан эксплуатацияга кетган харажатлар айирмасига тенг. Агар ишлаб чиқариш воситалари янгиланса, у ҳолда уларни ишлатишдан олинган фойда эски воситанинг қолдиқ баҳосидан янги восита баҳоси айирилади, унга маҳсулот баҳосидан янги воситага кетган янги харажатлар айирмаси қўшилади.

5. Ҳолат ўзгариши функциясини аниқлаш:

$$f_i(t) = \begin{cases} t+1, \text{ агар } x_1=0 \\ 1, \text{ агар } x_i = i \end{cases} \qquad (6.4.3)$$

6. Функционал тенгламани i=m учун тузиш:

$$W_m(t) = \max_{X\in(0,1)} \begin{cases} r(t)-l(t) \\ c(t)-p+r(0)-l(0) \end{cases} \qquad (6.4.3)$$

7. Асосий функционал тенгламани тузиш:

$$W_i(t) = \max_{X_i\in(0,1)} \begin{cases} r(t)-l(t)+W_{i+1}(t+1) \\ c(t)-p(t)+r(0)-l(0)+W_{i+1}(t) \end{cases} \qquad (6.4.5)$$

бу ерда $W_i(t)$ -i қадам (i- йилдан) эксплуатация қилишнинг охиригача бўлган вақтда ишлаб чиқариш воситасини ишлатишдан олинган фойда.

$W_{i+1}(t+1)$ - t+1 ёшдаги воситадан (i+1) йилдан то эксплуатация қилиш даври охиригача бўлган вақтда уни ишлатишдан олинган фойда.

Шундай қилиб , математик модел қурилди.

6.4.1-

M=12, p=10 c(t)=0 , r(t) - l(t) = φ (t)

φ(t) қийматлари 6.4.1- жадвалда берилган

6.4.1. - жадвал

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ(t)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

берилган мисолда функционал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$W_m 0 = \max_{X_m \in 0,1} \begin{cases} \varphi(t) \\ +\varphi(0) \end{cases}$$

$$W_m() = \max_{X_m \in 0,1} \begin{cases} \varphi(t) + W_{i+1}(t+1) \\ -p + \varphi(0) + W_{i+1}(1) \end{cases}$$

Масалани ечиш учун 6.4.2- жадвал тўлдирилади. Бу жадвал қуйидагича тўлдирилади:

1. Шартли оптималлаш 12-қадамдан бошланади. I=12 учун системанинг t=0.1,2,...12 ҳолатлари тенглама қуйидагича:

$$W_{12}(t) = \max_{x \in (0.1)} \begin{cases} \varphi(t) + (t+1) \\ -p + \varphi(0) \end{cases}$$

1) t=0

$$W_{12}(0) = \max_{(0.1)} \begin{cases} 10 \\ -10+10 \end{cases} = 10; x_{12}(0) = 0$$

6.4.2 - жадвал

2) t=1

$$W_{12}(1) = \underset{0.1}{\max}\begin{cases}9\\-10+10\end{cases} = 9; x_{12}(1) = 0$$

. . . . . ва х.з.

10) t =9

$$W_{12}(9) = \underset{0.1}{\max}\begin{cases}1\\-10+10\end{cases} = 1; x_{12}(9) = 0$$

11) t=10

$$W_{12}(10) = \underset{0.1}{\max}\begin{cases}0\\-10+10\end{cases} = 0; x_{12}(10) = 0 \qquad x_{12}(10) = 1$$

13) t = 12

$$W_{12}(12) = \underset{0.1}{\max}\begin{cases}0\\-10+10\end{cases} = 0; x_{12}(12) = 0 \qquad x_{12}(12) = 1$$

Шундай қилиб 12- қадамда 0-9 ёшдаги ишлаб чиқариш воситаларини алмаштириш керак эмас. 10-12 ёшдаги воситаларни алмаштириш ёки уларни ишлатишни давом эттириш мумкин, чунки t=10,11;12 да 2 та оптимал ечим 1 ёки 0 олинган натижалар жадвалнинг i=12 мос 2 та устуни тўлдирилади.

