П.Н. Коробов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2002
Санкт-Петербург

Министерство образования Российской Федерации

Санкт-Петербургская Государственная лесотехническая академия
им. С.М. Кирова

П.Н. Коробов, заслуженный деятель науки РФ, доктор экономических наук, профессор

Математическое программирование и моделирование экономических процессов

Рекомендовано УМО по лесоинженерным специальностям Минобразования РФ
в качестве учебника для студентов лесотехнических вузов

Издание второе переработанное и дополненное

Санкт-Петербург

2002 г.

P.N. Korobov

MATHEMATICAL PROGRAMMING AND MODELLING OF ECONOMIC PROCESSES

2002
St. Petersburg

УДК 519.85:519.86

Коробов П.Н. **Математическое программирование и моделирование экономических процессов.** Учебник.

В книге рассматриваются основы теории математического (линейного, нелинейного и динамического) программирования, сущность методов в решении оптимизационных задач; экономическая (содержательная) постановка и математическое моделирование общих задач и специальных прикладных проблем перспективного и текущего планирования и управления лесопромышленного комплекса.

Книга рассчитана на научных работников, преподавателей и студентов вузов. Она может быть полезна менеджерам и инженерам предприятий, объединений, исследовательских и проектных организаций.

Официальные рецензенты:

кафедра экономической кибернетики СПб Государственного Университета;

доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой экономической кибернетики и экономико-математических методов СПбГУЭиФ, Д.В. Соколов.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Использование экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники в целях оптимизации планирования и управления производством на разных уровнях вызывает все больший интерес у менеджеров и инженеров, научных работников и студентов к методологии постановки и математического моделирования различных проблем и задач, методике подготовки и решения их посредством методов математического программирования.

В этой связи, содержание книги раскрывает сущность математического программирования и методологии математического моделирования основных типов оптимизационных экономических задач.

Основная часть книги, по крайнем мере по объему, посвящена изложению теоретических и прикладных вопросов математического программирования.

В достаточно понятной форме излагаются основы теории линейного программирования, сущность основных его методов (симплексного, потенциалов, дифференциальных рент). Для усвоения сущности методов линейного программирования необходимы знания основ линейной алгебры. Учитывая, что некоторые читатели, особенно инженеры и менеджеры производства, ранее линейную алгебру не изучали вовсе или изучали в недостаточном объеме, в книге эти вопросы изложены так кратко, как это было возможно, и в такой форме, которая доступна читателям, ранее не изучавшим линейную алгебру.

В настоящее издание книги включены "Элементы теории линейного программирования" в авторской редакции к.ф-м. наук, доцента Шерстобитова В.В. в знак памяти и признания его, как талантливого ученого и прекрасного педагога, научного редактора первого учебника ().

Две главы в книге посвящены нелинейному и динамическому программированию. Методы решения задач нелинейного и динамического программирования довольно сложны и в этой связи в практике планирования и управления производством применяются еще ограничено.

Особый интерес представляет вычислительный аппарат динамического программирования, разработанный для решения ряда оптимизационных производственных задач (разработка стратегии управления запасами, ресурсами, замена оборудования и др.)

Как линейное, так и динамическое программирование изложены в доступной форме для понимания сущности вычислительных процедур и дальнейшего их использования в решении производственных задач.

На современном этапе, для успешного управления экономикой развития и функционирования отраслей, объединений и предприятий, необходимы хорошие знания не только существа методов математического программирования, а также методологии математического моделирования реальных экономических проблем и производственных задач.

Экономико-математическое моделирование различных задач проходит через все разделы книги.

Мы убеждены в том, что изучение применения экономико-математических методов (ЭММ) и ПЭВМ должно осуществляться не только на общих - типовых моделях, но и в равной степени на реальных моделях оптимального планирования и управления соответствующих отраслей, объединений и предприятий.

Поэтому вторая часть книги посвящена содержательной постановке и математическому моделированию оптимизационных проблем и задач из области перспективного и текущего планирования и управления производствами применительно к лесопромышленному комплексу. Рассматриваются экономико-математические модели основных проблем управления на уровне предприятий, объединений региона, которые разработаны автором в последние два десятилетия и прошли апробацию в производственных условиях. В этом большую помощь оказал к.э.н., доцент Ловков А.Б., за что выражаю ему искреннюю благодарность.

С надеждой полагаем, что книга будет полезна научным работникам, преподавателям и аспирантам, студентам экономических и технических факультетов, а также менеджерам и инженерам производства.

ВВЕДЕНИЕ.
ОБЪЕКТИВНАЯ НЕОБХОДИМОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ НАУЧНОГО УРОВНЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Повышение эффективности производства является главным направлением развития экономики и связано с внедрением результатов и достижений научно-технического прогресса, рациональных форм технологии и организации производства, повышением интенсификации использования основных фондов и денежных средств и т.п. Наряду с этим повышение эффективности производства в значительной степени зависит от совершенствования системы и методов планирования промышленного производства и управления им.

Дальнейшее развитие промышленного производства сопровождается ростом выпуска продукции, увеличением ее номенклатуры, усложнением производственной структуры и связей между предприятиями, строительством новых, расширением и реконструкцией действующих предприятий, внедрением новых видов техники, технологии, организации производства и т.п. В этих условиях планирование функционирования и развития производства, управление им с помощью традиционных методов не всегда обеспечивает получение обоснованных решений.

Для обеспечения пропорционального развития и нормальной деятельности взаимосвязанных звеньев народного хозяйства, расширения самостоятельности предприятий и объединений, заинтересованности их в научно-техническом прогрессе и повышении эффективности производства требуется повышение научного уровня экономических решений.

Одним из основных путей повышения научного уровня с целью обеспечения максимальной эффективности планирования производства и управления им является *внедрение математических методов на основе широкого использования современной электронно-вычислительной техники* (ПЭВМ).

В физике и химии, астрономии и космонавтике, механике и геологии крупные научные достижения получены за последнее столетие благодаря тому, что исследования строились на применении совершенного математического аппарата. Не случайно еще "К. Маркс считал, - пишет П. Лафарг в брошюре "Воспоминания о Марксе", - что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой".

Экономика, в широком понимании этой категории, по сравнению с другими науками, в большей степени нуждается в совершенствовании, ибо она создает реальную базу, которая необходима для дальнейшего развития всех сфер деятельности человека.

Дело еще и в том, что подавляющее большинство реальных производственных экономических задач имеют множество решений, ибо достижение цели может рассматриваться как функция многих переменных. Так, например, производственная деятельность по выпуску продукции схематически может быть описана с помощью функции:

$$Z = f(T, M, R, D),$$

где Z - объем производства, T - средства труда, M - предмет труда, R - рабочая сила, D - денежные средства.

Множество возможных количественных сочетаний факторов T,M,R,D обеспечивает многовариантность достижения цели производства. Экономико-математические методы (ЭММ) и современная вычислительная техника позволяют отыскивать *оптимальные решения* из всей совокупности решений. *Оптимальным считается такое решение,* *которое обеспечивает достижение цели в рассматриваемых условиях с максимальным эффектом.*

Оптимальные планы отраслей, объединений и предприятий должны обеспечивать:

во-первых, - балансовую увязку программы по выпуску продукции, вытекающей из потребности народного хозяйства и внешнего рынка с производственными ресурсами, которыми располагают отдельные звенья народного хозяйства;

во-вторых, - максимальную эффективность использования производственных ресурсов, которые всегда являются ограниченными.

Кроме того, и что также очень важно, - внося изменения и дополнения в экономическое (содержательное) условие проблемы, экономико-математические методы и ПЭВМ позволяют исследовать многовариантные направления решения проблемы, так сказать, проводить экономический эксперимент.

При этом объективные решения отыскиваются посредством математических методов количественного анализа вариантов, который позволяет исключить субъективные, волевые факторы, тем самым ставит планирование и управление на научную основу.

Идея необходимости оптимизации решения экономических задач волновала умы ученых давно. Применение математических методов в экономических исследованиях, если под этим понимать не простую числовую арифметическую иллюстрацию, а математические исследования конкретных экономических проблем с целью установления экономических зависимостей и закономерностей, относится к концу XIX и началу XX столетия.

Классическое применение математических методов для формализованного описания дано К. Марксом в его знаменитой модели расширенного воспроизводства. Эта модель была, по-видимому, первой макроэкономической моделью, позволяющей вскрыть целый ряд важных особенностей производства.

Основатель математической школы в буржуазной политэкономии, *Л.Вальрас* в 1874 г. создал общую статистическую экономико-математическую модель хозяйства в целом, известную под названием системы общего экономического равновесия. Рациональные элементы модели Вальраса заключаются в постановке *экстремальной задачи* для хозяйства в целом (достижение максимального эффекта при минимальных затратах) и подходе к ценам как составному элементу нахождения общего оптимума.

Далее, в 1897 г., известный буржуазный экономист-математик *Парето* на основании статистического материала установил закономерность распределения доходов населения в капиталистических странах в форме гиперболы ("*кривая Парето*").

Затем в 1904 г. русским экономистом-математиком *В.К.Дмитриевым* были созданы *уравнения связи затрат* и *выпуска продукции*, которые в дальнейшем (в 30-х годах) были использованы американским экономистом *В.Леонтьевым* для построения балансов *"затраты - выпуск"*.

Указанные работы можно считать первыми построениями экономико-математических моделей (Э.-М.М). Они наметили два направления экономико-математического анализа статистических данных: применение математических методов, во-первых, для описания экономических явлений, во-вторых, для установления зависимости между ними. Оба типа исследований относятся к области математической статистики; они и получили дальнейшее развитие в последующие два десятилетия.

В 1939 г. в издании Ленинградского Государственного университета появилась небольшая книга известного математика профессора того же университета *Л.В.Канторовича* "Математические методы организации и планирования производством"[1].

Этой книге, которая положила начало новой дисциплине прикладной математики - *линейному программированию*, суждено было сыграть огромную роль в применении математических методов к решению самых разнообразных задач в различных областях знаний, прежде всего в экономических исследованиях и в оптимальном планировании народного хозяйства.

Примечателен тот факт, что новая дисциплина возникла в результате больших раздумий и исследований над решением конкретной производственной задачи, с которой обратились к *Л.В.Канторовичу* в 30-е годы работники лаборатории Ленинградского фанерного треста. Требовалось найти наивыгоднейшее распределение работы восьми лущильных станков по пяти различным номенклатурам материалов при заданной величине производительности каждого станка по каждой номенклатуре материала при условии, что материал номенклатуры I составляет 10%, II-12%, III- 28%, IV - 36%, и V - 14% - распределение, дающее наибольшую продукцию в заданном ассортименте.

Таким образом, экономическая задача сформулирована как экстремальная на отыскание максимума (max.) при определенных условиях.

Основное достижение *Л.В.Канторовича* состоит в том, что он *открыл во всякой задаче*, в которой ищется экстремум (максимум или минимум величины) линейной функции, удовлетворяющей ряду ограничений, существование чрезвычайно важных множителей, названных им в рассматриваемой работе *разрешающими множителями*.

Только примерно через 10 лет метод линейного программирования в другой форме был переоткрыт в США. Первые статьи по линейному программированию были опубликованы в США лишь в 1949 г.

В них американский ученый *Дж.Б.Данциг* выступил тогда с изложением своего *симплексного метода*[2].

Симплексный метод *Дж.Б.Данцига* имеет очень много общего с методом последовательного улучшения плана, применявшимся в дальнейшем (после 1939 г.) *Л.В.Канторовичем* и его сотрудниками для решения ряда практических задач и представляющим конкретную реализацию метода разрешающих множителей. Однако есть и отличия их в некоторых существенных частях (на них мы не останавливаемся).

Еще до *Л.В.Канторовича* в нашей стране были опубликованы работы, которые можно считать зародышами линейного программирования. Так, в 1930 г. советские экономисты-транспортники (*А.Н.Толстой и др.*) для построения оптимального плана перевозок составили транспортную задачу в сетевой форме и решили ее без математического обоснования, применяя метод последовательного улучшения плана[3].

Расцвет работ по линейному программированию падает на 50-е годы XX столетия. В эти годы детально были разработаны основные методы решения, создано много разных алгоритмов, началось практическое применение новых методов, появилась обширная литература.

В 1949 г. *Л.В.Канторовичем* и *М.К.Гавуриным* в совместной статье был изложен *метод потенциалов* (в сетевой постановке) для решения транспортных задач.

Несколько позднее (в 1951г.) *Дж.Б.Данцигом* был разработан аналогичный метод, получивший название *модифицированного распределительного метода*.

---

[1]Эта работа с незначительными изменениями под тем же названием перепечатана в 1959г.

[2]Первая статья *Дж.Б.Данцига* (в соавторстве с *Маршалом Вудом*) дает общую постановку вопроса; вторая, собственно *Данцига,* излагает его математическую модель.

[3]Это название является общим и относится по существу к целой группе близких друг другу методов, которая включает как частные виды симплексный метод *Дж.Б.Данцига,* метод разрешающих слагаемых *А.Л.Лурье* и др.

В 1958 г. советский ученый *А.Л.Лурье* разработал *метод разрешающих слагаемых* для решения транспортных задач.

В 50-е годы, кроме различных методов и их модификаций для решения задач линейного программирования, появляется целый ряд работ, в которых излагаются методы *нелинейного и динамического программирования.* Так, в 1951 г. американские ученые *Х.Кун* и *А.Таккер* опубликовали работу по решению нелинейных задач. В 1954 г. *А.Чарнс* и *Лемке* разработали и опубликовали метод решения задач с сепарабельной выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями. В этом же году появляются работы по методам *целочисленного* линейного программирования. К ним относится и метод *Гомори*, опубликованный в США в 1958 г.

Также в 50-е годы американским математиком *Р.Беллманом* разрабатываются методы *динамического программирования*, появляется ряд работ, посвященных *квадратичному программированию*, например работы *Е.Баранкина, Р.Дорфмана, Е.Била и др.*

Кроме основателя линейного программирования *Л.В.Канторовича,* из советских ученых значительный вклад в развитие и практическое применение экономико-математических методов внесли ученые СО АН СССР, сотрудники научно-исследовательского экономико-математического института АН СССР, ученые других научно-исследовательских институтов, лабораторий, вычислительных центров и вузов.

Разработанный учеными за последние пятьдесят лет совершенный аппарат экономико-математических методов и наличие современных ПЭВМ создают практически неограниченные возможности научного решения экономических проблем и задач.

Сравнительно небольшой период времени использования экономико-математических методов и электронно-вычислительных машин в народном хозяйстве, в том числе и в отраслях лесной и деревоперерабатывающей промышленности, показал большую экономическую эффективность.

Однако преимущества оптимизации экономических решений следует рассматривать значительно шире, чем увеличение прибыли или, скажем, снижение затрат на производство. Внедрение экономико-математических методов и ПЭВМ - основы автоматизированной системы управления (АСУ) - создает реальную научную базу совершенствования планирования, тем самым позволяет упорядочить систему управления производством, повысить обоснованность и оперативность при определении производственных заданий а также корректировки их.

Экономико-математические методы в дальнейшем будут распространяться на решение все более широкого круга проблем и задач, однако не смогут охватить всю совокупность экономических, технологических, социальных и других проблем. Так как далеко не все проблемы и задачи могут быть математизированы и являться объектом приложения экономико-математических методов. Целый ряд проблем оказываются частично математизируемыми или вовсе нематематизируемыми и должны решаться иными методами.

