O'ZBYEKISTON RYESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKYENT AXBOROT TYEXNOLOGIYALAR UNIVYERSITYETI

«Matyematik dasturlash va optimallash usullari»
o'quv qo'llanma

Toshkyent-2008

Annotaciya

O'quv qo'llanma matyemaik dasturlash va optimallash usulari faniga bag'ishlangan bo'lib, chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalalarini yechish va uni yechishda kompьyutyer dasturiy pakyetlaridan qanday foydalanish yo'llari byerilgan. O'quv qo'llanma oliy tyexnika o'quv yurtlari talabalari, o'qituvchilari va kursni mustaqil o'rganuvchilar uchun mo'ljallangan.

Tuzuvchilar: f.m.f.d., profyessor Nazirov SH.
f.m.f.n., docyent Nye'matov A.

Taqrizchilar: t.f.d. Mamatov A.Z.
f.-m.f.n. Kabulov R.V.

M U N D A R I J A

K I R I SH

Kompьyutyerda turli hisoblash dastur pakyetlari mavjud bo'lib, ular yordamida har xil muxandislik va iqtisodiyot masalalarini yechish imkoniyatlari mavjud.

Ma'lumki, iqtisodiyot masalalarini matyematik modyellashtirish va yechishda kompьyutyer dasturlaridan foydalanish amaliyotda muhim rolь o'ynamoqda. Bu esa o'z navbatida o'quvchilardan kompьyutyer amaliy dastur ta'minotlaridan foydalanishda yuqori darajada malaka talab etadi.

Matyematik dasturlash matyematikaning ko'p variantli yechimga ega bo'lgan masalalarinida eng yaxshi, maqsadga muvofiq, ya'ni optimal yechimini topishga yordam byeruvchi yo'nalishidir. Matyematik dasturlash chiziqli dasturlash, chiziqli bo'lmagan dasturlash va dinamik dasturlash dyeb ataluvchi qismlarni o'z ichiga oladi. "Dasturlash" dyeganda yechimlarni kyetma- kyet hosil qilish jarayoni tushuniladi. Bu yechim shunday jarayonki, unda eng avval boshlang'ich yechim topiladi va kyeyin bu yechim qadamba-qadam yaxshilanib boriladi. Bu jarayon eng yaxshi dastur topulguncha davom ettiriladi va har bir qadamda maxsus ko'rsatgichlar yordamida qanday ish tutish, hamda optimal yechimga qanday yaqinlashish kyerakligi ko'rsatilib boriladi.

CHiziqli va chiziqsiz dasturlash masalasini to'liq tushunish uchun oldin chiziqli funkciya, chiziqli tyenglamalar va tyengsiziklar, ularning yechimlari haqida to'liq tassavurlarga ega bo'lish lozim.

Muxandislik va iqtisodiy masalalarni matyematik modyellashtirish va ularni yechish bo'yicha laboratoriya mashg'ulotlari o'tkazishda kompьyutyerdan foydalanish talabalarning nazariy va amaliy bilimlarini yanada mustahkamlashini va mustaqil shug'ullanishini ta'minlaydi.

Qo'llanma chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalasini yechishda yakka tartibdagi amaliy mashg'ulotlarini qanday bajarish tartibi va uni yechish yo'llarini o'rganishga bag'ishlangan. Qo'llanmada amaliy va laboratoriya mashg'ulotlari uchun vazifalar to'plamlari matyeriallari kyeltirilgan.

1-qism

1.OPTIMALLASH MASALASI VA UNING MATYEMATIK MODYELI

Optimallash nazariyasi va matyematik dasturlash inson faoliyatining turli sohalarida kyeng qo'llaniladigan fanlardan biridir. Bu sohadagi muhim muvaffaqiyatlarga katta tyexnik tizimlarni loyihalash va analiz qilish natijasida erishilgan.

Inson oldiga qo'yiladigan barcha masalalarni yechishda yaxshi yoki yomon dyegan yechimni qabul qilishi mumkin. YEchim qabul qilish jarayoni formallashgan (formalizovan) va formallashmagan holda bo'lishi mumkin.

Formallashmagan yechim qabul qilish -bu agar aytish lozim bo'lsa ijod, san'atdir. Formallashmagan yechimni qabul qilish uchun insondan hyech narsa kyerak bo'lmaydi. Masalan, inson o'tirdi, o'yladi, yechim qabul qildi. Haqiqatdan ham bu holda yechimning to'g'riligiga hyech qanday kafolat (garantiya) yo'q. Inson ko'p hollarda hyech qanday asossiz o'zi o'ylagan holda, ayrim hollarda esa tajribasiga ishongan holda yechimlarni qabul qiladi.

Formallashgan yechimga kyelsak, u aniq tavsiyaga asoslanib qabul qilinadi. Formallashgan yechim qabul qilish ikkita usulga asoslanadi:

-mantiqiy modyellash;

-optimallash.

Mantiqiy modyellashda yuqori bilimga ega bo'lgan mutaxassislar tomnidan usul tanlanib, kim tamonidan yechim qabul qilish kyerakligi aniqlanib, tanlangan usul yordamida biror bir holat yoki boshqa holatda nima qilish kyerakliligi aniqlanadi. Buning uchun quyidagi funkciyalar xizmat qiladi: VA (I), YOKI (ILI), AGAR (YESLI), YO'Q (NYE). Komьpyutyerda mantiqiy modyellashni amalga oshirish uchun maxsus Prolog (mantiqiy dasturlash) tili ishlab chiqilgan.

YEchim qabul qilishning **optimallash** usuli quyidagilarga asoslanadi:

-matyematik modyellash;

-kompьyutyerda masalani yechish;

-boshlang'ich ma'lumotlar.

Matyematik modyellashning ikkita imkoniyati mavjud:

-qo'yilgan savolga tyez javob topish;

-kyeng tajriba o'tkazish imkoniyati.

YEchim qabul qilish algoritmi ancha murakkab bo'lib, unda kompьyutyerni qo'llamasdan turib amaliy jihatdan bajarish mumkin emas. Kompьyutyerda optimal yechimni izlash algoritmi uchun ishlab chiqilgan dasturiy ta'minot va boshlang'ich ma'lumotlarsiz izlanayotgan natijaga erishib bo'lmaydi. Bunday dasturiy ta'minot Excel vositasida "Poisk ryeshyeniya" syervis xizmatida mavjud. Bunda boshlang'ich ma'lumotlarning yetarlicha aniqligi katta ahamiyatga ega.

Optimal yechimni qabul qilishning asosiy bosqichlari

Optimal yechimni qabul qilishning asosiy bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Masalani tanlash. Bunda masala qanday talablarni qanoatlantirishi kyerakligi aniqlashtiriladi. Masalani tanlash optimal yechimni qabul qilishda asosiy rol o'ynaydi. CHunki masala nato'g'ri tanlansa yechimni qabul qilishda ko'p vaqt talab qilinadi va masalani yechishda tanlangan optimal usul kyerakli natijani byermaydi.

2.Masalani qo'yish. Bunda masalaning matyematik modyeli va uning elyemyentlari aniqlanadi.

3.Masala matyematik modyelini tuzish. Bu bosqich ham juda asosiy bo'lib, optimal yechim qabul qilishga asoslangan matyematik modyelni tuzish masalasi qaraladi.

4.Masala uchun boshlang'ich ma'lumotlarni yig'ish. Bu bosqichda tuzilgan matyematik modyelga mos boshlang'ich ma'lumotlar yig'iladi. Masala va uning matyematik modyelining to'g'riligini tyekshirish uchun kyerakli tyest ma'lumotlari tashkil qilinadi.

5.Masalani yechish. Bu bosqichda kyerakli usul tanlanib masala yechiladi.

6.YEchimni tahlil qilish. Bu bosqich yechim qabul qilishning asosiy instrumyenti bo'lib, olingan optimal yechim matyematik modyel asosida tahlil qilinadi.

7.Optimal yechimni qabul qilish. Optimal yechim olingan natijalarga asoslanib mutaxasis tamonidan qabul qilinadi.

8.YEchimni grafik ko'rinishda tasvirlash optimal yechimni qabul qilishda muhim faktor bo'lib, unda ma'lumotlar yaqqol tasvirlanadi.

1.1.Optimallash masalasi va uning matyematik modyelining qo'yilishi

Optimallash masalasini oddiy bir hol uchun ko'rib chiqaylik. Oddiy matyematik modyelga ega, murakkab matyematik formula ishlatilmaydigan formasini yetarlicha tavsiflash qiyin bo'lgan idishni olaylik. Bu idish kuvshin (ko'za) bo'lmasa ham, uning formasini yetarlicha tavsiflash qiyin.

Aytaylik hajmi to'g'ri burchakli paralyelopyepyed formaga ega bo'lgan bakni loyihalashtirish kyerak bo'lsin. Bunda uning hajmini hisoblash formulasi quyidagicha bo'ladi.

$$V=a\cdot b\cdot h \qquad (1)$$

bu yerda a, b, h –ning tamonlari.

Bu masalaning matyematik modyelini tuzish uchun masala qo'yilishi tavsifini byerish kyerak: hajmi V=2000 ga tyeng bo'lgan bak o'lchamini aniqlash talab etilsin va bakni tayorlash uchun kam matyerial kyetsin, uning maydoni (sirti)

$$S=2\cdot [a\cdot b+(a+b)\cdot h] \qquad (2)$$

Bunday masalaning matyematik qo'yilishi quyidagicha yoziladi.

$$F=S\rightarrow \min$$
$$V=2000 \qquad (3)$$

Bu yozuv V=2000 shart bilan S kattalikni minimallashtirish ma'nosini bildiradi. Oxirgi (3) formulani (1) va (2) larga asoslanib quyidagicha yozish mumkin.

$$F=2\cdot[a\cdot b+(a+b)\cdot h]\to min$$
$$a\cdot b\cdot h=2000$$

Bu bog'lanishlarga yana ko'proq kompьyutyer uchun kyerak bo'lgan shartni qo'shamiz. Bu shart to'rtburchak tomonlari faqat musbat qiymatga ega bo'lishligi shartidir, ya'ni a, b, h>0.

U holda masalaning optimal yechimini izlashning quyidagi matyematik modyeliga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{ll} MF\ (CF) & F=2\cdot[a\cdot b+(a+b)\cdot h]\to min \\ CHG(OGR) & a\cdot b\cdot h=2000 \\ CHSH\ (GRU) & a,\ b,\ h>0 \end{array} \qquad (4)$$

Bu modyel uchta asosiy tashkil etuvchilardan iborat:

-maqsad funkciyasi (MF);

-chyegaralash (CHG);

-chyegaraviy shart (CHSH).

Endi optimallash masalasining matyematik modyelini umumiy holda ko'rib chiqaylik. Buning uchun yana yuqoridagi kyeltirilgan misolni qaraymz. Unda quyidagi byelgilashlarni kiritamiz $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=h$. U holda (4) quyidagicha yoziladi.

$$\begin{array}{l} F=2\cdot[x_1\cdot x_2+(x_1+x_2)\cdot x_3]\to min \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=2000 \\ x_1,\ x_2,\ x_3>0 \end{array} \qquad (5)$$

YOki buni umumlashtirgan holda quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{array}{l} F=f(x_1,x_2,x_3)\to min \\ g(x_1,x_2,x_3)=B \\ x_1,\ x_2,\ x_3>0 \end{array} \qquad (6$$

Bu (6) modyelni yanada umumlashtirib kompakt holda yozadigan bo'lsak, u quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{array}{l} F=f(x_j)\to min(max,Const) \\ g_i(x_j)\le B_i \\ d_j\le x_j\le D_j\ \ i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n \end{array} \qquad (7)$$

(7) modyel optimallash masalasining umumlashgan matyematik formasining yozilishidir.

Bu modyel formulalari ma'nolarini byeramiz:

1) maqsad funkciyasi (MF) –optimallash krityeriyasi bo'lib masala yechimining optimalligini, ya'ni yaxshiligi ma'nosini ko'rsatadi. Bunda maqsad funkciyasi 3 turga mo'ljallangan bo'lishi mumkin:

- maksimallashtirish;
- minimallashtirish;
- byerilgan qiymatga mo'ljallangan.

2) chyegaralash (CHG) -o'zgaruvchilar o'rtasidaga bog'lanishlarni o'rnatadi. Ular bir taraflama yoki ikki taraflama bo'lishi mumkin, masalan:

- $g_i(x_j) \le B_i$ bir taraflama byerilish;
- $A_i \le g_i(x_j) \le B_i$ ikki taraflama byerilish.

Excel yordamida optimallash masalasini yechishda ikki taraflama chyegaralash ikkita bir taraflama chyegaralashga ajratilib byeriladi, ya'ni

$g_i(x_j) \ge A_i$

$g_i(x_j) \le B_i$

3) chyegaraviy shart (CHSH) -qiymati izlanayotgan o'zgaruvchilarga chyegaralashlarni qo'yadi.

Masalaning barcha chyegaralanishlar va chyegaraviy shartlarni qanoat-lantiruvchi yechimlariga -**mumkin bo'lgan yechimlar to'plami** dyeyiladi.

Optimallash masalasining asosiy xaraktyeristikalaridan biri bu uning o'lchamidir. Uning o'lchami n -o'zgaruvchilar soni va m -chyegaralashlar soni bilan aniqlanadi. Bunda uchta hol bo'lishi mumkin: $n<m$, $n=m$, $n>m$.

1. $n<m$ holni qaraymiz.

Misol,

$x_1+2=5$

$x_1-8=15$

sistyemani qaraylik. Bu yerda $n=1$, $m=2$. Ko'rinib turibdiki masala yechimi mavjud emas. CHunki birinchi tyenglamada x_1 qiymati 3 ikkinchi tyenlamada x_1 qiymati 7.

2. $n=m$ holni qaraymiz.

Misol,

$x_1+ x_2=5$

$x_1 - x_2=1$

Bu holda $n=m=2$. Bunday n va m bog'lanish tyenglamalar sistyemasini yechishning zarur shartidir. Bu holda yechim mavjud. Lyekin shunday holatlar bo'lishi mumkinki $n=m$ bo'lganda ham yagona yechim mavjud bo'lmaydi, masalan

$x_1+ x_2=5$

$2x_1+2x_2=10$

bu sistyema yagona yechimga ega emas, ya'ni u chiziqli bog'langandir.

3. $n>m$ holni qaraymiz.

Misol,

$x_1+ x_2=5$

bu yerda $n=2$, $m=1$. Bu holda x_1 va x_2 tyenglamani qanoatlantiradigan chyeksiz ko'p qiymatni qabul qilishi mumkin.

1.2.Optimallash masalasi matyematik modyelining klassifikaciyasi

Optimallash masalasining matyematik modyel elyemyentlari bo'lgan izlanayotgan o'zgaruvchilar, bog'lanishlar va boshlang'ich ma'lumotlar birikmasi optimallash masalasining har xil sinflarini tashkil qiladi va ularni yechishda turli usullar talab etiladi. Matyematik modyel elyemyentlar turlariga qarab optimallash masalasini quyidagi sinflarga ajratish mumkin:

- CHiziqli dasturlash. Bunda bog'lanishlar chiziqli, izlanayotgan o'zgaruvchilar uzluksiz va boshlang'ich ma'lumotlar aniq qiymatlar bo'ladi.
- CHiziqsiz dasturlash. Bunda bog'lanishlar chiziqsiz, izlanayotgan o'zgaruvchilar uzluksiz yoki butun sonli bo'lib, boshlang'ich ma'lumotlar ham aniq qiymatlar bo'ladi.
- Butun sonli dasturlash. Bunda bog'lanishlar chiziqli, izlanayotgan o'zgaruvchilar butun sonli va boshlang'ich ma'lumotlar aniq qiymatlar bo'ladi.
- Dinamik dasturlash. Bunda bog'lanishlar chiziqli yoki chiziqsiz bo'lib, ko'proq vaqtga bog'liq masalalar qaraladi va boshqa.

Boshlang'ich ma'lumotlar (isxodnыye dannыye) matyematik modyel uchun quyidagilar bo'ladi:

- Maqsad funkciyasi $F(x_j)$;
- CHyegaralashning chap tamoni $g_i(x_j)$ va o'ng tamoni b_j.

Izlanadigan o'zgaruvchilar uzliksiz va diskryet bo'lishi mumkin. Uzliksiz dyeb shunday o'zgaruvchilarga (kattaliklarga) aytiladiki, u byerilgan chyegaraviy shartda istalgan qiymat qabul qilishi mumkin. Diskryet dyeb shunday o'zgaruvchilarga (kattaliklarga) aytiladiki, u faqat byerilgan qiymatni qabul qiladi. Butun sonli dyeb shunday diskryet o'zgaruvchilarga aytiladiki, u faqat butun qiymat qabul qiladi.

O'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishlar chiziqli va chiziqsiz bo'lishi mumkin. Bog'lanish chiziqli dyeyiladi, agarda o'zgaruvchi birinchi darajali bo'lib, u bilan faqat ayirish yoki qo'shish bajarilsa. Aks holda chiziqsiz dyeyiladi.

Krityeriyalari (alomat myezonlari) soni bo'yicha matyematik modyellar ko'p krityeriyali va bir krityeriyalilarga bo'linadi. Ko'p krityeriyali matyematik modnllar ikkita va undan ortiq krityeriyani o'z ichiga oladi.

Noaniq faktorlarni hisobga olgan xolda matyematik modyellarni dyetyerminallashgan, stoxostik va noaniq elyemyentli modyellarga ajrtish mumkin.

Staxostik modyellarda noaniq faktorlar tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular uchun taqsimot funkciyasi va turli statistik xaraktyeristikalar (matyematik kutilma, dispyersiya, o'rtacha kvadratik chyetlashish va h.k) ma'lum. Stoxostik modyellar ichidan quyidagilarni ajratib ko'rsatish mumkin:

Stoxostik dasturlash modyellari, bunda yoki maqsad funkciyasi yoki chyegaraviy shartlarda tasodifiy miqdorlar qatnashadi;

Tasodifiy jarayonlar nazariyasi modyellari, bunda vaqtning xar onida xolatlari tasodifiy miqdorlardan iborat bo'ladigan jarayonlar o'rganiladi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi modyellari, bunda xizmat ko'rsatish talablarini aniqlashning ko'pkanalli tizimlari o'rganiladi. Bulardan tashqari saxostik modyellarga foydalilik nazariyasi, qidiruv va yechim qabul qilish modyellarini kiritish mumkin.

Statistik ma’lumotlarni yig’ish imkoniyati bo’lmaganligi va faktorlar qiymatlari aniqlanmaganligi uchun faktorlarga bog’liq bo’lgan xolatlarni modyellashtirishda *noaniq elyemyentli modyellar* ishlatiladi.

O’yinlar nazariyasi modyelida masala har xil maqsadli bir nyecha o’yinchilar qatnashuvchi o’yin ko’rinishida ifodalanadi.

Imitacion modyelь - matyematik modyel asosida kompьyutyerda hisoblash tajribalarini o’tkazib ryeal ob’yekt, jarayon yoki tizim holatini taqlid (imitaciya) qilishdir. Imitacion modyel yordamida ob’yekt, jarayon yoki tizimga tasoddifiy ta’sir ryeakciyasini hisoblash imkoniyati mavjuddir.

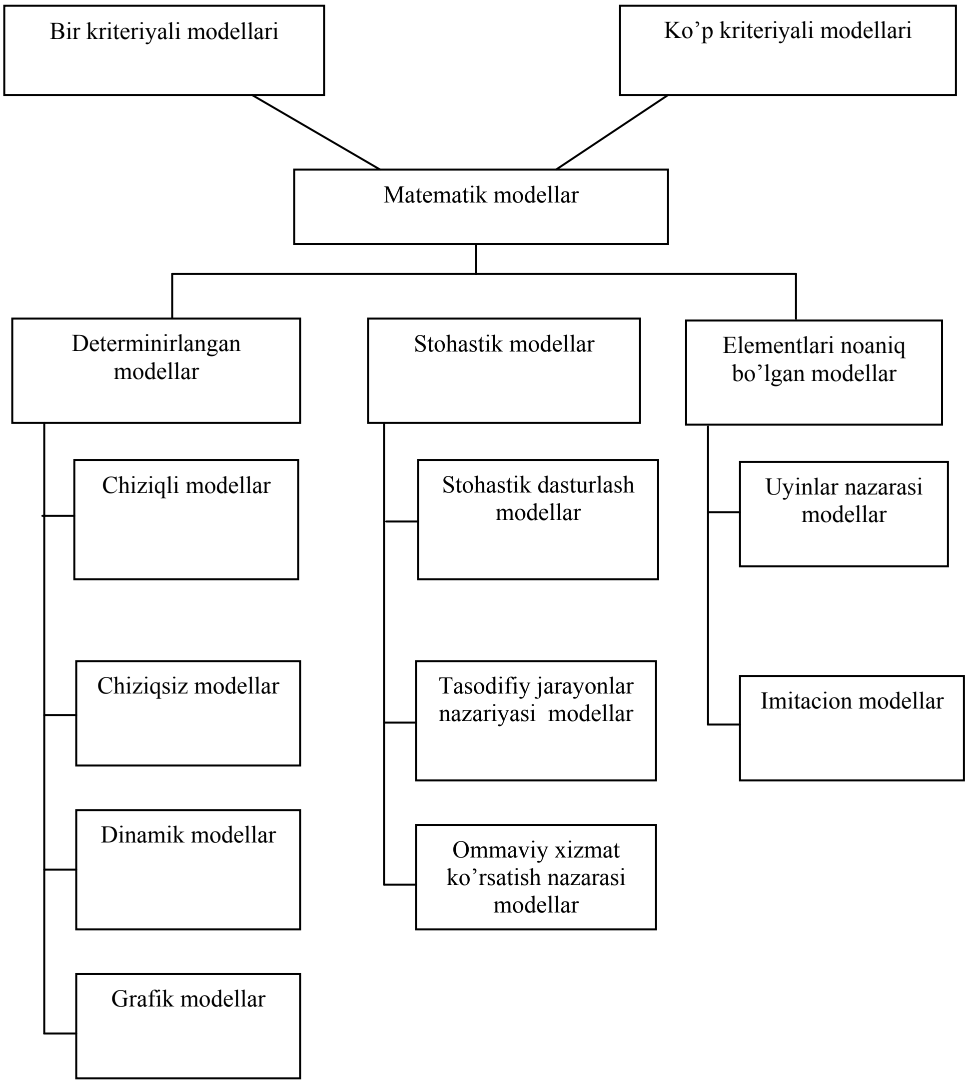
Dityerminallashgan modyellarda naoniq faktorlar hisobga olinmaydi. Bu modyellarning uncha murakkab bo’lmaganligi sabab ko’pgina amaliy masalalar, shu jumladan iqtisodiy masalalar shu modyellarda ifodalanadi. CHyeklanishlar vaa maqsad funkciyasi ko’rinishiga qarab dityerminallashgan modyellar chiziqli, chiziqsiz, dinamik va grafiklarga bo’linadi.

CHiziqli modyellarda chyeklanishlar vaa maqsad funkciyasi boshqaruvchi o’zgaruvchilar bo’yicha chiziqli bo’ladi. Matyematik modyellashtirishda chiziqli modyellarni qurish va ularni hisoblash yaxshi rivojlangandir.

CHiziqsiz modyel – bu shunday modyelki unda boshqarish o’zgaruvchilari bo’yicha yo maqsad funkciyasi yoki chyeklanishlar chiziqsiz bo’ladi. CHiziqsiz modyellar uchun yagona hisoblash usuli mavjud emas. Bunda usullar chiziqsiz funkciyalar ko’rinishi va bog’lanishiga qarab farqlanadi.

Dinamik modyellarning chiziqli va chiziqsiz statistik modyellardan farqi shundaki modyelda vaqt faktori hisobga olinadi. Dinamik modyellarda optimallik krityeriyasi eng umumiy ko’rinishda bo’lib, uning uchun aniq ma’lum xossalar bajariladi. Dinamik modyellarni hisoblash jarayoni juda murakkab, unda har bir aniq masala uchun maxsus yechish algoritmlarini ishlab chiqish zarur bo’ladi.

Grafik modyellar masalalarni grafik struktura ko’rinishda tasvirlash uchun ishlatiladi.



1-rasm

Mavzu bo’yicha savollar

1.YEchim qabul qilish jarayonining qanday holatlari bo’lishi mumkin?
2.Mantiqiy modyellash dyeganda nimani tushunasiz?
3.YEchim qabul qilishda optimallash usuli nimalarga asoslanadi?
4.Msalaning mumkin bo’lgan yechimlari dyeganda nimani tushunasiz?
5.Optimallash masalasini qanday sinflarga ajratish mumkin?
6.Maqsad funkciyasi nima?
7.O’zgaruvchilar orasidagi bog’lanishlar qanday bo’lishi mumkin?
8.Optimal yechimni qabul qilishning asosiy bosqichlarini aytib byering.

2.CHIZIQLI VA CHIZIQSIZ DASTURLASHLARNING MATYEMATIK MODYELLARI

2.1.CHiziqli dasturlash masalasining matyematik modyeli

CHiziqli dasturlash matyematik dasturlashning asosiy qismlaridan biri bo'lib, ko'p o'zgaruvchi funkciyalarning ekstryemumlarini topishni o'rganadi va iqtisodiy-matyematik modyellarni tyekshirishda matyematik apparat bo'lib hisoblanadi.

Matyematik modyel qo'yidagicha talqin qilanadi: Tyenglamalar yoki tyengsizliklar sistyemasini qanoatlantiruvchi o'zgaruvchilarining shunday manfiy bo'lmagan qiymatlarini topish talab qilinadiki, bunda o'zgaruvchilarning chiziqli funkciyasi bo'lgan miqdor (maqsad funkciyasi) eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo'lsin (erishsin).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

Ushbu matyematik modyelni vyektor ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (3.1)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

(3.1) formulaning birinchisi iqtisodiy ma'noda izlananayotgan miqdorlarga qo'yiladigan chyeklanishlarni ifodalaydi, ular ryesurslar miqdori, ma'lum talablarni qondirish zarurati, tyexnologiya sharoiti va boshqa iqtisodiy hamda tyexnikaviy faktorlardan kyelib chiqadi. Ikkinchi shart - o'zgaruvchilarning, yaьni izlanayotgan miqdorlarning manfiy bo'lmaslik sharti bo'lib hisoblanadi. Uchinchisi maqsad funkciyasi dyeyilib, izlanayotgan miqdorning biror bog'lanishini ifodalaydi (ishlab chiqarish maxsulotlarini sotishdan kyeladigan foyda, ma'lum miqdordagi ishni bajarishga sarf bo'lgan xarajat va h.k.).

Agar maqsad funkciyasi iqtisodiy faktorlarni ifodalasa, u holda funkciyaning maksimum qiymati izlanadi, aks holda minimumni izlash kyerak bo'ladi.

Nomalumlarning son qiymatlari tuplami masalaning plani dyeyiladi.

CHyeklanishlar sistyemasini qanoatlantiruvchi xar qanday plan (yechim) mumkin bo'lgan plan (yechim) dyeyiladi.

Maqsad funkciyasiga maksimal (yoki minimal) qiymat byeruvchi mumkin bo'lgan plan (yechim) masalaning optimal plani (yechimi) dyeyiladi.

Maqsad funkciyasining chyeklanishlarini qanoatlantiradigan maksimum yoki minimumini topishning (3.1) masalasi ko'rinishi standart chiziqli dasturlash masalasi dyeyiladi.

Tyengsizliklar sistyemasi ko'rinishida byerilgan chyeklanish shartlarini qo'shimcha o'zgaruvchilar, ya'ni x_{n+i} kiritib tyenglamalar sistyemasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \ , \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

U holda bunday masalaga kanonik ko'rinishda byerilgan chiziqli dasturlash masalasi dyeyiladi.

CHiziqli modyelga kyeltiriladigan quyidagi iqtisodiy masalani ko'rib chiqaylik.

Misol

Korxona uch turdagi mahsulotni ishlab chiqaradi, uni buyurtmachilarga yetkazadi va bozorga sotuvga chiqaradi.

Bozordagi talab sharti birinchi turdagi mahsulot sonini 2000, ikkinchinikini 3000, uchinchiniki**ni** 5000 tadan ortishiga yo'l qo'yolmaydi**.**

Mahsulotni ishlab chiqarishda 4 turdagi ryesurs qo'llaniladi. Bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf bo'ladigan ryesurs miqdori hamda har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda 2.1-jadvalda kyeltirilgan.

1) Buyurtmachilarni ta'minlash uchun;
2) Mahsulot miqdori oshib kyetmasligi uchun;
3) Maksimal foydani olish uchun ishllab chiqarish jarayonini qay tarzda tashkillashtirish kyerak?

2.1. jadval

Ryesurs turi	Mahsulot turi			Jami ryesurslar
	1	2	3	
1 2 3 4	500 1000 150 100	300 200 300 200	1000 100 200 400	25 000000 3 0000000 2 0000000 4 0000000
Foyda	20	40	50	

Matyematik modyelьni qurish.

Matyematik modyelьni qurish bosqichlarini kyetma-kyet bajaramiz.

1) Maqsad-maksimal foyda olish.
2) O'zgaruvchilar bo'lib masalaning shartida kyeltirilgan hamma sonli ma'lumotlar hizmat qiladi.
3) Bosh o'zgaruvchilar:
   x_1-birinchi turdagi mahsulotlar soni;
   x_2 - ikkinchi turdagi mahsulotlar soni;
   x_3 - uchinchi turdagi mahsulotlar soni;

4) CHyeklanishlar: buyurtmachilar ta'minlansin, ryesurslar zahirasi doirasidan chiqib kyetilmasin, bozor mahsulotga to'lib kyetmasin.

Ushbu chyeklanishlarni hisobga olgan holda masalaning mavjud yechimlar sohasini yozib olaylik:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 20000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases}$$

Sistyemadagi birinchi uchta tyengsizlik buyurtmachilar talabiga to'g'ri kyeladi. 4 dan 6 gacha bo'lgan tyengsizliklar bozordagi talabni ifodalaydi. Oxirgi to'rtta tyengsizliklar ryesurs bo'yicha chyeklanishlarni ko'rsatadi.

5) Masalaning maqsad funkciyasi yoki samaradorlik myezonining ko'rinishi quyidagicha

$$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \max.$$

Formulada foyda R harfi bilan byelgilangan. Uni maksimallashtirish kyerak. x_1, x_2, x_3 bilan byelgilangan har bir qo'shiluvchi byerilgan turdagi mahsulotni ishlab chiqarishdan olingan foydani anglatadi.

CHyeklanishlar hamda maqsad funkciyasi bosh o'zgaruvchilar bo'yicha chiziqli, bundan kyelib chiqadiki byerilgan modyelь chiziqlidir.

2.2 Iqtisodda chiziqli dasturlash

SHunday sodda iqtisodiy va ishlab chiqarish masalalarni kyeltiraylikki, ularning muqobil yechimi mos chiziqli matyematik modyellarni qurish va hisoblash yordamida topilsin.

2.2.1 Ishlab chiqarishni ryejalashtirish

Har xil turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishda turli hil ryesurslar ishlatiladi. Har bir ryesursning umumiy zahirasi, har bir turdagi bitta maxsulotni tayyorlash uchun sarf bo'ladigan har bir turdagi ryesurs miqdori, har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda byerilgan. Mahsulotni ishlab chiqishning shunday ryejasini tuzish kyerakki, u mahsulotni sotishda maksimal foyda byersin.

Matyematik modyelьni qurish

Matyematik modyelьni 1yuqorida bayon etilgan bosqichlar bo'yicha quramiz.

1) Maqsad- foydani maksimallashtirish.
2) Masala umumiy holda yechiladi, shuning o'zgaruvchilarni aniqlash uchun shartli byelgilash kiritamiz:

n-har xil turdagi mahsulotlar soni;

m-har xil turdagi ryesurslar soni;

b_1 -i turdagi ryesurs zahirasi, $i=\overline{1,m}$

a_{ij} -j-turdagi bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun kyetadigan i-turdagi ryesurslar miqdori. $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

P_j -j-turdagi bitta mahsulotni sotishdan olingan foyda.

3) x_j, $j=\overline{1,n}$ bosh o'zgaruvchilar-j-turdagi mahsulotlar soni.

4) Masalaning chyeklanishlari-bu ryesurslar bo'yicha chyeklanishlar hamda bosh o'zgaruvchilarning nomanfiylik sharti.

SHu yosinda matyematik modyelьni qurish mumkin.

$$P=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$$

Bu qo'yilgan masalaning chiziqli matyematik modyelidir. Uni hisoblash natijasida ishlab chiqarishning muqobil ryejasini, ya'ni foyda maksimal bo'ladigan hamda ryesurslar zahirasidan oshib kyetmaydigan har bir turdagi mahsulotlar sonini aniqlashadi.

2.2.2.Minimal istye'mol oziq-ovqat korzinasini shakllantirish

Sotuvda mavjud mahsulotlar assortimyenti byerilgan. ♥ar mir mahsulot tarkibida ma'lum bir ozuqaviy moddalar (vitamin va kaloriyalar) bor. Insonga har bir turdagi moddaning zarur bo'ladigan minimumi ma'lum. Minimal narxga ega bo'lgan istye'mol oziq-ovqat korzinasini aniqlash talab etilsin.

Matyematik modyelьni qurish.

1) Maqsad- istye'mol korzinasining narxini minimallashtirish.
2) Masalaning o'zgaruvchilari

n - sotuvda mavjud bo’lgan **h**ar xil mahsulotlar soni;

m - insonga kyerak bo’ladigan har xil ozuqaviy moddalar soni;

a_{ij} - j-mahsulot tarkibidagi i-ozuqaviy modda, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

b_1 - insonga zarur bo’ladigan **i-**ozuqaviy modda miqdori **,** $i=\overline{1,m}$

s_j - birlik j-mahsulot narhi, $j=\overline{1,n}$.

3) Bosh o’zgaruvchilar x_j- bu istye’mol korzinasiga kiruvchi j-mahsulot narxi, $j=\overline{1,n}$.
4) Mavjud yechimlar sohasi barcha mahsulotlarda bo’lishi kyerak bo’lgan ozuqaviy moddalarning istye’mollik darajasi va bosh o’zgaruvchilarning nomanfiylik shartini ifodalovchi quyidagi tyengsizliklar sistyemasi bo’yicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m; \qquad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$$

5) Muqobillik myezoni S ning ko’rinishi quyidagicha

$$C=\sum_{j=1}^{n} x_j x_j \to \max$$

Bu modyel chiziqli matyematik modyelь. Uni hisoblagandan so’ng chyeklanishlarni qanoatlantiruvchi va funkciyaning minimumini byeruvchi x_j qiymat topiladi, ya’ni minimal istye’mol oziq-ovqat korzinasining tarkibi aniqlanadi.

2.2.3.Jihozning muqobil yuklanishini topish

Korxona mavjud jihozda ishlab chiqarish buyurtmasini bajarishi shart. Jihozning har bir birligi uchun quyidagilar byerilgan: ish vaqtining fondi, har bir turdagi birlik mahsulotni ishlab chiqarish tannarxi va ishlab chiqaruvchanlik, ya’ni birlik vaqt ichida ishlab chiqarish mumkin bo’lgan har bir turdagi birlik mahsulot soni. Mahsulot ishlab chiqarishni jihoz bo’yicha shunday taqsimlash kyerakki, tannarx minimal bo’lsin.

Matyematik modyelьni qurish.

1) Maqsad – tannarxni minimallashtirish.
2) O’zgaruvchilar:

m-nomyenklatura, ya’ni ishlab chiqarish buyurtmasidagi har xil turdagi mahsulotlar soni;

b_i -i-turdagi birlik mahsulot soni, $i=\overline{1,m}$;

T_j -j turdagi jihozning ishlash vaqti fondi,

a_{ij} -j-turdagi jihozning i-turdagi mahsulotni ishlab chiqarish bo’yicha mahsuldorligi, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;

c_{ij} -i turdagi birlik mahsulotni j-turdagi jihozda ishlab chiqarish tannarxi.

3) Bosh o'zgaruvchilar x_j, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$-bu y' jihoz i-turdagi $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilgan vaqtdir.
4) Mavjud yechimlar sohasi vaqt bo'yicha chyeklanishlar, nomyenklatura bo'yicha chyeklanishlar hamda x_{ij} ning nomanfiylik shartlarni hisobga olgan holda topiladi.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}\le T_1; \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{m2}\le T_2; \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{mn}\le T_n; \\ a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+...+a_{1n}x_{1n}=b_1; \\ a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+...+a_{2n}x_{2n}=b_2; \\ \qquad\qquad .... \\ a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+...+a_{mn}x_{mn}=b_m; \quad x_{ij}\ge 0, \qquad i=\overline{1,m} \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$$

5) Muqobillik myezoni quyidagi funkciya orqali byeriladi

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min$$

bu yerda S-jami tannarx.

Modyelьni qurgandan so'ng jihozning muqobil yuklanishi, ya'ni har bir turdagi jihozning har bir ko'rinishdagi mahsulotni ishlab chiqarishga sarf qilgan vaqti tushuniladi.

2.2.4. Matyerialni bichish

Bichish uchun bir nyecha turdagi matyerial ma'lum bir miqdorda kyelib tushadi. Bu matyerialdan har xil mahsulot tayyorlash kyerak. Matyerial har xil usulda bichilishi mumkin. Har bir tur o'zining tannarxiga ega va har bir turga mansub mahsulotning ma'lum miqdorini olishga imkon byeradi. SHunday bichish usulini topingki, uning jami tannarxi minimal bo'lsin.

Matyematik modyelьni qurish.

1) Maqsad-bichish tannarxini minimallashtirish;
2) O'zgaruvchilar:

n-bichishga kyelib tushgan har xil turdagi matyerial soni;

d_j -j-turdagi matyerial miqdori, $j=\overline{1,n}$

m- tayyorlash kyerak bo'lgan turli hil mahsulotlar soni;

b_i -i-turdagi mahsulot soni, $i=\overline{1,m}$;

l- bichishning turli xil usullari soni;

a_{ijk} -bichishning k-usulida j-tudagi birlik matyerialdan olish mumkin bo'lgan i-turdagi mahsulotlar soni, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;

s $_{jk}$ -j-tudagi matyerialni k-usulda bichish tannarxi, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;

3) Bosh o'zgaruvchilar x_{jk}- k-usulda bichilgan j-turdagi matyerial miqdori, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;
4) Mavjud yechimlar sohasi joriy matyerialning miqdori, chiqarish bo'yicha chyeklanishlar hamda bosh o'zgaruvchilarning nomanfiylik sharti asosida aniqlanadi.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{1l}=d_1; \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{2l}=d_2; \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{nl}=d_n; \\ a_{111}x_{11}+a_{112}x_{12}+...+a_{1n1}x_{1n}=b_1; \\ a_{211}x_{11}+a_{22}x_{12}+...+a_{2nl}x_{nl}=b_2; \\ \qquad\qquad .... \\ a_{m11}x_{11}+a_{m12}x_{12}+...+a_{mnl}x_{nl}=b_m; \qquad x_{jk}\ge 0,\ j=\overline{1,n} \quad k=\overline{1,n} \end{cases}$$

5) Muqobillik myezoni quyidagi funkciya bilan byeriladi:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}x_{j_k}\to \min$$

Modyelьni hisoblagandan so'ng har xil usulda bichilgan har bir turdagi matyerial miqdori aniqlanadi.

Tannarxni minimallashtirish myezoni o'rniga, masalada chiqindilarni minimallashtirish myezoni olinishi mumkin. Bu holatda- shartda har bir turdagi matyerialni ixtiyoriy usulda bichishda olinadigan chiqindilar miqdori byerib qo'yilishi kyerak.

2.2.5. Mahsulotni sotish ryejasini tuzish

Firma har xil maxsulotlar sotadi, jumladan bunda u ma'lum bir miqdordagi vositalarni (tyexnik, insoniy, pullik) ishlatadi.

Vositalarning umumiy zahirasi, ixtiyoriy mahsulotni sotishda ishlatiladigan har bir turdagi vositalar soni va uni sotishdan olingan foyda byerilgan. Firmaga maksimal foyda kyeltiradigan mahsulotlarni sotish ryejasini ishlab chiqish kyerak.

Matyematik modyelьni qurish.

1) Maqsad-maksimal foyda.

