Ўзбекистон Республикаси
Олий ва Ўрта Махсус Таълим
Вазирлиги

Тошкент Молия Институти

«МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ» фанидан масалалар тўплами

Тошкент – 2003 й.

Тузувчилар: проф. Қ. Сафаева,
доц. Э. Мамуров,
кат.ўқит.Ш. Бобожонов,
ассис. Ф. Шомансурова.

Тақризчилар: доц. Х.Жумаев,
доц. Т. Адиров.

Тошкент молия институти илмий-услубий кенгаши қарори асосида чоп этилди.

Сўзбоши

Мазкур масалалар тўплами иқтисодий олий ўқув юртларининг бакалавриат йўналишидаги талабалари учун «Математик программалаш» фанидан тузилган намунавий ўқув дастурлар асосида яратилган. Ҳар бир ўтилган назарий маъруза мавзусини талабалар томонидан амалий жиҳатдан мустаҳкамлаш мақсадида, тўпламга киритилган масалалар мавзулар бўйича амалий машғулотларга бўлинган. Кўпчилик машғулотларда шу машғулот мавзусига оид қисқача назарий маълумотлар ва типик масалаларнинг ечиш намуналари келтирилган.

Тақдим этилаётган масалалар тўпламидан амалий машғулот дарсларидан ташқари, талабаларнинг мустақил таълим жараёнларида ҳам фойдаланиш мумкин. Қўлланма бўйича билдирилган таклиф ва фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар олдиндан ўз миннатдорчиликларини билдириб қоладилар.

1- машғулот

Чизиқли моделлар.
Чизиқли программалаш масалалари.

1. Корхонада А, В ва С маҳсулотларни тайёрлаш учун токарлик, фрезерлик, пайвандлаш ва силлиқлаш ускуналаридан фойдаланилади. Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун сарфланадиган вақт нормаси, ҳар бир ускунанинг умумий иш вақти фонди, ҳамда ҳар бир турдаги бирлик маҳсулотни сотишдан олинадиган даромад ҳам 1- жадвалда келтирилган.

1-жадвалда

Ускуналар	**Ҳар бир турдаги маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарфланадиган вақт (станок-соат)**			**Ускунанинг умумий иш вақти фон-ди (соат)**
	А	**В**	**С**	
Токарлик	1	8	6	280
Фрезерлик	2	4	5	120
Пайвандлаш	7	4	5	240
Силлиқловчи	4	6	7	360
Даромад (шартли бирлик)	10	14	12	

Корхона маҳсулотларни сотишдан оладиган даромад энг кўп бўлиши учун қайси турдаги маҳсулотдан қанча ишлаб чиқариш кераклигини аниқлаш талаб қилинади. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Айтайлик, корхона x_1 дона А, x_2 дона В ва x_3 дона С маҳсулот тайёрлашни режалаштирган бўлсин. У ҳолда, шунча миқдордаги маҳсулотни тайёрлаш учун $1\,x_1+8x_2+6x_3$ станок-соат токарлик ускунасининг вақти сарфланади.

Токарлик ускунасидан фойдаланиш вақти жами 280 соатдан ошмаслиги керак, яъни

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280$$

тенгсизлик бажарилиши лозим.

Худди шунга ўхшаш мулоҳазалар билан фрезерлик, пайвандлаш ва силлиқлаш ускуналаридан фойдаланиш вақтига нисбатан қуйидаги тенгсизликлар ҳосил бўлади.

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360$$

Тайёрланадиган маҳсулотлар сони манфий бўла олмайди, шу сабабли

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Шунингдек, агар x_1 бирлик А, x_2 бирлик В ва x_3 бирлик С маҳсулот тайёрланса, уларни сотишдан корхона оладиган жами даромад $F=10x_1+14x_2+12x_3$ шартли бирликни ташкил этади.

Шундай қилиб, қуйидаги математик масалага келамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases} \qquad (1)$$

системани қаноатлантирувчи шундай

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \qquad (2)$$

номаълумларни топиш керакки, улар

$$F=10x_1+14x_2+12x_3 \qquad (3)$$

функцияга максимал қиймат берсин.

Юқорида келтирилган (1), (2) ва (3) муносабатлар берилган масаланинг математик моделини ифодалайди.

2. Чорва молларини тўйимли озиқлантириш учун ҳар чорва моли бир кунда А озуқа моддасидан камида 60 бирлик, В озуқадан камида 50 бирлик ва С озуқа моддасидан камида 12 бирлик қабул қилиши керак. Кўрсатилган озуқа моддалар 3 хил турдаги ем маҳсулотлари таркибида мавжуд. Ҳар 1 кг ем маҳсулоти таркибидаги озуқ моддаларнинг миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган:

Озуқ моддалар	**1кг ем маҳсулоти таркибидаги озуқ моддалар миқдори**		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Агар 1 кг I, II ва III турдаги ем маҳсулотларининг баҳоси мос равишда 9, 12 ва 10 шартли бирликдан иборат бўлса, баҳоси энг арзон бўлган ҳамда зарур тўйимлиликка эга бўлган кунлик рацион қандай бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Кунлик рацион таркибидаги I хил ем миқдори x_1, II хилиники x_2 ва III хил ем миқдори x_3 бўлсин. У ҳолда рационнинг зарур тўйимлиликка эга бўлиши талаби қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 60 \quad , \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 50 \quad , \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 12 \quad , \end{cases}$$

Ўз маъносига кўра $x_1, x_2, x_3,$ номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни:
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Кунлик рационнинг умумий баҳоси эса

$$F= 9x_1+12x_2+10x_3$$

функция билан ифодаланади.

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг математик модели қуйидаги муносабатлардан иборатди:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60 \quad , \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50 \quad , \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12 \quad , \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \qquad (5)$$

$$F=9x_1+12x_2+10x_3 \rightarrow min. \qquad (6)$$

3. Ўлчами 6x13 $м^2$ бўлган тунука материалларини шундай қирқиш керакки, унда икки хилдаги қирқимлар, яъни ҳар бири 4x5 $м^2$ ўлчамли 400 та, ҳар бири 2x3 $м^2$ ўлчамли 800 та қирқимлар ҳосил бўлсин. Ҳар бир тунукани қирқиш усуллари ва бунда олинадиган турли ўлчамдаги қирқимлар сони қуйидаги жадвалда берилган.

Қирқимлар ўлчами ($м^2$)	**Тунукани қирқиш усуллари**			
	I	**II**	**III**	**IV**
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Умумий сони кўрсатилган миқдордан кам бўлмаган ва энг кам чиқиндига эга бўлган қирқимлар тайёрлаш режасини топинг. Масалани математик моделини тузинг.

Ечилиши: Масаланинг номаълумларини белгилаймиз:

x_1- I усулда, x_2- II усулда, x_3- III усулда ва x_4- IV усулда қирқиладиган тунукалар сони бўлсин. Унда, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

бўлиши кераклиги равшандир.

Агар битта тунука донаси I усулда қирқилса, ундан 6x13$м^2$- (3(4x5)+2x3)$м^2$=78$м^2$-66$м^2$=12$м^2$ чиқинди ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш, II усулда қирқилса, 78$м^2$-(2(4x5)+6(2x3))$м^2$=78$м^2$-76$м^2$=2$м^2$ чиқинди, III усулда 78$м^2$-74$м^2$=4$м^2$ ва IV усулда чиқинди ҳосил бўлмайди. Тунукаларни қирқишда ҳосил бўладиган жами чиқиндилар миқдори $F=12x_1+2x_2+4x_3+0x_4$ йиғиндидан иборат бўлиб, мақсадимиз уни минималлаштиришдир. Масаланинг математик модели қуйидагича

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 800 \quad , \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 400 \quad , \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \qquad (8)$$

$$F=12x_1+2x_2+4x_3 \rightarrow min. \qquad (9)$$

Юқорида кўрсатилган масалаларнинг математик моделларида (1), (2), (4), (5), (7), (8) шартлар чегаравий шартлар ва (3), (6), (9) функциялар эса мақсад функцияси деб аталади.

4. Дейлик, A_1, A_2, A_3 хўжаликлар B_1, B_2, B_3, B_4 пунктларни ҳар куни мос равишда 40, 50, 30 центнер сут билан таъминлаши керак бўлсин. Истеъмолчи пунктларининг маҳсулотга бўлган бир кунлик талаби ва 1 центнер сутни истеъмолчиларга етказиб бериш учун сарфланадиган транспорт харажатлари қуйидаги жадвалда берилган.

Хўжаликлар	**1ц. сутни ташиш харажатлари**				**Ташиш учун мўлжалланган сут ҳажми (ц)**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Истеъмолчилар талаби (ц)	20	40	30	30	120

Хўжаликлардан истеъмолчиларга сут ташишнинг шундай режасини топингки, бунда хўжаликлардан барча сут ташиб кетилсин, истеъмолчиларнинг талаби тўла қондирилсин, ҳамда жами ташиш харажатлари энг кам бўлсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ечилиши: Бу масалада x_{ij} –орқали i-хўжаликдан j-истеъмолчи пунктга ташиш режалаштирилган сут миқдорини белгилаймиз. Хўжаликлардаги жами сут ҳажми ва истеъмолчиларга зарур бўлган жами сут миқдори бир-бирига тенг бўлиб, 120 центнерни ташкил этади.

Демак, хўжаликлардаги жами сут миқдори бутунлай ташиб кетилиши ва истеъмолчиларнинг талаблари тўлалигича қондирилиши керак бўлади. (10.1 ва 10.2-муносабатлар)

Маъносига кўра x_{ij} номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4).$

Сутни ташишдаги жами транспорт харажатлари

$$3x_{11}+2{,}5x_{12}+3{,}5x_{13}+4x_{14}+2x_{21}+4{,}5x_{22}+5x_{23}+x_{24}+6x_{31}+3{,}8x_{32}+4{,}2x_{33}+2{,}8x_{34}$$

йиғинди билан ифодаланади. Шундай қилиб, ушбу масаланинг математик модели қуйидаги муносабатлардан иборатдир:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=40 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=30 \end{cases} \qquad (10.1)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=20 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=30 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \end{cases} \qquad (10.2)$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{34} \geq 0 \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= 3x_{11} + 2{,}5x_{12} + 3{,}5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4{,}5x_{22} + 5x_{23} + x_{24} \\ &+ 6x_{31} + 3{,}8x_{32} + 4{,}2x_{33} + 2{,}8x_{34} \to \min \end{aligned} \qquad (12)$$

Бу моделдаги (10.1) муносабат хўжаликлардаги жами сут миқдори бутунлай ташиб кетилишни ва (10.2) муносабат эса истеъмолчиларнинг талаблари тўла қондирилишини ифодалайди.

Биз баъзи содда иқтисодий масалалар математик моделларининг намуналари сифатида келтирган юқоридаги масалаларда чегаравий

шартлар чизиқли тенгсизлик ёки тенгламалар системасидан, ҳамда мақсад функциялари ҳам чизиқли функциялар бўлганлиги учун улар чизиқли программалаш масалалари деб аталади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Қандолатчилик фабрикаси 3 турдаги A, B ва C карамелларни ишлаб чиқариш учун 3 турдаги хом ашёдан, яъни шакар, мева қиёми ва шиннидан фойдаланади. Ҳар бир турдаги карамелдан 1 т ишлаб чиқариш учун сарфланадиган турли хом ашёлар миқдори (нормалари) қуйидаги жадвалда келтирилган. Шунингдек, жадвалда фабрика ишлатиши мумкин бўлган ҳар бир турдаги хом ашёларнинг умумий миқдори ва ҳар бир турдаги карамелнинг 1 тоннасини сотишдан олинадиган даромад ҳам келтирилган.

Хом ашё тури	**1т. карамел учун сарфла-надиган хом ашё нормаси (т)**			**Хом ашёнинг умумий миқ-дори (тонна)**
	A	**B**	**C**	
Шакар	0,8	0,5	0,6	800
Шинни	0,4	0,4	0,3	600
Мева қиёми	-	0,1	0,1	120
1т маҳсулотни сотишдан кела-диган даромад (шартли бирлик)	108	112	126	

Фабриканинг оладиган даромадини максималлаштирувчи карамель ишлаб чиқариш режаси топиш масаласининг математик модели тузилсин.

2. Сутни қайта ишлаш заводи шиша идишларда қадоқланган сут, кефир, қаймоқ ишлаб чиқаради. 1 тоннадан сут, кефир, қаймоқ ишлаб чиқариш учун мос равишда 1010 , 1010 ва 9450 кг сут зарур бўлади. Бунда 1 тонна сут ва кефир тайёрлашда мос равишда 0,18 ва 0,19 машина-соат иш вақти сарфланади. 1 тонна қаймоқ тайёрлаш учун махсус автоматлар 3,25 соат ишлайди. Завод сут маҳсулотларини ишлаб чиқариш учун ҳаммаси бўлиб 136000 кг сут ишлатиши мумкин. Асосий ишлаб чиқариш жиҳозлари 21,4 машина-соат, қаймоқ қуйиш автоматлари эса 16,25 соат ишлаши мумкин. 1 тонна сут, кефир ва қаймоқни сотишдан олинадиган даромад мос равишда 30, 22 ва 136 бирликка тенг. Завод бир кунда 100 тоннадан кам бўлмаган миқдорда шиша идишга қадоқланган сут ишлаб чиқариши керак. Маҳсулотнинг бошқа тур-

лари учун чегаралар йўқ. Завод ҳар куни маҳсулотни қандай миқдорда ишлаб чиқарса, уни сотишдан келадиган даромад максимал бўлади? Масаланинг математик модели тузилсин.

3. Тикув фабрикасида 4 турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун 3 артикулдаги газламалар ишлатилади. Турли маҳсулотнинг биттасини тикиш учун сарфланадиган турли артикулдаги газламалар нормаси жадвалда келтирилган. Фабрика ихтиёридаги ҳар бир артикулдаги газламаларнинг умумий миқдори ва маҳсулотлар баҳоси ҳам ушбу жадвалда берилган. Фабрика ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча миқдорда ишлаб чиқарса, ишлаб чиқарилган маҳсулотлар баҳоси максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Газлама артикули	**1 та маҳсулотга сарфланадиган газлама нормаси (м)**				**Газламаларнинг умумий миқдори (м)**
	I	**II**	**III**	**IV**	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Маҳсулотлар ба-ҳоси (минг сўм)	9	6	4	7	

4. Корхона 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқаришда: токарлик, фрезерлик ва силлиқлаш жиҳозларидан фойдаланади. Ҳар бир турдаги жиҳознинг маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришга сарфлайдиган вақт нормаси жадвалда келтирилган. Ҳар бир турдаги жиҳознинг умумий иш вақти фонди, ҳамда турли маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад ҳам ушбу жадвалда берилган.

Жиҳоз тури	**Ҳар бир турдаги бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришга сарфланадиган вақт**				**Умумий иш вақти фонди (станок-соат)**
	I	**II**	**III**	**IV**	
Токарлик	2	1	1	3	300
Фрезерлик	1	-	2	1	70
Силлиқлаш	1	2	1	-	340
Бир бирлик маҳсулот сотишдан келадиган даромад (ш.б.)	8	3	2	1	

Энг кўп даромад келтирадиган ишлаб чиқариш режасини топиш масаласининг математик модели тузилсин.

5. Корхона 3 турдаги маҳсулотни ишлаб чиқармоқда. Ишлаб чиқаришнинг бир ойлик дастурига асосан корхона 2000 та 1- турдаги, 1800 та 2 – турдаги ва 1500 та 3 – турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Маҳсулот ишлаб чиқариш учун бир ойлик харажати 61000 кг дан ошмайдиган хом ашё ишлатилмоқда. 1 – турдаги маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун 8 кг хом ашё, 2- турдаги маҳсулот бирлиги учун 10 кг, 3 – турдаги маҳсулот учун эса 11 кг сарф қилинади. 1- турдаги маҳсулотнинг улгуржи баҳоси 70 сўм, 2- ва 3 - маҳсулотлариники эса мос равишда 100 ва 70 сўмни ташкил қилади. Корхонага максимал даромад келтирадиган маҳсулот ишлаб чиқаришнинг оптимал режаси топилсин.

6. Механика заводи 2 турдаги детални ишлаб чиқариш учун токарлик, фрезерлик ва пайвандлаш жиҳозларини ишлатади. Шу борада ҳар бир детални 2 хил технологик усул билан ишлаб чиқариш мумкин. Ҳар бир жиҳознинг вақт фонди берилган. Ҳар бир технологик усул билан турли мосламада деталлар бирлигини ишлаб чиқариш учун

сарфланадиган вақт харажати нормаси ва деталлар бирлигини ишланишидан олинадиган фойдалар қуйидаги жадвалда келтирилган. Корхонага максимал фойдани таъминловчи жиҳозлар юкланишининг оптимал режасини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Жиҳоз тури	**Деталлар**				**Самарали вақт фонди (станок-соат)**
	1		**2**		
	Технологик усуллар				
	1	**2**	**1**	**2**	
Токарлик	3	2	3	0	20
Фрезерлик	2	2	1	2	37
Пайвандловчи	0	1	1	4	30
Фойда, (ш.б.)	11	6	9	6	

7. Корхона омборида узунлиги 8,1 метр бўлган темир қуймалар мавжуд. Бу қуймалардан анча кичик бўлган 100 та қуйма маҳсулотлар комплектини тайёрлаш зарур бўлсин. Ҳар бир комплект таркибига 2 та 3 метрли, 1 та 2 метрли ва 1 та 1,5 метрли қуйма маҳсулотлар киради. Берилган материаллардан шундай фойдаланиш керакки, қуйма маҳсулотлар комплекти талаб қилинган миқдорда минимал чиқим билан тайёрлансин. Турли хил усуллардаги ишлов натижасида бир қуймадан олинадиган хомаки маҳсулотлар сони, ҳамда чиқиндилар миқдори жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар ўлчами (м)	**Кесиш усуллари**								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Чиқиндилар (м)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

8. Хўжалик карам, картошка ва кўп йиллик ўтлар экишга мослашган. Бунинг учун хўжалик ихтиёрида 850 га ҳайдаладиган ер майдони, 1500 тонна органик ўғитлар, 50000 киши-кунлар меҳнат ресурслари мавжуд. Маҳсулотлар бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ер, органик ўғит ва меҳнат ресурслари харажати қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хўжалик карам, картошка ва кўп йиллик ўтлардан қанча ишлаб чиқарганда пул ифодасидаги ялпи маҳсулот миқдори максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Кўрсаткичлар	Экин тури		
	Карам	**Картошка**	**Кўп йиллик ўт**
Меҳнат сарфи, (киши-кун)	50	30	10
Органик ўғитлар сарфи,(т)	20	15	10
Ялпи маҳсулот чиқими,(сўм)	1000	800	200

9. Қуйидаги жадвалда берилган маълумотларга кўра ҳайвонлар овқатланишининг оптимал суткали рационини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Овқатбоп маҳсулотлар (ш.б.)	Бир бирлик хашак турдаги овқатбоп маҳсулотлар таркиби		Истеъмолнинг минимал суткалик нормаси (ш.б.)
Хашак	1	0,5	5
Ҳазм қилинадиган протеин	80	200	560
Калций	1	8	20
Бир бирлик хашакнинг нархи,(сўм)	3	5	

10. Рацион $П_1$ ва $П_2$ маҳсулотлардан иборат. Уларнинг ҳар бирига А, В ва С витаминлар киради. Бир суткалик минимал истеъмол А витамин учун 100 бирлик, В дан 80 бирлик, С дан эса 160 бирликни ташкил қилади. Бир бирлик $П_2$ маҳсулотнинг баҳоси 0,3 сўм, $П_1$ ники эса 0,2 сўм. Қуйидаги жадвалда ҳар бир турдаги маҳсулот таркибидаги витаминлар миқдори келтирилган. Энг арзон тушадиган рацион вариантини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Витаминлар	Бир бирлик маҳсулот таркибидаги витаминлар миқдори	
	$П_1$	**$П_2$**
А	0,1	0,5
В	0,25	0,1
С	0,2	0,4

11. Савдо ташкилоти 3 турдаги товарларни сотиш учун қуйидаги ресурслардан фойдаланмоқда: вақт ва сотув муассасаларининг майдони.

Ҳар бир турдаги маҳсулотнинг бир партиясини сотиш учун ресурслар харажати жадвалда берилган. 1- маҳсулот турининг 1- партиясини айирбошлашдан тушган даромад 5 минг сўм, 2- сидан 8 минг сўм ва 3- сидан 6 минг сўм. Савдо ташкилотига максимал фойдани таъминловчи энг оптимал товар айирбошлаш режасини топишнинг математик моделини тузинг.

Ресурслар	Товарлар турлари			Ресурслар ҳажми
	1	2	3	
Вақт	0,5	0,7	0,6	970
Майдон,($м^2$)	0,1	0,3	0,2	90

12. Аҳолининг талабини ҳисобга олган ҳолда пойафзал дўкони режа даврида чарм пойафзаллардан камида 140000 (ш.б.) ва бошқа пойафзаллардан камида 40000 (ш.б.) сотиши керак. Айирбошлашдан тушадиган даромад ва харажатларни билган ҳолда, дўкон товаробороти камида 200000 (ш.б.) ва унинг даромади 2500 дан кам бўлмаслик шартида харажатларни минималлаштирувчи сотув режасини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Кўрсаткич (фоиз)	Пойафзал	
	Чарм пойафзал	Бошқа пойафзаллар
Даромад	1	2
Харажатлар	6	5

13. Уч хил P_1, P_2 ва P_3 маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун

тўрт хил S_1, S_2 ,S_3 ва S_4 хом ашёлар ишлатилади. Хом ашёлар заҳираси, ҳар бир маҳсулотга кетган хом ашё харажатларининг технологик нормалари ва маҳсулотнинг бирлигининг баҳоси жадвалда келтирилган. Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг пул ифодасини максималлаштирувчи ишлаб чиқиш режасини аниқлаш масаласининг математик моделини тузинг.

Хом ашё турлари	Хом ашё заҳираси (кг)	Битта маҳсулотга кетган хом ашёлар нормаси (кг)		
		P_1	P_2	P_3
S_1	150000	4	2	1
S_2	170000	6	0	2
S_3	100000	0	2	4
S_4	200000	8	7	0
Битта маҳ-сулотнинг баҳоси (сўм)		100	150	200

14. 30-40 кг оғирликдаги чорва молларини озуқлантириб, ўртача 300-400 кг оғирликни таъминлаш учун кунлик рацион таркибида қуйидаги миқдорда озуқлантирувчи моддалар бўлиши керак: ем-хашак бирлиги – 1,6 дан кам эмас, ҳазм қилинадиган протеин – 200 г дан кам эмас, каротин – 10 мг дан кам эмас. Озуқлантиришда арпадан, дуккакли маҳсулотлардан ва сомонли ундан фойдаланилади. 1 кг емдаги озуқа моддаларининг таркиби ва 1 кг емнинг баҳоси жадвалда кўрсатилган.

Кунлик рационнинг оптимал режасини тузинг.

Озуқлантирувчи модданинг номи	1 кг ем таркибидаги озуқа моддаларининг миқдори		
	арпа	**дуккакли**	**сомонли ун**
Ем бирлиги (шартли)	1,2	1,4	0,8
Ҳазм қилина-диган протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
1 кг емнинг баҳоси,(ш.б.)	3	4	5

15. Юзаси мос равишда 0,8 ва 0,6 млн.га тенг бўлган иккита тупроқ зонаси бор. Зоналар бўйича экинларнинг ҳосилдорлиги ва 1 ц доннинг баҳоси жадвалда келтирилган. Кузги экинларни 20 млн.ц. дан кам бўлмаган ва баҳорги экинларни 6 млн.ц. дан кам бўлмаган

миқдорда ишлаб чиқариш талаб қилинади. Кузги ва баҳорги донли экинлар майдони қандай бўлганда пул ифодасидаги ишлаб чиқарилган жами маҳсулотлар миқдори максимал бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар тури	ҳосилдорлик, ц/га		1 ц. маҳсулот баҳоси,$
	1-зона	**2-зона**	
Кузги экинлар	20	25	8
Баҳорги экинлар	25	20	7

16. Жадвалда берилган маълумотларга асосланиб режадан ортиқ мебель ишлаб чиқариш режасини шундай тузингки, бунда меҳнат резервларидан тўлиқ фойдаланган ҳолда ишлаб чиқарилган жами маҳсулотнинг пул қиймати максималлаштирилсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Ишлаб чиқариш фактори	Фанер, $м^3$	Тахта, $м^3$	Меҳнат, киши/смена	Нархи (минг сўм)
Сарфлаш нормалари:				
1 сервантга	0,2	0,1	2	150
1 шифонерга	0,1	0,2	1	120
И/ч факторлари захираси	60	40	500	

17. Хўжаликда чорвачиликни ривожлантириш учун 324 минг сўм ажратилган. Шундан 180 минг сўми иш ҳақига, 144 минг сўми моддий харажатлар (техник хизмат кўрсатиш) га тақсимланган. Жадвалда 1 ц. сут ва гўшт учун сарфланадиган харажатлар, шунингдек, сотув нархлари кўрсатилган. Хўжалик камида 6000 ц. сут ва 1000 ц. гўшт ишлаб чиқариши керак. Чорвачилик маҳсулотларини ишлаб чиқариш режасини шундай тузингки, унда хўжаликнинг чорвачиликдан оладиган даромади максимал бўлсин. Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	**Меҳнат сарфи, сўм**	**моддий харажатлар**	**Сотув нархи, сўм**
Сут	12	8	25
Гўшт	90	80	200

18. Қоғоз комбинати хилма-хил турдаги қоғозларни ишлаб чиқариш режасини бажарди. Шунингдек, хом ашёдан иқтисод қилиб

қолди. 50 т целлюлоза, 80 т ёғоч массаси ва 2 т каолин фойдаланилмай қолди. Жадвалда ҳар хил турдаги қоғоздан 1 т ишлаб чиқариш учун кетадиган целлюлоза, ёғоч массаси, каолин нормаси берилган. 1 т босмахона қоғозидан 5 бирлик, 1 муқова қоғозидан 6 бирлик, 1 т ёзув қоғозидан 8 бирлик фойда кўрилади. Иқтисод қилинган маҳсулотдан қанча миқдорда ва қандай қоғоз турини ишлаб чиқарилса, корхона фойдаси кўпроқ бўлади? Бунда хом ашёнинг қайси тури ва қанча миқдори ортиб қолади? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	**Хом ашёлар**		
	Целлюлоза	**Ёғоч массаси**	**Каолин**
Босмахона қоғози	206	829	20
Муқова қоғози	424	627	10
Ёзув қоғози	510	518	12

19. Маиший хизмат уйидаги дурадгорлик устахонасида савдо тармоқлари учун стол ва тумбочкалар ишлаб чиқариш йўлга қўйилган. Уларни тайёрлаш учун икки турдаги 72 $м^3$ ва 56 $м^3$ ёғоч бор. Жадвалда бир дона маҳсулот учун кетадиган ёғоч миқдори кўрсатилган. Битта столни ишлаб чиқаришдан устахона 4,4 бирлик соф фойда олади, битта тумбочкадан 2,8 бирлик фойда олади. Устахона ўзида бор материалдан қанча стол ва тумбочка ишлаб чиқарса, кўпроқ фойда олиш масаласининг математик моделини тузинг.

Маҳсулот	**Хом ашёлар**	
	1 - турдаги ёғоч	**2 - турдаги ёғоч**
Стол	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

20. Авиакомпания икки турдаги самолётда маълум бир йўналишларда пассажирларни ташишни амалга оширади. Биринчи тур самолёт экипажи 3 кишидан иборат бўлиб, бир рейсда 45 та пассажирни ташийди, иккинчи тур самолёт экипажи 6 кишидан иборат бўлиб, бир рейсда 80 та пассажирни ташийди. Биринчи тур самолётни эксплуатация қилиш 600 (ш.п.б.) , иккинчи тур самолётни эксплуатация қилиш 900 (ш.п.б.) бўлади.