2.11- қадамдаги шартли оптималлаштириш. Функционал тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$W_{11}(t) = \underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(t) + W_{12}(t+1)\\-p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}$$

i=11

1) t=0

$$W_{11}(0) = \underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(0) + W_{12}(1)\\-p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases} = \underset{1,0}{\max}\begin{cases}10+9\\-10+10+9\end{cases} = 19; x_{11}(0) = 0$$

2) t = (1)

$$W_{11}(1)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(2)+W_{12}(2)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}9+8\\ -10+10+9\end{cases}=17;x_{11}(1)=0$$

. . . .

6) t=5

$$W_{11}(5)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(5)+W_{12}(6)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}5+4\\ -10+10+9\end{cases}=9;x_{11}(5)=0;x_{11}(5)=1$$

7) t=6

$$W_{11}(6)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(6)+W_{12}(7)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}5+4\\ -10+10+9\end{cases}=9;x_{11}(6)=1;$$

. . . .

13) t=12

$$W_{11}(12)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(12)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}0\\ -10+10+9\end{cases}=9;x_{11}(12)=1;$$

Шундай қилиб 11- қадамда 0-4 ёшдаги воситаларни алмаштириш керак эмас, 5 ёшдагиларини ишлатиш ҳам, алмаштириш ҳам мумкин, 6 ёшдан катталарини алмаштириш керак. Олинган натижалар жадвалнинг i=11 га мос 2 та устунига ёзилади.

I = 10

1) t=0

$$W_{10}(0)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(0)+W_{11}(1)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}10+17\\ -10+10+17\end{cases}=17;x_{10}(0)=0;$$

2) t=1

$$W_{10}(1)=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}\varphi(1)+W_{11}(2)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\underset{1,0}{\max}\begin{cases}9+15\\ -10+10+17\end{cases}=24;x_{10}(1)=0;$$

3) t = 2

$$W_{10}(2)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(2)+W_{11}(3)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}8+13\\ -10+10+17\end{cases}=21; x_{10}(2)=0;$$

4) t = 3

$$W_{10}(3)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(3)+W_{11}(4)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}7+11\\ -10+10+17\end{cases}=18; x_{10}(3)=0;$$

5) t = 4

$$W_{10}(4)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(4)+W_{11}(5)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}6+9\\ -10+10+17\end{cases}=17; x_{10}(4)=1;$$

.

.

.

13) t=12

$$W_{10}(12)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(12)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{1,0}\begin{cases}0\\ -10+10+17\end{cases}=17; x_{10}(12)=1;$$

10- қадамда 0-3 ёшдаги воситаларни алмаштириш керак эмас. 4 ёшдан катталарини алмаштириш керак, чунки янги воситалар катта даромад келтиради. Олинган натижалар i=10 га мос келган 2 та устунга ёзилади. Худди шу каби 9 та i лар учун ҳам устунлар тўлалади.

Шартли оптималлаштириш жараёни 6.4.2 -жадвални тўлдириш билан тугайди.

Шартсиз оптималлаштириш 1- қадамдан бошланади.

Айтайлик 1- қадам (ш=1) да ёши 0 га тенг бўлган янги восита мавжуд бўлсин.

$t=t_1=0$ учун оптимал ютуқ $W_1(0) = 82$. Бу қиймат янги воситани 12 йил давомида ишлатишдан олинган максимал фойдага тенг.

$W^* = W_1(0) = 82$

$W_1(0)= 82$ ютуққа $X_1(0)=0$ шартсиз бошқарув мос келади.

I=2 учун (6.4.3) формуладан $t_2=t_2+1=1$·

Шартсиз оптимал бошқариш $X_2(1)=0$ дир.