Классификация проблем и методов их решения осуществляется на основе понятия *структуризации.*

Структура проблемы определяется пятью основными логическими элементами:
- цель или ряд целей, достижение которых будет свидетельствовать, что проблема решена;
- направления действий, с помощью которых может быть достигнута цель;
- затраты ресурсов, потребные по каждому направлению;
- модель или модели, в которых отражаются связи между целями, направлениями и затратами;

- критерий или критерии, с помощью которых сопоставляются цели и затраты и отыскивается предпочтительное решение.

В зависимости от того, насколько ясно и определенно просматриваются эти элементы, все проблемы можно подразделить на четыре типа:

- стандартные,
- хорошо структуризованные,
- слабоструктуризованные,
- неструктуризованные.

В соответствии с этим могут быть использованы четыре класса методов решения проблем и задач:

- стандартные процедуры и правила расчета решений;
- экономико-математические методы поиска оптимальных решений;
- системный анализ для построения рациональных хозяйственных альтернатив;
- экспертно-эвристические методы принятия хозяйственных решений.

Стандартные проблемы отличаются полной ясностью и однозначностью не только целей, направлений действий и затрат, но и самих решений; решаются на основе простейших вычислительных процедур по четко определенной методике. В производственном планировании к ним можно отнести, например, расчет потребности в оборудовании, материалах исходя из производственной программы.

Хорошо структуризованные проблемы, по своему существу, многовариантны, в то же время все их элементы и связи настолько хорошо определены, что могут быть выражены количественно и экономико-математическими моделями. В условии и постановке таких проблем отсутствуют элементы неопределенности. В этом случае для нахождения оптимального решения используются методы оптимального программирования, или, как их часто называют в иностранной и некоторой нашей литературе, — методы исследования операций.

В планировании отраслей, объединений и предприятий имеет место большое множество хорошо структуризованных проблем, начиная от выбора оптимального плана развития и размещения производств отрасли или промышленного комплекса, определения производственной программы выпуска продукции и кончая выбором вариантов загрузки оборудования и поиском оптимальных технологических процессов.

Слабоструктуризованные проблемы, в большинстве своем, связаны с выработкой долгосрочных прогнозов и направлений действий. В условии и постановке таких проблем наряду с количественно изменяемыми элементами содержатся неизвестные и неизмеряемые компоненты — следствие неопределенности каких-то условий. Такие проблемы решают с помощью количественно-качественной методологии *системного анализа,* сочетающей математические расчеты с качественным анализом. К слабоструктуризованным проблемам можно отнести, например, проблемы создания новых производственных комплексов, определение стратегии технического перевооружения, совершенствование организационной структуры управления и другие.

Неструктурированные проблемы отличаются значительной неопределенностью и неформализуемостью как самих целей деятельности, так и возможных направлений действий. При решении таких проблем главное значение имеют опыт, интуиция, квалификация и другие качества исследователя или руководителя, принимающего решение. К неструктуризованным проблемам можно отнести, например, проблему формирования долгосрочных и среднесрочных планов научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, построение планов социального развития и др. Методы решения этих и подобных им проблем состоят в использовании общих идей системного подхода, а также в правильной организации экспертных опросов и квалифицированной обработке данных, полученных на их основе.

Таким образом объектом применения экономико-математических методов могут являться широкий круг многовариантных, по своему существу, хорошо структуризованных производственных проблем и задач на любом уровне управления производством.

На основе сочетания трех фундаментальных наук математики, экономики и кибернетики учеными разработан значительный арсенал экономико-математических методов, которые можно объединить под одним названием - *методы разработки оптимальных решений* (*или исследования операций*), в то же время, которые по праву могут рассматриваться как самостоятельные науки:

- Теория управления запасами,
- Теория массового обслуживания,
- Теория игр,
- Теория статистических решений,
- Сетевые методы планирования и управления,
- Математическое программирование.

Математическое или оптимальное программирование включает в себя: линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, дискретное и выпуклое программирование.

ЛАТИНСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

Латинский алфавит

(в скобках указаны английские названия букв)

A	*a*	а (эй)	*N*	*n*	эн (эн)
B	*b*	бе (би)	*O*	*o*	о (оу)
C	*c*	це (си)	*P*	*p*	пе (пи)
D	*d*	де (ди)	*Q*	*q*	ку (кью)
E	*e*	э (и)	*R*	*r*	эр (ар)
F	*f*	эф (эф)	*S*	*s*	эс (эс)
G	*g*	ге (джи)	T	*t*	те (ти)
H	*h*	га (эйч)	*U*	*u*	у (ю)
I	*i*	и (ай)	*V*	*v*	ве (ви)
J	*j*	йот (джей)	*W*	*w*	дубль-ве (даблью)
K	*k*	ка (кей)	*X*	*x*	икс (экс)
L	*l*	эль (эль)	*Y*	*y*	игрек (уай)
M	*m*	эм (эм)	*Z*	*z*	зет (дзет)

Греческий алфавит

A	α	альфа	N	ν	ню
B	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	O	o	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
E	ε	эпсилон	P	ρ	ро
Z	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
H	η	эта	T	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
I	ι	иота	Φ	φ	фи
K	κ	каппа	X	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
M	μ	мю	Ω	ω	омега

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Глава 1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Основы экономико-математического моделирования

Решение экономических оптимизационных задач с помощью методов математического программирования базируется на последовательном выполнении ряда взаимосвязанных этапов:

- экономической (смысловой) постановки проблемы или задачи и подбора исходной информации,
- разработки математической модели и, при необходимости, последующего преобразования ее до типа разрешимых,
- нахождение оптимального решения посредством соответствующего метода математического программирования и компьютерной программы,
- оценки (математической и экономической) полученного решения,
- проведение экономического эксперимента посредством корректировки условия, модели и повтора решений,
- анализа расчетов и принятия решения для внедрения.

Первый этап является творческим, наиболее трудным и ответственным. Он слагается из экономической постановки проблемы или задачи и подбора достоверной исходной информации. Требует квалифицированного знания объекта (отрасли, объединения или предприятия, организации и технологии производства и т.п.).

Здесь прежде необходимо сформулировать цель (или несколько целей при более сложных постановках) достижение которой будет свидетельствовать, что проблема решена. Затем, подобрать критерий оптимальности (греч.,kriterion - мерило, оценка). Под *критерием оптимальности понимается экономический, технический или технико-экономический показатель, по которому судят об оптимальности решения*, находят наилучшее решение из возможных.

Выбор показателя критерия оптимальности зависит прежде всего от характера и цели решаемой задачи. Например, в задаче требуется определить программу выпуска продукции по ассортименту, которая обеспечивала бы максимальную рентабельность производства. Здесь за критерий оптимальности может быть принят показатель прибыли от реализации продукции. В иных постановках задач могут использоваться и другие показатели: цены, затраты на производство, съем продукции, транспортные расходы и др.

В более сложных постановках решаются многокритериальные задачи.

Затем должны быть сформулированы условия, от которых зависит искомое решение, т.е. факторы, влияющие на достижение цели, и их числовые значения, показывающие связь факторов и цели. Так, например, при определении ассортиментной программы прежде всего должны быть учтены наличные производственные ресурсы (сырья, материалов, машинного времени, трудовые, энергетические и денежные ресурсы и т.п.), нормы расходования их и другие ограничивающие условия.

Чтобы последующая разработка математической модели была успешной, необходимо выполнять три основных правила:

- учитывать главные факторы, от которых зависит искомое решение;
- пренебрегать второстепенными - не определяющими факторами;
- надо уметь отличать главные факторы от второстепенных.

В этом заключается искусство смысловой экономической постановки решаемой проблемы или задачи.

Исходя из экономической постановки задачи, разрабатывают ее математическую модель. Сущность математического моделирования заключается в следующем. Если в тех или иных условиях мы собираемся применить математические методы, то прежде всего эти условия следует описать в математических терминах. Даже простые явления в экономике, технике, промышленности и других областях становятся чрезвычайно громоздкими, когда они подвергаются строгому математическому описанию и анализу. Поэтому в первую очередь этот анализ должен заключатся в разложении явления (задачи) на простейшие элементы и затем в математическом описании элементов, и связей между ними.

В большинстве случаев моделирования задач первые математические выражения получаются в таком виде, который затрудняет, а иногда и совсем исключает применение того или иного математического метода для решения задачи. Поэтому необходимы квалифицированные знания для того, чтобы упростить поученные математические выражения (уравнения, неравенства, тождества и т.д.) и привести их к такому виду, при котором они не искажают основных характеристик явления и в то же время поддаются математическому исследованию и пригодны для решения методами математического программирования.

Процесс экономико-математического моделирования сам по себе является искусством, и здесь его мы можем лишь частично, бегло рассмотреть на примере некоторых типичных задач.

В дальнейшем мы еще множество раз будем его рассматривать на разных примерах экономических задач и проблем.

Следующие этапы полностью зависят от первых двух. В зависимости от характера полученной в окончательной форме математической модели выбирается метод решения; в зависимости от размеров задачи - программа и средства решения. Некоторые задачи на оптимум можно решать классическими методами математического анализа, однако большинство экономических экстремальных задач решаются специальными методами математического (линейного, целочисленного, нелинейного и динамического) программирования. Средства решения могут быть различные. Некоторые, незначительного размера, задачи можно решать вручную (в основном, для познания сущности алгоритма решения). Производственные задачи успешно решаются на персональных компьютерах с использованием типового программного обеспечения. Для решения специфических задач разрабатываются соответствующие программы решения.

Следующий этап заключается в математическом и экономико-логическом анализах полученного оптимального решения. Прежде устанавливается соответствие найденного решения условию задачи. Затем с помощью специальных приемов проводится контроль правильности решения —соответствия оптимальному варианту. И, наконец, посредством экономико-логического анализа устанавливается приемлемость и практическая возможность реализации найденного оптимального решения.

Однако при решении целого ряда реальных производственных проблем и задач целесообразно разнообразить решение посредством его повтора. Для этого вносятся некоторые коррективы в постановку задачи, в отношение к некоторым условиям, соответственно вносятся изменения в математическую модель, используются иные показатели критерия и другие соображения. Таким образом проводится экономико-математический эксперимент, позволяющий получить некоторые разновидности решения одной и той же проблемы, из которых далее выбирается предпочтительный или компромиссный вариант для внедрения.

Далее рассмотрим экономико-математическую постановку основных задач математического программирования на некоторых простых экономических примерах.

1.2. Постановка стандартной задачи линейного программирования на максимум целевой функции

Здесь по экономическому условию задачи необходимо составить математическую модель ее. Затем преобразовать модель с целью подготовки ее к решению. В математической модели, как указывалось выше, все условия задачи — факторы и их числовые значения — должны быть взаимно увязаны в определенных математических выражениях.

С этой целью прежде всего устанавливают неизвестные (переменные) задачи. Содержание неизвестных устанавливают по той части задачи, в которой оговаривается, что необходимо определить в результате решения. В математическом программировании неизвестные принято обозначать через x_1, $x_2,\ldots,x_j,\ldots x_n$. Затем составляют уравнение целевой функции (линейной формы), которую в данном случае необходимо максимизировать, и систему ограничительных условий задачи. В целевой функции находят отражение показатели критерия оптимальности, в ограничительной системе — условия задачи.

При постановке стандартной задачи линейного программирования на максимум целевой функции ограничения будут представлены в виде алгебраических неравенств, которые следует далее превратить в уравнения путем введения в каждое неравенство по одной дополнительной (уравновешивающей или выравнивающей) переменной x_{n+1}, $x_{n+2},\ldots,x_{n+i},\ldots,\ x_{n+m}$ (здесь m — число неравенств). Дополнительные переменные вводятся также и в уравнение целевой функции.

Рассмотрим экономико-математическую постановку задачи на типичном, хотя и несколько упрощенном примере ассортиментной задачи.

Условие задачи. В цехе установлено две группы (или типа) машин - A и B, с помощью которых производится продукция трех видов: P_1, P_2, P_3. Каждое из этих изделий подвергается некоторой последовательной обработке как на одной, так и на другой группах (типах) машин.

Известны нормы затрат машинного времени на обработку единицы (или 10, 100 ед., комплекта) продукции, а также фонд эффективного рабочего времени по каждой группе машин на определенный планируемый период. Эти данные приведены: в табл. 1.1.

Табл. 1.1

Типы (группы) машин	Нормы затрат машинного времени, *ч*, на единицу продукции			Фонд рабочего времени машин, *ч*
	P_1	P_2	P_3	
A	2	3	5	1500
B	1	4	2	1000

Кроме того, известно, что на производство этой продукции расходуются два вида материалов M_1 и M_2, ресурсы которых на предприятии на планируемый период ограничены определенными объемами. Известны нормы расхода каждого материала на единицу (или 10, 100ед., комплект) каждого вида продукции. Известна также прибыль, получаемая от реализации единицы (и 10, 100ед., комплекта) продукции. Эти данные приведены в табл.1.2.

Табл. 1.2

Виды материалов	Нормы расхода материалов на единицу продукции			Располагаемые ресурсы материалов
	P_1	P_2	P_3	
M_1	3	2	3	1800
M_2	4	2	5	2200
Прибыль, руб., от единицы продукции	3	4	6	-

В задаче требуется найти оптимальный план выпуска продукции (по ассортименту) из имеющихся материалов, который обеспечил бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции при условии, что потребности в материалах и машинном времени не превысят имеющихся ресурсов. Другими словами следует определить, какую продукцию необходимо выпускать и в каком количестве, чтобы получить максимальный доход от производства ее.

Если проанализировать исходные данные этого примера то можно прийти к выводу, что здесь нет очевидного наилучшего варианта искомой производственной программы по ассортименту продукции. Так, если прибыль на единицу продукции P_3 в 2 раза выше прибыли на единицу продукции P_1, то в то же время и нормы расхода производственных ресурсов на выработку P_3, значительно выше, чем при выпуске P_1. Следовательно, одни и ' те же ресурсы позволяют выработать большее число продукции P_1 по сравнению с P_3 и т. д.

В более сложных производственных примерах тем более не может быть очевидного ответа на поставленный вопрос, ибо экономические задачи по своему характеру всегда многовариантны и, кроме того, они отличаются сложностью цифровой информации.

Оптимальный вариант плана при решении экономических задач может быть найден посредством использования специальных математических методов и при больших размерах задачи - современной вычислительной техники (этот же и подобные ему примеры легко решаются вручную).

Не вдаваясь в экономический анализ приведенных данных, составим математическую модель этой задачи.

В данном примере неизвестными являются: количество продукции P_1, которое обозначим через x_1, количество продукции P_2 обозначим — x_2 и количество продукции P_3 — x_3.

Нас интересует нахождение таких значений переменных x_1, x_2, x_3, которые дали бы максимальную величину суммарной прибыли.

Прибыль в данном случае можно выразить как функцию от выпуска продукции разного вида

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3. \qquad (1.1)$$

Здесь коэффициенты при переменных x_1, x_2, x_3 обозначают размер прибыли на единицу продукции.

Поскольку в задаче ставится условие получения максимальной прибыли, следовательно, полученную *линейную функцию* (1.1), которую в дальнейшем будем называть *целевой функцией,* надо максимизировать.

Производство продукции должно быть запланировано таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, но при этом необходимо учесть, что потребности в материалах и машинном времени не должны превышать имеющихся количеств. Для этого необходимо составить ограничительные условия задачи.