2) O'zgaruvchilar:

n -sotiladigan **h**ar xil mahsulotlar soni;

m - har xil vositalar soni;

b_i -i-turdagi vositalar zahirasi, $i=\overline{1,m}$

a_{ij} - j-turdagi mahsulotni sotish uchun ishlatiladigan i-turdagi vositalar soni, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$;

P_j -j-turdagi birlik mahsulotni sotishdan olingan foyda, $j = \overline{1,n}$

3) Bosh o'zgaruvchilar x_j, $j = \overline{1,n}$ -j-turdagi ishlab chiqilgan mahsulot miqdori.

4) Mavjud yechimlar sohasini vositalar zahirasi bo'yicha chyeklanishlar hamda bosh o'zgaruvchilarning nomanfiylik sharti byelgilab byeradi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \qquad\qquad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \; x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

5) Muqobillik myezoni quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$$

Bu yerda R-jami foyda.

CHiziqli matyematik modyelьni hisoblash natijasida firmaga masimal foyda kyeltiruvchi har bir turga mansub mahsulotning sotilish miqdori aniqlanadi.

2.3.CHiziqsiz dasturlash masalasining qo'yilishi

Umumiy holda chiziqsiz dasturlash masalasi qo'yilishi quyidagicha formulirovka qilinadi.

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \\ .... \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \\ .... \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min(\max)$$

bu yerda x_j – boshqarish paramyetrlari yoki chiziqsiz dasiturlash masalasi yechimi, $j=1,2,…,n$;

b_i – fiksirlangan paramyetrlar, $i=1,2,…,m$;

f, g_i – n ta o'zgaruvchiga bog'liq byerilgan funkciyalar, $i=1,2,…,m$.

Agar f va g_i chiziqli bo'lsa, u hoda masala chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi. CHiziqsiz dasturlash masalasiningng matyematik qo'yilishi shundan iboratki, shunday x_j – boshqarish paramyetrlari qiymatini topish kyerakki matyematik modyelda kyeltirilgan chyeklanishlar sistyemasi qanoatlantirilsin va maqsad funkciyasi maksimum yoki minimum qimymatga erishsin.

CHiziqsiz dasturlash masalasi masala chiziqli dasturlash masalasidan farqli tomoni shundaki uning uchun aniq bir yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funkciyasi va chyegaralanishlar ko'rinishiga qarab bir nyecha maxsus yechish usullar ishlab chiqilgan. Ularga Lagranj ko'paytuvchisi usuli, kvadratik va qavariq dasturlash, gradiyent usullar, qator taqribiy usullar va grafik usullarni kyeltirish mumkin.

Mavzu bo'yicha savollar

1.Matyematik dasturlash matyematikaning qanday yo'nalishlaridan hisob-lanadi?

2.“Dasturlash” dyeganda nima tushuniladi?

3.CHiziqli va chiziqsiz funkciyaga ta'rif byering.
4.CHiziqli dasturlash masalasining matyematik modyelini tushuntirish byering.
5.CHiziqsiz dasturlash masalasining matyematik modyelini tushuntirish byering.
6.CHiziqli programalash masalasi qanday ko'rinishlarda bo'ladi?
7.Qanday yechim mumkin bo'lgan yechim dyeyiladi?
8.Qanday yechim optimal yechim dyeyiladi?
9.CHiziqli dasturlash masalasining qanday xossalari bor?

3.CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARINI YECHISH USULLARI

3.1.CHiziqli tyenglamalar tizimini yechish

Iqtisodiy masalalarni modyellashtirishda, jumladan ishlab chiqarishni ryejalashtirish va boshqarish masalasi, jihozlarni opritmal joylashtirishni aniqlash, ishlab chiqarishning optimal planini, yuklarni tashishning optimal planini, kadrlarni joylashtirish va boshqa shu kabi masalalarning matyematik modyeli chiziqli tyenglamalar tizo'imi ko'rinishida tasvirlanadi.

Quyidagi chiziqli tyenglamalar tizimi byerilgan bo'lmin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Bu tyenglamalar sistyemasi vyektor formada quyidagicha yoziladi

$$\mathbf{A \cdot X = B}. \quad (2)$$

A -tyenglama koefficiyentlari matricasi;

X -nomalumlar vyektori;

B -tyenglama ozod hadlari vyektori.

Oliy algyebra fanidan ma'lumki, agar n=m va A matricaning dityerminanti noldan farqli bo'lsa, ya'ni $|A|\neq 0$ shart bajarilsa tizim yagona yechimga ega bo'ladi.

Tyeskari matrica usuli.

Tyenlamalar tizimini tyeskari matricani topish yo'li bilan yechish usulini ko'rib chiqamiz. (2) vyektor tyenglamasini yechish uchun uning ikki tamoniga A^{-1} tyeskari matricani ko'paytiramiz va natijada quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B}. \quad (3)$$

Matricani uning tyeskarisiga ko'paytirish qoidasiga ko'ra uning natijasi birlik matricaga ega. SHu sabab (3) tyenglamani quyidagicha yozamiz

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}. \quad (4)$$

Bu esa (1) tyenglamalar tizimining yechimidir. YEchimni topish uchun (4) tyenglamada oldin tyeskari matricani topish va kyeyin uni B vyektoriga ko'paytirish lozim. Bu jarayonni Excel jadval procyessorida MOBR (tyeskari matricani topish) va MUMNOJ (matricani maticaga yoki vyektorga ko'paytirish) funkciyasi yordamida juda oson amalga oshirish mumkin.

Matyematik modyeli chiziqli tyenglamalar tizimiga kyeluvchi masalani ko'rib chiqamiz.

Misol. Firma to'rtta A1,A2,A3,A4 turdagi mahsulot ishlab chiqarishda S1,S2,S3,S4 turdagi ryesurslarni ishlatadi. Ryesurslardan har bir mahsulot bir birligiga kyetadigan myeyor va bir kunda kyetadigan ryesurslar hajmi jadvalda byerilgan.

Mahs-ulot turi	Har bir mahsulotning bir birligi uchun kyetadigan myeyor				Bir kunda kyetadigan ryesurslar hajmi
	A1	A2	A3	A4	
S1	2	2	4	1	2250
S2	2	1	1	2	1550
S3	3	1	2	1	1850
S4	1	2	1	3	1700

Masalaning matyematik modyelini yozing va uni yechib bir kunda ishlab chiqiladigan mahsulotlar hajmini toping.

YEchish. Firma har kuni A1 mahsulotdan x_1, A2 mahsulotdan x_2, A3 mahsulotdan x_3 va A4 mahsulotdan x_4 hajmda ishlab chiqariladi. U holda masala quyidagi tyenglamalar sistyemasiga kyeladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 2250 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 1550 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 1850 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 1700 \end{cases}$$

Bu tyenglamalar sistyemasini matrica formasida yozamiz

A·X=B.

Bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 . \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2250 \\ 1550 \\ 1850 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

Bu masalani Excel elyektron jadval procyessorida yechish kyetma-kyetligi quyidagicha:

1.A matrica elyemyentlari elyektron jadvalga kiritiladi;

2.B vyektor elyemyentlari elyektron jadvalga kiritiladi;

3.A^{-1} tyeskari matrica topiladi:

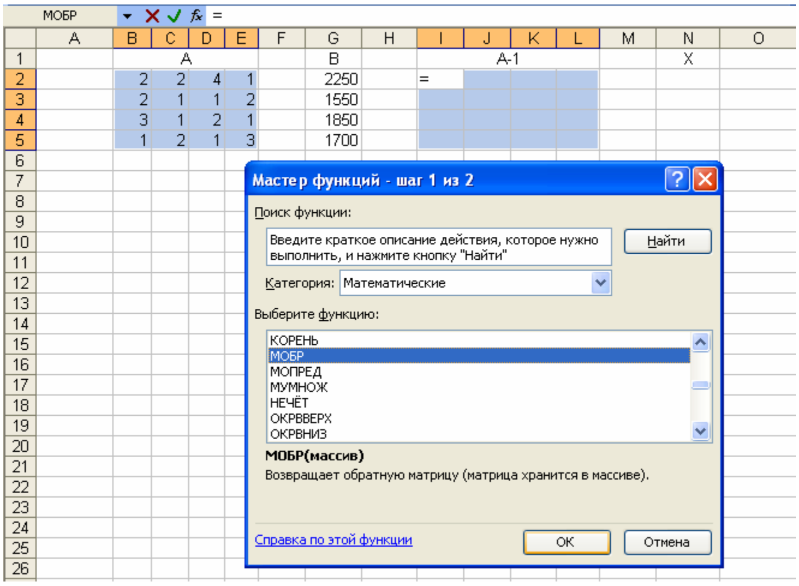
3.1.A matrica elyemyentlari ajratiladi;

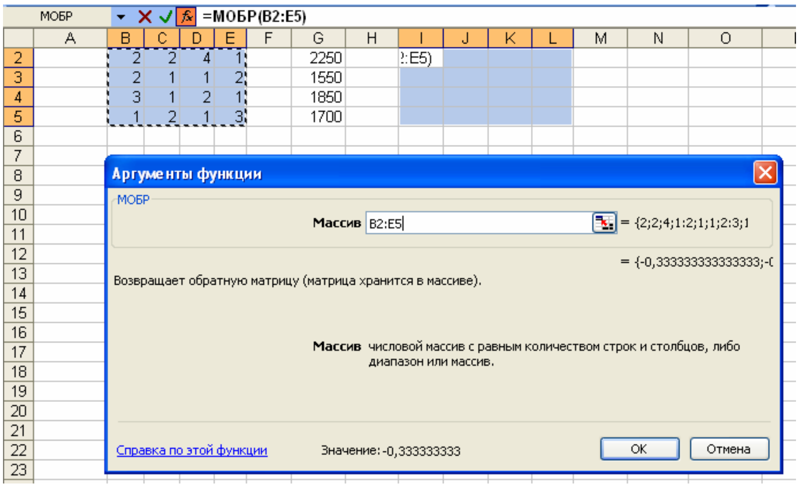
3.2.Ctrl tugmasini bosgan holda elyektron jadvaldan A^{-1} tyeskari matrica elyemyentlari chiqishi kyerak bo’lgan joylar ham ajratiladi;

3.3.”Vstavka funkcii (*fx*)” piktogrammasi bosiladi;

3.4.Muloqat oynasining katyegoriyalar bo’limidan matyematika, kyeyin darchadan MOBR funkciyasi tanlanib OK tugmasi bosiladi;

3.5.YAna A matrica elyemyentlari ajratilib massiv adryesi aniqlanadi va Ctrl+Shift+Enter tugmalari baravar bosilani. Natijada A^{-1} tyeskari matrica elyemyentlari hosil bo’ladi. Rasmda bu jarayon ko’rsatilgan.





4.Topilgan A^{-1} matrica B vyektorga ko'paytiriladi.

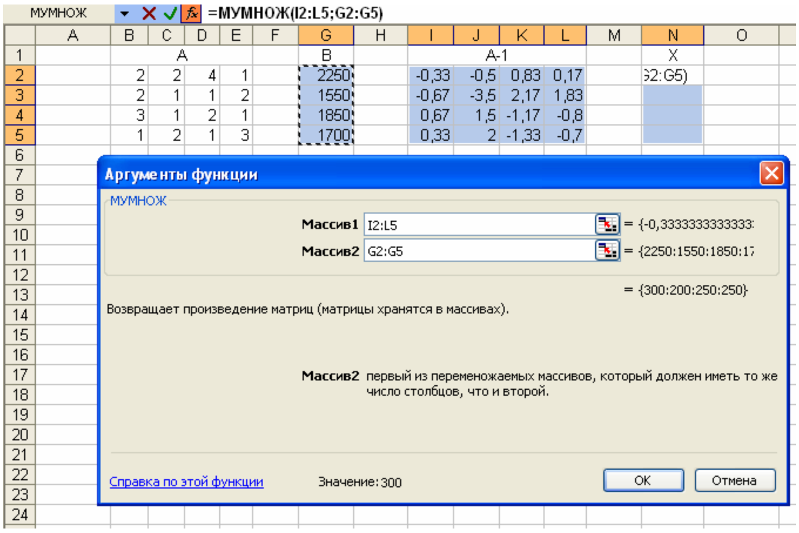
4.1.A^{-1} tyeskari matrica elyemyentlari ajratiladi;

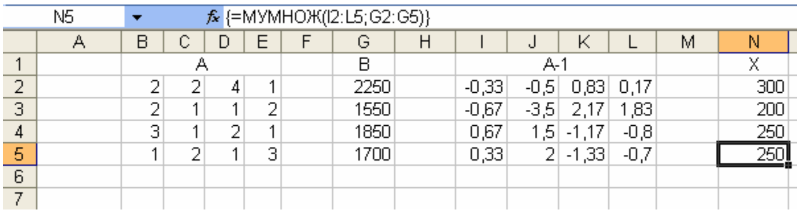
4.2.Ctrl tugmasi bosilgan holda B vyektor elyemyentlari kyeyin hisoblanishi kyerak bo'lgan X vyektor elyemyentlari ajratiladi;

4.3."Vstavka funkcii (*fx*)" piktogrammasi bosiladi;

4.4.Muloqat oynasining katyegoriyalar bo'limidan matyematika, kyeyin darchadan MUMNOJ funkciyasi tanlanib OK tugmasi bosiladi;

4.5.Oldin A^{-1} matrica elyemyentlari ajratilib massiv adryesi aniqlanadi, kyeyin B vyektori elyemyentlari ajratilib massiv adryesi aniqlanadi va Ctrl+Shift+Enter tugmalari baravar bosiladi. Natijada X vyektorida hosil bo'ladi. Rasmda bu jarayon ko'rsatilgan.





	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			A				B			A-1				X
2		2	2	4	1		2250		-0,33	-0,5	0,83	0,17		300
3		2	1	1	2		1550		-0,67	-3,5	2,17	1,83		200
4		3	1	2	1		1850		0,67	1,5	-1,17	-0,8		250
5		1	2	1	3		1700		0,33	2	-1,33	-0,7		250

Dyemak, firma tomonidan bir kunda ishlab chiqiladigan mahsulotlar hajmi mos ravishda A1 mahsulotdan 300, A2 mahsulotdan 200, A3 mahsulotdan 250 va A4 mahsulotdan 250 tyeng ekan.

Gauss usuli

Tizim matricasi A ozod hadlar ustuni bilan kyengaytirilsa, ya'ni n+1 ustun qilib ozod hadlar kiritilsa, uni

$$A_1X=0$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda A_1 kyengaytirilgan matrica, uning elyemyentlari i=1,2,..,n; j=1,2,..,n uchun A matica elyemyentlariga, n+1 –ustuni ozod hadlarga tng qilib olingan, ya'ni $a_{ij}=a_{ij}$, j=1,2,..,n; $a_{in+1}=-b_i$, i=1,2,..,n.

YUqoridagi (1) tyenglamalar tiziminip yechish ikki bosqichda bajariladi.

Birinchi bosqich. Bu bosqich Gauss usulining to'g'ri yo'li dyeb atalib, bunda tyenglamalar tizimi matricasi A_1 uch burchakli holga kyeltiriladi, ya'ni

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{1n-1}^1 & a_{1n}^1 & a_{1n+1}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n-1}^2 & a_{2n}^2 & a_{2n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a_{n-1n}^{n-1} & a_{n-1n+1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & a_{nn+1}^{n} \end{pmatrix}$$

Bu matrica elyemyentlari k=1,2,..,n uchun kyetma-kyet

$$a_{kj}^k=\frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}};\;\; a_{ij}^k=a_{ij}^{k-1}-a_{kj}^{k-1}\cdot a_{ik}^{k-1};\;\; i=\overline{k+1,n};\;\; j=\overline{k+1,n+1}$$

Formulalar bilan hisoblanadi.

Ikkinchi bosqich. Bu bosqichda no'malumlar kyetma-kyet quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$x_i = a_{in+1}^i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^i x_j; \;\; i = \overline{n,1}$$

Jardan-Gauss usuli

Tyenlamalar sistyemasini yechishning Jardan-Gauss usulini ko'rib chiqamiz. Jardan-Gauss usuli chiziqli tyenglamalar sistyemasini yechish uchun zarurat tug'ulganda A^{-1} tyeskari matricani topish uchun eng qulay usullardan biridir. Bu usul mohiyati quyidagidan iborat: Sistyemadagi birinchi tyenglamadan ixtiyoriy 0 dan farqli koefficiyentli nomalum tanlanadi va birinchi tyenglamaning hamma hadlari shu koefficiyentga bo'linadi. Birinchi tyenglama yordamida tanlangan noma'lum boshqa hamma tyenlamalardan yo'qotiladi. Ikkinchi tyenglamadan ixtiyoriy 0 dan farqli koefficiyentli nomalum tanlanadi va ikkinchi tyenglamaning hamma hadlari shu koefficiyentga bo'lib chiqiladi. Bu tyenglama yordamida tanlangan noma'lum qolgan hamma tyenlamalardan yo'qotiladi va hokazo.

Tizimni yechish jarayonida quyidagi hollar yuz byerishi mumkin:

- birorta tyenglamaning chap tomoni 0 ga aylanib, o'ng tomoni 0 dan farqli bo'lib qolshi mukin. Bu holda tizim yechimga ega bo'lmaydi.
- birorta tyenglamaning chap tomoni va o'ng tomoni ham 0 ga aylanib, qolshi mukin. Bu tyenglamani noma'lumlarning ixtiyoriy son qiymatlari qanoatlantirganligi sabab uni tashlab yuborish mumkin.
- har bir tyenglamadan bittadan noma'lum topilgandan so'ng tizim yechimi hosil bo'ladi.

Misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

1)Birinchi tyenglamadagi x_1 ni boshqa tyenglamalardan yo'qotish uchun 1-tyenglamani 2 ga ko'paytirib 2-tyenglamaga, (-1)ga ko'paytirib, 3-tyenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi tizim hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$$

2)Ikkinchi tyenglamadan x_2 ni tanlab, bu tyenglamani x_2 oldidagi koefficiyent 3ga bo'lamiz. Bu yerda koefficiyent 3 ni *aniqlovchi koefficiyent* dyeb ataymiz. Xosil bo'lgan tyenglamani (-1)ga ko'paytirib birinchi tyenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi sistyemani xosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{3}, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{7}{3}, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$$

3)Bu sistyemadan 3- tyenglamani x_3 oldidagi koefficiyent 2 ga bo’lamiz. Xosil bo’lgan tyenglamani $\frac{2}{3}$ ga ko’paytirib 1-tyenglamaga va $\frac{1}{3}$ ga ko’paytirib, 2-tyenglamaga qo’shamiz.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 1, \\ \quad x_2 \quad = 3, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Jordan – Gauss usuli bo’yicha qilgan hamma ishlarimiz natijasida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricani

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matricaga aylantirdik. Bundan bajargan hamma algyebraik almashtirishlarimiz byerilgan A matricani A^{-1} matricaga ko’paytirishga ekvivalyent ekanligi ko’rinadi.

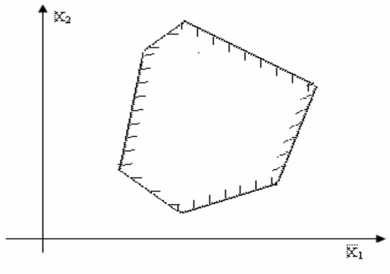
3.2.CHiziqli dasturlash masalasini yechishning grafik usuli

CHiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish uni gyeomyetrik tasvirlashga asoslangan. Ikki o’lchovli fazoda (tyekislikda) byerilgan chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun grafik usulni qo’llash mumkin. N>2 o’lchovli fazoda byerilgan masalani grafik usul bilan yechish noqulay, chunki bu holda, yechimlardan tashkil topgan qavariq ko’pburchakni yasash qiyinlashadi.

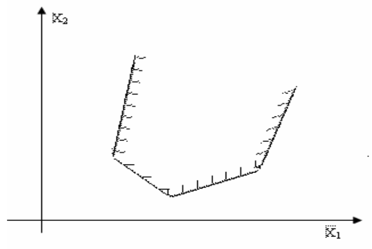
n=2 bo’lganda tyengsizliklar sistyemasidan quyidagi sistyemani hosil qilamiz:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \le b_i, \ \ i = \overline{1,m}; \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

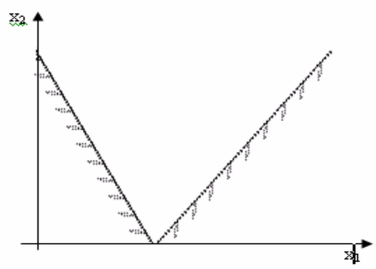
Bu tyengsizliklarning har biri $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ to’gri chiziq bilan, yechimlarning manfiy bo’lmaslik shartlari $x_j \ge 0$ $j=1;2$ esa $x_j=0$ to’g’ri chiziq bilan chyegaralangan yarim tyekisliklar bo’ladi. Tyengsizliklar sistyemasi birgalikda bo’lganligi uchun hyech bo’lmaganda bitta yechimga ega bo’ladi, ya’ni chyegaraviy to’g’ri chiziqlar bir-biri bilan kyesishib, mumkin bo’lgan (o’rinli) yechimlar to'plamini hosil qiladi. Dyemak, n=2 bo'lganda mumkin bo'lgan yechimlar to'plami ko'pburchakning nuqtalaridan iborat bo'ladi.



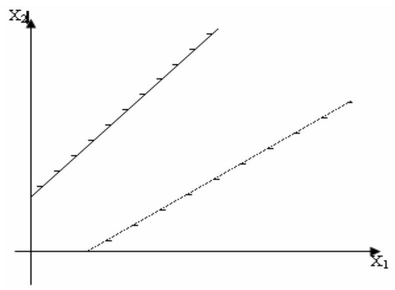
Rasm 1



Rasm 2



Rasm 3



Rasm 4

Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (to'plami) qavariq ko'pburchak (1-rasm), ko'pburchakli qavariq soha (2-rasm), yagona nuqta (3-rasm) va bo'sh to'plam (4-rasm) bo'lishi mumkin.

CHiziqli dasturlash masalasini ikki o'zgaruvchi uchun quyidagicha yozamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

Tyengsizliklarning har biri chiziqlar bilan chyegaralangan yarim tyekisliklarni ifodalaydi. CHiziqli funkciya ham ma'lum bir o'zgarmas qiymatda to'g'ri chiziqni ifodalaydi $c_1x_1+c_2x_2=const$.

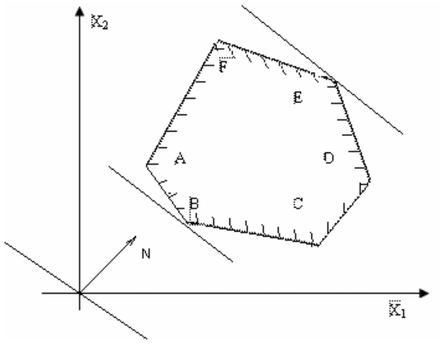
Faraz qilaylik, mumkin bo'lgan yechimlar qavariq ko'pburchakdan tashkil topgan bo'lsin. YEchimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun to'g'ri chiziqlar bilan chyegaralangan ko'pburchakni yasaymiz. Bu ko'pburchak ABCDEF bo'lsin (5-rasm). Maqsad funkciyasi X_1OX_2 tyekislikda parallyel to'g'ri chiziqlarni byeradi. CHiziqli funkciyani ixtiyoriy o'zgarmas c_0 songa tyen dyeb olaylik. Unda

$$c_1x_1+c_2x_2=const= c_0$$

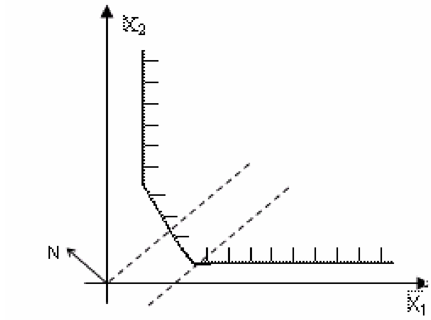
to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Unga pyerpyendikulyar bo'lgan $N(c_1,c_2)$ vyektor z-funkciyaning o'sish yo'nalishini byelgilaydi (5-rasm).

Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chyegaralanmagan bo'lsa ikki hol bo'lishi mumkin:

1-hol. $c_1x_1+c_2x_2=const$ to'g'ri chiziq $N(c_1,c_2)$ vyektor vyektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kyesib o'tadi. Ammo na minumum yoki maksimum qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funkciya quyidan va yuqoridan chyegaralanmagan bo'ladi (6-rasm).

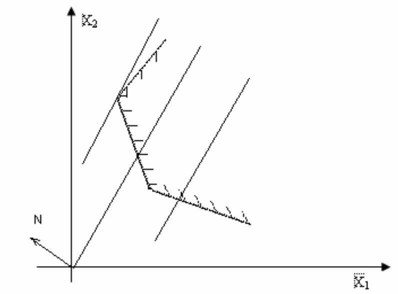


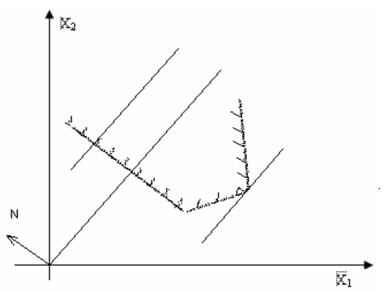
Rasm 5

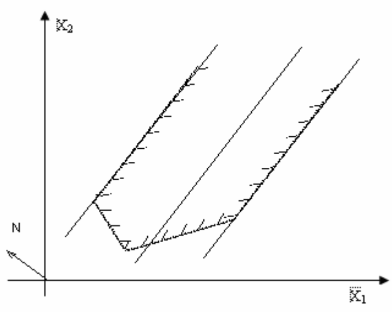


Rasm 6

2-hol. $c_1x_1+c_2x_2=const$ to'g'ri chiziq $N(c_1,c_2)$ vyektor bo'yicha siljib borib qavariq ko'pburchakning birorta chyetki nuqtasida minumum yoki maksimum qiymatga erishadi. Bunday holda chiziqli funkciya yuqoridan chyegaralangan, quyidan esa chyegaralanmagan (rasm 7) yoki quyidan chyegaralangan yuqoridan esa chyegaralanmagan bo'lishi mumkin (rasm 8). Ba'zi chiziqli funkciya yuqoridan ham, quyidan ham esa chyegaralangan bo'lishi mumkin (rasm 9).







Rasm 7 Rasm 8 Rasm 9

CHiziqli programalash masalasini grafik usulda yechish quyidagi kyetma-kyetlikda bajariladi:

1.Tyenglamalar yoki tyengsizliklar sistyemasining grafiklari quriladi .

2.Har bir tyengsizlikning tyekislikdagi aniqlanish tomonlari (sohasi) byelgilanadi.

3.Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi ajratiladi .

4.N=(c_1,c_2) vyektori quriladi va unga (0,0) nuqtada pyerpyendikulyar o'tkaziladi.

5.Ko'pburchakdan pyerpyendikulyarga parallyel chiziqni vyektor yo'nalishi bo'yicha paralyel siljitilib ekstryemal nuqta topiladi. Agar Z funkciyaning minimal qiymatiga mos nuqtani topish kyerak bo'lsa, u holda bu nuqta p vyektorga pyerpyendikulyarning shu vyektor yo'nalishi bo'yicha siljitganda mumkin bo'lgan nuqtalar sohasining birinchi nuqtasiga mos kyeladi. Maksimum qiymat byeruvchi nuqta esa eng oxirgi nuqta bo'ladi. Agar vyektor qiymati (manfiy ishora) -N bo'lsa yuqoridagi holning tyeskarisi bo'ladi.

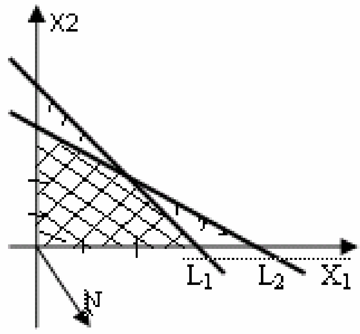
6.Optimal nuqta kordinatasi topiladi va Z funkciya qiymati hisoblanadi.

Misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \quad (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$Z = 2x_1 - 5x_2 \to \max$$



Rasm 10.

Byerilgan tyengsizliklarning grafiklarini X_1OX_2 tyekislikda quramiz va mumkin bo'lgan yechimlar soxasini aniqlaymiz (rasm 10). Soha grafigida shtrixlangan joyni aniqlaydi. CHunki bu joy hamma tyengsizliklarni qanoatlantiruvchi sohadir. Mumkin bo'lgan yechimlar soxasidan optimal yechimni aniqlaymiz. Aniqlash uchun (0,0) nuqtadan o'tuvchi N=(2,-5) vyektorini yasaymiz va uning yo'nalishini aniqlaymiz. (0,0) nuqtada bu vyektorga N pyerpindikulyarini o'tkazamiz va uni vyektor yo'nalishi bo'yicha siljitamiz. Soha bilan pyerpindikulyarning oxirgi kyesishish nuqtasi A nuqta bo'ladi. Bu nuqta Z funkciyasiga maksimal qiymat byeruvchi nuqtadir. Bu nuqta (3,0) bo'lib uning koordinatasi x_1=3, x_2=0 masalaning yechimi bo'ladi. Grafikdan ko'rinib turibdiki z funkciyaga minumum qiymat byeruvchi nuqta esa (0,3).

Amaliy mashg'ulot uchun misollar

1.Quyidagi chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yeching;

1. $x_1+2x_2 \le 4$
   $2x_1+x_2 \le 4$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

2. $3x_1+x_2 \ge 6$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= -x_1-x_2 \Rightarrow \max$

$Z= -x_1+x_2 \Rightarrow max$

3. $4x_1+3x_2 \le 12$
   $3x_1+4x_2 \le 12$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= 2x_1-5x_2 \Rightarrow max$

4. $3x_1+x_2 \ge 6$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= -x_1-x_2 \Rightarrow min$

5. $x_1+2x_2 \le 6$
   $2x_1+x_2 \le 6$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= -x_1+x_2 \Rightarrow max$

6. $3x_1-x_2 \ge 9$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= x_1+x_2 \Rightarrow min$

7. $x_1+3x_2 \le 6$
   $3x_1+x_2 \le 6$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= x_1-x_2 \Rightarrow max$

8. $3x_1-x_2 \ge 9$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= x_1+x_2 \Rightarrow max$

9. $x_1+2x_2 \le 6$
   $2x_1+x_2 \le 6$
   $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
   $Z= -x_1+x_2 \Rightarrow max$

10. $x_1+3x_2 \ge 6$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= -x_1-x_2 \Rightarrow min$

11. $x_1+3x_2 \le 6$
    $3x_1+x_2 \le 6$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= x_1-x_2 \Rightarrow max$

12. $3x_1-x_2 \ge 6$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= -x_1-x_2 \Rightarrow max$

13. $x_1+2x_2 \le 5$
    $2x_1+x_2 \le 5$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= x_1-x_2 \Rightarrow max$

14. $-3x_1-x_2 \ge 6$
    $x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
    $Z= x_1+x_2 \Rightarrow min$

15. $x_1+2x_2 \le 2$
    $2x_1+x_2 \le 2$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= x_1-x_2 \Rightarrow max$

16. $-2x_1-x_2 \ge 4$
    $x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
    $Z= x_1+x_2 \Rightarrow min$

17. $x_1+x_2 \le 1$
    $x_1-x_2 \le 1$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
    $Z= x_1-2x_2 \Rightarrow max$

18. $-3x_1-x_2 \ge 6$
    $x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
    $Z= x_1+x_2 \Rightarrow min$

19. $x_1+2x_2 \le 2$
    $2x_1+x_2 \le 2$
    $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

20. $-2x_1-x_2 \ge 4$
    $x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
    $Z= x_1+x_2 \Rightarrow min$

$Z = x_1 - x_2 \Rightarrow max$

21. $x_1 - x_2 \le 1$
$5x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
$Z = x_1 + 2x_2 \Rightarrow max$

22. $-3x_1 - x_2 \ge 4$
$x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
$Z = x_1 + 2x_2 \Rightarrow min$

24. $x_1 + x_2 \le 12$
$x_1 - x_2 \le 8$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
$Z = x_1 - 2x_2 \Rightarrow max$

25. $-x_1 - 4x_2 \ge 4$
$x_1 \ge 1;\ x_2 \ge 1$
$Z = x_1 + x_2 \Rightarrow min$

2.Quyidagi chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yeching;

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$f = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$f = 2x_1 + x_2 \to \max$$

3. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 0 \le x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, \end{cases}$$
$$f = -x_1 + x_2 \to \min$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 0 \le x_1 \le 6, \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$f = -3x_1 + x_2 \to \max$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ 4x_1 - x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

6.. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$
$$f = -3x_1 + x_2 \to \min$$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 4 \end{cases}$

$f = x_1 + 3x_2 \to \min$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 6 \end{cases}$

$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

$f = -x_1 + x_2 \to \min$

3.3.Simplyeks jadval usuli

CHiziqli dasturlash masalasining optimal planini uning barcha planlaridan tashkil topgan qavariq to'plamning chyetki nuqtalari orasidan qidirish kyerak. Bunday nuqtalar soni yoki boshqacha aytganda tayanch planlar soni *n* dan *m* tadan tuzilgan C_n^m gruppalash orqali aniqlanadi. Masaladagi nomalumlar soni *n* va tyenglamalar soni *m* katta bo'lganda barcha (mumkin bo'lgan) tayanch planlarning optimalligini tyekshirib chiqish ancha qiyin bo'ladi. SHuning uchun tayanch planlarni tartib bilan tyekshirib chiqib, ular ichidan optimal planni aniqlab byeruvchi yechish sxyemasining byerilishi talab qilinadi.

CHiziqli dasturlash masalasini yechishning bunday sxyemalaridan biri bu -Simplyeks usulidir. Bu usul boshlang'ich tayanch plandan chyekli sondagi ityeraciyadan kyeyin optimal planni hosil qilish yo'lini ko'rsatadi va har bir navbatdagi ityeraciya oldingisiga nisbatan optimal planga yaqinroq planni byeradi. YEchish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning chiziqli funkciyasi chyekli ekstimum qiymatga ega emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi. Bu usul hozirgi kunda kyeng miqiyosda ishlatilib SHEHMlar uchun uning amaliy pakyet dasturlari ishlab chiqilgan.

Simplyeks jadval tuzish

Simplyeks usuli chiziqli dasturlash masalasini yechishning asosiy usullaridan biri bo'lib, kyetma kyet yaqinlashish usuli yordamida $x_1, x_2, \ldots x_n$ o'zgaruvchilarning shunday optimal qiymatini topadiki, bu qiymatlar maqsad funkciyasigi maksimal (yoki minimal) qiymat byeradi.

Quyidagi funkcionalga maksimum qiymat byeruvchi chiziqli dasturlash masalasi byerilgan bo'lsin.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

Masalani yechish uchun simplyeks jadval quramiz va simplyeks usuli g'oyasini byerish uchun byerilgan masalani quyidagicha kanonik formada yozamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1s}x_s + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2s}x_s + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{ms}x_s + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}) \quad (j=\overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

Bu yerda x_{n+i} - bazis o'zgaruvchilar dyeyiladi. Ularni qulaylik, hamda boshqa o'zgaruvchilardan farqlash uchun mos ravishda y_1,y_2, . . .y_m dyeb byelgilaymiz va yana quyidagi byelgilashlarni kiritamiz b_{i0}=b_i; $b_{i,j}$=$a_{i,j}$; b_{0j}=c_j. Bu byelgilashlar asosida simplyeks jadval tuzamiz.

BO'	1	$-x_1$	$-x_2$	. . .	$-x_s$	. . .	$-x_n$
y_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	. . .	b_{1s}	. . .	b_{1n}
y_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	. . .	b_{2s}	. . .	b_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_s	b_{r0}	b_{r1}	b_{r2}	. . .	$\mathbf{b_{rs}}$	. . .	b_{rn}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	. . .	b_{ms}	. . .	b_{mn}
Z	b_{00}	b_{01}	b_{02}	. . .	b_{0s}	. . .	b_{0n}

CHiziqli dasturlash masalasini simplyeks usul yordamida yechish ikki bosqichdan iborat:

1.Boshlang'ich tayanch planni topish.

2.Tayanch planlar ichidan masalaning optimal planini topish.

Masalaning tayanch planini tuzish

Boshlang'ich tayanch planni topish quyidagi algoritm bo'yicha bajariladi:

1.Simplyeks jadvaldan hal qiluvchi elyemyentni topish:

1.1.Hal qiluvchi elyemyentni topish oldin hal qiluvchi ustunni topishdan boshlanadi. Buning uchun ozod hadlar ustuniga qaraladi. Agar ozod xadlar ustunidagi elyemyentlar hammasi musbat bo'lsa, bu boshlanQich plan tayanch plan bo'ladi va ikkinchi etapga o'tiladi. Agar manfiy elyemyent mavjud bo'lsa ulardan modul bo'yicha eng kattasi tanlanadi(agar bitta bo'lsa shu elyemyent o'zi olinadi). Misol uchun aytaylik bu elyemyent b_{r0} bo'lsin. SHu b_{r0} elyemyent turgan r satr qaraladi. Agar satr elyemyentlaridan xammasi musbat bo'lsa, masalaning yechimi mavjud bo'lmaydi (bu holda hisoblashlar shu joyda to'xtatiladi). Agar satrda manfiy elyemyent mavjud bo'lsa, ulardan modul bo'yicha eng kattasi tanlanadi (agar bitta bo'lsa o'zi olinadi). SHu elyemyent turgan ustun hal qiluvchi ustun dyeyiladi. Misol uchun bu s-chi ustun bo'lsin.

1.2.Hal qiluvchi satr topiladi. Ozod xadlarni hal qiluvchi ustun elyemyentlarga bo'lib chiqiladi va ulardan musbatlarining eng kichigi tanlanadi, ya'ni

$$\min\left\{ \frac{b_{10}}{b_{1s}}; \frac{b_{20}}{b_{2s}}; \dots ; \frac{b_{r0}}{b_{rs}}; \dots ; \frac{b_{m0}}{b_{ms}} \right\}.$$

Aytaylik, bu nisbatlar ichida musbatlarning eng kichigi b_{rs}/b_{r0} bo'lsin. U holda shu b_{rs} elyemyent turgan satr hal qiluvchi satr dyeyiladi, b_{rs} elyemyentning o'zi esa hal qiluvchi elyemyent bo'ladi.

2.Hal qiluvchi ustun va satr o'zgaruvchilari o'rinlari almshtiriladi, (yaьni x_s va y_s yangi jadvalda o'rinlari almashadi).

3.Jadvalda simplyeks almashtirish bajariladi.

3.1.Hal qiluvchi ustun elyemyentlari hal qiluvchi elyemyentga bo'lib chiqilib yangi jadvalga yoziladi, ya'ni $b'_{is} = -b_{is} / b_{rs} \ (i \neq r)$.

3.2.Hal qiluvchi satr elyemyentlari xal qiluvchi elyemyentga bo'lib chiqilib yangi jadvalga yoziladi, ya'ni $b'_{rj} = b_{rj} / b_{rs} \quad (j \neq s)$.

3.3.Hal qiluvchi elyemyent 1 ga tyenglashtirilib o'ziga bo'linadi, ya'ni $b'_{rs} = 1 / b_{rs}$.

3.4.YAngi simplyeks jadvalning qolgan elyemyentlari quyidagi formula orqali topiladi.

$$b'_{ij} = \frac{b_{ij} b_{rs} - b_{is} b_{rj}}{b_{rs}} \quad \text{yoki} \quad b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{is} b_{rj}}{b_{rs}}; \quad i \neq r, \ j \neq s$$

YAngi jadvalda b'_{ij} -elyemyentni hisoblashda eski jadvaldan b_{ij}, b_{is} ,b_{rj}, b_{rs} -elyemyentlarini topish quyidagicha bo'ladi:

b_{ij} - b'_{ij} elyemyentning eski jadvaldagi unga mos elyemyent;

b_{is} -b_{ij} elyemyent turgan satr bilan b_{rs} hal qiluvchi elyemyent ustuni kyesishmasidagi elyemyent;

b_{rj} -b_{ij} elyemyent turgan ustun bilan b_{rs} hal qiluvchi elyemyent satri kyesishmasidagi elyemyent;

b_{rs} - hal qiluvchi elyemyent.