$I=3$ $t_3=t_2+1=2$

Шартсиз оптимал бошқариш $X_3(2)=0$ ва

$i = 4$	$t_4= t_3+1 = 3$	$x_4(3) =0$
$i = 5$	$t_5= t_4+1 = 4$	$x_5(4) =1$
$i=6$	$t_6=1$	$x_6(1)=0$
$i=7$	$t_7=t_6+1=2$	$x_7(2)=0$
$i=8$	$t_8=t_{7+1} =3$	$x_8(3) =0$
$i=9$	$t_9=t_8+1=4$	$x_9(4)=1$
$i=10$	$t_{10}=1$	$x_{10}(1)=0$
$i=11$	$t_{11}=t_{10}+1=2$	$x_{11}(2)=0$
$i=12$	$t_{12}=t_{11}+1=3$	$x_{12}(3)=0$

Бу масаладаги ечим ишлаб чиқариш воситаларини улар 4 «ёш»га етганларида алмаштириш зарурлигини кўрсатади.

6.5. Инвестицияларни оптимал тақсимлаш динамик программалашнинг масаласи сифатида

Инвестор Д шартли бирликдаги маблағни m та корхоналар ўртасида тақсимлашга ажратди, х- миқдордаги инвестицияни ишлатиш оқибатида i- корхона $\varphi_i(x)$ $(i=1,m)$ шартли бирликда фойда олади. Инвестицияни шундай оптимал тақсимлаш керакки, у максимал даромад келтирсин.

Ютуқ W сифатида бу ҳолда m та корхоналар келтирадиган даромад тушунилади.

Математик моделни қуриш

1.Қадам сонини аниқлаш і- қадамдаги бошқарув сифатида і корхонага бериладиган инвестиция миқдори олинади.

і - қадамдаги ютуқ функция:

$\varphi_i(X_i)$ (6.5.1.)

і - корхонанинг x_i инвестицияни ишлатишдан олган фойдасини ифодалайди

$$W = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i x_i$$

Демак, бу динамик программалаш усули билан ечилиши мумкин.

5.Янги ҳолатга ўтиш функциясини аниқлаш:

$f_i(S,X) = S - X$

Шундай қилиб, і-қадамда система S ҳолатда эди, x бошқарув танлангани учун і+1 - қадамда система S-X ҳолатда бўлади. Бошқача қилиб айтганда , агар S шартли бирликдаги маблағ бўлиб і-корхонага x шартли бирликдаги инвестиция ажратилса , у ҳолда инвестиция S-{ шартли бирлик қолади.

6.i=m учун функционал тенгламани тузиш:

$W_m(S)= \varphi_m(S)$ (6.5.3)

$X_m(S)=S$ (6.5.4)

Охирги қадамда, яъни охирги корхонага инвестицияъни қанча қолган қисм ажратилади, яъни қанча инвестиция қолган бўлса, шунча инвестиция охирги корхонага берилади. Шартли оптимал ютуқ охирги корхона даромадига тенг.

7. Асосий функционал тенгламани тузиш (6.2.4) формулага (6.5.1),(6.5.2) ифодаларни қўшиб

$$W_i(S)= \max_{x< S} \{ \varphi_i(x)+W_{i+1}(S-x)\} \quad (6.5.5)$$

функционал тенгламани ҳосил қиламиз.Бу тенгламага изоҳ берамиз. Айтайлик, i- қадам олдидан инвесторда S шартли бирлик маблағ қолди. У ҳолда у x шартли бирликдаги инвестицияни i - корхонага бериш , бу эса ўз навбатида корхонага $\varphi_i(x)$ даромад келтиришини, қолган S=x - шартли бирликдаги инвестиция эса i+1 дан m гача корхоналарга тақсимланади.

Бундай тақсимлашдан олинадиган шартли ютуқ $W_{i+1}(S-x)$ га тенг.

X шартли бошқарув оптимал бўлади ва бунда $\varphi_i(x)+W_{i+1}(S-x)$ йиғинди максимал бўлади.

6.5.1 - мисол

$\varphi_i(x)$қийматлари (i=1,3) 6.5.1 - жадвалда берилган.