Рассмотрим прежде ограничения, налагаемые машинным временем.

Общие затраты машинного времени на выпуск продукции P_1, P_2, P_3 в количествах x_1, x_2, x_3 определяются как

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ — по машинам группы A;

$x_1 + 4x_2 + 2x_3$ — по машинам группы B.

Здесь коэффициенты при переменных x_1, x_2, x_3 обозначают затраты машинного времени на единицу (или комплект) каждого вида продукции.

В нашем примере общее время работы машин A не должно превышать 1500*ч*, а машин B - 1000 *ч.* Математически это означает, что

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 1000. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Далее рассмотрим ограничения, налагаемые материальными ресурсами.

Общие затраты материалов на выпуск продукции P_1, P_2, P_3 в количествах x_1, x_2, x_3 определяются как

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3$ — по материалам M_1;

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3$ — по материалам M_2.

Здесь коэффициенты при переменных x_1, x_2, x_3 обозначают затраты материалов на единицу (или комплект) каждого вида продукции.

Расходы материала первого вида M_1 не должны превышать 1800 ед., а материала второго вида M_2 - 2200 ед. Математически это означает, что

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 2200. \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Наконец, следует уяснить, что все переменные x_1, x_2, x_3 должны быть неотрицательными, так как мы не можем производить отрицательное количество продукции, следовательно, в результате решения мы должны получить переменные, равные положительным числам или нулю, что можно записать следующим образом:

$x_1 \ge 0$; $\quad x_2 \ge 0$; $\quad x_3 \ge 0$.

Итак, нами получена первоначальная модель задачи. Математически задачу можно сформулировать следующим образом. *В решении систем линейных неравенств* (1.2), (1.3) *необходимо найти такие неотрицательные значения переменных* $x_j \geq 0$, *при которых целевая функция* (1.1) *примет максимальное значение*

Далее заменим числовые значения коэффициентов при неизвестных x_j (количество их примем равным *n)* буквенными и обозначим их в целевой функции F через c_j, в неравенствах исходных ограничений через a_{ij}, а величины ограничений (ресурсов) через b_i. Тогда математическое условие задачи линейного программирования с ограничениями — неравенствами в общем виде может быть сформулировано следующим образом. Требуется найти наибольшее (максимальное) значение целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \tag{1.4}$$

при условии, что переменные x_j удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ .... & ... & ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n & \leq & b_i, \\ .... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ x_j \geq 0 \text{ при} & j = & 1,2,...,n \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

В настоящее время в специальной литературе наряду с расширенной формой записи (1.4), (1.5) принята краткая запись условий задачи.

Целевую функцию (1.4) кратко можно представить, как:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \max, \tag{1.6}$$

а ограничительные условия (1.5), как

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \; i = 1,2,...,m \tag{1.7}$$

$$x_j \geq 0; \; j = 1,2,...,n. \tag{1.8}$$

Если в ограничительных условиях содержатся только неравенства, то такая задача считается *стандартной* задачей линейного программирования (если же в условии наряду с неравенствами содержатся еще и равенства, такая задача считается задачей со смешанными условиями).

Поскольку любое неравенство может быть превращено в равенство (посредством введения дополнительной уравновешивающей неизвестной), то любая задача линейного программирования может быть приведена к *эквивалентной* — *канонической* задаче. Так, задаче (1.4), (1.5) соответствует следующая эквивалентная каноническая задача. Требуется найти максимальное значение целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \tag{1.9}$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & & \leq & b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \qquad + x_{n+i} & & \leq & b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & & \leq & b_m. \\ x_j \geq 0 \text{ при } j = 1,2,\ldots,n,\ldots,n+m & & & \end{array}\right\} \qquad (1.10)$$

Теперь возвратимся к рассмотренному выше числовому примеру ассортиментной задачи.

В условии задачи ограничения (1.2), (1.3) представлены также в виде линейных неравенств. Преобразуем их в *эквивалентные* уравнения. Для этой цели в неравенства введем дополнительные (выравнивающие) переменные x_4, x_5, x_6 и x_7, тогда ограничения примут вид системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad + x_5 & = & 1000, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_6 & = & 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad\quad + x_7 & = & 2200. \end{array}\right\} \qquad (1.11)$$

Экономическое содержание дополнительных переменных в данном случае следующее:

x_4 — это не что иное, как неиспользуемое машинное время по машинам A;

x_5 — неиспользуемое машинное время по машинам B;

x_6 — неиспользуемая часть материала M_1;

x_7 — неиспользуемая часть материала M_2.

Дополнительные переменные, так же как и основные, должны быть неотрицательными, т. е.

$x_4 \geq 0$; $\quad x_5 \geq 0$; $\quad x_6 \geq 0$, $\quad x_7 \geq 0$.

Целевая функция в условии задачи, приведенном к каноническому виду, также представится в расширенном виде:

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_7 = \max \qquad (1.12)$$

Система линейных уравнений (1.10), состоящая из 4 уравнений и 7 неизвестных, имеет бесчисленное множество решений. Нас же интересует лишь такое решение, которое давало бы максимальное значение целевой функции F (т. е. обеспечивало бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции). Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти такое неотрицательное решение (план) данной системы линейных уравнений (1.11), при котором целевая функция (1.12) достигнет наибольшего значения.

Полученная система линейных уравнений (1.11) эквивалентна системе линейных неравенств (1.2), (1.3), в том смысле, что неотрицательные переменные x_1, x_2, x_3, входящие в неотрицательное решение системы (1.11), являются решением системы неравенств (1.2), (1.3).

Таким образом, задача полностью сформулирована математически и тем самым подготовлена к решению.

Решение такой задачи стало возможным благодаря созданию новой математической дисциплины, получившей название *линейного программирования.*

Используя один из методов решения задач линейного программирования — метод последовательного улучшения плана (симплексный метод), который рассматривается в гл. III, сравнительно быстро ручным способом находим, что:

x_1=407, x_2=114, x_3=68, x_4=0, x_5=0

x_6=144, x_7=0 - оптимальное решение.

Это значит, что оптимальная производственная программа, обеспечивающая получение максимальной суммарной прибыли, равной 2091, будет при выпуске продукции P_1 в количестве 407 единиц, P_2 в количестве 114 единиц и P_3 — 69 единиц. Ресурсы машинного времени используются полностью, так как недоиспользованное машинное время как по машинам A, так и по машинам B равно нулю (x_4=0, x_5 = 0). Излишки материала M_1 составляют 144 единицы; материал M_2 используется полностью (x_7 = 0).

Можно еще раз убедиться в том, что оптимальный вариант плана не был очевиден из логического анализа экономического условия задачи.

В дальнейшем во второй части книги мы рассмотрим подобные задачи по определению программ выпуска продукции по ассортименту в более широком аспекте и применительно к лесопромышленному комплексу.

1.3. Постановка стандартной задачи линейного программирования на минимум целевой функции

В рассмотренном выше примере экономико-математической постановки задачи ограничительные условия были представлены линейными неравенствами (1.2), (1.3), (1.6) со знаком $\leq$. В целом ряде иных задач ограничительные условия также могут быть представлены системой неравенств, но противоположного смысла, т. е. со знаком $\geq$. Целевая функция F при этом минимизируется. Такие задачи считаются стандартными задачами линейного программирования на минимум целевой функции.

Рассмотрим экономико-математическую постановку такой задачи на примере раскройной задачи.

Эта задача имеет большое практическое значение, так как на лесоперерабатывающих предприятиях (особенно на мебельных) производится в больших количествах раскрой древесностружечных и древесноволокнистых плит (ДСП и ДВП), фанеры, пиломатериалов, текстурной бумаги и других материалов (листов железа, прутков, труб) на детали и заготовки; на целлюлозно-бумажных предприятиях — раскрой бумажного полотна на листы и малые рулоны и т. д.

На лесоперерабатывающих предприятиях отходы при раскрое сырья и материалов в настоящее время составляют еще немалую величину. Для повышения экономической эффективности производства проблема сокращения отходов имеет большое значение.

Математические методы позволяют оптимизировать раскрой, тем самым максимально сократить отходы раскраиваемых сырья и материалов.

Сформулируем условие раскройной задачи прежде на частном, небольших размеров, примере с тем, чтобы он был «удобен» для последующих расчетов. В дальнейшем (в другой части книги) рассмотрим раскройную задачу в общей форме и более широком производственном аспекте.

Условие задачи. Положим, что на мебельном комбинате производится раскрой ДСП на заготовки и детали для мебели. Известно, что из партии ДСП необходимо нарезать четыре вида (*A*, *B, C, D)* различных по размерам заготовок и деталей. Древесностружечная плита стандартных размеров может быть раскроена пятью способами (вариантами). По каждому возможному варианту раскроя составляется соответствующая карта раскроя. Из карт раскроя известен выход заготовок (в штуках) разных размеров, а также площадь отходов при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

В задании на раскрой указано общее количество заготовок каждого вида, которые необходимо нарезать из партии плит, поступивших в раскрой. Все эти данные приведены в табл. 1.3.

Табл. 1.3

Виды (типо размеры) заготовок и деталей	Задание на раскрой по выходу заготовок, шт.	Выход заготовок, шт., по видам, при раскрое одной плиты по вариантам				
		1	2	3	4	5
A	500	0	0	1	1	0
B	1000	2	1	2	1	0
C	200	3	0	0	0	1
D	400	0	1	0	2	1
Площадь отходов, м^2		0,5	0,6	0,4	0,2	0,3

В задаче требуется найти оптимальный план раскроя ДСП, обеспечивающий выход планового числа заготовок при минимальных суммарных отходах от раскроя всех плит. Иными словами, в задаче необходимо определить, сколько ДСП следует раскроить по тому или иному варианту раскроя, чтобы нарезать требуемое число заготовок и при этом отходы были бы минимальными.

Из логического анализа исходных данных даже этого простого примера не вытекает очевидного наилучшего решения задачи. Тем более не может быть очевидного оптимального решения производственных задач, в которых число возможных вариантов раскроя измеряется десятками, а в некоторых задачах доходит до 100.

Оптимальное решение может быть найдено лишь посредством точных методов математического программирования. Для этого прежде всего необходимо задачу сформулировать математически.

Поскольку в задаче необходимо определить число плит, подлежащих раскрою по тому или иному варианту, через x_1 обозначим количество (штук) плит, раскраиваемых по 1-му варианту, x_2- ответственно по 2-му, x_3— по 3-му, x_4— по 4-му и x_5— число плит, раскраиваемых по 5-му варианту раскроя.

Нас интересуют такие значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые обеспечили бы минимальные суммарные отходы при раскрое всей партии ДСП.

Общие отходы в данном случае можно представить как функцию от раскроя по вариантам всей партии ДСП.

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 = \min. \qquad (1.13)$$

Здесь коэффициенты при переменных x_j характеризуют величину отходов (площадь в м^2) при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

Кроме того, раскрой плит должен быть организован таким образом, чтобы в результате его получить необходимое число заготовок по видам. Общий выход заготовок от раскроя всей партии ДСП будет равен:

x_3+x_4 - заготовок вида A,
$2x_1+x_2+2x_3+x_4$ - заготовок вида B,
$3x_1 \qquad +x_5$ - заготовок вида C,
$x_2 \quad +2x_4+x_5$ - заготовок вида D.

Здесь коэффициенты при переменных обозначают выход заготовок (штук) определенного вида при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

В условии задачи (табл. 1.3) необходимое количество заготовок по видам установлено. Поэтому общий выход их от раскроя всех ДСП должен быть не менее заданного. Математически это означает, что

$$\left.\begin{array}{rrrrrcr} & & x_3 + & x_4 & & \geq & 500, \\ 2x_1 + & x_2 + & 2x_3 + & x_4 & & \geq & 1000, \\ 3x_1 & & & & +\,x_5 & \geq & 200, \\ & x_2 & & +\,2x_4 & +\,x_5 & \geq & 400. \end{array}\right\} \qquad (1.14)$$

В результате мы получили ограничительные условия задачи, налагаемые общим выходом заготовок, в виде системы линейных неравенств (1.14) со знаком ≥. Таким образом, нами составлена первоначальная модель заданной раскройной задачи.

Математически задачу можно сформулировать следующим образом. *В решении системы линейных неравенств (1.14) необходимо найти такие неотрицательные значения неизвестных* $x_j \geq 0$ (при j = 1, 2, ..., 5), *при которых целевая функция* (1.13) *будет равна минимальной величине.*

Далее сформулируем условие этой задачи в общем виде. Для этого числовые значения коэффициентов при переменных x_j (примем j = 1, 2, ..., n) заменим буквенными. В целевой функции F обозначим их через c_j, в линейных неравенствах исходных ограничений через a_{tj}, а величины самих ограничений через P_t (примем t =1, 2, …, τ). При этом экономическую сущность этих показателей в данном случае оставим без изменения, т. е.:

под c_j, - понимаются отходы при раскрое одной плиты по j-му варианту;

a_{tj} - выход заготовок (шт.) t-го типо-размера при раскрое одной плиты по j-му варианту;

P_t - количество заготовок t-го типо-размера, не менее которого необходимо получить в результате раскроя всех ДСП.

Тогда математическая модель задачи линейного программирования с ограничениями-неравенствами (≥) в общем виде может быть записана следующим образом.

Требуется найти неотрицательные значения неизвестных x_j минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min \qquad (1.15)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq P_t, \quad (t = 1,2,...,\tau) \tag{1.16}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1,2,...,n) \tag{1.17}$$

Известно, что уравнения наиболее удобны для последующих математических операций. Поэтому неравенства следует превратить в уравнения. С этой целью в каждое неравенство вводится по одной дополнительной (уравновешивающей) переменной x_{n+t}. В отличие от предыдущего примера (1.2) — (1.7), ограничительные условия задачи (1.14), (1.16) представлены линейными неравенствами со знаком ≥, поэтому уравновешивающие переменные вводятся в левую часть этих неравенств с коэффициентом -1. В уравнение целевой функции в данном случае дополнительные переменные вводятся с нулевыми коэффициентами.

Тогда задаче (1.15), (1.16) будет соответствовать следующая *эквивалентная* каноническая задача.

Необходимо минимизировать целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{t=1}^{\tau} 0 x_{n+t} \tag{1.18}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - 1 x_{n+t} = P_t, \quad t = 1,2,...,\tau \tag{1.19}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n \tag{1.20}$$

$$x_{n+t} \geq 0, \quad t = 1,2,...,\tau \tag{1.21}$$

Ограничительные условия заданной раскройной задачи (1.14) представлены также в виде линейных неравенств (≥). Преобразуем и их в *эквивалентные уравнения.*

$$\left.\begin{array}{lllllllll} & & x_3 + & x_4 & & -x_6 & & & = 500, \\ 2x_1 + & x_2 + & 2x_3 + & x_4 & & & -x_7 & & = 1000, \\ 3x_1 & & & & +x_5 & & & -x_8 & = 200, \\ & x_2 & + & 2x_4 & +x_5 & & & -x_9 & = 400. \end{array}\right\} \tag{1.22}$$

В этих линейных уравнениях (1.22) дополнительные переменные характеризуют: x_6—выход заготовок *A* сверх планового зададания; x_7—сверхплановый выход заготовок *B;* x_8— соответственно — *C*, x_9 — выход заготовок *D* сверх задания.