BO'	*1*	*-x₁*	*-x₂*	. . .	*-y_r*	. . .	*-x_n*
y_1	b'_{10}	b'_{11}	b'_{12}	. . .	b'_{1s}	. . .	b'_{1n}
y_2	b'_{20}	b'_{21}	b'_{22}	. . .	b'_{2s}	. . .	b'_{2n}

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_s	b'_{r0}	b'_{r1}	b'_{r2}	. . .	b'_{rs}	. . .	b'_{rn}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	b'_{m0}	b'_{m1}	b'_{m2}	. . .	b'_{ms}	. . .	b'_{mn}
Z	b'_{00}	b'_{01}	b'_{02}	. . .	b'_{0s}	. . .	b'_{0n}

4.YAngi topilgan simplyeks jadvalda tayanch plan mavjud bo'lsa ikkinchi bosqichga, ya'ni optimal planni topishga o'tiladi, aks holda yuqoridagi procyess yangi jadval uchun toki tayanch plan topilguncha qayta takrorlanadi.

Masalaning optimal planini topish

Agar 1 bosqichdan olingan tayanch planning simplyeks jadvaldagi Z-satr elyemyentlari (ozod hadi b'_{00} dan tashqari) hammasi musbat bo'lsa, bu olingan boshlang'ich tayanch plan yagona va u masalaning optimal plani (yechimi) bo'ladi. Agar Z satrdagi hamma musbat elyemyentlaridan kamida bittasi nulga tyengi bo'lsa, u holda masalaning chyeksiz ko'p optimal plani mavjud bo'ladi. Agar Z satrdagi elyemyentlardan hyech bo'lmaganda bittasi manfiy bo'lsa, optimal plan quyidagi algoritim bo'yicha topiladi:

1. Hal qiluvchi elyemyentni topish.

1.1.Hal qiluvchi ustun topiladi. Z-qatordagi manfiy elyemyentlarning modul bo'yicha eng kattasi (bitta bo'lsa o'zi) tanlanadi. SHu elyemyent turgan ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi.

1.2.Hal qiluvchi satr topiladi. Ozod hadlar elyemyentlari hal qiluvchi ustun elyemyentlariga bo'lib chiqiladi va ulardan musbatlarining eng kichigi olinadi, ya'ni birinchi bosqichning 1.2 punktidagi kabi. Bu songa mos kyeluvchi ustundagi elyemyent hal qiluvchi elyemyent va shu elyemyent turgan satr esa hal qiluvchi satr bo'ladi.

2.Hal qiluvchi satr va ustun o'zgaruvchilari o'z joylarini almashtiradi (agarda hali ular almashtirilmagan bo'lsa).

3.Jadvalda simplyeks almashtirish bajariladi. Simplyeks almashtirish 1-bosqichdagi 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 punktlar kabi bajariladi.

4.YAngi topilgan jadvalning Z satri qaraladi. Agar Z qatordagi hamma elyemyentlar musbat bo'lsa, olingan oxirgi plan masalaning optimal plani bo'ladi. Aks holda yuqoridagi 1,2,3 punktlar yana takrorlanadi, toki optimal plan topilguncha.

Izoh: CHiziqli dasturlash masalasida, agar maqsad funkciyasining minumimi izlansa yuqoridagi 1-chi bosqich to'lig'icha o'rinli bo'lib, 2-bosqichda esa faqat Z -qator elyemyentlari manfiy holatga kyeltirilishi kyerak, ya'ni tyeskari holat bo'ladi.

1-misol

$$z=5x_1-x_2+3x_3$$

chiziqli funkciyaga maksimum qiymat byeruvchi

$$x_1+x_2+x_3\leq 2$$

$$4x_1+2x_2+x_3\leq 3$$
$$x_1-x_2+2x_3\leq -1$$
$$-3x_1+2x_2-2x_3\leq 5$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

chyegaraviy sistyemasining mumkin bo'lgan yechimlari sohasida noma'lumlar topilsin.

CHyegaraviy sistyemani kanonik ko'rinishda quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$4x_1+2x_2+x_3+x_5=3$$
$$x_1-x_2+2x_3+x_6=-1$$
$$-3x_1+2x_2-2x_3+x_7=5$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

Tyenglamada bazis o'zgaruvchilarni simplyeks o'zgaruvchilardan farqlash uchun $x_4=u_1$, $x_5=u_2$, $x_6=u_3$, $x_7=u_4$ byelgilashlarni kiritamiz va Simplyeks jadval tuzamiz.

So' / Bo'	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
u_1	2	1	1	1
u_2	3	4	2	1
u_3	-1	1	-1	2
u_4	5	-3	2	-2
Z	0	-5	1	-3

O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti byerilganligini hisobga olib, to'g'ridan-to'g'ri tayanch yechimni topishga kirishamiz. Ozod hadlar ichida -1 manfiy ishorali koefficiyent bor. SHu qatordan ishorasi manfiy bo'lgan modul bo'yicha eng katta elyemyentni topamiz. U x_2 ustunidagi -1 elyemyentdir. Qoidaga binoan musbat nisbatlar ichidan eng kichigini topamiz:

$$+\min\{2/1,\ 3/2,\ -1/-1,\ 5/2\}=1/1$$

Dyemak, unga mos elyemyent x_2 ustunidagi -1 elyemyen. Bu elyemyent hal qiluvchi elyemyent bo'ladi. Endi Simplyeks almashtirish qilib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

So' / Bo'	1	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$
u_1	1	2	1	3
u_2	1	6	2	5
x_2	1	-1	-1	-2
u_4	3	-1	2	2
z	-1	-4	1	-1

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki ozod hadlar musbat, shu sabab tayanch plan mavjud. Endi optimal yechimini topish uchun Z qatoriga qaraymiz. Bu qatorda ikkita manfiy ishorali koefficiyent bor. Ulardan modul bo'yicha qiymati katta bo'lgan koefficiyentni tanlab olamiz, u -4 elyemyentidir. Qoidaga binoan hal qiluvchi elyemyentni aniqlab yangi jadval tuzamiz:

$$+\min\{1/2,\ 1/6,\ 1/-1,\ 3/-1\}=1/6$$

Unga mos elyemyent x_1 ustunidagi 6 elyemyen. Bu elyemyent hal qiluvchi elyemyent bo'ladi. Endi Simplyeks almashtirish qilib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

So' \ Bo'	1	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$
U_1	2/3	-1/3	1/3	4/3
X_1	1/6	1/6	1/3	5/6
X_2	7/6	1/6	-2/3	-7/6
U_4	19/6	1/6	7/3	17/6
Z	-1/3	2/3	7/3	7/3

Ozod hadlar va Z qatoridagi koefficiyentlar musbat. Dyemak, optimal yechim topildi, ya'ni $u_2=u_3=x_3=0$ va $x_1=1/6$, $x_2=7/6$ bo'lganda Z ning maksimal qiymati -1/3 ga tyeng bo'ladi, ya'ni z=-1/3.

2-misol.

Byerilgan chiziqli programmalash masalasining maqsad funkciyasiga min qiymat byeruvchi yechimni toping.

$$x_1+x_2\leq 2$$
$$2x_1-x_2\geq 2$$
$$\alpha_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$
$$z=x_1-x_2\rightarrow \min$$

CHyegaraviy sistyemani kanonik ko'rinishda quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1+x_2+x_3=2$$
$$-2x_1+x_2+x_4=-2$$

Simplyeks jadval quramiz. Birinchi jadvalda ozod hadlar ichida manfiy elyemyent mavjud. SHuning uchun tayanch planni topamiz. Bu jadvaldan hal qiluvchi elyemyentni topib, Simplyeks almashtirish bajaramiz va ikkinchi jadvalga ega bo'lamiz. Ikkinchi jadvalda tayanch plan mavjud. SHu sabab undan optimal planni topishga o'tamiz.

So' \ Bo'	1	$-x_2$	$-x_2$
y_1	2	1	1
y_2	-2	-2	1
z	0	-1	1

So' \ Bo'	1	$-y_2$	$-x_2$
y_1	1	1/2	3/2
x_1	1	-1/2	-1/2
z	1	-1/2	1/2

Optimal planni topish uchun Z- qator elyemyentlarini manfay holga kyeltirish kyerak. Buning uchun jadvaldan hal qiluvchi elyemyentni topamiz.

Hal qiluvchi elyemyent 3/2. Simplyeks almashtirish qilib quyidagi jadvalga ega bo'lamiz.

So' / Bo'	1	$-y_2$	$-y_1$
x_2	2/3	1/3	2/3
x_1	4/3	-5/6	-1/3
Z	2/3	-7/6	-1/3

Jadvaldan ko'rinib turibdiki maqsad funkciyasiga minimal qiymat byeruchi nuqta mavjud, ya'ni:

$x_1=4/3$; $x_2=2/3$; $z_{min}=2/3$.

Amaliy mashg'ulot uchun misollar

1. $5x_1+4x_2\leq 20$
$2x_1+3x_2\leq 24$
$2x_1+3x_2\leq 20$
$x_1\geq 0,\ x_2\leq 0$
$F(x_1;\ x_2)=3x_1+2x_2$

2. $-5x_1+4x_2\leq 20$
$-2x_1-3x_2\leq -6$
$x_1-3x_2\leq 3$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=2x_1+3x_2-1$

3. $5x_1-4x_2\geq -20$
$-2x_1-3x_2\geq -24$
$-x_1+3x_2\geq -3$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=x_1+3x_2+2$

4. $-2x_1-x_2\leq 2$
$x_1-2x_2\leq 2$
$x_1+x_2\leq 5$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=-x_1+x_2$

5. $2x_1+x_2\geq 2$
$x_1-x_2\leq 4$
$-3x_1+3x_2\geq 12$
$x_1+x_2\leq 8$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=-4x_1-2x_2$

6. $x_1+x_2\geq 3$
$-x_1-2x_2\geq 6$
$x_1+x_2\geq 12$
$x_1-3x_2\geq 3$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=x_1+x_2$

7. $3x_1+x_2\geq 3$
$6x_1\ 14x_2\geq 21$
$x_1\leq 3{,}5$
$2x_2\leq 9$
$3x_1-5x_2\leq 10$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=-x_1-x_2$

8. $-x_1+x_2\leq 2$
$x_2\geq 2$
$-2x_1+x_2\geq -6$
$x_2\leq 5{,}5$
$x_1\geq 2$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$
$F(x_1;\ x_2)=x_1+x_2$

9. $3_1-x_2\leq 1$

10. $x_1-x_2\geq -2$

$5x_1 - 3x_2 \le 15$
$x_2 \le 2,5$
$2x_1 - x_2 \ge -2$
$x_1 + x_2 \ge 1$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = x_1 + 3x_2 - 2$

$x_1 + 3x_2 \ge 6$
$x_1 + 6x_2 \le 6$
$10x_1 + 7x_2 \le 80$
$- x_1 + 15x_2 \ge 3$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 2x_1 + x_2$

11. $2x_1 + 2x_2 \le 13$
$x_2 \le 3$
$x_1 \le 4$
$3x_1 + 2x_2 \ge 6$
$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = x_1 - 3x_2 - 3$

12. $x_1 + x_2 \ge 3$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$x_1 + x_2 < 6$
$2x_1 + x_2 \le 10$
$x_1 + 3x_2 \le 9$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 1$

13. $x_1 - x_2 \ge 5$
$4x_1 - 2x_2 \ge 13$
$x_1 + 4x_2 \ge 8$
$x1 + 4x_2 \le 4$
$2x_1 + 3x_2 \le 24$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 2x_1 + 3\ x_2 - 7$

14. $x_1 - x_2 \ge 1$
$-3x_1 + 10x_2 \ge 2$
$x_1 + x_2 \le 11$
$3x_2 - x_2 \le 12$
$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = x_1 + x_2$

15. $2x_1 + 3x_2 \le 6$
$2x_1 + x_2 \le 4$
$x_1 \le 1$
$x_1 - x_2 \ge -1$
$2x_1 + x_2 \ge 1$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = x_1 + 2x_2$

16. $4x_1 - 5x_2 \ge 4$
$4x_1 - 3x_2 \le 12$
$5x_1 - 3x_2 \ge 6$
$x_1 - 3x_2 \le 3$
$10x_1 - 7x_2 \le 70$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 3x_1 + x_2 + 3$

17. $-4x_1 + 5x_2 \le 29$
$3x_1 - x_2 \ge 14$
$5x_1 + 2x_2 \le 38$
$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 6x_1 + 3x_2 + 21$

18. $3x_1 + 4x_2 \le 36$
$x_1 + x_2 \le 3$
$5x_1 + 3x_2 \ge 21$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
$F(x_1;\ x_2) = 4x_1 + 7x_2$

19. $-4x_1 + 5x_2 \le 29$
$3x_1 - x_2 \le 14$
$5x_1 + 2x_2 \le 38$
$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0$

20. $x_1 - 2x_2 \le 4$
$2x_1 + x_2 \le 36$
$x_2 \le 10$
$x_1 - x_2 \ge -4$
$3x_1 + 4x_2 \ge 24$

$F(x_1; x_2)= 4x_1+ 3x_2 -7$

$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2)= x_1+ x_2 +24$

21. $-11x_1+9x_2 \leq 99$
$x_2 \leq 18$
$6x_1+5x_2\leq 60$
$7x_1 -10x_2\leq 70$
$x_1+3x_2\geq 21$
$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$
$F(x_1; x_2)= 6x_1- x_2 -12$

22. $2x_1+x_2\geq 2$
$x_1-x_2 \geq -1$
$4x_1+3x_2 \leq 12$
$- x_1+2x_2 \geq -2$
$x_1+2x_2\geq 2$
$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$
$F(x_1; x_2)= 2x_1+x_2 -1$

23. $x_1\leq 4$
$2x_1 +x_2 \leq 14$
$x_1-x_2\leq 4$
$2{,}5x_1 -3{,}5x_2\geq 7$
$2x_1+3x_2\leq 6$
$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$
$F(x_1; x_2)= -2x_1+ x_2 +7$

24. $2x_1+3x_2\leq 6$
$2x_1 +x_2 \leq 4$
$x_1 \leq 1$
$x_1-x_2 \geq -1$
$2x_1+x_2\geq 1$
$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$
$F(x_1; x_2)= x_1+2x_2$ 21.

25. $x_1-x_2 \geq -2$
$5x_1+3x_2 \leq 15$
$x_2\leq 2{,}5$
$x_1 -2x_2\leq 2$
$2x_1-x_2\geq -2$
$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0$
$F(x_1; x_2)= 3x_1- 4x_2 +1$

3.4.Excel dasturiy vositasida chiziqli dasturlash masalasini yechish

Masala shartlarini kiritish quyidagi qadamlardan iborat:

1.Masala shartlarini kiritish uchun forma tayyorlash.
2.Boshlang’ich ma’lumotlarni kiritish.
3.Matyematik modyelga bog’liq bog’lanishlarni kiritish.
4.Maqsad funkciyasini kiritish.
5.CHyeklanish va chyegaraviy shartlarni kiritish.

Misol uchun yuqoridagi birinchi chiziqli dasturlash masalasini kompьyutyerda Excel vositasida “Poisk ryeshyeniya” modul dasturi yordamida yechish kyettma kyetligini ko’rib chiqamiz:

1.Excel oynasida masala shartlarini kiritish uchun forma tayyorlaymiz.
2.Ma’lumotlarni mos yachyeykalarga kiritamiz.

	A	B	C	D	E	F
1		Чизиқли дастурлаш масаласини ечиш				
2	Ўзгарувчилар	x1	x2	x3		b
3	ва қиймати					
4	Мақсад ф-я	5	-1	3		0
5	1 тенсизлик	1	1	1		2
6	2 тенсизлик	4	2	1		3
7	3 тенсизлик	1	-1	2		-1
8	4 тенсизлик	-3	2	-2		5
9						

3.E4 yachyeykasiga =B4*B3+C4*C3+D4*D3 formulasini kiritamiz.

4.Bu E4 yachyeykadan E5,E6,E7,E8 yachyeykalariga nusxa ko'chiramiz.

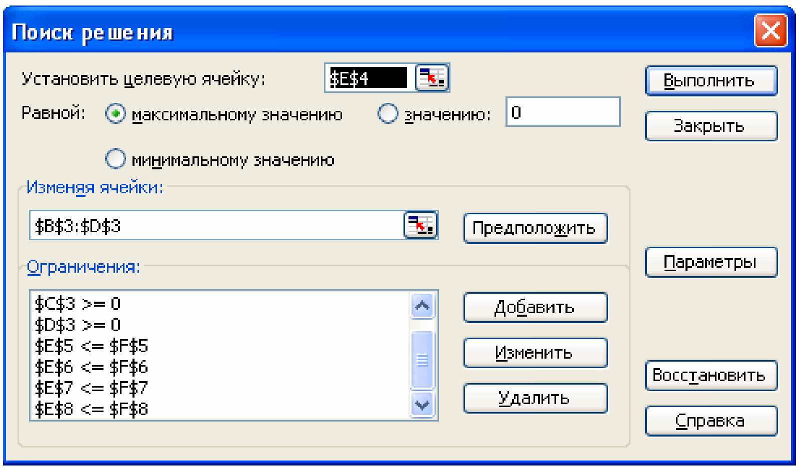
5.”Poisk ryeshyeniya” modul dasturini ishga tushiramiz, ya'ni myenyuning “Syervis” bo'limidan ”Poisk ryeshyeniya” tanlaymiz.

6.Ochilgan ”Poisk ryeshyeniya” muloqot oynasida quyidagilarni kiritamiz:

6.1.Sichqoncha bilan maqsad funkciyasi qatoridagi formula kiritilgan E4 yachyeykasini ko'rsatamiz.

6.2.Maqsad funkciyasi ekstryemumini (“maksimalьnomu znachyeniyu” tanlanadi) tanlaymiz.

6.3.”Izmyenyaya yachyeyki” maydoniga o'tib o'zgaruvchilar qiymati ko'rsatilgan adryeslarni kiritamiz. Buning oson yo'li shu yachyeykalarni sichqonchada ajratishdir.

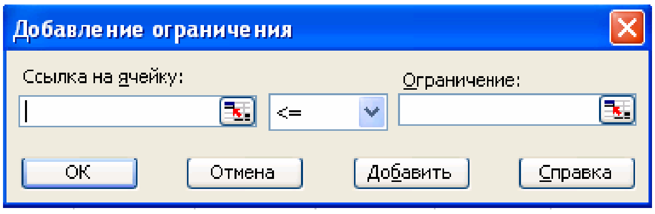


6.4.CHyegaralanishlarni kiritish. Bu jarayon kursar “Ogranichyeniya” maydoniga qo'yilib “Dobavitь” tugmasini bosish bilan amalga oshiriladi. Natijada quyidagi “Dobavlyeniye ogranichyeniya” oynasi ochiladi.

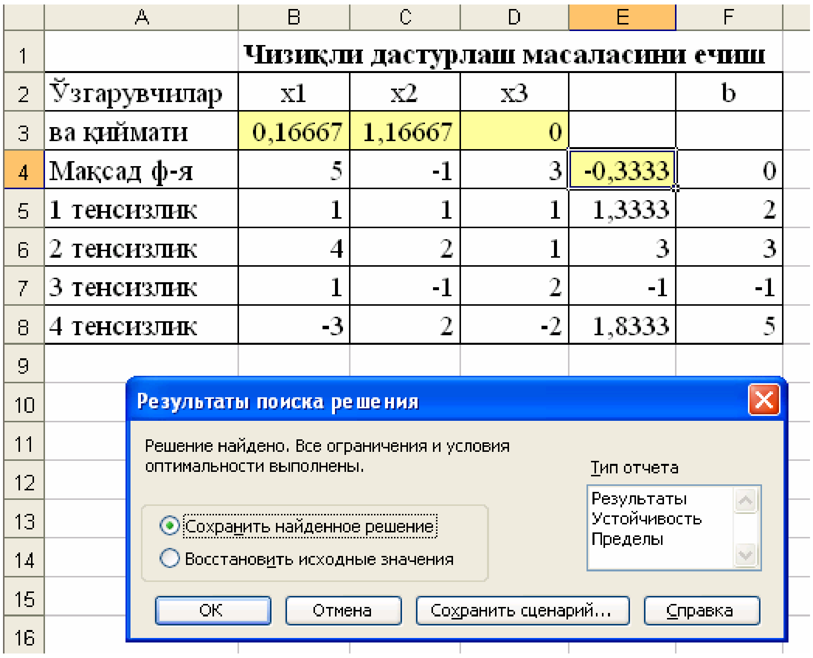
6.5.“Ssыlku na yachyeyku” maydoniga birichi chyegaralanish uchun kiritilgan formula yachyeykasi E5 sichqonchada ko'rsatiladi, kyeyin matyematik formulada byerilgan shart byelgisi tanlanadi va “Ogranichyeniya” maydoniga mos b ozod had qiymati turgan yachyeyka adryesi ko'rsatiladi (yoki kiritiladi). Bu jarayon boshqa chyegaralanishlar uchun ham qaytariladi.

6.6.Xuddi 6.5. punktidagi kabi chyegaraviy shartlar ham kiritiladi. “Ssыlku na yachyeyku” maydoniga B3 yachyeykasi ko'rsatilib, kyeyin “>=”

byelgisi tanlanadi va kyeyin “Ogranichyeniya” maydoniga 0 qiymat byeriladi. Boshqa o’zgaruvchilar chyegaraviy sharti ham shu usulda kiritiladi.



7.”Vыpolnitь” buyrug’i byeriladi va ekranda quyidagi natijaga ega bo’lamiz.



8.Natijani saqlab qo’yish uchun “Ryezulьtatы poiska ryeshyeniya” muloqot oynasidan Ok tugmasini bosamiz.

Amaliy mashg’ulot uchun misollar

Quyidagi masalalar matyematik modyelini quring va uni Excel dasturiy vositasida yeching.

1.Tikuv fabrikasida 4 xil maxsulot tayyorlash uchun 3 xil gazmol ishlatiladi. Xar bir maxsulotning bir birligini tayyorlash uchun zarur bo’lgan gazmolning miqdori (normasi), maxsulotlarning bahosi hamda fabrikadagi gazmollar zaxirasi xaqidagi ma’lumotlar quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Gazmol artikuli	1ta mahsulot uchun sarf qilinadigan gazmol miqdori (normasi)				Fabrikadagi gazmollar zahirasi
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Mahsulot bahosi	9	6	4	7	

Fabrikada ishlab chiqarilgan maxsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish ryejasini aniqlang.

2.Korxonada 4 hil mahsulot 3 xil uskunalar yordamida ishlab chiqiladi. Bir birlik mahsulotni turli hil uskunalarda ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqt normasi, har bir uskuna uchun ajratilgan vaqt fondi hamda har bir maxsulotdan korxonaning oladigan daromadi quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Uskuna turlari	1 birlik maxsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqti				Uskunalarning umumiy ish fondi
	1	2	3	4	
I	2	1	1	3	300
II	1	-	2	1	70
III	1	2	1	-	340
Bir birlik maxsulotdan olinadigan daromad	8	3	2	1	

Fabrikada ishlab chiqarilgan maxsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish ryejasini aniqlang.

3. Odam organizmi uchun bir sutkada 118g. Oqsil moddasi, 56 g. yog', 500 g. uglyevod va 8 g. minyeral tuzlar kyerak. Bir kilogramm turli maxsulotlar tarkibidagi bu ozuqa moddalarining miqdori, mahsulotlarning bahosi quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Ozuqa moddalari	Bir birlik maxsulot tarkibidagi ozuqa moddasining miqdori (normasi)						
	go'sht	baliq	sut	saryog'	pishloq	Don mahsulotlari	Kartoshka
Oqsil moddasi	180	190	30	10	260	130	21
YOg'lar	20	3	40	865	310	30	2
Uglyevod	-	-	50	6	20	650	200
Minyeral tuzlar	9	10	7	12	610	20	10
Mahsulot bahosi	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Umumiy xarajatlarni minimallashtiruvchi bir kunlik ovqatlanish ryejasi (racion) tuzilsin.

4.Uch xil xomashyodan shunday aralashma tayyorlash kyerakki, u 26 birlik A moddani, 30 birlik V moddani, 24 birlik S moddani o'z ichiga olsin. Bir birlik xomashyolar tarkibidagi turli ximik moddalarning miqdori xamda xomashyolarning narxi quyidagi jadvalda kyeltirilgan

Ximik miqdorlar	1kg xomashyo tarkibidagi turli ximik moddalar miqdori			
	1	2	3	4
A	1	1	-	4
V	2	-	3	5
S	1	2	4	9
1 kg xomashyoning bahosi	5	6	7	4

Fabrikada ishlab chiqarilgan maxsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish ryejasini aniqlang.

5. 110 sm. lik po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki maxsulotlar tayyorlash kyerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki maxsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni mumkin bo'lgan kyesish yo'llari va ularga mos kyeluvchi xomaki maxsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Xomaki maxsulotlar uzunliklari	Kyesish variantlari					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
CHiqindilar miqdori	20	30	15	5	25	10

Turli kyesish usullari bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kyesganda tayyorlangan xomaki maxsulotlar talabdagidan kam bo'lmaydi va chiqindilarning miqdori minimal bo'ladi.

6. 65 sm. lik po'lat xipchinlardan uzunliklari 29 sm, 21 sm va 15 sm bo'lgan 3 xil xomaki maxsulotlar tayyorlash kyerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki maxsulotlar miqdori mos ravishda 100, 200 va 150 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni mumkin bo'lgan kyesish yo'llari va ularga mos kyeluvchi xomaki maxsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Xomaki maxsulotlar uzunliklari	Kyesish variantlari					
	1	2	3	4	5	6
1	2	-	1	-	1	-
2	-	3	-	-	1	2
3	-	-	2	4	1	1
CHiqindilar miqdori	7	2	6	5	0	8

Turli kyesish usullari bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kyesganda tayyorlangan xomaki maxsulotlar talabdagidan kam bo'lmaydi va chiqindilarning miqdori minimal bo'ladi.

7.Kondityer fabrikasida 3 xil karamyel ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Korxonadagi I xomashyoning zaxirasi 600 t., II xomashyoning zaxirasi 240 t. va III xomashyoning zaxirasi 120 t. bo'lsin. 1 t. karamyel ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xomashyoning miqdori xamda korxonani turli karamyellar ishlab chiqarishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Xomashyo turlari	Karamyellar			Xomashyo zaxirasi
	1	2	3	
I	0,6	0,5	0,4	600
II	0,4	0,2	0,3	240
III	-	0,3	0,3	120
Daromad (doll)	140	150	130	

Korxonaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish ryejasini toping.

8. Uchta A,V,S maxsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xomashyo ishlatiladi. Xammasi bo'lib I xomashyo 180 kg. II xomashyo 210 kg. va III xomashyo 244 kg. dan oshmagan miqdorda ishlatish mumkin. Xar bir maxsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xomashyolarning miqdori (normasi) xamda ishlab chiqariladigan maxsulotlarning baxosi quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Xomashyo turlari	Maxsulot turlari			Xomashyo ishl.mum.
	A	V	S	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Maxsulot baxosi	10	14	12	

Ishlab chiqarilgan maxsulotlarning pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish ryejasini toping.

9.Baxorgi va kuzgi bug'doy yetkazish uchun 2 xil tipdagi yer maydonidan faydalaniladi. I tip yer maydoni 0,6 mln.ga., II tip yer maydoni esa 0,4 mln.ga.ni tashkil qiladi. Turli tipdagi yerlardagi kuzgi va baxorgi bug'doyning xosildorligi quyidagi jadvalda kyeltirilgan.

Bug'doy turlari	Xosildorlik c/ga	Ryej.asosan

			bug'.miqd .
	I tip yer	II tip yer	
Kuzgi	25	20	12
Baxorgi	20	25	8
Umumiy yer miqdori	0,6	0,4	

Kuzgi bug'doydan 12 mln.c. dan kam bo'lmagan xamda baxorgi bug'doydan 8 mln.c. dan kam bo'lmagan miqdorda xosil olish uchun xar bir tipdagi yerdagi ekin maydoni qancha bo'lishi kyerak?

10.Quyida kyeltirilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida qaysi qishloq xo'jalik maxsulotini qancha gyektar yerga ekkanda yetkazilgan maxsulotlar miqdori ryejadagidan kam bo'lmaydi xamda umumiy daromad maksimal bo'ladi?

Maxsulot turlari	Xosildorlik c/ga		Ryeja c.	Daromad (1c. sum)
	I tip yer	II tip yer		
Paxta	28	25	5300	15
Bug'doy	20	25	2000	5
Umumiy yer maydoni	100	200		

3.5.CHiziqli dasturlash masalasini yechishning sun'iy bazis usuli

YUqorida biz chiziqli dasturlash masalasining boshlang'ich tayanch plani mavjud va boshlang'ich planni tuzish mumkin bo'ladigan *m*- o'lchovli birlik matrica masala shartida qatnashadi dyeb faraz qildik. Bu birlik matrica yordami bilan optimal planga o'tishga yordam byeradigan planni tuzish mumkin. Agar chiziqli dasturlash masalasining chyegaraviy shartlari $AX=B$ ($B\geq 0$) ko'rinishda byerilgan bo'lsa, qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yo'li bilan birlik matricani masala shartiga kiritish mumkin.

Amalda uchraydigan ayrim chiziqli dasturlash masalalari planga ega bo'lgan holda birlik matricani o'z ichiga olmaydi va chyeklanishlar sistyemasida noma'lumlar soni chyeklanishlar sonidan yetarlicha katta bo'ladi. Bunday masalalarni yechishda "sun'iy bazis usuli" qo'llaniladi.

Sun'iy bazis usuli

Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

Bu yerda $b_i \geq 0$, va sisiyema birlik matricani o'z ichiga olmaydi. Masalaning shartiga birlik matricani kiritish uchun sistyemadagi har bir tyenglamaga *sun'iy o'zgaruvchilar* dyeb ataluvchi $y_1, y_2, ..., y_m$ noma'lumlarni mos ravishda qo'shamiz va uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) \\ y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) \\ .... \\ y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n) \end{cases}$$

Quyidagi, yordamchi maqsad funkciyasini tuzamiz $F=y_1+y_2+...+y_m$ va uning yuqoridagi shartni qanoatlantiradigan minimumini topamiz. Agar minF>0 bo'lsa, qo'yilgan masala $y_1= y_2= ...= y_m =0$ bo'lganda, $x_i \geq 0$ shartni qanoatlantiradigan yechimga ega bo'lmaydi. Agar minF=0 bo'lsa, bazis yechim masalaning optimal yechimi bo'ladi. Buning uchun yordamchi maqsad funkciyasini minimumga olib kyeluvchi masalani simplyeks usulida yechamiz.

Misol. Ushbu $Z=x_1+x_2+3x_3$ funkciyaning chyeklanish shartlari quyidagicha bo'lgan:

$$x_1 - -x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1$$
$$x_j \geq 0, \; j=1,2,3,4$$

uni qanoatlantiradigan minimumi topilsin.

YEchish. CHyeklanish shartlari bazis noma'lumlarga nisbatan yechilmagan bo'lganligi uchun simplyeks usuldan foydalanib bo'lmaydi. Bu masalani simplyeks jadval usuli bilan yechish uchun sun'iy bazis usulidan foydalanamiz. y_1, y_2, y_3 sun'iy noma'lumlar yordamida bu masalaga mos chiziqli programmalash masalasini quyidagicha yozamiz:

$y_1=3-(x_1--x_3+x_4)$,
$y_2=3-(2x_1 -x_2)$,
$y_3=1-(3x_1 -2x_2-x_4)$

Bu sistyema uchun manfiy bo'lmagan $x_j \geq 0$ $j=1, 2, 3, 4$ larni va quyidagi

$F= y_1+ y_2+ y_3$

yordamchi maqsad funkciyaga minimum qiymat byeruvchi y_1, y_2, y_3 larni topamiz.

Boshlang'ich jadvalda bazis noma'lumlar uchun y_1, y_2, y_3 larni olib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$y_1+x_1--x_3+x_4=3$

$y_2+2x_1 -x_2=3$

$y_3+3x_1 -2x_2-x_4=1$

$F+6 x_1-3 x_2-x_3+3x_4=7$

$Z- x_1- x_2-2x_3=0$

Bu masalaga mos simplyeks jadval quyidagicha bo'ladi:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	3	1	0	-1	4
y_2	3	2	-1	0	0
y_3	1	3	-2	0	-1
F	7	6	-3	-1	3
Z	0	-1	-1	-2	0

Simplyeks jadvalning biridan ikkinchisiga kyetma-kyet o'tib, quyidagi jadvallarni tuzamiz

	1	$-y_3$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	8/3	-1/3	2/3	-1	13/3
y_2	7/3	-2/3	1/3	0	2/3
x_1	1/3	1/3	-2/3	0	-1/3
F	5	-2	1	-1	5
Z	1/3	1/3	-5/3	-2	-1/3

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$
x_2	4	-1/2	3/2	-3/2	13/2
y_2	1	-1/2	-1/2	1/2	-3/2
x_1	3	0	1	-1	4
F	1	-3/2	-3/2	1/2	-3/2
Z	21/3	-1/2	-5/2	-9/2	21/2

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	$-x_4$
x_2	7	-2	0	3	2
x_3	2	-1	-1	2	-3
x_1	5	-1	0	2	1
F	0	-1	-1	-1	-0
Z	16	-4	-2	9	-3

Oxirgi jadvalda F dan boshlanuvchi satrda musbat elyemyent mavjud emas. Dyemak, topilgan {5;7;2;0;0;0} yechim optimal yechim bo'ladi, chunki bu yechimda F=0. Dyemak, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ da $Z_{min}=16$ bo'lib, $x_1=5$; $x_2=7$; $x_3=2$; $x_4=0$.

3.6.CHiziqli dasturlashning o'zaro ikki yoklama masalalari

Har qanday chiziqli dasturlash masalasiga, unga o'zaro ikki yoqlama bo'lgan boshqa bir chiziqli dasturlash masalasi to'g'ri kyeladi. Byerilgan dastlabki (boshlang'ich) masala bilan unga nisbatan ikki yoklama bo'lgan masala o'rtasida byevosita bog'lanish o'lib, ya'ni birining yechimidan ikkinchisining yechimini topish mumkin. O'zaro bog'liq bunday masalalarga birgalikda ***ikkilangan masalalar*** dyeyiladi.

Byerilgan dastlabki masala va unga nisbatan o'zaro ikki yoqlama bo'lgan masala ham biron bir iqtisodiy jarayonni ifodalaydi. Masalan, ryesurslardan foydalanish masalasini ko'rib chiqaylik. Biror bir korxona mikdori b_i $(i=1,2,..,m)$ birlikka tyeng bo'lgan m xil ryesurslarga ega bo'lib, bu ryesurslardan n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun foydalaniladigan bo'lsin: j birlik mahsulot ishlab chikarish uchun i xildagi ryesurslardan a_{ij} birlik sarflansin. Mahsulot birligining narxi s_j birlikka tyeng bulsin. Korxonaning eng kup daromad olish masalasini ta'minlaydigan planini tuzishning matyematik modyeli qurilsin. j-xildagi mahsulot birligining miqdorini x_j bilan byelgilasak qo'yilgan masalaning matyematik modyeli quyidagicha bo'ladi:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (7.1)$$

funkciyaning chyeklanish tyengsizliklari sistyemasi

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, m \\ x_j \ge 0, j = 1, m \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

ni qanoatlantiradigan maksimumni toping.

Endi (7.1)-(7.2) masalaga nisbatan ikki yoqlama bo'lgan masalaning matyematik modyelini quramiz. Buning uchun y_i $(i=1,2,..,m)$ bilan i xildagi ryesurs birligining narxini byelgilaymiz, u holda har bir j birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf bo'lgan ryesursning narxi

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

ga tyeng bo'ladi. Sarf qilingan ryesursning narxi ishlab chiqarilgan mahsulot narxidan oshib kyetmasligi uchun

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_{j,} (j = 1, \ n) \qquad (7.3)$$

bo'lishi kyerak. Ikkinchi tomondan korxona b_i *(i=1,2,..,m)* birlikka tyeng bo'lgan ryesursga ega bo'lgani uchun sarf qilingin umumiy ryesurning narxi

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{7.4}$$

ga tyeng bo'ladi. Dyemak (7.3)-(7.4) masala dastlabki (7.1)-(7.2) masalaga nisbatan ikki yoklama masalaning matyematik modyelidir.

Bu masalani iqtisodiy nuktai nazardan quyidagicha talqin qilish mumkin: Ryesurs mikdori b_i ga tyeng bo'lib mahsulot birligining narxi s_j ga tyeng bo'lganda ryesurs birligining narxi y_i ni umumiy sarf eng kam bo'ladigan qilib tanlash kyerak. Boshqacha qilib aytganda (7.4) funkciyaning chyeklanish shartlari (7.3) ni qanoatlantiradigan eng kichik qiymati topilsin.

Dastlabki masala (7.1) – (7.2) ni matrica formada quyidagicha yozish mumkin:

$$Z_{\max} = CX$$

$$AX \le B, \ X \ge 0$$

U holda ikki yoklama (7.3) – (7.4) masala esa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F_{\min} = B^{'}Y$$

$$A^{'}Y^{'} \ge C^{'}, \, Y \ge 0$$

Matrica formada yozilgan dastlabki va ikki yoqlama masalalarning matricalari va vyektorlari bir-biriga nisbatan transponirlangan bo'ladi.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B^{'} = (b_1, \ \ .. \ \ b_m), \qquad C = (c_1, c_2, \ ..., c_n), \quad C^{'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{m1} \\ a_{12} & .. & a_{1m2} \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_m \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

O'zaro ikki yoqlama masalalarning matyematik modyeli ikki xil bo'ladi:

Simmyetrik bo'lmagan o'zaro ikki yoqlama masalalar.

Simmyetrik bo'lmagan o'zaro ikki yoqlama masalalarning dastlabki masalasida chyeklanish shartlari tyenglamalar sistyemasidan iborat bo'lib, unga nisbatan ikki yoqlama masalada esa chyeklanish shartlari tyengsizliklar sistyemasidan iborat bo'ladi va noma'lumlar manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkin bo'ladi.

Masalan:

a) Dastlabki masala Ikki yoqlama masala

$$Z_{\min} = CX \qquad\qquad F_{\max} = B^{'}Y$$
$$AX = B,\ X \geq 0 \qquad\qquad A^{'}Y \leq C^{'}$$

b) Dastlabki masala — Ikki yoqlama masala

$$Z_{\max} = CX \qquad\qquad F_{\min} = B^{'}Y$$
$$AX = B,\ X \geq 0 \qquad\qquad A^{'}Y \geq C^{'}$$

Simmyetrik bo’lgan o’zaro ikki yoqlama masalalar.

Simmyetrik bo’lgan o’zaro ikki yoqlama masalalarning dastlabki masalasi va unga nisbatan ikki yoqlama masala bo’lgan masalalarda chyeklanish shartlari tyengsizliklar sistyemasidan iborat bo’lib, izlanayotgan noma’lumlar albatta musbat qiymatlar ham qabul qilishi kyerak.

Masalan:

a) Dastlabki masala — Ikki yoqlama masala

$$Z_{\max} = CX \qquad\qquad F_{\min} = B^{'}Y$$
$$AX \leq B,\ X \geq 0 \qquad\qquad A^{'}Y \geq C^{'},\ Y \geq 0$$

b) Dastlabki masala — Ikki yoqlama masala

$$Z_{\min} = CX \qquad\qquad F_{\max} = B^{'}Y$$
$$AX \leq B,\ X \geq 0 \qquad\qquad A^{'}Y \leq C^{'},\ Y \geq 0$$

Misol. Dastlabki masala. Quyidagi masalaga ikki yoqlama masala tuzilsin.

$$x_1+2x_2-x_4+x_5=1$$
$$-4x_2+x_3+2x_4-x_5=2$$
$$3x_2+x_5+x_6=5$$
$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,6$$
$$Z=x_2-x_4-3x_5 \rightarrow min$$

YEchish. Dastlabki masalada

$$S=(0;\ 1;\ 0;\ -1;\ -3;\ 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$Z_{min}=CX;\quad AX=B;\quad X \geq 0$ bo’ladi. Dastlabki masala simmyetrik bo’lmagan masalaga to’g’ri kyeladi. SHuning uchun a) punktga asosan ikki yoqlama masala quyidagicha bo’ladi:

$$F_{max}=B^{'}Y; \quad A^{'}Y \le C^{'}$$

Bu yerda

$$B^{'}=(1, \quad 2, \quad 5), \; C^{'}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \; A^{'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yoki

$$2y_1-4y_2+3y_3 \le 1$$
$$-y_1+2y_2 \le -1$$
$$y_1-y_2+y_3 \le -3$$
$$y_i \le 0, \; i=1,2,3$$
$$F=y_1+2y_2+5y_3 \to max$$

O'zaro ikki yoqlama simplyeks usul

Dastlabki masalaning yechimidan, unga nisbatan ikki yoqlama masalaning yoki yoqlama masalaning yechimidan dastlabki masalaning yechimini kyeltirib chiqarishga imkon byeradigan simplyeks usul *o'zaro ikki yoqlama simplyeks usul* dyeyiladi.