6.5.1 - жадвал

X минг хисоб шарт бирлик	$\varphi_1(x)$ минг шарт бирлик	$\varphi_2(x)$ минг шарт бирлик	$\varphi_3(x)$ минг шарт бирлик
1	1,5	2	1,7
2	2	2,1	2,4
3	2,5	2,3	2,7
4	3	3,5	3,2
5	3,6	4	3,5

$x_1>x_2$ учун $\varphi_i(x_1)\geq \varphi_i(x_2)$ i=1,5

Шартли оптимизацияни амалга оширамиз.

6.5.2- жадвал

S	I=3		I=2		I=1	
	$X_3(S)$	$W_3(S)$	$X_2(S)$	$W_2(S)$	$X_1(S)$	$W_1(S)$
1	1	1.7	0	2		
2	2	2.4	1	3.7		
3	3	2.7	1	4.4		
4	4	3.2	1	4.7		
5	5	3.5	1/4	5.2	2	6.4

Жадвалнинг 1 устунда S=1,5 системанинг барча ҳолатлари, юқори сатрда қадамлар номери i=1,3 ёзилган. Ҳар бир қадамда шартли оптимал бошқарув $X_i(S)$ ва шартли оптимал ютуқлар $W_i(S)$ аниқланади.

1. Охирги i=3 қадам учун шартли оптималлаштиришни бажариш . Охирги қадамдаги функционал тенгламалар:

$W_3(S)= \varphi_3(S), X_3(S)=3$

Шунинг учун 6.5.2 - жадвалдаги 2 та устун автоматик равишда тўлдирилади.

2. i=2 учун шартли оптималлаш функционал тенглама

$$W_2(S) = \max_{x\leq S}\{\varphi_2(x)+W_3(S-X)\}$$

Шартли оптималлашни ўтказиш учун қатор ёрдамчи (6.5.3-6.5.8)- жадваллар тўлдирилади.

1)S=1

6.5.3- жадвал

X	1-X	$\varphi_2(x)$	$W_3(1-X)$	$\varphi_2(x)+W_3(1-X)$
0	1	0	1.7	1.7
1	0	2	0	2

$\max\{1,7,2\}=2$

$x \leq 1$

$W_2(1)=2;$

$X_2(1)=1$

2) $S = 2$

6.5.4- жадвал

X	2-X	$\varphi_2(x)$	$W_3(2-X)$	$\varphi_2(x)+W_3(2-X)$
0	2	0	12,4	2,4
1	1	2	1,7	3,7
2	0	2,1	0	2,1

$\max\{2,4;3,7;2,1\}=3,7$

$x \leq 2$

$W_2(2)=3.7;$

$X_2(2)=1$

3) $S = 3$

6.5.5 - жадвал

X	3-x	$\varphi_2(x)$	$W_2(3-x)$	$\varphi_2(x)-W_2(3-x)$
0	3	0	2.7	2.7
1	2	2	2.4	4.4
2	1	2.1	1.7	3.8
3	0	2.3	0	2.3

$\max\{2,7;\ 4,4;\ 3,8;\ 2,3\}=4,4$

$x \leq 3$

$W_2(3)=4.4$

$X_2(3)=1$

4) $S = 4$

6.5.6 - жадвал

X	4-x	$\varphi_2(x)$	$W_3(4-x)$	$\varphi_2(x)+W_3(4-x)$
0	4	0	3,2	3,2
1	3	2	2,7	4,7
2	2	2.1	2.4	4.5
3	1	2.3	1.7	4
4	0	3.5	0	3.5

$\max\{3,2;\ 4,7;\ 4,5;4;\ 3,5\}=4,7$
$x \leq 4$
$W_2(4) = 4.7$
$X_2(4) = 1$
5) $S = 5$

6.5.7 - жадвал

X	5-x	$\varphi_2(x)$	$W_3(5\text{-}x)$	$\varphi_2(x)+W_3(5\text{-}x)$
0	5	0	3,5	3,5
1	4	2	3,2	5,2
2	3	2.1	2,7	4,8
3	2	2.3	2,4	4,7
4	1	3,5	1,7	5,2
5	0	4	0	4

$\max\{3,5;\ 5,2;\ 4,8;\ 5,2;\ 4\}=5,2$
$x \leq 5$
$S=5\ W_2(5) = 5.2$
$X_2(5) = 1$
$X_2(5) = 4$
$S=5\ W_2(5) = 5.2$ учун 2 та шартли оптимал бошқарув $X_2(5) = 1$ ва $X_2(5) = 4$ мос келади.