Целевая функция эквивалентной экономической задачи в расширенном виде будет

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 = \min. \tag{1.23}$$

Эта задача, представленная системой линейных уравнений (1.22), состоящей из четырех уравнений с девятью неизвестными, имеет бесчисленное множество решений. Среди бесчисленного множества решений необходимо найти такое, которое давало бы минимальное значение целевой функции (1.23), характеризующей суммарные отходы при раскрое ДСП.

Система линейных уравнений (1.22) эквивалентна системе линейных неравенств (1.14), так как неотрицательные значения переменных $x_1,\ldots,x_5$, полученные в решении системы линейных уравнений (1.22), являются также решением системы линейных неравенств (1.14).

Экономико-математическая постановка стандартной задачи линейного программирования на минимум целевой функции на примере раскройной задачи рассмотрена и в результате разработана ее математическая модель. Тем самым задача подготовлена к решению, которое рассмотрено в гл. III. На этом можно было бы закончить рассмотрение вопроса. Однако уже здесь не безынтересно привести результат решения этой задачи – ее оптимальный план. И, кроме того, следует заметить (предупредить читателя), что проблема математического моделирования раскройной задачи на этом не исчерпана полностью и мы к ней еще возвратимся во второй части книги. Это будет видно из анализа результатов решения задачи.

Посредством одного из алгоритмов метода последовательного улучшения плана нами найдено оптимальное решение задачи (1.13, 14):

$$x_1 = \frac{200}{3};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{1000}{3};\ x_4 = 200;\ x_5 = 0;\ x_6 = \frac{100}{3};\ x_7 = 0;\ x_8 = 0;$$

$$x_9 = 0;\quad F = \frac{620}{3} = \min.$$

Это означает, что если мы раскроим (разрежем) 67 плит по первому варианту, 333 плиты по третьему и 200 плит по четвертому варианту раскроя, то будет полностью обеспечен плановый выход заготовок *(A* — 500 шт., *B* — 1000, *C* — 200 и *D* — 400 шт.) с минимальными суммарными отходами, равными 207 м^2.

В оптимальном решении уравновешивающая переменная x_6, равная $33\left(\frac{100}{3}\right)$, характеризует выход заготовок *A* сверх задания (сверх 500). В данной задаче в оптимальном решении лишь одна уравновешивающая имеет значение больше нуля, и получилась она по величине сравнительно небольшой (по сравнению с плановой — 500) .

В иных случаях в решении задач могут получиться нежелательные большие значения уравновешивающих переменных. Чтоб этого избежать, необходимо величину этих переменных ограничить сверху. Этот и некоторые другие вопросы методологии оптимизации раскроя материалов будут рассмотрены особо.

1.4. Экономическое содержание и математическая постановка транспортной задачи

В системе расширенного воспроизводства транспорту принадлежит важное место. Перевозки грузов выполняются внутри производственных предприятий, между предприятиями, а также между предприятиями и сферой потребления. Транспортировка грузов внутри предприятий — составная часть непосредственного процесса. Транспортировка грузов между предприятиями и из предприятий в сферу потребления осуществляется специальными транспортными организациями, которые образуют в своей совокупности особую отрасль материального производства — грузовой транспорт.

В производстве общественного продукта и национального дохода транспорту, как отрасли материального производства, принадлежит в России большая роль, чем в любой другой стране. Это обусловлено тем, что наша страна занимает обширную территорию и обладает развитым народным хозяйством с высоким уровнем территориальной специализации и кооперирования.

Доля транспорта в общем объеме производственных фондов России в настоящее время составляет около 20°/о. Непосредственно в транспортных отраслях занято более 10% рабочих и служащих. Если же учесть труд, связанный с выполнением транспортных функций в других отраслях народного хозяйства, а также затраты труда в отраслях, непосредственно обслуживающих транспорт эта цифра возрастает вдвое. Можно считать, что на пространственное перемещение грузов как в специально транспортной отрасли, так и в других отраслях народного хозяйства России затрачивается примерно одна пятая совокупного общественного труда.

В планировании лесоснабжения важнейшим звеном является организация доставки лесоматериалов от предприятий-поставщиков на предприятия-потребители, а также со складов и площадок в производственные цехи и т. п. Транспортные расходы занимают значительный удельный вес в структуре затрат. Их доля тем более увеличивается, если в организации ставок возникают нерациональные перевозки. Исходя из этого становится очевидным значение и широкая область применения методов оптимального решения транспортных задач.

Читатель уже привык к буквенному выражению числовых значений и в той или иной мере овладел искусством постановки задач, поэтому здесь нами принята наиболее строгая форма постановки транспортной задачи.

Итак, приступим к постановке транспортной задачи в общем виде.

Условие задачи. Допустим в пунктах A_1, A_2, .., A_m производится некоторая однородная продукция (сырье, материалы и т. п. В дальнейшем будем именовать — продукция). Таким образом, имеются m поставщиков A_i. Объем производства в пункте A_i, составляет a_i единиц. Следовательно, величину a_i можно назвать

мощностью поставщика, а $\sum_{i=1}^{m} a_i$ *— суммарной мощностью всех m поставщиков.*

Предположим, что указанная продукция потребляется в пунктах B_1,B_2, . . ., B_n, причем объем потребления в пункте B_j, составляет b_j единиц продукции. В дальнейшем величину b_j будем называть *емкостью* (или *спросом*) *потребителя*. Общий объем потребления (суммарная емкость) n потребителей составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Предполагается, что:

1) общий объем производства совпадает с общим объемом потребления [1], т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i =; \sum_{j=1}^{n} b_j; \qquad (1.24)$$

2) от каждого поставщика возможна перевозка продукции к любому потребителю[2];

---

[1]Несколько позже будет рассмотрена задача, в которой это условие не выполняется, т. е. объем производства не совпадает с объемом потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ и } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

[2]Это условие в ряде случаев может быть нарушено. Однако эти особенности нами будут рассмотрены особо, в другой части книги.

3) стоимость перевозки единицы продукции от поставщика A_i к потребителю B_j известна и составляет c_{ij} денежных единиц.

Условия задачи могут быть записаны в виде табл. 1.4. В данном случае мы имеем матрицу стоимости перевозок. Сокращенно матрицу можно записать:

$$C=(c_{ij}). \tag{1.25}$$

В задаче требуется разработать оптимальный план перевозок продукции, обеспечивающий с наименьшими транспортными затратами потребности всех потребителей при условии, что предложения и спрос сбалансированы, т. е. выдержано условие (1.24).

Если объем перевозок из пункта A_i в пункт B_j обозначить через x_{ij}, то план перевозок может быть записан также в виде табл. 1.4.

Таким образом, мы получили матрицу из чисел x, которую можно назвать матрицей перевозок. Сокращенно матрицу перевозок можно записать:

$$X=(x_{ij}) \tag{1.26}$$

Матрицу стоимости перевозок, которая дана в условии задачи, и искомую матрицу перевозок также можно представить а одной табл.1.4. В этой таблице стоимости перевозок записываются в верхнем левом углу каждой клетки.

Табл. 1.4

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос					
		B_1	B_2	. . .	B_j	. . .	B_n
		b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n
		$C=(c_{ij})$			$X=(x_{ij})$		
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . .	c_{1j} x_{1j}	. . .	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	C_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . .	c_{2j} x_{2j}	. . .	c_{2n} x_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	. . .	c_{ij} x_{ij}	. . .	c_{in} x_{in}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . .	c_{mj} x_{mj}	. . .	c_{mn} x_{mn}

Исходя из условия задачи, под оптимальным следует понимать такой план перевозок, который обеспечивает поставку всей продукции с минимальными суммарными расходами.

Суммарные затраты на поставку продукции можно выразить в виде уравнения целевой функции, которую надо минимизировать:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{ij}x_{ij} + ... + c_{mn}x_{mn} = \min. \tag{1.27}$$

Если далее все x сложить по строкам (см.табл.1.4), то сумма их должна быть равна мощности поставщиков - a_i:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} x_{11}+ & x_{12}+ & ... & +x_{1j}+ & ... & +x_{1n} & = & a_1, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{i1}+ & x_{i2}+ & ... & +x_{ij}+ & ... & +x_{in} & = & a_i, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{m1}+ & x_{m2}+ & ... & +x_{mj}+ & ... & +x_{mn} & = & a_m. \end{array}\right\} \tag{1.28}$$

Сумма переменных x по столбцам равняется емкости потребителей - b_j:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} x_{11}+ & x_{21}+ & ... & +x_{i1}+ & ... & +x_{m1} & = & b_1, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{1j}+ & x_{2j}+ & ... & +x_{ij}+ & ... & +x_{mj} & = & b_j, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{1n}+ & x_{2n}+ & ... & +x_{in}+ & ... & +x_{mn} & = & b_n. \end{array}\right\} \tag{1.29}$$

Таким образом, в виде систем линейных уравнений (1.28), (1.29) мы получили ограничительные условия транспортной задачи, которым должны удовлетворять искомые переменные x_{ij}.

При этом все неизвестные должны быть *неотрицательными*, т.е.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{при } i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{1.30}$$

Математически задачу можно сформулировать следующим образом.

В решении систем линейных уравнений (1.28), (1.29) *необходимо найти такие неотрицательные значения неизвестных* x_{ij}, *при которых целевая функция* (1.27) *достигнет минимальной величины*.

Математическую модель транспортной задачи в общем виде можно представить в сокращенной записи следующим образом.

Необходимо найти неотрицательные значения неизвестных x_{ij}, минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{1.31}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = 1,2,...,m), \tag{1.32}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (j = 1,2,...,n), \tag{1.33}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i = 1,2,...,m; \quad j = 1,2,...,n). \tag{1.34}$$

В условии (1.32) записано, что суммарный объем поставки продукции всем n потребителям от конкретного поставщика i должен быть равен количеству продукции, предназначенной к поставке от этого i-го поставщика, т.е. его мощности.

В системе уравнений (1.33) отражено условие полного удовлетворения спроса потребителей: суммарный объем поставки продукции от всех m поставщиков конкретному j-му потребителю должен быть равен емкости (спросу) этого потребителя.

В ограничительных условиях транспортной задачи (1.28), (1.29) содержится m+n уравнений с m×n неизвестными, причем одно из уравнений является следствием остальных в силу условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Следовательно, в системе (1.28), (1.29) *линейно независимых уравнений будет* m+n-1 (это называют *рангом системы* - r), и каждый опорный план (программа) должен содержать не более чем m+n-1 положительных перевозок.

Если число положительных перевозок x_{ij} равно m+n-1, то такой опорный план (программа) оказывается *невырожденным*. В случае, когда часть базисных компонент (перевозок) плана нули, то такой план является *вырожденным*.

Для каждого невырожденного опорного плана в матрице перевозок X=(x_{ij}) должно быть m+n-1 заполненных числами x_{ij} клеток. Остальные клетки остаются пустыми.

Заполненные в матрице перевозок клетки называются *базисными*, не заполненные - *свободными*.

Транспортные задачи могут решаться с помощью *симплексного* метода. Однако лучше всего их решать специально разработанными методами, которые менее громоздки и сравнительно просты. Наиболее распространенными методами решения транспортных задач являются: *распределительный метод, метод потенциалов, метод дифференциальных рент* и *венгерский метод*. Существуют и другие методы.

Основные методы решения транспортных и нетранспортных задач, приводимых к типу транспортных, будут рассмотрены на числовых примерах ниже в соответствующих главах книги.

1.5. Постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой вычислительный метод решения некоторых типов задач нелинейного программирования, а также некоторых задач линейного программирования с требованием целочисленности аргументов. Основателем динамического программирования является американский математик Р.Беллман. Введенный им термин "*динамическое программирование*" возник в результате изучения задач, в которых были существенные изменения во времени. Однако этот метод может быть использован в задачах, где время вообще не фигурирует.

При применении метода динамического программирования весь оптимизируемый процесс естественно или искусственно подразделяется на ряд *этапов* или *шагов*.

Не существует единой схемы подхода к решению различных типов задач оптимизации методом динамического программирования. В каждом типе задачи осуществляется специфика подхода для ее решения. Однако общим для этого метода является следующее. Оптимизация целевой функции производится постепенно, шаг за шагом. На каждом шаге определяется *оптимальное управление*, т.е. совокупность переменных, при которых целевая функция на этом этапе имеет наибольшее (наименьшее) значение. В одних задачах, в которых оптимизируемый процесс естественно подразделен на ряд этапов, решением задачи является совокупность оптимальных управлений на всех этапах. В других задачах, в которых обычно оптимизируемый процесс подразделяется на ряд шагов искусственно, решением задачи является оптимальное управление, найденное на последнем шаге.

Рассмотрим пример естественно многошагового процесса. Пусть планируется работа группы разнородных промышленных предприятий, входящих в объединение

$П_1, П_2, \ldots, П_n$

на один хозяйственный год. Конечной задачей планирования является получение максимальной прибыли от реализации некоторого вида продукции P, производимой этими предприятиями. В начале периода имеется определенный запас x_0 денежных ресурсов C (или других ресурсов), необходимых для изготовления продукции P. На каждом предприятии $П_j$ известны производственные возможности использования денежных ресурсов C с учетом использования оборудования и других факторов.

Ставится вопрос: как нужно распределить денежные средства C (или другие ресурсы) между предприятиями по кварталам хозяйственного года, чтобы к концу года суммарный доход от всей системы предприятий был максимальным?

В нашем примере планируемая операция естественно подразделена на четыре шага, причем каждый шаг представляет собой один квартал хозяйственного года.

Под управлением V_i на i-ом шаге операции следует понимать распределение количества денежных средств C

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

имеющихся к этому времени. Таким образом, управление на i-ом шаге состоит в том, что предприятию $П_1$ выделяется x_{i1} финансов, предприятию $П_2$ - x_{i2} финансов C и т.д.

$$V_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n}),$$

$$V_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n}),$$

$$V_3 = (x_{31}, x_{32}, \ldots\ldots, x_{3n}),$$

$$V_4 = (x_{41}, x_{42}, \ldots\ldots, x_{4n}),$$

от которых зависит суммарный доход

$$W = W(V_1, V_2, V_3, V_4).$$

Задача состоит в том, чтобы так выбрать все эти четыре управления, т.е. так распределить денежные средства C между предприятиями в начале каждого квартала, чтобы величина W, зависящая от управлений V_i, приняла максимальное значение. Каждое управление V_i (i=1,2,3,4), при котором получается максимум величины W, называется *оптимальным управлением* (стратегией) на соответствующем шаге операции.

Процесс динамического программирования при решении задач такого типа разворачивается в обратном по времени направлении. Раньше всего планируется последний шаг, в нашем примере - четвертый квартал. Затем оптимально планируется третий квартал с учетом оптимально спланированного четвертого квартала. За третьим кварталом оптимально планируется второй квартал с учетом оптимально спланированных третьего и четвертого кварталов. Наконец, оптимально планируется первый квартал с учетом оптимально спланированных последующих кварталов. Как выполняется такое планирование будет показано в дальнейшей, в специальной главе книги.

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Часть 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В главе I было показано, что ограничения канонической задачи линейного программирования представляют собой систему линейных уравнений, в которой число уравнений m не совпадает с числом неизвестных n. В практических задачах линейного программирования всегда $m<n$. Исследование систем линейных уравнений общего вида удобно производить, оперируя понятиями матриц и m-мерных векторов. Элементарному изучению матриц, векторов и систем линейных уравнений при $m<n$ посвящается эта глава.