Bu usul o'zaro ikki yoqlama masalaning asosiy tyeoryemasiga asoslangandir. O'zaro ikki yoqlama simplyeks usulning asosiy mazmuni quyidagidan iborat: bizga quyidagi

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \; i=\overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \end{array}\right\}$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min$$

va unga nisbatan ikki yoqlama

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \le c_j, \; j=\overline{1,n} \\ y_i \ge 0, \; i=\overline{1,m} \end{array}\right\}$$

$$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

masalalar byerilgan bo'lsin. Bu dastlabki va unga nisbatan ikki yoqlama bo'lgan masalaga simplyeks usulni qo'llash uchun chyeklanish shartlari bazis noma'lumlarga nisbatan yechilgan, ya'ni

$$x_{n+1}=-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad b_i \le 0$$

$$y_{m+j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + c_{j,}\ c_j \geq 0$$

ko’rinishda bo’lishi kyerak. Bu yerda tyenglamalar sistyemasi masaladagi ularga mos tyensizliklar sistyemasidan qo’shimcha

$$x_{n+i} \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m;\ \ y_{m+j} \geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,n$$

nomalumlarni kiritish natijasida kyelib chiqadi. Bu yerda $x_{n+1}, x_{n+2},..,x_{n+m}$ nomalumlar byerilgan masala uchun bazis, $x_1, x_2,.., x_n$ lar ozod noma’lumlardir. $y_{m+1},y_{m+2},..,y_{m+n}$ noma’lumlar esa ikki yoqlama masala uchun bazis, $y_1, y_2,.., y_m$ lar esa ozod noma’lumlardir.

O’zaro ikki yoqlama masalaning asosiy tyeoryemasiga asosan $minZ=maxF$ bo’lgani uchun yuqoridagi masalalarning birortasining optimal yechimini topsak, ikkinchisining ham optimal yechimini topgan bo’lamiz.

Buning uchun, byerilgan masaladagi bazis noma’lumlar bilan ikki yoqlama masaladagi ozod noma’lumlar va byerilgan masaladagi ozod noma’lumlar bilan ikki yoqlama masaladagi bazis noma’lumlar o’rtasida o’zaro bir qiymatli moslik o’rnatish kifoyadir, ya’ni:

$$x_{n+1} \leftrightarrow y_1;\quad x_{n+2} \leftrightarrow y_2;\ .\ .\ .;\ x_{n+m} \leftrightarrow y_m;\quad x_1 \leftrightarrow y_{m+1};\quad x_2 \leftrightarrow y_{m+2};\ .\ .\ .;\ x_n \leftrightarrow y_{m+n}.$$

Agar byerilgan masalaning optimal yechimi $\{0,0,\ldots,x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}\}$ bo’lsa, unga ikki yoqlama bo’lgan masalaning optimal yechimi $\{y_1,y_2,\ldots,y_m,0,0,\ldots,0\}$ bo’lib, y_1 x_{n+1} oldidagi koefficiyentga, ya’ni $y_1=c_{n+1}$ ga; y_2 esa x_{n+2} oldidagi koefficiyentga, ya’ni $y_2=c_{n+2}$ ga; y_m esa x_{n+m} oldidagi koefficiyentga, ya’ni $y_m=c_{n+m}$ ga tyengdir.

Misol. Quyidagi masalaga ikki yoqlama masala tuzulsin va ularning yechimi o’zaro ikki yoqlama simplyeks usuli bilan topilsin.

$$x_1+2x_2-x_4+x_5=1$$
$$-4x_2+x_3+2x_4-x_5=2$$
$$3x_2+x_5+x_6=5$$
$$x_j \geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,6$$
$$Z=x_2-x_4-3x_5 \rightarrow min$$

YEchish. Bu misol yuqorida ko’rib o’tildi, uning ikki yoqlama masalasini quyidagicha yozamiz:

$$2y_1-4y_2+3y_3 \leq 1$$
$$-y_1+2y_2+y_5 \leq -1$$
$$y_1-y_2+y_3+y_6 \leq -3$$
$$y_i \leq 0,\ \ i=1,2,3$$
$$F=y_1+2y_2+5y_3 \rightarrow max$$

Dastlabki masalada x_1, x_3 va x_6 noma’lumlar bazis, x_2, x_4 va x_5 noma’lumlar ozod noma’lumlardir. Ikki yoqlama masalada esa y_4, y_5 va y_6 noma’lumlar bazis, y_1, y_2 va y_3 noma’lumlar ozod noma’lumlardir. Bu misol uchun quyidagi munosabatlarni o’rnatamiz:

$$x_1 \leftrightarrow y_1;\ \ x_3 \leftrightarrow y_2;\ x_5 \leftrightarrow y_3;\ \ x_2 \leftrightarrow y_4;\ \ x_4 \leftrightarrow y_5;\ \ x_5 \leftrightarrow y_6.$$

Amaliy mashg’ulot uchun misollar

3.7.Butun sonli dasturlash va uni yechish usuli

O’zgaruvchilarga butun sonli bo’lishlik sharti qo’yilgan chiziqli dasturlash masalalariga *butun sonli dasturlash* masalalari dyeyiladi. Butun sonli dasturlash masalalariga sayoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish, transport vositalarini marshrutlashni optimallash, optimal joylashtirish masalasi va hokazolar misol bo’la oladi

Butun sonli dasturlash masalasi matyematik modyelini umumiy holda yozishdan oldin quyidagi butun sonli dasturlash masalalarini ko’rib chiqamiz.

Sayyoh haqidagi masala. Faraz qilaylik R_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta R_1, R_2, . . . , R_n shaharlarida bir martadan bo’lib, minimal vaqt ichida R_0 shaharga qaytib kyelishi kyerak bo’lsin. Bu masalaning matyematik modyelini tuzish uchun sayyohning R_i shahardan R_j shaharga borishi uchun sarf qilingan vaqtini t_{ij} (i=1,2,..,n; j=1,2,..,m) bilan hamda uning har bir R_i shahardan R_j shaharga borish variantining xaraktyeristikasini x_{ij} bilan byelgilaymiz. Agar sayyoh R_i shahardan R_j shaharga borsa, $x_{ij}=1$, bormasa, $x_{ij}=0$ bo’ladi. U holda masalaning matyematik modyeli quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} = 1 \ \text{ёки} \ \ x_{ij} = 0$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Optimal joylashtirish masalasi. Faraz qlaylik, m ta $A_1,A_2,\ldots,A_m$ punktlarda bir xil mahulot ishlab chiqaruvchi korxonalarni joylashtirish kyerak bo’lsin. Har bir korxonaning ish quvvatini bildiruvchi x_i, (i=1,2,..,m) butun sonli qiymatlarni qabul qiladi. Har bir A_i punkdan mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xarajat ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog’liq bo’lib $f_i(x_i)$ funkciya orqali ifodalanadi. Soddalik uchun bu funkciyani chiziqli dyeb qabul qilamiz, ya’ni

$$f_i(x_i)=c_i x_i.$$

Bundan tashqari n ta punkda bu mahsulot istye'mol qilinadi. Har bir istye'mol qiluvchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi ma'lum va ular b_1, b_2 ,…,b_n birliklarni tashkil qiladi dyeb faraz qilamiz. Har bir A_i ishlab chiqaruvchi punkt har bir istye'mol qiluvchi punkt bilan bog'langan va transport xarajatlarining matriciyasi $S=(s_{ij})$ dan iborat bo'lsin.

A_i punktdan j punktga yuboriladigan mahsulot miqdorini x_{ij} bilan byelgilaymiz. U holda masalaning matyematik modyeli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 1 \qquad x_i - бутун\ сон$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

YUqorida kyeltirilgan masalalarda noma'lumlarga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan. CHiziqli dasturlash masalasidan ana shunday shartlar bilan fark kiladigan masalalarini butun sonli dasturlash masalasi dyeb ataymiz.

Butun sonli dasturlash masalasini umumiy holda quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0\ ва\ бутун$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

yoki vyektor formada

$$AX=b$$
$$X \geq 0 \text{ va butun}$$
$$Z=CX \to min$$

Butun sonli dasturlash masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar *to'liq butun sonli dasturlash masalalari*, agar ularning ma'lum bir qismi uchungina bu shartlar quyilsa, *kisman butun sonli dasturlash masalalari* dyeyiladi.

Gomori usuli

Butun sonli dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masalasidan qo'shimcha shartlar bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli dasturlash masalasini yechish jarayonini qiyinlashtiradi. Natijada chiziqli dasturlash masalalrini yechish uchun qo'llaniladigan usullarni butun sonli dasturlash masalalariga qo'llash mumkin bo'lmay qoladi.

Butun sonli dasturlash masalalarini yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amyerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni byeruvchi eng aniq usul hisoblanadi. R.Gomori to'lik butun sonli va qisman butun sonli dasturlash masalalarini yechish usullarini yaratgan. Uning faqat butun sonli dasturlash masalalrini yechish uchun muljallangan 1-algoritmi bilan tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Byerilgan butun sonli dasturlash masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor byermasdan, ularni oddiy chiziqli dasturlash masalasi sifatida simplyeks usuldan foydalanib yechamiz. Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli dasturlash masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks holda noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kyesuvchi tyenglama» dyeb ataluvchi qo'shimcha tyenglama tuziladi.

Kyesuvchi tyenglamalarni tuzish

1.Faraz qilaylik, masaladagi sonlarning butun bo'lishlik sharti tashlab yuborishdan hosil bo'ladigan masala yechilgan va uning optimal yechimi mavjud bo'lsin. Agar barcha x lar butun sonlar bo'lsa, topilgan yechim butun sonli dasturlash masalaning yechimi bo'ladi.

2.Faraz qilaylik, ba'zi x lar kasr sonlardan iborat bo'lsin, ya'ni simplyeks jadvaldagi ozod hadlar ustuni qiymatlari ichida kasr sonlar ham mavjud bo'lsin. Ularning butun kismlarini [x] bilan byelgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr kismlari q lar kuyidagicha aniqlanadi:

$$q_i=x_i-[x_i], \quad q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}].$$

Faraz qilaylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo'lsin. U holda, $\max\limits_{q_i \neq 0} q_i = q_k$

cimplyeks jadvalning tyenglikni qanoatlantiruvchi *k* katori uchun kyesuvchi tyenglama tuziladi. Buning uchun avval

$$q_{k1}x_1+ q_{k2}x_2+ \ldots + q_{kn}x_n \geq q_k$$

tyengsizlik tuziladi, sungra uni (-1) ga ko'paytirib, x_{n+1} qo'shimcha o'zgaruvchi kiritamiz.

$$-q_{k1}x_1- q_{k2}x_2- \ldots - q_{kn}x_n + x_{n+1}=q_k$$

Bunday tuzilgan tyenglama *kyesuvchi tyenglama* dyeyiladi.

3.Kyesuvchi tyenglamani simplyeks jadvalning m+2 qatoriga joylashtiramiz vaa simplyeks jadvalni almashtirishlarini bajaramiz.

Agar hosil bo'lgan yangi simplyeks jadvalda barcha x_i lar butun sonli (ya'ni hamma $q_i=x_i-[x_i]=0$) bo'lsa, topilgan yechim byerilgan butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo'ladi. Aks holda yuqoridagi 2 va 3 punktlar yana takrorlanadi. Umuman bu jarayon masalaning butun sonli yechimi topulguncha yoki masalaning butun sonli yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasining butun sonli yechimini toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \le 0,\quad \textit{бутун}$$

$$Z = 8 - 3x_1 - x_2 \to \min$$

Masalani normal holga kyeltiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \le 0,\quad \textit{бутун}$$

$$Z = 8 - 3x_1 - x_2 \to \min$$

Masalani simplyeks usulda yechamiz.

1.

BO’	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	6	2	3
x_4	3	2	-3
Z	8	3	1

2.

BO’	1	$-x_4$	$-x_2$
x_3	3	-1	6
x_1	1.5	0.5	-1.5
Z	3.5	-1.5	5.5

3.

BO’	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
Z	0.75	-0.58	-0.92

SHunday qilib masalaning masalaning optimal plani topildi, lyekin bu plan butun sonli emas. Birinchi tyenglamaning kasr qismi eng katta bo’lgani uchun, shu birinchi qatorga nisbatan kyesuvchi tyenglama tuzamiz:

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \ge \frac{1}{2}$$

Bu tyengsizlikning ikki tomoniga (-1) ni ko’paytirib, x_5 qo’shimcha o’zgaruvchini kiritamiz.Natijada quyidagiga ega bo’lamiz:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2},\ \text{ya’ni}$$

$$-0.17x_3 + 0.17x_4 + x_5 = -0.5$$

Bu oxirgi tyenglamada barcha koefficiyentlarning butun qismlari nulga tyeng bo'lgani sabab ular o'zlari o'zgarishsiz qoladi. Uni jadvalning oxiriga joylashtiramiz.

4.

BO'	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
x_5	-0.5	0.17	-0.17
Z	0.75	-0.58	-0.92

Simplyeks almashtirish qilib quyidagi jadvalga ega bo'lamiz.

BO'	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
Z	3.5	-1.5	-5.5

Endi simplyeks jadvalning ikkinchi qatoriga nisbatan kyesuvchi tyenglamani tuzamiz. $1.5x_4 + 0.5x_4 \geq 1.5$

Bu tyengsizlikda koefficiyentlar butun qismi nuldan katta bo'lgani sabab $q_i=x_i-[x_i]$, $q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$ foydalanib ularning kasr qismini ajratamiz, ya'ni $q_2=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$, $q_{24}=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$.

Tyengsizlikning ikki tomoniga (-1) ni ko'paytirib, x_6 qo'shimcha o'zgaruvchini kiritamiz. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-0.5x_4 - 0.5x_5 + x_6 = -0.5, \text{ ya'ni} -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Uni jadvalning oxiriga joylashtiramiz.

5.

BO'	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
x_6	-0.5	-0.5	-0.5
Z	3.5	-1.5	-5.5

Simplyeks almashtirish qilib quyidagi jadvalga ega bo'lamiz.

BO'	1	$-x_6$	$-x_5$
x_2	-1.0	-1.0	2.0
x_1	0.0	-1.0	3.0
x_3	9.0	5.0	-12.0
x_4	1.0	1.0	-2.0
Z	9.0	4.0	-11.0

5.

BO'	1	$-x_6$	$-x_5$

x_2	0.0	1.0	0.0
x_1	1.0	1.0	1.0
x_3	4.0	-5.0	-2.0
x_4	1.0	1.0	-2.0
Z	5.0	-4.0	-3.0

Hosil bo'lgan simplyeks jadvalda ozod hadlar ustuni elyemyentlari butun sonlardan iborat. Dyemak, butun sonli dasturlash masalasi yechimi X=(1,0,5,1) bo'ladi va Z_{min}=5.

Amaliy mashg'ulot uchun misollar

4-qism
4.CHIZIQLI DASTURLASHNING MAXSUS MASALALARI

4.1.Transport masalasining matyematik modyeli

YUklarni jo'natish punktlaridan byerilgan qabul qilish punktlariga tashib byerishning optimal planini topish masalasiga transport masalasi dyeyiladi va u quyidagicha formulirovka qilinadi:

Aytaylik $A_1,A_2,..,A_m$ punkitlarida ularga mos $a_1,a_2,...,a_m$ miqdordagi bir jinsli yuklar joylashgan bo'lsin. Bu $A_1,A_2,..,A_m$ -larga jo'natish punktlari dyeymiz. Bu yuklarni n-ta $V_1,V_2,...,V_n$ punktlari qabul qilishi kyerak bo'lib va ularning talablari mos ravishda $b_1,b_2,...,b_n$ bo'lsin. Har bir x_{ij} -birlikdagi yukni i-chi jo'natish punitidan j-chi qabul qilish punitiga olib borish narxi (xarajati) c_{ij} - maьlum bo'lsin. Bu yuklarni tashish planini shunday tuzishimiz kyerakki talabgor punktlar maksimal qoniqish olsin va hamma yuklarni olib borish uchun kyetgan xarakatlar yig'indisi minimal bo'lsin.

Transport masalasini shartli ravishda jadval ko'rinishda byeramiz. Jadvalda quyidagilar ko'rsatiladi: qabul qilish punitlari, jo'natish punktlari, yuk zapaslari, yukka bo'lgan extiyoj va har bir i-chi jo'natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga yuboriladigan yuk birliklarining narxi (yaьni taьrif matricasi) byeriladi.

<table>
<tr><td rowspan="2">Jo'natish punktlari</td><td colspan="4">Qabul qilish punktlari</td><td rowspan="2">YUk zapaslari</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>. . . .</td><td>B_n</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>s_{11}
x_{11}</td><td>c_{12}
x_{12}</td><td>. . . .</td><td>c_{1n}
x_{1n}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>s_{21}
x_{21}</td><td>c_{22}
x_{22}</td><td>. . . .</td><td>c_{2n}
x_{2n}</td><td>a_2</td></tr>
</table>

. . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . .
A_m	s_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . . .	c_{mn} x_{mn}	a_n
YUkga bo'lgan extiyoj	b_1	b_2	. . . .	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

Bu yerda C={c_{ij}} matricasiga ta'rif matricasi yoki transport xarajatlari dyeyiladi. X={x_{ij}} matricaga esa -transport masalsining plani dyeyiladi. Bu yerda x_{ij} - i-chi punktdan j-chi punktga yetkaziladigan yuklar hajmi (soni).

Tashish plani bilan bog'liq kyetgan xarajatlarning umumiy yig'indisi quyidagi maqsad funkciyasi orqali ifodalanadi.

$$Z= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+ \ldots +c_{1n}x_{1n}+ c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+ \ldots +c_{2n}x_{2n}+ \ldots$$
$$c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+ \ldots +c_{mn}x_{mn}$$

Bu yerda x_{ij}- o'zgaruvchilar yuk zapasi, yukga bo'lgan extiyoj va manfiy bo'lmaslik shartlarini (chyegaralanishlarni) bajargan bo'lishi kyerak.

YUqoridagilarni hisobga olgan holda transport masalasining matyematik modyelini quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Transport masalasining matyematik qo'yilishi quyidagicha talqin qilinadi: CHyegaraviy sistyemalar, manfiy bo'lmaslik sharti va maqsad funkciyasi byerilgan dyeylik. Talab qilinadiki sistyemaning yechimlar to'plamidan shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini (planini) topish kyerakki, maqsad funkciyasi minimal qiymatga erishsin.

Transport masalasi ikki turga bo'linadi, ochiq va yopiq turdagi. Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga tyeng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

masala yopiq turdagi masala bo'ladi

Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga tyeng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

masala ochiq turdagi masala bo'ladi.

4.2.Transport masalasining yechish usullari

Transport masalasini yechish ikki bosqichdan iborat.

1.Boshlang'ich tayanch planni topish.

2.Tayanch planlar ichidan optimal planni topish.

Tayanch planni tuzishning bir nyecha usullari mavjud: «SHimoliy-g'arb burchak», «Kichik elyemyentlar», «Fogyelь» va boshqalar.

Transport masalasi uchun boshlang'ich tayanch planni topish.

«SHimoliy-g'arb burchak» usuli.

YUklarni tashishning boshlang'ich planni tuzishda «shimoliy-g'arb burchak» usulidan foydalanish quyidagicha amalga oshiriladi:

1.Ta'rif jadvali tuziladi.

	b_1	b_2	. . . . .	b_n
a_1	s_{11}	c_{12}	. . . . .	c_{1n}
a_2	s_{21}	c_{22}	. . . . .	c_{2n}
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
a_m	s_{m1}	c_{m2}	. . . . .	c_{mn}

2.CHap tomondagi yuqoridagi burchak, ya'ni (shimoliy-g'arb burchak) dan boshlab satr bo'yicha yoki ustun bo'yicha siljiymiz. (1,1) katakga a_1 va v_1 ning eng kichigini joylashtiramiz, ya'ni $x_{11}=\min(a_1,b_1)$.

3.Agar $a_1>b_1$ bo'lsa $x_{11}=b_1$ ni byeramiz, birinchi ustun shu bilan yopiladi, yaьni $x_{i1}=0$ (i=2,m). (Birinchi qabul qiluvchining talabi to'liq qanoatlantirildi).

4.Birinchi satr bo'yicha siljiymiz (1;2) katakga, bu yerga a_1-b_1,b_2 ning eng kichigini joylashtiramiz, yaьni $x_{12}=\min(a_1-b_1,b_2)$.

5.Agar $b_1>a_1$ bo'lsa 1-chi satr yopiladi, yaьni $x_{1j}=0$ (j=2,n).

6.Qo'shni kataklarni to'ldirishga o'tamiz (2.1), yaьni $x_{21}=\min(a_2,b_1-a_1)$.

7.Ikkinchi satr yoki ikkinchi ustun kataklarini to'ldirishga o'tamiz va hakazo.

Bu jarayon toki ryesurslar tugamaguncha davom etadi.

«Kichik elyemyentlar» usuli.

«Kichik elyemyentlar» usuli yordamida tayanch planni topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1.YUklar qabul qiluvchilarga tarif jadvalidagi eng kichik c_{ij} tashish narxiga mos katakni to'ldirishdan boshlanadi.

2.Eng kichik tarif c_{ij} katagiga a_i yoki b_j ning eng kichigi joylashtriladi.

3.Kyeyin to'ligincha yuk zapaslari rasxod qilingan satr yoki qabul qilish punkti talabi qondirilgach mos ustun yo'qotiladi.

4.Agar jo'natish punktidagi yuk zapaslari to'liq taqsimlangan bo'lsa va qabul qiluvchi talabi to'liq qanotlantirilsa ularga mos satr va ustun yo'qotiladi.

5.Qolgan satr va ustunlardan yana kichik ta'rif olinadi. YUk zapaslarini taqsimlash jarayoni, toki yuk zapasi tugaguncha va talablar qanoatlantirilguncha davom etadi.

Transport masalasining optimal planni topishning Potyenciallar usuli.

Agar yuqoridagi usullar yordamida boshlang'ich tayanch plan topilgan bo'lsa optimal planni topish potyenciallar usulida bajariladi.

Transport masalasi optimal planni topishning potyenciallar usuli quyidagilardan iborat:

1.YUqoridagi kyeltirilgan usullar yordamida yuklarni tashishning tayanch plani aniqlanadi.

2.Mos ravishda yuklarni qabul qiluvchi va jo'natuvchi punktlar uchun u_i va v_j potyenciallari aniqlanadi.

3.Bush kataklarda potyenciallar yig'indisi hisoblanadi $s'_{ij} = u_i+v_j$.

4.Bo'sh kataklarda c_{ij} va s'_{ij} tariflar farqi xisoblanadi.

$S_{ij} = c_{ij} +s'_{ij}= c_{ij} -(u_i+v_j)$.

5.Agar, xamma bo'sh kataklardagi fark $S_{ij}>0$ bo'lsa olingan plan optimal bo'ladi.

6.Agar, bo'sh kataklardan birortasida $S_{ij}<0$ bo'lib qolsa, bo'sh bo'lmagan kataklarga x_{ij} o'zgaruvchi qiymati kiritiladi, ya'ni yuqoridagi farq minimal bo'lsin. SHu katak uchun bo'sh bo'lmagan kataklar yordamida yopiq kontur xosil qilinadi va yuklar shu konturda qayta taqsimlanadi. Natijada yangi tashish planga ega bo'lamiz.

Bu jarayon toki farq $S_{ij}>0$ bo'lmaguncha davom etadi va oxirgi olingan yuklarni tashish plani optimal bo'ladi.

Misol.

Quyidagi jadvalda byerilgan transport masalasini yeching

b_k / a_i	40	25	20	50
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

YEchish: Boshlang'ich tayanch planni «SHimoliy-g'arb burchak» va «Kichik elyemyentlar» usulida topamiz. «SHimoliy-g'arb burchagi» usuli qoidasiga binoan jadvalning (1,1) katagiga $X_{1,1}$=min(60,40)=40 sonini joylashtiramiz, kyeyingi X_{12}=min(60-40,25)=20 sonini (1,2) katagiga joylaymiz. SHu bilan birinchi punktda yuk tugadi va kyeyingi kataklar (1,3) va (1,4) yopildi.

Kyeyingi punktdagi yuklarni taqsimlashni boshlaymiz. (2,2) katakga X_{22}=min(40,5)=5 sonini joylashtiramiz. SHu bilan 1-chi va 2-chi talabgorlar talabi qondirildi, yani 1-chi va 2-chi ustun yopildi. (2,3) katakka X_{23}=min(35,20)=20 joylashtiriladi. 3-chi talabgor talabi bajarildi. qolgan yukni (2,4) katakka joylashtiramiz, ya'ni X_{24}=min(15,50)=15 va ikkinchi jo'natish punktida yuk tugadi. 3-chi jo'natish punktidagi yukni taqsimlashni boshlaymiz. (3,1),(3,2),(3,3) kataklar yepilgan, ya'ni 1,2 va 3 talabgorlar talabi qondirilgan. (3,4) katakka X_{34}=min(35,35)=35 yozamiz. SHu bilan yuklar to'liq taqsimlandi, ya'ni quyidagi planga ega bo'ldik.

$$X = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Maqsad funkciyasi qiymati Z=595 ni tashkil qiladi.

Qo'yilgan masalaning tayanch planini endi «Eng kichik elyemyentlar» usuli bilan topamiz.

YEchish: Ustun yoki satr bo'yicha eng kichik xarajatni topamiz.

Satr bo'yicha bu elyemyent (1;3) katakda joylashgan, ya'ni c_{13} =1. SHuning uchun bu katakga X_{13}=min(60,20)=20 yukni joylaymiz. Uchinchi talabgorning talabi qanoatlantirildi. SHu tufayli kyeyingi xisoblashlarda 3-chi ustun qaralmaydi. Kyeyingi eng kichik elyemyentni topamiz. Bu elyemyent (1,4) va (2,2) kataklarda joylashgan, ya'ni s_{14}=2 va s_{22}=2. YUklarni bu kataklarga joylaymiz. X_{14}=min(60-20,50)=40, X_{22}=min(40,25)=25. Ikkinchi talabgor talabi qanoatlantirildi, shu tufayli kyeyingi xisoblashlarda 2-chi ustun qaralmaydi.

Kyeyingi eng kichik elyemyentlar (2,4) va (3,2) kataklarda joylashgan, ya'ni s_{24}=3 va s_{32}=3. Bu kataklarga yuklarni joylashtiramiz X_{24}=min(40-25,50-40)=10. (3,2) katak qaralmaydi, chunki bu ustun xisobdan chiqarilgan. Kyeyingi eng kichik elyemyentni izlaymiz, bu elyemyent s_{21}=4. YUkni bu katakga joylaymiz X_{21}=min(15-10, 40)=5. Eng oxirgi kichik elyemyent s_{31}=7. Bu katakga ham yukni joylaymiz X_{31}=min(35,40-5)=35. Natijada yuklarni taqsimlab, boshlang'ich tayanch planga ega bo'ldik, ya'ni

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maqsad funkciyasini xisoblaymiz Z=415.

Endi masalaning optimal planini topamiz. Optimal planni topish uchun potyenciallar usulidan foydalanamiz. Boshlang'ich tayanch plan «Eng kichik elyemyentlar» usulida topilgan dyeylik. Uni quyidagi jadval kurinishida yozamiz.

b_k	40	25	20	50	u

a_i					
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 5	- 2 25	6	3 10	1
35	- 7 35	+ 3	5	4	4
V	3	1	1	2	

Jadvalda bo'sh bo'lmagan kataklar quyidagi shartni qanoanlantiriadi.

$$r=3+4-1=6$$

YUkni jo'natuvchi va talabgorlar potyencialini aniqaymiz va quyidagi tyenglamalarga ega bo'lamiz.

$u_1+v_3=1$; $u_1+v_4=2$; $u_2+v_1=4$

$u_2+v_2=2$; $u_2+v_4=3$; $u_3+v_1=7$

Ma'lumki tyenglamalar soni nomalumlar sonidan 1 ta kam, ya'ni nomalumlar 1 tasi ozod va u istalgan qiymat olishi mumkin. Misol uchun aytaylik $u_1=0$. U xolda qolgan potyenciallar quyidagicha aniqlanadi

$u_1=0$, $v_3=1$, $v_4=2$, $u_2=1$, $v_2=1$, $v_1=3$, $u_3=4$.

Bo'sh kataklarda s_{ij} qiymatini qo'yidagi formula bilan aniqlaymiz $S_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$. U holda

$S_{11}=5-(0+3)=2$; $S_{12}=4-(0+1)=3$; $S_{23}=6-(1+1)=4$;

$S_{32}=3-(4+1)=-2$; $S_{11}=5-(4+1)=0$; $S_{34}=4-(4-+2)=-2$.

Olingan plan optimal bo'la olmaydi, chunki s_{ij} lar ichida manfiylari ham mavjud $S_{32}=S_{34}==-2$. Bu kataklar uchun yopiq kontur (cikl) hosil qilamiz. (3,2) katak uchun kontur (3,2),(3,1),(2,1),(2,2). Konturni soat stryekasi yoki unga tyeskari bo'yicha (3,2) katakdan boshlab kyetma-kyet + va - ishoralarini qo'yib chiqamiz. Manfiy kataklardan eng kichigini tanlaymiz min(25;35)=25, ya'ni $x_{22}=25$. Kataklarda yuklarni qayta taqsimlaymiz. Taqsimlanishda umumiy balans bu kataklarda buzilmasin va xarajatlar minimal bo'lsin. Minusli katak (2,2) dagi yukni kyeyingi musbat katakdagi yukga qo'shamiz. U holda (2,1) katakda yuk 5+25=30 bo'ladi. Balans buzilmaslik uchun (3,1) katakdagi yukdan 25 birligini (3,2) katakga yuklaymiz. SHunday qilib yangi planga ega bo'ldik. Bu jadval uchun potyenciallarni aniqlaymiz va bo'sh kataklarda s_{ij} larni hisoblaymiz:

$S_{11}=5-(0+3)=2$; $S_{12}=4-(0+1)=3$; $S_{23}=6-(1+1)=4$;

$S_{22}=2-(2+1)=0$; $S_{33}=5-(4+1)=0$; $S_{34}=4-(4-+2)=-2$;

b_k / a_i	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 30	2 0	6	- 3 10	1

35	- 7 10	3 25	5	+ 4	4
v	3	1	1	2	

YAngi olingan plan ham optimal emas, chunki S_{34}=-2. YOpiq kontur tuzamiz va yuklarni bu kontur ichida qayta taqsimlaymiz va natijada quyidagi planga ega bo'lamiz.

b_k / a_i	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 0	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
V	3	1	1	2	

Olingan plan optimal plan, chunki barcha bo'sh kataklarda S_{ij} lar musbat. Dyemak, optimal plan quyidagicha bo'ladi.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Maqsad funkciyasining qiymati z_{min}=375.

4.3.Ochiq turdagi transport masalasi

Ba'zi transport masalalarida yuk zapaslari talablar yig'indisidan kichik yoki katta bo'lishi mumkin. Bunday masalalar ochiq turdagi transport masalasi dyeyiladi. Bunday hollarda soxta (fiktiv) m+1 jo'natish yoki n+1 qabul (istyemol) qiluvchi punktlari kiritiladi, ya'ni

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0 \quad \text{yoki}$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$$

Bu punktlarda transport xarajatlari nulga tyeng qilib olinadi, ya'ni $c_{m+1,j}=0$ yoki $c_{i,n+1}=0$.

Misol. Quyidagi ochiq modyelli transport masalasini yeching.

b_k / a_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3

5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Bu masalada

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 > \sum_{j=1}^{5} b_j = 13$$

SHuning uchun oltinchi soxta talabgorni kiritamiz, uning talabi b_6=16-13=3 bo'ladi. Bu soxta punktni kiritib, masalani quyidagicha yozamiz.

b_k / a_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Bu masalani yechib 7-ciklda optimal yechimni topamiz, ya'ni

$x_{12}=1,\ x_{13}=3,$
$x_{24}=2,\ x_{25}=2,\ x_{26}=1,$
$x_{31}=3,\ x_{32}=2,\ x_{36}=2,$

$y_{min}=1\cdot2+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot2+1\cdot0+0\cdot3+2\cdot2+2\cdot0=13$

Amaliy mashg'ulot uchun misollar

Uchta A_1, A_2, A_3 paxta punktlarida mos ravishda a_1, a_2, a_3 tonnadan paxta bor. Bu paxtalarni V_1, V_2, V_3 ,V_4 magazinlarga mos ravishda v_1, v_2, v_3, v_4 tonnadan taksimlash zarur. Agar bir tonna paxtani tashish narxi d_{ij} bulsa, tashishning optimal planni tuzing. Kiymatlar mos ravishda variantdan olinadi.

1. $a_1=330$, $a_2=260$, $a_3=310$; $b_1=180$, $b_2=220$, $b_3=300$, $b_4=200$

$$d=\begin{vmatrix}10 & 13 & 16 & 9\\ 11 & 14 & 17 & 8\\ 12 & 15 & 18 & 7\end{vmatrix}$$

2. $a_1=240$, $a_2=230$, $a_3=230$; $b_1=150$, $b_2=160$, $b_3=170$, $b_4=220$

$$d=\begin{vmatrix}9 & 12 & 15 & 18\\ 10 & 13 & 16 & 19\\ 11 & 14 & 17 & 10\end{vmatrix}$$

3. $a_1=390$, $a_2=290$; $b_1=240$, $b_2=230$

$$d=\begin{vmatrix}18 & 15 & 12 & 15\\ 17 & 13 & 16 & 17\end{vmatrix}$$

$a_3= 320$ $b_3 =310$ 16 9 17 16
$b_4=220$

4\. $a_1=330$, $a_2=420$, $a_3= 350$; $b_1=320$, $b_2= 210$, $b_3 =290$, $b_4=280$

$$d = \begin{vmatrix} 19 & 11 & 18 & 12 \\ 16 & 9 & 15 & 10 \\ 13 & 17 & 14 & 20 \end{vmatrix}$$

5\. $a_1=340$, $a_2=410$, $a_3= 350$; $b_1=270$, $b_2= 260$, $b_3 =290$, $b_4=280$

$$d = \begin{vmatrix} 20 & 13 & 15 & 12 \\ 19 & 17 & 10 & 13 \\ 9 & 16 & 11 & 14 \end{vmatrix}$$

6\. $a_1=200$, $a_2=250$, $a_3= 150$; $b_1=180$, $b_2= 120$, $b_3 =130$, $b_4=170$

$$d = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 7 \\ 7 & 6 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

7\. $a_1=250$, $a_2=200$, $a_3= 150$; $b_1=130$, $b_2= 110$, $b_3 =190$, $b_4=170$

$$d = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 14 & 17 \\ 13 & 8 & 11 & 20 \\ 19 & 16 & 12 & 21 \end{vmatrix}$$

8\. $a_1=280$, $a_2=220$, $a_3=300$; $b_1=180$, $b_2= 270$, $b_3 =310$, $b_4=200$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 15 & 16 \\ 12 & 14 & 21 & 10 \\ 16 & 19 & 17 & 13 \end{vmatrix}$$

9\. $a_1=250$, $a_2=200$, $a_3= 150$; $b_1=180$, $b_2= 120$, $b_3 =130$, $b_4=170$

$$d = \begin{vmatrix} 20 & 15 & 16 & 13 \\ 3 & 14 & 21 & 10 \\ 12 & 16 & 19 & 17 \end{vmatrix}$$

10\. $a_1=350$, $a_2=400$, $a_3= 250$; $b_1=230$, $b_2= 270$, $b_3 =200$, $b_4=300$

$$d = \begin{vmatrix} 15 & 16 & 13 & 10 \\ 20 & 14 & 21 & 17 \\ 3 & 12 & 16 & 19 \end{vmatrix}$$

11\. $a_1=250$, $a_2=250$, $a_3= 250$; $b_1=200$, $b_2= 120$, $b_3 =180$, $b_4=250$

$$d = \begin{vmatrix} 16 & 13 & 10 & 17 \\ 15 & 21 & 14 & 19 \\ 20 & 3 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

12\. $a_1=250$, $a_2=270$; $b_1=170$, $b_2= 160$

$$d = \begin{vmatrix} 13 & 10 & 17 & 19 \\ 16 & 21 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

$a_3 = 170$ $\quad b_3 = 110$ $\quad$ 15 20 5 12

$b_4 = 250$

13\. $a_1 = 350$ $\quad b_1 = 320$

$a_2 = 300$ $\quad b_2 = 260$

$a_3 = 370$ $\quad b_3 = 215$

$b_4 = 225$

$$d = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 19 & 16 \\ 13 & 14 & 21 & 12 \\ 16 & 15 & 20 & 5 \end{vmatrix}$$

14\. $a_1 = 250$ $\quad b_1 = 190$

$a_2 = 350$ $\quad b_2 = 210$

$a_3 = 300$ $\quad b_3 = 230$

$b_4 = 270$

$$d = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 \\ 13 & 13 & 18 & 12 \\ 19 & 9 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

15\. $a_1 = 230$ $\quad b_1 = 200$

$a_2 = 400$ $\quad b_2 = 280$

$a_3 = 280$ $\quad b_3 = 250$

$b_4 = 180$

$$d = \begin{vmatrix} 17 & 13 & 17 & 20 \\ 10 & 9 & 15 & 6 \\ 7 & 13 & 21 & 7 \end{vmatrix}$$

16\. $a_1 = 290$ $\quad b_1 = 200$

$a_2 = 310$ $\quad b_2 = 180$

$a_3 = 240$ $\quad b_3 = 220$

$b_4 = 240$

$$d = \begin{vmatrix} 6 & 14 & 18 & 14 \\ 13 & 7 & 5 & 15 \\ 16 & 10 & 16 & 9 \end{vmatrix}$$

17\. $a_1 = 330$ $\quad b_1 = 130$

$a_2 = 370$ $\quad b_2 = 280$

$a_3 = 300$ $\quad b_3 = 230$

$b_4 = 360$

$$d = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 16 & 11 \\ 21 & 10 & 7 & 23 \\ 19 & 13 & 17 & 18 \end{vmatrix}$$

18\. $a_1 = 340$ $\quad b_1 = 200$

$a_2 = 260$ $\quad b_2 = 240$

$a_3 = 280$ $\quad b_3 = 180$

$b_4 = 260$

$$d = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 12 & 15 \\ 11 & 9 & 14 & 13 \\ 10 & 6 & 16 & 9 \end{vmatrix}$$

19\. $a_1 = 300$ $\quad b_1 = 190$

$a_2 = 280$ $\quad b_2 = 170$

$a_3 = 220$ $\quad b_3 = 240$

$b_4 = 200$

$$d = \begin{vmatrix} 8 & 12 & 10 & 15 \\ 4 & 13 & 15 & 14 \\ 9 & 16 & 17 & 11 \end{vmatrix}$$

20\. $a_1 = 400$ $\quad b_1 = 225$

$a_2 = 250$ $\quad b_2 = 230$

$a_3 = 350$ $\quad b_3 = 335$

$b_4 = 210$

$$d = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 14 & 17 \\ 9 & 5 & 11 & 22 \\ 4 & 17 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$

21\. $a_1 = 200$ $\quad b_1 = 150$

$a_2 = 150$ $\quad b_2 = 120$

$a_3 = 160$ $\quad b_3 = 90$

$$d = \begin{vmatrix} 8 & 20 & 11 & 16 \\ 41 & 14 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 12 & 19 \end{vmatrix}$$

$b_4=260$

22. $a_1=300$ $b_1=190$ $d=\begin{vmatrix} 12 & 7 & 18 & 7 \\ 14 & 12 & 15 & 3 \\ 16 & 11 & 21 & 15 \end{vmatrix}$

$a_2=170$ $b_2=140$

$a_3=280$ $b_3=180$

$b_4=240$

23. $a_1=250$ $b_1=120$ $d=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & 4 \\ 10 & 9 & 11 & 5 \\ 11 & 6 & 13 & 8 \end{vmatrix}$

$a_2=200$ $b_2=135$

$a_3=150$ $b_3=215$

$b_4=130$

24. $a_1=250$ $b_1=220$ $d=\begin{vmatrix} 15 & 9 & 7 & 11 \\ 9 & 19 & 8 & 13 \\ 16 & 16 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

$a_2=400$ $b_2=300$

$a_3=350$ $b_3=280$

$b_4=200$

25. $a_1=150$ $b_1=130$ $d=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 15 & 20 \\ 10 & 12 & 20 & 14 \\ 11 & 16 & 19 & 22 \end{vmatrix}$

$a_2=150$ $b_2=170$

$a_3=200$ $b_3=90$

$b_4=110$

4.4.Ishlab chiqarishni ryejalashtirish masalasi

Optimal ryejalashtirishning matyematik modyeli iqtisodiy jarayonlarning barchasida chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalasiga kyeladi. Masalan, mahsulot ishlab chiqarishning optimal plani topish masalasi, korxonalarni optimal joylashtirish masalasi, ryesurslarni taqsimlash masalasi va boshqa. Bu masalalar ichida ryejalashtirish va taqsimot masalasi alohida o'rin tutadi.