3. i=1 учун шартли оптималлаш

1- қадамдан аввалги системанинг ҳолати маълум S=D=5 шартли оптималлашни фақат шу қиймат учун ўтказиш зарур.

S=5

6.5.8- жадвал

X	5-x	$\varphi_1(x)$	$W_2(5-x)$	$\varphi_1(x)+W_2(5-x)$
0	5	0	5,2	5,2
1	4	1,5	4,7	5,2
2	3	2	4,4	6,4
3	2	2,5	3,7	6,2
4	1	3	2	5
5	0	3,6	0	3,6

$\max\limits_{x\le 5}\{5,2;\ 6,2;\ 6,4;\ 6,2;5,3,6\} = 6,4$

демак $W_1(5) = 6,4$, $x_1(5) = 2$

5 минг шартли бирликдаги маблағни 5 та корхонага оптимал фойда 6.4 минг шартли бирликка тенг.

$W^* = W_1(5) = 6,4$

Шартли оптималлаштиришни олиб борамиз. Унинг натижалари жадвалда белгиланган.

$i=1,\quad S_1=5,\quad W_1(5)=6,4\quad X_1=X_1(5)=2$

$i=2$ қадам учун (6.5.2) формуладан

$S_2=S_1-X_1=5-2=3$ ни ҳосил қиламиз.

$W_2(3)=4,4,\quad x_2=x_2(3)-1$

$i=3$ учун $\quad S_3 = S_2 - X_2 = 3 - 1 = 2$

$W_3(2) = 2,4,\quad x_3 = x_3(2) = 2$

$x^* = (2,1,2)$

Шундай қилиб 6400 шартли бирликдаги максимал фойдани олиш учун биринчи ва учинчи корхоналарга 200 шартли бирлик ва 2- корхонага 1000 шартли бирлик инвестиция ажратиш зарур.

Шуни таъкидлаш керакки, олинган натижа оптимал ечимга яқинлашишидир. Уни янада яхшилаш мумкин. Бунинг учун (босқич) ларни янада кичиклаштириш зарур. (Масалан юқоридаги мисолда корхонага бериладиган инвестицияларни 500 шартли бирликка каррали қилиб бўлиш мумкин).

Хулоса қилиб шуни айтиш керакки, динамик программалашнинг математик модели қурилгандан сўнг, яъни 1-7 пунктлар бажарилгандан сўнг, ҳисоб-китоблар учун программа тузиш мумкин.

Компьютерда ҳисоб-китобларни амалга ошириш катта ўлчамли масалаларни ечиш имконини, оптимал ечимга етарлича яқин ечимни топиш имконини беради.