Режадаги давр ичида ушбу йўналишда 5000 та пассажир ташиш кераклиги маълум. Агар ҳар бир рейсда 360 кишидан ортиқ бўлмаган кишини ташиш мумкин бўлса, у ҳолда иккала турдаги самолётлардаги рейслар миқдори қанча бўлганда самолётларни

эксплуатация қилиш харажатлари минимал миқдорда бўлади? Масаланинг математик моделини тузинг.

21. Цехнинг бир участкаси икки турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Бир кунлик режа бўйича биринчи турдаги маҳсулотдан (№ 1) 60 дона, иккинчи турдаги маҳсулотдан (№ 2) 80 та ишлаб чиқарилиши керак. Бир кунлик ресурслар эса қуйидагича: ишлаб чиқариш ускуналари 600 станок-соат, хом ашё 300 т, 420 киши-соат меҳнат ресурси ва 450 кВт/соат электроэнергия. Бир дона маҳсулотга сарф қилинадиган ресурслар миқдори қуйидаги жадвалда берилган. Биринчи маҳсулотнинг нархи 50 сўм, иккинчи турдаги маҳсулотнинг

нархи 60 сўм. Ишлаб чиқариладиган маҳсулотлардан максимал фойда кўриш учун ҳар бир маҳсулотдан қанчадан ишлаб чиқариш керак? Масаланинг математик моделини тузинг.

Маҳсулотлар	**и/ч ускунаси (ст/с)**	**Хом ашё (т)**	**Меҳнат (киши/соат)**	**Электроэнергия (кВт/с)**
№ 1	4	2	2	3
№ 2	3	1	3	2

22. Чорва молларини яхшироқ боқиш учун кундалик рационда А витаминдан 6 бирлик, В витаминдан 12 бирлик, С витаминдан 4 бирлик бўлиши керак. Молларни боқиш учун икки турдаги емдан фойдаланилади. Жадвалда ем таркибидаги фойдали озуқа моддалари улуши, озуқа моддаларига бўлган кундалик эҳтиёж ва емлар бирлигининг нархи берилган. Чорвани боқиш учун энг арзон бўлган кундалик рационни аниқланг, масаланинг математик моделини тузинг.

Озуқа моддалари	**1 кг емдаги озуқа моддалари миқдори**		**Молларнинг озуқа моддаларига бўлган кундалик эҳтиёжи**
	I	**II**	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
1 кг емнинг нархи,(сўм)	50	60	

23. Бензиннинг 2 туридан А ва В аралашмаси ҳосил бўлади. А аралашмаси 60 % 1-навли бензиндан, 40 % 2- нав бензиндан ташкил топади. В аралашмаси 80 % 1- нав бензиндан, 20 % 2- нав

бензиндан ташкил топади. 1 кг А аралашмасининг нархи 10 бирлик, 1 кг В аралашмасининг нархи 12 бирлик: 1-нав бензиндан 50 т, 2- нав бензиндан 30 т мавжуд бўлган ҳолда энг қиммат нархли аралашма ҳосил қилиш масаласининг математик моделини тузинг.

24. Тошкўмирнинг 3 та пунктдан 4 та пунктга ташиш режасини шундай тузингки, унда жами транспорт харажатлари минималлаштирилсин. Шахталарнинг бир суткалик ишлаб чиқариш ҳажми, истеъмол пунктларининг кўмирга бўлган талаби ва 1 тонна кўмирни ташиш харажатлари жадвалда келтирилган.

Шахталар	**1 т кўмирни истеъмолчига ташиш харажатлари, (сўм)**				**Шахталарнинг ишлаб чиқариш ҳажми, (минг т)**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Буюртмачи-лар талаби, (минг т)	75	80	60	85	300

Масаланинг математик моделини тузинг.

25. Тўртта A_1, A_2, A_3, A_4 омборхоналарда мос равишда 40, 50, 60, 30 тонна ёқилғи бор. Бу ёқилғиларни талаблари мос равишда 60, 80, 40 тонна бўлган 3 та B_1, B_2, B_3 истеъмолчиларга шундай ташиш кераккки, сарф қилинган умумий транспорт харажатлари минимал бўлсин. (1 тонна ёқилғини ташиш харажатлари жадвалда келтирилган:

Омборлар	**1 т ёқилғини истеъмолчиларга ташиш нархи (ш.б.)**			**ёқилғи заҳиралари (т)**
	B_1	**B_2**	**B_3**	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
ёқилғига талаб (т)	60	80	40	180

Масаланинг математик моделини тузинг.

2- машғулот

Чизиқли программалаш масаласининг умумий қўйилиши ва унинг турли формаларда ифодаланиши. Чизиқли программалаш масаласининг канoник кўриниши.

1- масала. Қуйидаги ЧПМни каноник кўринишга келтиринг, ҳамда уни вектор ва матрица формасида ифодаланг.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

Ечиш. Дастлаб чизиқли функцияни максималаштиришдан минималлаштириш масаласига ўтамиз. Бунинг учун мақсад функцияни (-1) га кўпайтириш кифоядир. Сўнгра тенгсизликлар шаклида берилган чегаравий шартлардан тенгламаларга ўтамиз.

Натижада қуйидаги каноник кўринишдаги ЧПМни ҳосил қиламиз.

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6,7$$

Ушбу масала вектор формада қуйидагича ифодаланади:

$$F = C \cdot X \to \min,$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 + P_7x_7 = P_0,$$

$$X \ge 0.$$

Бунда $C=(-1;2;-1;1;0;0;0)$, $X=(x_1, x_2\ x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$- вектор

қатор, CX- скаляр кўпайтма, ҳамда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

-шарт векторлари.

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Масаланинг матрица формасидаги ифодаланиши эса қуйидагича:

$$F = C \cdot X \to \min$$

$$A \cdot X = B_0$$

$$X \geq 0$$

Бунда *C=(-1;2;-1;1;0;0;0)* ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

шарт матрицаси.

Масаладаги номанфий x_5, x_6, x_7 ўзгарувчилар қўшимча ўзгарувчилар деб аталади ва уларнинг мақсад функциясидаги коэффициентлари 0 га тенг деб ҳисобланади.

Конкрет иқтисодий-математик моделларда иштирок этувчи қўшимча ўзгарувчиларнинг ҳар бири тайин иқтисодий маънога эга бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги берилган масалаларнинг ҳар бирини каноник кўринишга келтиринг, ҳамда уни вектор ва матрица формаларида ифодаланг.

1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \le 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \to min$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \le 18 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to max$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 8x_4 \ge 3 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 \to min$

4.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$

5.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 18 \\ x_3 \le 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

$F = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \max$

6. 1- машғулотнинг математик моделларидан фойдаланиб, уларнинг ҳар бирини каноник кўринишга келтиринг ва қўшимча ўзгарувчиларнинг иқтисодий маъносини баён қилинг.

3- машғулот

Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқини. Чизиқли программалаш масаласини график усулда ечиш.

Чизиқли программалаш масаласини график усулда ечиш, асосан номаълумлари сони иккита бўлган ва чегаравий шартлари чизиқли тенгсизликлар шаклида берилган масалаларга қўлланилади.

1-масала.

Фирма икки хил А ва В маҳсулотларни ишлаб чиқаради. Ҳар бир маҳсулотга I, II ва III турдаги машиналарнинг ҳар бирида ишлов берилади. Маҳсулотларга машиналарда ишлов бериш соатлари қуйидагича берилган:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

I, II, III машиналарнинг ҳафталик ишлаш вақтлари мос равишда 40, 36 ва 36 соатни ташкил этади. Сотилган А ва В маҳсулотлардан мос равишда 5 ва 3 бирлик фойда олинади.

Фирмага максимал фойда келтирадиган ҳафталик ишлаб чиқариш режасини тузиш талаб қилинади. Масалани ЧПМ шаклида таърифланг ва уни ечинг.

Ечилиши:

Ҳафта давомида ишлаб чиқариш режалаштирилган А маҳсулот миқдори x_1 ва В маҳсулот миқдори x_2 бўлсин.

У ҳолда, масаланинг берилганларидан фойдаланиб, қуйидаги ЧПМни ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \le 40 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \le 36 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \le 36 \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (2)$$

$$F=5x_1+3x_2 \to max \qquad (3)$$

Бу масалада номаълумлар сони иккита, ҳамда чегаравий шартлар тенгсизликлар шаклида бўлганлиги учун график усулни қўллаш мумкин.

Масаладаги (1) ва (2) чегаравий шартлардаги ҳар бир тенгсизлик X_1OX_2 координата текислигида чегаралари мос

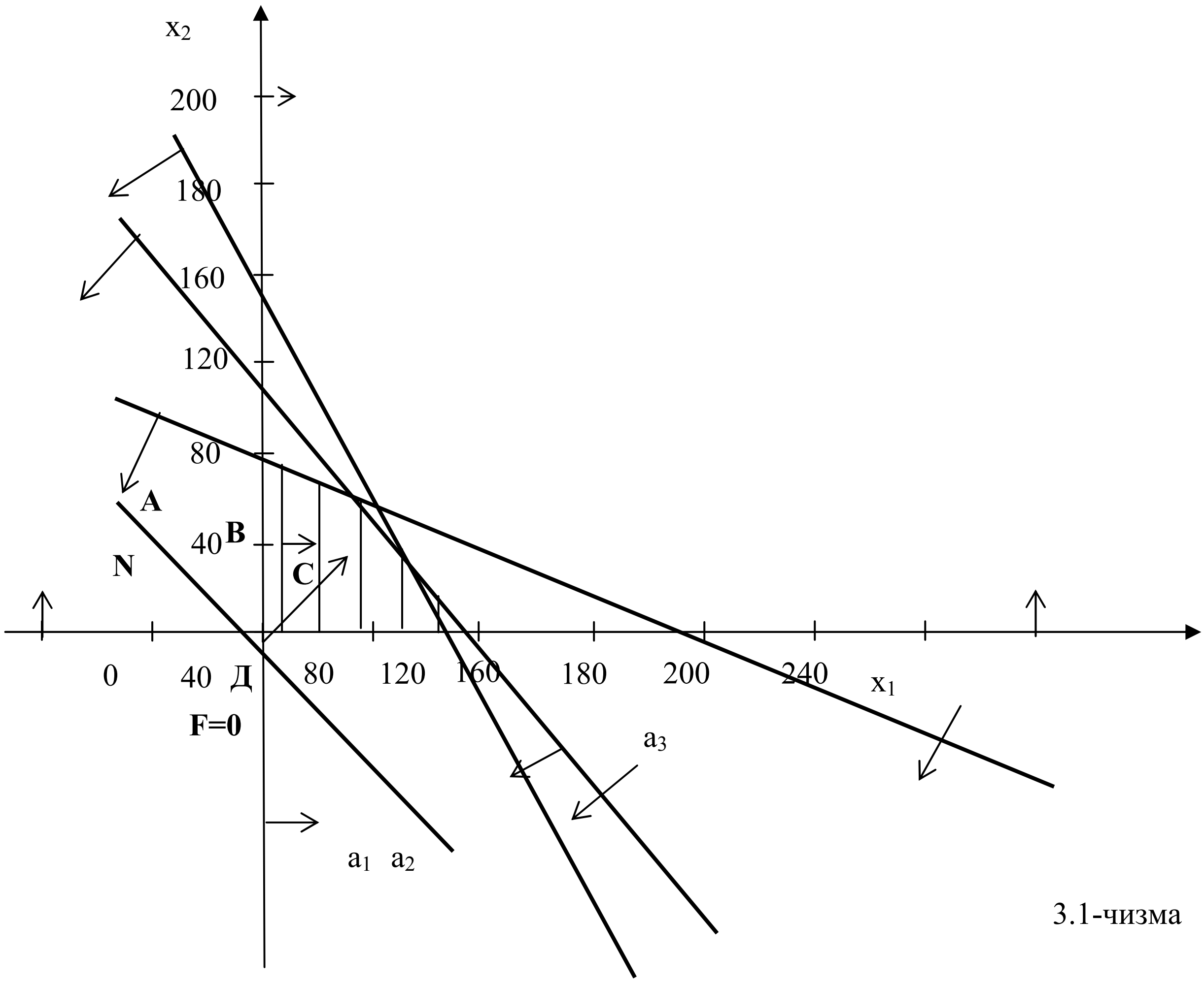
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36 & (a_2) \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 = 36 & (a_3) \end{cases}$$

тўғри чизиқлардан ва координата ўқларидан иборат ярим текисликларни ифодалайди.

Ушбу ярим текисликларни ва уларнинг кесишмасидан иборат бўлган режалар кўпбурчагини чизиб оламиз, ҳамда $\vec{N} = (5;3)$ йўналтирувчи вектор ёрдамида

$F=5x_1+3x_2$

мақсад функциясига максимал қиймат берувчи нуқтани аниқлаймиз.



3.1-чизма

Чизмадан кўриниб турибдики, *F=5x_1+3x_2* мақсад функцияси ўзининг максимал қийматига ABCDO – режалар кўпбурчагининг С нуқтасида эришади. Бу нуқта a_1 ва a_2 тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлганлиги учун унинг коорди-

натасини

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36 & (a_2) \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб топамиз. Системанинг ечими $x_1=60$ ва $x_2=40$. Бу ечимга мақсад функциясининг $F_{max}= 5\bullet 60 + 3\bullet 40= 420$ қиймати мос келади.

Шундай қилиб, фирма 420 бирлик фойдага эришиш учун А маҳсулотдан 60 та ва В маҳсулотдан 40 та ишлаб чиқаришни режалаштириши керак бўлади. Бунда I ва II тур машиналарнинг иш вақти фондидан тўлалигича фойдаланилади., ҳамда III тур машина вақтидан ($0{,}2x_1+0{,}4x_2\leq 36$ тенгсизликка кўра) 8 соат ортиб қолади.

2- масала. Қуйидаги ЧПМни ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8 \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5 \qquad (5)$$

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \to \max \qquad (6)$$

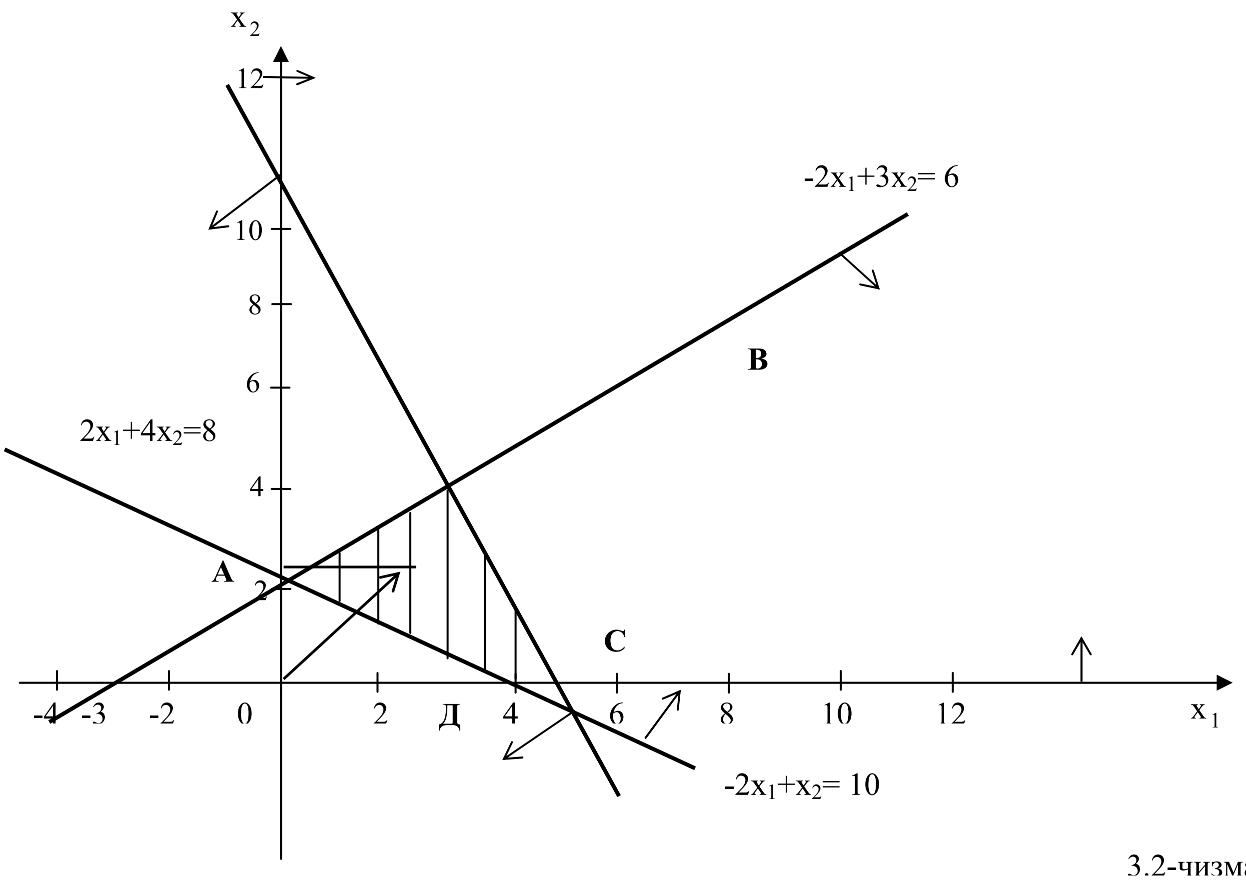
Ечилиши. Ушбу масаладаги тенгламалар системасидан номанфий x_3, x_4, x_5 номаълумларнинг ҳар бирини x_1 ва x_2 номаълумотлар орқали ифодалаб, уларни мақсад функциясига қўйсак, икки номаълумли, чегаравий шартлари чизиқли тенгсизликлардан иборат бўлган ЧПМ ҳосил бўлади.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Бу масаланинг режалар кўпбурчагини ясаб оламиз:



3.2-чизма

Чизмадан режалар кўпбурчагининг B нуқтаси оптимал ечим эканлиги равшандир. Бу нуқтанинг координатасини

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$$

тенгламалар системасининг ечими сифатида топамиз. Системани ечиб $x_1=3$ ва $x_2=4$ қийматларни оламиз. Бу қийматларни дастлабки берилган (4) системага қўйиб $x_3=0$ ва $x_4=0$ ва $x_5=14$ қийматларни ва уларга мос келувчи мақсад функциясининг $F_{max}=18$ қийматини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган (4), (5) ва (6) масаланинг ечими $X_{опт}=(3;4;0;0;14)$ ва $F_{max}=18$ дан иборат эканлигини аниқлаймиз.

Умуман, чегаравий шартлари n та номаълум ва m та чизиқли эркли тенгламаларни ўз ичига олган масалаларни ҳам, агар n-m=2 муносабат бажарилса, график усул ёрдамида ечиш мумкин. Бунга оид қуйидаги масалани келтирамиз.

3-масала. Чизиқли прогрпммалаш масаласини график усул ёрдамида ечинг.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5. \quad (8)$$

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max \quad (9)$$

Ечилиши: Бу масалада n=5 ва m=3 бўлиб, n-m=2 бўлганлиги учун график усулни қўллаш мумкин. Дастлаб, Жордан-Гаусс усули ёрдамида (7) системанинг ҳар бир тенгламасида биттадан базис ўзгарувчиларни (масалан x_1, x_2, x_3-ўзгарувчиларни) ажратамиз. Натижада (7) системага тенг кучли бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \quad (10)$$

Бундан эса, базис ўзгарувчиларга нисбатан ечилган системани ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \quad (11)$$

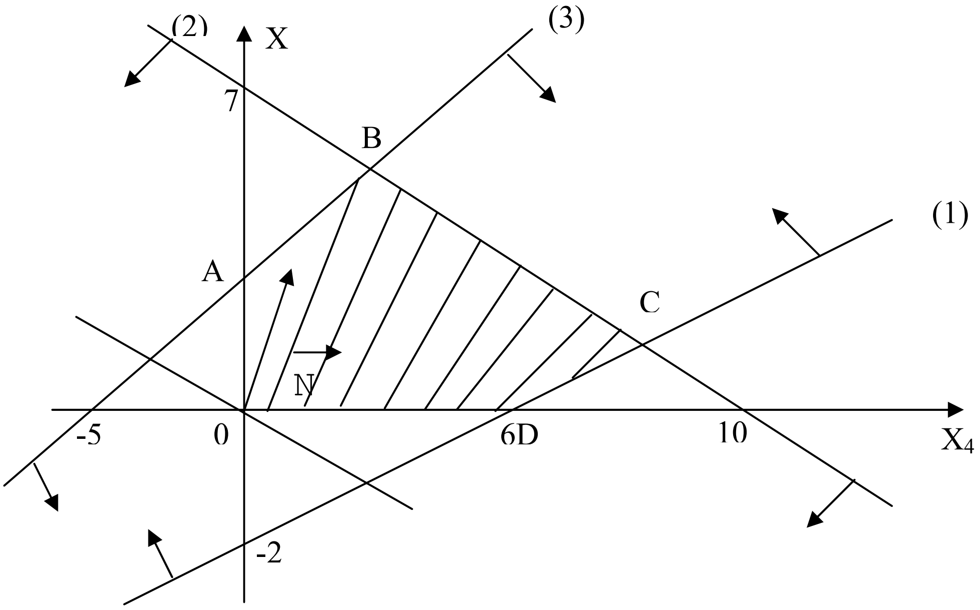
Базис ўзгарувчиларнинг бу қийматларини мақсад функциясига қўйиб, ҳамда (10) системада базис ўзгарувчиларни ташлаб юбориб, икки номаълумли қуйидаги чизиқли прогрпммалаш масаласини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

$$F = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max$$

$x_4 0 x_5$ координата текислигида режалар кўпбурчагини, мақсад функциясини ва йўналтирувчи векторни тасвирлаймиз.



3.3- чизма.

Чизмага асосан мақсад функцияни ўзининг максимал қийматига режалар кўпбурчагининг В нуқтасида эришишини кўрамиз.

Бу нуқта координаталарини

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

системани ечиб топамиз: $x_4 = 2;\ x_5 = \frac{28}{5}$. $F_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58$

Дастлабки берилган (7), (8), (9) масаланинг ечимини ҳосил қилиш учун $x_4 = 2$ ва $x_5 = \frac{28}{5}$ қийматларни (11) системага қўямиз.

Натижада $x_1 = \frac{104}{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ қийматларни оламиз. Шундай қилиб,

$X_{опт} = (\frac{104}{5};0;0;2;\frac{28}{5})$ ва $F_{\max} = 58$.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги масалаларни график усулида ечинг.

1. Мебел фабрикаси шкаф ва столлар ишлаб чиқариш учун зарур ресурслардан фойдаланади. Ҳар бир турдаги маҳсулотга сарфланадиган ресурслар нормаси, 1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад ва бор бўлган ресурсларнинг умумий миқдори қуйидаги жадвалда берилган.

Ресурслар	**1 та маҳсулотга сарфланадиган ресурслар миқдори**		**Ресурсларнинг умумий миқдори**
ёғоч (м)			
1 хил учун	0,2	0,1	40
2 хил учун	0,1	0,3	60
Меҳнат сарфи (киши-соат)	1,2	1,5	371,4
1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад	6	8	

Фабрика қанча стол ва шкаф ишлаб чиқарса, уларни сотишдан келган даромад максимал бўлади?

2. А ва В турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун токарлик, фрезерлик ва силлиқлаш жиҳозлари ишлатилади. Ҳар бир турдаги жиҳознинг ҳар бир турдаги маҳсулот ишлаб чиқаришга сарфлайдиган вақтлари нормалари жадвалда келтирилган. Ҳар бир турдаги жиҳознинг иш вақти умумий фонди ҳамда 1 та маҳсулотни сотишдан келадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган.

Жиҳоз тури	**1 та маҳсулот тайёрлашга сарфланадиган вақт (соат)**		**Жиҳознинг фойдали иш вақти умумий фонди (с)**
	A	**B**	
Фрезерлик	10	8	168
Токарлик	5	10	180
Силлиқлаш	6	12	144
1 та маҳсулот сотишдан келадиган даромад (сўм)	14	18	

А ва В маҳсулотлар ишлаб чиқаришнинг шундай режаси

топилсинки, улардан келадиган даромад максимал бўлсин.

3. Мебель фабрикасида стандарт фанер листлардан 3 турдаги хомашёдан мос равишда 24, 31 ва 18 дона қирқиши керак. Ҳар бир фанер листидан 2 усул билан хомашёлар қирқиш мумкин. Берилган усул бўйича қирқиш натижасида ҳосил бўладиган хомашёлар сони жадвалда берилган. Берилган усул бўйича 1 та фанер листни қирқишдан ҳосил бўлган чиқиндилар ўлчами ҳам қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хомашёлар тури	**Усул бўйича қирқишдан ҳосил бўлган хомашёлар сони (дона)**	
	1- усул	**2- усул**
1	2	6
2	5	4
3	2	3
қирқимлар (чиқиндилар) ўлчами(кв.см)	12	16

Қанча фанер листи ва қайси усулда қирқилганда минимал чиқинди ҳосил бўлади, ҳамда зарур хомашёлар сонидан кам бўлмаган хомашё олинади?

4. Фермасида қўнғир ва сариқ тулки парвариш қилинади. Уларнинг нормал парвариши учун 3 турдаги озуқа ишлатилади. Қўнғир ва сариқ тулкилар учун ҳар кунги зарур бўлган ҳар бир турдаги озуқалар миқдори жадвалда келтирилган. Ҳайвон фермаси ишлатиши мумкин бўлган ҳар бир турдаги озуқанинг умумий миқдори ва 1 та қўнғир тулки ва сариқ тулки терисини сотишдан келадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган.

Озуқа тури	**Ҳар кунги зарур бўлган озуқа бирлиги миқдори**		**озуқанинг умумий миқдори**
	қўнғир тулки	**сариқ тулки**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 та терини сотишдан келадиган даромад (ш.б.)	16	12	

Ферма энг катта даромад олиши учун ишни қандай ташкил этиши керак?

5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \ \ge 12 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + x_2 \to \max$

6.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

7.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 2x_2 \ \le 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = -2x_1 + x_2 \to \min$

8.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$

9.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

10.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \ \le 3 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 2x_2 \to \max, \ (\min)$

11.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

12.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ 5x_1 - x_2 \ \ge 10 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

$x_2 \ge 0$

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \min$

13.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 3x_1 - 10x_2 \to \min, (\max)$

14.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ \dfrac{3}{2}x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \ (\min)$

15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$F = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to \min, (\max)$$

16.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max, (\min)$$

17.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$F = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min, (\max)$$

18.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max, (\min)$$

19. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max .$$

20. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max .$$

4- машғулот

Чизиқли программалаш масаласининг таянч режалари. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини топиш.

Чизиқли программалаш масаласининг геометрик талқинига кўра, масаланинг мумкин бўлган ечимлари тўплами қавариқ кўпёқлидан иборат бўлади. Бу кўпёқлининг ҳар бир учига (четки нуқтасига) тайин бир таянч режа мос келади. Чизиқли программалаш масаласининг мақсад функцияси ўзининг оптимал қийматига шу таянч режалардан бирида эришади. Номаълумлари сони 2 та бўлган (ёки n-m=2 шартни қаноатлантирувчи, n- номаълумлар сони, m- тенгламалар сони) ҳамда чегаравий шартлари тенгсизликлар шаклида берилган масалаларнинг таянч режаларини геометрик тасвирлаш мумкин.

1. Қуйидаги чизиқли программалаш масаласининг барча таянч режаларини топинг.