Korxona tayyor mahsulot ishlab chiqarish uchun m-xil ryesurslarga ega bo'lsin. Har bir ryesursning hajmi maьlum bo'lib, bir birlik mahsulotga kyetadigan mos ryesursning normasi ham aniq dyeylik. Ayrim ishlab chiqariladigan mahsulotlarga talab ham aniq va ularning bir birligi uchun oladigan daromadi ham byerilgan. Ryesurslarning chyeklanganligini hisobga olgan holda, har bir ishlab chiqariladigan mahsulotning hajmini aniqlash kyerak.

Quyidagi byelgilashlarni kiritamiz:

j-ryesurs nomyeri;

m-ryesurslar soni;

i-ishlab chiqariladigan mahsulot nomyeri;

n-ishlab chiqariladigan mahsulot soni;

A_i -i-chi ryesursning hajmi;

a_{ij} -bir birlik j-chi maxsulotga i -chi ryesursdan kyetadigan norma;

B_j -j-chi mahsulotga bo'lgan boshqa korxonalar talabi;

c_j -har qaysi ishlab chiqarishdan kyeladigan iqtisodiy foyda;

x_j - har bir ishlab chiqiladigan maxsulot xajmi.

Ishlab chiqarishning shunday X planini tuzish talab qilinadiki, tayyorlanadigan mahsulotning har biri ($x_1, x_2, \ldots x_n$) dan eng ko'p umumiy foyda kyeladigan bo'lsin.

U holda masalaning matyematik modyeli quyidagicha bo'ladi:

1) Maqsad funkciyasi.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

2) Ryesurslar uchun quyidagi chyeklanishlar;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

3) Talablar uchun chyeklanishlar:

$$x_j \ge B_j$$

4) O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti.

$$x_j \ge 0$$

CHyeklanishlar sistyemasi hamda maqsad funkciya noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lgani uchun masala chiziqli programmalash masalasi bo'ladi.

Masalani quyidagicha tavsiflash mumkin. X planning shunday x_j komponyentlari topilsinki, ular barcha tyengsizliklarni qanoatlantirib Z funkciyanalga eng katta qiymat byersin.

1-masala. Fabrika ikki xil A va V tikuv maxsulti ishlab chiqaradi. Bu maxsulotlarni ishlab chiqarishda uch xil N_1, N_2, N_3 tipdagi matyeiallarni ishlatadi. N_1-matyerialdan 15 m., N_2-matyerialdan 16 m., N_3-matyerialdan 18 m. mavjud.

M_1- mahsulotni ishlab chiqarish uchun N_1-dan 2m., N_2-dan 1m., N_3-dan 3m. ishlatadi.

M_2- maxsulotni ishlab chiqarish uchun N_1-dan 3m., N_2-dan 4m., N_3-dan 0m. ishlatadi.

M_1- maxsulotning bir birligidan kyeladigan foyda 10 so'mni, M_2 - maxsulotdan kyeladigan foyda 5 so'mni tashkil qiladi.

Ishlab chiqarishning shunday planini tuzish kyerakki fabrika maksimal foyda olsin.

Masalaning matyematik modyelini tuzamiz:

$2x_1+3x_2 \le 15$

$x_1+4x_2 \le 16$

$3x_1 \le 18$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

$Z=10x_1+5x_2 \to \max$

2-masala. Zavod ikki xil A va V tovar ishlab chiqaradi. Bu tovarlarni ishlab chiqarishda to'rt xil R_1,R_2,R_3, R_4 ryesurslarni ishlatadi, ya'ni

R_1- tokor stonogidan 5700 norma soat.

R_2- fryezyerchi stanogidan 3700 norma soat.

R_3- yig'ish uchun 5000 norma soat.

R_4- yarim fabrikat 610 kg.

A- maxsulotning bir birligini tayyorlash uchun:

R_1 -dan 300 norma soat.

R_2 -dan 200 norma soat

R_3 - dan 200 yig'ish norma soat.

R_4 - dan 10 kg. kyerak bo'ladi.

Bir birlik V-maxsulotni tayyorlash uchun:

R_1 dan 400 norma soat.

R_2 dan 100 norma soat.

R_3 dan 500 norma soat.

R_4 dan 75 kg kyerak bo'ladi.

A-maxsulotdan eng kamida 10 ta.

B-dan chyeklanmagan.

Bir birlik A-maxsulotdan kyeladigan foyda 3 ming so'mni, V-dan 8 ming so'mni tashkil qiladi. Ishlab chiqarishning shunday planini tuzishimiz kyeraki, zavod maksimal foyda olsin. Masalaning matyematik modyelini tuzamiz.

x_1 -A -maxsulot xajmi.

x_2 -V-maxsulot xajmi.

1)Ryesurslarning chyeklanishini tuzamiz:

$300x_1+400x_2\leq5700$

$200x_1+100x_2\leq3700$

$200x_1+500x_2\leq5000$

$10x_1+70x_2\leq610$

2)A maxsulotni ishlab chiqarish uchun minimal chyegara:

$x_1\geq10$, x_2 dan istalgancha.

3)O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti

$x_1\geq0$, $x_2\geq0$

4)Maqsad funkciyasi

$Z=3x_1+8x_2\rightarrow\max$

4.5.YUk tashishda transportlarni taqsimlash masalasi

Taqsimot masalasi juda ko'p sohalarda uchraydi. Bu masalani yuklarni yoki pasajirlarni tashishda yo'llar bo'yicha transportlarni taqsimlash masalasida qarab chiqaylik. Bu masalaning qo'yilishi quyidagicha bo'ladi.

m ta transport yo'liga taqsimlash uchun n xil transport byerilgan bo'lsin. Agar i-xildagi transport soni N_i (i=1,2,..,n) ga j-nomyerli transport yo'li bo'yicha i-xil transport bir oylik yuk, tashish hajmi a_{ij} birlikka va shu bilan bog'liq bo'lgan xarajat b_{ij} so'mga tyeng bo'lsa, eng kam xarajat sarflab, j-nomyerli transport yo'li bo'yicha c_j birlikdan kam bo'lmagan tashish ishini ta'minlash uchun zarur bo'lgan i-xildagi transportlar soni x_{ij} ni topish masalasining matyematik modyelini tuzish talab qilingan bo'lsin.

Birinchidan barcha tashish uchun kyetadigan xarajat quyidagiga tyeng bo'ladi.

$$Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Ikkinchidan, masala shartiga ko'ra i-xildagi transport soni N_i ga tyeng bo'lib, j-nomyerli transport yo'li bo'yicha c_j birlikdan kam bo'lmagan tashish ishini bajarish kyerak bo'lganligi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq c_j, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = N_i$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m})$$

Bu va yuqoridagi maqsad funkciyasi masalaning matyematik modyeli bo'lib hisoblanadi.

Masala. To'rtta havo yo'liga taqsimlash uchun 3 xil samolyot byerilgan bo'lsin. Agar har bir xildagi samolyotlarning soni, bir oylik yuk tashish hajmining birligi va samolyotlarni ishlatish uchun kyetgan xarajatlarning son qiymati quyidagi jadvaldagidyek bo'lsa, samolyotlarni shunday taqsimlash kyerakki, eng kam xarajat sarflab, har bir havo yo'li bo'yicha mos ravishda 300, 200, 1000, va 500 birliklardan kam bo'lmagan yuk tashilsin.

Samolyotlar xili	Samolyotlar soni	Har bir havo yo'li bo'yicha bir oylik yuk tashish hajmi				Har bir havo yo'li bo'yicha samolyotlarni ishlatish uchun kyetgan xarajat			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1 2 3	50 20 30	15 30 25	10 25 50	20 10 30	50 17 45	15 70 40	20 28 70	25 15 40	40 45 65
YUk tashish birligi miqdori		300	200	1000	500				

Masalaning matyematik modyeli qurilsin.

YEchish. j-nomyerli havo yo'li bo'yicha yuk tashish uchun zarur bo'lgan i-xil samolyotlar sonini x_{ij} bilan byelgilasak, shu yo'llar bo'yicha yuk tashish uchun kyetgan xarajatlar jadvalga asosan quyidagicha bo'ladi:

$Z_1=15x_{11}+70x_{21}+40x_{31}$
$Z_2=20x_{12}+28x_{22}+70x_{32}$
$Z_3=25x_{13}+15x_{23}+40x_{33}$
$Z_4=40x_{14}+45x_{24}+65x_{34}$

Umumiy xarajat esa

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \sum_{i=1}^{4} Z_i$$

ga tyeng bo'ladi. Ikkinchi tomondan, har bir xavo yo'li bo'yicha mos ravishda 300, 200, 1000 va 500 birliklardan kam bo'lmagan yuk tashilishi, hamda har bir xil samolyotdan shu yo'llarning hammasiga 50, 20 va 30 tadan byerkitilishi kyerak bo'lganligi uchun quyidagi chyeklanish shartlariga ega bo'lasiz:

$$\left.\begin{array}{l} 15x_{11} + 30x_{21} + 25x_{31} \geq 300 \\ 10x_{12} + 25x_{22} + 59x_{32} \geq 200 \\ 20x_{13} + 10x_{23} + 30x_{33} \geq 1000 \\ 50x_{14} + 17x_{24} + 45x_{34} \geq 500 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30 \\ x_{ij} \geq 0,\; i = \overline{1,3};\; j = \overline{1,4} \end{array}\right\}$$

5 qism

5.CHIZIQSIZ DASTURLASH MASALALARINI TAQRIBIY YECHISH USULLARI

5.1.CHiziqsiz dasturlash masalasining qo'yilishi

Umumiy holda chiziqsiz dasturlash masalasi qo'yilishi quyidagicha formulirovka qilinadi.

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1,\ i = \overline{1, m_1} \\ .... \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i,\ i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ .... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min(\max)$$

bu yerda x_j – boshqarish paramyetrlari yoki chiziqsiz dasiturlash masalasi yechimi, $j=1,2,...,n$;

b_i – fiksirlangan paramyetrlar, $i=1,2,...,m$;

f, g_i – n ta o'zgaruvchiga bog'liq byerilgan funkciyalar, $i=1,2,...,m$.

Agar f va g_i chiziqli bo'lsa, u hoda masala chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi. CHiziqsiz dasturlash masalasiningng matyematik qo'yilishi shundan iboratki, shunday x_j – boshqarish paramyetrlari qiymatini topish kyerakki matyematik modyelda kyeltirilgan chyeklanishlar sistyemasi qanoatlantirilsin va maqsad funkciyasi maksimum yoki minimum qiymatga erishsin.

CHiziqsiz dasturlash quyidagi bo'limlardan iborat:

- qavariq dasturlash,
- kvadratik dasturlash,
- butun sonli dasturlash,
- stoxastik dasturlash,
- dinamichyesk dasturlash va boshqa.

Qavariq dasturlash masalasi – bu shunday masalaki byerilgan yopiq qavariq to'plamda qavariq funkciya minimumi (yoki maksimumi) aniqlanadi. Bu masala chiziqsiz dasturlash masalalari ichida ko'proq o'rganilgan.

Kvadratik dasturlash masalasi to'liq o'rganilib chiqilgan. Unda maqsad funkciyasi – kvadratik, chyeklanishlar esa chiziqli bo'ladi.

Staxastik dasturlash masalasida maqsad funkciyasi yoki chyeklanishlardagi funkciyalar ehtimollar nazariyasi qonuniyatlariga bo'ysinuvchi tasoddifiy miqdorlarni o'z ichiga olgan bo'ladi.

Ditnamik dasturlash masalasida chyeklanishlar vaqt bo'yicha paramyetrlarni o'z ichiga olib, diffyeryencial tyenglamalar bilan ifodalanadi. Ditnamik dasturlash masalasining yechimlarini topish ko'p bosqichlidir.

Butun sondi dasturlash masalasida no'malum paramyetrlar faqat butun qiymatlarni qabul qiladi.

CHiziqsiz dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masalasidan farqli tomoni shundaki uning uchun aniq bir yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funkciyasi va chyegaralanishlar ko'rinishiga qarab bir nyecha maxsus yechish usullar ishlab chiqilgan. Ularga Lagranj ko'paytuvchisi usuli, kvadratik va qavariq dasturlash, gradiyent usullar, qator taqribiy usullar va grafik usullarni kyeltirish mumkin.

CHiziqsiz dasturlash masalalarining maqsad funkciyalari va chyeklanish shartlarida qatnashadigan funkciyalar izlanayotgan noma'lumlarning chiziqsiz funkciyalaridan iborat bo'ladi. Agar bizga n o'zgaruvchi, ya'ni $X=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ga bog'lik bo'lgan birorta funkciyaning chyeklanish tyenglamalari yoki tyengsizliklari sistyemasini qanoatlantiradigan minimumni topish talab qilingan bo'lsa, bu shartli minimallsh masalasi shartsiz minimallash masalasiga kyeltiriladi. Bu funkciyaning minimumi mavjudligining birinchi tartibli zaruriy sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0 . \qquad (13.1)$$

Bu shart funkciyaning *stacionarlik sharti* dyeyiladi. Byerilgan *f(x)* funkciyaga minimum byeruvchi stacionar (kritik) nuqtalar (13.1) tyenglamaning yechimidan iborat bo'ladi. *f(x)*funkciya *n* o'zgaruvchiga bog'liq chiziqsiz funkciya bo'lganligidan (13.1) tyenglamaning yechimlarini topish ancha murakkab masalalardan biri bo'lib, uni yechish uchun hozirgacha yagona usul mavjud emas. Bu tyenglamalarning ko'rinishiga qarab, uni yechish uchun har xil taqribiy usullar qo'llaniladi. Masalan, *f(x)* funkciyaning aniqlanish sohasidan x_0 nukta tanlab olinib, bu nuqtada *f(x)* funkciyaning qiymati hisoblanadi. x_0 nuqta *f(x)* funkciyaga minimum byeruvchi x^* nuqtaning nolinchi qadami dyeyiladi. x_0 nuqta funkciyaga minimum byeruvchi x^* nuqta uchun dastlabki taqribiy nuqta bo'lib, x^* nuqtaga yakinroq bo'lgan x_1 taqribiy nuqtaga, ya'ni birinchi qadamga o'tish zarur. Bu o'tish ikki bosqichdan iborat bo'ladi:

1) x_0 nuqtaning x_1 nuqtaga o'tishdagi harakat yunalishi tanlanadi.
2) shu yunalish bo'yicha qanday qadam bilan yurish aniqlanadi.

x_1 nuqtani tanlash umumiy holda quyidagi shartga bo'ysunishi kyerak:

$$f(X_1)<f(X_0).$$

1-ta'rif. Funkciyaning minimumini yoki maksimumini topish algoritmi, agar $X_0 \rightarrow X_1$, $X_1 \rightarrow X_2$, ... $X_{i-1} \rightarrow X_i$ ga o'tish ia'lum bir qoida asosida amalga oshirilsa, dyetyerminallashgan algoritm dyeyiladi.

2-ta'rif. Funkciyaning minimumini yoki maksimumini topish algoritmi agar $X_{i-1} \rightarrow X_i$ utish, ya'ni X_{i-1} dan X_i ga o'tish (i=1,2,…,n) biror tasodifiy myexanizm asosida bo'lsa, tasodifiy algoritm dyeyiladi.

Dyetyerminallashgan algoritmlar nolinchi, birinchi, ikkinchi va hokazo tartibli bo'lishi mumkin.

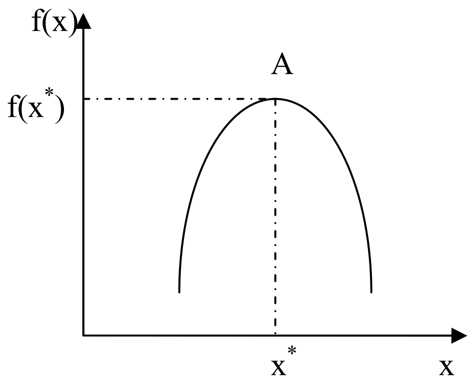
Agar har bir kyetma-kyet yaqinlashishda, ya'ni $X_{i-1} \rightarrow X_i$ da faqat funkciyaning o'zi qatnashadigan bo'lsa, bunday dyetyerminallashgan algoritm-nolinchi, birinchi tartibli hosila qatnashadigan bo'lsa – birinchi va hokazo tartibli algoritmlar dyeyiladi.

Agar birorta chiziqsiz dasturlash masalasi va uning biror taqribiy yechish usuli byerilgan bo'lsa, «Bu taqribiy yechish usulining aniq yechimga yaqinlashish tyezligi kanday?» -dyegan savol tug'iladi. Bu savolga quyidagicha javob byerish mumkin. Agar

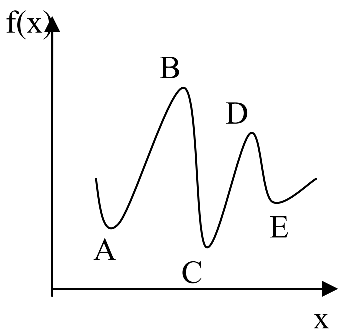
$$\|X_{i-1} - X^*\| < q\| X_i - X^* \|^{\alpha}, \quad 0<q<1$$

Tyengsizlikda α=1 bo'lsa, bu taqribiy yechish usulinig yaqinlashish tyezligi *chiziqli*, α=2 bo'lsa, *kvadratik*, α<1 bo'lsa, *gyeomyetrik* dyeyiladi.

Funkciya ekstryemum byelgisini topishga asosan, agar x^* nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lgan barcha x nuqtalarda f(x) funkciya $f(x^*)$ ga mos kichik (katta) qiymatlarga ega bo'lsa, u hoda f(x) funkciya x^* nuqtada maksimumga (minimum) ega bo'ladi. Bu holat maksimum uchun quyidagi rasmda byerilgan.



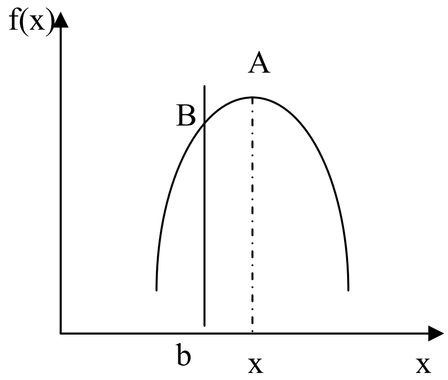
Funkciya maksimum va minimumi ekstryemum tushunchasiga birlashtirilgan bo'lib, balkim u lokal, xuddi shunday global bo'lishi ham mumkin. Quyidagi rasmda f(x) funkciya B va D nuqtalarda maksismal qiymatga ega.



Bu yerda B>D. Bunday holatda B nuqta global maksimum, D nuqta esa lokal maksimum dyeyiladi. Xuddi shunday f(x) funkciya A, C, E nuqtalarda minimal qiymatlarni qabul qiladi. Bu yerda C<A<E. Bunday holatda C nuqta global minimum, A, E nuqtalar esa lokal minimumlar dyeyiladi.

Bu kyeltirilgan misollardan ko'rinib turibliki, global maksimum (minimum) dyeb shunday maksimumga (minimumga) aytiladiki, u barchasidan katta (kichik) bo'ladi.

YEtarlicha tyez-tyez uchrab turadiki, x≤b turdagi chyegaraviy shart kiritilganda funkciyaning eng katta qiymati chyegarada x=b nuqtada jaylashadi. Bu holat quyidagi rasmda ko'rsatilgan.



Bunday holatda f(b) kattalik yuqoridagi ekstryemum byelgisini qanoatlantirmaydi. Bu holda x=b nuqtada f(b)=B funkciya optimumi topiladi dyeb aytiladi.

Byerilgan intyerval ichida yoki uning chyegarasida topilgan funkciyaning eng katta yoki eng kichik qaymatga funkciya – *optimumi* dyeyiladi. Optimum tushunchasi ekstryemumga nisbatan ancha kyeng tushunchadir. Ekstryemum ham, optimum ham lokal va global bo'lishi mumkin. Agar byerilgan $a_j \le x_j \le b_j$ oraliqda maqsad funkciyasi $f(x_j)$ bir nyecha optimumga ega bo'lishligi aniq bo'lmasa, bunday holda intyervalni n ta bo'lakka bo'lish kyerak va har bir oraliqda o'zining lokal otimumini topib, kyeyin esa ular ichidan global optimumni tanlash kyerak bo'ladi. Bunday holda global optimumini topish masalasi bir qancha masalaning yechimini topishga olib kyeladi. SHuni qayd etish kyerakki ko'plab amaliy iqtisodiy va tyexnik optimallash masalalarining faqat bitta optimumi mavjud bo'ladi. CHiziqsiz optimallash masalasi yechish usuli nuqtai nazaridan ikki sinfga bo'linadi:

- shartsiz optimallash masalasi;
- shartli optimallash masalasi.

SHartsiz optimallash masalasi maqsad funkciyasining hyech qanday qo'shimcha shartlarsiz optimumini izlab topishni tasvirlayli va u quyidagicha yoziladi:

$$F(x) \to \max(\text{mun}).$$

Bunday masalalar amaliyotda juda kam uchraydi, uni yechish usuli esa amaliy optimallash masalalarini yechish uchun ososiy bo'lib xizmat qiladi.

SHartli optimallash masalasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$F=f(x_j) \to \max$$
$$g_i(x_j) \le B_i$$
$$d_j \le x_j \le D_j \quad i=1,2,\dots,m; \; j=1,2,\dots,n$$

Optimallash masalasining bunday masalasi o'z ichiga maqsad funkciyasini, hamda qo'shimcha chyegaralovchi shartlar va chyegaraviy shartlarni ham oladi.

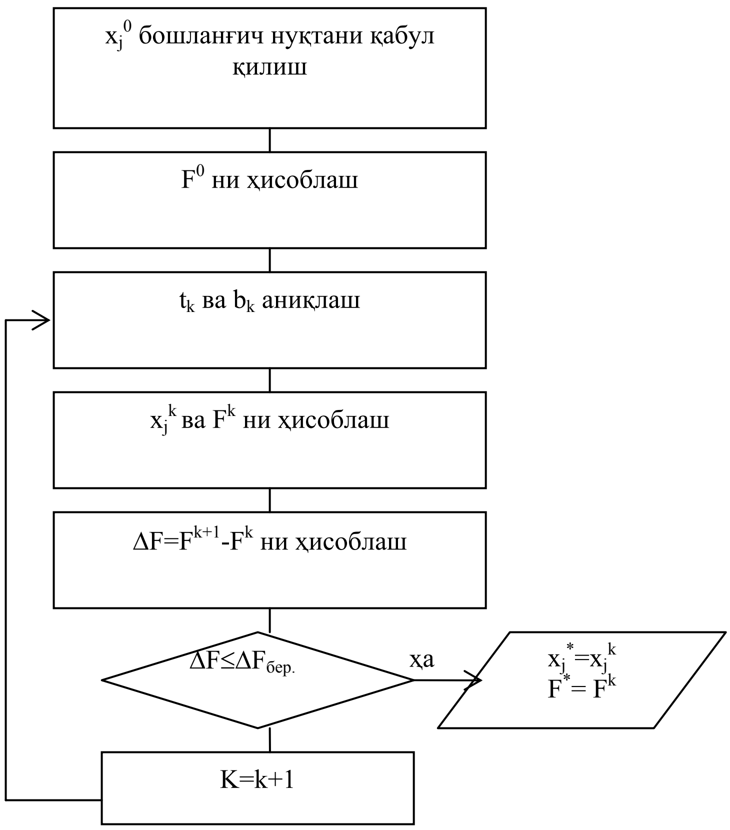
5.2.SHartsiz optimallash masalasini yechish usullari

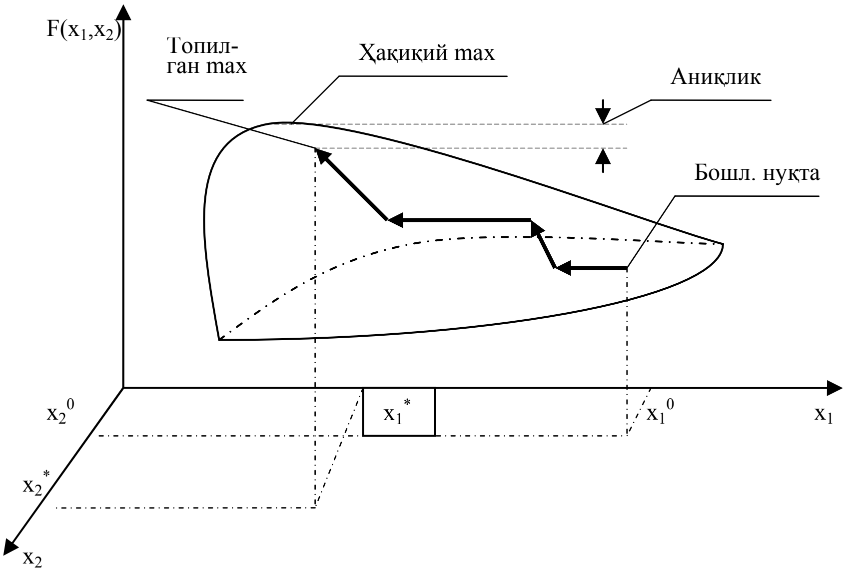
CHiziqsiz optimallash masalasi har xil usullarda yechiladi. Ixtiyoriy sonli o'zgaruvchili funkciya ekstryemumini izlab topish quyidagicha amalga oshiriladi.

Avvalo izlash boshlang'ich nuqta kooordinatasi $x_j^0, j = \overline{1,n}$ byeriladi. Izlash vaqtini qisqartirish uchun, iloji boricha boshlang'ich nuqta $x_j^0, j = \overline{1,n}$ ni izlanayotgan ekstryemumga yaqin tanlash kyerak bo'ladi. Agar ryeal (aniq) masala yechilayotgan bo'lsa, u holda mutaxassis hamma vaqt ekstryemum topiladigan kutilayotgan sohani biladi va boshlang'ich nuqtani unga yaqin qilib tanlaydi. Agar yechilayotgan masalani shu soha mutaxassisi yechmayotgan bo'lsa, u holda boshlang'ich izlash nuqtasi yaxshi tanlanmasligi mumkin. Boshlang'ich yaqinlashuv nuqtasini tanlashning eng asosiy talablaridan biri maqsad funkciyasi bu nuqtada nuldan farqli bo'lishi kyerak, ya'ni

$$f(x_j^0) \neq 0.$$

Izlash algoritmi quyidagi blok sxyemada va uning harakat grafik tasviri esa maksimumni izlab topish holi uchun j=1,2 bo'lganda rasmda kyeltirilgan.





Ekstryemumni izlashniyeng asosiy g'oyasi quyidagidan iborat:

1. $x_j^0, j=\overline{1,n}$ boshlang'ich nuqtani byerish.

2.Byerilgan $x_j^0, j=\overline{1,n}$ nuqtada birinchi qadamda b_j haraqat yo'nalishini aniqlash.

3.t_1 qadam kattaligini qabul qilish.

4.Birinchi qadam oxiri koordinatasini $x_j^1, j=\overline{1,n}$ aniqlash.

5.Birinchi qadamda ekstryemum byelgisi qiymatini hisoblash.

6.Ekstryemum byelgisi bajarilishini tyekshirish.

Agar shart byelgisi bajarilsa, u holda shu nuqtada ekstryemum topilgan bo'ladi, aks holda esa kyeyingi qadam bajariladi.

Izlash usuli dyeb shunday usulga aytiladiki, unda b yo'nalishni va t qadam kattaligini aniqlash uchun faqat maqsad funkciyasi qiymati ishlatiladi.

Bunday usullarga *nulinchi tartibli usullar* dyeyiladi. *Gradiyent usullar* ham mavjud bo'lib, ularga *birinchi tartibli usullar* dyeyiladi va ular b yo'nalishni va t qadam kattaligini aniqlashda maqsad funkciyasi birinchi tartibli diffyeryenciali qiymatini ishlatadi va uning gradiyenti aniqlanadi.

Nьyuton usuli ham mavjud bo'lib, unga *ikkinchi tartibli usullar* dyeyiladi va ular b yo'nalishni va t qadam kattaligini aniqlashda maqsad funkciyasi ikkinchi tartibli diffyeryenciali qiymatini ishlatadi.

Nьyuton usuli

*x** nukta *f(x)* funkciyaga minimum byeruvchi nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada byerilgan funkciyaning gradiyenti nolga tyeng bo'lishi kyerak, ya'ni

$$grad\, f(x^*) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

SHunday qilib, *f(x)* funkciyaga minimum byeruvchi nuqta mavjud bo'lsa, u nuqta quyidagi

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0$$

tyenlamaning yechimlari orasidan topiladi. Faraz qilaylik x_1 nuqta $\varphi(x)=0$ tyenglamaning taqribiy yechimi bo'lsin. $\varphi(x)$ funkciyani $(x- x_1)$ nuqta atrofida yoyamiz:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x}(x - x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)\frac{\partial^2\varphi(x_1)}{\partial x^2}(x - x_1) + ...$$

Bundan iikita qo'shiluvchi bilan chyegaralanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x}(x - x_1) = 0$$

Bundan

$$x = x_1 - \frac{\varphi(x_1)}{\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x}}$$

Munosabatni hosil qilamiz. Maqsad $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ... yaqinlashuvchi kyetma-kyetliklarni topishdan iborat ekanligidan foydalanib, bu formulani quyidagicha ryekurrunt formula orqali yozamiz:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{\varphi(x_{k-1})}{\frac{\partial\varphi(x_{k-1})}{\partial x}} \quad \text{yoki} \quad x_k = x_{k-1} - \frac{\varphi(x_{k-1})}{\varphi'(x_{k-1})}$$

Bu formula **Nьyuton** formulasi dyeyiladi.

Dyemak, Nьyuton usulining aniq yechimga yaqinlashish tyezligi ikkinchi tartibli ekan. Nьyuton usuli bo'yicha hisoblash oldindan byerilgan aniqlik $\varepsilon>0$ son uchun

$$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$$

Tyengsizlik bajarilgunga qadar davom etadi.

Misol 1. $x^2-5=0$ tyenglamaning musbat yechimi $\varepsilon=0,00001$ aniqlikda Nьyuton usuli bilan topilsin.

YEchish. Byerilgan tyenglamaniyeng yechimi 2 bilan 2,5 orasida bo'lgani uchun dastlabki nulinchi yechim dyeb $x_0=2$ ni olamiz. Byerilgan misolda $\varphi(x)=x^2-5$ bo'lgani uchun $\varphi^e(x)=2x^2$.

Dyemak, unda Nьyuton formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^2}{2x_{k-1}}; \;\; k = 1,2,3,...$$

$x_0=2$ bo'lgani uchun

$$x_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{5}{2}) = 2,25\,, \;\; x_2 = \frac{1}{2}(2,25 + \frac{5}{2,25}) = 2,2361$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(2{,}2361 + \frac{5}{2{,}2361}) = 2{,}23605, \quad |x_3 - x_2| = |2{,}23605 - 2{,}2361| \le \varepsilon$$

Dyemak, byerilgan tyenglamaning ε=0,00001 aniqlikdagi yechimi x^*=2,2361 ekan.

CHiziqsiz tyenlamalar tizimini yechish uchun Nьyuton usuli

CHiziqsiz tyenlamalar sistyemasi $f_i(x_1, x_2,...,x_n)=0$, i=1,2,3... ning taqribiy yechimini Nьyuton usulida yechish talab qilingan bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun quyidagi

$$\Delta x_i^{(k)} = x_i - x_i^k \quad \text{yoki} \quad x_i = x_i^k + \Delta x_i^{(k)}$$

Byelgilashlarni kiritiamiz va $F_i(x_1, x_2,...,x_n)=0$ funkciyalarni $\Delta x_i^{(k)}$ ning darajalari bo'yicha Tyeylor qatoriga yoyib, birinchi hosila qatnashgan hadlari bilin chyegaralansak, u holda tyenglamalar sistyemasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_2(X_k)}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = -f_1(X_k)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = -f_n(X_k)$$

Buni matrica ko'rinishida yozsak

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ .. \\ .. \\ .. \\ \Delta x_n^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(X_k) \\ .. \\ .. \\ .. \\ f_n(X_k) \end{bmatrix}$$

ga ega bo'lamiz. Buni Δ_i^k ga nisbatan yechamiz. Lyekin $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{k+1} - x_i^k$ bo'lganligini hisobga olsak quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ .. \\ .. \\ .. \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ .. \\ .. \\ .. \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} f_1(X_k) \\ .. \\ .. \\ .. \\ f_n(X_k) \end{bmatrix}$$

bu yerda $f_i(X_k) = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}),\ i = \overline{1,n}$

Bu formula chiziqsiz tyenlamalar sistyemasining taqribiy yechishning *Nьyuton formulasi* dyeyiladi. Nьyuton usulini yana ham qulayroq qilib quyidagicha yozish mumkin.

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_k)\cdot F(X_k),\ k = 0,1,2,3,...$$

Bu yerda

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ .. \\ .. \\ .. \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix};\ F(X_k) = \begin{bmatrix} f_1(X_k) \\ .. \\ .. \\ .. \\ f_n(X_k) \end{bmatrix};\ W^{-1}(X_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}$$

$W^{-1}(X_k)$ matrica *YAkobi matricasi* dyeyiladi.

Nьyuton usulining modifikaciyalangan varianti ham mavjud bo'lib, unda funkciyaning hosilalaridan tuzilgan matrica elyemyentlari faqat dastlabki taqribiy yechim bo'lgan $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ nuqtalarda hisoblanadi. Bu esa arifmyetik hisoblashlarni birmuncha kamaytiradi. U holda modifikaciya-langan Nьyuton usulini quyidagicha yozish mumkin.

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_0)\cdot F(X_k),\ k = 0,1,2,3,...$$

Lyekin bu modifikaciyalangan usulda aniq yechimga yaqinlashish tyezligi syekinroq bo'ladi.

M i s o l. Boshlang'ich taqribiy yechim $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.5$ bo'lganda

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0 \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

tyenlamalar tizimining taqribiy yechimi Nьyuton usulida hisoblansin.

YEchish: Bu yerda

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix};\ F(X_0) = \begin{bmatrix} 0.25+0.25+0.25-1 \\ 0.5+0.25-2 \\ 0.75-2+0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.0 \end{bmatrix};\ W^{-1}(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Nьyuton formulasiga asosan

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

Dyemak, $x_1^{(1)} = 0.875;\ x_2^{(1)} = 0.5;\ x_3^{(1)} = 0.375$. Endi $x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ x_3^{(1)}$ lardan foydalanib $x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_3^{(2)}$ larni hisoblaymiz. Unda

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix};\ F(X_1) = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.25125 \\ 0.43750 \end{bmatrix};\ W^{-1}(X_1) = -\frac{1}{64.75} \begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & -9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

Nьyuton formulasiga asosan $x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_3^{(2)}$ lar hisoblansa mos ravishda quyidagiga tyeng bo'ladi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78981 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}$$

Xuddi shu yo'l bilan $x_1^{(3)};\ x_2^{(3)};\ x_3^{(3)}$ larni topsak,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.36992 \end{bmatrix}$$

bo'ladi. Agar uchinchi taqribiy yechim bilan chyegaralansak, byerilgan tizimning yechimini $x_1^{(3)} = 0.78981;\ x_2^{(3)} = 0.49662;\ x_3^{(3)} = 0.36992$ dyeb qabul qilamiz.

5.3.Lagranj aniqmas ko'paytuvchilar usuli

Faraz qilaylik, bizga ushbu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

chsiziqsiz funkciyaning quyidagi

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\ i=1,2,\ldots,m$$

tyenglamalar sistyemasini qanoatlantiruvchi mimimumini topish talab qilingan bo'lsin. Quyidagi

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \lambda_0 f(\mathrm{x}_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$$

yoki qisqacha

$$F(X, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$
$$X = (x_1, x_2, ..., x_n), \ \ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$$

fnkciyani tuzamiz. Bu funkciya *Lagranj funkciyasi* dyeyiladi. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ *Lagranj aniqmas ko'paytuvchilari dyeyiladi. Agar* $\lambda_0=1$ bo'lsa Lagranj funkciyasi Lagranjning normal funkciyasi dyeyiladi.

Logranj funkciyasidan x_j *,j=1,2,..,n* va λx_i *,i=1,2,..,m* o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar olib nolga tyenglashtirsak, quyidagi tyenglamalar sistyemasini hosil qilamiz.

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0$$
$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0, \ \ j = 1,2,...,n, \ \ i = 1,2,...,m$$

Bu tyenglamalar sistyemasini vyektor formada yozamiz

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial X} = \frac{\partial F(X)}{\partial X} + \lambda' \frac{\partial g}{\partial X} = 0, \ \ \frac{\partial F(X',\lambda)}{\partial \lambda} = g(X) = 0$$

SHunday qilib, biz Lagranj usuli bilan n noma'lumli m+1 tyenglamalar sistyemasini n+m noma'lumli n+m tyenglamalar sistyemasiga kyeltirdik, yoki boshqacha qilib aytganda byerilgan shartli minimallash masalasini shartsiz minimallash masalasiga kyeltirdik.

Oxirgi sistyemani qanoatlantiradigan X_0 nuqtaga *normal minimum nuqta*, qo'yilgan masalaga esa *normal shartli minimallash masalasi* dyeyiladi. $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \ \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ nuqtaga -*qo'yilgan masalaning yechimi* yoki Lagranj funkciyasining *stacionar (kritik) nuqtasi* dyeyiladi.

5.4. SHartli optimallash masalasini yechish

Ma'lumki optimallash masalasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$F=f(x_j)\rightarrow max$

$g_i(x_j)\leq B_i$

$d_j\leq x_j\leq D_j \ \ i=1,2,...,m; \ \ j=1,2,...,n$

biz bilamizki bu masala shartli optimallash masalasidir.

Bu masalani yechishning bir qator usullari mavjud. Ulardan biri Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan tanishib chiqamiz. Bu usul Excel dasturiy vositasida mavjud. Usulning asosiy g'oyasi shartli optimallash masalasini shartsiz optimallash masalasiga kyeltirish bo'lib, u quyidagicha amalga oshiriladi:

1.CHyegaralanish tyengsizligi tyenlamaga o'zgartiriladi

$V_i(x_j)=g_i(x_j)-B_i , \ \ i=1,2,...,m; \ \ j=1,2,...,n$

2.CHyegaralanish quyidagicha yoziladi

$V_i(x_j)=0, \ \ i=1,2,...,m; \ \ j=1,2,...,n$

Xuddi shunday chyegaraviy shartlar ham o'zgartiriladi.

U holda shartli optimallash masalasi quyidagicha bo'ladi.

$F=f(x_j)\rightarrow max$

$V_i(x_j)=0, \quad i=1,2,\ldots,m; \; j=1,2,\ldots,n$

3.Masala Lagranj funkciyasi ko'rinishida tasvirlanadi.

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_j, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i(x_j) \rightarrow \max; \; i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}$$

bu yerda λ_i –Lagranj ko'paytuvchisi.

4.Xususiy hosilalarni aniqlash va tyenlamalar tizimini tuzish

$$\partial L(x_j, \lambda_i)/\partial x_j = 0$$

$$\partial L(x_j, \lambda_i)/\partial \lambda_i = 0$$

$$i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}$$

5.Bu tizimni yechib λ_i qiymatlarini topish

6.Topilgan λ_i qiymatlarini Lagranj fukciyasiga qo'yamiz va natijada shartsiz optimallash masalasiga kyelamiz.