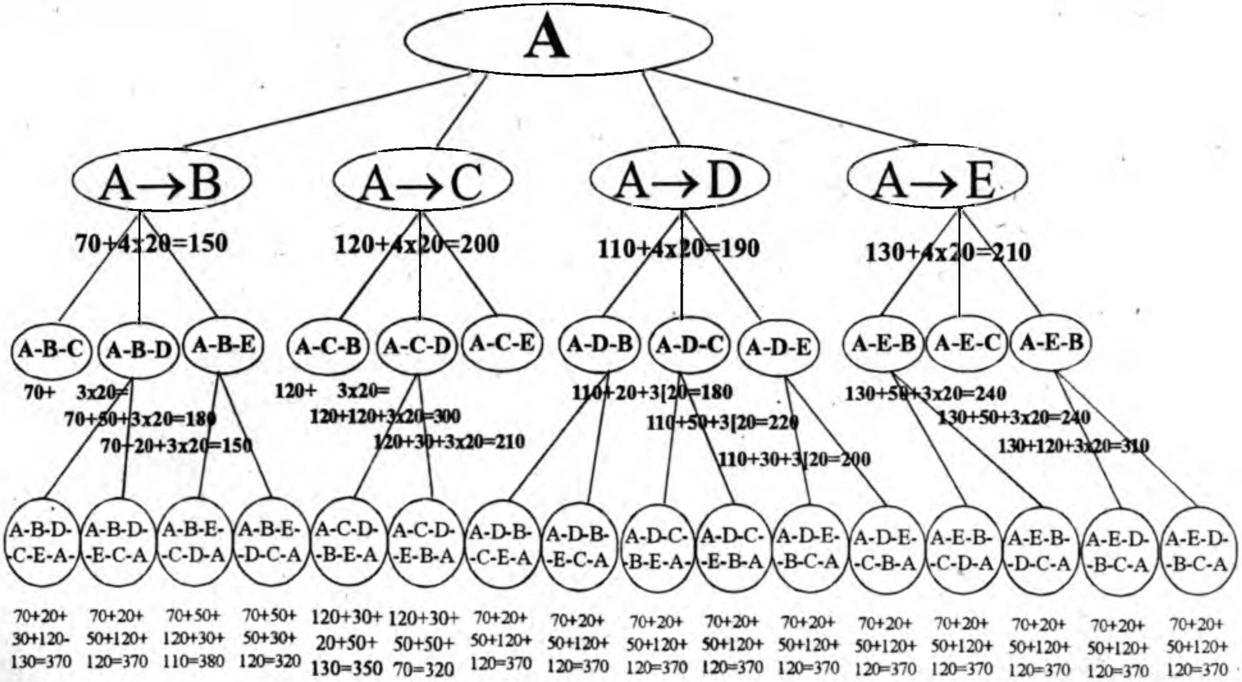


Рис. 5.3.2

Метод ветвей и границ. Решение задачи коммивояжера

6.4.2-жадвал

T	i=12		i=11		i=10		i=9		i=8		i=7		i=6		i=5		i=4		i=3		i=2		i=1	
	X_{12}	W_{12}	X_{11}	W_{11}	X_{10}	W_{10}	X_9	W_9	X_8	W_8	X_7	W_7	X_6	W_6	X_5	W_5	X_4	W_4	X_3	W_3	X_2	W_2	X_1	W_1
0	0	10	0	19	0	27	0	34	0	40	0	45	0	51	0	58	0	64	0	70	0	75	0	82
1	0	9	0	17	0	24	0	30	0	35	0	41	0	48	0	54	00	60	0	65	0	72	0	78
2	0	8	0	15	0	21	0	26	0	32	0	39	0	45	0	51	0	56	0	63	0	69	0	74
3	0	7	0	13	0	18	0	24	0	31	0	37	0	43	0/1	48	0	55	0	61	0	67	0	73
4	0	6	0	11	1	17	1	24	0/1	30	0	36	0/1	41	1	48	0/1	54	0	60	0	66	1	72
5	0	5	0/1	9	1	17	1	24	1	30	0/1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	0/1	65	1	72
6	0	4	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
7	0	3	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
8	0	2	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
9	0	1	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
10	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
11	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
12	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72

МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

(Ўқув қўлланма)

Муҳҳарир: **Жаббарова З.**
Мусаҳҳиҳ: **Одинцова В.**
Компьютер устаси: **Назарова Е.**

Босишга рухсат этилди 18.04.2001. Бичими 84x108 1/32.
Босма тобоғи 4,5. Адади 1000 нусха.
Баҳоси келишилган нархда. Буюртма № 33.

Нашриёт-матбаа маркази КУНПЦП
г. Кувасай ул. Мустакиллик.

«Янги аср авлоди» нашриёт-матбаа маркази.
700113, Тошкент, Чилонзор-8, Катортол кўчаси, 60.