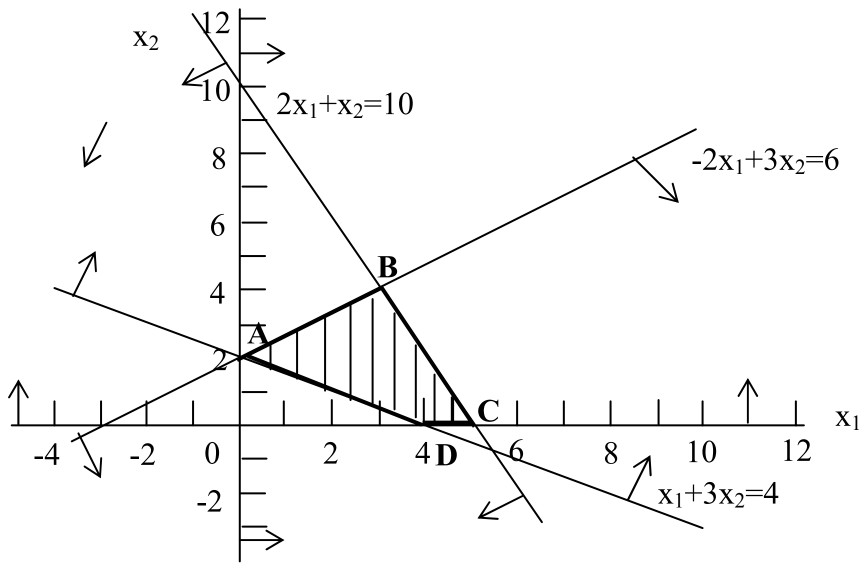
$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

<u>Ечиш</u>. Чегаравий шартларга биноан ечимлар кўпбурчагини, мумкин бўлган тўпламларини чизиб оламиз.

$2x_1+x_2=10$ $-2x_1+3x_2=6$ $x_1+2x_2=4$



Чизмадан кўриниб турибдики, ечимлар кўпбурчаги ABCD-

кўпбурчакдан иборат бўлиб, бу кўпбурчакнинг A,B,C ва D учларига берилган масаланинг X_A= (0;2), X_B= (3;4), X_C= (5;0) ва X_D= (4;0) таянч режалари мос келади. Бунда B нуқтанинг координаталари икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасининг координаталари, яъни

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечими сифатида топилганлигини эслатиб ўтамиз.

Шундай қилиб, берилган масаланинг барча таянч режалари тўртта бўлиб, улар X_1= (0;2), X_2= (3;4), X_3= (5;0) ва X_4= (4;0) ечимлардан иборатдир.

Чизиқли программалаш масаласини ечиш чизиқли тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг номанфий ечимларини топиш билан боғлиқдир. Системанинг номанфий базис ечимини (ёки ЧПМнинг таянч режасини) топишда қайси ўзгарувчини қайси тенгламадан базис ўзгарувчи сифатида ажратилиши фарқсиз эмас. Мана шу шартларни эътиборга олувчи усуллардан бирини қуйидаги мисолда кўриб чиқамиз.

2-масала.

Берилган тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини топинг.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Ечиш. Дастлаб системадаги барча тенгламаларни бир-бирига қўшиб, назорат тенглама (н.т.) деб аталувчи тенгламани ҳосил қиламиз. Бизнинг мисолда назорат тенглама

$-4x_1+ x_2+7x_4-5x_5=18$ тенгламадан иборатдир.

Назорат тенглама икки хил вазифани бажаради:

1) ажратилиши керак бўлган базис ўзгарувчи назорат тенгламадан танланади;

2) ҳар бир қадамдан кейин ҳосил бўлган назорат тенглама базис ўзгарувчиси бўлмаган тенгламалар йиғиндисига тенг эканлигига асосланиб, ҳисоблаш жараёни тўғри олиб борилаётганлигини текшириб бориш мумкин.

Назорат тенгламадан коэффициенти энг катта бўлган ўзгарувчи (масалан $x_к$) танланади ва бу ўзгарувчи учун аниқловчи коэффициентлар (а.к) деб аталувчи

$$\frac{b_i}{a_{ik}} \text{ (бунда } b_i \geq 0, a_{ik} > 0 \text{)}$$

нисбатлар топилади. Аниқловчи коэффициентлардан энг кичигига

мос тенгламадан $x_к$ ўзгарувчини ажратиб, уни элементар алмаштиришлар ёрдамида қолган тенгламалардан ва назорат тенгламадан ҳам йўқотамиз. Ушбу жараённи ҳар бир тенгламада биттадан базис ўзгарувчи ҳосил бўлгунча ёки назорат тенглама 0=0 кўринишга келгандан сўнг, жавобни ёзиш мумкин. Бунинг учун базис ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга, базисмас ўзгарувчиларни эса нолга тенг деб олиш керак.

Энди юқорида айтилган амалларни берилган мисолга нисбатан қўллаймиз ва ҳисоблаш жараёнларини қулайлик учун қуйидагича жадвалда олиб борамиз.

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	а.к.	
1	-1	-1	0	2	-3	7	7/2	
2	-2	1	-1	$\boxed{5}$	-2	8	8/5*	I қадам
3	-1	1	1	0	0	3	-	
н.т	-4	1	0	7*	-5	18		
1	-1/5	-7/5	2/5	0	-11/5	19/5	19/2	
2	-2/5	1/5	-1/5	1	-2/5	8/5	-	II қадам
3	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	3	3*	
н.т	-6/5	-2/5	7/5*	0	-11/5	34/5		
1	$\boxed{1/5}$	-9/5	0	0	-11/5	13/5	13*	
2	-3/5	2/5	0	1	-2/5	11/5	-	III қадам
3	-1	1	1	0	0	3	-	
Н.т	1/5*	-9/5	0	0	-11/5	13/5		
1	1	-9	0	0	-11	13		
2	0	-5	0	1	-7	10		IV қадам
3	0	-8	1	0	-11	16		
н.т	0	0	0	0	0	0		

Жавоб: $X = (13;0;16;10;0)$

Эслатма. (Номанфий базис ечимнинг мавжуд бўлмаслик шарти).

Агар бирор қадамда системада камида битта тенглама

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$$

кўринишга келиб, барча $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентлар манфий ва b>0 бўлса, система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Агар бирор тенглама

$$0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$$

кўринишда бўлиб, $b \neq 0$ бўлса, берилган система умуман ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

Мустақил ечиш учун масалалар.

ЧПМнинг геометрик талқинидан фойдаланиб, қуйидаги масалаларнинг барча таянч ечимларини топинг.

1.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2.

$$F = -x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

3.

$$F = 4x_1 + 6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4.

$$F = -3x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

5. $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

6. $F = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 6x_1 - x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимларидан бирини топинг

7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (3;2;0;0;0)$

8.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (9;12;0;0)$

9.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 18 \\ 2x_1 - x_2 - 15x_3 - 9x_4 - 12x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 20x_3 - 12x_4 - 16x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (3;4;0;0;0)$

10.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (5;0;0;3;7)$

11.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Ж: Номанфий ечим мавжуд эмас.

12.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (5;1;0;0;0)$

13.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 7x_6 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 6x_6 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 10 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (1;1;1;1;0;\ 0)$

14.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3 \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$Ж:\ X = (4;1;1;0;0)$

5- машғулот

Чизиқли программалаш масаласини ечишнинг симплекс усули.

Симплекс усулни қуйидаги масалани ечиш жараёнида тавсифлаймиз:

1- масала. Қуйидаги ЧПМ ни симплекс усулда ечинг.

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5$$

Ечиш. Масаланинг тенгламалар системасини вектор формада ёзиб оламиз:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0,$$

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$C = (-2;-1;1;-1;1)$.

Берилган P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 векторлар орасида учта бирлик P_3 , P_4 ва P_5 векторлар бўлганлиги учун, масаланинг бошланғич таянч режасини бевосита ёзиш мумкин.

$X_0 = (0; 0; 0; 5; 9; 7)$

Бирлик векторларга мос x_3, x_4 ва x_5 - ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар бўлиб, қолган x_1, x_2 x_3 - ўзгарувчилар эса базисмас ўзгарувчилардир. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи чизиқли функция коэффициентидан тузилган вектор $C_{баз}(1;-1;1)$ дан иборат.

Масалани қуйидаги симплекс жадвалга жойлаштирамиз. Жадвалнинг m+1 қаторига режанинг баҳоси деб аталувчи ва

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}C_i - C_j$$

формула орқали аниқланувчи кўрсаткичлар жойлаштирилади. Агар барча $\Delta_j \leq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ бўлса, топилган таянч режа оптимал ечим бўлади. Агар бирорта $j=k$ учун $\Delta_k > 0$ бўлса, у ҳолда топилган таянч ечим оптимал режа бўлмайди. Уни бошқа таянч режага алмаштириш керак. Таянч режаларни алмаштириш жараёни оптимал ечим топилгунча ёки унинг ечими йўқ эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Симплекс усулни қўллаб, I қадамда $\max\limits_{\Delta_j \succ 0} \Delta_j = 3$ га мос келувчи P_2 базисга киритилиб, P_5 вектор базисдан чиқарилади. II қадамда $\Delta_3 = \dfrac{1}{2}$ га мос келувчи P_1 вектор базисга киритилиб, P_3 базисдан чиқарилади ва ниҳоят III қадамда оптимал ечим топилади.

i	Базис	C_δ	P_0	-2	-1	1	-1	1	А.К.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1 2 3	P_3 P_4 P_5	1 -1 1	5 9 7	1 2 1	1 1 $\boxed{2}$	1 0 0	0 1 0	0 0 1	5 9 7/2*
m+1	Δ_j=	F_j -C_j	3	2	3*	0	0	0	
1 2 3	P_3 P_4 P_2	1 - 1 - 1	3/2 11/2 7/2	$\boxed{1/2}$ 3/2 1/2	0 0 1	1 0 0	0 1 0	-1/2 -1/2 1/2	3* 11/3 7
m+1	Δ_j=	F_j-C_j	-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	
1 2 3	P_1 P_4 P_2	- 2 - 1 - 1	3 1 2	1 0 0	0 0 1	2 - 3 - 1	0 1 0	- 1 1 1	
m+1	Δ_j=	F_j-C_j	-9	0	0	- 1	0	- 1	

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, берилган масаланинг оптимал режаси X*=(3; 2; 0; 1; 0) бўлиб, унга чизилган функциянинг F_{min}= -9 қиймати мос келади. Топилган ечим ягонадир, чунки нолга тенг Δ_j баҳолар фақат базис векторлар учун ўринлидир.

2. Қуйидаги ЧПМни симплекс усулида ечинг:

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

Берилган масалани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$F = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

Чегаравий шартларда қўшимча ўзгарувчилар киритиб тенгсизликлардан тенгликларга ўтамиз. (Қўшимча ўзгарувчиларнинг чизиқли функциядаги коэффицентлари нолга мос келишини эслатиб ўтамиз).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

Системани вектор формада ёзиб оламиз:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0\,,$$

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$C=(1;-1;-3;0;0;0)$, $\quad C_{баз}=(0;0;0)$.

Бирлик векторларга мос x_4 , x_5 , x_6 - ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга тенглаб, базисмас x_1 , x_2 x_3 ўзгарувчиларни эса нолга тенг деб, бошланғич таянч режани ҳосил қиламиз.

$X_0= (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5)$

Кейинги ҳисоблаш жараёнларини қуйидаги симплекс жадвалда бажарамиз:

i	Базис	C_δ	P_0	1	-1	-3	0	0	0	А.К.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1 2 3	P_4 P_5 P_6	0 0 0	1 2 5	2 -4 3	-1 2 0	$\boxed{1}$ -1 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1* - 5
m+1	Δ_j=F_j –C_j		0	-1	1	3*	0	0	0	
1 2 3	P_3 P_5 P_6	-3 0 0	1 3 4	2 -2 1	-1 1 $\boxed{1}$	1 0 0	1 1 -1	0 1 0	0 0 1	- 3* 4
m+1	Δ_j=F_j-C_j		-3	-7	4*	0	-3	0	0	
1 2 3	P_3 P_2 P_6	-3 -1 0	4 3 1	0 -2 $\boxed{3}$	0 1 0	1 0 0	2 1 -2	1 1 -1	0 0 1	- - 1/3
m+1	Δ_j=F_j-C_j		-15	1*	0	0	-7	-4	0	
1 2 3	P_3 P_2 P_1	-3 -1 1	4 11/3 1/3	0 0 1	0 1 0	1 0 0	2 -1/3 -2/3	1 1/3 -1/3	0 2/3 1/3	
m+1	Δ_j=F_j-C_j		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

Тўртинчи қадамда **(m+1)** – сатрда $\Delta_j = F_j - C_j \leq 0$ оптималлик шарти бажарилганлиги учун

X^*= (1/3; 11/3; 4; 0; 0; 0)

режа оптимал бўлиб, унга F_{min}= -46/3 қиймат мос келади. Дастлабки берилган масаланинг ечими эса

$X_{опт}$= (1/3; 11/3; 4) , F_{max}= 46/3.

бўлиб, ушбу ечим ягона эканлигини симплекс жадвалда кўриш мумкин, яъни нолга тенг $\Delta_j = F_j - C_j$ баҳолар фақат базис векторлар учун ўринлидир.

Бошланғич таянч режаси берилмаган чизиқли программалаш масалаларнинг чегаравий шартларидан иборат тенгламалар системасидаэлементар алмаштиришлар бажариб, бирор таянч ечимни (номанфий базис ечимни) топиб, сўнгра симплекс усул ёрдамида оптимал ечимни аниқлаш мумкин. Чегаравий шартларда озод ҳади манфий бўлган тенгламалар қатнашса, бундай тенгламаларнинг чап ва ўнг томонини –1га кўпайтириб, озод ҳадни мусбат қилиб олиш керак.

Бунга оид қуйидаги масалани қараймиз.

3-масала.

Дастлаб чизиқли прогрпммалаш масаласининг бирор таянч режасини топинг ва симплекс усул ёрдамида оптимал ечимни аниқланг.

$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4,5.$$

Системадаги иккинчи тенгламанинг озод ҳади манфий бўлганлиги учун, унинг иккала қисмини (-1) коэффицентга кўпайтириб, озод ҳадни мусбат қилиб оламиз.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

Бу системанинг номанфий базис ечимларидан бирини, (ёки чизиқли прогрпммалаш масаласининг таянч режаларидан бирини) масалан, 4-машғулотда кўрилган усул ёрдамида топиб олайлик.
Ҳисоблаш жараёнларини қуйидаги жадвалда бажарамиз.

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	а.к
1	1	2	-3	1	-5	5	5
2	2	3	-5	2	-7	8	4
3	3	1	-2	$\boxed{6}$	2	5	1*
Н.Т	6	6	-10	9*	-10	19	
1	1/2	$\boxed{11/6}$	-8/3	0	-16/3	4	24/11*
2	1	8/3	-13/3	0	-23/3	6	9/4
3	1/2	1/6	-1/3	1	1/3	1	6
Н.Т	3/2	9/2*	-7	0	-13	10	
1	3/11	1	-16/11	0	-32/11	24/11	8
2	$\boxed{3/11}$	0	-5/11	0	1/11	2/11	2/3*
3	5/11	0	-1/11	1	9/11	7/11	7/5
Н.Т	3/11	0	-5/11	0	1/11	2/11	
1	0	1	-1	0	-3	2	
2	1	0	-5/3	0	1/3	2/3	
3	0	0	2/3	1	2/3	1/3	
Н.Т	0	0	0	0	0	0	

Жадвалнинг охирги босқичида дастлаб берилган системага тенг кучли бўлган

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 3x_5 = 2 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

системани ва бошланғич $X_0 = (\frac{3}{2};2;0;\frac{1}{3};0)$ таянч режани ҳосил қиламиз.

Бу таянч режани оптималликка текшириш учун симплекс жадвални тузамиз ва $\Delta_j = F_j - C_j$ − баҳоларнинг қийматларини ҳисоблаймиз.

i	Базис	C_5	P_0	-3	-4	-1	-2	1	а.к
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_2	-4	2	0	1	-1	0	-3	-
2	P_1	-3	2/3	1	0	-5/3	0	1/3	-
3	P_4	-2	1/3	0	0	2/3	1	2/3	1/2
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-32/3	0	0	26/3*	0	26/3	
1	P_2	-4	5/2	0	1	0	3/2	-2	
2	P_1	-3	3/2	1	0	0	5/2	2	
3	P_3	-1	1/2	0	0	1	3/2	1	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	0	0	0	-13	0	

Шундай қилиб, масаланинг оптимал плани

$X_{опт} = (\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0)$ бўлиб, унга F_{max}=15 қиймат мос келади. Шуни таъкидлаш керакки, олинган $X = (\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0)$ - оптимал план ягона эмас, чунки базисга кирмаган P_5 векторга 0 га тенг бўлган баҳо мос келади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйида берилган чизиқли программалаш масалаларини симплекс усулда ечинг.

1.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

2.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

3.

$$F = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le 15 \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

4.

$$F = 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

6.

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2$$

7.

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

8.

$$F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

9.

$$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

10.

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

Қуйидаги масалаларда дастлаб ЧПМнинг бирор таянч режасини топинг ва симплекс усулини қўллаб оптимал ечимни аниқланг.

11.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

12.

$$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

13.

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

14.

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

15.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

16.

$$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

17.

$$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5$$

18.

$$F = -x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_5 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5$$

19.

$$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5,6$$

20.

$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6$$

6- машғулот

Сунъий базис усули.
Симплекс усулининг қўлланилиши.

Маълумки, каноник шаклда берилган чизиқли программалаш масаласининг шартларидан иборат бўлган системанинг ҳар бир тенгламасида базис ўзгарувчилар қатнашса, у ҳолда масаланинг таянч режасини осонликча кўрсатиш мумкин. Лекин, таянч ечимларга эга бўлган кўпгина чизиқли программалаш масалаларининг шартларида базис ўзгарувчилар (ёки бирлик векторлар) қатнашмаган бўлади. Албатта, бундай ҳолларда элементар алмаштиришлар ёрдамида берилган системага тенг кучли бўлган ҳамда базис ўзгарувчилар қатнашган тенгламалар системасини ҳосил қилиш ва дастлабки таянч режани топиш мумкин.

Каноник кўринишда берилган чизиқли программалаш масалаларининг бошланғич таянч режаини, сунъий базис усули деб аталувчи усул ёрдамида ҳам топиш мумкин ва топилган таянч режани симплекс жадвалга ёзиб, масалани симплекс усули ёрдамида ечиш мумкин бўлади.

Сунъий базис усулининг алгоритми қуйидагича:

Чизиқли программалаш масаласи шартларидаги базис ўзгарувчиси бўлмаган ҳар бир тенгламага сунъий равишда базис ўзгарувчилар қўшамиз ва бу ўзгарувчиларни мақсад функциясига (минимал қийматни топиш масаласи учун) етарлича катта бўлган мусбат M коэффициент билан киритамиз. Бундай ўзгарувчилар «сунъий базис ўзгарувчилар» деб аталади. Ҳосил бўлган масала эса берилган масалага нисбатан кенгайтирилган масала деб аталади. Масалани ечиш жараёнини симплекс жадвалда симплекс усул билан бажарамиз.

Юқорида айтилганларни қуйидаги мисолни ечиш жараёнида кўрсатамиз.

1- мисол.

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4$$

Ечилиши. Масаланинг шартларидаги тенгламаларда базис ўзгарувчилар йўқ. Ҳар бир тенгламага мос равишда x_5, x_6 -

сунъий базис ўзгарувчиларни қўшамиз ва мақсад функцияни (-1) га кўпайтириб, қуйидаги кенгайтирилган масалани ҳосил қиламиз.

$$F = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6\ \ (min)$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,6}$$

Кенгайтирилган масала учун X=(0;0;0;0;3;3) бошланғич таянч режа ҳисобланади. Кейинги ҳисоблашларни қуйидаги симплекс жадвалда бажарамиз.

i	Базис	$C_б$	P_0	-5	-3	-4	+1	M	M	а.к
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_5	M	3	1	$\boxed{3}$	2	2	1	0	1^*
2	P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	3/2
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		6M	3M+5	$5M+3^*$	3M+4	3M-1	0	0	
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3^*
2	P_6	M	1	$\boxed{4/3}$	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	3/4
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		M-3	$4/3M+4^*$	0	-M/3+2	-M/3-3	-5/3M-1	0	
1	P_2	-3	3/4	0	1	$\boxed{3/4}$	3/4	1/2	-1/4	1^*
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4	—
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-6	0	0	3^*	-2	-M+1	-M-3	
1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
m+1	$\Delta_j=F_j-C_j$		-9	0	-4	0	-5	-M-1	-M-2	

Охирги қадамдан кўрамизки, масала ягона $X=(1;0;1;0;0;0)$ оптимал ечимга ва $F_{min}=-9$ минимал қийматга эга. Дастлабки берилган масала ечими эса $X_{опт}=(1;0;1;0)$; $F_{max}=9$.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги чизиқли программалаш масалаларини сунъий базис усулида ечинг.

1.

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (2{,}8; 2{,}4; 0{,}4)$

$F_{\max} = 7{,}2$

2.

$$F = 16x_1 + 10x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 90 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 70 \\ x_1 + x_2 = 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2$

$Ж: X_{опт} = (10;10)$

$F_{\min} = 260$

3.

$$F = 4 - 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5$

$Ж: X_{опт} = (0;1;1;0,0)$

$F_{\max} = 6$

4.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 + \frac{7}{2}x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (0;6;0;6)$

$F_{\max} = 27$

5.

$$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (3;1;0;0)$

$F_{\min} = 1$

6.

$$F = -2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$

$Ж: X_{опт} = (0;125;25;0)$

$F_{\min} = 475$

7.

$$F = 3x_1 + 6x_2 + 30x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (2;3;0)$

$F_{\min} = 24$

8.

$$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

$Ж: X_{опт} = (0;0;14)$

$F_{\max} = 42$

9. 1- машғулотдаги масалаларни симплекс усулини қўллаб ечинг.

7- машғулот

Чизиқли программалашда иккиланиш назарияси.

Иккиланган масалаларнинг жуфтлиги қуйидаги кўринишлардан бирида бўлиши мумкин..

Т/Р	Берилган масала.	Иккиланган масала.
Симметрик бўлмаган масалалар		
I	$F=CX\to\min$ $AX=B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to\max$ $YA\leq C$
II	$F=CX\to\max$ $AX=B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to\min$ $YA\geq C$
Симметрик масалалар		
III	$F=CX\to\min$ $AX\geq B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to\max$ $YA\leq C$ $Y\geq 0$
IV	$F=CX\to\max$ $AX\leq B_0$ $X\geq 0$	$G=YB_0\to\min$ $YA\geq C$ $Y\geq 0$

Демак, берилган масала учун иккиланган масала тузишдан аввал, берилган масаланинг шартлари системасини тегишли шаклга келтириб, кейин иккиланган масала тузилади.

1-масала. Ушбу

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Қаралаётган масала симметрик бўлмаган масаланинг II шаклига доир. Иккиланган масалада ўзгарувчиларнинг сони берилган масала системасининг тенгламалари сонига тенг, яъни учга тенг. Иккиланган масала мақсад функциясининг коэффициентлари берилган масала тенгламалар системасининг озод ҳадига, яъни 12, 24 ва 18 сонларига тенг бўлади.

Берилган масала функциясининг максимумини топиш талаб қилинган бўлиб, шартлар системаси фақат тенгламалардан иборат. Шу сабабдан иккиланган масалада мақсад функциясининг минимуми топилади ва унинг ўзгарувчилари ихтиёрий қийматларни (жумладан, манфий қийматларни ҳам) қабул қилиши мумкин бўлади.

Берилган масаланинг ҳар учала ўзгарувчилари фақат номанфий қийматлар қабул қилганлиги сабабли иккиланган масала шартлар системаси “≥” кўрининшдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Бинобарин, берилган масала учун иккиланган масала қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$
$$G = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min$$

2-масала. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Бу масала шу кўринишда жадвалдаги берилган масалаларнинг ҳеч бирига мос келмайди, лекин биринчи тенгсизликни (-1) га кўпайтириб, Ш шаклдаги симметрик масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

Бу масаланинг иккиланган масаласи қуйидаги масала бўлади:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$G = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max$$

3-масала. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

масала учун иккиланган масала тузилсин.

Ечиш: Бу масала ҳам жадвалда берилган масалаларнинг ҳеч бирига мос келмайди. Қаралаётган масалани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$
$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

Бу IV шаклда берилган симметрик масалага мос келади. Шу сабабдан иккиланган масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$G = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min$$

Биринчи иккиланиш теоремаси. Агар иккиланган масалалардан бири оптимал ечимга эга бўлса, иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади ва

$$F_{max}(X_{опт}) = G_{min}(Y_{опт})$$

$$X_{опт} = D^{-1}B_0 \quad \text{ва} \quad Y = C_б D^{-1}$$

Бунда D – симплекс усулдаги охирги базис векторлар компоненталаридан тузилган матрица;

B_0 - берилган масаланинг озод ҳадларидан тузилган вектор;

$C_б$ - охирги базис ўзгарувчиларнинг мақсад функциядаги коэффициентларидан тузилган вектор.

Агар масалалардан бирининг мақсад функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчиси ечимга эга бўлмайди.

4-масала. Ушбу

$F = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$

$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$

$-4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$

$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$

$x_j \geq 0, \ j = 1{,}6$

Масала учун иккиланган масала тузилсин ва унинг ечими топилсин.
Ечиш. Иккиланган масаланинг кўриниши қуйидагича бўлади.

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$G = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Берилган масалани симплекс усулда ечамиз.

Б	$C_б$	A_0	0	1	0	-1	-3	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	1	1	2	0	-1	$\boxed{1}$	0
A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ_J		0	0	-1	0	1	3	0
A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
A_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ_J		-3	-3	-7	0	4	0	0
A_5	-3	4	2	2	1	0	1	0
A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ_J		-15	-7	1	-4	0	0	0
A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
A_4	-1	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
A_2	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
Δ_J		$-\frac{46}{3}$	$-\frac{19}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

Берилган масалани оптимал ечими: $X_{опт}$=(0; 1/3; 0; 11/3; 4; 0) бўлади. Айтиб ўтамизки,

$$D=(A_5,\ A_4, A_2)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ва } D^{-1}B_0=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Биринчи иккиланиш теоремаси асосида иккиланган масаланинг оптимал ечимини топамиз:

$$Y_{опт}=C_б{*}D^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{19}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Яъни, иккиланган масаланинг оптимал ечими $Y_{опт}$ нинг і-компонентасини топиш учун симплекс жадвалнинг охирги сатридаги бошланғич базис векторлари устунига мос келувчи сонларга қараш керак.

$y_1=-\frac{19}{3}$; $y_2=-\frac{11}{3}$; $y_3=-\frac{1}{3}$

Эслатма: амалиётда иккиланган масалалар жуфтидан ҳисоблаш учун қулай бўлган масала танлаб олиниб, у учун симплекс усул қўлланади.

5-масала. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3\ge 2 \\ x_1-x_2-4x_3\le -3 \\ x_1+x_2-2x_3\ge 6 \\ 2x_1+x_2-2x_3\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$
$$F=x_1+2x_2+3x_3\to \min$$

масала берилган бўлсин.

Ечиш: Бу масалага иккиланган масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1-y_2+y_3+2y_4\le 1 \\ 2y_1+y_2+y_3+y_4\le 2 \\ -y_1+4y_2-2y_3-2y_4\le 3 \\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0, y_4\ge 0 \end{cases}$$
$$G=2y_1+3y_2+6y_3+3y_4\to \max$$

Берилган масалани симплекс усулда ечиш учун 4 та қўшимча ва 1 та сунъий ўзгарувчи киритиш зарур бўлади. Бошланғич симплекс жадвал 6 сатр ва 9 устундан иборат бўлади.