2.1.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей А размеров mxn называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1.1)$$

или, короче,

$$A= \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\text{x}n} \qquad (2.1.2)$$

состоящая из m строк и n столбцов. Числа a_{ij} этой таблицы называются *элементами* матрицы A. Элемент a_{ij}, находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Для обозначения матрицы, как правило, применяются квадратные скобки [ ], круглые скобки ( ) или двойные вертикальные черточки || ||, которыми заключаются прямоугольные таблицы чисел.

Говорят, что две матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\text{x}n}$ и $B=\lfloor b_{ij} \rfloor_{m\text{x}n}$ равны $A=B$, если равны их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} =b_{ij}$, при всех i и j.

Если число строк равно числу столбцов (m=n), то такая таблица называется *квадратной матрицей n-го порядка.* Она записывается кратко следующим образом:

$$A= \lfloor a_{ij} \rfloor_{n}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы, называется диагональ, проходящая через верхний левый и нижний правый углы, т. е. совокупность элементов a_{ij}.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице (a_{ij} =1 при всех i), называется *единичной* матрицей.

Обозначим ее через E:

$$E=\begin{bmatrix}1\ 0............0\\0\ 1............0\\.................\\0\ 0............1\end{bmatrix} \qquad (2.1.3)$$

или, короче,

$$E=\lfloor\delta_{ij}\rfloor_n,$$

где

$$\delta_{ij}\begin{cases}1\ \text{при}\ i=j,\\0\ \text{при}\ i\neq j.\end{cases} \qquad (2.1.4)$$

Символ δ_{ij} определенный соотношением (2.1.4), называется *символом Кронекера.* Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается через $0=[0]_n$.

Если в матрице (2.1.1) поменять местами строки и столбцы, то получится *транспонированная матрица* размеров *nxm*:

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11}a_{21}...a_{m1}\\a_{12}a_{22}...a_{m2}\\.................\\a_{1n}a_{2n}...a_{mn}\end{bmatrix} \qquad (2.1.5)$$

Например, если

$$A=\begin{bmatrix}4 & 8 & -4\\5 & 0 & 7\end{bmatrix},\ \text{то}\ \ A'=\begin{bmatrix}4 & 5\\8 & 0\\-4 & 7\end{bmatrix}$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число каждого элемента матрицы

$$\lambda A=A\lambda=\begin{bmatrix}\lambda a_{11}\lambda a_{12}...\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}\lambda a_{22}...\lambda a_{2n}\\.........................\\\lambda a_{m1}\lambda a_{m2}...\lambda a_{mn}\end{bmatrix} \qquad (2.1.6)$$

Например, если

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 8\\4 & 5 & -2\end{bmatrix}$$

и λ=3

$$\lambda A=A\lambda=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 24\\12 & 15 & 6\end{bmatrix}$$

Суммирование матриц одинаковых размеров сводится к суммированию их одноименных элементов. Сумма двух матриц $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ и $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$ есть матрица $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{mxn}$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \tag{2.1.7}$$

т.е. $A+B=C$ или $[a_{ij}|_{mxn}, + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$.

В матричном исчислении рассматривается операция произведения матриц. Однако этого вопроса мы касаться не будем.

2.1.2. Векторы и операции над ними

Матрица размеров m x I, т. е. состоящая из одного столбца с m элементами

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} \tag{2.1.8}$$

называется m-мерным *вектором-столбцом.* Величины a_i называются *компонентами* вектора A.

В дальнейшем под вектором, или, точнее, m-мерным вектором, будем понимать *упорядоченную совокупность m* действительных чисел,

Поскольку печатать в типографском наборе столбцы громоздко, то для изображения вектора-столбца часто будут использоваться строки, заключенные в квадратные скобки:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} = [a_1 a_2 ... a_m] \tag{2.1.9}$$

В обычном трехмерном пространстве любой радиус-вектор (направленный отрезок, исходящий из начала координат) вполне определяется упорядоченной тройкой чисел x_1, x_2, x_3, которые являются координатами конца этого вектора. Поэтому можно сказать, что трехмерный вектор — это то же, что упорядоченный набор трех действительных чисел. Понятие m-мерного вектора есть обобщение понятия трехмерного вектора, отсюда и сохранение названия вектор.

Компоненты m-мерного вектора можно рассматривать как координаты некоторой точки в воображаемом m-мерном пространстве R^m, т. е, каждому m-мерному вектору соответствует точка в R^m, и, наоборот, каждой точке в R^m соответствует m-мерный вектор. Текущей точке с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответствует переменный вектор $X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ и наоборот.

Началу координат соответствует нулевой вектор:

$$0=[0, 0, \ldots, 0].$$

Совокупность всех m-мерных векторов называют *m-мерным векторным пространством* или просто *m-мерным пространством.*

В m-мерном пространстве содержится равно m единичных векторов:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= [1,0,\ldots,0], \\ e_2 &= [0,1,\ldots,0], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m &= [0,0,\ldots,1], \end{aligned}\right\} \tag{2.1.10}$$

У единичного вектора e_i, i-я компонента равна единице, а остальные — нули. Единичный вектор e_i одновременно является i-й строкой и i-*м* столбцом единичной матрицы (2.1.3).

Эти векторы обобщают понятие единичных векторов в трехмерном пространстве, направленных по координатным осям.

Сравниваются векторы так же, как и матрицы, поскольку они являются частным случаем матриц. Два вектора $A = [a_1, a_2, ..., a_m]$ и $B = [b_1, b_2, …, b_m]$ считаются равными, если равны их соответствующие координаты, т. е. если $A=B$, то $a_1=b_1$; $a_2=b_2$;...; $a_m=b_m$ и наоборот.

Матрицу A размером mхn (2.1.1) можно разложить на n m-мерных векторов-столбцов

$$A_j=[a_{1j}, a_{2j},…, a_{mj}] \qquad (2.1.11)$$

$$j=1, 2, . . . , n.$$

Поэтому матрицу можно записать так:

$$A=[A_1, A_2,…, A_n] \qquad (2.1.12)$$

В дальнейшем всегда буква A с индексом j будет обозначать j-и столбец матрицы.

Говорят, что вектор задан, если известны числовые значения его компонент.

Поскольку вектор есть частный случай матрицы, то операции над матрицами, рассмотренные в этой главе, целиком распространяются на векторы.

При транспонировании вектор-столбец переходит в вектор-строку и наоборот.

Умножение вектора X на действительное число λ сводится к умножению на это число всех компонент вектора. При $|\lambda|>1$ вектор «удлиняется», а при $|\lambda|<1$ — «укорачивается». При положительном числе λ направление вектора не меняется, а при $\lambda<0$ вектор меняет свое направление на противоположное.

Пример 1. Если $X = [8, -2, 2, 3]$ и $\lambda=3$, то $3X=X3 = [24, -6, 6, 9]$.

Вектор, являющийся произведением некоторого вектора X на действительное число λ, никогда не выходит из того пространства, которому принадлежит вектор X, т. е. если X m-мерный вектор, то и λX тоже m-мерный вектор.

Сумма m-мерных векторов дает снова m-мерный вектор, компоненты которого являются суммами одноименных компонент слагаемых векторов.

Пример 2. Если $X_1=(2, -4, 0, 8, 4)$; $X_2 = (0, 2, 8, -1, -2)$; $X_3 =(3, 5, 2, 2, -1)$, то $X=X_1+X_2+X_3=(5, 3, 10, 9, 1)$.

Число, равное сумме произведений одноименных координат двух m-мерных векторов, называется их *скалярным произведением*, т. е. если $X=(x_1, x_2, ..., x_m)$ и $У=[y_1,y_2,…,y_m]$ m-мерные векторы, то их скалярное произведение есть число $XY=YX=x_1y_1+x_2y_2+...+x_my_m$.

Пример 3. Даны два шестимерных вектора $X=(2, 5, -1, 3, 0, 5)$; $У= [3, -2, 0, 1, 2, 3]$.

Скалярное произведение этих векторов есть число

$$XУ = 2·3+5· (-2) +(-1)·0+3·1+0·2+5·3=14.$$

Скалярное произведение может быть использовано для краткой записи различных выражений. Например, целевая функция в линейном программировании

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + . . . + c_nx_n$$

может быть кратко записана в виде

$$F=CX,$$

где $C=(c_1, c_2, ..., c_n)$, $X=[x_1, x_2, ..., x_n]$ — n-мерные векторы;

i-е уравнение

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$$

в системе линейных уравнений может быть записано в следующем компактном виде

$$A^iX=b_i$$

где $A^i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ — заданный n-мерный вектор коэффициентов i-го уравнения. $X=[x_1, x_2, ..., x_n]$—неизвестный n-мерный вектор. Пусть даны k m-мерных векторов:

$$\begin{aligned} &A_1=[a_{11}, a_{21},\ldots, a_{m1}],\\ &A_2=[a_{12}, a_{22},\ldots, a_{m2}],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_k=[a_{1k}, a_{2k},\ldots, a_{mk}] \end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

Совокупность векторов (2.1.13) будем называть *системой векторов.*

Далее, пусть $a_1, a_2, ..., a_k$ действительные числа. По определению операций над векторами выражение

$$B= a_1A_1+a_2A_2+\ldots +a_kA_k \qquad (2.1.14)$$

является m-мерным вектором $B=[b_1, b_2, ..., b_m]$, как сумма k m-мерных векторов.

Выражение (2.1.14) называется *линейной комбинацией* векторов $A_1, A_2,\ldots, A_k$. Числа $a_1, a_2, ..., a_k$ называются *коэффициентами* линейной комбинации.

Соотношение (2.1.13) можно более подробно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ .\\ .\\ .\\ b_m \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ .\\ .\\ .\\ a_{m1} \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ .\\ .\\ .\\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + a_k\begin{bmatrix} a_{1k}\\ a_{2k}\\ .\\ .\\ .\\ a_{mk} \end{bmatrix} \qquad (2.1.15)$$

Векторное равенство (2.1.14) или (2.1.15) равносильно m числовым равенствам:

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = a_1a_{11} + a_2a_{12} + \ldots + a_ka_{1k},\\ &b_2 = a_1a_{21} + a_2a_{22} + \ldots + a_ka_{2k},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &b_m = a_1a_{m1} + a_2a_{m2} + \ldots + a_ka_{mk}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.16)$$

Равенства (2.1.16) вытекают из условия равенства векторов, определения операций умножения вектора на число и сложения векторов.

2.1.3. Линейная зависимость векторов

Векторы $A_1, A_2, ... A_k$ называются *линейно независимыми*, если равенство

$$a_1A_1+a_2A_2+\ldots+a_kA_k=0 \qquad (2.1.17)$$

возможно только при всех нулевых значениях коэффициентов, т. е. при $a_1=0$, $a_2=0$, ..., $a_k=0$.

Если равенство. (2.1.17) может выполняться, кроме $a_j = 0$ (j=1, 2, ..., k), еще при других значениях коэффициентов a_j, не все из которых равны нулю, то векторы A_1, A_2, ... A_k считаются *линейно зависимыми.*

Если k векторов линейно зависимы, то по крайней мере один из них может быть представлен как линейная комбинация остальных k-1 векторов. Действительно, если векторы A_1, ..., A_k линейно зависимы, то в соотношении (2.1.17) найдется по крайней мере один из коэффициентов $a_i \neq 0$. Изменяя, если это нужно, нумерацию, можно считать $a_k \neq 0$. Тогда из равенства (2.1.17) получаем

$$A_k = -\frac{a_1}{a_k} A_1 - \frac{a_2}{a_k} A_2 - \ldots - \frac{a_{k-1}}{a_k} A_{k-1}.$$

Вектор A_k представлен в виде линейной комбинации k-1 векторов A_1, ..., A_{k-1}, с коэффициентами

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_k}; \;\; \lambda_2 = -\frac{a_2}{a_k}; \ldots; \lambda_{k-1} = -\frac{a_{k-1}}{a_k}.$$

Если векторы линейно независимы, то этого сделать нельзя. Поэтому можно дать другое определение линейной независимости векторов. *Векторы A_1, A_2, ... A_k называются линейно независимыми, если никакой из них не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.*

Например, если три трехмерных вектора не лежат в одной плоскости, то никакой из них не может быть выражен в виде линейной комбинации остальных, так как любая линейная комбинация пары векторов лежит в плоскости этой пары. Поэтому любые три трехмерных вектора, не лежащих в одной плоскости, линейно независимы. Наоборот, всякие три трехмерных вектора, лежащих в одной плоскости, всегда линейно зависимы, так как любой из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Если вектор представляется в виде линейной комбинации некоторой системы векторов, то говорят, что он разлагается или линейно выражается через эти векторы.

Пример 1. Три вектора A_1=[2,1,3]; A_2=[-2,1,0]; A_3=[-2,3,3] линейно зависимы потому, что $A_3 = A_1 + 2A_2$.

Пример 2. Четыре единичные вектора: e_1=[1,0,0,0]; e_2=[0,1,0,0]; e_3=[0,0,1,0]; e_4=[0,0,0,1] линейно независимы.

Действительно, из соотношения

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = 0$$

или, что то же

$$a_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

непосредственно вытекает только:

$$a_1 = 0;\; a_2 = 0;\; a_3 = 0;\; a_4 = 0$$

Откуда и следует линейная независимость единичных векторов. Читателю предоставляется проверить, что единичные векторы из любого пространства линейно независимы.

В дальнейшем изложении слово «линейно» мы будем пропускать и говорить просто о зависимости или независимости векторов.

2.1.4. Ранг и базис системы векторов

Под рангом r системы m-мерных векторов A_1, A_2, … A_k понимают максимальное число линейно независимых векторов из этой системы.

В подробных курсах линейной алгебры доказано, что более чем *m m-мерных векторов всегда линейно зависимы.* Следовательно, если система содержит более чем m векторов $(k>m)$, то ранг ее не может быть больше, чем m. Если система состоит из m m-мерных векторов, то ранг ее может оказаться любым числом от 1 до m. Если в системе содержится $k<m$ векторов, то ранг ее может оказаться любым целым числом от 1 до k.

Таким образом, для любой системы k m-мерных векторов выполняется

$$\mathrm{J} \le r \le \min\{k, m\}.$$

При этом предполагается, что нулевые векторы в систему не входят.

В этой главе мы видели, что всякая матрица размеров mхn может быть разложена на n m-мерных векторов-столбцов A_1, A_2, ... A_n. Ранг этой системы векторов называют рангом матрицы.

Базисом системы векторов называется любая группа, состоящая из r независимых векторов этой системы.

Если система содержит $k>r$ векторов, то можно составить

$$N = \frac{k!}{r!(k-r)!} \qquad (2.1.18)$$

различных сочетаний векторов по r векторов в каждом сочетании. Может оказаться, что в каждом сочетании (группе) векторы независимы, тогда число различных базисов системы будет равно N. Но может оказаться, что некоторые сочетания (группы) из r векторов зависимы, тогда они не являются базисами системы. Таким образом, система векторов может иметь несколько различных базисов, но не больше чем N, и каждый базис состоит из одного и того же количества векторов, равного рангу системы.