7.Olingan shartsiz optimallash masalasini yuqorida byerilgan Nьyuton usulida yechamiz.

Misol. Quyidagi shartli optimallash masalasini Lagranj ko'paytuvchilari usulida shartsiz optimallash masalasiga kyeltiring.

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

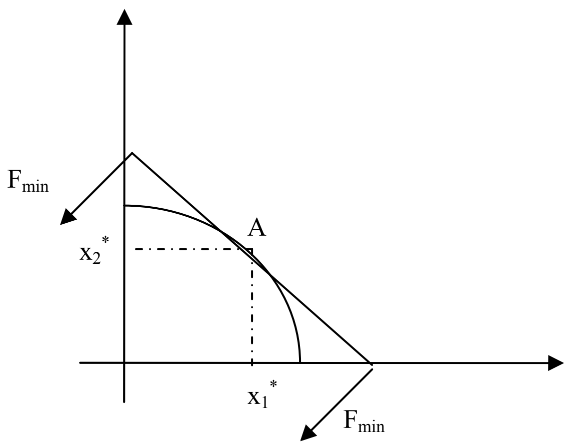
$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

1.Tizimni quyidagi formada yozamiz

$$F(x_j) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Masalaning grafik intyerpritaciyasi quyidagi rasmda kyeltirilgan



2.Lagranj funkciyasini tuzamiz

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_j, \lambda_i) = x_1 + x_2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \rightarrow \min; \; i=\bar{1}; \; j=\overline{1,2}$$

3.Tyenlamalar tizimini yozamiz

$$\partial L / \partial x_1 = 1 - 2\lambda_1 x_1 = 0$$
$$\partial L / \partial x_2 = 1 - 2\lambda_1 x_2 = 0$$
$$\partial L / \partial \lambda_1 = -(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

4.Tyenglamalar tizimini yechib λ_1 ni topamiz

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x_1}$$

5.Topilgan λ_1 qiymatni Lagranj funkciyasiga qo'yamiz

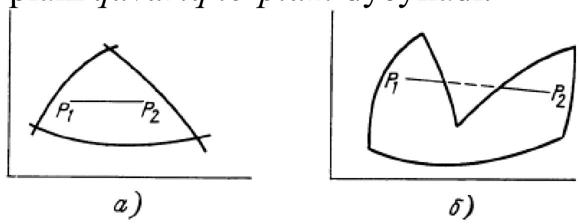
$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_j,\ \lambda_i) = x_1 + x_2 - \frac{1}{2x_1}(x_1^2 + x_2^2 - 1) \to \min;$$

SHunday qilib shartli optimallash masalasini shartsiz optimallash masalasiga kyeltirdik.

5.5.Qavariq dasturlash masalasi. Kuna-Takkyer tyeoryemasi

Qavriq dasturlash masalasini byerishdan oldin qavariq to'plam va qavariq funkciya tushunchasi ta'rifini byeramiz.

1 ta'rif. n o'lchovli fazoda byerilgan X to'plam ixiyoriy x_1 va x_2 nuqta bilan birga shu nuqtalarni birlashtiruvchi kyesmani ham o'z ichida saqlasi, ya'ni $x_1, x_2 \in X$ bo'lsa, bu to'plam *qavariq to'plam* dyeyiladi.



1- rasm

1-rasmning a) da qavariq soha b) da esa qavariq bo'lmagan soha kyeltirilgan.

2 ta'rif. Qavariq X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funkciya agar bu to'plamga qarashli ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ nuqtalar uchun $0 \leq \lambda \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi hamma λ larda quyidagi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

tyengsizlik o'rinli bo'lsa, *qavariq funkciya* dyeyiladi. Agar x_1, x_2 va λ larning bu qiymatlarida quyidagi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

tyensizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funkciya *botiq* dyeyiladi.

Qavariq funkciya quyidagi xossalarga ega:

1-x o s s a. Qavariq funkciya $f(x),\ x \in X$, X to'plamning hamma ichki nuqtalarida uzluksizdir. Faqat chyekka nuqtalarida uzulishi mumkin.

2-x o s s a. Agar $f_i(x),\ x \in X,\ i=1,2,..,m$ funkciyalar qavariq bo'lsa, $\alpha_i \geq 0$ lar uchun

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x), \quad f(x)=\max_{1\le i\le m} f_i(x)$$

Funkciyalar ham qavariq bo’ladi.

3-x o s s a. Qavariq funkciya ikkita har xil lokalь nisbiy minimumga ega bo’lishi mumkin emas. Agar funkciya kat’iy qavariq bo’lsa, u faqat bittagina nuqtada minimumga erishadi.

4-x o s s a. Agar funkciya qavariq bo’lsa, u holda c=const uchun X={X, f(X)≤c} to’plam qavariqdir.

Endi quyidagi chyegaralanishlari tyengnsizliklardan iborat chiziqsiz dasturlash masalasini qaraylik:

$$F(x) \Rightarrow \min \qquad 1.1)$$

$$g_i(x)\le 0, \ \ i=1,2,\ldots,m \qquad (1.2)$$

Minimum nuqtada $g_i(x)$ tyengsizlikda tyenglik yoki qattiq tyengsizlik bajariladi.

$g_i(x)$ chyegaralanish bu nuqtada, agar qattiq tyenglikni bajarsa u aktiv dyeytiladi, ya’ni agar $g_i(x_+)=0$ bo’lsa.

Mumkin bo’lgan sohaning giomyetrik xossasini ishlatib, chyegaralanishlar bilan minimallashtirish masalasi uchun ekstryemumning zarur shartini topamiz. Buning uchun oldin barcha $g_i(x)$ lar chiziqli bo’lgan holni qaraymiz. SHunday qilib, aytaylik byerilgan shart bilan funkciyaning minumumini topish kyerak bo’lsin

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) = -\eta_i^T x + b_i \le 0, \ i=\overline{1,m} \qquad (1.3)$$

Bu yerda har bir chyegaralanish (1.3) R^n da yarim fazoni bildiradi. η_i vyektor $g_i(x)=0$ tyenlamani aniqlovchi gipyertyekislikka bo’lgan normal va u S sohaga ichkarisiga yo’naltirilgan.

Aytaylik x^+ nuqta (1.1) masalaga (1.3) shart bilan minimum byeruvchi nuqta bo’lsin. Aktiv chyegaralanishlar indyekslar to’plamini quyidagicha bulgilaymsiz

$$I = i : g_i(x^*) = 0 \qquad (1.4)$$

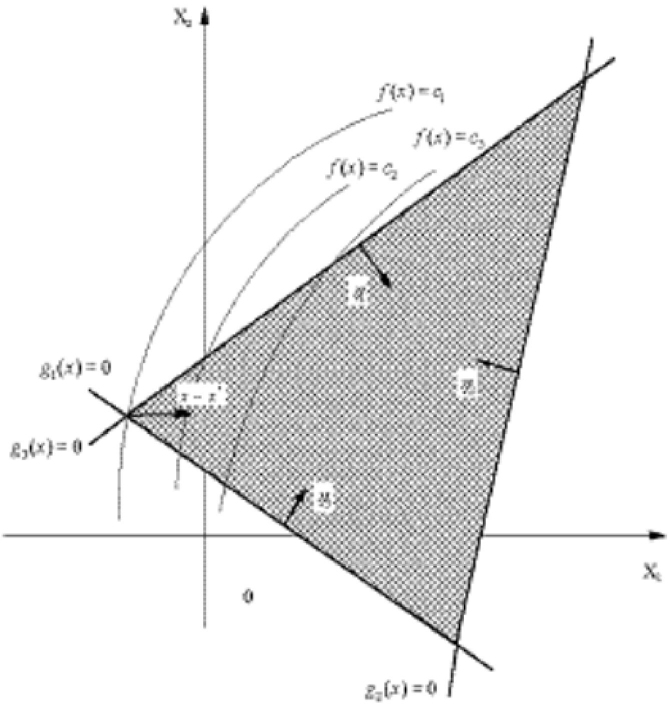
Masalan, 8.1 rasmda chiziqli chyegaralanishlar bilan minimallashtirish masalasi kyeltirilgan. S dan istalgan mumkin bo’lgan nuqtani olamiz. x-x^+ vyektori x^+ dan soha ichiga yo’naltirilgan. Bunday vyektorga kiruvchi vyektor dyeb ataymiz. Buning uchun quyidagini $\eta_i = -\nabla g_i(x^*)$ hisobga olib, vyektor uchun quyidagi shartni yozish mumkin:

$$\eta_i^T(x - x^*) \geq 0,$$

yoki

$$\nabla g_i^T(x - x^*) \leq 0, \qquad (1.5)$$

barcha $i \in I$ va $x \in S$ lar uchun.



8.1-rasm

SHunday qilib, kiruvchi x vyektor x^+ nuqtadan mumkin bo'lgan yo'nalish bo'yicha siljishni aniqlaydi. Lyekin, f(x) funkciya x^+ nuqtada minimal qiymatga ega, shuning uchun (1.5) qanoatlantiruvchi har qanday x-x^+ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\nabla f(x^*)(x - x^*) \geq 0, \forall x \in s. \qquad (1.6)$$

Endi Farkasha lyemmasi natijasi bo'lgan tyeoryemani qo'llaymiz. (1.5), (1.6) shartlardan Farkasha lyemmasiga asosan quyidagilar kyelib chiqadi.slyeduyet, chto suщyestvuyet mnojyestvo nyeotricatyelьnых skalyarov $\{\lambda_i\} \geq 0$ Musbat skalyarli to'plam mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi o'rinli

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \eta_i(x) = -\sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*). \qquad (1.7)$$

Agar $j \in I$ da $\lambda_j = 0$ dyeb qabul qilinsa (aktiv chyegaralanish lar uchun), u holda (1.7) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i(x) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*). \qquad (1.8)$$

Bundan tashqari quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = 0. \qquad (1.9)$$

modomiki $i \in I$ $g_i(x^*) = 0$, va $j \notin I$ $\lambda_i = 0$. SHuning uchun chyegaralanish tyenglamalarini quyidagicha qilib maqsad funkciyasiga kiritish mumkin:

$$\varphi(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \qquad (1.10)$$

SHunday ekan, x^+ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\nabla\varphi(x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, \qquad (1.11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = 0, \ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,m} \qquad (1.12)$$

f(x) funkciyani $g_i(x) \leq 0$ shartlar bilan minimallashtirish masalasini qaralayotganda hyech bo'lmaganda bitta x nuqta mavjud bo'lib, barcha i-lar uchun $g_i(X) \leq 0$ bo'lib, unda (1.9), (1.10) o'rinli bo'ladi. Bu yerda x^+ optimal yechim. Bunga chyeklanishlarning ryegulyarlik sharti dyeyiladi. Xususiy holda qaralayotgan hol uchun bunda shart misolida ishlatilgan $\nabla g_i(x^*), i = \overline{1,m}$ chiziqli bog'lanmagan vyektor – gradiyent chyeklanishlarini olish mumkin.

1.Kuna-Takkyer tyeoryemasi. CHiziqsiz dasturlash nazariyasida markaziy joyni Kuna-Takkyer tyeoryemasi egallaydi. YUqorida topilgan (1.9), (1.10) folrmulalar chiziqli chyeklanishlar bilan byerilgan chiziqsiz dasturlash masalasi uchun optimallik shartlari bo'lib hisoblanadi. Endi bu shartlarni (1.1), (1.2) masalaning barcha chiziqsiz chyegaralanishlari uchun umumlashtiramiz.

CHiziqsiz dasturlash nazariyasida juda kyerakli bo'lgan tyeoryemalardan biri bu Kuna-Takkyer bo'lib, u chiziqsiz dasturlash masalasi yechimining optimallik shartini ifodalaydi.

Tyeoryema 1. (Kuna-Takkyer). Aytaylik $g_i(x), i = \overline{1,m}$ funkciya xususi hosilvsi, x^* nuqtani o'ziga oluvchi R^n ochiq to'plamda uzluksiz bo'lsin. Agar x^* nuqta f(x) funkciyaga $g_i(x) \leq 0$, $i=1,2,\ldots,m$ chyegaralanishda minimum byeruvchi nuqta bo'lsa, R^n to'plamda $\nabla g_i(x^*)$ chiziqli bog'lanmagan vyektorlar to'plamda ryegulyarlik shartini qanoatlantirsa, u holda Lagranjning manfiy bo'lmagan shunday ko'paytuvchilari mavjud bo'ladiki, unda

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, \qquad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = 0, \ \lambda \geq 0, \ i = \overline{1,m} \qquad (1.14)$$

o'rinli bo'ladi.

Lagranj funkciyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x). \qquad (1.15)$$

U holda Kuna-Takkyer tyeoryemasini quyidati ko'rinishda yozish mumkin.

$\nabla_x L(x, \Lambda) = 0,$ (1.16)
$\nabla_i L(x, \Lambda) = g(x) \leq 0,$ (1.17)
$\Lambda^T \nabla_\lambda L(x, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) = 0.$ (1.18)

Ko'rinib turibdiki, λ_i Lagranj ko'paytuvchisi chiziqsiz dasturlash masalasida chyegaralanish chyegaralanish-tyenglik bo'lganda aniq ishorali emas, u holda ular Kuna-Takkyer tyeoryemasida musbat bo'lishi shart.

I s b o t. YEtarlicha kichik t > 0 uchun, $f(x^+ + tz)$ ni Tyeylor qatoriga yoyib, quyidagigi ega bo'lamiz

$g_i(x^* + tz) = g_i(x^*) + t\nabla g_i^T(x^*)z + o(t^2) = t\nabla g_i^T(x^*)z + o(t^2),$ (1.19)
bu yerda $o(t^2)$ – ikkinchi darajadan qoldiq had. I – aktib chyegaralanishlar to'plami bo'lsin. U holda xuddi shunday $i \in I$ da $g_i(x^+)$
$g_i(x^* + tz) = g_i(x^*) + t\nabla g_i^T(x^*)z + o(t^2) = t\nabla g_i^T(x^*)z + o(t^2),$
Ko'rib turibmizki

$$\left.\begin{aligned} \nabla f^T(x^*)z < 0, \\ \nabla g_i^T(x^*)z \leq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.20\text{-}1.21)$$

tyensizliklar tizimi birgalikda emas, xuddi shunday aks hol uchun yetarlicha kichik $t > 0$ bo'lganda, ayrim z lar uchun quyidagiga ega bo'linar edi:

$$f(x^* + tz) < f(x^*)$$
$$g_i(x^* + tz) \leq 0, \ i \in J.$$

bu x^+ nuqtaning optimalligi to'g'risidagi farazga ziddir. Kyeyingi isbot uchun Farkash lyemmasi natijasi bo'lgan lyemmani ishlatamiz.

L ye m m a. Ixtiyoriy A matrica uchun ikki shartdan biri bajariladi:

quyidagi tyengsizlik tizimi bajarilishi:

$$Ax < 0, \tag{1.22}$$

yoki quyidagi tyengsizlikla (tyenglamalar) tizimi bajarilishi:

$$\begin{cases} \Lambda^T A = 0 \\ \Lambda \geq 0, \quad \Lambda \neq 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Bu shartlar bir vaqtda bajarilishi mumkin emas.

Bu lyemmani (1.20), (1.21) larga qo'llaymiz

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x^*) \\ \nabla g_i(x^*) \end{bmatrix}, \quad i \in I$$

Modomiki bu (1.20), (1.21) tizimlar yechimga ega emas, u holda shunday $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$ mavjudki (1.20), (1.21) nye imyeyet ryeshyeniy, to suщyestvuyut takiye $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$ quyidagi bo'ladi

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, \tag{1.24}$$

bu yerda

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Agar $i \in I$ lar uchun λ_i ga nul qiymat byersak, u holda $\sum_{i=I}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = 0$ bo'ladi. Bu $\sum_{i=I}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = 0$ shart qattiqlikga bo'lmagan qo'shimchi shart dyeyiladi.

λ_0 ning (1.24) da nulga tyeng emasligini ko'rsatamiz. Aslida, agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \tag{1.25}$$

Lyekin (1.25) tyeoryemaning $\nabla g_i(x^*)$ vyektorlarning chiziqli bog'lanmaganligi haqidagi shartiga qarama qarshi. SHu sabab $\lambda_0 \neq 0.$ likni qabu qilish qolayapdi. U holda, (1.24) ning ikki tarafini λ_0 ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=I}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

Bundan kyelib chiqadiki tyeoryema isbotlandi.

Ryegulyarlik tushunchasi birinchi bor G.Kunom va A.Takkyer tomonidan kiritilgan va harxil formaga ega. Xususiy holda qachonki barcha $g_i()x,\ i=\overline{1,m}$ qavariq funkciya bo'lsa ryegulyarlik sharti quyidagi ko'rinishda yoziladi: shunday x vyektor mavjud bo'ladiki barcha $i=\overline{1,m}$ uchun $g_i(x)<0$ bo'ladi. Bu shuni bildiradiki mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida hyech bo'lmaganda shunday bitta ichki nuqta mavjud bo'lishi mumkin. Bu shart Slyeytyer ryegulyarlik sharti dyeyiladi.

2. Lagranj funkciyasining egar nuqtasi.

Lagranj funkciyasini qaraymiz $L(x,\Lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$

Ta'rif. Agar barcha $\Lambda\geq 0,\ x\in R^n$ lar uchun

$$L(x^*,\Lambda)\leq L(x^*,\Lambda^*)\leq L(x,\Lambda^*) \qquad (2.1)$$

shart bajarilsa, ikkita x^*,Λ^* vyektorlari $L(x,\Lambda)$ Lagranj funkciyasi egar nuqtasi dyeyiladi.

(2.1) tyengsizlik egar nuqtasi uchun tyengsizlik dyeyiladi. Ko'rinib tkribdiki, egar nuqtada quyidagi shprt bajariladi.

$$L(x^*,\Lambda^*)=\max_{\Lambda\geq 0}\min_{x\in R^n}L(x,\Lambda)=\min_{x\in R^n}\max_{\Lambda\geq 0}L(x,\Lambda) \qquad (2.2)$$

Lagranj funkciyasi $L(x,\Lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$ egar nuqtasi bilan chiziqsiz dasturlash masalasi yechimi o'rtasida o'zaro bog'liqlik mavjud. Bu bog'liqlik quyidagi tyeoryemada kyeltirilgan.

Tyeoryema. Aytaylik f(x) va barcha $g_i(x)$ qavarik, hamda $g_i(x)$ funkciyalar Slyeytyer ryegulyarlik shartini qanoatlantirsin. x^+ vyektori (1.1), (1.2) chiziqsiz dasturlash masalasi yechimi bo'ladi qachonki shunda agar $\Lambda^*\geq 0$ vyektor mavjud bo'lib, quyidagilar bo'lsa

$$L(x^*,\Lambda)\leq L(x^*,\Lambda^*)\leq L(x,\Lambda^*) \qquad (2.3)$$

va

$$\Lambda^{+T}g(x^*)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x^*)=0. \qquad (2.4)$$

I s b o t. Oldin tyeoryemaning yetarli shartini isbot qilamiz. Aytaylik (x^*,Λ^*) nuqta $L(x,\Lambda)$ Lagranj funkciyasi egar nuqtasi bo'lsin. Unda birinchi (1.24) tyengsizlikdan quyidagini olamiz

$$L(x^*,\Lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \le L(x,\Lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x)$$

(1.25)

Modomiki $\lambda_i^* \ge 0$, hamda $g_i(x) \le 0$ ekan, u holda $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) \le 0$. (2.4) ga asosan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$. SHuning uchun chiziqsiz dasturlash masalasi chyegaralanishlarini qanoatlantiruvchi barcha x uchun (2.3) dan quyidagi tyengsizlik kyelib chiqadi

$$f(x^*) \le (x) + \sum_{i} \lambda_i^* g_i(x) \le f(x)$$

SHunday qilib, x^* chiziqsiz dasturlash masalasining optimal yechimi bo'ladi.

Zarurlik shartini isbotlashga o'tamiz. Faraz qilaylik, x^*- chiziqsiz dasturlash masalasining optimal yechimi. Unda ko'ramizki tizim

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x^*) < 0, \\ g(x) \le 0 \end{array}\right\} \quad (2.6)$$

YEchimga ega bo'lmaydi, chunki x^* - chiziqsiz dasturlash masalasi minimum nuqtasi. Bu yerdan kyelib chiqadiki quyidagi tizim ham yechimga ega emas:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x^*) < 0, \\ g(x) < 0 \end{array}\right\} \quad (2.7)$$

U holda Fana tyeoryemasiga asosan shunday $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \ge 0$ lar mavjud bo'ladiki, unda quyidagi o'rinli bo'ladi

$$\lambda_0^* [f(x) - f(x^*)] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) \ge 0. \quad (2.8)$$

Modomiki

$\lambda_i^* \ge 0, \quad g_i(x^*) \le 0, \forall i,$ ekan

u holda

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) \le 0, \text{для всех } x. \quad (2.9)$$

Agar (2.8) da $x=x^*$ qilib qo'yilsa, u holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) \ge 0. \quad (2.10)$$

(2.9) ni (2.10) bilan solishtirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) = 0. \qquad (2.11)$$

U holda (2.8) va (2.11) tyenglamadan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\lambda_0^* f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \le \lambda_0^* f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x). \qquad (2.12)$$

SHunday qilib egar nuqta uchun o'ng tomon tyengsizligi isbotlandi.

Mordomiki $g(x^*) \le 0$ ekan, u holda istalgan $\lambda \ge 0$ uchun $\lambda^T g(x) \le 0$ o'rinli. Kyelib chiqadiki,

$$\lambda_0^* f(x^*) + \Lambda^T g(x^*) \le \lambda_0^* f(x^*) + \Lambda^{*T} g(x^*). \qquad (2.13)$$

(2.13) tyengsizlikning ikki tomonini $\lambda_0^* > 0$ bo'lib, egar nuqta uchun chap tomon tyengsizligini olamiz:

$$f(x^*) + \frac{\Lambda^T}{\lambda_0^*} g(x^*) = L(x^*, \Lambda) \le f(x^*) + \frac{\Lambda^{*T}}{\lambda_0^*} g(x^*) = L(x^*, \Lambda^*)$$

SHunday qilib, tyeoryema isbotlandi.

$\lambda_0^* > 0$ shartini ta'minlash uchun Slyeytyer ryegulyarlik shartining bajarilishini faraz qilish kyerak. Aslida, aytaylik $\lambda_0^* = 0$. U holda (2.12) ifoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) \qquad (2.14)$$

SHu bilan birga Slyeytyer ryegulyarlik sharti shuni tasdiqlaydiki, shunday x vyektor mavjudki, unda g(x)<0 va mos ravishda $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) < 0$ bo'ladi. Bu (2.14) tyenglamani qarama-qarshilikka olib kyeladi, shu sabab faraz qilingan tyeoryema Slyeytyer ryegulyarlik sharti bilan birgalikda uning to'g'riligini ta'minlaydi.

SHunday qilib, yuqoridagi tyeoryema sharti bajarilishi chiziqsiz dasturlash masalasini unga ekvavalyent bo'lgan Lagaranj funkciyasi egar nuqtasini topish masalasiga olib kyeladi.

3.Kurna-Takkyer tyeoryemasining qavariq dasturlash masalasiga qo'lllanilishi

CHiziqsiz dasturlash nazariyasida markaziy joyni Kuna-Takkyer tyeoryemasi egallaydi.

Agar byerilgan (1.1), (1.2) chiziqsiz dasturlash masalasi yuqoridagi xususiyatlarga ega bo'lsa, unga qavariq dasturlash masalasi dyeyiladi. Uning muhim xususiyati maqsad funkciyasining lokalь va globalь minimiumlari ustma-ust tushushidadir. Masalaning qo'yilishi matyematik tilda quyidagicha bo'ladi: chyeklanish shartlari (1.2) ni qanoatlantiradigan shunday $X_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ nuqta topish talab qilinadiki, (1.1) funkciya shu nuqtada o'zining eng kichik qiymatiga erishsin.

Endi quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasini qaraylik:

$$\text{минимизировать } f(x) \qquad (3.1)$$

chyeklanishlar bilan

$$g_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.3)$$

$x_j = -h_j(x)$ byelgilashni kiritamiz. U holda (3.3) chyegaralanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$h_j(x) \le 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.4)$$

(3.1), (3.2) masala kononik ko'rinishda byerilgan bo'lsin. Unga Kuna-Takkyer tyeoryemasini qo'llab, uning uchun Lagranj funkciyasini tuzamiz:

$$L(x,\Lambda,u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j h_j(x), \qquad (3.5)$$

bu yerda $u_j \ge 0$- ko'paytuvchi bo'lib $h_j(x) \le 0$ chyeklanish bilan bog'liq. Kuna-Takkyer tyeoryemasi shartiga binoan (3.5) quyidagicha bo'ladi:

$$\nabla L(x,\Lambda,u) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j \nabla h_j(x) = 0,$$

yoki

$$\frac{\partial L(x,\Lambda,u)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} - u_j = 0; \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.6)$$

$$u_j x_j = 0, \; u_j \ge 0, \qquad (3.7)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \; \lambda_i \ge 0. \qquad (3.8)$$

(3.5), (3.6), (3.7) shartlarni quyidagi ekvivalyent formada yozamiz:

$$\frac{\partial L(x,\Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = u_j \geq 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial L(x,\Lambda)}{\partial x_j} \cdot x_j = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{3.10}$$

Ko'rinib turibdiki (3.10) shart manfiy bo'lmaslik sharti uchun qattiqlik bo'lmagan qo'shimcha shartni tasvirlaydi.

SHunday qilib, chiziqsiz dasturlash masalasi optimal yechimi uchun zarur shart topildi, uni quyidaga tyeoryemada ta'riflash mumkin.

Tyeoryema. CHiziqsiz dasturlash masalasi (3.1) - (3.3) byerilgan bo'lsin va f(x), $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_m(x)$ funkciyalar diffyeryenciallanuvchi va qavariq bo'lsin (x bo'yicha).

$x^0 \geq 0$ vyektori chiziqsiz dasturlash masalasi optimal yechimi bo'ladi, faqat shunda, agar shunday $\Lambda \geq 0$ vyektor mavjud bo'lib, $(x^0 \Lambda_0)$ ikkalasi Lagranj funkciyasining egar nuqtasi bo'lsa, ya'ni quyidagi shartlar bajarilsa:

$$\frac{\partial L(x^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} \geq 0, \; j = \overline{1,n}; \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\Lambda^0)}{\partial x_j} \cdot x_j^0 = 0, \; j = \overline{1,n}; \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^0) \leq 0, \; i = \overline{1,m}; \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^0 = g_i(x^0)\lambda_i^0 = 0, \; i = \overline{1,m}. \tag{3.14}$$

Agar (3.1) - (3.3) masalada, barcha f(x), $g_i(x)$ – funkciyalar qavariq funkciya bo'lsa, masalaga qavariq dasturlash masalasi dyeyiladi. CHyegaralanish $g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m}$, qavariq to'plamni aniqlaydi, va $R(x) = \{x : g_i(x) \leq 0, \; i = \overline{1,m}, \; x \geq 0\}$ yechimlarning qavariq to'plamida f(x) qavariq funkciyaning minimumini topish talab qilinadi.

Endi botiq dasturlash masalasini qaraymiz.

$$\text{максимизировать} f(x) \tag{3.15}$$

chyegaralanishlar

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) \geq 0, \\ g_2(x) \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x) \geq 0, \end{array}\right\} \qquad (3.16)$$

$$x \geq 0. \qquad (3.17)$$

Bu yerda $f(x)$ va barcha $g_i(x)$ funkciyalar (x bo'yicha) botiq.

Bu masalaning qavariq dasturlash masalasiga ekvivalyent ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $f'(x) = -f(x)$, $g_i'(x) = -g_i(x)$ byelgilashni kiritamiz, va $\max f \sim \min -f(x)$ dyeb, quyidagi masalaga o'tamiz:

$$\text{минимизировать} f(x) \qquad (3.18)$$

chyeklanishlar

$$g_i'(x) \leq 0,\ i = \overline{1,m}; \qquad (3.19)$$

$$x \geq 0. \qquad (3.20)$$

Bu yerda ko'rinib turibdiki, barcha $f(x), g_i'(x)$ funkciyalar x bo'yicha qavariq, shuning uchun (3.18) - (3.20) masala – bu qavariq dasturlash masalasidir. Dyemak (3.15) - (3.17) va (3.1) - (3.3) masalalar ekvivalyentliga aniqlandi.

(3.11) - (3.14) shartlarda (3.15) - (3.17) masala uchun optimallik byelgisini olish qiyin emas.

Tyeoryema. CHiziqsiz dasturlash masalasi (3.15) - (3.17) ko'rinishda byerilgan bo'lib, $f(x), g_i(x), i = \overline{1,m}$ fucnkciyalar diffyeryenciallanuvchi bo'lsin. x^0 vyektor bu masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun, shunday $\Lambda^0 \geq 0$ vyektorining mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi shartlar bajarilishi kyerak:

$$\text{а)} \quad \frac{\partial L(x^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \leq 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (3.21)$$

$$\text{б)} \quad \frac{\partial L(x^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \cdot x_j^0 = 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (3.22)$$

$$\text{в)} \quad \frac{\partial L(x^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^0) \geq 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (3.23)$$

$$\text{г)} \quad \frac{\partial L(x^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^0 = g_i(x^0)\lambda_i^0 = 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (3.24)$$

Agar $f(x), g_i(x)$ funkciyalar botiq bo'lsa, u holda (3.21) - (3.24) shartlar kyelib chiqadi va yetarlidir.

5.6. CHiziqli dasturlashga olib kyelinadigan chiziqli bo'lmagan dasturlash masalalari

5.6.1. Kasr-chiziqli dasturlash masalasi

Bu masalada maqsad funkciyasi kasr-chiziqli, mavjud U to'plam esa chiziqli chyeklanishlar (tyenglik va (yoki) tyengsizliklar) va o'zgaruvchilarning nomanfiylik sharti bilan topiladi

$$f(x) = \frac{<c,x> + c_0}{<d,x> + d_0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \min, \qquad (5.1)$$

$$<a^i, x> = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,...,p,$$

(5.2)

$$<a^i, x> \geq b_i, \; i = p+1,...,m,$$

(5.3)

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n,$$

(5.4)

Bu yerda *s,* $d - E_n$ dagi qo'zg'almas vyektorlar.

(5.1)-(5.4) masalaning chiziqli dasturlash masalasiga qay usulda olib kyelinishini ko'rib chiqaylik.

(5.1)- (5.4) masalaning mavjud U tuplamida funkciyaning mahraji nolьga aylanmaydi, dyemak ishorasini saqlaydi dyeb olamiz. Agar u manfiy bo'lsa, u holda (5.1) kasrning sur'at va maxrajini minus birga ko'paytirib, hamma $x \in U$ lar uchun $<d,x> + d_0 > 0$ shart bajariladi dyeb olamiz.

$y_0 = 1/(<d,x> + d_0)$ dyeb olamiz, bu yerdan ko'rinib turibdiki $x \in U$ da $y_0 > 0$. YAngi o'zgaruvchilar kiritamiz: $y_j = y_0 x_j, \; j = 1,2,...,n$. Bu o'zgaruvchilarda (5.1)-(5.4) masalaning ko'rinishi quyidagi tusga kiradi

$$\tilde{f}(y) = \sum_{j=0}^{n} c_j y_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = 1,...,p,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \geq 0, \quad i = p+1,...,m,$$

$$\sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n,$$

ya'ni E_{n+1} fazodagi umumiy holda yozilgan chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi.

Simplyeks usulda uning yechimi $y^* = (y_0^*,..., y_n^*)$ ni va $x_j^* = y_j^* / y_0^*,\ j = 1,...,n,\ f^* = \min_{x \in U} \tilde{f}^*$ tyengliklar yordamida (5.1)- (5.4) kasr-chiziqli dasturlashdagi boshlagich masalasining yechimini topamiz..

Agar $y_0^* = 0$ bo'lsa, u holda (5.1)- (5.4) masalaning mavjud yechimlar soni chyeklanmagan va unda $f(x)$ funkciyaning minimumiga erishilmaydi.

5.6.2. Kvadratik dasturlash masalalalari

Bu yerda qavariq kvadratik funkciyani chiziqli chyeklanishlar-tyengsizliklar bilan byerilgan mavjud U to'plamda minimallashtirish kyerak, ya'ni

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c \to \min, \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \le \beta_i, \quad i = 1,...,m, \tag{5.6}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,....,n, \tag{5.7}$$

Bu yerda $A = (a_{ij})$ - $n \times n$ o'lchovli simmyetrik musbat matrica; $b \in E_n$ - fiksirlangan usul; *s* – byerilgan son.

(5.5) dagi funkciya qavariq, (5.6)-(5.7) chyeklanishlar chiziqli bo'lgani uchun (5.5)-(5.7) masala qavariq dasturlash masalasi bo'ladi ((5.6) chyeklanishlarni $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \le 0$ ko'rinishda, (5.7) – chyeklanishlarni esa $\bar{g}_j(x) = -x_j \le 0$ ko'rinishda yozib olish mumkin).

Bu masalaning Lagranj funkciyasini tuzamiz, buning uchun (5.6) dagi chyelanishlar uchun $\lambda_i,\ i = 1,...,m$, (5.7) dagi chyelanishlar uchun $\mu_j,\quad j = 1,...,n$ Lagranj ko'phadlarni kiritib olamiz.

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum \alpha_{ij} x_j - \beta_i \right) + \sum_{j+1}^{n} \mu_j (-x_j).$$

(5.5)-(5.7) masala uchun Kun-Takkyer shartini qo'llaymiz

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = 0, \quad j = 1,...,n,$$

$$\lambda_i g_i = \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \right) = 0, \quad i = 1,...,m, \tag{5.8}$$

$$\mu_j \bar{g}_j = -\mu_j x_j = 0, \quad j = 1,...,n,$$

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 1,...,m, \quad \mu_j \ge 0, \quad j = 1,...,n,$$

U o’z ichiga masalaning (5.6)-(5.7) chyeklanishlarini ham oladi

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j-\beta_j\le 0,\quad i=1,...,m,$$

(5.9)

$$\bar{g}_j(x)=-x_j\le 0,\quad j=1,...,n.$$

Qo’shimcha $x_{n+i}\ge 0$ o’zgaruvchilarni kiritgan holda, (5.9) tyengsizliklardan $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j-\beta_j+x_{n+i}=0$ tyengliklarga o’tamiz. U holda (5.8) munosabatlar $\lambda_i x_{n+i}=0$ ko’rinishda yozib olinadi.

SHunday qilib, (5.8)-(5.9) Rungye-Kuttaning kvadratik dasturlash masalalari uchun mo’ljallangan shartlarini quyidagi ko’rinishda ham yozib olish mumkin

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_{ij}-\mu_j=-b_j,\quad j=1,...,n,$$

(5.10)

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j+x_{n+i}=\beta_i,\quad i=1,...,m,$$

(5.11)

$$x_k\ge 0,\quad k=1,...,n+m,\quad \lambda_i\ge 0,\quad i=1,...,m,\quad \mu_j\ge 0,\quad j=1,...,n,$$

(5.12)

$$\lambda_i x_{n+i}=0,\quad i=1,...,m,\quad \mu_j x_j=0,\quad j=1,...,n.$$

(5.13)

Kuna-Takkyer tyeoryemasiga ko’ra bu sistyemaning $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$ yochimi f(x) funkciyaning *U* to’plamdagi qidirilayotgan minimum nuqtasi bo’ladi.

SHuni qayd etish joizki, (5.10)-(5.13) tyenglamaning *n+m* ta *2(n+m)* x_k,λ_i,μ_j nomanfiy noma’lumli (5.10) va (5.11) ta tyenglamasi bor, ulardan (5.13) shartga ko’ra kamida *n+m* tasi nolьga tyeng.

Bu sistyemaning mavjud bazis yechimi sun’iy bazis usulida olinishi mumkin. Bu usulni amalga oshirish paytida (5.13) shartni hisobga olish, ya’ni bazis uzgaruvchilarga bir paytning o’zida bir hil I nomyerli λ_i va x_{n+i} o’zgaruvchilarni hamda bir hil *j* nomyerli μ_j,x_j o’zgaruvchilarni kiritish kyerak emas.

5.1 misol. Kvadratik dasturlash masalasini yeching

$$f(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_1-6x_2\to\min,$$

$$x_1+x_2\le 2,$$

$$-x_1+2x_2\le 2,$$

$$x_1,x_2\ge 0.$$

F(x) funkciyaning A matricasi musbat aniqlashgan. Dyemak, bu qavariq dasturlash masalasidir. 5a sistyema (5.10)-(5.13) bu holda quyidagi ko'rinish qabul qiladi

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 2, \\
&-2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 6, \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
&-x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\
&x_1, \ldots, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \geq 0, \\
&\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Bu sistyemaning mavjud bazis yechimini olib tashlangan bazis usulida yechamiz. Buning uchun birinchi ikkita chyeklanishlar-tyengliklarning chap qismlariga yordamchi x_5 va x_6 o'zgaruvchilarni kiritamiz(qolgan bazislar sifatida x_3 va x_4 larni olish mumkin) va yordamchi maqsad funkciyasining minimumini topamiz $\Phi = x_5 + x_6$. Uni $x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ va μ_2 ozod hadlar orqali ifodalaymiz: $\Phi = -2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + 8$.

Masalaning yechimiga olib kyeluvchi simplyeks jadvallar kyetma-kyetligi byerilgan. Aylanachalar bilan tayanch elyemyentlar va (5.14) shart tufayli bazisliga o'tkazib bo'lmaydigan ozod hadlar ajratib ko'rsatilgan. YOramschi x_5 va x_6 elyemyentlarni ozod hadga o'tkazganda, ularga tug'ri kyeluvchi koefficiyentlar ustuni simplyeks ustunda o'chirib tashlanadi. Oxirgi jadvalda quyi qatorning elyemyentlari manfiy emas, yordamchi funkciyaning minimumi $\Phi^* = 0$ va unga to'g'ri kyeluvchi bazis yechimlar $(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (4/5, 6/5, 0, 2/5, 14/5, 0, 0, 0)$. SHuning uchun kvadratik dasturlash masalasining qidirilayotgan yechimi $x^* = (4/5, 6/5), \quad f^* = f(x^*) = 36/5$.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	2	-2	1	-1	-1	0	2
x_6	-2	4	1	2	0	-1	6
x_3	1	1	0	0	0	0	2
x_4	-1	2	0	0	0	0	2
	0	-2	-2	-1	1	1	-8

	x_1	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	1	1	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_3	3/2	-1/2	0	0	0	0	1
x_2	-1/2	½	0	0	0	0	1
	-1	1	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	-2/3	4/3	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	1
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	1
	2/3	2/3	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	x_6	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	-2/3	10/3	-1	-3	-1	1	4/3
λ_1	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	4/3
	2/3	-10/3	2	3	1	-1	-4/3

	x_3	x_5	λ_1	μ_1	μ_2	
x_4						4/10
λ_1						28/10
x_1						4/5
x_2						6/5
	0	1	0	0	0	0

Misollar

1. Kasr-chiziqli dasturlash masalasini yeching

$$f(x) = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 7,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_2 \le 3,$$
$$x_1, x_2 \ge 1$$

CHiziqli dasturlash masalasiga kyeltiring va simplyek-usulni ko’llagan holda yeching. Grafik ko’rinishda ham tasvirlang.

2. Kvadratik dasturlash masalasini yeching

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

5.7. SHartsiz kyetma-kyet minimallashtirish usullari

Bu usullar guruhining asosiy g'oyasi chiziqli bo'lmagan dasturlash masalasi $f(x) \to \min, x \in U$ ni shartsiz minimallashtirish masalalarining kyetma-kyetligiga olib kyelishdan iborat

$$f_k(x) = f(x) + \varphi_k(x) \to \min, \quad x \in E_n, \quad k = 1,2,..., \qquad (5.57)$$

Bu yerda $\varphi_k(x)$ - k ning o'sib borishi bilan, joriy masalaning mavjud U to'plaminining chyegaralanishini tobora aniqroq o'lchaydi.

Joriy masalaning taqribiy yechimi sifatida (5.57) yordamchi masalaning k ning anchayin kata qiymatiga o'g'ri kyeluvchi x^k qiymati olinadi.