Иккиланган масалани ечиш учун эса 3 та қўшимча ўзгарувчи керак бўлади. Унинг бошланғич симплекс жадвали 4 сатр ва 8 устундан иборат бўлади.

Бу ҳолда албатта иккиланган масалани ечиш мақсадга мувофиқдир. Ушбу масалани симплекс усул билан ечиб, қуйидаги жадвални тузамиз:

Б	$C_б$	A_0	2	3	6	3	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
Δ_J		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
A_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
A_7	0	5	3	2	0	2	2	0	1
Δ_J		6	10	-9	0	9	6	0	0
A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
A_7	0	4	3	0	0	3	3	-1	1
Δ_J		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Иккиланган масаланинг оптимал ечими $Y_{опт}=(0;\ 1/2;\ 3/2;\ 0)$, $G_{max}=21/2$ бўлади.
Берилган масаланинг ечими эса $X_{опт}=(3/2;\ 9/2;\ 0)$, $F_{min}=21/2$.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

Қуйидаги масалалар учун иккиланган масалалар тузилсин ва уларнинг ечими топилсин.

$$1.\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ж: $Y_{опт}=(2/3;\ 0;\ 0;\ 7/3)$; $G_{min}=13$

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$X_{опт}=(4;\ 1)$; $F_{max}=13$

$$2.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ж: $Y_{опт}$=(1/9; 13/9; 0); G_{min} =110/9

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \to \min$$

$X_{опт}$=(0; 10/3; 8/9); F_{max} =110/9

$$3.\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ж: Иккиланган масала ечимга эга эмас.

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$4.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ж: $Y_{опт}$=(4; 2); G_{min}=20

$$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$$

$X_{опт}$=(2; 1; 0); F_{max}=20

$$5.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ж: $Y_{опт}$=(12; 1); G_{min}=29

$$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$$

$X_{опт}$=(0; 0; 1; 1/2); F_{max}=29

$$6.\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

Ж: Иккиланган масала ечимга эга эмас.

$$7.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \rightarrow \max$$

Ж: $Y_{опт}$=(7/9; 0; 13/9); G_{min}=66

$X_{опт}$=(18; 6; 0;); F_{max}=66

Қуйидаги масалалар учун иккиланган масала тузилсин ва унинг ечими топилсин:

$$8.\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

Ж: $Y_{опт}$=(0; 0; 7/5); G_{max}=21

$$9.\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \leq 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \leq 32 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

Ж:$Y_{опт}$=(7/11; 1/11; 0); G_{min}=226/11

$$10.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \rightarrow \max$$

Ж: $Y_{опт}$=(0; 1; 0); G_{min}=28

8- машғулот

Иқтисодий масалалар ечимини таҳлил қилиш.

ЧМПни оптимал ечимига корхонада вужудга келадиган реал жараёнлар жиддий таъсир қилади. Бундай иқтисодий жара-ёнларга қуйидагилар киради:

1) ресурслар заҳирасининг ўзгариши;
2) маҳсулот ишлаб чиқаришда янги технологик усулни қўллаш натижасида хом ашёлар сарфланишининг камайиши;
3) корхона нарх сиёсатида юз берадиган ўзгариш;
4) янги тур маҳсулот ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ҳ.к.

Юқорида келтирилган жараёнларни оптимал ечимга бўлган таъсирини таҳлил қилишда иккиланиш назариясининг иккинчи теоремасидан фойдаланилади.

Теорема. Агар берилган масаланинг i- чегараловчи шартилари унинг оптимал ечимида қатъий тенгсизликка айланса, у ҳолда иккиланган масаланинг оптимал ечимида i-компонента нолга тенг бўлади; агар иккиланган масаланинг оптимал ечимида i- компонента мусбат бўлса, у ҳолда берилган масаланинг i- шарти оптимал ечимда тенгликка айланади.

Бундан кўринадики: оптимал ечимнинг баҳоси - ресурслар танқислиги даражасининг ўлчовидир. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатиладиган хом ашё «танқис (дифицит) хом ашё» дейилади. Бундай хом ашёни ошириб сарф қилиш корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш даражасини оширади. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом ашё «нотанқис (дифицит бўлмаган) хом ашё» ҳисобланади. Бундай хом ашёларни иккиланган баҳоси нолга тенг бўлади. Уларнинг миқдорини ошириш ишлаб чиқариш режасини оширишга таъсир қилмайди.

Шундай қилиб:

1) иккиланган баҳолар ресурсларнинг танқислик ўлчови бўлади. Иккиланган масала оптимал ечимининг y_i компонентаси i - ресурс заҳирасининг баҳоси бўлади; y_i қанча катта бўлса, ресурс танқислиги шунча юқори эканлиги кўрсатади. Нотанқис (ортиқча) ресурс учун $y_i=0$ бўлади.

2) иккиланган баҳолар ресурслар заҳирасининг ўзгариши мақсад функцияга қандай таъсир қилишини кўрсатади:

$$\Delta F=y_i\bullet\Delta b_i$$

бунда: y_i – i - ресурснинг иккиланган баҳоси;
Δb_i - i -ресурс заҳирасининг орттирмаси;
ΔF - мақсад функциясининг ўзгариши.

Масала. Корхона икки хил M_1 ва M_2 маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун икки тур А ва В хом ашёлардан фойдаланади. Бир бирлик M_1 ва M_2 хил маҳсулотга сарф қилинадиган турли хом ашёлар нормаси, маҳсулотнинг бир бирлигидан олинадиган даромад ҳамда хом ашёлар заҳираси қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашё нормаси		Хом ашёлар заҳираси
	M_1	M_2	
A	2	3	9
B	3	2	13
Бир бирлик маҳсулотдан олинадиган даромад	3	4	

Иш тажрибаси шуни кўрсатадики, суткасига M_1 маҳсулотга бўлган талаб M_2 маҳсулотга бўлган талабдан бир бирликдан кўп бўлмайди. Бундан ташқари суткасига M_2 маҳсулотга бўлган талаб 2 бирликдан кўп бўлмайди.

Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

Ечиш: Масаланинг математик модели:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

(А хом ашё)

(В хом ашё)

(талаб)

(талаб)

Иккиланган масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$G = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \to min$$

бўлади.

Берилган масаланинг ечимини топиш мақсадга мувофиқдир. Бу масалани симплекс усулда ечамиз.

Б	$C_б$	A_0	3	4	0	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	9	2	3	1	0	0	0
A_4	0	13	3	2	0	1	0	0
A_5	0	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0	0
A_3	0	7	0	5	1	0	-2	0
A_4	0	10	0	5	0	1	-3	0
A_1	3	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		3	0	-7	0	0	3	0
A_2	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
A_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0
A_1	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
A_6	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ_j		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

Натижада иккала масала учун оптимал ечимларни топамиз. Берилган масала учун:

$$X_{опт}=(\ 12/5;\ 7/5) \qquad F_{max}=64/5=12{,}8$$

Иккиланган масала учун

$Y_{опт}=(\ 7/5;\ 0;\ 1/5;\ 0)$ $\quad G_{\min}=64/5=12{,}8$ бўлади.

Иккиланган масала ечимида $y_2 = y_4 = 0$, бинобарин, II ва IV ресурслар нотанқис ресурслардир. II ресурс (B хом ашёнинг) ортиқчаси 3 бирликни ($x_4=3$) , IV ресурснинг ортиқчаси эса 0,6 бирликни ($x_6=0{,}6$) ташкил қилади.

Иккиланган масала ечимида $y_1 = 7/5$ ва $y_3 = 1/5$. Демак, I ва III ресурслар тўла ишлатилган, яъни уларнинг танқис ресурслар эканлигини кўрсатади. Қаралаётган масалада А тур хом ашё захираси $\Delta b_1 = 1$ бирликка оширилса, мақсад функциясининг қиймати 1,4 бирликка ошади: $\Delta F = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{7}{5} \cdot 1 = 1{,}4$

Агар ишлаб чиқаришда А тур хом ашёдан бир бирлик ортиқча сарф қилинса, унинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Шу янги режага мувофиқ маҳсулот ишлаб чиқарилса, даромад

$$F_{max} = 12{,}8+1{,}4=14{,}2$$

ни ташкил қилади.

Жадвални A_4 устунига қараб хулоса чиқарамиз:

Янги режада M_1 ва M_2 маҳсулотларнинг ишлаб чиқарилиши 1/5=0,2 бирликка ошади. Бунинг натижасида А тур хом ашёни сарф қилиши бир бирликка кўпроқ бўлади:

$$\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

Худди шунингдек, III ресурс $\Delta b_3 = 1$ бирликка оширилса, яъни суткасига M_1 маҳсулотга бўлган талаб M_2 маҳсулотга қараганда 2 бирликдан кўп бўлмаслиги қаралса, мақсад функциянинг қиймати

$$\Delta F = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2$$ бирликка ошади.

Жадваални A_5 устунига қараб хулоса чиқарамиз:
Янги режада M_1 маҳсулотни ишлаб чиқариши 3/5 бирликка ошади ва M_2 маҳсулотники эса 2/5 бирликка камаяди. Натижада III тур ресурс

$$1 \cdot \frac{3}{5} - 1 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right) = 1$$ бирликка кўпроқ бўлади.

Иккиланган оптимал баҳоларни иккиланган масала шартларига қўямиз:

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3$$

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4$$

шартлар тенгликка айланди, яъни корхона ҳар иккала маҳсулотни ҳам ишлаб чиқарса мақсадга мувофиқ бўлади. Бу иккала маҳсулотнинг ишлаб чиқарилиши берилган масаланинг оптимал ечимида ҳам назарда тутилган.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1.Корхона 4 хил маҳсулотни ишлаб чиқариши учун 3 тур ресурслардан фойдаланади. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқаришда сарф қилинадиган ресурслар нормаси, ресурсларнинг заҳиралари, ҳамда бир бирлик маҳсулот нархи қуйидаги жадвалда берилган.

Ресурс тури	**Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган ресурслар нормаси**				**Ресурс-лар за-ҳираси**
	A	**B**	**C**	**D**	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Бир бирлик маҳсулотнинг нархи	9	6	4	7	

Ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

I тур ресурс заҳираси 60 бирликка камайтирилиб, II ва III тур ресурс заҳиралари 120 ва 160 бирликка оширилганда маҳсулот ишлаб чиаришнинг энг катта даромадининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

2.Корхона ҳар хил A,B,C буюмларни ишлаб чиқариши учун 3 тур хом ашёлардан фойдаланади. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқаришда сарф қилинган хом ашёлар нормаси, хом ашёлар заҳиралари, ҳамда бир бирлик маҳсулотдан келадиган даромад қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашёлар нормаси (кг)			Хом ашёлар заҳира-лари
	A	B	C	
I	18	15	12	360 кг
II	6	4	8	192 кг
III	5	3	3	180 кг
Бир бирлик бу-юмдан олинадиган даромад	9	10	16	

а) ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

б) I, II ва III тур хом ашёлар заҳиралари мос равишда 30, 40 ва 50 кг га оширилганда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг энг катта даромадининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

3.Уч хил A, B ва C маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун уч хил хом ашёлардан фойдаланади. Ҳар бир хом ашёдан мос равишда 180, 210 ва 236 кг ҳажмдан кўп бўлмаган миқдорда ишлатиш мумкин. Бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун ҳар бир тур хом ашёлар сарфи, ҳамда бир бирлик маҳсулотдан олинадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган.

Хом ашё тури	Бир бирлик маҳсулотга сарфланадиган хом ашёлар нормаси (кг)		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Бир бирлик буюмдан келадиган даромад	10	14	12

а) ишлаб чиқаришнинг энг катта даромад берадиган режаси тузилсин.

б) I, II ва III тур хом ашёлар заҳиралари мос равишда 30, 40 ва 50 кг га оширилганда мақсад функция максимумининг ўзгариши таҳлил асосида аниқлансин.

4.7- машғулот масалаларининг оптимал ечимини таҳлил қилинг.

Жавоблар:

1. $\Delta F_{1\max} = 0;\quad \Delta F_{2\max} = 180;\quad \Delta F_{3\max} = 360;\quad \Delta F_{\max} = 540;$

2. $\Delta F_{1\max} = \frac{20}{3};\quad \Delta F_{2\max} = \frac{200}{3};\quad \Delta F_{3\max} = 0;\quad \Delta F_{\max} = \frac{220}{3};$

3. $\Delta F_{1\max} = -230;\quad \Delta F_{2\max} = 0;\quad \Delta F_{3\max} = 200;\quad \Delta F_{\max} = -30;$

9- машғулот

Иккиланган симплекс усул.

Баъзан берилган масаланинг оптимал ечимини топиш учун ,аввало, иккиланган масалани ечиб, унинг баҳолари асосида берилган масаланинг ечимини топиш мумкин бўлади. Масалан, 7-машғулотнинг 5- масаласини ечишда шунга амал қилган эдик. Аммо иккиланган масалага ўтиш шарт эмас экан.

Ҳақиқатдан ҳам, ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган A_j векторларнинг m таси бирлик векторлар бўлган чизиқли программалаш масаласининг бошланғич симплекс-жадвалига қарайлик. Устунларида берилган масала ва сатрларида эса иккиланган масала ёзилган эканлигини осонлик билан пайқаш мумкин. Бундан ташқари, берилган масаланинг баҳолари c_j ва иккиланган масаланинг баҳолари эса b_i бўлади. Шу сабабдан берилган масала ёзилган симплекс-жадвал асосида иккиланган масалани ечсак бўлар экан. Натижада иккиланган масаланинг оптимал ечими ва у билан биргаликда берилган масаланинг оптимал ечими топилади. Бундай усул иккиланган симплекс усул дейилади.

Симплекс усул ва иккиланган симплекс усулда бошланғич жадвал бир-биридан фарқ қилмайди.

Симплекс усулда жадвални алмаштириш учун (янги ечимни топиш учун) олдин базисга киритиладиган вектор танланиб, сўнгра базисдан чиқадиган вектор аниқланар эди. Иккиланган симплекс усулда энг аввало базисдан чиқариладиган вектор

$$\min_{b_i<0} b_i = b_l$$

шарт асосида танланади. Бундай вектор A_l вектори бўлади. Сўнгра базисга киритиладиган вектор танланади. Бунинг учун

$$\min_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$$

ни топамиз. Агар бу минимумга j=r да эришса, унда A_r вектор базисга киритилади, яъни a_{lr} ҳал қилувчи элемент бўлади. Симплекс жадвал оддий симплекс усулдагидек алмаштирилади. Бу жараён A_0 устунида бирорта ҳам манфий сон қолмагунча давом эттирилади. Натижада берилган масала ҳамда иккиланган масаланинг оптимал ечими топилади. Агар бирор қадамда симплекс жадвалининг i- сатрида A_0 устунидаги b_l элемент манфий сон бўлиб, бу сатрда бошқа бирорта ҳам манфий элемент бўлмаса, берилган масала мусбат ечимга эга бўлмайди.

Масала. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$$

масалани иккиланган симплекс усулда ечинг.

Ечиш. Бу масалани қуйидаги кўринишга келтириш қийин эмас.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

A_3, A_4, A_5 векторларни базис сифатида танлаб олиб бошланғич симплекс жадвални тузамиз:

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8	1	1	1	0	0
A_4	0	-4	-1	1	0	1	0
A_5	0	-6	-1	-2	0	0	1
Δ_J		-16	-1	-1	0	0	0

A_0 устунда иккита манфий сонлар (-4;-6) бор . Базисдан чиқариладиган вектор min(-4;-6)=-6 шарти асосида танланади. Яъни, A_5 векторни базисдан чиқарилади. Базисга киритиладиган векторни аниқлаш учун

$$\min_{a_{3j}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{3j}}\right) = \min\left\{\frac{-1}{-1};\frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$$

ни топамиз. Демак, базисга A_2 векторни киритамиз. Натижада симплекс жавдвал алмашади.

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	5	1/2	0	1	0	1/2
A_4	0	-7	-3/2	0	0	1	1/2
A_2	1	3	1/2	1	0	0	1/2
Δ_J		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

A_0 векторнинг устунида -7 манфий сон бор ва бу сатрнинг бошқа элементлари ичида битта манфий сон -3/2 мавжуд. Демак, базисдан A_4 ни чиқариб, унинг ўрнига A_1 ни киритамиз:

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
A_1	-1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
A_2	-1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
Δ_J		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Жадвалдан кўриниб турибдики, берилган ва иккиланган масалаларнинг оптимал ечимлари мос равишда X=(14/3; 2/3; 8/3; 0) ва Y=(2; 1/3; 2/3) бўлиб, $F_{\min} = G_{\max} = -\frac{32}{3}$ бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги масалаларни иккиланган симплекс усулида ечинг.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (6;2;0);\ F_{\max} = 8$

$F(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (3;0;0;\frac{1}{2});\ F_{\max} = -\frac{29}{2}$

$F(x) = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$

4. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (8;2;0;0);\ F_{\min} = 52$

$F(x) = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (2;0;0;5);\ F_{\min} = 12$

$F(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (3;0;0;0;9;0);\ F_{\max} = -75$

$F(x) = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \to \max$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $\qquad Ж: X = (0;3;10;0;19);\ F_{\max} = 11$

$F(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$

8. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$
$$F(x) = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$$

$Ж: X = (4;0;4;0;26);\ F_{\max} = 48$

9. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$
$$F(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

$Ж: X = (0;12;0;6);\ F_{\max} = 126$

10. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$
$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$$

Ж: Берилган масала ечимга эга эмас.

10- машғулот

Транспорт масаласини ечишда потенциаллар усули.

Маълумки, ихтиёрий чизиқли программалаш масаласининг оптимал ечимини топиш жараёни бошланғич таянч ечимни қуришдан бошланади. Транспорт масаласини бошланғич таянч ечимини илгари фойдаланган усуллар ёрдамида топиш мумкин, бироқ бу айрим қийинчиликларни юзага келтиради. Транспорт масаласини бошланғич таянч ечимини қуришининг бир нечта оддий схемалари мавжуд. Дастлаб ёпиқ модели транспорт масаласини қараймиз.

1. Шимоли- ғарбий бурчак усули.

Режалаштириш жадвалида йўл ҳаражатини ҳисобга олмай B_1 истеъмолчининг талабини дастлаб A_1 таъминотчи ҳисобидан қондирамиз. Бунинг учун min (a_1, b_1) ни (A_1, B_1) катакчанинг чап пастки бурчагига ёзамиз, яъни $x_{11}=\min(a_1, b_1)$. Агар $a_1<b_1$ бўлса, B_1 нинг эҳтиёжини тўла қондириш учун (A_2, B_1) катакчага етишмайдиган юк бирлигини A_2 дан олиб ёзамиз ва ҳ.к. Бу жараённи (A_m, B_n) катакчага етгунча давом эттирамиз. Натижада банд катакчалар сони m+n-1 дан ошмайди ва тузилган ечим таянч ечим бўлади. Агар банд катакчалар сони m+n-1 га тенг бўлса, бузилмаган таянч ечим ҳосил бўлади.

Мисол. Ушбу транспорт масаласининг бошланғич ечимини топинг.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Заҳира ҳажми
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Талаб ҳажми	150	120	80	50	

(1)

Ечиш. Бошланғич таянч ечимини шимоли -ғарбий бурчак усули билан топамиз. Бунинг учун режалар матрицасини қуйидаги кўринишда ёзамиз.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	^{3} 100	^{5}	^{7}	^{11}
130	^{1} 50	^{4} 80	^{6}	^{2}
170	^{5}	^{8} 40	^{12} 80	^{7} 50

$$X=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Бу жадвалда a_i билан таъминотчилардаги маҳсулот заҳирасини, b_j *б*илан эса истеъмолчиларнинг маҳсулотга бўлган талабини белгиладик. Топилган таянч режа қуйидагидан иборат:

$$X= \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Банд катакчалар сони роса m+n-1=3+4-1=6 га тенг. Тузилган бошланғич ечим бузилмаган таянч ечим (режа) бўлади.

Тузилган режага мос келувчи харажатни ҳисоблаймиз.

F(X)=100*3+50*1+80*4+40*8+80*12+50*7=2300

2. Минимал харажатлар усули.

Бу усулда бошланғич ечим қуриш учун аввал йўл харажати энг кичик бўлган катакчага a_i ва b_i лардан кичиги ёзилади ва навбатдаги энг кичик харажатли катакчага ўтилади ва ҳ.к. Бу усулда тузилган бошланғич ечимни циклланишга текшириш шарт.

Мисол. Юқорида берилган транспорт масаласининг бошланғич ечимини “минимал харажатлар ” усули ёрдамида тузинг.

Ечиш.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	^{3} 20	^{5} 80	^{7}	^{11}
130	^{1} 130	^{4}	^{6}	^{2}
170	^{5}	^{8} 40	^{12} 80	^{7} 50

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Бунда ҳам банд катакчалар сони 6 га тенг бўлди, яъни тузилган бошланғич ечим бузилмаган таянч ечим бўлиб чиқди. Ечим тузилаётганда йўл харажати инобатга олинди. Шу сабабдан тузилган режанинг харажати олдинги ечим харажатидан кичик ва оптимал ечимга яқинроқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам

F(X)=20*3+80*5+130*1+40*8+80*12+50*7=2200

Бошланғич ечим қуришнинг яна бошқа усуллари ҳам мавжуд.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган усуллар ёрдамида бошланғич таянч ечим қуриш мумкин.

Тузилган бошланғич таянч ечимни потенциаллар усули ёрдамида оптимал ечимгача етказиш мумкин.

Потенциаллар усули.

Теорема. Агар транспорт масаласининг $X=(x_{ij})$ ечими оптимал бўлса, унга қуйидаги шартларни

$U_i + V_j=C_{ij}$, агар $x_{ij}>0$,

$U_i + V_j \le C_{ij}$, агар $x_{ij}=0$.

$i=1,2,....,m$; $j=1,2,.....,n$.

қаноатлантирувчи m+n та сонлар мос келади.

U_i ва V_j сонлар мос равишда "таъминотчи" ва "истеъмолчи"-ларнинг потенциаллари дейилади.

Шундай қилиб, ечимнинг оптималлигини текшириш учун энг аввало потенциаллар системасини қуриш зарур экан.

Потенциаллар системасини қуриш.

Потенциаллар системасини барча банд катакчалар учун

$$U_i + V_j=C_{ij}$$

кўринишда тузамиз.

Потенциаллар системасини фақат бузилмаган таянч ечим учун қуриш мумкин. Бундай ечим учун m+n-1 банд катакча мос келади. Номаълум потенциаллар сони эса m+n га тенг. Яъни потенциалларни топиш учун m+n номаълумли m+n-1 боғлиқмас тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу система аниқмас система бўлади. Шунинг учун бирор номаълумга (одатда U_1 га) ноль қиймат берилади ($U_1=0$). Бундан бошқа потенциаллар бир қийматли ҳолда аниқланади. Сўнгра ҳар бир бўш катакча учун мос потенциаллар $\Delta_{ij}=(U_i+V_j)-C_{ij}\le 0$ шартни қаноатлантиришини текширамиз. Агар бу шартлар барча бўш катакчаларда бажарилса, топилган таянч ечим оптимал бўлади. Агарда бу шартлар айрим бўш катакчаларда бажарилмаса, яъни, $\Delta_{ij}=(U_i+V_j)-C_{ij}>0$ бўлса, у ҳолда таянч ечим учун оптималлик шарти бажарилмайди. Ундан бошқа таянч ечимга ўтиш керак бўлади. Навбатдаги таянч ечимга ўтиш учун Δ_{ij} ларнинг энг каттасига мос келган катакча тўлдирилади. Бунинг учун унга θ сон қўшилади ва шу катакчадан бошлаб вертикал ва горизонтал йўналишлар бўйлаб банд катакчалардаги тақсимотлардан θ ни айириб ва қўшиб бориб ёпиқ контур чизилади. Кўпбурчакнинг учларига "$+\theta$" ишорали катакчадан бошлаб кетма-кет "$-\theta$ " ва "$+\theta$ " белгилар қўйиб чиқилади. Сўнгра "- " ишорали катакчалардаги тақсимотлари ичидан энг кичигини θ нинг сон қиймати деб қабул қилинади ва у "+" ишорали катакчаларга қўшилади ва "-" манфий ишорали катакчалардан айирилади. Натижада банд катаклар сони m+n-1 та бўлган янги таянч режа ҳосил бўлади. Бунда айрим банд катакчалардаги юк бирлиги ноль бўлиб қолиши мумкин.

Мисол. Юқорида келтирилган транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечинг.

Ечиш. Бу масаланинг шимоли-ғарбий бурчак усули билан топилган таянч ечими учун мос потенциаллар системасини кўрайлик.

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} $100-\theta$	^{5} 1	^{7} $+\theta$ 3	^{11} -6	0
130	^{1} $50+\theta$	^{4} $80-\theta$	^{6} 2	^{2} 1	-2
170	^{5} 0	^{8} $40+\theta$	^{12} $80-\theta$	^{7} 50	2
V_j	3	6	10	5	$\theta=80$

$$X=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

$F(X_0)=2300$

$$\begin{cases} U_1+V_1=3 \\ U_2+V_1=1 \\ U_2+V_2=4 \\ U_3+V_2=8 \\ U_3+V_3=12 \\ U_3+V_4=7 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} U_1=0 \quad V_1=3 \\ U_2=1-V_1=1-3=-2 \\ V_2=4-U_2=4+2=6 \\ U_3=8-V_2=8-6=2 \\ V_3=12-U_3=12-2=10 \\ V_4=7-U_3=7-2=5 \end{array}$$

Энди бўш катаклар учун оптималлик шартини текширамиз:

$\Delta_{12}=(U_1+V_2)-C_{12}=1$; $\Delta_{23}=(U_2+V_3)-C_{23}=2$

$\Delta_{13}=(U_1+V_2)-C_{13}=3$; $\Delta_{24}=(U_2+V_4)-C_{24}=1$

$\Delta_{14}=(U_1+V_4)-C_{14}=-6$; $\Delta_{31}=(U_3+V_1)-C_{31}=0$

Кўриниб турибдики Δ_{ij} лар ичида мусбатлари бор. Демак, бу режа оптимал эмас. Янги таянч режага ўтамиз:

max $\{3;2;1\}=3=\Delta_{13}$. Демак, жадвалда (A_1, B_3) катакчага ”$+\theta$ ” белги киритамиз ва ёпиқ контур ясаймиз. “- θ ” белгини катакчалардаги тақсимотлари ичидаги энг кичигини танлаб уни θ нинг сон қиймати деб қабул қиламиз.

$\theta=\min\{100,80\}=80$

$\theta=80$ ни “+” ишорали катакчаларга қўшиб ва “-” ишорали катакчалардан айириб, янги таянч режа тузамиз:

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20	^{5} 1	^{7} 80	^{11} $\boxed{-6}$	0
130	^{1} 130	^{4} $0-\theta$	^{6} -1	^{2} $+\theta$ 1	-2
170	^{5} 0	^{8} $120+\theta$	^{12} -3	^{7} $50-\theta$	2
V_j	3	6	7	5	$\theta=0$

$$X_1=\begin{pmatrix}20 & 0 & 80 & 0\\ 130 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 120 & 0 & 50\end{pmatrix}$$

$F(X_1)=2060$

X_1-айниган таянч режа бўлмаслиги учун (A_2,B_2) ва (A_3,B_3) катакчалардан биттасини, яъни ҳаражати катта бўлган (A_3,B_3) катакчани бўш катакчага айлантириб, (A_2,B_2) катакчадаги тақсимотни эса 0 га тенг деб қабул қиламиз ва бу катакчани банд катакча деб қараймиз, ҳамда потенциал тенгламалар тузиб, потенциалларнинг сон қийматини топамиз:

$U_1+V_1=3;$ $\quad U_1=0;$ $\quad V_1=3;$
$U_1+V_3=7;$ $\quad U_2=-2;$ $\quad V_3=7;$
$U_2+V_1=1;$ $\quad U_3=2;$ $\quad V_2=6,$
$U_2+V_2=4;$
$U_3+V_2=8$
$U_3+V_4=7$

Энди бўш катакчалар учун оптималлик шартини текширамиз:

$\Delta_{12}=(U_1+V_2)-C_{12}=1;$
$\Delta_{14}=(U_1+V_4)-C_{14}=-6;$
$\Delta_{23}=(U_2+V_3)-C_{23}=-1;$
$\Delta_{31}=(U_3+V_1)-C_{31}=0;$
$\Delta_{33}=(U_3+V_3)-C_{33}=-3.$
$\Delta_{24}=(U_2+V_4)-C_{24}=1;$

X_1 режа оптимал эмас, чунки $\Delta_{31}=\Delta_{12}=1>0$. Демак, жадвалдаги (A_3,B_1) ва (A_1,B_2) катакчалардан ҳаражати камига “$+\theta$” белги қўйиб, ёпиқ кўпбурчак ясаймиз ва θ ни топамиз.

$$\theta=\min\{50,0\}=0$$

яъни таянч режа тузамиз.