Если из базиса изъять хотя бы один вектор, то оставшиеся векторы будут также независимы, но базиса образовывать не будут. Так что базис - это не всякая группа независимых векторов, а такая группа независимых векторов, в которой число векторов равно рангу системы. Векторы, составляющие базис, называются *базисными векторами.*

Справедливо следующее утверждение, которое мы докажем.

Теорема о базисах. *Группа независимых векторов A_1, A_2, ... A_s будет базисом системы векторов A_1, A_2, ... A_s, A_{s+1}, ..., A_k в том и только в том случае, если каждый вектор системы представляется в виде линейной комбинации векторов A_1, A_2, ... A_s.*

Доказательство. а) Достаточность условия. Допустим, что каждый из векторов Aj системы представляется в виде линейной комбинации независимых векторов A_1, A_2, ... A_s. Тогда уже каждые s+1 векторов зависимы и поэтому ранг r системы не может быть больше числа s. С другой стороны, по условию, s векторов A_1, A_2, ... A_s независимы. Следовательно, ранг системы r=s и векторы A_1, A_2, ... A_s образуют ее базис.

б) Необходимость условия. Пусть векторы A_1, A_2, ... A_s — базис системы. Каждый вектор этого базиса, например вектор A_i, может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов следующим образом:

$$A_i=0A_1+0\cdot A_2+. . .+0\cdot A_{i-1},+1\cdot A_i+0\cdot A_i+0A_{i+1}+\ldots+0A_s.$$

Теперь рассмотрим подсистему векторов

$A_1, A_2, ... A_s, A_e,$

состоящую из базисных векторов и произвольного небазисного вектора A_l.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому вектору

$$a_1A_1+a_2A_2+\ldots+a_sA_s+a_lA_l \qquad (2.1.19)$$

Так как векторы, входящие в эту комбинацию, зависимы, то равенство (2.1.19) должно выполняться, хотя бы при некоторых отличных от нуля коэффициентах. При этом коэффициент a_l; должен быть отличным от нуля. Действительно, если a_l =0, то и все остальные коэффициенты равны нулю, поскольку базисные векторы независимы. Это противоречит тому, что не все коэффициенты в соотношении (2.1.19) равны нулю. При a_l $\neq 0$ равенство (2.1.19) можно разрешить относительно вектора A_l

$$A_l = -\frac{a_1}{a_l}A_1 - \frac{a_2}{a_l}A_2 - \ldots - \frac{a_s}{a_l}A_s.$$

Итак, каждый вектор системы может быть выражен в виде линейной комбинации базисных векторов, или, как говорят, разложен по базисным векторам.

Докажем, что разложение вектора системы по базисным векторам является единственным, т. е. существует единственный набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ с которыми разлагается вектор по базисным векторам.

Предположим, что вектор A_l может быть разложен по базисным векторам двумя способами, т. е. с различными коэффициентами λ_j и λ'_j:

$$A_l=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_sA_s,$$
$$A_l=\lambda'_1A_1+\lambda'_2A_2+\ldots+\lambda'_sA_s.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое равенство, получим:

$$0=(\lambda'_1-\lambda_1)A_1+(\lambda'_2-\lambda_2)A_2+\ldots+(\lambda'_s-\lambda_s)A_s.$$

Так как базисные векторы $A_1, A_2, ... A_s$ независимы, то должно быть

$$\lambda'_1-\lambda_1=0;\ \lambda'_2-\lambda_2=0;\ \ldots;\ \lambda'_s-\lambda_s=0$$

или $$\lambda'_1=\lambda_1;\ \lambda'_2=\lambda_2;\ \ldots;\ \lambda'_s=\lambda_s.$$

Отсюда и следует единственность разложения любого вектора по векторам базиса.

2.1.5. Единичный базис. Таблица векторов по отношению к единичному базису

Любой m-мерный вектор $A=[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ может быть представлен в виде линейной комбинации единичных векторов $e_1, e_2, ..., e_m$, при этом коэффициентами этой линейной комбинации являются соответствующие компоненты a_i, вектора A, т. е.

$$A=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_me_m. \qquad (2.1.20)$$

Формула (2.1.20) является основной формулой линейной алгебры. Справедливость равенства (2.1.20) можно усмотреть непосредственно, если записать его в более подробном виде

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + ... + a_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.1.21)$$

Векторное равенство (2.1.20) или (2.1.21) равносильно числовым равенствам

$$a_1=a_1;\ a_2=a_2;\ldots;\ a_m=a_m,$$

которые являются арифметическими тождествами, что указывает на справедливость выражения (2.1.20).

Если система векторов содержит в себе полный набор единичных векторов e_1, e_2, ..., e_m, то этот набор является одним из базисов системы — *единичным базисом.* Действительно, единичные векторы независимы, и каждый вектор в системе линейно выражается через единичные векторы по формуле (2.1.20). Тогда на основании теоремы о базисах, доказанной в предыдущем параграфе, полный набор единичных векторов является базисом и разложение (2.1.20) является единственным.

Таблицей векторов A_1, A_2, ..., A_n *по отношению к единичному базису* e_1, e_2, ..., e_m *называется матрица, столбцы которой состоят из компонент векторов* A_j (j=1, 2, ..., n)*.* Иначе говоря, это есть матрица, вектор-столбцы которой являются заданными векторами:

$$A_1=[a_{11},\ a_{21},\ldots,a_{m1}];$$

$$A_2=[a_{12},\ a_{22},\ldots,a_{m2}];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=[a_{1n},\ a_{2n},\ldots,a_{mn}].$$

Таблица векторов по отношению к единичному базису оформляется следующим образом:

	A_1 A_2	A_k	$\ldots$ A_n
e_1	a_{11} a_{12} $\ldots$	a_{1k}	$\ldots$ a_{1n}
e_2	a_{21} a_{22} $\ldots$	a_{2k}	$\ldots$ a_{2n}
	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots$
e_s	a_{s1} a_{s2} $\ldots$	a_{sk}	$\ldots$ a_{sn}
	$\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	$\ldots$	$\ldots$ $\ldots$ $\ldots$
a_m	a_{m1} a_{m2} $\ldots$	a_{mk}	$\ldots$ a_{mn}

(2.1.22)

Учитывая формулу (2.1.20), можно сказать, что таблица векторов A_j по отношению к единичному базису—это *таблица коэффициентов в разложении этих векторов по единичным векторам.* Таблица векторов (2.1.22) является матрицей размеров mxn, где m—размерность векторов A_j, n—количество векторов A_j, в системе. Наоборот, всякую матрицу с размерами mxn можно рассматривать как таблицу ее n m-мерных векторов-столбцов по отношению к единичному базису.

Если векторы A заданы, то всегда можно конкретно составить таблицу этих векторов по отношению к единичному базису.

Пример. Даны четырехмерные векторы: A_1= (2,8,0.2); A_2=(2,-2,8,4); A_3= (1, -1,5, -4);

A_4= (0,4, 2, 4); A_5=(-2,0, 4, 0).

Таблица этих векторов по отношению к единичному базису e_1, e_2, e_3, e_4, имеет следующий конкретный вид:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
e_1	2	2	1	0	-2
e_2	8	-2	-1	4	0
e_3	0	8	5	2	4
e_4	2	4	-4	4	0

2.1.6. Операция одноразового замещения

Было показано, что в системе векторов содержится не один базис. Каждому базису соответствует своя таблица векторов, которая определяется как *таблица коэффициентов в разложении этих векторов по векторам базиса.*

Конкретную таблицу векторов A_1, A_2, ..., A_n мы можем составить непосредственно, без каких-либо вычислений, только по отношению к единичному базису. Таблицу векторов по отношению к какому-либо другому базису (не единичному) мы можем получить конкретно лишь путем вычислений, исходя из известной таблицы векторов по отношению к единичному базису. Вычислительный процесс получения таблицы векторов системы из известной таблицы, когда один из базисных векторов исключается и заменяется некоторым другим вектором из системы, называется операцией одноразового замещения. Осуществляя последовательно операции одноразового замещения, мы можем, исходя из таблицы векторов по отношению к единичному базису, получить таблицу векторов по отношению к любому базису системы векторов. Рассмотрим, как это делается.

Во-первых, надо выяснить, в каком случае замена одного единичного вектора e_s в базисе некоторым небазисным вектором A_k приведет к новому базису, т. е. при каком условии, например, новая группа векторов

$$e_1, e_2, ..., e_{s-1}, A_k, e_{s+1},\dots,e_m \qquad (2.1.23)$$

будет независимой.

Оказывается, m векторов (2.1.23) будут независимы только в том случае, если элемент a_{sk} в таблице векторов (2.1.22) отличен от нуля. Докажем это.

Если векторы (2.1.23) независимы, то из равенства

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_{s-1}e_{s-1}+\lambda_sA_k+\lambda_{s+1}e_{s+1}+\dots+\lambda_me_m=0 \qquad (2.1.24)$$

должно вытекать равенство нулю всех коэффициентов, т. е. должно быть λ_v для всех v от 1 до m. Заменим в равенстве (2.1.24) вектор A_k разложением его по единичным векторам e_i согласно формуле (2.1.20), получим:

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_{s-1}e_{s-1}+\lambda_s(a_{1k}e_1+ a_{2k}e_2+\dots+ a_{mk}e_m)+\lambda_{s+1}e_{s+1}+\dots+\lambda_me_m=0$$

или после приведения подобных членов

$(\lambda_1+\lambda_s a_{1s})e_1+(\lambda_2+\lambda_s a_{2s})e_2+\ldots+(\lambda_{s-1}+\lambda_s a_{s-1,k})e_{s-1}+\lambda_s a_{sk}e_s+(\lambda_{s+1}+\lambda_s a_{s+1,k})e_{s+1}+\ldots+$

$+(\lambda_m+\lambda_s a_{mk})e_m=0.$

Так как единичные векторы независимы, то должно быть:

$$\lambda_1+\lambda_s a_{1k}=0;\ \lambda_2+\lambda_s a_{2k}=0;\ \ldots;\ \lambda_{s-1}+\lambda_s a_{s-1,k}=0;$$
$$\lambda_s a_{sk}=0;\ \lambda_{s+1}+\lambda_s a_{s+1,k}=0;\ldots;\ \lambda_m+\lambda_s a_{mk}=0.$$

По условию $a_{sk}\neq 0$, следовательно $\lambda_s=0$, но тогда все остальные коэффициенты равны нулю. Следовательно, при $a_{sk}\neq 0$ в таблице векторов (2.1.22) замена единичного вектора e_s в базисе вектором A_k дает новый базис (2.1.23).

Таблица векторов по отношению к этому новому базису должна состоять из новых чисел b_{ij} (коэффициентов в разложении векторов A_j, по новому базису), при этом в столбце A_k на месте элемента a_{sk} должна стоять единица, а остальные элементы этого столбца должны быть нулями. Последнее следует из того, что вектор A_k становится базисным вектором и разложение его по векторам нового базиса (2.1.23) может быть только следующим:

$A_k=0\cdot e_1+\ .\ .\ .\ +0\cdot e_{s-1}+1\cdot A_k+0\cdot\ e_{s+1}+\ldots+0\cdot\ e_m.$

Таким образом, новая таблица векторов по отношению к новому базису (2.1.23) будет иметь следующий вид

	A_1	$A_2\ \ldots$	$A_k\ \ldots$	A_n
e_1	b_{11}	$b_{12}\ \ldots$	$0\ \ldots$	b_{1n}
e_2	b_{21}	$b_{22}\ \ldots$	$0\ \ldots$	b_{2n}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
A_k	b_{s1}	$b_{s2}\ \ldots$	$1\ \ldots$	b_{sn}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
e_m	b_{m1}	b_{m2}	$0\ \ldots$	b_{mn}

(2.1.25)

Теперь покажем, как можно рассчитать матрицу (2.1.25), зная матрицу (2.1.22).

Напишем разложение вектора A_k по векторам единичного базиса:

$$A_k=a_{1k}e_1+a_{2k}e_2+\ldots+a_{sk}e_s+\ldots+a_{mk}e_m.$$

Так как $a_{sk}\neq 0$, то последнее векторное равенство можно разрешить относительно единичного вектора e_s'.

$$e_s=\frac{1}{a_{sk}}A_k-\frac{a_{1k}}{a_{sk}}e_1-\ldots-\frac{a_{s-1,k}}{a_{sk}}e_{s-1}-\frac{a_{s+1,k}}{a_{sk}}e_{s+1}-\ldots-\frac{a_{mk}}{a_{sk}}e_m. \qquad (2.1.26)$$

Далее напишем разложение произвольного вектора A_j, по векторам единичного базиса:

$$A_j=a_1e_1+\ .\ .\ .\ +a_{s-1,j}e_{s-1}+a_{sj}e_s+a_{s+1,j}e_{s+1}+\ldots+a_{mj}e_m$$

и подставим в правую часть этого равенства вместо e_s выражение (2.1.26). После приведения подобных членов с одинаковыми единичными векторами получим:

$$A_j = \left(a_{1j} - \frac{a_{1k}}{a_{sk}} a_{sj} \right) e_1 + \ldots + \left(a_{s-1,j} - \frac{a_{s-1,k}}{a_{sk}} a_{sj} \right) \cdot e_{s-1} + \frac{a_{sj}}{a_{sk}} A_k +$$
$$+ \left(a_{s+1,j} - \frac{a_{s+1,k}}{a_{sk}} a_{sj} \right) e_{s+1} + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{mk}}{a_{sk}} a_{sj} \right) e_m . \quad (2.1.27)$$

С другой стороны, из таблицы векторов (2.1.25) имеем

$$A_j = b_{1j} e_1 + \ldots + b_{s-1,j} e_{s-1} + b_{sj} A_k + b_{s+1,j} e_{s+1} + \ldots + b_{mj} e_m,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n \quad (2.1.28)$$

Так как разложение вектора A_j по векторам одного и того же базиса должно быть одинаковым, то из сравнения равенств (2.1.27) и (2.1.28) получаем:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{sk}} a_{sj}, \text{ при } i \neq s \quad (2.1.29)$$
$$j = 1,2,\ldots,n$$

$$\text{и } b_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sk}}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \quad (2.1.30)$$

Таким образом, мы получили формулы для расчета элементов матрицы (2.1.25) по элементам матрицы (2.1.22). Из этих формул видно, что при $j=k$ $b_{ik}=0$, если $i \neq s$ и $b_{sk}= 1$, это и отражено в матрице (2.1.25), в которой *k-и* столбец состоит из нулей и одной единицы.

На основании формул (2.1.29) и (2.1.30) можно сформулировать вычислительные правила перехода от одной таблицы векторов к другой при замене одного вектора в базисе некоторым другим вектором из системы. Эти вычислительные правила называются *правилами замещения.*

s-я строка исходной таблицы векторов (2.1.22), соответствующая вектору e_s, исключаемому из базиса, называется *ключевой строкой.*

k-и. столбец этой же таблицы векторов (2.1.22), соответствующий вектору A_k, вводимому в базис, называется *ключевым столбцом.*

Элемент a_{sk}, расположенный на пересечении ключевой строки и ключевого столбца, называется *ключевым элементом.*

Ключевой элемент обводится кружком или заключается в квадратную рамку.

Ключевая строка и ключевой столбец иногда также выделяются (обводятся рамкой), в таком случае ключевой элемент оказывается заключенным в квадрат, образованный пересечением рамок, как показано в таблице векторов (2.1.22).