5.6.1. Jarimali funkciyalar usuli

Bu usulda $\varphi_k(x)$ funkciyalar shunday tanlanadiki, k ning kata qiymatida (5.57) dagi $f_k(x)$ funkciyasi $x \in U$ da f(x) dan unchayin farq qilmasin va pri mavjud to'plamdan o'zoqlashgan sayin $x \notin U$ da o'sib borsin. 5.2-Ta'rif. $U \in E_n$ - byerilgan to'plam bo'lsin. E_n da aniqlangan $\{\varphi_k(x)\}$ funkciyalar kyetma-kyetligi kuyidagi xususiyatga

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \in U \\ \infty, & если\ x \notin U \end{cases} \qquad (5.58)$$

Ega bo'lib, U to'plamning jarimali funkciyalar kyetma-kyetligi dyeb ataladi.

$\{A_k\}$ - musbat hadli Biron-bir o'suvchi sonli kyetma-kyetlik bulsin va $\lim_{k \to \infty} A_k = \infty$, $\varphi(x)$ funkciya esa $x \in U$ da nolь qiymat $x \notin U$ da esa musbat qiymat qabul qiladi U holda $\varphi_k(x) = A_k \varphi(x)$ tyenglik (5.58) shartni qanoatlantiradi .

Amaliyotda ko'pincha $A_k = k, \quad k = 1,2,...$ dyeb olinadi

$\varphi(x)$ funkciya sifatida $\rho(x,U)$-ni, x nuqtadan U to'plamgacha bo'lgan masofani olish mumkin. U holda jarimaviy funkciyalar kyetma-kyetligi quyidagi ko'rinish qabul qiladi

$$\varphi_k(x) = k\rho(x,U). \qquad (5.59)$$

$\rho(x,U)$ masofani hisoblash, bu dyegani $A_k \rho(x,U)$ jarimaviy funkiyani qiymatini topish qiyin bo'lib qolishi mumkin, shuning uchun ko'pincha U to'plamning chyegaralarini hisobga olgan jarimaviy funkciyalar qo'llaniladi. U to'plam tyengsizliklar bilan byerilgan bo'lsin

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m, \qquad (5.60)$$

Bu yerda $g_i(x)$ - qavariq funkciyalar. U holda $\varphi_k(x) = A_k \varphi(x)$ ifodadagi $\varphi(x)$ sifatida

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \Psi(g_i(x)),$$

Ni olish mumkin, bu yerda $\Psi(t)$ - uzluksiz funkciya, jumladan $t = 0$ da $\Psi(t) = 0$, $t > 0$ da esa $\Psi(t) > 0$. Agar $\lim_{k \to \infty} = \infty$ va $A_k > 0$, u holda $\{\varphi_k(x)\}$,

$\varphi_k(x) = A_k\varphi(x)$ kyetma-kyetlik uchun (5.58) shartlar bajariladi, ya'ni u jarimali funkciyalar kyetma-kyetligi bo'ladi. $\Psi(t)$ funkciyani shunday tanlash mumkinki, bunda $\varphi_k(x)$ funkciyalar (5.57) minimallashtirishning yordamchi masalalarini yechishni soddalashtiruvchi xususiyatlar, masalan qavariqlik, hosilalarning mavjudligi, hisoblash soddaligiga ega. Ko'pincha

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} [g_i^*(x)]^2, \tag{5.61}$$

Dyeb olinadi, bu yerda $g_i^*(x) = \max\{0, g_i(x)\} = \frac{1}{2}(g_i(x) + |g_i(x)|$.

5.11-misol. Quyidagi masalani jarimali funkciyalar usulida yeching.

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$x_2 - x_1 - 2 \le 0,$$
$$2x_2 - x_1^2 - 2 \le 0$$

Minimallashtirishning yordamchi masalalar kyetma-kyetligini yozib olamiz

$$f_k(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 + k \cdot [g_1^+(x)]^2 + k[g_2^+(x)]^2 \to \min,$$

$$g_1^+ = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + 2 + |x_2 - x_1 - 2|), \quad g_2^+ = \frac{1}{2}(2x_2 - x_1^2 + |2x_2 - x_1^2|).$$

5.2. jadvalda bu masalalarning ayrim k lar yochun yechimi kyeltirilgan.

5.2-jadval

k	x_1^k	x_1^k
0	0	4
1	0,66	3,33
5	0,91	3,09
10	0,95	3,05
100	0,995	3,004

Masalaning aniq yechimi $x^* = (1;3)$.

Eslatma:

1.To'xtash myezoni sifatida $\|x^k - x^{k/2}\| \le \varepsilon$ tyengsizlikni ishlatish mumkin, bu yerda $\varepsilon > 0$ aniqlik paramyetri, juft son. Agar u bajarilsa $x^* = x^k$, $f^* = f(x^k)$.

2. Jarimali funkciyalar usuli bilan olingan yechimning aniqligini baholash uchun quyidagi omildan foydalanish mumkin. z $f(x) \to \min, g_i(x) \le 0, i = 1,...,m$ (ya'ni hamma I larda $g_i(z) < 0$) qavariq dasturlash masalasining mavjud U to'plamidagi biron-bir ichki nuqtasi, x^k esa yordamchi k-masalaning yechimi bo'lsin. U holda U to'plamdagi f(x) funkciyaning minimal qiymatini kuyidagi ikki tomonlama baholash o'rinli:

$$f(x^k) \le f^* \le f^*(\bar{x}^k),$$

Bu yerda $\bar{x}^k = a_k z + (1 - a_k)x^k$, a_k - esa barcha $i = 1,...,m$ lar uchun $g_i(a_k z + (1 - a_k)x^k \le 0$ shartning bajarilishini ta'minlovchi eng kichik qiymat. Amaliyotda a_k ning qiymatini masalan, razryadma-razryad qidirish usuli bilan ham topish mumkin.

3. Jarimali funkciyalar usulining kamchiligi katta k larda $f_k(x)$ minimallashgan funkciyaning yaxshi ta'minlanmaganligidadir.

5.7.2. To'siqli funkciyalar usuli

Bu usulda chiziqli bo'lmagan dasturlashning joriy masalasi ham shartsiz minimallashtirish masalalarining kyetma-kyetligi (5.57)ga olib kyelinadi, lyekin $\varphi_k(x)$ funkciyalar shunday tanlanadiki, katta k larda mavjud U to'plamning ichki qiymatlarida (5.57) dagi $f_k(x)$ funkciyalar f(x) funkciyalardan uncha farq qilmaydi, shuningdyek ular $x \in U$ nuqta U to'plam chyegarasiga yaqinlashganida chyeksiz o'sib kyetadi.

5.3-Ta'rif. U to'plamning hamma ichki nuqtalarida aniqlangan $\{\varphi_k(x)\}$ funkciyalar kyetma-kyetligi quyidagi shartlar bajarilganida bu to'plamning to'siqli funkciyalar kyetma-kyetligi dyeb ataladi:

1) U to'plamning ihtiyoriy ichki nuqtasi uchun $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = 0$;

2) bu to'plamning biron bir chyekli qiymatiga yakinlashuvchi U to'plamdagi ichki nuqtalarning ixtiyoriy $\{x^r\}$ kyetma-kyetligi uchun $\lim_{r\to\infty}\varphi_k(x^r) = +\infty$.

SHunday qilib, katta k larda $\varphi_k(x)$ to'siq funkciyanning ta'siri mavjud to'plamning chyegaralari bo'ylab havfli «to'siqlar» ni yaratishdan iboratdir.

$\{B_k\}$ - musbat hadli Biron- bir kyetma-kyetlik va $\lim_{k\to\infty} B_k = 0$, $\varphi(x)$ funkciya esa U to'plamning hamma ichki nuqtalarida aniqlangan va x nuqta U to'plam chyegarasiga yaqinlashganda $+\infty$ ga intiladi. U holda $\varphi_k(x) = B_k\varphi(x)$ kyetma-kyetlik 5.3 shartni qanoatlantiradi.

Amaliyotda ko'pincha $B_k = 1/k, k = 1,2,...$ dyeb olinadi.

Agar chiziqli bo'lmagan dasturlashning mavjud U to'plami tyengsizliklar sistyemasi bilan aniqlansa, u holda

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m, \qquad (5.62)$$

U holda $\varphi(x)$ funkciya sifatida masalan,

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}. \qquad (5.63)$$

Olish mumkin. Bunda 5.57 dagi $f_k(x)$ yordamchi funkciya quyidagi ko'rinishga kiradi

$$f_k(x) = f(x) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}. \qquad (5.64)$$

To'siqli funkciyalar usuli ko'p o'lchovli minimallashtirish masalasida qo'llanilsa ham, bu usulni bir o'lchovli holda ko'rib chikamiz.

5.12-misol.

$$f(x) = x \to \min,$$

$$-x + 2 \le 2$$

Masalani $\varphi(x)$ sifatida (5.63) dagi funkciyani qo'llash orqali baryerli funkciyalar usulida yeching.

SHartsiz minimallashtirish masalalarining kyetma-kyetligini ko'rib chiqaylik.

$$f_k(x) = x + \frac{1}{k}\frac{1}{x-2}.$$

Mavjud to'plamning ixtiyoriy nuqtasi, masalan $x^0 = 5$ uchun, uning har hil k dagi qiymatini topamiz:

$x^{0*} = 3; \quad x^{9*} = 7/3; \quad x^{100*} = 21/10;...$

(5.62) dagi U to'plam uchun to'siqli funkciyalar boshqa usulda byeriladi. Masalan,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^{-p}, \; p > 0$$

yoki

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln[-g_i(x)]. \qquad (5.65)$$

Jarimali funkciyalar usulidagi kabi, hisoblashni tugatish sharti sifatida $\|x^k - x^{k/2}\| \le \varepsilon$ tyengsizlikni olish mumkin, bu yerda ε - aniqlik paramyetri, k- juft son.

5.13-misol. Masalani (5.65) to'siqli funkciyalarni qo'llagan holda yeching

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = -x_1 + x_2 \le 0,$$
$$g_2(x) = 1 - x_1 - x_2 \le 0,$$

$\|x^k - x^{k/2}\| \le 0{,}002$ da hisoblash jarayoni to'htatilsin.

SHartsiz minimallashtirish masalalarining kyetma-kyetligining ko'rinishi

$$f_k(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - \frac{1}{k}[\ln(x_1 - x_2) + \ln(x_1 + x_2 - 1)] \to \min.$$

Ularni Nьyuton usulida yechib, boshlang'ich nuqta $x^0 = (2{,}0)$ dan x^{*k} nuqtalar kyetma-kyetligini hosil qilamiz. k=500 va k=1000 da byevosita $x^{500} = (0{,}6696;0{,}3319)$ Larga ega bo'lamiz $x^{1000} = (0{,}6696;0{,}3326)$, $\|x^{1000} - x^{500}\| = 1{,}65 \cdot 10^{-3} < 0{,}002$ bo'lgani uchun , $x^* = x^{1000} = (0{,}6696;0{,}3326)$, $f^* = f(x^{1000}) = 0{,}6687$ dyeb olamiz. x^{1000} nuqta ikkinchi chyeklanish Bilan byerib qo'yilgan to'plam chyegarasiga yaqin joyda joylashgan .

Misollar

1.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 3/4)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3/4)^2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Masalani jarimali funkciyalar (5.57), (5.61) usulida yechganda yordamchi masalalarning yechimlar kyetma-kyetligi hosil bo'lishini ko'rsating

$$x_1^k = x_2^k = \frac{8k+3}{16k+4}.$$

2. CHiziqli bo'lmagan dasturlash masalasini jarimali funkciyalar usulida yeching

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 - x_2 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0$$

Bunda (5.61) dagi $\varphi(x)$ funkciyadan foydalaning va $\left\| x^k - x^{k/2} \right\| \le 0{,}05$ da $x^* = x^k$ dyeb oling.

3. CHiziqli bo'lmagan dasturlash masalasini to'siqli funkciyalar usulida (5.61) dagi $\varphi(x)$ funkciyadan foydalanib va $\left\| x^k - x^{k/2} \right\| \le 0{,}05$ da $x^* = x^k$ dyeb olgan holda yeching

$$f(x) = -x_1 - 5x_2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 + 2x_2 \le 0$$

5.8.Gradiyent usullar

CHiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechishda eng ko'p qo'llaniladigan usullardan biri gradiyent usullaridir. Funkciyalarning minimumini topishda qo'llaniladigan gradiyent usullar dastlabki tandab olingan X taqribiy yechimni tyenglamaning aniq yechim yo'nalashi bo'yicha kyetma-kyet aniqligini oshirishga asoslangandir.

T a ' r i f. *n* o'lchovli R fazoda byerilgan *F(X)* funkciyaning X nuqtadagi gradiyenti grad $F(X_0) = \dfrac{dF(X_0)}{\partial x}$ dyeb

$$F(X_0+\Delta X) - F(X_0)$$

chyekli orttirmaning chiziqli qismiga aytiladi, ya'ni

$$F(X_0+\Delta X) - F(X_0) = grad\, F(X_0)\Delta X + 0(\Delta X).$$

Gradiyent usullar chiziqli bo'lmagan masalalarni yochishning taqribiy usullariga kiradi, chunki ular aniq qiymatni faqatgina chyeksiz (faqatgina alohida hollarda chyekli) qadamda byeradi.

Gradiyent usulda chiziqli bo'lmagan dasturlashning ixtiyoriy masalasini yochish mumkin, buning uchun faqatgina lokal ekstryemumni topish yetarli. SHuning uchun ularni qo'llash qavariq dasturlash masalalarini yechishda ko'proq samara byeradi, chunki bu yerda lokal ekstryemum bir vaqtning o'zida global hamdir.

X ning o'zgarish sohasida chyegaralanmagan *f(x)* funkciyani maksimallashtirish masalasini ko'rib chiqaylik. *F(x)* funkciyaning ekstryemal qiymatini ihtiyoriy mavjud yechimdan, masalan $x_k = (x_{1k};...;x_{nk})$ nuqtadan boshlab qidirish mumkin.

F(x) funkciyaning x_k nuqtadagi $\nabla f(x)$ *gradiyenti* dyeb shunday vyektorga aytiladiki, uning koordinatalari mos o'zgaruvchi bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarning qiymatiga tyeng, ya'ni

$$\nabla f(x_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1k}}; \cdots ; \frac{\partial f}{\partial x_{n1k}} \right).$$

Byerilgan nuqtadagi funkciya gradiyenti *f(x)* funkciyaning tyezroq o'sish yo'nalishini ko'rsatadi.

x_k nuqtaning gradiyent bo'ylab yangi x_{k+1} nuqtaga ko'chirilish tyenglamasi

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) = 0 \qquad (7.12)$$

ga tyeng bo'lgan to'g'ri chiziq orqali amalga oshiriladi. Bu yerda λ_k-shunday sonli o'zgaruvchiki, unga qarab $\Delta x_k = \lambda_k \nabla f(x_k)$ ko'chish qadamining kattaligi o'zgaradi. Funkciya eng katta qiymatga erishadigan λ_k kattaligi funkciya ekstryemumining zaruriy shartidan topilishi mumkin:

$$\frac{d[\Delta f(\lambda_k)]}{d\lambda_k} = \nabla f(x_{k+1}) \nabla f(x_k) = 0 \qquad (7.13)$$

λ_k paramyetrni hisoblagandan so'ng (λ_k ning qiymatini (7.12) ga quyib) navbatdagi x_{k+1} nuqta topiladi. x_{k+1} nuqtada yana gradiyent topamiz, harakat esa $x_{k+2} = x_{k+1} + \lambda_{k+1} \nabla f(x_{k+1})$ to'g'ri chiziq orqali yangi $\nabla f(x_{k+2})$ gradiyent bo'ylab funkciya ushbu yo'nalishda eng katta qiymatga erishadigan x_{k+2} nuqtagacha amalga oshiriladi va h.k. YEchish jarayoni funkciya gradiyenti nolьga tyeng bo'lgan x^* nuqta topilguncha davom etadi. x^* nuqtada f(x^*) maqsad funkciyaisi maksimal qiymatga erishadi.

Misol $f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$ funkciyaning masksimumini toping. YEchish jarayonini $x_0 = (4;4)$ nuqtadan boshlansin.

YE ch i sh. *f(x)* funkciyaning har bir o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz. $\partial f / \partial x_1 = 2 - 2x_1$; $\partial f / \partial x_2 = 4 - 2x_2$. x_0 nuqtadagi funkciya gradiyentlari $\nabla f(x_0)$=(2-2*4; 4-2*4)=(-6;-4) ga tyeng bo'ladi. x_0 nuqtadan $\nabla f(x_0)$ gradiyent bo'ylab yangi x_1 nuqtaga ko'chiramiz:

$$x_1 = (4;4) + \lambda_0(-6;4) =$$
$$(4-6)\lambda_0; 4 - 4\lambda_0).$$

x_1 nuqtadagi funkciya gradiyentlari $\nabla f(x_1)$ $\begin{aligned} &= [(2 - 2(4 - 6\lambda_0); 4 - 2(4 - 4\lambda_0)] \\ &= (-6 + 12\lambda_0;\ -4 + 8\lambda_0). \end{aligned}$

Ekstryemumning zaruriy sharti quyidagi tyenglamani byeradi

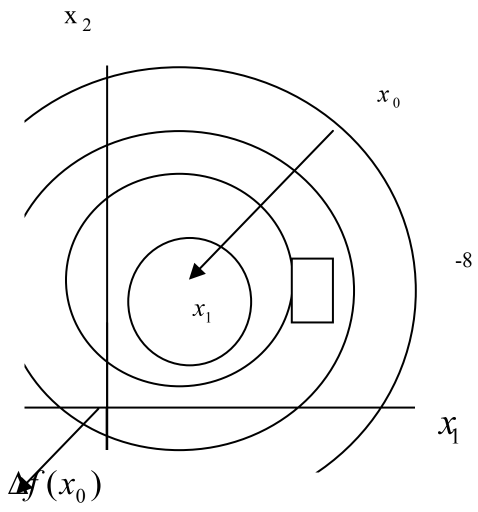
$$\frac{d[\Delta f]}{d\lambda_0} = \nabla f(x_1) \nabla f(x_0) =$$

$(-6 + 12\lambda_0)(-6) + (-4 + 8\lambda_0)(-4) =$ Bu yerdan kyelib chiqadiki $\lambda_0^* = 0.5.$

$13 - 26\lambda_0 = 0.$

$d^2 \Delta f / d\lambda_0^2 = -26 < 0$ bo'lgani uchun, topilgan λ_0^* qiymat $\Delta f(\lambda_0)$ funkciyaning maksimum nuqtasi bo'ladi.

Qidiruv trayektoriyasidagi navbatdagi nuqta $x_1 = (4-6\cdot 0{,}5;\ 4-4\cdot 0.5) = (1;2)$ va $\nabla f(x_1)$=(2-2*1; 4-2*2)=(0;0). Dyemak $x_1 = (1;2)$ shunday nuqtaki, unda maksimal funkciya o'zining maksimal qiymatiga erishadi $f(x_1) = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1 - 4 = 5$ (boshlang'ich nuqtada $f(x_0) = -8$). 7.1 rasmda byerilagan masalaning grafik ko'rinishi kyeltirilgan.



7.1 rasm

Endi chiziqli bo'lmagan dasturlashning chyegaralangan masalalarini yechishga o'taylik. Masalaning mazmuni quyidagicha: Faraz qilaylik

$$\begin{aligned} &a_i x \le b_i \\ &x \ge 0, \\ &x = (x_1;\ldots;x_n); \quad a_i = (a_{i1};\ldots;a_{in}) \end{aligned} \tag{7.20}$$

chyegarali *f(x)* funkciyaning maksimumi topilsin.

f(x) funkciya *botiq diffyeryenciallanuvchi funkciya* dir.

Bu kabi masalalarni yechishda ikkita hol uchraydi: 1) maqsad funkciyasi yagona eksryemumga ega va u mavjud yechimlar sohasining ichida joylashgan. Bu holda masalani yechish jarayoni (x_0 muqobil nuqtani qidirish) yuqorida bayon etilgandan mutlaqo farq qilmaydi; 2) maqsad funkciyasi mavjud sohaning chyegarasida joylashgan nuqtada ekstryemal qiymat qabul qiladi. Bu holda masalani yechish kyetma-kyetligi quyidagicha bo'ladi: Agar boshlang'ich x_k nuqta mavjud sohaning ichida joylashsa (hamma chyeklanishlar qat'iy tyengsizlik ko'rinishida tasvirlanadi), ko'chishni gradiyent bo'ylab amalga oshirish darkor. Lyekin navbatdagi nuqtaning $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)$ koordinatalari (7.20) dagi shartlarni qanoatlantirishi kyerak, ya'ni quyidagi tyengsizliklar bajarilishi shart

$$\left.\begin{aligned} a_i\left[x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)\right] \le b_i \quad (i = 1,\ldots,m); \\ x_k + \lambda_k \nabla f(x_k) \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

7.21 tyenglamalar sistyemasini yechish natijasida x_1 nuqta mavjud oraliqqa tyegishli bo'ladigan λ_k o'zgaruvchining mavjud qiymatlar oralig'i $\left[\lambda_k^{'};\lambda_k^{''}\right]$ topiladi. $\nabla f(x_k+\lambda_k\nabla f(x_k)\nabla f(x_k)=0$, (7.13) tyenglamalarni yechish natijasida topilgan λ_k qiymat $\left[\lambda_k^{'};\lambda_k^{''}\right]$ oraliqqa tyegishli bo'lishi kyerak. Agar λ_k qiymat oraliqdan tashqarida yotsa, λ_k^* sifatida $\lambda_k^{''}$ olinadi. Jumladan qidiruv trayektoriyasining navbatdagi nuqtasi (7.21) sistyemaning tyengsizligiga mos kyeluvchi chyegaraviy gipyertyekislikda yotadi, shuni hisobga olib, sistyemani yochishda $\lambda_k^{''}$ topiladi.

Agar boshlang'ich x_k nuqta chyegaraviy gipyertyekislikda yotsa (yoki qidiruv trayektoriyasining navbatdagi nuqtasi chyegaraviy trayektoriyada yotib qolsa), yo'nalish matyematik dasturlashning

$$a_i r_k = b_i, \tag{7.24}$$

$$|r_k| = 1 \tag{7.25}$$

tyengliklar bajariladigan i lar uchun quyidagi yordamchi masalasini yechish orqali aniqlanadi:

$$T_k = \nabla f(x_k) r_k \,(\max); \tag{7.22}$$

$$a_i r_k \le 0 \tag{7.23}$$

Bu yerda $r_k = (r_{k1};\ldots;r_{kn})$; $\quad |r_k| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_{kj}^2}$.

(7.24) shart x_k nuqtaning mavjud sohaning chyerasiga tyegishli bo'lish yoki bo'lmasligini, (7.23) shart x_k nuqtadan r_k vyektor bo'yicha ko'chirish mavjud sohaning ichiga yoki chyegarasi bo'ylab yo'nalganligini aniqlaydi, (7.25) shart sa r_k kattalikni chyegaralash uchun zarur. Qidiruv trayoktoriyasining kyeyingi $x_{k+1} = x_k + \lambda_k^* r_k$ nuqtasi uchun λ_k^* o'zgaruvchining qiymati topiladi. Bunda ekstryemumning zaruriy sharti $(\nabla f(x_{k+1}^*) r_k) = 0$ hisobga olinadi.

YOchish jarayoni $T_k = \nabla f(x_{k+1}^*) r_k = 0$ bo'lishini ta'minlovchi x_{k+1}^* nuqta olinganda to'xtaydi.

Misol. $-x_1 + x_2 \le 1;\ \ 3x_1 + 2x_2 \le 6;\ \ x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0$ chyeklanishlarni hisobga olgan holda $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$ ni maksimalllashtiring. Muqobil qidiruv (1;0.5) nuqtadan boshlanadai.

YE ch i sh. x_0=(1; 0.5) nuqta mavjud sohaning ichida yotadi va f(x_0)=1.75. Kyeyingi x_1 nuqtaga ko'chish yunalishi sifatida $\nabla f(x) = (8 - 4x_1;\ 6 - 2x_2)$ gradiyentning yo'nalishini olamiz. x_0 nuqtadagi gradiyent $\nabla f(x_0) = (4;5) \ne 0$ ga tyeng. Bundan kyelib chiqqan holda, navbatdagi nuqtaning koordinatalarini quyidagicha yozib olish mumkin:

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 \nabla f(x_0) = (1;\ 0.5) + \lambda_0(4;\ 5) = (1 + 4\lambda_0;\ 0.5 + 5\lambda_0).$$

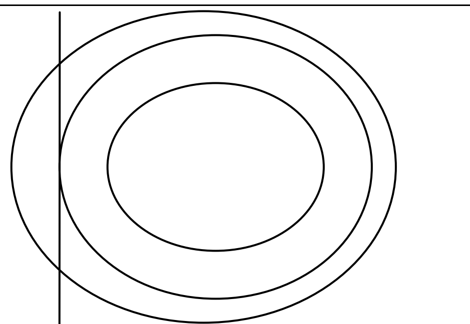
x_1 nuqta mavjud sohaga tyegishli bo'ladigan λ_0 o'zgaruvchining barcha qiymatlar oralig'ini topamiz. Bu holda (7.21) tyengsizliklar sistyemasining ko'rinishi quyidagicha:

$$\left.\begin{aligned} -1-4\lambda_0+0.5-5\lambda_0 &\le 1;\\ 3+12\lambda_0+1+10\lambda_0 &\le 6;\\ 1+4\lambda_0 &\ge 0;\\ 0.5+5\lambda_0 &\ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistyemani yechish natijasida $\left[\lambda_0^{'};\lambda_0^{''}\right]=\left[-0,1;\ 0,09\right]$ oraliq topiladi. $d\Delta f/(d\lambda_0)=\nabla f(x_1)\nabla f(x_0)=(4-16\lambda_0;\ 5-10\lambda_0)(4;5)=41-114\lambda_0=0$ ni yechib $\lambda_0=0,36$ ekanligini aniqlaymiz, ushbu qiymatda Δf funkciya eng katta qiymatga erishadi. Lyekin qiymat $\left[\lambda_0^{'};\lambda_0^{''}\right]=\left[-0,1;\ 0,09\right]$ oraliqqa tyegishli emas. SHuning uchun $\lambda_0^{*}=0.09$ dyeb olamiz.

YAngi x_1=(1,36; 0,95) nuqta ikkinchi chyeklanish-tyengsizlik ($\lambda_0^{*}=0.09$ qiymat tug'ri kyeluvchi tyengsizlik) bilan aniqlanuvchi chyegaraviy to'gri chiziqda yotadi. x_1 nuqtada funkciyaning qiymati f(x_1)=11,98>f(x_0)=8.75. x_1 nuqta chyegaraviy to'g'ri chiziqda yotgani uchun, kyeyingi x_2 nuqtaga o'tish yo'nalishini r_1 vyektor bo'yicha aniqlaymiz (gradiyent bo'yicha harakat mavjud sohadan chiqib kyetishga olib kyeladi). r_1 vyektorni aniqlash uchun yordamchi (7.22)-(7.25) masalasini yozib olamiz: $a_2r_1=(3;2)(r_{11};\ r_{12})=3r_{11}+2r_{12}=0;$ chyeklanishlarni va $|r_1|=\sqrt{r_{11}^2+r_{12}^2}=1$ ni hisobga olib $T_1=\nabla f(x_1)r_1=(2.56;\ 4.1)(r_{11};\ r_{12})=2.56r_{11}+4.1r_{12}$ ni maksimallashtiring.

Byerilgan masalaning tyenglamalar sistyemasi ikkita yechimga ega: (0.5568; -0,8352) va (-0,5568; 0,8352). Bu yechimlarni T_1 funkciyaga qo'yib, $T_1\neq 0$ funkciyaning maksimal qiymatiga (-0,5568; 0,8352) da erishilishining guvohi bo'lamiz, ya'ni x_1 nuqtadan r_1=(-0,5568; 0,8352) bo'ylab, (7.2) rasmdagi ikkinchi chyegaraviy to'g'ri chiziq orqali ko'chish kyerak. Kyeyingi x_2 nuqtaning koordinatalari $x_2=x_1+\lambda_1r_1=(1,36-0,5568\lambda_1;\ 4,1-1,6704\lambda_1)$. λ_1 o'zgaruvchining mavjud qiymatlar oralig'ini yana aniqlaymiz, unda x_2 qiymat mavjud sohaga tyegishli bo'ladi.

x_2 qanaotlantirishi kyerak bo'lgan chyeklanishlar sistyemasiga ikkinchi chyeklanish kirmaydi, chunki bu nuqta ushbu chyeklanish bilan aniqlangan chyegaraviy to'kyerak bo'lgan chyeklanishlar sistyemasiga ikkinchi chyeklanish kirmaydi, chunki bu nuqta ushbu chyeklanish bilan aniqlangan chyegaraviy to'g'ri chiziqda yotadi. Byerilgan sistyemani yechib oraliqni topamiz: $\left[\lambda_1^{'};\lambda_1^{''}\right]=\left[-1,1;\ 1,01\right]$. Ekstryemumning zaruriy sharti	

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial \lambda_1} = \nabla f(x_2)r_1 = (2{,}56 + 2{,}2272\lambda_1) \times (-0{,}5568) + (4.1 - 1.6704\lambda_1) \times (0.8352) = 0$$ dan foydalanib, λ_1=2,2 ekanlgini aniqlaymiz. Lyekin λ_1=2.2 $[-1{,}1;\ 1{,}01]$ oraliqqa tyegishli emas, shuning uchun $\lambda_1^* = 1{,}01$ dyeb olamiz. YAngi $x_2 = (0{,}8;\ 1{,}8)$ nuqta chyeklanishlar sistyemasining birinchi va ikkinchi tyengsizligiga mos kyeluvchi ikkita chyegarvaiy to'g'ri chiziqlarning kyesishmasida yotadi. Bu nuqtada funkciya $f(x_2)$=12,68>$f(x_1)$=11,98>$f(x_0)$=8.75. x_2 nuqtadan ko'chish yo'nalishi- $r_2 = (r_{21}; r_{22})$ vyektorni topamiz; $r_{21} + r_{22} = 0{,}3r_{21} + 2r_{22}$ chyeklanishlarni hisobga olib $T_2 = \nabla f(x_2)r_2 = 4.8r_{21} + 2.4r_{22}$=0 ni maksimallashtiring; $|r_2| = \sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2} = 1$.

Masalaning tyenglamalar sistyemasi r_2=(0;0) yechimga ega. Olingan natijani T funkciyaga qo'yib, maksimum T=0 ni hosil qilamiz, bu dyegani x_2 maqsad funkciyasining mavjud sohadagi maksimum nuqtasidir, ya'ni $x_2 = x^*$ va max $f(x^*)$=12.68. 7.2 rasmdan ko'rinib turganidyek f(x) ning chizig'i mavjud sohaning chyegaralariga x_2 nuqtada urinadi.

Misollar

Muqobillashtirish jarayonini ko'rsatilgan x_0 nuqtadan boshlab chiziqli bo'lmagan dasturlash masalalarini gradiyent usulda yeching, yechimni grafik usulda ham tasvirlang.

7.5 $f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 (\min);$ $x_0 = (1;\ 3).$

7.6 $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 (\min);$ $x_0 = (2;\ 8).$

7.7 $f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20 (\min);$ $x_0 = (1;\ 1).$

7.8 $f = 10x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 (\max);$ $x_0 = (0;\ 0).$

7.9 $f = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 (\max);$ $x_0 = (2;3).$

7.10 $f = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 13 (\max);$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 7; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \end{array}\right\} \quad x_0 = (3;\ 1)$$

7.11 $f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 (\max);$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 8; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \end{array}\right\} \quad x_0 = (3;\ 1)$$

7.12 $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 (\max);$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 6; \\ -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \end{array}\right\} \quad x_0 = (0;0)$$

7.13 $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 (\max);$
$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + 2x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \end{array}\right\} \quad x_0 = (2;\ 1)$$

5.9.Excel dasturiy vositasida chiziqsiz dasturlash masalasini yechish

CHiziqsiz dasturlash masalasini Excelda yechishni ko'rsatish uchun quyidagi ryeal masalani qaraymiz.

1 misol. Byerilgan hajmli parallyelopyepyed shakldagi bak o'lchamini aniqlash talab etilsin.

Bak hajmi

$V=abh$

To'liq sirti

$S=2(ab)+2(a+b)h=2(ab+(a+b)h)$

Kyetadigan matyerial bahosini quyidagicha qabul qilamiz

$c=kS,$

bu yerda *k* – bir birlik matyerial yuzasi bahosi.

Bu formulaga *S* ni qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz

$c=2k(ab+(a+b)h).$

Bularni hisobga olib optimallash masalasini quyidagicha formulirovka qilamiz

$V=abh\rightarrow max$

$2k(ab+(a+b)h)\leq c$

$a,b,h>0$

Bu masalaning qo'yilishi shundan iboratki, bak *a,b,h* o'lchamini shunday topish kyerakki unga kyetadigan matyerial narxi *c* dan oshmasin va uning hajmi *V* maksimal bo'lsin.

Masalani yechish uchun quyidagi aniq qiymatlarni qabul qilamsiz:

k=10ming so'm/m^2*, c=100ming so'm*.

U holda masalani yanada aniqroq qilib quyidagicha yozamiz

$V=abh\rightarrow max$

$20(ab+(a+b)h)\leq 100$

$a,b,h>0$

Bu masalani Excel dasturiy vositasida yechishni ko'rib chiqamiz.

Excel dasturiy vositasida chiziqsiz dasturlash masalasini yechish chiziqli dasturlash masalasinidan quyidagilardan farq qiladi:

-izlanayotgan o'zgaruvchilar boshlang'ich qiymati byeriladi;

-*Poisk ryeshyeniya* oynasining *Paramyetrы* dialog oynasida *Linyeynaya modyelь* byelgilanmaslik (kiritmaslik) kyerak.

Ikkinchi farq tushuntirish talab etmaydi, birinchiga esa quyidagi tushuntirish kyerak. Boshlang'ich x_j^0 qiymat mumkin qadar optimal yechimga yaqinroq qilib tanlanishi kyerak, bu o'z navbatida masalani yechishni tyezlatadi. Bu – talab xohishga qarab, lyekin asosiy talab maqsad funkciyasi bu boshlang'ich nuqtada nulga tyeng bo'lmasligidir $F(x_j^0)\neq 0$. Bu kyerakli talabdir, chyenki ΔF_k qiymati nulga tyeng bo'lib, hisoblashda nulga bo'lish hosil bo'lib qoladi.

YUqorida byerilgan masalani Excelda yechishga o'tamiz va uning Excelda qadamba qadam bajarilish algoritmini bayon etamiz:

1.Byerilgan chiziqsiz dasturlash masalasi byerilishini kiritish:

1.1.Masala shartini kiritish uchun forma tayyorlash.

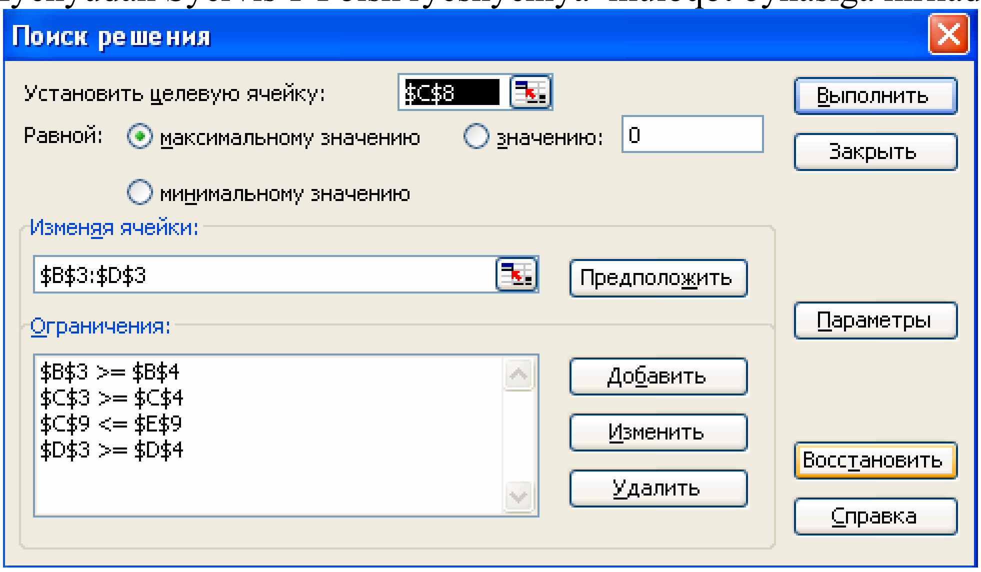
1.2.Kiritish

- hajm va bahoni kiritish;
- boshlang'ich x_j^0 qiymatlarni kiritash;
- B3,C3,D3,E3 yachyeykalariga $(x_j^0)\neq 0$ talabni qondirish uchun 1 qiymat kiritish.

	A	B	C	D	E
1			Ўзгарувчилар		
2		a	b	h	
3	Қиймат	1	1	1	
4	Пасти чегара	0	0	0	
5			Боғланишлар		
6					
7		Белгилаш	катталик	белги	Ўнг томон
8	Хажм	V	=B3*C3*D3	макс	
9	Нархи	C	=20*(B3*C3*+(B3+C3)*D3)	<=	100

1.3.Natijalar chiqadigan yachyeykalar formatiga son kasr qismi uchun son byelgisini aniqlash. Masalan, bizning misolimizda bu yachyeykalarga vyerguldan kyeyin 2 byelgi kiritish yetarlidir. Buni amalga oshirish yachyeykalar formatiga kirib amalga oshiriladi.

1.4.Myenyudan Syervis➔Poisk ryeshyeniya muloqot oynasiga kiriladi.



1.5.Masala shartlarini to'ldirish.

Quyidagilar to'ldiriladi:

-maqsad funkciyasiga C8; maksimallashtirish;

-o'zgaradigan yachyeykalarga B3:D3;

-chyegaraviy shartlarga B3>=B4; C3>=C4; D3>=D4;

-chyeklanishlarga C9<=E9.

1.6.Masalani yechishga o'tish. Poisk ryeshyeniya muloqot oynasidan Paramyetrы oynasiga o'tiladi. Bu oynada optimal yechimni izlash paramyetrlari byelgilanadi. Bu paramyetrlar ma'nosini bilish uncha talab etilmaydi. Maksimal vaqt, syekundda avtomatik ravishda 100. Ityeraciya soni chyegarasi, avtomatik ravishda 100. Agar bu paramyetlar yechimni topishda yetarli bo'lmasa ekranda mos ma'lumot chiqadi. Aniqlik qiymati avtomatik ravishda 0.000001. Bu yechimning yuqori darajada aniqligini ta'minlaydi.

1.7.Muloqot darchadagi kyeltirilgan paramyetrlar qiymatini byelgilagandan so'ng OK tugmasi bosiladi.

1.8.*Vыpolьnitь* buyrug'i byeriladi. Ekranda natija chiqadi.

	A	B	C	D	E
1		Ўзгарувчилар			
2		a	b	h	
3	Қиймат	1,29	1,29	1,29	
4	Паски чегара				
5		Боғланишлар			
6					
7		Белгилаш	катталик	белги	Ўнг томон
8	Ҳажм	V	2,15	макс	
9	Нархи	C	100,00	<=	100

Olingan natija B3=C3=D3=1.29, ya'ni a=b=h=1.29. Dyemak izlanayotgan bak formasi kub ko'rinishda bo'lishi kyerak ekan.