$a_i \backslash b_j$	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20	^{5} 0	^{7} 80	^{11} -7	0
130	^{1} 130 $-\theta$	^{4} -1	^{6} -1	^{2} 0+ θ	-2
170	^{5} $+\theta$ 1	^{8} 120	^{12} -2	^{7} 50 - θ	3
V_j	3	5	7	4	θ =50

$$X_2 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$F(X_2)=2060$

Топилган янги X_2 режа оптимал ечим бўлмайди, чунки

$\Delta_{31}= (U_3+V_1)- C_{31} =1>0$;

Навбатдаги таянч ечимга ўтиш учун (A_3,B_1) катакчага «$+\theta$» белги қўйиб, ёпиқ контур тузамиз ва θ =50 ни топамиз.

$a_i \backslash b_j$	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20 $-\theta$	^{5} $+\theta$ 1	^{7} 80	^{11} -7	0
130	^{1} 80	^{4} 0	^{6} -1	^{2} 50	-2
170	^{5} 50 $+\theta$	^{8} 120$-\theta$	^{12} -3	^{7} -1	2
V_j	3	6	7	4	θ =20

$$X_3 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F(X_3)=2010$

ҳосил бўлган таянч режа оптимал ечим бўлмайди, чунки $\Delta_{12}=1>0$. Янги таянч ечимга ўтиш учун (A_1,B_2) катакчага «$+\theta$» белги қўямиз ва ёпиқ контур тузиб θ =20 эканлигини аниқлаймиз ва янги X_4 режани топамиз.

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -8	0
130	1 80	4 0	6 0	2 50	-1
170	5 70	8 100	12 -2	7 -1	3
V_j	2	5	7	3	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F(X_4)=1990$

X_4 айнимаган таянч ечим. Бу ечим оптимал ечим бўлади, чунки у учун оптималлик шартларини барчаси бажарилади:

$\Delta_{11}= (U_1+V_1)- C_{11} =-1;$
$\Delta_{14}= (U_1+V_4)-C_{14} =--8;$
$\Delta_{22}= (U_2+V_2)-C_{22}=0;$
$\Delta_{23}= (U_2+V_3)- C_{23} =0;$
$\Delta_{33}= (U_3+V_3) –C_{33} =-2.$
$\Delta_{34}= (U_3+V_4)-C_{34} =-1;$
Демак, $X_4= X_{опт}$; $F_{min}=F(X_4)=1990$.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги транспорт масалаларининг оптимал ечими топилсин.

1.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Талаб ҳажми	70	40	70	45	

2.

Таъминотчилар	Истеъмолчилар				Захира ҳажми.
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	8	10	20	1	50
Талаб ҳажми	75	80	60	85	

3.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми.**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
Талаб ҳажми	80	60	170	80	

4.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми.**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Талаб ҳажми	40	60	80	60	

5.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми.**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Талаб ҳажми	30	30	10	20	

6.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**					**Заҳира ҳажми.**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Талаб ҳажми	110	90	120	80	150	

7.

b_i / a_j	30	30	30
20	1	4	5
30	5	1	4
40	4	5	1

8.

b_i / a_j	120	80	50
130	1	7	6
70	6	1	1
50	7	6	1

9.

b_i / a_j	150	150	100
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

10

b_i / a_j	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	3	3	1

11.

b_i / a_j	70	50	50
50	8	6	1
60	1	8	6
60	6	8	1

13.

b_i / a_j	80	80	80
160	2	7	9
40	3	3	6
40	4	2	7

12.

b_i / a_j	120	90	70
100	2	5	3
90	3	2	5
90	5	3	2

14.

b_i / a_j	130	60	40
20	1	3	2
150	2	1	3
60	3	1	2

15.

b_i / a_j	20	30	30	10
30	2	3	2	4
40	3	2	5	1
20	4	3	2	6

16.

b_i / a_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4

17.

b_i / a_j	70	90	110	150
120	2	5	4	6
130	3	11	3	2
150	3	10	3	2

18.

b_i / a_j	250	300	350	300
350	2	3	4	3
300	2	3	1	2
550	3	1	3	4

Жавоблар:

1. $X = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 0 & 35 \\ 55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 10 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 445.$

2. $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 665.$

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 1280.$

4. $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 60 \\ 40 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 280.$

5. $X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 140.$

6. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 2300.$

11-машғулот

“Очиқ моделли” транспорт масаласи.
Хос («бузилган») транспорт масаласи
ва уни ечишнинг ε - усули.

Юқоридаги масалада талаб ва таклифнинг (заҳира ҳажмининг) умумий миқдорлари тенг бўлган эди. Бундай масалаларни “ёпиқ моделли” транспорт масаласи дейилади. Акс ҳолда масала “очиқ моделли” транспорт маасаласи дейилади. Бундай масалани оптимал ечимини топиш учун ёпиқ моделга келтирилади ва потенциаллар усули қўлланилади.

“Очиқ моделли” масалани ёпиқ моделга келтириш учун “сохта таъминотчи ёки истеъмолчи” киритилади, уларнинг заҳираси ёки талаб ҳажми $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$ ёки $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$ бўлади. “Сохта таъминотчидан ” реал истеъмолчига ёки реал таъминотчидан “сохта истеъмолчига” амалда юк ташилмагани учун йўл харажатлари нолга тенг деб олинади.

Мисол. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ёпиқ моделли транспорт масаласига айлантиринг ва унинг оптимал ечимини топинг.

b_i / a_j	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 \ \rangle \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 13$$

Шунинг учун талаби

$$b_6 = 16-13 = 3$$

бўлган «сохта истеъмолчи»ни киритамиз ва режалар жадвалини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

b_i / a_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Ҳосил бўлган ёпиқ моделли масалани потенциаллар усулини қўллаб ечамиз ва 7-қадамда қуйидаги оптимал ечимни топамиз:

b_i / a_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2 1	1 3	2	3	0
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 2	3	4	5	0 2

Жавоб: $x_{12}=1$; $x_{13}=3$; $x_{24}=2$; $x_{25}=2$; $x_{26}=1$; $x_{31}=3$; $x_{32}=2$.

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{F}(\mathrm{X}_{\text{опт}}) = 13$$

Демак, таъминотчилардаги маҳсулотларни энг кам харажат сарф қилиб истеъмолчиларга тақсимлаш учун 2- таъминотчида 1 бирлик ва 3- таъминотчида 2 бирлик маҳсулот тақсимланмасдан қолиши керак экан.

Хос («бузилган») транспорт масаласи ва уни ечишнинг ε - усули.

Агар транспорт масаласининг таянч режасидаги мусбат компоненталар сони $k<n+m-1$ бўлса, бундай режа хос (“бузилган”) режа бўлади. Бундай режани тузатиш учун унга $n+m-1-k$ та ноль элемент киритиш мумкин. Киритилган ноль элементларга мос келувчи векторлар ўзаро чизиқли эркли бўлиши керак. Бунга эришиш учун қуйидаги ε-усулни қўллаш керак.

Одатда транспорт масаласидаги a_i ва b_j ларнинг хусусий йиғиндилари тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий усул билан топилган таянч режа “бузилган” бўлади. Демак, хослик ҳолатини олдини олиш учун a_i ва b_j лардан тузилган хусусий йиғиндиларнинг тенг бўлмаслигига эришиш керак. Бунинг учун эса етарлича кичик $\varepsilon>0$ сон олиб, a_i ва b_j ларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \qquad (i=\overline{1,m});$$
$$\overline{b_j} = b_j, \qquad (j=\overline{1,n-1});$$
$$\overline{b_n} = b_n + m\varepsilon,$$

Ҳосил бўлган масалани ечиб, $X(\varepsilon)$ оптимал режа топилади. Ундан $\varepsilon=0$ деб қабул қилиб берилган масаланинг оптимал ечими топилади.

Мисол.

Қуйидаги транспорт масаласини ε - усулни қўллаб ечинг.

b_i \ a_j	12	14	10	24
14	1	5	3	2
12	6	3	2	1
12	4	2	1	5
22	2	6	5	3

Ушбу масалада a_1+a_2 ва $в_1+в_2$ хусусий йиғиндилар ўзаро тенг. Демак, бу масаланинг таянч ечими «бузилган» бўлиши мумкин. Буни олдини олиш учун масалани қуйидаги кўринишда ёзамиз ва потенциаллар усулини қўллаб ечамиз:

b_i \ a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 1	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 1	2 $+\ \theta$ 1	1 $12+\varepsilon\ -\theta$	-1
$12+\varepsilon$	4 -6	2 $2+\varepsilon+\theta$	1 $10-\theta$	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $12-\varepsilon-\theta$	5 0	3 $10+2\varepsilon+\theta$	1
V_j	1	5	4	2	θ =10

b_i \ a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 0	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 $+\ \theta$ 1	2 10	1 $2+\varepsilon-\theta$	-1
$12+\varepsilon$	4 -6	2 $12+\varepsilon$	1 -1	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $2-\varepsilon-\theta$	5 -1	3 $20+2\varepsilon+\theta$	1
V_j	1	5	3	2	$\theta=2-\varepsilon$

b_i \ a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 -1	3 0	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 $2-\varepsilon$	2 10	1 3ε	-1
$12+\varepsilon$	4 -5	2 $12+\varepsilon$	1 0	5 -5	-2
$22+\varepsilon$	2 0	6 -1	5 -1	3 $22+\varepsilon$	1
V_j	1	4	3	2	

$$X_{опт}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0 & 2+\varepsilon\\ 0 & 2-\varepsilon & 10 & 3\varepsilon\\ 0 & 12+\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 22+\varepsilon\end{pmatrix} \qquad \varepsilon=0 \quad да$$

$$X_{опт}=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 10 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 22\end{pmatrix} \qquad F(X_{опт})=132.$$

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги транспорт масалаларининг оптимал ечимини топинг ва керак бўлган ҳолларда ε - усулни қўлланг.

1.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Талаб ҳажми	130	220	60	70	

2.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Талаб ҳажми	80	80	60	80	

3.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
Талаб ҳажми	80	50	50	70	

4.

Таъминотчилар	**Истеъмолчилар**				**Заҳира ҳажми**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Талаб ҳажми	45	45	100	160	

5.

b_i / a_j	20	30	20	50
20	4	1	3	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

6.

b_i / a_j	60	40	40	30	50
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

7.

b_i / a_j	50	40	40	15	25
70	6	3	1	5	7
20	8	4	2	4	3
50	3	5	5	6	2
50	5	1	1	3	6

8. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг.

а)

b_i / a_j	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

б)

b_i / a_j	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

в)

b_i / a_j	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

г)

b_i / a_j	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

9. Берилган масалаларни ε - усулини қўллаб ечинг.

а)

b_i / a_j	60	60	40	90
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
40	6	7	8	9
90	9	6	5	4

б)

b_i / a_j	120	90	45	45
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

в)

b_i / a_j	35	25	20
20	5	2	3

30	3	5	2
20	2	5	3

г)

b_i / a_j	60	60	60
50	2	4	3
40	4	3	2
110	3	2	4

Жавоблар:

1. $X = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 790.$

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 780.$

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 720.$

4. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 35 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}$; $F_{\min} = 800.$

12- машғулот

Бутун сонли чизиқли программалаш масалалари.

Кўп ҳолларда чизиқли программалаш масалаларида ўзгарувчилардан бутун бўлишлилик шарти талаб қилинади. Агар ўзгарувчиларнинг ҳаммаси бутун бўлишлиги талаб қилинса, у ҳолда тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласи деб аталувчи масала ҳосил бўлади. Бу масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_j, \quad i=1,2,3,\dots,m; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3,\dots,n; \qquad (3)$$

$$x_j \in Z, \quad j=1,2,3,\dots,n; \qquad (4)$$

Бунда Z - бутун сонлар тўплами.

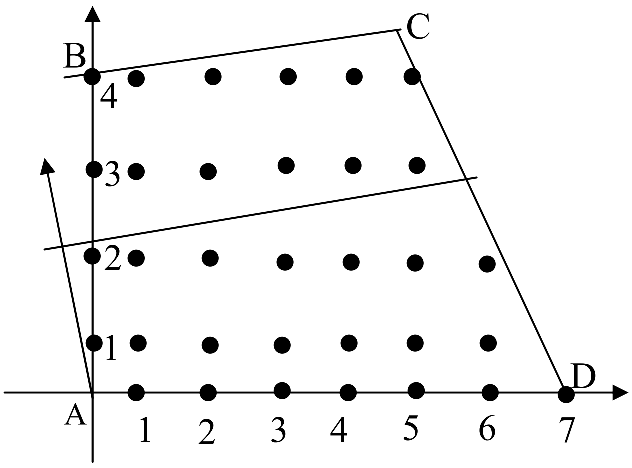
(1)-(4) масаланинг мумкин бўлган ечимлар тўплами $\widetilde{K}$ координаталари бутун сонлар бўлган нуқталар тўпламидан ташкил топади. $\widetilde{K}$ тўплам (1)-(3) чизиқли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечимлар тўплами K нинг қисми, яъни $\widetilde{K} \subset K$ эканлигини эътиборга олсак, икки ўзгарувчили тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини график усулида ечиш мумкин бўлади.

1-мисол.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 29 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_j \in Z, j=1,2 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min$$

Ечиш: R^2 текисликда берилган масаланинг ўзгарувчиларини бутун бўлиши шартига эътибор бермасдан, берилган масалани оддий чизиқли программалаш масаласи деб, K мумкин бўлган ечимлар тўпламини тузиб, K даги координаталари бутун сон бўлган нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталар тўплами тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласининг $\widetilde{K}$ мумкин бўлган ечимлар тўпламини ташкил қилади.



12.1.- чизма.

F(x) функциянинг сатҳ чизиғини F(x) ни камайиш йўналиши $-\nabla F=(-1;\ \ 20)$ бўйича силжитиб, сатҳ чизиғи ва $\widetilde{K}$ тўплам кесишмаси бўш тўплам бўлмаслиги шартида шу чизиқнинг энг четки ҳолини топамиз. Сатҳ чизиғини бундай ҳоли B(0; 4) нуқтада бўлади. Шу сабабдан берилган масаланинг ечими $\widetilde{X}=(0;4)$ бўлади ва

$F_{min}=F(\widetilde{X})=-80$.

12.1 чизмадан кўриниб турибдики, берилган масаланинг оддий чизиқли программалаш масаласи сифатида қаралган ҳолидаги ечими X=(5; 4,5) бўлади ва $F_{min}=F(X)=-85$.

Бундан шундай хулоса чиқариш мумкин:

Умуман олганда, мақсад функциянинг $\widetilde{K}$ тўпламдаги минимум нуқтаси оддий чизиқли программалаш масаласининг ечимига яқин бўлган координаталари бутун сонли нуқта билан бир нарса эмас.

Ўзгарувчилари сони исталганча бўлган бутун сонли чизиқли программалаш масаласини ечишда Гомори усулидан фойдаланилади. Гомори усули (1)-(3) оддий чизиқли программалаш масаласини (4) шартига эътибор бермаган ҳолда мумкин бўлган ечимлар тўплами *К* дан координатлари бутун сон бўлмаган нуқталардан иборат қисмини бирин-кетин кесишдан иборатдир. Бу «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама ёрдамида амалга оширилади.

Гомори усулининг алгоритмини келтирамиз.

1. Берилган бутун сонли чизиқли программалаш масаласини ўзгарувчиларининг бутун бўлишлилик (4) шартига эътибор бермасдан, уни (1)-(3) оддий чизиқли программалаш масаласи сифатида симплекс усул ёрдамида ечамиз. Агар топилган ечим X учун (4) шарт бажарилса, у ҳолда X берилган масаланинг ҳам ечими бўлади, акс ҳолда симплекс-жадвални A_0 устунида жойлашган ечим X ни аниқловчи β_i сонлар ичида $\{\beta_i\}>0$ шартни қаноатлантирувчи сонлар мавжуд бўлади.

Эслатма. Ихтиёрий $a\in R^1$ сонни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a=[a]+\{a\},$$

бунда $[a]$ - берилган *a* сонни бутун қисми ва $\{a\}=a-[a]$ - унинг каср қисми.

Масалан, $\left[\dfrac{7}{3}\right]=2,\qquad \left[-\dfrac{7}{3}\right]=-3,$

$$\left\{\frac{7}{3}\right\}=\frac{7}{3}-\left[\frac{7}{3}\right]=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}; \qquad \left\{-\frac{7}{3}\right\}=-\frac{7}{3}-\left[-\frac{7}{3}\right]=-\frac{7}{3}+3=\frac{2}{3};$$

2. Бутун бўлмаган β_i лар ичидан биттасини, масалан, β_r ни $\{\beta_r\}=\max\{\beta_i\}$ шарт асосида танланади. Симплекс-жадвални r – сатри бўйича қуйидаги кўринишдаги

$$\sum_{j=m+1}^{n}\{q_{rj}\}x_j \le -\{\beta_r\}$$

қўшимча шарт тузилади. Бу қўшимча шарт $x_{n+1}\ge 0$ қўшимча ўзгарувчи ёрдамида қуйидаги

$$-\sum_{j=m+1}^{n}\{q_{rj}\}x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}$$

«кесувчи» тенглама тузилади ва уни қўшимча сатр сифатида симплекс-жадвалга киритилади. Энди симплекс-жадвал чизиқли программалаш масаласини базис ечимини тасвирлай олмайди, чунки A_0 устунда $-\{\beta_r\}<0$ пайдо бўлади.

3. Мумкин бўлган базис ечимга ўтиш учун қуйидаги амалларни бажариш керак бўлади:

а) манфий β_k озод ҳадли сатр «ҳал қилувчи» сатр ҳисобланади.

(Равшанки, биринчи қадамда k=n+1 бўлади);

б) агар барча коэффициентлар $q_{kj}>0$ бўлса, масала ечимга эга бўлмайди. Акс ҳолда «ҳал қилувчи» устуннинг ℓ номери қуйидаги

$$\frac{\Delta_l}{|q_{kl}|}=\min_{j:q_{kl}<0}\frac{\Delta_j}{|q_{kj}|}$$

шартдан аниқланади;

в) q_{kj} «ҳал қилувчи» элемент асосида симплекс-жадвални ўзгартирамиз.

4. Агар 3- қадамда топилган чизиқли программалаш масаласини ечими бутун бўлишлик шарти, яъни (4)- шарт бажарилса ҳисоблаш тўхтатилади, акс ҳолда 2- қадамга ўтиб, ҳисоблаш юқорида баён этилган қадамлар бўйича давом эттирилади.

Бу алгоритм асосида тўла бутун сонли чизиқли программалаш ечими топилади ёки унинг ечими мавжуд эмаслиги аниқланади.

2- мисол. 1- мисолда қаралган масалани Гомори усули билан ечинг.

Ечиш: $x_3\ge 0, x_4\ge 0$ қўшимча ўзгарувчиларни киритиб бу масалани каноник кўринишда ёзамиз.

$$\begin{cases}-x_1+10x_2+x_3=40\\ 4x_1+2x_2+x_4=29\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_j\in Z, j=1,2\end{cases}$$

$$F(x)=x_1-20x_2\rightarrow\min$$

Чегаравий шартларнинг барча коэффицентлари бутун сонлардир. Шу сабабдан x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг бутунлиги x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг бутун бўлишлигига олиб келади. Шу сабабдан каноник кўринишга келтирилган масалани тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласи сифатида қараш мумкин. Гомори усулидан фойдаланамиз.

Масалани олдин симплекс усули ёрдамида ечамиз.

Б	**С$_б$**	**А$_0$**	**1**	**-20**	**0**	**0**
			А$_1$	**А$_2$**	**А$_3$**	**А$_4$**
А$_3$	0	40	-1	10	1	0
А$_4$	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	20	0	0
А$_2$	-20	4	-1/10	1	1/10	0
А$_4$	0	21	21/5	0	-1/5	1
Δ_j		-80	2	0	-2	0
А$_2$	-20	9/2	0	1	2/21	1/42
А$_1$	1	5	1	0	-1/21	5/21
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21

Х $_{опт}$=(5; 9/2; 0; 0) $F_{\min} = -85$ бутун бўлишлик шартини қаноатлантирмайди. Шу сабабдан охирги симплекс жадвалга қўшимча сатр киритамиз:

$$\{\beta_1\} = \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{2}\right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}; \qquad q_{11} = q_{12} = 0 \qquad q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21}$$

$$q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}$$

Ундан кейин алгоритмда тасвирланган қоида бўйича симплекс-жадвални ўзгартирамиз.

Б	**С$_б$**	**А$_0$**	**1**	**-20**	**0**	**0**	**0**
			А$_1$	**А$_2$**	**А$_3$**	**А$_4$**	**А$_5$**
А$_2$	-20	9/2	0	1	2/21	1/42	0
А$_1$	1	5	1	0	-1/21	5/21	0
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21	0
А$_5$	0	-1/2	0	0	-2/21	-1/42	1
А$_2$	-20	4	0	1	0	0	1
А$_1$	1	0	1	0	-1	0	10
А$_4$	0	21	0	0	4	1	-42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Охирги симплекс-жадвал берилган масаланинг ечимини $\widetilde{X}_{опт} = (0;4)$ $\widetilde{F}_{\min} = F(\widetilde{X}) = -80$ беради.

Қайд қилиб ўтамизки, симплекс жадвалга киритилган қўшимча шартнинг кесувчи тенглама кўриниши қуйидагича

$$-\frac{1}{42}x_4 - \frac{4}{42}x_3 \le -\frac{1}{2}$$

бўлади. Бу шартни $x_3=40+x_1-10x_2$, $x_4=29-4x_1-2x_2$ тенгламалар ёрдамида x_1 ва x_2 ўзгарувчиларга ўтказиб оламиз: $x_2 \le 4$. Бундан кўриниб турибдики қўшимча шарт *К* тўпламдан (12.1 чизмадаги ABCD кўпбурчакдан) X=(5; 9/2) нуқтани ўз ичига олувчи қисмини кесиб ташлайди.

Эслатиб ўтамизки, шартлари тенгсизлик

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (5)$$

билан берилган тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласидан каноник кўринишга ўтишда, умуман олганда, тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласи ҳосил бўлмайди, чунки x_{n+i} қўшимча ўзгарувчилар бутун бўлиш шартига бўйсунмайди.

Аммо (5) да барча a_{ij} ва b_i лар бутун сонлар бўлган ҳолда бутун бўлишлик шартини x_{n+i} ларга ҳам тарқатиш мумкин экан.

Агар (5) a_{ij} ва b_i лар рационал сонлар бўлганда ҳам каноник кўринишга ўтишда тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини ҳосил қиламиз. Бунинг учун (5) ни a_{ij} ва b_i лар махражларининг энг кичик умумий карралисига кўпайтириб фақат шундан сўнг x_{n+i} қўшимча ўзгарувчиларни киритиш керак экан.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Тўла бутун сонли чизиқли программалаш масаласини график усул билан ечинг.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1 \le 13 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (13;3), \widetilde{F}_{\min} = -16$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (1;2), \widetilde{F}_{\min} = -31$

$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: Иккита$ $ечим: \widetilde{X} = (2;0), \widetilde{X} = (1;1), \widetilde{F}_{\min} = -2$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad Ж: \widetilde{X} = (2;1), \widetilde{F}_{\min} = -11$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

5. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (0;19), \widetilde{F}_{\min} = 19$

$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min$

6. $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (2;6), \widetilde{F}_{\min} = 52$

$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

7. $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (0;0;1;2), \widetilde{F}_{\min} = -1$

$F(x) = x_2 - x_3 \to \min$

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (1;9;0;5), \widetilde{F}_{\min} = -9$

$F(x) = -x_2 \to \min$

Қуйидаги тўла бутун сонли чизиқли программалаш масалаларини Гомори усули билан ечинг.

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (0;4;0;1;0), \widetilde{F}_{\min} = 1$

$F(x) = -x_1 + x_4 \to \min$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $\qquad$ $Ж: \widetilde{X} = (0;0;11;3;1), \widetilde{F}_{\min} = -24$

$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (3;2;2;1), \widetilde{F}_{\min} = -2$

$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (0;3;2;0), \widetilde{X} = (1;2;1;1),$ $\widetilde{X} = (2;1;0;2), \widetilde{F}_{\min} = -3$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (1;3;0;0;1), \widetilde{F}_{\min} = 8$

$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (2;1;1;1), \widetilde{F}_{\min} = -11$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (2;1;2;1), \widetilde{F}_{\min} = -3$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

16. $\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ Ж: $\widetilde{X} = (1;3;5;3), \widetilde{F}_{\min} = -5$

$F(x) = -x_3 \to \min$

17. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$

Ж: $\widetilde{X} = (3;1;2;3;3), \widetilde{F}_{\max} = 19$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14 \\ 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

Ж: $\widetilde{X} = (1;2;3), \widetilde{F}_{\min} = 10$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$

$F(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$

Ж: $\widetilde{X} = (6;1;4), \widetilde{F}_{\min} = -17$

20. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 44 \\ x_1 \le 22 \\ x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

Ж: $\widetilde{X} = (6;18), \widetilde{F}_{\min} = -78$

21. $\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$

$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

Ж: $\widetilde{X} = (0;1;1), \widetilde{F}_{\min} = 3$

$$22. \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le \frac{25}{6} \\ x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases} \qquad Ж: \widetilde{X} = (0;0;7), \widetilde{F}_{\min} = -21$$

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$$

13- машғулот
Чизиқсиз программалаш масаласини геометрик талқинидан фойдаланиб ечиш.

Фараз қилайлик, чизиқсиз программалаш масаласи қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$q_i(x_1,x_2,......,x_n) \le b_i,$ (i=1,2,.......,m) (1)

$q_i(x_1,x_2,......x_n) \le b_i,$ (i=m+1,m+2,.....,n) (2)

$Z=f(x_1,x_2,......x_n) \to \min$ (3)

Бу ерда (1) ва (2) муносабатлар чегаравий шартлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг номанфийлик шартини ҳам ўз ичига олади.

Ушбу масаланинг оптимал ечимини геометрик талқиндан фойдаланиб топиш учун қуйидаги ишларни амалга ошириш керак.

1. Масаланинг (1) ва (2) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини, яъни мумкин бўлган режалар тўпламини ясаш керак.

2. $f(x_1,x_2,......x_n)=Q$ (Q-ихтиёрий ўзгармас катта сон).

3. Q нинг қийматини ўзгартириб (камайтириб) бориб, энг паст сатҳли гиперсирт топилади ёки функциянинг қуйидан чегараланмаганлиги аниқланади.

4. Мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳли гиперсирт билан кесилган нуқтаси аниқланади ва f функциянинг бу нуқтадаги қиймати топилади.

ёуйидаги масалани геометрик талқиндан фойдаланиб ечамиз.