Строку и столбец в таблице векторов (2.1.25), соответствующие ключевой строке и ключевому столбцу в таблице векторов (2.1.22) будем условно называть *главной строкой* и *главным столбцом.*

Формула (2.1.30) относится к случаю $i=s$, т. е. к преобразованию ключевой строки. Из этой формулы получается правило:

Главная строка получается делением элементов ключевой строки на ключевой элемент. Это единственное правило преобразования ключевой строки, и никаких других правил не существует. Что касается правила преобразования других строк (не ключевых), то это правило может быть сформулировано в различных вариантах.

1-й вариант. Все строки исходной таблицы, исключая ключевую, преобразовываются по формуле (2.1.29). В этой формуле имеется отношение элементов a_{ik} и a_{sk} ключевого столбца, не зависящее от номера столбца j. Отношение $\frac{a_{ik}}{a_{sk}}$ зависит только от номера строки i и поэтому может быть заранее рассчитано для каждой строки. Эти отношения можно поместить в дополнительном столбце исходной таблицы. Если отношение $\frac{a_{ik}}{a_{sk}}$ обозначить через a_i то формулу (2.1.29) можно записать в виде:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_i a_{sj} \quad \text{при } i \neq s \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{2.1.31}$$

Но a_{sj} (j=1, 2, ..., n)—элементы ключевой строки, a_{ij}—элементы i-й преобразуемой строки, b_{ij} —элементы i-й новой строки, отсюда на основании формулы (2.1.31) можно сформулировать правило преобразования всех строк исходной таблицы, за исключением ключевой строки.

Каждая новая строка получается вычитанием из соответствующей старой строки ключевой строки, умноженной на постоянное для строки число a_i.

2-й вариант. Учитывая равенство (2.1.30), формулу (2.1.29) можно записать в виде:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{ik} b_{sj} \quad \text{при } i \neq s \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{2.1.32}$$

В равенстве (2.1.32) a_{ij} —элементы i-й преобразуемой строки, b_{sj}—элементы главной строки, a_{ik}—элемент, расположенный на пересечении преобразуемой строки и ключевого столбца. Поэтому на основании равенства (2.1.32) можно сформулировать правило преобразования строк исходной таблицы (исключая ключевую строку).

Каждая новая строка получается вычитанием из соответствующей старой строки главной строки, умноженной на элемент, расположенный на пересечении преобразуемой строки и ключевого столбца.

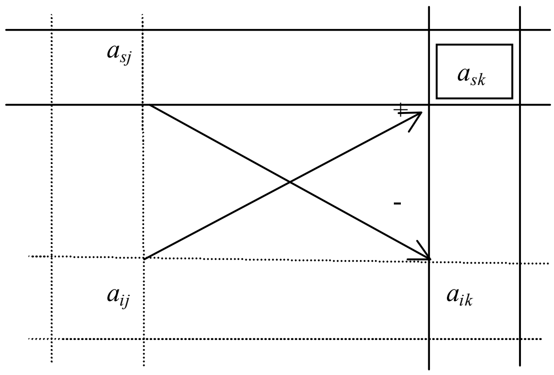


Рис.2.1.1.

3-й вариант. Наконец, формулу (2.1.29) можно представить в виде:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} a_{sk} + (-a_{sj} a_{ik})}{a_{sk}}$$

$$\text{при } i \neq s; \; j=1,2, \ldots, n. \tag{2.1.33}$$

Элементы исходной таблицы, входящие в формулу (2.1.33), расположены в таблице так, как показано в нижеприведенной схеме (рис. 2.1.1).

Мы видим, что элементы, входящие в формулу (2.1.33), расположены по вершинам прямоугольника и произведения их берутся по элементам противоположных вершин, как показано на схеме стрелками; при этом произведение преобразуемого элемента на ключевой элемент берется со знаком плюс, а произведение других двух элементов — со знаком минус. Знаки произведений показаны на схеме рядом со стрелками. Теперь на основании схемы и формулы (2.1.33) можно сформулировать следующее правило преобразования элементов исходной таблицы векторов.

Для получения нового элемента (исключая элементы ключевой строки и ключевого столбца), *соответствующего старому элементу, нужно взять сумму произведений элементов, находящихся в противоположных вершинах прямоугольника, построенного на ключевой строке и ключевом столбце, и разделить эту сумму на ключевой элемент; при этом произведение преобразуемого элемента на ключевой элемент надо брать со знаком плюс, а второе произведение — со знаком минус.*

Указанное правило принято называть *правилом прямоугольника.*

Итак, преобразование строк таблицы векторов при переходе к новому базису может производиться по любому из трех вышеуказанных правил. В каждом конкретном случае надо смотреть, какое из этих правил удобнее применять. Конечно, в любом случае должен получаться один и тот же результат.

Суммируя равенство (2.1.31) по индексу j от 1 до n, получим

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_i \sum_{j=1}^{n} a_{sj}. \qquad (2.1.34)$$

Равенство (2.1.34) показывает, что сумма элементов строк (кроме ключевой строки) преобразуется в сумму элементов строк новой таблицы по правилу преобразования отдельных элементов. Этим можно воспользоваться для контроля вычислений, так как ошибка в вычислении отдельного слагаемого вызовет ошибку в сумме. Получение же одинаковой ошибки суммы при расчете ее различными способами маловероятно. Для контроля вычислений следует дополнить исходную таблицу столбцом сумм элементов строк и преобразовывать эти суммы по правилам замещения. При правильных расчетах суммы элементов новых строк должны совпадать с преобразованными суммами по правилам замещения. При обнаружении расхождения в указанных суммах в какой-либо строке следует искать ошибку в вычислении элементов этой строки.

Получив таблицу векторов по отношению к новому базису, мы точно таким же образом можем перейти от этой таблицы к следующей таблице векторов по отношению к еще какому-либо базису системы векторов и т. д.

Пример. Дана система из десяти четырехмерных векторов:

A_1=(4,2,3,2); A_2=(-1,0,2,-2);
A_3=(2,-2,0,4); A_4=(2,1,2,-1);
A_5=(1,1,0,-2); A_6=(2,1,3,-5);
e_1=(1,0,0,0); e_2=(0,1,0,0);
e_3=(0,0,1,0); e_4=(0,0,0,1).

Очевидным базисом этой системы является единичный базис, состоящий из единичных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 четырехмерного пространства. Составляем таблицу векторов A_j, j=1, 2, ..., 6 по отношению к этому базису. Столбцами этой таблицы будут сами векторы A_j, j=1, ..., 6, так как коэффициентами в разложении векторов A_j являются компоненты этих векторов.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\sum_{j=1}^{6} A_j$
e_1	4	-1	2	2	1	2	10
e_2	2	0	-2	1	1	1	3
e_3	3	$\boxed{2}$	0	2	0	3	10
e_4	2	-2	4	-1	-2	-5	-4

Таблица дополнена *контрольным столбцом*, который является суммой векторов Aj j=1,..., 6. Каждая компонента этого суммарного вектора, по определению сложения векторов, является суммой строк таблицы векторов A_j, по отношению к единичному базису.

Например, группа векторов e_1, e_2, A_2, e_4 является базисом данной системы векторов, состоящей из векторов A_j, j=1, ..., 6 и единичных векторов e_i, i=1,. ..., 4, так как ключевой элемент таблицы a_{32}=2 отличен от нуля. Составим таблицу векторов A_j, j=1, ... 6 по отношению к этому базису. Ключевую строку и ключевой столбец выделяем в таблице рамками.

Делением ключевой строки на ключевой элемент a_{32}=2. Получаем новую (третью) главную строку

3/2 1 0 1 0 3/2 10/2.

Преобразование простых строк (неключевых) будем производить по правилу первого варианта. Числа a_i; соответственно для 1, 2 и 4-й строк имеют значения

$$a_1 = -\frac{1}{2};\ a_2 = 0;\ a_4 = -1$$

Умножая ключевую строку на $a_1 = -\frac{1}{2}$ и вычитая результат

$$-\frac{3}{2}\ -1\ \ 0\ -1\ \ 0\ -\frac{3}{2}\ -\frac{10}{2}$$

из первой строки, получаем новую первую строку

$$11/2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 7/2 \quad 15.$$

Так как a_2=0, то умножение ключевой строки на нуль даст нулевую строку, вычитание которой из второй строки ее не изменит. Значит, вторая строка перейдет в новую таблицу без изменений. Такой случай происходит всегда, когда элемент, расположенный на пересечении преобразуемой строки и ключевого столбца, равен нулю.

Умножая ключевую строку на a_4= -1 и вычитая результат

-3 -2 0 -2 0 -3 -10

из четвертой строки, получаем новую четвертую строку

5 0 4 1 -2 -2 6.

Таким образом получаем новую таблицу векторов по отношению к базису e_1, e_2, A_2, e_4:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\sum_{j=1}^{6} A_j$
e_1	11/2	0	2	3	1	7/2	15
e_2	2	0	-2.	$\boxed{1}$	1	1	3
e_3	3/2	1	0	1	0	3/2	5
e_4	5	0	4	1	-2	-2	6

Убеждаемся, что сумма элементов по строкам дает соответствующие элементы последнего столбца, что является достаточно надежным признаком того, что таблица сосчитана правильно.

Заметим, что ключевую строку можно умножать на число a_i взятое с обратным знаком, но тогда результат надо прибавлять к преобразуемой строке. Так, например, четвертая строка новой таблицы может быть просто получена как сумма четвертой и ключевой строк исходной таблицы.

Новая таблица представляет собой таблицу коэффициентов в разложении векторов A_i j=1, ... 6 по векторам базиса e_1, e_2, A_2, e_4. Например,

$$A_4 = 3e_1 + 1e_2 + 1A_2 + 1e_4,$$

или в более подробной записи:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Откуда ясно видно, что компоненты линейной комбинации в правой части этого равенства совпадают с соответствующими компонентами вектора A_4 в левой части.

Точно так же, например,

$$A_5 = e_1 + e_2 + 0A_2 - 2e_4$$

и т. д. Рекомендуется читателю проверить это и другие векторные равенства, вытекающие из последующей таблицы векторов.

Можно продолжить замещения заменяя, например, базисный вектор e_2 вектором

A_4. Рекомендуется читателю произвести эту операцию замещения.

2.1.7. Разложение вектора по столбцам невыраженной матрицы

Квадратная матрица называется *невырожденной,* если все векторы-столбцы ее линейно независимы. Если векторы-столбцы невырожденной матрицы A_1, A_2, ..., A_m дополнить произвольным m-мерным вектором B, то полученная система из m+1 векторов будет иметь ранг $r = m$ и векторы A_1, A_2, A_3,..., A_m составляют базис этой системы. Квадратную матрицу m-го порядка, дополненную произвольным m-мерным вектором-столбцом B=[b_1, b_2, ..., b_m], мы можем представить как таблицу векторов A_1, A_2, A_3, ..., A_m, B по отношению к единичному базису

	A_1	A_2 . . .	A_m. . .	B
e_1	a_{11}	a_{12} . . .	b_1	b_2
e_2	a_{21}	a_{22} . . .	a_{1m}	a_{2m}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
e_m	a_{m1}	a_{m2}	$a_{m\mathrm{m}}$	b_m

Так как матрица A= (A_1, A_2, ..., A_m) невырожденная, то мы можем, осуществляя последовательно одноразовые операции замещения, вытеснить из базиса все единичные векторы e_i. и заменить их столбцами A_j, матрицы A. В результате после перестановки строк, если это необходимо, получим таблицу векторов следующего вида:

	A_1	A_2 . . .	A_m. . .	B
A_1	1	0 . . .	0	β_1
A_2	0	1 …	0	β_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
A_m	0	0	1	β_m

из которой видно, что вектор

$$B=\beta_1 A_1+\beta_2 A_2 +...+\beta_m A_m \qquad (2.1.35)$$

Представление вектора B в виде линейной комбинации векторов A_1, A_2, ..., A_m является единственным, так как совокупность столбцов A_1, A_2, ..., A_m является базисом системы векторов A_1, A_2, ..., A_m, B.

Итак, любой m-мерный вектор может быть единственным образом разложен по столбцам невырожденной матрицы m-го порядка.

Пример. Дана невырожденная матрица третьего порядка

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

и трехмерный вектор B= [2, 3, 0].

Составляем расширенную матрицу $A_в$, оформленную в виде таблицы векторов A_1, A_2, A_3, B по отношению к единичному базису

	A_1	A_2	A_3	B
e_1	$\boxed{1}$	3	-1	2
e_2	2	-1	0	3
e_3	1	4	1	0

Приводим последовательность таблиц по замещению единичных векторов e_i, векторами A_j.

	A_1	A_2	A_3	B
A_1	1	3	-1	2
e_2	0	-7	2	-1
e_3	0	$\boxed{1}$	2	-2

	A_1	A_2	A_3	B
A_1	1	0	-7	8
e_2	0	0	$\boxed{16}$	-15
A_2	0	1	2	-2

	A_1	A_2	A_3	B
A_1	1	0	0	23/16
A_3	0	0	1	-15/16
A_2	0	1	0	-1/8

Из последней таблицы получаем разложение вектора B по столбцам A_1, A_2, A_3, матрицы A.

$$B = \frac{23}{16}A_1 - \frac{1}{8}A_2 - \frac{15}{16}A_3.$$

2.1.8. Система линейных уравнений

Пусть дана в общем виде система m линейных уравнений с неизвестными, которую мы запишем в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right\} \qquad (2.1.36)$$

Здесь число уравнений m может быть любым в сравнении с числом неизвестных n (может быть $m<n$, $m=n$, $m>n$). Числа a_{ij}, называются коэффициентами, а числа b_i— свободными членами системы.

Таблица a_{ij} коэффициентов системы (2.1.36)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.37}$$

называется матрицей системы.

Матрица

$$A_b = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{bmatrix} \tag{2.1.38}$$

получающаяся присоединением к матрице системы столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы.*

Ранг столбцов матрицы системы называется *рангом системы.* Заметим, что в системе (2.1.36) хотя и пишутся знаки равенств, левые части равны правым частям (свободным членам) не при любых числовых значениях неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Та совокупность значений неизвестных

$$x_1=a_1,\ x_2=a_2, \dots,\ x_n=a_n, \tag{2.1.39}$$

при которой все уравнения системы превращаются в арифметические тождества, называется *решением системы.*

Определенная совокупность n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (2.1.39) составляет одно решение системы.

Система (2.1.36) называется *совместной* (или разрешимой), если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* (или неразрешимой), если она не имеет ни одного решения.

Ниже будет показано, что совместная система может иметь либо одно решение, либо бесчисленное множество решений. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной,* а система, имеющая бесчисленное множество различных решений,—*неопределенной.* Систем, имеющих только конечное число различных решений, не существует.

Пример 1. Система

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

имеет одно единственное решение $x_1=2$; $x_3=1$, следовательно, является системой *определенной.*

Пример 2. Система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

является неопределенной.

Действительно, пусть $x_3=t$ произвольное действительное число. Тогда систему можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 - t, \\ x_1 + x_2 &= 3 + t \end{aligned}\right\}$$

При фиксированном значении числа t эта система имеет единственное решение

$$x_1=2-2t; \quad x_2=1+3t.$$

Таким образом, при любом числовом значении t совокупность чисел

$$x_1=2—2t; \; x_2=1+3t; \; x_3=t$$

удовлетворяет системе (*б*), т. е. превращает ее уравнение в арифметические тождества 5=5; 3=3, что легко можно проверить. Например:

$$x_1=2; \; x_2=1; \quad x_3=0; \; (t=0);$$

$$x_1=0; \; x_2=4; \quad x_3=1; \; (t=1);$$

$$x_1=4; \; x_2= - 2; \; x_3= - 1; \; (t= -1);$$

и т. д.