2 misol. Quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasini Excelda yeching

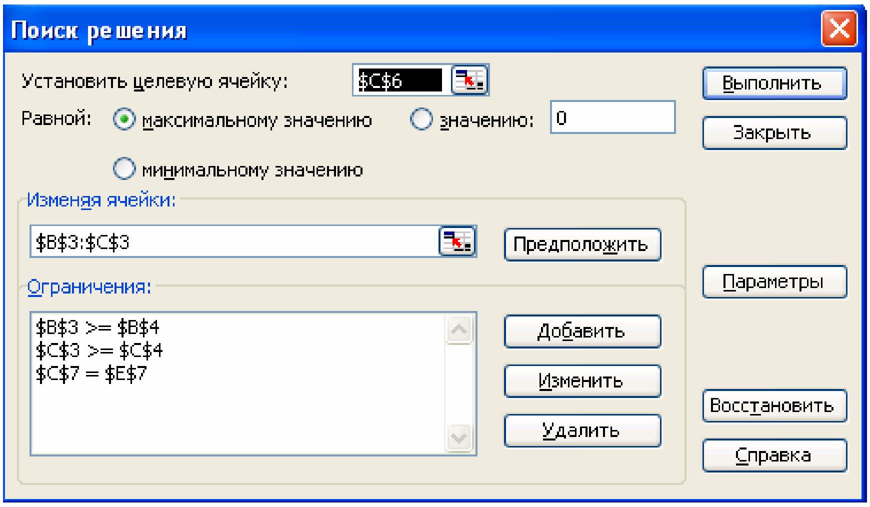
$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Masala shartini kiritamiz

	A	B	C	D	E
1		Ўзгарувчилар			
2		x1	x2		
3	Қийматлар	1	1		
4	Пастки чегара				
5					
6	Мақсад ф-я	F(x)	=B3+C3		
7	Чекланиш	Ch	=B3^2+C3^2	=	1
8					

CHyegaraviy shartlarni kiritamiz



Poisk ryeshyeniye muloqot oynasiga o'tib *Выpolнitь* buyrug'i byerilamiz va ekranda quyidagi natijaga ega bo'lamiz

	A	B	C	D	E
1		Ўзгарувчилар			
2		x1	x2		
3	Қийматлар	0,71	0,71		
4	Пастки чегара				
5					
6	Мақсад ф-я	F(x)	1,41		
7	Чекланиш	Ch	1,00	=	1
8					

Dyemak, $x_1=0,71$; $x_2=0,71$; $F(x_1,x_2)_{max}=1,41$

6.DINAMIK DASTURLASH VA UNING ENG SODDA MASALALARI

6.1.Dinamik dasturlashning asosiy masalasi

Ma'lum bir boshqaruv jarayoni boshlang'ich $S_0=(S_{01},...;S_{on})$ vyektor bilan haraktyerlanuvchi boshlang'ich S_0 holatda uribdi dyeb faraz qilaylik. Boshlang'ich holatlar to'plamini $\tilde{S}_N$ orqali byelgilaymiz. Vaqt o'tishi bilan jarayon o'zgaradi va oxirgi $S_N=(S_{N1};...S_{Nn})$ holatga o'tadi. Oxirgi holatlar to'plamini $\tilde{S}_N$ orqali byelgilaymiz. S_0 holatdan S_N ga o'tish jarayoni N ta bosqichga bo'linib kyetadi. Jumladan, agar jarayon i-bosqichda S_i holatda bo'lsa, uning i+1 bosqichdagi S_{i+1} holati nafaqat $S_i=(S_{i1},...;S_{in})$ holatlar vyektori, balki i-bosqichdagi topilgan U_i yechim orqali aniqladi. Bundan kyelib chiqib, kyeyingi bosqich holatlarining vyektorini $S_{i+1} = W(S_i, U_i)$ orqali ifodalash mumkin. YEchim esa har bir bosqichda mavjud yechimlarning $\widetilde{U}_i$ to'plamidan olinib va $f(S_i)$ maqsad funkciyasining qiymatini aniqlaydi. f(S) maqsad funkciyasini $W(S_i, U_i)$ funkciyalar yig'indisi ko'rinishida tasvirlaymiz, ularning qiymati S_i bosqichdan S_{i+1} ga o'tganda o'zgaradi:

$$f(S) = \sum_{i=0}^{N-1} W(S_i, U_i) \quad (8.1)$$

U holda dinamik dasturlashning asosiy masalasi shundan iborat bo'ladiki, u majud yechimlarning $\widetilde{U}$ to'plamidan shunday U* yechimni topishi kyerakki, bu yechim jarayonni boshlang'ich S_0 holatdan S_N ga o'tkazganda, (8.1) maqsad funkciyasi $S_{i+1} = W(S_i, U_i)$; $S_i \in \widetilde{S}_i, U_i \in \widetilde{U}_i$ shartlar bajarilganda ekstryemal qiymatlar qabul qilishiga imkon yaratishi kyerak.

YEchish paytida dinamik dasturlash masalasi soddaroq bo'lgan masalalarga ajratib yuboriladi (tabiiy yoki sun'iy usulda). ♥ar bir bosqichda ushbu masalalarning biron biri yechiladi, jumladan muqobil yechim kyelajakni hisobga olgan holda tanlanadi, ya'ni har bir bosqichda jarayonni muqobillashtirib, kyeyingi bosqichlar haqida unutmaslik kyerak.

Oxirgi bosqich, (N-1)-si kyelajakka bog'liq emas, shuning uchun bu bosqichda $f_1(S_1)$ maqsad funkciyasining ekstryemal qiymatini byeruvchi yechim olinadi. N-bosqichda muqobil yechimni olish uchun tizimning (N-1)-boskichdagi holatini bilish kyerak. (N-1)-bosqichda jarayonning holati noma'lum bo'lgani uchun, $S_{N-1,1},....S_{N-1,m}$ jarayonlarning byerilgan bosqichdagi mumkin bo'lgan holatlari haqida turli hil farazlar qilinadi va har bir faraz uchun N-boskichdagi $U^*_{N,1},...U^*_{N,M}$ muqobil yechim tanlanadi. SHunday qilib, N-bosqichdagi muqobil yechim topildi. Endilikda, bosqichda olingan muqobil yechimni hisobga olib, (N -1) bosqichdagi muqobil yechim topiladi va h.k. Natijada S_0 jarayonning boshlang'ich holatiga kyelinadi.

Birinchi bosqich uchun jarayonning mavjud holatlari haqida farazlar qilinmaydi, chunki S_0 holat ma'lum. Birinchi bosqichning muqobil yechimi ikkinchi bosqichda olingan muqobil yechimdan kyelib chiqqan holda topiladi. Butun jarayonning muqobil yechimi hamma bosqichlarda (S_0 dan S_N gacha) olingan muqobil yechimlarni ko'rib chiqilib xulosa qilish orqali olinadi.

Dinamik dasturlash masalalarini yechishning asosiy usuli funkcional tyenglamalar usulidir. Dinamik dasturlashning funkcional tyenglamasi har bir masalasi uchun W funkciyaning o'ziga hos ko'rinishi va S,U kattaliklar bilan haraktyerlanuvchi xususiy ko'rinishga ega. Dinamik dasturlash masalasining funkcional tyenglamasini umumiy ko'rinishda ham yozib olish mumkin. Dinamik dasturlash masalalari oxiridan qarab boshiga yechilgani uchun, oxirgi bosqich (N=1) dagi funkcional tyenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{extr}\left[W(S_{N-1};U_{N-1}) + f_0(S_N)\right]. \qquad (8.2)$$

Bu yerda $f_0(S_N)$ - $S_N \in \widetilde{S}_N$ oxirgi holatdan boshlab maksad funkciyasining nolь bosqichlaridagi ekstryemal qiymati. YAkuniy xolat chyegaralaridan tashqarida S_N jarayon ko'rib chiqilmagani uchun, $f_0(S_N) = 0$.

N-bosqich uchun funkcional tyenglama quyidagi ko'rinishda yeziladi:

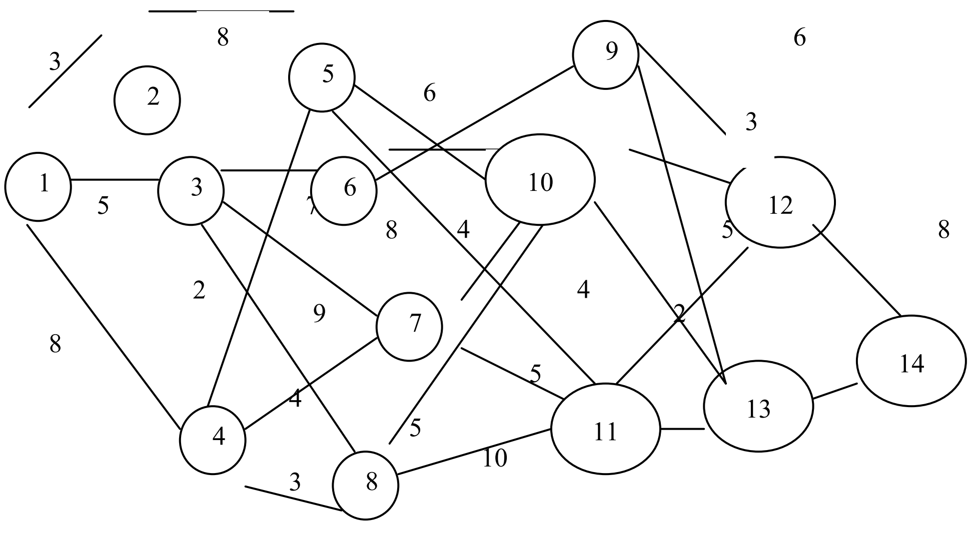
$$f_N(S_0) = \underset{U_0}{extr}\left[W_0(S_0;U_0) + f_{N-1}(S_1)\right]$$

Bu yerda $f_0(S_N)$ S_0 holatdan boshlab hamma N bosqichlar uchun myezonning (maksad funkciyasining) ekstryemal qiymatidir; $f_{N-1}(S_1)$ - S_0 holatdan boshlab hamma N-1 bosqichlar uchun myezonning (maksad funkciyasining) ekstryemal qiymatidir; $W_0(S_0;U_0)$ -Qabul qilingan U_0 yechim natijasida S_0 holatdan boshlab N –bosqichda olingan myezon qiymati.

Dinamik dasturlash masalasi funkcional tyenglamalar usulida quyidagi kyetma-kyetlik bo'yicha yechiladi:

1) yakuniy holat (N=1 boskich uchun) (8.2) funkcional tyenglama yozib olinadi. $f_0(S_N) = 0$ bo'lgani uchun $f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{extr}\left[W_{N-1}(S_{N-1};U_{N-1})\right]$.

   Byelgilangan $S_{N-1} \in \widetilde{S}_{N-1}$ holatlar va $U_{N-1} \in \widetilde{U}_{N-1}$ yechimlar hamda ularga javob byeruvchi W_{N-1} qiymatlar ko'rib chiqiladi. YEchimlar orasida shunday U^*_{N-1} ni tanlashadiki, u $extrW_{N-1}(S^*_{N-1};U^*_{N-1})$ ni ta'minlaydi;



8.1 Rasm

2) Kyeyingi, oxirgidan bitta oldingi (N=2) bosqichga o'tiladi. Byerilgan bosqich uchun funkcional tyenglama quyidagi qiymat qabul qiladi:

$$f_2(S_{N-2}) = \underset{U_{N-2}}{extr}\left[W_{N-2}(S_{N-2};U_{N-2}) + f_1(S_{N-1})\right].$$

♥ar bir mavjud S_{N-2} holat uchun mavjud U_{N-2} yechimga qarab W_{N-2} qiymat topiladi. So'ngra $W_{N-2} + f_1$ yig'indi (unda oxirgi bosqichning $f_1(S_{N-1})$ Qiymatlar hisobga olingan) lar solishtiriladi va har bir S_{N-2} uchun ekstyemal yig'indi va U^*_{N-2} muqobil yechim topiladi, ya'ni $f_2(S_{N-2})$ funkciya ekstryemal qiymat qabul qiluvchi U^*_{N-2} yechim topiladi. Xuddi shu tarzda (N=3, N=4, va h.k) bosqichdan (N=N) bosqichgacha o'tiladi;

3) (8.3) funkcional tyenglamani birinchi N=N bosqich uchun yozib olishadi. Byerilgan bosqichda jarayonning mavjud xolatlari haqida faraz qilinmaydi, chunki S_0 holat ma'lum. Bu xolat uchun muqobil qiymatni ikkinchi bosqichning hamma shartli-muqobil yechimlarini hisobga olgan holda aniqlash kyera;
4) Butun jarayonni to'g'ri yo'l bo'ylab S_0 dan S_N ga qarab o'tishadi va butun jarayon uchun $f_N(U^*_N)$ maqsad funkciyasiga ekstryemal qiymatni byeruvchi U^* muqobil qiymatni tanlashadi.

8.1 Misol. YUkni 1 punktdan 14 punktga ko'chirish kyerak. 8.1 rasmda yo'llar tuguni hamda tugunning alohida punktlari orasida birlik yukni ko'chirish narxi ko'rsatilgan (mos qirralarga quyilgan). 1 punkt bilan 14 punkt orasida eng kam xarajat kyetadigan yo'nalishni topish talab etilmoqda.

YEchish. 1 punktdan 14 punktga yukni yetkazish jarayonini alo♥ida bosqichlarga ajratib yuboramiz. Birinchi bosqichda yukli transport byevosita 2,3,4 punktlarga ko'chadi; ikkinchi bosqichda 2;3;4 punktlardan- 5;6;7;8 ga; uchinchi bosqichda-5;6;7;8 dan 9;10;11; to'rtinchi bosqichda- 9;10;11 dan 12;13 punktlarga va oxirgi bosqichda 12;13 dan-14 punktga;

Byelgilash kiritamiz: N-bosqich nomyeri (N=1;…;5); i-yuk o'tkazilayetgan punkt (i=1;…;13); j-yuk yetkazilayetgan punkt (j=2;…14); c_{ij} -yukni I punktdan j punktga o'tkazish narxi; $f_N(i)$ - agar oxirgi punktgacha N ta bosqich qolgan bo'lsa, u holda i punktdan oxirigacha yukni o'tkazish uchun kyetgan minimal xarajatlar.

Oxirgi bosqich uchun funkcional tyenglamani yezib olaylik (N=1):

$f_1(i) = \min\left[c_{ij} + f_0(14)\right] = \min\left(c_{ij}\right).$

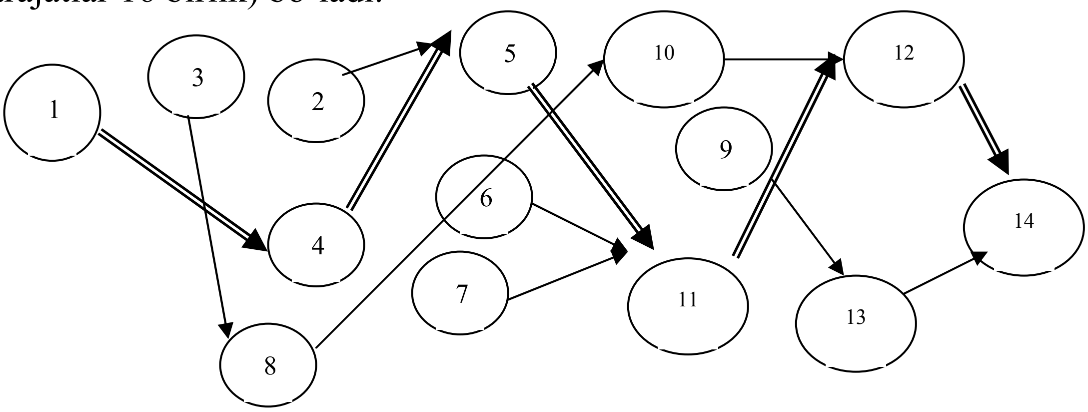
14 punktga yuk yoki 12 punktdan, yoki 13 punktdan yetkazilishi mumkin, shuning uchun $f_1(12) = c_{12} + f_0(14) = 8 + 0 = 8$ *ва* $f_1(13) = c_{13} + f_0(14) = 10 + 0 = 10$ larni hisoblaymiz.

Oxirgidan bitta oldingi (N=2) bosqich uchun funkcional tyenglamaning ko'rinishi quyidagicha: $f_2(i) = \min\left[c_{ij} + f_1(j)\right]$. Uchinchi bosqichning hamma natijalarini ko'rib chiqamiz (yuk 9;10;11 punktlarning birida bo'ldi). Faraz qilaylik yuk 9 punktga kyelib qoldi. Bu bunktdan yoki 12 yoki 13 punkt orqali yurish mumkin, va $f_2(9) = \min\left[c_{9;12} + f_1(12)\right];\left[c_{9;13} + f_1(13)\right] = \min(5+8;\, 3+10) = 13.$ Dyemak 9 punktdan 14 punktga o'tishning shartli muqobil yo'li 13 punktdan o'tadi, jumladan minimal xarajatlar 13 ni tashkil etadi. Agar yuk 10 punktda to'xtasa, u holda $f_2(10) = \min\left[c_{10;12} + f_1(12)\right];\left[c_{10;13} + f_1(13)\right] = \min(6+8;\, 4+10) = 14$, ushbu punkt uchun shartli-muqobil yo'nalish 10-12-14 ni tashkil etadi va harajatlar 10 ni tashkil etadi.

11 punkt uchun $f_2(11) = \min(2+8; 6+10) = 10$ ya’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 11-12-14 ni tashkil etadi va harajatlar 10 ni tashkil etadi.

Uchinchi bosqichga o’tamiz. Byerilgan bosqichda shartli-muqobil yechimni olish uchun to’rtinchi bosqichning xamma natijalarini ko’rib chiqamiz (bunda yuk 5;6;7;8 punktda bo’lib qolishi mumkin) . 5 punkt uchun $f_3(5) = \min\left[c_{5j} + f_2(j)\right] = \min(6+13; 4+10) = 14.$ ya’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 5-11-12-14 ni tashkil etadi . 6 punkt uchun $f_3(6) = \min\left[c_{6j} + f_2(j)\right] = \min(6+13; 5+14; 6+10) = 16.$ ya’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 6-11-12-14 ni tashkil etadi. 7 punkt uchun $f_3(7) = \min\left[c_{7j} + f_2(7)\right] = \min(4+14; 5+10) = 15.$ ya’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 7-10-12-14 ni tashkil etadi. 8 punkt uchun $f_3(8) = \min\left[c_{810} + f_2(10); c_{811} + f_2(11)\right] = \min(5+14; 10+10) = 19.$ ya’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 8-10-12-14 ni, minimal harajatlar esa 19 ni tashkil etadi.

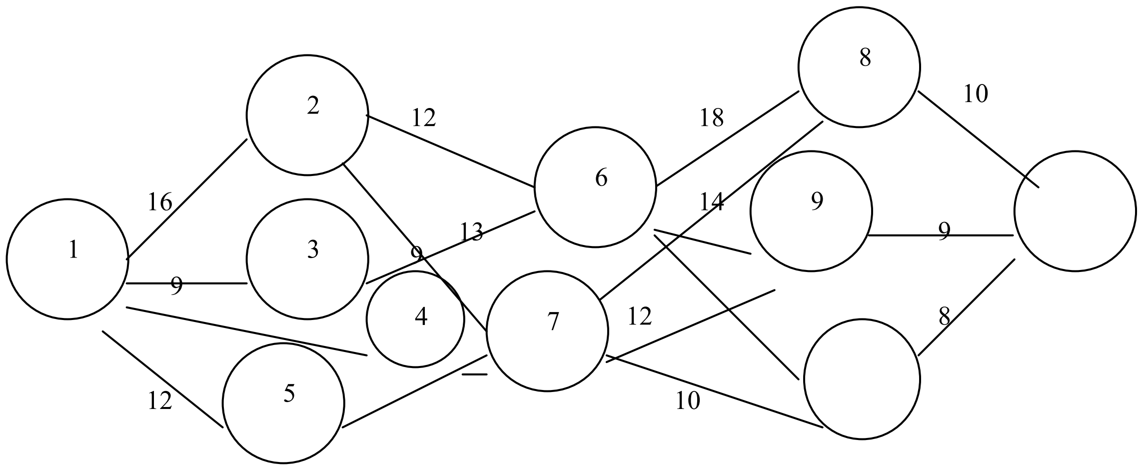
To’rtinchi bosqichni ko’rib chiqamiz (N=4). Birinchi bosqichdan so’ng (N=5) yuk quyidagi punktlarning birida bo’lib qolishi mumkin: 2;3;4;, ya’ni $f_4(2) = \min(8+14; 9+15) = 22.$
$f_4(3) = \min(7+16; 8+15; 2+19) = 21.$ $f_4(4) = \min(2+14; 4+15; 3+19) = 16.$ Bye dyegani, 2 punkt uchun muqobil marshrut 2-5-11-12-14 (xarajatlar 22 birlik), 3 punkt uchun 3-8-10-12-14 (xarajatlar 21 birlik), 4 punkt uchun 4-5-11-12-14 (xarajatlar 16 birlik) bo’ladi.



8.2 Rasm

Va nihoyat birinchi bosqichgaa (N=5) ga o’tamiz. $f_5(1) = \min(3+22; 5+2; 8+16) = 24.$ YA’ni bu punkt uchun muqobil yo’nalish 1-4-5-11-12-14 ni tashkil etadi, jumladan bundagi harajatlar minimal (24 birlik) bo’ladi. Byerilgan bosqichda biz 1-4 marshrutni tanladik, undagi xarajatlar 1-2 marshrutdagidan 2,67, 1-3 marshrutdagidan 1,6 baravar ortiq. Lyekin nafaqat birinchi balki butun marshrutni muqobillashtirish nuqtai nazaridan kyelishilgan yechimni birinchi bosqichda qabul qilish kyerak, chunki buning natijasida 1 punktdan 14 punktga yukni yetkazish xarajatlari minimallashtiriladi, ya’ni har bir bosqichda butun jarayondagi umumiy foydani xisobga olib turish kyerak.

Topilgan yechim nafaqata 1 dan 14 ga yukni yetkazishning muqobil marshrutini balki byerilgan yo'l tuguni uchun optimal marshrutlar to'plamini o'rnatishga imkon byeradi (8.2 rasm).



Funkcional boshqaruvlar usulidan foydalanib quyidagi dinamik dasturlash masalalarini yeching.

8.1 Byerilgan yo'l tugunida 1 punktdan 11 punktga yukni yetkazishning bir nyecha marshrutlari bor. (8.3 rasm). birlik yukni ko'chirish narxi ko'rsatilgan (mos qirralarga quyilgan**).** 1 punkt bilan 11 punkt orasida eng kam xarajat kyetadigan yo'nalishni topish talab etilmoqda.

8.2 Quyidagi shartlarni hisobga olgan holda o'n yildan ortiq bo'lmagan jihozlarga nisbatan muqobil siyosatni ishlab chiqing: 1) yoshi t ga tyeng bo'lgan bir yilda ishlab chiqilgan mahsulot narxi r(t), bu jixozli mahsulotga xizmat ko'rsatish uchun kyetadigan yillik xarajat u(t) lar 8.1 jadvalda kyeltirilgan; 2) jixozning qoldiq narxi s(t) jixozning yoshiga bog'liq emas va narxi 0 ga tyeng; 3) yangi jixozning narxi p(t) vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi va 8 birlikka tyeng.

Maksimal foydalar matricasini tuzib bo'lgandan kyeyin a) ryeja bo'yicha 10 yillik davomiylikka ega bo'lgan, ammo 7 yillik jixozga nisbatan; b) ryeja bo'yicha 9 yillik davomiylikka ega bo'lgan, ammo 6 yillik jixozga nisbatan muqobil siyosatni ishlab chiqish zarur.

8.1 Jadval

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(t)	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
U(t)	13	14	15	15	17	17	17	18	19	19	20

Eslatma. Byerilgan masala uchun funkcional tyenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f_1(t)=\max\left\{\begin{array}{c} r(t)-u(t) \quad (\textit{жи}[\textit{озни саклаш}]) \\ s(t)-p+r(0)-u(0) \quad (\textit{жихозни алмаштириб}) \end{array}\right\}, \textit{при} \quad N=1;$$

$$f_2(t)=\max\left\{\begin{array}{c} r(t)-u(t)+f_{t-1}(t+1) \quad (\textit{жи}[\textit{озни саклаш}]) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+f_{t-1}(t+1) \quad (\textit{жихозни алмаштириб}) \end{array}\right\}, \textit{при} \quad N=1;$$

8.3 Uchta korxona orasida (N=1,..,4) 120 ming.so’m bo’linib olindi. Ushbu to’rtta korxona orasida mahsulot ishlab chiqarishning ortishi ajratilgan pulga (x) bog’liq. (I,II,III,IV)korxonalarda maxsulot chiqarishning ortishiь8.2 jadvalda kyeltirilgan. Umumiy maxsulot ishlab chiqarishni ortishiga sabab bo’luvchi vositalarni taqsimlash ryejasini aniqlang.

S vositalar Ming. so’m	Korxonalarda maxsulot chiqarishning ortishi, ming.so’m			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

Eslatma. Byerilgan masalani yechish to’rtta bosqichga ajratilishi mumkin (N=4),oxirgi bosqich (N=1) da hamma pullar bitta korxonaga ajratiladi; oxirgidan bitta oldingi bosqichda (N=2) mavjud pullar ikkita korxona orasida bo’lib olinadi; oxirgidan ikkita oldingi bosqich (N=3) da pullar uchta korxona orasida bo’lib olinadi; birinchi bosqich (N=4) da pullar hamma korxonalar o’rtasida taqsimlanadai.
Byerilgan masalani yechish uchun mo’ljallangan funkcional tyenglamanining ko’rinishi quyidagicha:

$$f_1(x) = \max[q_1 x] = q_1(x) \quad \text{N=1 da;}$$

$$f_N(C) = \max_{0 \le x \le c}[q_N(x) + f_{N-1}(c-x)] \quad N = 2;3;4 \; \partial a$$

Bu yerda $f_N(c)$ -s vositalarni korxonalar bo’yicha taqsimlaganda mahsulot ishlab chiqarishning umumiy ortishi.
8.4. Korxona ma’lum bir jixozni ishlab chiqarishning kvartal ryejasini ishlab chiqishi kyerak unga bo’lgan har oylik talab 3 birlikka tyeng.Ryejadagi davrning boshida va oxirida zahiraning darajasi nolьga tyeng. Korxonaning ishlab chiqish quvvatlari 5 birlikdan ortiq mahsulot chiqarishga ruhsat byerolmaydi, zaxiraviy maydonlar esa oyning oxirida 4 birlikdan ortiq bo’lmagan tayyor mahsulotni saqlashga mo’ljallangan.
Maxsulotni ishlab chiqarish bilan bog’liq $c_i(x_t;i_t)$ umumiy xarajatlar $c(x_t)$ *ва* hi_t ishlab chiqarish xarajatlaridan yig’ilib boriladi.

6.2.Jihozni almashtirishning muqobil stratyegiyasini tanlash dinamik dasturlashning masalasi sifatida

Umumiy holda muammo quyidagi tarzda qo’yiladi: davomiyligi m ga tyeng bo’lgan vaqt oralig’ida jihozdan foydalanishning optimal stratyegiyasini tanlang, jumladan t yoshdagi jixozdan foydalanishning har yilgi foydasi maksimla bo’lishi shart

Byerilgan: r(t)-t yoshdagi jihoz tomonidan yil davomida ishlab chiqilgan mahsulotni ishga tushirishdan olingan foyda, l(t)-jihozning yoshi bilan bog’liq bo’lgan yillik xarajatlar, c(t)-t yoshdagi jihozning qoldiq nahi. P-yangi jihozning narxi. Jihozning narxi dyeganda oxirgii almashtirishdan so’ng yillar orqali tasvirlangan ekspluatаciya davri tushuniladi.

Matyematik modyelьni qurish uchun quyida bayon etilgan bosqichlar kyetma-kyet bajariladi.

1) Qadamlar sonini aniqlash. Qadamlar soni jihoz ekspluatаciya qilingan yillar soniga tyeng.
2) Sistyema holatini aniqlash. Sistyema holati jihoz yoshi bilan haraktyerlanadi: $t = 0, \overline{m}$
3) Boshqaruvlarni aniqlash. i-qadamning boshida, $i = 0, \overline{m}$ ikkita boshqaruvlardan biri tanlanishi mumkin: jihozni almashtirish yoki almashtirmaslik. Boshqaruvning har bir variantiga quyidagi sonlardan biri mos quyiladi:

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ агар жихоз алмаштирилмаса} \\ 1, \text{ агар жихоз алмаштирилса} \end{cases} \qquad (6.4.1)$$

4) I-qadamda yutuq funkciyasini aniqlash. i-qadamdagi yutuq funkciyaisi bu ekspulatаciyaning i-yili oxiriga kyelib jihozdan foydalanishdan olingan foyda, $t = 0, \overline{m}$, $i = 0, \overline{m}$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} r(t) - l(t) \quad \text{агар жихоз } i - \text{йилнинг бошида алмаштирилмаса;} \\ c(t) - p + r(0) - l(0), \text{ агар жихоз алмаштирилса} \end{cases} \qquad (6.4.2)$$

SHunday qilib agar jihoz sotilmasa, undan foydalanishdan olingan foyda-ishlab chiqilgan mahsulot narhi va ekspulatаcion kyechikishlar ayirmasidir. Jihozni almashtirganda foyda- qoldiq narx bilan yangi jihozning narxi ayirmasiga mahsulot narxi bilan i-qadamda yoshi nolьga tyeng bo’lgan yangi jihoz uchun mo’ljallangan ekspulatаcion kyechikishlar ayirmasini qo’shish orqali aniqlanadi.

5. ♥olatning o’zgarish funkciyasini aniqlash.

$$f_1(t)^* = \begin{cases} t + 1, \text{ агар } x_i = 0 \\ 1, \text{ агар } x_i = 1. \end{cases} \qquad (6.4.3)$$

6. i=m uchun funkcional tyenglamani tuzish.

$$W_m(t) = \max_{x_m \in (0,1)} \begin{cases} r(t) - l(t); \\ c(t) - p + r(0) - l(0) \end{cases} \qquad (6.4.4)$$

7. Asosiy funkcional tyenglamani tuzish

$$W_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - l(t) + W_{i+1}(t+1) \\ c(t) - p(t) + r(0) - l(0) + W_{i+1}(1) \end{cases} \qquad (6.4.5)$$

Bu yerda $W_i(t)$-t yoshli jihozdan i-qadamdan (i-yilning oxiridan) boshlab ekspulatаciya davrining oxirigacha olingan foyda.

$W_{i+1}(t+1)$- t+1 yoshli jihozdan i+1-qadamdan (i+1-yilning oxiridan) boshlab ekspulatаciya davrining oxirigacha olingan foyda.

SHunday qilib masalaning matyematik modyeli qurildi.

Modyelьni aniq bir misolda ko’rib chiqaylik.

Misol

M=12, p=10, c(t)=0, r(t)-l(t)=φ(t).

φ(t) ning qiymatlari 6.4.1 jadvalda byerilgan.

6.4.1 Jadval

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ(t)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Byerilgan misol uchun tuzilgan funkcional tyenglamalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$W_m(t) = \max_{x_m \in (0,1)} \begin{cases} \varphi(t); \\ -p + \varphi(0) \end{cases}$$

$$W_i(t) = \max \begin{cases} \varphi(t) + W_{i+1}(t+1) \\ -p(t) + \varphi(0) + W_{i+1}(1) \end{cases}$$

Jadvalning to'ldirilish qoidasini bir nyechta qadamlarda tushuntirib o'taylik.

1. SHartli muqobillashtirish oxirgi 12 qadamdan boshlanadi. I=12 qadam uchun mavjud sistyema qadamlari ko'rib chiqiladi t=0,1,2…12. Funkcional tyenglamaning 12 qadamdagi ko'rinishi quyidagicha

$$W_{12}(t) = \max_{x \in (0,1)} \begin{cases} \varphi(t)(t+1) \\ -p + \varphi(0) \end{cases}$$

1) $t = 0$

$$W_{12}(0) = \max_{(0,1)} \begin{cases} 10 \\ -10+10 \end{cases} = 10;\ x_{12}(0) = 0$$

2) $t = 1$

$$W_{12}(1) = \max_{(0,1)} \begin{cases} 9 \\ -10+10 \end{cases} = 9;\ x_{12}(1) = 0$$

.....

10) $t = 9$

$$W_{12}(9) = \max_{(0,1)} \begin{cases} 1 \\ -10+10 \end{cases} = 1;\ x_{12}(9) = 0$$

11) $t = 10$

$$W_{12}(10) = \max_{(0,1)} \begin{cases} 0 \\ -10+10 \end{cases} = 0;\ x_{12}(10) = 0;\ x_{12}(10) = 1;$$

......

13) $t = 12$

$$W_{12}(12) = \max_{(0,1)} \begin{cases} 0 \\ -10+10 \end{cases} = 0;\ x_{12}(12) = 0;\ x_{12}(12) = 1;$$

SHunday qilib, 12 qadamda 0-9 yoshli jihozni almashtirish kyerak emas. 10- 12 yoshli jihozni almashtirish yoki ekspulataciyada davom ettirish mumkin, chunki t=10,11,12 uchun ikkita 1 va 0 muqobil boshqaruv mavjud.

♥isoblash natijalari bo'yicha jadvalning i=12 ga to'g'ri kyeluvchi ikkita ustuni to'ldiriladi.

Byerilgan masalani yechish uchun 64.2 jadval to'ldiriladi.

6.4.2 jadval

t	I=12	I=11	I=10	I=9	I=8	I=7	I=6	I=5	I=4	I=3	I=2	I=1												
	x_{12}	W_{12}	x_{11}	W_{11}	x_{10}	W_{10}	X_9	W_9	X_8	W_8	X_7	W_7	X_6	W_6	X_5	W_5	X_4	W_4	X_3	W_3	X_2	W_2	X_1	W_1
0	0	10	0	19	0	27	0	34	0	40	0	45	0	51	0	58	0	64	0	70	0	75	0	82
1	0	9	0	17	0	**24**	0	30	0	35	0	41	0	48	0	54	0	60	0	65	**0**	**72**	0	78
2	0	8	**0**	**15**	0	21	0	26	**0**	32	0	39	0	45	0	51	0	56	**0**	**63**	0	69	0	74
3	**0**	**7**	0	13	0	18	0	24	0	31	0	37	0	43	0/1	48	**0**	**55**	0	61	0	67	0	73
4	0	6	0	11	1	17	1	24	0/1	30	0	36	0/1	41	**1**	**48**	0/1	54	0	60	0	66	0	72
5	0	5	0/1	9	1	17	**1**	**24**	1	30	0/1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
6	0	4	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
7	0	3	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
8	0	2	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
9	0	1	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
10	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
11	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
12	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72

Jadvalning chap ustunida $t=\overline{0,12}$ sistyemaning mavjud holatlari, yuqori qatorda- qadamlar nomyeri $i=\overline{1,12}$ zilgan. har bir qadam uchun shartli muqobil $x_i(t)$ boshqaruvlar va i-qadamdan boshlab oxirigacha t yoshli jixozning $W_i(t)$ shartli muqobil yutug'i topiladi.

2. 11-qadamning shartli muqobillashuvi

I=11 qadam uchun sistyemaning hamma mavjud holatlari t=0,1,2,..12 ko'rib chiqiladi. 11-Qadamdagi funkcional tyenglamaning ko'rinishi quyidagicha:

$$W_{11}(t) = \max_{x\in(1,0)}\begin{cases} \varphi(t) + W_{12}(t+1) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases}$$

$I = 11$

1) $t = 0$

$$W_{11}(0) = \max_{1,0}\begin{cases} \varphi(0) + W_{12}(1) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{(1,0)}\begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19;\ x_{11}(0) = 0$$

2) $t = 1$

$$W_{11}(0) = \max_{1,0}\begin{cases} \varphi(1) + W_{12}(2) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{(1,0)}\begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17;\ x_{11}(1) = 0$$

.....

6) $t = 5$

$$W_{11}(5) = \max_{1,0}\begin{cases} \varphi(5) + W_{12}(6) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{(1,0)}\begin{cases} 5 + 4 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 9;\ x_{11}(5) = 0$$

7) $t = 6$

$$W_{11}(6) = \max_{1,0}\begin{cases} \varphi(6) + W_{12}(7) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{(1,0)}\begin{cases} 4 + 3 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 9;\ x_{11}(6) = 1$$

......

13) $t = 12$

$$W_{12}(12) = \max_{(1,0)}\begin{cases} \varphi(12) \\ -p + \varphi(0) + W_{12}(1) \end{cases} = \max_{(1,0)}\begin{cases} 0 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 9;\ x_{11}(12) = 1;$$

SHunday qilib 11-qadamda 0-4 yoshdagi jihozni almashtirish kyerak emas. 5 yoshlik jihoz uchun ikkita foydalanish stratyegiyasi bor: almashtirish yoki ekspulataciyani davom ettirish.

6-yildan boshlab jihozni almashtirish shart. Xisoblash natijalariga ko'ra i=11 ga mos kyeluvchi ikkita ustun to'ldiriladi.

I=10.

1) $t=0$

$$W_{10}(0)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(0)+W_{11}(1)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}10+7\\ -10+10+17\end{cases}=27;\ x_{10}(0)=0$$

2) $t=1$

$$W_{10}(1)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(1)+W_{11}(2)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}9+15\\ -10+10+17\end{cases}=24;\ x_{10}(1)=0$$

3) $t=2$

$$W_{10}(2)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(2)+W_{11}(3)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}8+13\\ -10+10+17\end{cases}=21;\ x_{10}(2)=0$$

4) $t=3$

$$W_{10}(3)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(3)+W_{11}(4)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}7+11\\ -10+10+17\end{cases}=18;\ x_{10}(3)=0$$

5) $t=4$

$$W_{10}(4)=\max_{1,0}\begin{cases}\varphi(4)+W_{11}(5)\\ -p+\varphi(0)+W_{11}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}6+9\\ -10+10+17\end{cases}=17;\ x_{10}(4)=1$$

$\vdots$

6) $t=12$

$$W_{10}(12)=\max_{(1,0)}\begin{cases}\varphi(12)\\ -p+\varphi(0)+W_{12}(1)\end{cases}=\max_{(1,0)}\begin{cases}0\\ -10+10+17\end{cases}=17;\ x_{10}(12)=1;$$

10 qadamda 0-3 yoshdagi jihozlarni almashtirish kyerak emas. 4-yildan boshlab jihozni almashtirish zarur, chunki yangi jihoz katta foyda kyeltiradi. Xisoblash natijalariga ko'ra i=10 ga mos kyeluvchi ikkita ustun to'ldiriladi.

SHunga o'xshash usulda jadvalning to'qqizta usuni to'ldiriladi. $W_{i+1}(t)$ larni hisoblaganda $t=\overline{0,12}$ larning har biri uchun masalaning shartida kyeltirilgan joriy ma'lumotlar jadvalidan $\varphi(t)$ qiymatlar olinadi, W(t) qiymat esa oldingi qadamda to'ldirilgan ustundan olinadi.

SHartli muqobillashtirish bosqichi 6.4.2 jadval to'ldirilgandan so'ng tugaydi.

Byevosita muqobillashtirish birinchi qadamdan boshlanadi.

Faraz qilaylik birinchi qadam i=1 da yoshi 0 ga tyeng bo'lgan yangi jihoz bor dyeb faraz qilaylik.

t=t_1=0 uchun optimal yutuq $W_1(0)\ =82$. Bu qiymat yangi jixozdan 12 yil mobaynida foydalanishda olingan maksimal foydaga to'g'ri kyeladi.

$W^*=W_1(0)=82$.

$W_1(0)\ =82$ yutuqqa $x_1(0)=0$ byevosita muqobil boshqaruv to'g'ri kyeladi.

I=2 uchun (6.4.3) formula bo'yicha $t_2=t_1+1=1$.

Byevosita muqobil boshqaruv $x_2(1)=0$

I=3 uchun (6.4.3) formula bo'yicha $t_3=t_2+1=2$.

Byevosita muqobil boshqaruv $x_3(2)=0$

SHu tariqa

$$
\begin{array}{lll}
i=4 & t_4=t_3+1=3 & x_4(3)=0 \\
i=5 & t_5=t_4+1=4 & x_5(4)=1 \\
i=6 & t_6=1 & x_6(1)=0 \\
i=7 & t_7=t_6+1=2 & x_7(2)=0 \\
i=8 & t_8=t_7+1=3 & x_8(3)=0 \\
i=9 & t_9=t_8+1=4 & x_9(4)=1 \\
i=10 & t_{10}=1 & x_{10}(1)=0 \\
i=11 & t_{11}=t_{10}+1=2 & x_{11}(2)=0 \\
i=12 & t_{12}=t_{11}+1=3 & x_{12}(3)=0
\end{array}
$$

Jihozdan foydalanishning muqobil stratyegiyasini tashkil etuvchi boshqaruv 6.4.2 jadvalda qalin yozuv bilan ajratilgan.

Byerilgan masadaning doirasida startyegiyaning mazmuni 4-yoshga to'lgandan so'ng jihozlarni almashtirishdan iboratdir. Xuddi shunday usulda ixtiyoriy yoshdagi jihozdan foydalanish stratyegiyasini aniqlash mumkin. O'quvchining o'zi buni mustaqil qilib ko'rishi mumkin.

7.O'YINLAR NAZARIYASI. MATRICA O'YINLARI