Мисол. $x_1x_2 \le 4$

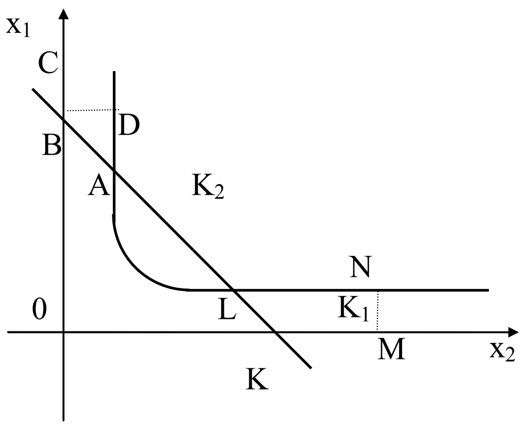
$x_1 + x_2 \ge 5$

$x_1 \le 7$

$x_2 \ge 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0$

$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min)$



13.1 - чизма.

Ечилиши: Бу масаланинг мумкин бўлган режалар тўплами қаварик тўплам бўлмайди, аксинча, иккита айрим K_1 ва K_2 қисмлардан иборат бўлади (13.1-чизма). Мақсад функция ўзининг минимал қиймати Z=17 га A(1;4) ва L(4;1) нуқталарда эришади. D($2/3$;6) ва N(7; $4/7$) нуқталарда эса функция локал максимум қийматларга эришади.

Z(D)=$328/9$, Z(N)=$2417/49$

Локал максимум қийматларни таққослаш Z функция N нуқтада глобал максимумга эришишини кўрсатади. D ва N нуқталарнинг координаталари ва улардаги Z функциянинг қиймати қуйидагича топилади: D($x_1^*;x_2^*$) нуқта $x_2=6$ ва $x_2=4/x_1$ эгри чизиқда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \dfrac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases} \qquad Z^*=x_1^{*2}+x_2^{*2} \qquad Z^*=328/9=Z(D)$$

Худди шунингдек, N нукта $x_1=7$ тўғри чизиқ ва $x_2=4/x_1$ эгри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлиши учун унинг x_1^0, x_2^0 координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{7} \\ Z^0 = x_1^{02} + x_1^{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \dfrac{4}{7} \\ Z^0 = \dfrac{2417}{49} \end{cases}$$

Мустақил бажариш учун мисоллар.

График усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз программалаш масалаларини ечинг:

1. $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1+x_2\le 6 \\ 2x_1+x_2\le 11 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

$Z=2(x_1-7)^2+4(x_2-3)^2\to\min(\max)$

Ж: $\min Z=\frac{64}{3}$; $X(\frac{13}{3};\frac{5}{3})$.

$\max Z=134$; $X(0;6)$.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1+x_2\le 6 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

Z= $x_1\cdot x_2\to max$

Ж: $\max Z=0$ $X(3;3)$

3. $\begin{cases} x_1+x_2\le 7 \\ 2x_1-x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

$Z=4(x_1-2)^2+2(x_2-2)^2\to\min(\max)$

Ж: $\min Z=0$; $X(2;2)$.

$\max Z=66$; $X(0;7)$.

4. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 3x_1+x_2\le 15 \\ x_1+x_2\ge 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2\to\min(\max)$

Ж: $\min Z=2{,}5$; $X(4{,}5;1{,}5)$.

$\max Z=40$; $X(0;4)$.

5. $\begin{cases} x_1+x_2\ge 2 \\ x_1-x_2\ge -2 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1-3x_2\le 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

$Z=25(x_1-2)^2=(x_2-2)^2\to max$

Ж: $\max Z=100$; $X(0;2)$.

6. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$\cdot Z = x_1 \cdot x_2 \to max$

Ж: max Z=24; X(6;4).

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2 \to min$

Ж: min Z=16; X(5;4).

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 10x_1 - x_2 \le 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \to min(max)$

Ж: max Z=65; X(2;12).

min Z=$\frac{324}{101}$; X($\frac{123}{101}$;$\frac{422}{101}$).

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2 \to min(max)$

Ж: min Z=0 X(4;3)

max Z=137,25 X(13;10,5)

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to min$

Ж: max Z=45; X(1,0) (глобал max).

max Z=40; X=(6,0) (локал max).

14- машғулот
Шартлари тенгликлардан иборат бўлган
шартли экстремум масаласи.
Лагранж кўпайтувчилари усули.
Кун-Таккер теоремасидан фойдаланиб
чизиқсиз (қаварик) программалаш масаласини ечиш.

1. Дейлик, $G_i(x_1,x_2,......,x_n)=b_i \quad (i=\overline{1,m})$ (1)

$Z=f(x_1,x_2,......,x_n) \to \max (\min)$ (2)

кўринишидаги масалани ечиш талаб қилинган бўлсин, яъни (1) шартларни қаноатлантирувчи ва $Z=f(x_1,x_2,......,x_n)$ функциясига максимум (минимум) қиймат берувчи $X(x_1,x_2,......,x_n)$ нуқтани топиш керак бўлсин.

$G_i(x_1,x_2,......,x_n)$ ва $f(x_1,x_2,......,x_n)$ функциялар ва уларнинг ҳамма $x_1,x_2,......,x_n$ номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар узлуксиз деб фараз қилайлик. Агар номаълумларга номанфийлик шарти қўйилмаганда масалани Лангражнинг аниқмас кўпайтувчилар усули билан ечиш мумкин.

Бунинг учун:

$$F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda(b - G(X)), \qquad (3)$$

яъни

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = f(x_1,x_2,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - G_i(x_1,x_2,.....,x_n))$$

(4)

функцияни тузамиз. Бу функция Лагранж функцияси деб аталади.

Лагранж функциясидан $x_j (j=1,....,n)$ ва $\lambda_i (i=1,\dots,m)$ номаълумлар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(X)}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g(X)}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{1,n} \\ \frac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - G_i(X) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ушбу система Лагранж функциясининг локал экстремуми мавжудлигининг зарурий шартидан иборат. Агар f(x) функция $X^0(x_1^0, x_2^0, ...x_n^0)$ нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $\Lambda^0(\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0)$ вектор мавжуд бўладики, унинг учун $(x_1^0,x_2^0,...x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0)$ нуқта юқоридаги (5) системасининг ечими бўлади.

Мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб қуйидаги чизиқсиз программалаш масаласини ечинг.

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

Ечиш: Лагранж функциясини тузамиз:

$F(x_1,x_2,\lambda)=(x_1+x_2)+\lambda(x_1^2+x_2^2-1)$

Бу функциядан x_1,x_2 ва λ бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0 \qquad 2\lambda x_1 = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda x_2 = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 = 1 \qquad\qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Системани ечиб қуйидагини топамиз:

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Жавоб: $X_{опт}=(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}) Z_{\max} = 1$

2. Фараз қилайлик, қуйидаги чизиқсиз (қаварик) программалаш масаласи берилган бўлсин.

$G_i(X)=G_i(x_1,x_2,......,x_n) \ge b_i, \quad (i=1,....,m) \qquad (1)$

$x_i \ge 0, (j=1,...,n) \qquad (2)$

$Z=f(x)=f(x_1,x_2,......,x_n) \to \max \qquad (3)$

Агар камида битта $x=(x_1,x_2,......,x_n)$ нуқтадан $G_i(x_1,x_2,......,x_n)>b_i$, $(i=1,.....,m)$ тенгсизлик ўринли бўлса, бунга Слейтер шарти дейилади. Кун-Таккернинг қуйидаги теоремаси ўринли бўлади:

Теорема. $X^0 \ge 0$ нуқта (1)-(3) масаланинг оптимал ечими бўлиши учун бу нуқтада

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} \le 0... \qquad (4)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, x_j^0 \ge 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j} \ge 0... \qquad (6)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \lambda_i^0 \ge 0 \qquad (7)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу ерда $F(X,\Lambda)$ - Лагранж функцияси, Λ - Лагранж кўпайтувчилари.

Агар қаварик программалаш масаласи

$q_i(x)= q_i(x_1,x_2,......,x_n) \le b_i \qquad (i=1,2,......,m) \qquad (8)$

$x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,......,n) \qquad (9)$

$Z = f(x) = f(x_1, x_2,..., x_n) \to \min \qquad (10)$

кўринишда бўлса, у ҳолда X^0 нуқта бу масалани ечими бўлишининг зарурий ва етарлилик шартлари қуйидагидан иборат бўлади.

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j} \ge 0 \qquad (11)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j} = 0, x_j \ge 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_j} \le 0 \qquad (13)$$

$$\lambda_j \frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_j} = 0, \lambda_i^0 \ge 0 \qquad (14)$$

Юқоридаги (4)-(7), (11)-(14) шартлар қаварик программалаш масаласининг экстремуми мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартларидан иборат.

1-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \to \max$$

Масалани график усулда ечинг ва топилган ечим учун Кун-Таккер шартлари ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Масалани графиги усулда ечиб,
X^o (0,8;0,4) ва f(0,8;0,4)= 0,8 эканлигини аниқлаймиз.

Энди шундай Λ^0 мавжуд бўлиб, $\left(X^0, \Lambda^0\right)$ да Кун-Таккер шартларининг бажарилишини кўрсатамиз.

Берилган масала учун Лагранж функциясини тузамиз.

$$f(X, \Lambda) = \lambda_0\left(-x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right) + \lambda_1\left(2x_1 + x_2 - 2\right) + \lambda_2\left(8 - 2x_1 - x_2\right) + \lambda_3\left(6 - x_1 - x_2\right)$$

X^0 нуқтада масаланинг 2-тенгсизлиги учун Слейтер шарти бажарилади. Бу ҳолда масала нормал бўлиб, $\lambda_0 = 1$ деб қабул қилинади.

Лагранж функциясидан $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ лар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_{3,}; \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 \succ 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 \succ 0$$

$$\lambda_i^{\,0}\,\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_{\;i}} = 0$$

шартга кўра λ_2 ва λ_3 ларнинг қийматлари нолга тенг.

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0$$

тенглик бажарилганлиги учун λ_1 нолга тенг бўлмаган қийматни қабул қилиши ҳам мумкин.

$$x_j^{\,0}\,\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j}=0 \quad \text{ва}$$

$$x_j^{\,0} \geq 0 \quad \text{дан}$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_j}=0; \qquad\qquad (j=1,2)$$

бўлиши керак, яъни

$$-2\cdot 0{,}8+2\lambda_1-\lambda_3=0$$

$$-2\cdot 0{,}4+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \qquad \Rightarrow \lambda_1=0{,}8 \quad \text{ва} \quad \lambda=\left(0{,}8;0;0\right)$$

$$\lambda_2=0, \lambda_3=0$$

Демак, $(X_{0,}\Lambda_0)=\left(0{,}8;0{,}4;0{,}8;0;0\right)$ нуқтада ҳақиқатдан ҳам, Кун-Таккер шартлари бажарилаяпти, яъни у эгар нуқта бўлаяпти.

2-мисол. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб $X_0=\left(0;1\right)$ нуқта қуйидаги чизиқсиз программалаш масаласининг ечими эканлигини кўрсатинг.

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2 \leq 8 \\ 2x_1+x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z=f\left(x_{1,}x_2\right)=x_1^{\,2}-2x_1+3x_2^{\,2} \to \min$$

Ечиш $X^0\left(1;0\right)$ нуқтада чегаравий шартлар қатъий тенгсизликка айланади, демак Слейтер шарти бажарилади. Бу ҳолда $\lambda_0=1$ деб қабул қилиш мумкин, у ҳолда Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$F\left(x_{1,}x_{2,}\lambda_{1_2}\lambda_2\right)=x_1^{\,2}-2x_1+3x_2^{\,2}+\lambda_1\left(4x_1+5x_2-8\right)+\lambda_2\left(2x_1+x_2-4\right)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$

Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширамиз.

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_1}=\left(2x_1-2+4\lambda_1+2\lambda_2\right)_{x^0} \geq 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial x_2}=\left(6x_2+5\lambda_1+\lambda_2\right)_{x^0} \geq 0$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1}=\left(4x_1+5x_2-8\right)_{x^0}=-4 \prec 0,$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1}\cdot\lambda_1^{\,0}=0 \Rightarrow \lambda_1^{\,0}=0.$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2}=2x_1+x_2-4=-2\prec 0,$$
$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2}\cdot \lambda_2^{\ 0}=0\Rightarrow, \lambda_2^{\ 0}=0$$

бундан кўринадики $\left(X^0,\Lambda^0\right)=\left(1;0;0;0\right)$ нуқта Кун-Таккер шартларини қаноатлантиради. Демак, у Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлади. Шунинг учун $X^0\left(1;0\right)$ нуқта берилган масаланинг ечими бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1.
$$x_1+x_2=180$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$
$$Z=4x_1+x_1^{\ 2}+8x_2^{\ 2}+x_2^2\to \min$$
$$б: x_1=91; x_2=89; Z_{\min}=17278$$

2.
$$x_1+x_2=5$$
$$x_1\ \ge\ 0, x_2\ \ge\ 0$$

$$Z=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\to \min\left(max\right)$$
$$б: x_1=\frac{5}{2}; x_2=\frac{5}{2}; \qquad Z_{\min}=\frac{25}{2}.$$

3.
$$x_1+x_2+x_3=4$$
$$2x_1-3x_2=12$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$
$$Z=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3\to \min\left(\max\right)$$
$$б: x_1=\frac{27}{8}; x_2=-\frac{7}{4}; x_3=\frac{19}{8}; \qquad Z_{\min}=16\frac{53}{64}$$

4.
$$2x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3=12$$
$$2x_1-x_2=8$$
$$Z=x_1\cdot x_2\cdot x_3\to \min\left(\max\right).$$
$$б: X=\left(-\frac{1}{3};-\frac{26}{3};-\frac{28}{39}\right); \quad Z_{\min}=-\frac{56}{27}.$$

5.
$$x_1+x_2=4$$
$$x_2+x_3=4$$
$$Z=x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3\to \min\left(\max\right)$$

$б: X = (2;2;2) \cdot Z_{\max} = 8$

6.

$x_1^2 + x_2^2 = 19$

$x_1 + 2x_2 \cdot x_3 = 11$

$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 \cdot x_3 \to \min(\max).$

$б: X_1 = (-1;3;2) \cdot Z_{\min} = 43.$

$X_2 = (-1;-3;-2).$

7

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 8$

$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \to \min(\max)$

$б: 1) X_1 = (2;2;1), X_2 = (2;1;2), X_3 = (1;2;2), Z_{\min} = 4$

$2).\ x_1 = \left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right).x_3 = \left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right).x_3 = \left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right).z_{MAX} = \frac{112}{27}$

8.

$x_1 + x_2 + x_3 = 18$

$Z = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^4 \to \max$

$б: X = (4;6;8) \cdot Z_{\max} = 14155776$

9. Иккита корхонада 200 бирлик маълум маҳсулот ишлаб чиқариш режалаштирилган. I корхонада ишлаб чиқиладиган x_1 миқдордаги маҳсулотга $4x_1^2$ миқдорда, II корхонада x_2 миқдордаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун эса $20x_2 + 6x_2^2$ миқдорда ҳаражат сарф қилинади. Ҳар бир корхонада қанчадан миқдорда маҳсулот ишлаб чиқарилганда умумий ҳаражатлар миқдори энг кам бўлади?

$Ж: X = (121;79)$

10. Корхонада иккита технология асосида маҳсулот ишлаб чиқарилади. Биринчи технология бўйича ишлаб чиқариладиган x_2 миқдордаги маҳсулотга $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$ миқдорда, иккинчи технология асосида ишлаб чиқариладиган x_2 миқдордаги маҳсулотга $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$ миқдордаги харажат қилинади. Корхонада d бирлик маҳсулот ишлаб чиқариши кераклигини назарда тутиб, ҳар бир технология бўйича қанча маҳсулот ишлаб чиқарилганда сарф қилинган умумий харажатлар миқдори минимал бўлади?

11. ёуйдаги масала учун $X^0=(0;1)$ нуқта ечим бўлишини Кун-Теккер шартлари орқали аниқланг.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2 \to \max$$

12. ёуйидаги масала учун $X^0 = (3;4)$ нуқта ечим бўлишини Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб аниқланг.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_{1,} x_2) = x_2 - x_1{}^2 + 6x_1 \to \max$$

13. Масалани график усулда ечинг ва топилган ечим Кун-Таккер шартларини қаноатлантиришини аниқланг.

$$б : X^0 = \left(\frac{123}{101}; \frac{422}{101}\right) \cdot Z_{\min} = \frac{324}{101}$$

14. Масалани гарфик усулда ечиб, ечим учун Кун-Таккер шартларини бажарилишини аниқланг.

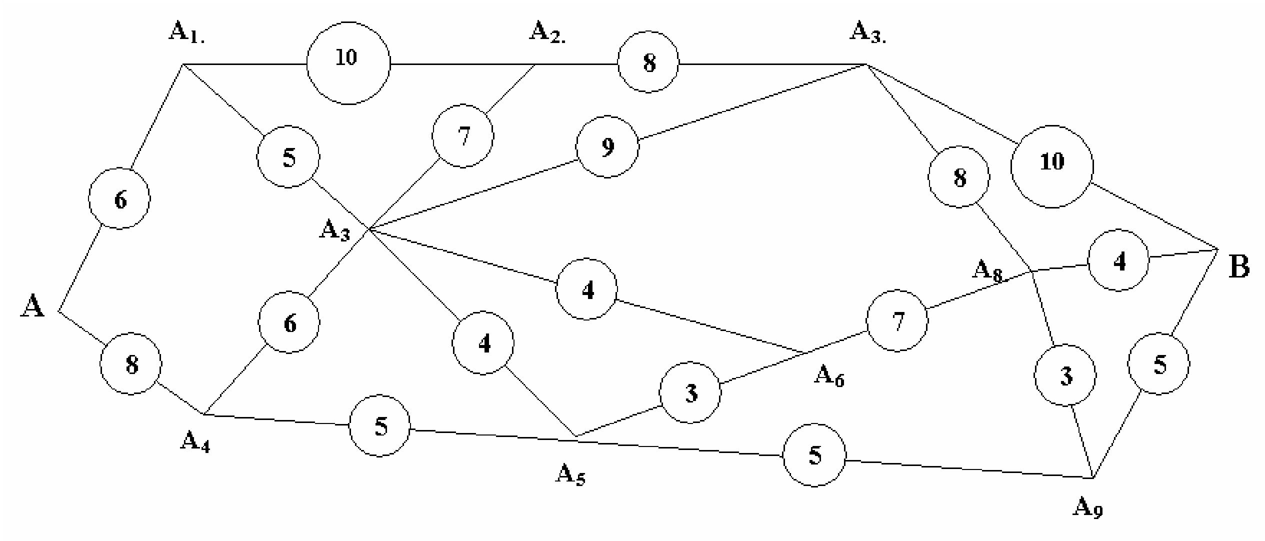
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 10x_1 - x_2 \le 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_{1,} x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max$$

15- машғулот
Кўп босқичли иқтисодий масалаларни
динамик программалаш усуллари билан ечиш.

1. Дайди савдогар масаласи (энг қисқа йўлни танлаш масаласи).

Фараз қилайлик, A ва B пунктларни ўзаро боғловчи темир йўллар тўри берилган бўлсин (15.1-шакл). Бу пунктлар орасида темир йўл билан боғланган жуда кўп пунктлар мавжуд бўлиши мумкин. Бунда ҳар қандай икки пункт орасидаги масофа маълум деб фараз қиламиз. Масалан, бу масофанинг узунлиги 1-шаклдаги ҳар икки нуқтани туташтирувчи кесма устига ёзилган сонлардан иборат бўлсин. A ва B пунктларни энг қисқа йўл билан туташтирувчи маршрутни аниқлаш масаласи қўйилади.

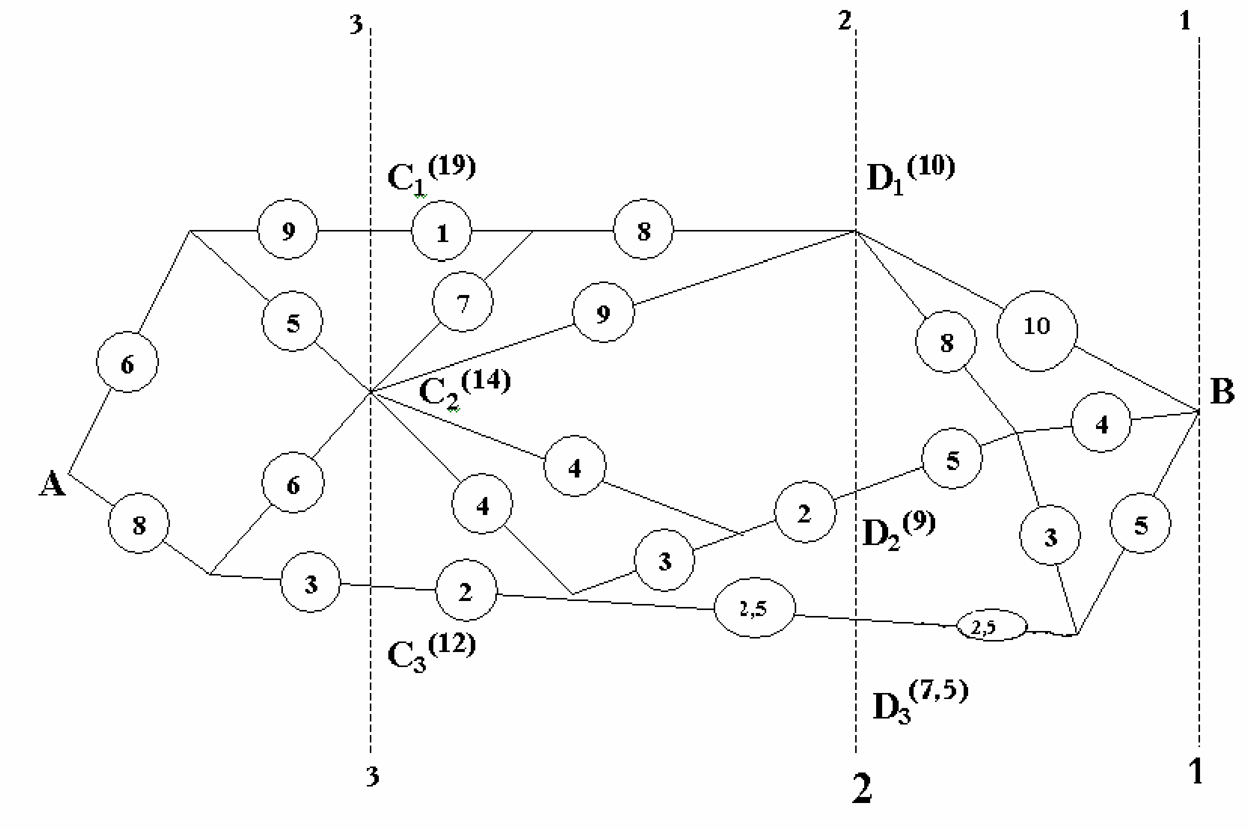


15.1.- шакл.

Масалани ечиш учун (1-1), (2-2), (3-3) чизиқлар ёрдамида берилган темир йўллар тўрини айрим қисмларга (босқичларга) ажратамиз (2-шакл).

(2-2) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган нуқталарини D_1 , D_2 , D_3 лар билан, (3-3) чизиқнинг кесишган нуқталарини эса C_1 , C_2 , C_3 лар билан белгилаймиз. Биринчи қадамда B нуқтадан D_1 , D_2 ва D_3 нуқталаргача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз:

$$B - D_1 : \min (10,\ 8+4\ ,\ 5+3+8)=10,$$
$$B - D_2 : \min (10+8+5\ ,\ 4+5,\ 5+3+5)=9,$$
$$B - D_3 : \min (5+2{,}5\ ,\ 4+3+2{,}5)=7{,}5.$$



15.2. – шакл.

2-шаклда D_1 , D_2 , D_3 нуқталардан сўнгги В пунктгача бўлган энг қисқа масофа қавс ичида ёзилган. Сўнгра (3-3) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган C_1 , C_2 , C_3 ларни кўрамиз. Бу нуқталардан В нуқтагача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз. Бу масофа

C_1 нуқта учун min (1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9,
1+7+2+2,5+7,5)= min(19, 23, 24, 20)=19.

C_2 нуқта учун min (7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9,
4+2,5+7,5)= min(25, 19, 15, 16, 14)=14.

C_3 нуқта учун min (2+2,5+7,5, 2+3+2+9)=12.

Бу масофалар шаклда қавс ичида ёзилган. 3 босқичда А нуқтадан В гача бўлган энг қисқа масофа топилади. Бу масофа қуйидагича аниқланади:

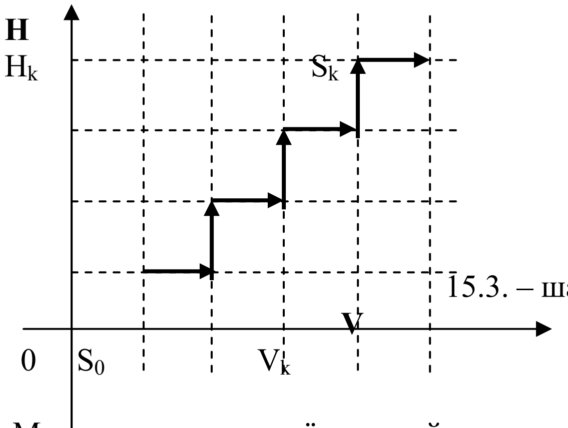
min (6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12)=23

Сўнгра А нуқтадан энг қисқа масофа бўйлаб В нуқтага борадиган йўлни белгилаймиз.

2. Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлигини оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласи.

Самолёт дастлаб H_0 баландликда V_0 тезлик билан учаётган бўлсин. Унинг учиш баландлигини H_k ва тезлигини V_k гача кўтариш керак бўлсин. Демак, самолётнинг учиш баландлигини H_0 дан H_k гача, тезлигини эса V_0 дан V_k гача оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласини ҳал қилиш талаб этилади. Бунда аниқ бир тезлик билан учаётган самолётнинг H_1 баландликдан $H_2>H_1$ баландликкача кўтарилиши учун ҳамда аниқ бир баландликда учаётган самолётнинг тезлигини V_1 дан $V_2>V_1$ гача кўтариш учун сарф қилинадиган ёқилғи миқдорлари маълум деб қаралади. Ушбу масала динамик программалаш масаласи сифатида қуйидагича тавсифланади: Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлиги кўрсаткичлари тўпламини шундай бошқариш керакки, натижада сарф қилинган ёқилғи миқдори минимал бўлсин.

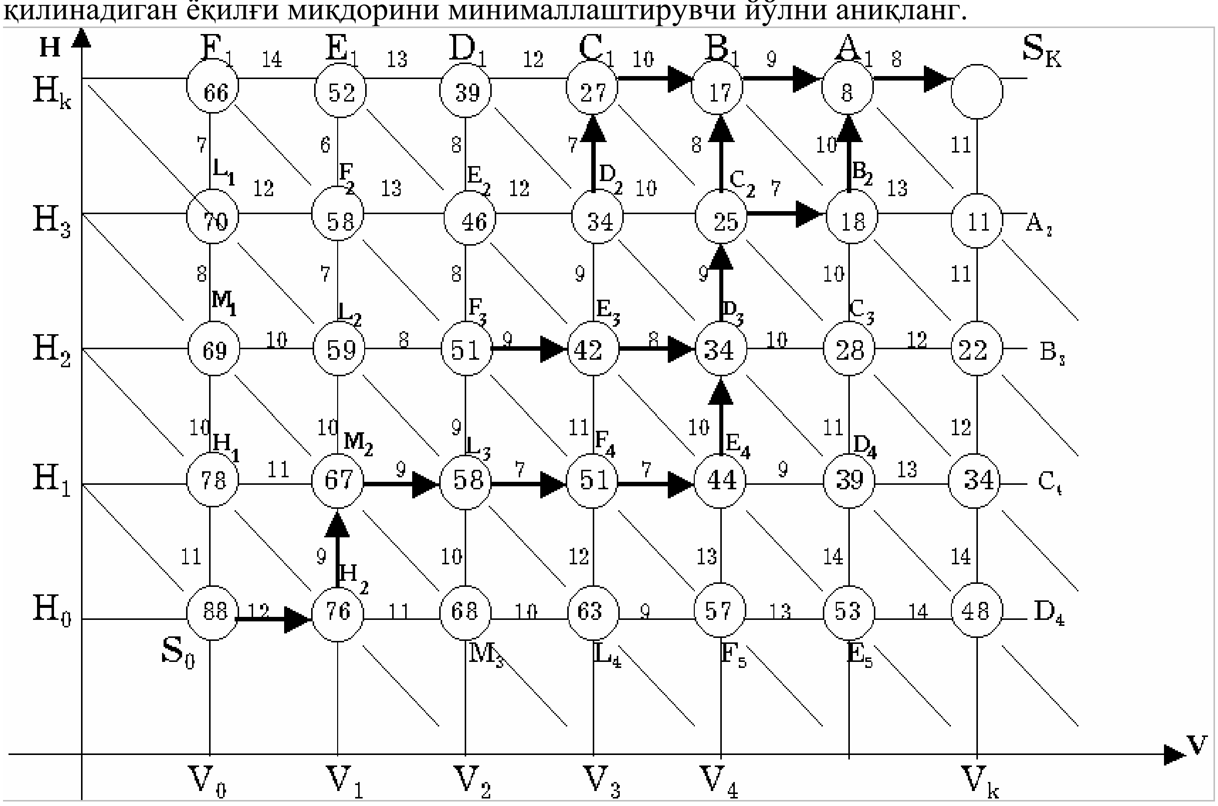
Ечиш. Самолётнинг фазодаги ҳолати иккита параметр – тезлик (V) ва баландлик (H) билан аниқланади. Шунинг учун ечимни VOH текисликда қидирамиз. Аниқроғи, шу текисликдаги $H=H_0$, $H=H_k$ ва $V=V_0$, $V=V_k$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка қараймиз. Самолётни S_0 (V_0 , H_0) ҳолатдан S_k (V_k , H_k) ҳолатга, энг кам харажат қилиб, ўтказиш масаласи қўйилади. Бу масалани динамик программалаш усуллари билан ечиш учун (H_k-H_0) кесмани n_1 та тенг кесмачаларга, (V_k-V_0) кесмани эса n_2 та тенг кесмачаларга бўламиз, ҳамда ҳар бир қадамда самолёт ё баландлигини ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ бирликка), ёки тезлигини ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ бирликка) оширади, деб қабул қиламиз. S нуқтани S_0 ҳолатдан S_k ҳолатга турли йўллар билан ўтказиш мумкин (3-шакл). Бу йўллар ичида энг кам ёқилғи миқдорига мос келувчисини танлаш керак.



15.3. – шакл.

Масалани ечиш жараёнини қуйидаги мисолда кўрсатамиз:

<u>Мисол.</u> Масаладаги аниқ маълумотлар қуйидаги 4-шаклда тасвирланган. Самолётнинг H_k баландликка кўтарилиши ва тезлигини V_k гача оширишда сарф қилинадиган ёқилғи миқдорини минималлаштирувчи йўлни аниқланг.



15.4. -шакл.

Ушбу шаклдаги вертикал чизиқлардаги сонлар самолёт баландлигини оширгандаги, горизонтал чизиқлардаги сонлар эса у тезлигини оширгандаги сарф қиладиган ёқилғи микдорини кўрсатади.

Масалани ечиш жараёнини $n_1 + n_2 = 4+6=10$ қадамларга бўламиз.

Оптималлаштириш жараёнини энг охирги қадамдан бошлаймиз. Бунда S_k ни ўз ичига олувчи ўнг томондаги энг юқори тўртбурчакка қараймиз. Шаклдан кўринадики, S_k нуқтага A_1 ва A_2 нуқталардан ўтиш мумкин. Агар A_1 дан S_k га ўтилса (тезлик оширилса), у ҳолда 8 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Агар A_2 нуқтадан S_k га ўтилса (баландлик оширилса), у ҳолда 11 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Ушбу рақамларни A_1 ва A_2 нуқталар қошидаги айланачаларга ёзамиз. Бу қадамда энг кам ёқилғи сарфига мос келувчи $A_1 \to S_k$ йўналиш шартли оптимал ечим деб қабул қилинади ва стрелка билан белгиланади.

9 қадамда B_1 , B_2 , B_3 нуқталардан S_k нуқтага энг кам ёқилғи сарф қилиб ўтиш йўлини аниқлаймиз. Агар B_1 нуқтадан S_k га $B_1 \to A_1 \to S_k$ йўналиши орқали ўтиб 17 бирлик ёқилғи сарф қилиш мумкин. B_2 нуқтадан S_k га иккита йўл билан ўтиш мумкин:

I. $B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $B_2 \to A_2 \to S_k$

Бунда I йўлда 18 бирлик, II йўлда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади. B_3 нуқтадан S_k га ягона $B_3 \to A_2 \to S_k$ йўл билан ўтиш ва 22 бирлик B_1 , B_2 , B_3 нуқталар қошидаги айланачаларга улардан S_k нуқтагача сарф қилинадиган харажатлардан энг ками ёзилади. Энг кам харажат билан боғлиқ бўлган $B_1 \to A_1 \to S_k$ йўналиш шартли оптимал йўналиши сифатида стрелка билан белгиланади.

8- қадамда C_1 , C_2 , C_3 , C_4 нуқталардан S_k нуқтагача энг кам харажат сарф қилиб ўтиладиган йўл қидирилади. Бунда C_1 нуқтадан S_k га ягона

$$C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$$

йўналиш орқали ўтиб, 27 бирлик ёқилғи сарфлаш мумкин.

C_2 нуқтадан B_1 ва B_2 нуқталар орқали S_k нуқтага ўтилганда тенг микдордаги (25 бирлик) ёқилғи сарф қилинади.

C_3 нуқтадан S_k га иккитагача 2 та ўтиш мумкин:

I. $C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $C_3 \to B_3 \to A_2 \to S_k$

Бунда I йўл билан ўтилганда 28 бирлик ва II йўл билан ўтилганда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

C_4 нуқтадан S_k нуқтага ягона

$$C_4 \to B_3 \to A_2 \to S_k$$

йўл билан ўтилади ва 34 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

Бу босқичда шартли оптимал бошқариш энг кам ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган $C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ ва $C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$ йўналишлардан иборат бўлади. Бу йўналишлар стрелка билан кўрсатилади.

Шундай йўл билан давом этиб, 7 қадамда 34 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 3 та шартли оптимал йўналиш аниқланади:

а) $D_2 \to C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

б) $D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

в) $D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

6- қадамда 42 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 2 та шартли оптимал йўналишлар аниқланади:

а) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

б) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

5- қадамда 51 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналишлар қуйидагилар бўлади:

I. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

II. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

III. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

IV. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

4- қадамда 58 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналиш топилади:

$L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_4 \to C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

3- қадамда 67 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

2- қадамда 76 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

Ва ниҳоят 1- қадамда 88 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

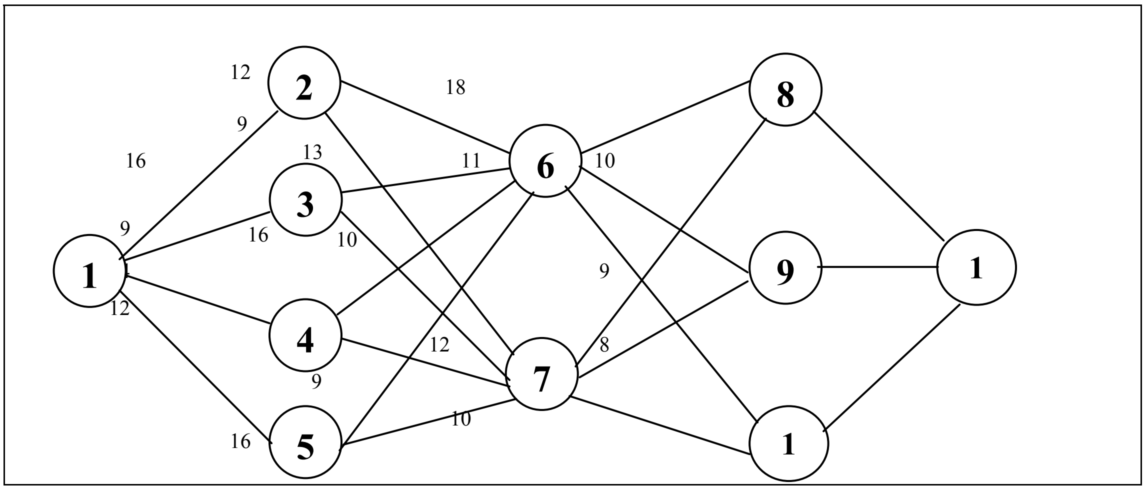
Бу йўналишлар оптимал йўналиш бўлади.

Оптимал ечимга, асосан, самолёт 1- қадамда тезлигини $V_0 + \Delta V$ даражагача оширади, 2- қадамда у баландлигини $H_0 + \Delta H$ гача оширади. 3, 4, 5- қадамларда самолётнинг тезлиги мос равишда $V_0 + 2\Delta V$, $V_0 + 3\Delta V$, $V_0 + 4\Delta V$ га ошиши, 6, 7, 8- қадамларда эса унинг баландлиги мос равишда $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ даражагача ошиши керак.

9 ва 10 қадамларда самолёт тезлигини мос равишда $V_0 + 5\Delta V$ ва $V_0 + 6\Delta V$ даражагача ошиши керак. Натижада у энг кам, яъни 88 бирлик ёқилғи сарф қилади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

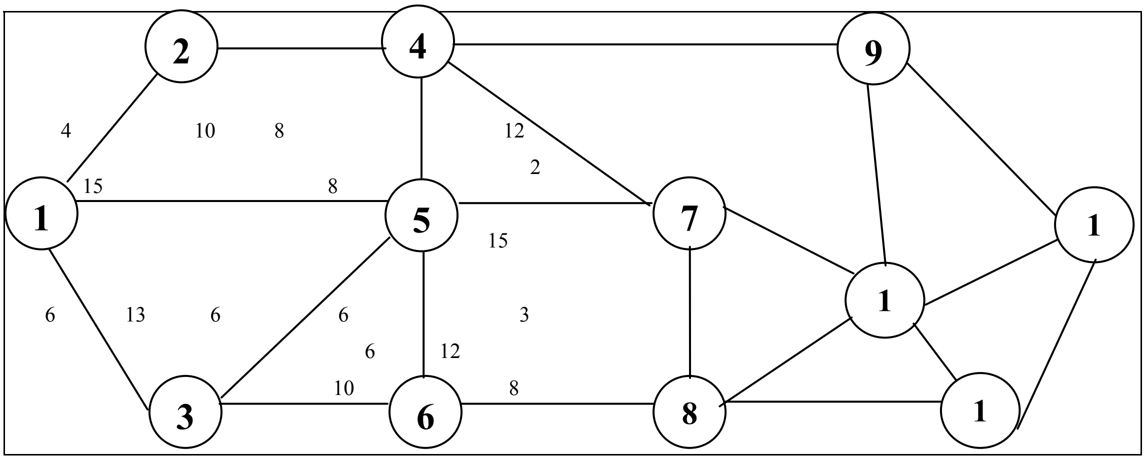
1. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида 1-пунктдан 11- пунктгача энг қисқа йўл (йўналиш) ни аниқланг.



15.5. -шакл.

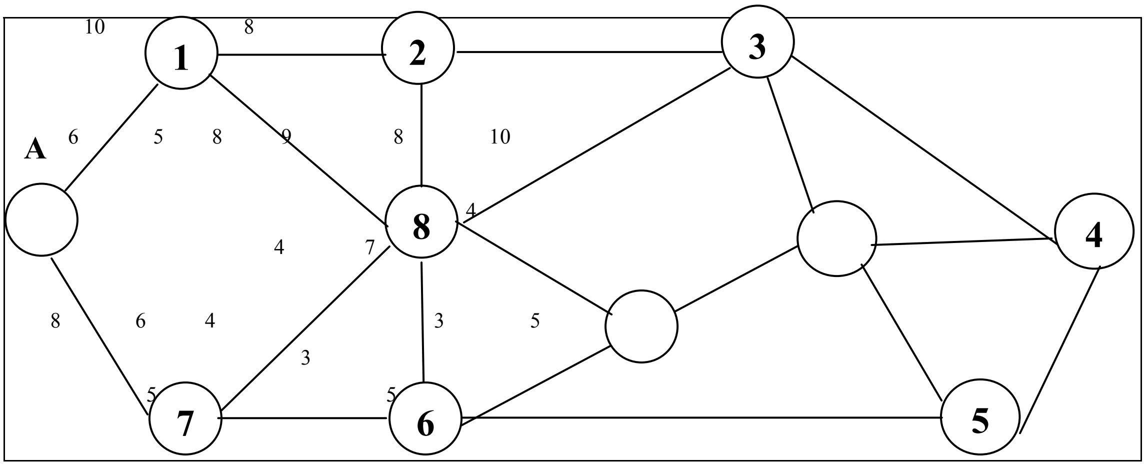
Шаклда ҳар иккита пунктни туташтирувчи кесма устига улар орасидаги масофа ёзилган.

2. ёуйидаги шаклда йўллар тўридаги ҳамма нуқталардан 1, 3, 5, 8, 12 нуқталаргача энг қисқа масофаларни аниқланг.



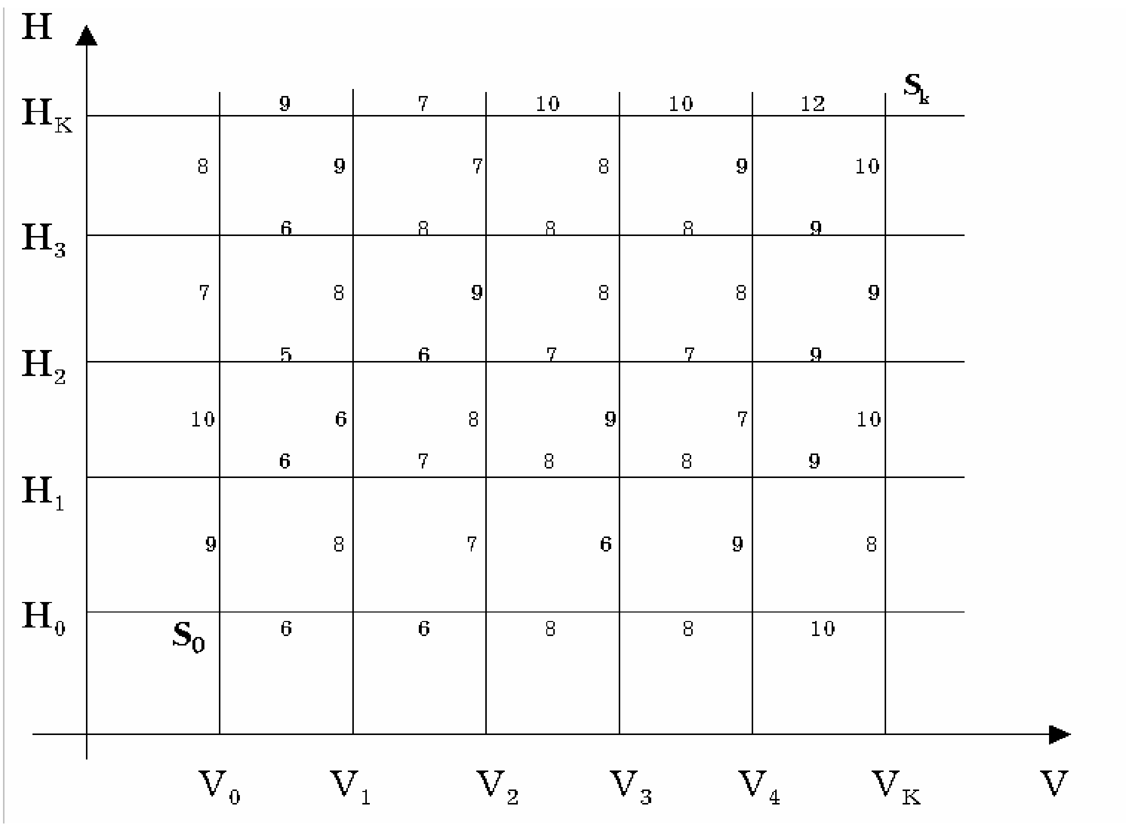
15.6. -шакл.

3. ёуйида А ва В пунктларни туташтирувчи йўллар тўри тасвирланган. А пунктдан В пунктгача бўлган энг қисқа маршрутни аниқланг.



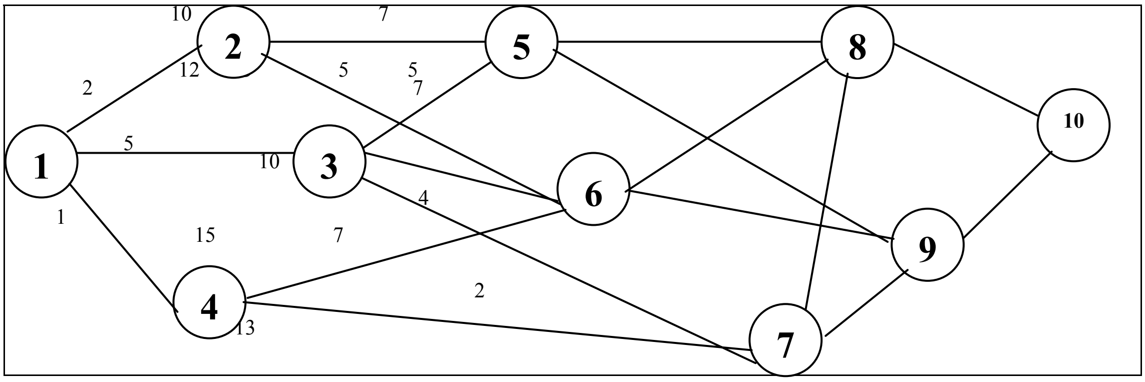
15.7. -шакл.

4. Самолётнинг тезлиги ва баландлигини бошқариш масаласини қуйидаги шаклда тасвирланган маълумотлар асосида ечинг ва сарф қилинадиган энг кам ёқилғи миқдорини аниқланг.



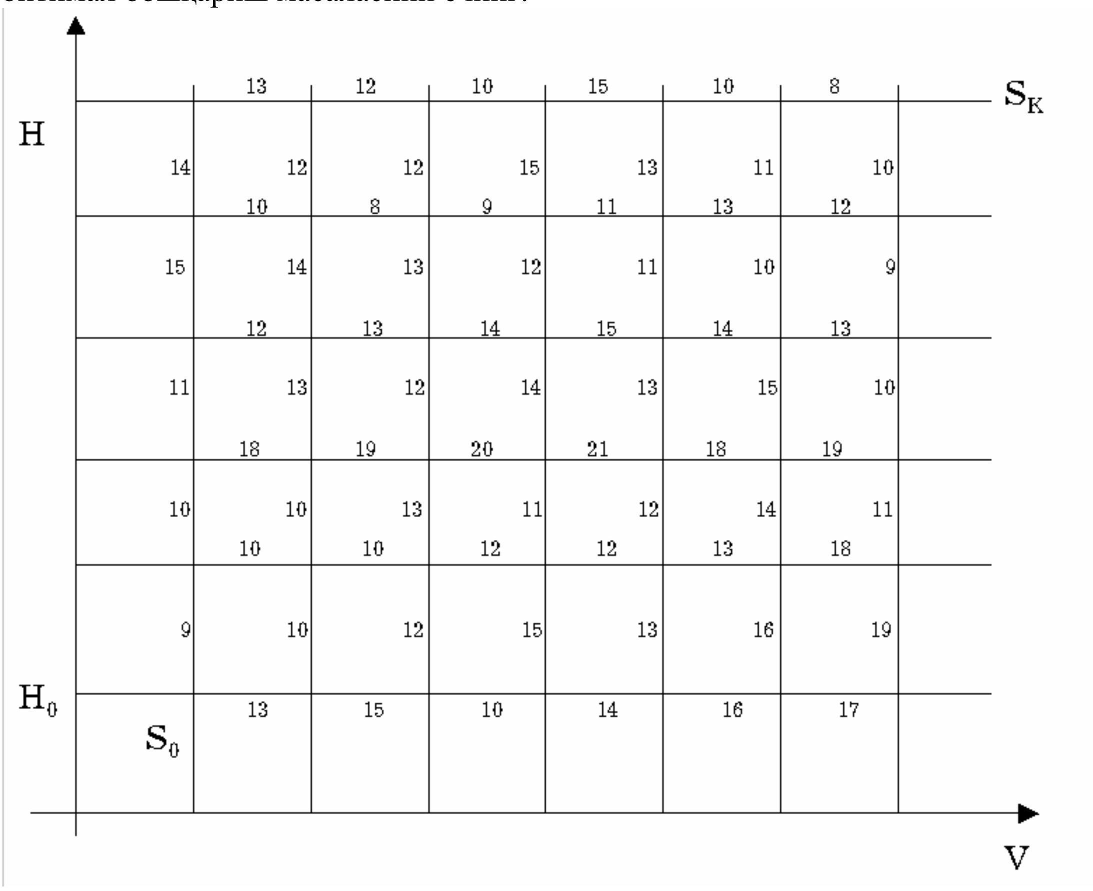
15.8. -шакл.

5. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида 1-10 пунктлар орасидаги энг қисқа масофани аниқланг.



15.9. -шакл.

6. ёуйидаги шаклда келтирилган маълумотлар асосида самолётнинг учишини оптимал бошқариш масаласини ечинг.



15.10. -шакл.

16- машғулот
Капитал маблағларни оптимал
тақсимлаш масаласи.

Фараз қилайлик, бирлашмадаги корхоналарни қайта таъмирлаш учун X_0 миқдорда капитал маблағ ажратилган бўлсин. Бу маблағни бирлашмадаги N (i=1,2,...,n) та корхона орасида тақсимлаш керак бўлсин. Агар i- корхонага x_i микдорда капитал маблағ ажратилган бўлса унинг оладиган даромади $Z_i(x_i)$ бўлади, деб қабул қиламиз.

Бирлашманинг даромади корхоналар даромадлари йиғиндисидан иборат бўлади.

Капитал маблағни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қуйидагича бўлади:

$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n=X_0$ (1)
$x_i\geq\geq 0$ $(i=1,2,\ldots..,N)$ (2)
$Z= Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\ldots..+Z_n(x_n) \to max$ (3)

Бундай масалани ечиш учун $F_1(x)$, $F_2(x)$,…..$F_n(x)$ функциялар кетма-кетлигини киритамиз. Бу ерда $F_1(x)$ x $(0 \leq x \leq X_0)$ миқдордаги маблағни фақат битта корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни, $F_2(x)$
x $(0 \leq x \leq X_0)$ миқдордаги маблағни 2 та корхонада тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни ва ҳоказо, $F_n(x)$ x $(0 \leq x \leq X_0)$ миқдордаги маблағни N та корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромадни билдиради.

Маълумки, $F_N(x_0) = Z_{max}$ бўлади. Бундан ташқари қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

1) $F_1(0) = 0$ (4)
2) $F_1(x) = Z_1(x)$, $0 \leq x \leq X_0$. (5)

яъни капитал маблағ тақсимланмаса ҳеч қандай фойда олинмайди. Агар $0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағ фақат бир корхонага тақсимланса, у ҳолда бирлашманинг даромади ана шу корхона даромадидан иборат бўлади.

Агар $0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағ k та корхона орасида тақсимланса, у ҳолда бирлашманинг оладиган максимал даромади қуйидаги функционал тенглама ёрдамида топилади:

$$F_k(x) = \max_{\substack{0\leq x_k \leq x \\ 0\leq x\leq X_0}} [Z_k(x_k) + F_{k-1}(x-x_k)] , \quad (i = 1,2,\ldots N)(6)$$

N- босқичда $F_N(X_0) = max\ Z$ топилади. Демак, охирги босқичда мақсад функциянинг максимал қиймати $F_N(X_0)$ ҳамда N корхона учун ажратиладиган капитал маблағнинг миқдори, яъни $X_N^к$ топилади.

Сўнгра ҳисоблаш жараёни тескари тартибда бажарилади. Бунда охирги қадамдан биринчи қадамгача бир марта қараб чиқилади:

N- корхонага ажратиладиган X_N^k капитал маблағни билган ҳолда қолган N-1 корхоналар орасида тақсимланадиган $X_0 - X_N^k$ маблағнинг миқдори топилади. Сўнгра олдин топилган

$$F_{N-1}(x) = \max_{\substack{0\leq x_{N-1}\leq x \\ 0\leq x\leq X_0}} [Z_{N-1}(x_{N-1}) + F_{N-2}(x-x_{N-1})]$$

тенгламадан $F_{N-1}(X_0-x_N*)$ ни, ва демак x_{N-1}^k ни топамиз, ва ҳоказо. Шундай йул билан давом этиб охирида $x*_1$ ни топамиз.

Шу билан чегараланган капитал маблағ бирлашманинг N та корхоналари орасида оптимал тақсимланган бўлади.

1-мисол. Фараз қилайлик, 200 бирлик капитал маблағни бирлашмадаги 4 та корхона орасида тақсимлаш керак бўлсин. ²ар бир корхона ўзига ажратилган маблағнинг миқдорига боғлиқ равишда турли миқдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар қуйидаги 1-жадвалга жойлаштирилган.

1-жадвал

Корхоналарга ажратилган маблағлар миқдори	**Корхоналар даромади**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Капитал маблағни корхоналараро оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

Ечиш. Масалани 4 та босқичга бўлиб ечамиз. Дастлаб N=1, яъни капитал маблағ фақат битта корхонага берилган ҳолни кўрамиз. Бунда

$$F_1(x) = Z_1(x)$$

бўлади. $0\le x\le 200=X_0$ оралиқдаги ҳар бир $x_{1к}=k\Delta$ лар учун $F_1(X_{1k})=Z_1(x)$ қийматларини 2-жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал

X_{1k}	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Энди N= 2 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 бирлик капитал маблағни 2 та корхонага тақсимланган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда олинадиган даромад

$$F_2(x) = \max_{\substack{0\le x_2\le x \\ 0\le x\le X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функциянинг қийматлари қуйидагича топилади.

$0\le x\le 200=X_0$ оралиқдаги ҳар бир x учун $0\le x_2\le x_0$ топилади ва унга тегишли бўлган

$$Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)$$

ҳисобланади. Сўнгра

$$F_2(x) = \max_x [Z_2(x_2) + F_1(x-x_2)]$$

топилади.

Масалан,

$x=0$ да $x_2=0$ бўлади;

$x=40$ да $x_2=0; 40$ бўлади;

$x_2=0$, $Z_2(0)+F_1(40)=15$

$x_2=40$, $Z_2(40)+F_1(0)=14+0$ $F_2(x=40)=15$

$x=80$ да $x_2 = 0;40;80$

$x_2=0$, $Z_2(0)+F_1(80)=0+28$

$x_2=40$, $Z_2(40)+F_1(40)=14+15$ $F_2(x=80)=30$

$x_2=80$, $Z_2(80)+F_1(0)=30+0$

ва ҳоказо, шундай йул билан $X=120,160$ ва 200 бўлган ҳоллар учун $F_2(x=120)$, $F_2(x=160)$, $F_2(x=200)$ларни топамиз. $F_2(x)$ функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 3-жадвалда кўрсатамиз.

3-жадвал

$x \backslash x_2$	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	X_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3- босқичда N=3 бўлган ҳолни, яъни $X_0=200$ капитал маблағ 3 та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир $0 \le x_3 \le X$, $0 \le x \le X_0=200$ учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаш керак

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x-x_3)]$$

Бу функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги
4- жадвалда кўрсатамиз.

4-жадвал

$x \backslash x_3$	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	X_3^*
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4- босқичда N=4 бўлган ҳолни, яъни $X_0=200$ капитал маблағ 4 та корхонага бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришилган даромад

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \le x_4 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x-x_4)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функцияни ҳисоблаш жараёни 5-жадвалда кўрсатилган.

5-жадвал

x \ x_4	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	X_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 жадваллардаги $F_1(x), F_2(x),\ldots, F_4(x)$ ларни ва уларга мос равишда x_1^*, x_2^*, x_3^* ва x_4^* векторларни қуйидаги 6-жадвалга жойлаштирамиз.

x \ x_i^*	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Бу жадвалдан капитал маблағни оптимал тақсимлаш режасини топамиз. 200 бирлик маблағни 4 та корхонага тақсимлаш натижасида бирлашма

$$\max_{i=1,4} F_i(x=200)=\max(90,90,93,95)=95$$

бирлик даромад олади. Бунда тўртинчи корхонага 80 бирлик маблағ берилади ва ортиб қолган 120 бирлик маблағ қолган 3 та корхонага тақсимланади. Бундан бирлашма

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220)=\max(60,60,60)=60$$

бирлик даромад олади. Бунда учинчи корхонага маблағ берилмайди ($X_3^*=0$). Демак 120 бирлик маблағ биринчи ва иккинчи корхоналарга тақсимланади. Лекин иккинчи корхонага ҳам маблағ берилмайди ($X_2^*=0$). Шундай қилиб, колган 120 бирлик маблағ биринчи корхонага берилади. Бундан бирлашма 60 бирлик даромад олади

$$x_1=120, \quad F_1(x)=60$$

Шундай қилиб, капитал маблағлар тақсимлашнинг оптимал режасини топдик:

$$X^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (120; 0; 0; 80)$$

Бу режага мос келувчи умумий даромадни ташкил қилади.

Мустақил ечиш учун масалалар

1. 5000 шартли бирликдаги инвестицияни 3 та корхонага шундай тақсимлаш керакки, натижада олинадиган умумий даромад максимал бўлсин. ²ар бир корхонанинг ўзига ажратилган маблағ миқдорига боғлиқ равишда оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Корхоналарга ажратиладиган инвестициялар миқдори	Корхоналар даромади		
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$
1000	1500	2000	1700
2000	2000	2100	2400
3000	2500	2300	2700
4000	3000	3500	3200
5000	3600	4000	3500

Жавоб: $X^*(2000;1000;2000)$, $Z^1_{max}=6400$

2. S=100 минг сўм инвестицияни 4 та корхона орасида шундай тақсимлаш керакки, натижада олинадиган умумий даромад максимал бўлсин. ²ар бир корхонанинг ажратилган маблағ миқдорига боғлиқ равишда оладиган даромадлари қуйидаги жадвалда келтирилган:

Инвестиция ҳажми (x_i) минг сўм	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Жавоб: $x_1^*=0$, $x_2^*=20$, $x_3^*=40$, $x_4^*=40$

3. Масаланинг дастлабки шартлари қуйидаги жадвалда келтирилган. 100 млн.сўм пулни 4 та корхона орасида шундай тақсимлаш керакки, олинган умумий даромад максимал бўлсин.

Инвестиция ҳажми (млн. сўм)	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Жавоб : $X^*= (0;20;40;40)$, $Z_{max}=85$

4. 120 млн. сўм инвестицияни 4 та корхонага шундай тақсимлаш керакки, натижада олинган умумий даромад максимал бўлсин. Инвестиция ҳажмига боғлиқ равишда корхоналарнинг оладиган даромадлари қуйидаги жадвалга келтирилган.

Инвестиция ҳажми (млн. сум)	**Корхоналар даромади**			
	$Z_1(x)$	**$Z_2(x)$**	**$Z_3(x)$**	**$Z_4(x)$**
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

Жавоб: $X^{*}= (0;40;40;40)$, $Z_{max}=97$.

17- машғулот

Матрицали ўйинлар. Ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари. Матрицали ўйиннинг ечими.

Матрицали ўйинни чизиқли программалаш усули билан ечиш.

²ар қандай *а* – суммали жуфт ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг қаторлари I ўйновчининг мумкин бўлган A_1, A_2 … , A_m юришларини устунлари эса II ўйновчининг мумкин бўлган B_1 , B_2, ... , B_n юришларига мос келади. $A=(a_{ij})$ матрица тўловлар матрицаси ёки ютуқ матрицаси деб аталади. Матрицанинг ҳар бир a_{ij} элементи I ўйновчи A_i юришни танлаб, II ўйновчи B_j юришни танлагандаги I ўйновчининг ютуғини (II ўйновчининг ютқазувини) англатади.

Ўйиннинг мақсади I ўйновчини максимал ютуққа ва II ўйновчини минимал ютқазувга эришишларини таъминловчи энг маъқул стратегияни танлашдан иборат.

Агар I ўйновчи бирор A_i стратегияни танласа у ҳеч бўлмаганда

$$a_i = \min_{j} a_{ij}$$

ютуққа эришади. Буни ҳисобга олиб бу ўйновчи ўзининг энг кам ютуқларини максималлаштирувчи, яъни

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (1)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди.
Бу ерда α катталик I ўйновчининг гарантияланган ютуғидан иборат бўлади ва ўйиннинг қуйи баҳоси деб аталади. Бу баҳони таъминловчи i_0 стратегия махмин деб аталади.

II ўйновчи, ўз навбатида, ўзининг энг катта мумкин бўлган ютқазувларини минималлаштирувчи, яъни

$$\beta = \min_{j} \max_i a_{ij} \qquad (2)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди β катталик ўйининг юқори баҳосига деб аталади: бу баҳони таъминловчи j_0 стратегия минимах дейилади.
Агар $\alpha = \beta$ бўлса, яъни

$$V = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда V ўйиннинг баҳоси деб аталади. Бу шартни қаноатлантирувчи A матрицанинг $a_{i_0 j_0}$ элементи
ўйиннинг эгар нуқтаси деб аталади.

Демак матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, унинг ечимини махсмин ва минимахс усуллари билан топилади.

1-мисол. Берилган матрицали ўйин учун қуйи ва юқори баҳоларни ҳамда ўйиннинг оптимал баҳосини топинг.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Матриצанинг қаторларидаги энг кичик элементлар қуйидагидан иборат:

$$\min_j (3, \quad 1, \quad 2) = 1,$$

$$\min_j (2, \quad 4, \quad -1) = -1$$

$$\min_j (5, \quad 7, \quad 6) = 5$$

Демак ўйиннинг қуйи баҳоси

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (1, \quad -1, \quad 5) = 5$$

бўлади. Энди ҳар бир устундаги энг катта элементларни топамиз.

$$\max_i (3, \quad 2, \quad 5) = 5$$

$$\max_i (1, \quad 4, \quad 5) = 7$$

$$\max_i (2, \quad -1, \quad 6) = 6$$

У ҳолда ўйиннинг юқори баҳоси қуйдагига тенг бўлади.

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min (5, \quad 7, \quad 6) = 5$$

Ушбу ўйиндаги қуйи ва юқори баҳолар ўзаро тенг. Демак, ўйиннинг оптимал баҳоси

$V = \alpha = \beta = 5$ бўлади.

Ушбу баҳони (ечимни) таъминловчи a_{31} элемент ўйиннинг эгар нуқтаси ва A_3 ва B_1 стратегиялар оптимал стратегия бўлади.

Агар ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда махмин ва минимах усуллар билан ўйиннинг ечимини топиб бўлмайди. Бу ҳолда ўйиннинг ечимини топишда аралаш стратегиялардан топилади.

I ўйновчининг аралаш стратегияси деб компонентлари қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad , \ x_i \geq 0 \ , \ i = \overline{1, \mathrm{m}} \qquad (4)$$

шартларни қаноатлантирувчи X=(x_1, x_2,..., x_m) векторга айтилади. Бунда ҳар бир x_i I ўйновчининг A_i юришни танлаш эҳтимолини билдиради.

II ўйновчининг аралаш стратегияси деб компонентлари қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = \overline{1, \mathrm{n}} \qquad (5)$$

шартларни қаноатлантирувчи Y=(y_1, y_2, ..., y_n) векторга айтилади. Бунда ҳар бир y_j II ўйновчининг B_j юришни танлаш эҳтимолини билдиради.

Аралаш стратегиялар усулида I ўйновчи A_i юришни танлаб, II ўйновчи B_j юришни танлагандаги I ўйновчининг ютуғи сифатида унинг ютишининг математик кутилиши олинади, яъни у қуйидагига тенг бўлади

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (6)$$

Агар I ўйновчи ўзининг X^*=(x^*_1, x^*_2, ..., x^*_m) оптимал стратегиясни қўлласа, у ҳолда II ўйновчи қандай стратегияни танлашидан қатъий назар, унинг ютуғи ўйиннинг баҳоси V дан кам бўлмайди, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V \ , \quad j=\overline{1,\mathrm{n}} \qquad (7)$$

Худди шунингдек, агар II ўйновчи ўзининг

Y=($y^*_1, y^*_2, \ldots, y^*_n$) оптимал стратегиясини қўлласа, у ҳолда I ўйновчи қандай стратегияни танлашдан қатъий назар, унинг ютқазуви ўйиннинг баҳоси V дан ошмайди, яъни:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^*_j \leq V \quad , \quad i=\overline{1,\mathrm{m}} \qquad (8)$$

Энди матрицали ўйинни чизиқли программалаш усули билан ечиш жараёнини кўрамиз. Энг аввал I ўйновчининг оптимал аралаш стратегияси ва ўйининг баҳоси V ни топамиз. Унинг учун (7) тенгсизликлар системасини ва (4) шартларни умумлаштириб, қуйдаги кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq V \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \qquad (10)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (11)$$

Ўйиннинг баҳоси V ни мусбат деб ҳисоблаб, (V>0) (9) системанинг ҳамма тенгсизликларини V га бўлиб қуйидаги система ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{V}, \qquad (13)$$

$$t_i \geq 0 \qquad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (14)$$

$$\textit{бу ерда } \ t_i = \frac{x_i}{V} \qquad (15)$$

I ўйновчи ўз ютуғини, яъни ўйиннинг баҳоси V ни максимум қилишга ҳаракат қилади. Демак, I ўйновчи учун

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{V},$$

энг кичик (минимум) қиймат қабул қилиш керак. Ушбу талабларда (12) - (14) система қуйидаги чизиқли программалаш масаласига айланади:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0 \qquad (16)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min \qquad (17)$$

Худди шундай йўл билан II ўйновчининг оптимал аралаш стратегияси ва V ўйиннинг баҳосини топиш учун қуйидаги чизиқли программалаш масаласини ечиш керак.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq V \end{array}\right\} \quad (18)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0 \qquad (19)$$

$$F = \frac{1}{V} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max \qquad (20)$$

(15)-(17) ва (18-20) масалалар ўзаро иккиланган чизиқли программалаш масалаларидан иборат бўлади. Улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккиласини ечимини осонликча топиш мумкин.

2-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицали ўйинни аралаш стратегиялардаги ечимни топинг.

Ечиш. I ўйновчи учун ўйинни чизиқли программалаш масаласига айлантирамиз. Бунинг учун энг аввал қуйидаги системани ҳосил қиламиз.

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq V \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq V \end{array}\right\} \quad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (22)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad (23)$$

(21) системадаги ҳар бир тенгсизликнинг икки томонини (V>0) га бўлиб ва $t_i = \dfrac{x_i}{V}$ белгилаш киритиб қуйдаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{array}\right\} \quad (24)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V} \qquad (25)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \qquad (26)$$

Бу системани қуйидаги чизиқли программалаш масаласи кўринишида ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{array}\right\} \quad (27)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \qquad (28)$$

$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \to \min \quad (29)$$

II ўйновчи учун берилган матрицали ўйин қуйидаги чизиқли программалаш масаласига айланади.

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 \leq 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 \leq 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 \leq 1 \end{array}\right\} \quad (30)$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \qquad (31)$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \to \max \quad (32)$$

(27)-(29) ва (30)-(32) масалалар ўзаро иккиланган масалалардир. Шунинг учун улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккинчисининг ечимини осонликча топиш мумкин.

Биз (30) - (32) масалани симплекс усули билан ечамиз. Бунинг учун уни нормал ҳолга келтириб, симплекс жадвалга жойлаштирамиз:

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 = 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 = 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 = 1 \end{array}\right\}$$

$$u_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$$

$$F_{\min} = -u_1 - u_2 - u_3$$

Б.в	**С.б**	**P_0**	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**
			P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_4	0	1	5	3	2	1	0	0
P_5	0	1	3	5	5	0	1	0
P_6	0	1	$\boxed{6}$	3	4	0	0	1
Δ_j		0	1	1	1	0	0	0
P_4	0	1/6	0	1/2	-4/3	1	0	-5/6
P_5	0	1/2	0	$\boxed{7/2}$	3	0	1	-1/2
P_1	-1	1/6	1	1/2	2/3	0	0	1/6
Δ_j		-1/6	0	1/2	1/3	0	0	-1/6
P_4	0	2/21	0	0	-25/21	1	-1/7	-16/21
P_2	-1	1/7	0	1	6/7	0	2/7	-1/7
P_1	-1	2/21	1	0	5/21	0	-1/7	5/21
Δ_j		-5/21	0	0	-2/21	0	-1/7	-2/21

Оптимал ечим :

$$U = \left(\frac{2}{21}; \quad \frac{1}{7}; \quad 0 \right)$$

$$F_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21}$$

$$V = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = V \cdot U_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$y_2 = V \cdot U_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = V \cdot U_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$Y = \left(\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad 0 \right)$$

Энди I- ўйновчи учун оптимал аралаш стратегияни топамиз. Бунинг учун (30) - (32) масалага иккиланган масала ечимини топамиз:

$$T = (t_1; \quad t_2; \quad t_3) = \left(0; \quad \frac{1}{7}; \quad \frac{2}{21} \right)$$

ҳамда қуйидаги муносабатлар асосида X=(x_1 , x_2 , x_3) аралаш стратегия топамиз:

$$x_1 = V \cdot t_1 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = V \cdot t_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$x_3 = V \cdot t_3 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Жавоб: $X^* = \begin{pmatrix} 0; & \frac{3}{5}; & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ $\quad Y^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}; & \frac{3}{5}; & 0 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{21}{5}$$

Мустақил ечиш учун масалалар

I. ёуйидаги матрицали ўйинларни минимах ва махмин усуллари билан ечинг.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\textit{жавоб} \cdot X = (0; \quad 0; \quad 1), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0), \quad V = 5$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\textit{жавоб}. \quad X = (0; \quad 1; \quad 0; \quad 0), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0; \quad 0), V = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $\textit{жавоб}. \quad X = (1; \quad 0; \quad 0), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0)$

$\textit{ёки} \quad X = (0; \quad 2; \quad 0), \quad Y = (0; \quad 1; \quad 0) \; V = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $\textit{жавоб}. \quad X = (1; \quad 0; \quad 0), \quad Y = (1; \quad 0; \quad 0)$

$\textit{ёки} \; X = (0; \quad 0; \quad 1), \quad Y = (1; \quad 0; \quad 0) \quad V = 3$

II .ёуйидаги марицали ўйинларни чизиқли программалаш усуллари билан ечин:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = (0; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{4}) \quad ; \quad Y^* = \left(\frac{1}{2}; \quad 0; \quad \frac{1}{2}; \quad 0\right) \quad V = \frac{5}{2}$

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = \left(\frac{3}{4}; \quad \frac{1}{4}\right) \quad ; \quad Y^*\left(\frac{1}{4}; \quad \frac{3}{4}; \quad 0\right) \qquad V = \frac{7}{4}$

3

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = \left(\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4}\right) \qquad Y^* = \left(\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4}\right) \quad V = 0$

4

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = \left(\frac{1}{7}; \quad \frac{6}{7}; \quad 0\right) \qquad Y^* = \left(\frac{3}{7}; \quad \frac{4}{7}; \quad 0\right) \quad V = \frac{4}{7}$

5.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right) \qquad Y^* = \left(\frac{1}{5}; \quad 0; \quad \frac{4}{5}\right) \quad V = \frac{23}{5}$

6.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

жавоб. $X^* = \left(0; \quad \frac{1}{3}; \quad 0; \quad \frac{2}{3}\right) \qquad Y^* = \left(\frac{2}{3}; \quad \frac{1}{3}\right) \quad V = 7$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = (0; \quad 0; \quad 1) \qquad Y^* = (0; \quad 1; \quad 0) \quad V = 7$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \quad 0\right) \qquad Y^* = \left(\frac{3}{4}; \quad 0; \quad 0; \quad \frac{1}{4}\right) \quad V = \frac{13}{4}$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(\frac{2}{5}; \quad 0; \quad \frac{3}{5}\right) \qquad Y^* = \left(\frac{1}{5}; \quad \frac{4}{5}; \quad 0\right) \quad V = \frac{17}{5}$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

жавоб. $X^* = \left(0; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{2}{5}; \quad 0\right) \qquad Y^* = \left(0; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{2}{5}; \quad 0\right) \quad V = 3$

18- машғулот
Табиатга қарши ўйин.

“Табиат”га қарши ўйинда “табиат” ва ечим қабул қилувчи шахс (ЕёёШ) қатнашади. Табиатнинг $T_1,T_2,\ldots T_n$ ҳоллари мавжуд бўлиб, уларга қарши ЕёёШнинг m-та $A_1,A_2,\ldots A_m$ тадбирлари мавжуд. Табиатга қарши ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

T_j / A_i	T_1	T_2	…	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Бу ерда a_{ij} - табиатнинг T_j ҳолатига қарши ЕёёШнинг A_i чора тадбирини амалга оширгандаги кўрадиган фойдаси ёки зарарини ифодалайди. Агар a_{ij} - фойда (ютуқ) бўлса, у ҳолда бу матрица «ютуқлар матрицаси» дейилади. Агар a_{ij}- ютказув (зарар)ни ифодаси бўлса. Ушбу матрица «тўловлар матрицаси» деб аталади. «Ютуқлар матрицаси» асосида ЕёёШ ўзининг фойдасини максималлаштирувчи йўлни (соф стратегияни) танлайди. «Тўловлар матрицаси» асосида эса у ўзининг зарарини минималлаштирувчи йўлни танлайди. Бундай соф стратегияларни танлаш учун Лаплас, Байес, Вальд Сэвидж ва Гурвиц мезонларидан фойдаланилади.

1. **Лаплас мезонида** табиатнинг барча ҳолатлари тенг эҳтимолли деб ҳисобланади, яъни

$P_1 = P_2 = \ldots.. = P_n = 1/n$

деб қабул қилинади. У ҳолда ЕёёШ A_i қўллагандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$Q_i = \frac{1}{n}(a_{i1} + a_{i2} +\ldots +a_{in})$ $(i=\overline{1,m})$ бўлади. (1)

ЕёёШ максимал фойда (минимал зарар) берувчини танлайди.

2. **Байес мезонида** табиатнинг ҳар бир T_j ҳолати маълум P_j эҳтимол билан рўй бериши аниқланган бўлади. У ҳолда ЕёёШнинг A_i йўлини (стратегияни) танлангандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 +\ldots + a_{in}p_n$ $(i=\overline{1,m})$ (2)

ЕёёШ max Q_i (min Q_i) берувчи йўлни танлайди.

3. **Вальд мезони** максимин – минимакс усулидан иборат. Бунда ЕёёШ

max (min a_{ij}) [min (max a_{ij})] (3)
таъминловчи йўлни танланади

4. **Сэвидж мезони** ҳам минимах – махмин принципига асосланган бўлиб, унда (**a_{ij}**) – ютуқлар (тўловлар) матрицаси ўрнига «таваккалчилик матрицаси» деб аталувчи (**r_{ij}**) матрица ишлатилади. Бу матрицани элементлари қуйидагича топилади:

r_{ij}=max a_{ij} - a_{ij}= β - a_{ij} **,** агар a_{ij} – ютуқ бўлса, (4)

r_{ij}= a_{ij} - min a_{ij}= a_{ij} - β, агар a_{ij} **-** ютқазув бўлса, (5)

5. **Гурвиц мезони** ясама мезондан иборат бўлиб, унга асосан оптимал стратегия сифатида қуйидаги шартни қаноатлантирувчи стратегия танланади.
a_{ij} – даромадни билдирганда:

$$\gamma = \max\left[\alpha \max_{j} a_{ij} + (1-\alpha)\min_{j} a_{ij}\right], \alpha \in [0,1] \quad (6) \quad \text{қоида}$$

a_{ij} – ютуқни (зарарни) билдирганда:

$$\gamma = \min_{i}\left[\alpha \min_{j} a_{ij} + (1-\alpha)\max_{j} a_{ij}\right], \ \alpha \in [0,1] \quad (7)$$

Бу ерда α ечим қабул қилиш жараёнини субъектив баҳоловчи параметр. Агар Х=1 бўлса вазият оғир бўлган бўлади ва уни тўғрилаш учун чора-тадбирларни қўллаш керак бўлади. Х=0 бўлганда вазият жуда яхши ва унга ҳеч қандай чора табдирлар қўллаш зарур бўлмайди.

1- мисол. ёуйидаги ютуқлар матрица кўринишида берилган табиатга қарши ўйинни Лаплас, Вальд, Сэвидж мезонлари ёрдамида ечинг.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	5	8	18
A_2	10	6	4	12
A_3	2	1	3	16
A_4	5	13	5	1

Ечиш: Лаплас мезони бўйича ўйинни ечиш учун табиатнинг T_1 , T_2 , T_3 , T_4 ҳолатлари тенг эҳтимол билан рўй беради, яъни $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 =$ 1/4 деб қабул қилиб қуйидаги жадвални тузамиз:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})Pi$
A_1	1	5	8	13	$\frac{1}{4}$ (1+5+8+18)=27/4
A_2	10	6	4	12	$\frac{1}{4}$ (10+6+4+12)=8
A_3	2	1	3	16	$\frac{1}{4}$ (2+1+3+16)=22/4
A_4	5	13	5	1	$\frac{1}{4}$ (5+13+5+1)=6
Pi	1/4	1/4	1/4	1/4	max Q_i = 8

Демак, бу усулда ЕёёШ энг катта (8) ютуқни таъминловчи A_2 соф стратегияни танлайди.

Вальд мезони бўйича ўйинни ечиш жараёнини қуйидаги жадвалда тасвирлаймиз:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	min a_{ij}
A_1	1	5	8	18	1
A_2	10	6	4	12	4
A_3	2	1	3	16	1
A_4	5	13	5	1	1
					$\max_i(\min_j a_{ij}) = 4$

Бу мезон бўйича ҳам энг катта ютуқни таъминловчи стратегия A_2 экан.

Севидж мезонини қўллаб ўйинни ечишдан аввал таваккалчилик матрицасини тузамиз. Унинг элементларини (4) формула ёрдамида топамиз:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\underset{j}{max}\ (r_{ij})$
A_1	9	8	0	0	9
A_2	0	7	4	6	7
A_3	8	12	5	2	12
A_4	5	0	3	17	17
					$\underset{i}{min}(\underset{j}{max}\ r_{ij}) = 7$

Демак, таваккалчиликдан кўрадиган зарарни минималлаштирувчи энг яхши стратегия A_2 дан иборат экан.

Ушбу ўйин Байес мезони асосида ечиш учун табиатнинг T_1 ҳолати 0,2 эҳтимол билан T_2 , T_3 , T_4 , ҳолатлари эса мос равишда 0,3; 0,4; 0,1 эҳтимоллар билан рўй беради деб фараз қиламиз. У ҳолда ўйинни ечиш қуйидаги жадвалда кўрсатилганидек топилади:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$
A_1	1	5	8	18	6,7
A_2	10	6	4	12	6,6
A_3	2	1	3	16	3,5
A_4	5	13	5	1	7
P_j	0,2	0,3	0,4	0,1	max Q_i = 7

Демак, Байес мезони асосида энг оптимал стратегия A_4 экан.

Гурвиц мезонини қўллаш учун ечим қабул қилиш жараёни ўртача, яъни X=0,5 деб қабул қиламиз ва ҳисоблаш жараёнини қуйидаги кўринишдаги жадвалда бажарамиз:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	γ
A_1	1	5	8	18	1	18	9,5
A_2	10	6	4	12	4	12	8
A_3	2	1	3	16	1	16	8,5
A_4	5	13	5	1	1	13	7
							$\max\limits_i \gamma = 9{,}5$

Ушбу мезон бўйича оптимал стратегия энг катта кўрсаткични берувчи A_1 стратегия эканлиги аниқланади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Савдо корхонасида 500 бирлик мавсумий маҳсулот сотилмай қолган бўлсин. Бу маҳсулотнинг олдинги нархи 20 бирликни ташкил этган бўлсин. Энди савдо корхонаси олдида маҳсулотнинг нархини тушириш масаласи турибди. Маҳсулот нархини неча фоизга туширганда корхонанинг кўрадиган зарари минимал бўлади?

Савдо корхонаси маҳсулот нархини 20% (A_1 йўл), 30% (A_2 йўл), 40% (A_3 йўл), 50% (A_i йўл) тушириш мўлжаллайди. Бу йўлларни ЕёёШнинг стратегиялари деб қараймиз. «Табиат»нинг иккита йўли бор: 1) Табиатнинг кам эгилувчанлиги (T_1 йўл); 2) Табиатнинг кўп эгилувчанлиги (T_2 йўл). Ана шуларни назарга олиб тўловлар матрицаси тузилсин ва ўйиннинг ечимини турлича мезонлар асосида топилсин.

2. ёуйидаги жадвалда берилган маълумотлар асосида ютуқларни максималлаштирувчи стратегияни Байес мезони асосида топинг:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23

P_i	0,2	0,7	0,1

Жавоб: A_2 ; 26,2

3. ёуйидаги ютуқлар матрицаси ёрдамида берилган ўйинни
а) табиатнинг турли ҳолатлари номаълум бўлган;
б) табиатнинг турли ҳолатларининг рўй бериши эҳтимоллари P_1=0,5, P_2=0,3 ва P_3=0,2 бўлган ҳоллар учун ечинг.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	7	5	6
A_2	9	2	8
A_3	3	5	4
P_i	0,5	0,3	0,2

Жавоб: а) A_2; $6\frac{1}{3}$

б) A_2; 6,7

4. Фабрика уч хил A_1 , A_2 , A_3 маҳсулотлар ишлаб чиқаради. Корхонанинг даромади ишлаб чиқарилган маҳсулотга бўлган талабга боғлиқ равишда қуйидаги ютуқлар матрицаси кўринишида берилган.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	6	8	4
A_2	5	7	9
A_3	8	3	2

Энг катта даромад келтирувчи маҳсулот ишлаб чиқариш режасини топинг.

Жавоб: A_2 маҳсулот ишлаб чиқарса, корхона даромади 7 бирлик бўлади.

5. “”Табиат” билан ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси орқали берилган:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Вальд, Сэвидж ва Гурвиц мезонлари (α=0,6 бўлган ҳолда) билан ўйиннинг ечимини топинг.

6. Мамлакатда 4 хил электростанциялар қурилиши мўлжалланган табиатнинг турли ҳолларида электростанцияларни қуриш самарадорлиги қуйидаги ютуқлар матрицаси кўринишида берилган:

а)

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

б)

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	20	30	15
A_2	75	20	35
A_3	25	80	25

A_4	85	5	45

в)

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	0	4	-1	3
A_2	1	0	2	2
A_3	3	1	-2	-1