есть решения системы, следовательно, система (*б*) является *неопределенной* системой.

Пример 3. Система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

является *несовместной.* Действительно, сложив первые два уравнения, получим уравнение $3x_1+2x_2=8$. Вычитая из этого уравнения третье уравнение, получим уравнение $0.\, x_1+0.\, x_2 =2$, которое не может удовлетворяться ни при каких значениях x_1 и x_2, так как при любых значениях x_1 и x_2 левая часть этого уравнения равна нулю, а свободный член равен 2.

В процессе решения систем уравнений производятся различные тождественные преобразования, целью которых является переход от одной системы к другой, более простой системе, имеющей те же решения. При этом допускаются лишь такие преобразования, которые не приводят к потере решений исходной системы.

Две системы, имеющие одни и те же решения, называются *эквивалентными.* Тождественные преобразования, при которых система уравнений переходит в эквивалентную систему, называются *эквивалентными преобразованиями системы.*

Эквивалентными являются следующие преобразования уравнений системы:

1. Перенос членов с обратным знаком из одной части уравнений в другую.

2. Почленное умножение обеих частей уравнения на один и тот же отличный от нуля множитель.

3. Почленное вычитание (прибавление с обратным знаком) из уравнений системы одного какого-либо уравнения, умноженного на постоянное число.

Система уравнений может быть записана в виде одного векторного равенства:

$$x_1A_1+ x_2A_2+\ldots+ x_nA_n =B \qquad (2.1.40)$$

где A_1, A_2, ... A_n, B — столбцы расширенной матрицы системы (2.38). Вектор $B=[b_1, b_2,\ldots, b_m]$ называется *вектором свободных членов.*

В более подробной записи векторное равенство (2.1.40) имеет следующий вид:

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

которое равносильно m уравнениям (2.1.36).

Из уравнения (2.1.40) видно, что если вектор свободных членов B может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов A_1, ..., A_n матрицы системы (2.1.37), то система (2.1.36) имеет решение, которое должно являться совокупностью коэффициентов $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$ в разложении вектора B по векторам A_J, j=l, 2, ..., n;

$$a_1A_1+ a_2A_2+\ldots+ a_nA_n=B \qquad (2.1.41)$$

Тождество (2.1.41) показывает, что если система (2.1.36) имеет решение, т. е. совместна, то столбцы A_1, ..., A_n, B расширенной матрицы системы (2.1.38) должны быть линейно зависимы. В частности, если $m=n$ и матрица системы невырожденная, то разложение вектора B, как показано было в предыдущем параграфе, единственно. Значит, в этом случае система (2.1.36) имеет единственное решение, которое является совокупностью коэффициентов в разложении вектора B по независимым столбцам A_J, j=l, 2, ..., n матрицы системы.

2.1.9. Базисные решения

В гл. I мы видели, что любая задача линейного программирования может быть приведена (путем введения дополнительных уравнивающих переменных) к эквивалентной задаче линейного программирования, в которой ограничения представляют собой систему m линейных уравнений с n неизвестными, при этом число неизвестных n превосходит число уравнений m.

Рассмотрим систему линейных уравнений, в которой $m<n$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad \ldots + a_{1n}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots \\ \qquad \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (2.1.42)$$

Будем считать, что ранг системы (2.1.42) равен числу уравнений. Если ранг совместной системы меньше числа уравнений ($r<m$), то в системе содержится только r существенных (независимых) уравнений; остальные m-r уравнения являются следствиями r существенных уравнений (линейными комбинациями этих r уравнений). При этом любое решение системы из r существенных уравнений удовлетворяет каждому следствию,

т. е. является решением всей системы из m уравнений. Наоборот, любое решение всей системы удовлетворяет r существенным уравнениям. Таким образом, обе системы являются эквивалентными. Поэтому m-r следствий в системе могут быть без какого-либо ущерба исключены из системы. В процессе нахождения базисных решений системы нижеизложенным методом следствия системы автоматически отсеиваются, обнаруживается также несовместность системы. Поэтому при исследовании системы (2.1.42) мы вправе считать ранг системы равным числу уравнений в системе, т. е. что в системе никакое уравнение не является следствием остальных уравнений.

Всякую матрицу можно разбить на прямоугольные блоки, которые называются подматрицами. Если матрица A системы (2.1.42) имеет ранг, равный числу ее строк, то она может быть разбита (после соответствующей перенумерации столбцов, если это необходимо) на два блока, один из которых является квадратной невырожденной подматрицей порядка m. Пусть эта подматрица состоит из первых m столбцов матрицы системы. Члены с неизвестными x_1, x_2, ..., x_m, соответствующими независимым столбцам A_1, A_2, ..., A_m, оставим в левых частях уравнений (2.1.42), а члены с остальными неизвестными $x_{m+1},\ldots,x_n$ перенесем в правые части системы (2.1.42).

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = \\ b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = \\ b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = \\ b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n. \end{array}\right\} \tag{2.1.43}$$

Неизвестные x_1, x_2, ..., x_m, соответствующие независимым столбцам A_1, A_2, ..., A_m невырожденной подматрицы, называются *базисными неизвестными, так* как они соответствуют базисным столбцам из совокупности всех столбцов расширенной матрицы системы (2.1.42).

Неизвестные $x_{m+1},\ldots, x_n$, входящие в правые части уравнений системы (2.1.43), называются *небазисными,* или *свободными неизвестными.*

Если, например, столбец A_{m+1} расширенной матрицы системы ввести в базис вместо столбца A_m и новая группа векторов A_1, A_2, ..., A_{m-1}, A_{m+1} снова образует базис всех столбцов матрицы A, то этому базису будет соответствовать система, записанная аналогично системе (2.1.43), с той лишь разницей, что члены с неизвестной X_{m+1} будут находиться в левых частях уравнений системы, а члены с неизвестной X_m перейдут в правые части уравнений системы. Таким образом, базисные неизвестные могут переходить в свободные и, наоборот, свободные—в базисные неизвестные.

Придадим свободным неизвестным в системе (2.1.43) произвольные значения:

$$X_{m+1}=a_{m+1},\ldots,x_n=a_n. \tag{2.1.44}$$

Тогда получим систему m уравнений с m неизвестными с невырожденной матрицей:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = d_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = d_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = d_m, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.45)$$

где числа:

$$\left.\begin{aligned} &d_1 = b_1 - a_{1,m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - a_{1,m}\alpha_m, \\ &d_2 = b_2 - a_{2,m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - a_{2,m}\alpha_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_m = b_m - a_{m,m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - a_{m,m}\alpha_m \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.46)$$

Система (2.1.45) имеет единственное решение

$$x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ \ldots,\ x_m=\alpha_m, \qquad (2.1.47)$$

зависящее от свободных членов d_1, d_2, ..., d_m, которые в свою очередь зависят от произвольно выбранных значений (2.1.44) свободных неизвестных. Совокупность значений базисных неизвестных (2.1.47) и значений свободных неизвестных (2.1.44) удовлетворяет системе уравнений (2.1.42) и, следовательно, является ее решением. Но так как существует и бесконечное множество совокупностей произвольных значений свободных неизвестных (2.1.44), то существует и бесконечное множество совокупностей свободных членов (2.1.46) в определенной системе уравнений (2.1.45), каждой из которых соответствует решение (2.1.47) системы (2.1.45). Таким образом, мы доказали, что система (2.1.42) при $m<n$ имеет бесчисленное множество решений, т. е. является неопределенной.

Например, система (б) в примерах предыдущего параграфа настоящей главы неопределенна. В приведенном общем решении этой системы роль свободной неизвестной играет неизвестная x_3, принимающая произвольное значение t, *а* базисные неизвестные x_1=2-2t, x_2=1+3t зависят от произвольного значения $x_3=t$ свободной неизвестной.

Если свободным неизвестным придать нулевые значения, то такое решение системы (2.1.42) *называется базисным решением.*

Система (2.1.42) имеет несколько базисных решений. Базисных решений столько, сколько различных базисов имеет система столбцов матрицы системы. Наибольшее число базисных решений равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Если в системе уравнений (2.1.43), эквивалентной системе (2.1.42), приравнять свободные неизвестные x_{m+1}, ..., x_n нулю, то базисные неизвестные x_1, x_2, ..., x_m, в базисном решении, связанном с базисом A_1, A_2, ..., A_m, должны удовлетворять определенной системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.48)$$

которую можно записать в векторном виде:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = B. \qquad (2.1.49)$$

Решением уравнения (2.1.49) является единственный набор коэффициентов β_1, β_2,…, β_m в разложении вектора свободных членов B:

$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_m A_m = B$, (2.1.50)
по базисным векторам A_1, A_2, ..., A_m.

Процесс нахождения коэффициентов β_1, $\beta_2, \ldots$, β_m нам известен; они могут быть найдены по методу, изложенному в 2.1.7 настоящей главы, который называется методом Жордана - Гаусса. Преобразованиям по методу Жордана - Гаусса мы можем подвергнуть всю расширенную матрицу системы (2.1.42). Тогда система (2.1.42) перейдет в эквивалентную систему с единичным базисом, то есть:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{1,m+1}\,x_{m+1} & + & \ldots & + & a'_{1n}\,x_n & = & b'_1, \\ +x_2 & + & a'_{2,m+1}\,x_{m+1} & + & \ldots & + & a'_{2n}\,x_n & = & b'_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ +x_m & + & a'_{m,m+1}\,x_{m+1} & + & \ldots & + & a'_{mn}\,x_n & = & b'_m, \end{array}\right\} \qquad (2.1.51)$$

которая разрешена относительно базисных неизвестных x_1, x_2, ..., x_m и из которой непосредственно получается базисное решение:

$$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2, \ldots, x_m = b'_m,\ x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Для получения какого-нибудь другого базисного решения надо найти значения новых базисных переменных как коэффициентов в разложении вектора свободных членов по векторам нового базиса, связанного с этим другим базисным решением. А для этого надо просто пересчитать таблицу столбцов расширенной матрицы системы, т. е. осуществить одноразовую операцию замещения; при этом базисная неизвестная x_i, отвечающая вытесненному из базиса вектору A_i, перейдет в свободные неизвестные, а неизвестная x_J, отвечающая введенному в базис вектору A_j перейдет в базисные неизвестные.

Так как каждая таблица столбцов расширенной матрицы системы по отношению к какому-либо базису является расширенной матрицей какой-либо эквивалентной системы, то в таблице вместо векторов A_j можно писать соответствующие наименования неизвестных x_j; тогда в каждой таблице с левой стороны будут стоять наименования базисных неизвестных x_j, значения которых равны соответствующим числам в столбце B, который при вычислении базисных решений целесообразнее помещать не в конце, а в первых столбцах таблицы рядом со столбцом наименований базисных неизвестных. Если в матрице системы не содержится единичных векторов-столбцов, то в систему вводятся *искусственные переменные*, соответствующие единичным столбцам e_i, i=l, 2, ..., m, которые называются *искусственными векторами*. Если в матрице системы содержится только часть единичных столбцов, то в систему вводятся искусственные переменные, соответствующие недостающим единичным столбцам. В том и другом случае мы имеем систему с единичным базисом. Одно из базисных решений этой системы находится непосредственно, а именно: базисное решение, связанное с единичным базисом, в котором базисные неизвестные x_i равны соответствующим свободным членам b_i системы. Далее, после того как мы исключим из базисных переменных все искусственные переменные, заменив их постепенно истинными переменными, будем получать базисные значения истинных переменных, которые вместе с другими свободными истинными переменными, равными нулю, будут давать базисные решения исходной системы. Искусственные переменные, перешедшие в нулевые свободные неизвестные, далее в расчет не принимаются.

Пример 1. Найти два любых базисных решения системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 + & & x_4 - & 2x_5 & = 3 \\ & x_2 - & x_4 + & x_5 & = -3 \\ & & x_3 + \; x_4 - & x_5 & = 3 \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Здесь система с единичным базисом, и мы имеем одно очевидное базисное решение, связанное этим единичным базисом: x_1=3; x_2= -3; x_3=3; x_4=0; x_5=0.

Записываем матрицу системы, оформленную в следующем виде:

P_0	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\sum$
x_1	3	1	0	0	$\boxed{1}$	-2	3
x_2	-3	0	1	0	-2	1	-3
x_3	3	0	0	1	1	-1	4

В столбце P_0 записывается совокупность базисных неизвестных. В столбце B записываются свободные члены уравнений (значения базисных неизвестных). В столбцы x_j j=1,…,5 записываются коэффициенты при соответствующих неизвестных в системе. Последний столбец $\sum$ является *контрольным столбцом*, в котором записываются суммы всех элементов таблицы по строкам.

Для получения, например, базисного решения с базисными переменными x_1, x_2, x_4 необходимо переменную x_1 перевести в свободные, а на ее место поставить базисную переменную x_4. Это значит, что первое уравнение системы должно быть разрешенным относительно x_4, а из остальных уравнений переменная x_4 должна быть исключена. Но это равносильно тому, что базисный столбец A_1=[l, 0, 0], соответствующий неизвестной x_1, должен быть заменен вектором A_4=[1,-2,1], соответствующим неизвестной x_4. Таким образом, перевод x_4 в базисные неизвестные вместо x_1 должен быть осуществлен по правилам замещения вектора в базисы. Пересчет исходной таблицы с ключевым элементом, отмеченным в квадратике, по правилам замещения приводит к следующей таблице:

P_1	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\sum$
x_4	3	1	0	0	1	-2	3
x_2	3	2	1	0	0	-3	3
x_3	0	-1	0	1	0	1	1

Эта таблица (исключая столбец $\sum$) представляет собой расширенную матрицу эквивалентной системы (столбец свободных членов B является здесь первым столбцом), разрешенной относительно базисных неизвестных x_4, x_2, x_3, т. е. системы вида:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= x_1 \qquad\qquad + x_4 - 2x_5, \\ 3 &= 2x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_5, \\ 0 &= -x_1 \qquad + x_3 \quad + x_5. \end{aligned}\right\}$$

Очевидное базисное решение этой системы x_1=0; x_2=3; x_3=0; x_4=3; x_5=0. Отсюда видно, что значения базисных неизвестных получаются при замещении в столбце B. Это решение должно удовлетворять исходной системе (*а*), в чем легко убедиться, подставив его в систему (*а*).

Пример 2. Найти все базисные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

Приведем эту систему (путем введения искусственных переменных v_1, v_2) в систему с единичным базисом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + v_1 \qquad &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + v_2 &= 3. \end{aligned}\right\} \qquad (б')$$

Очевидным базисным решением этой расширенной системы является: x_1=0; x_2=0; x_3=0; v_1=l; v_2=3, соответствующее единичному базису столбцов матрицы системы (*б*'). Этому базисному решению соответствует таблица:

P_0	B	x_1	x_2	x_3	Σ
v_1	1	$\boxed{1}$	1	-1	2
v_2	3	1	2	1	7

Единичную подматрицу, соответствующую искусственным переменным v_1, v_2, можно в таблицу не включать, так как эти переменные все равно будут вытеснены из базисных неизвестных и заменены истинными переменными.

Переведем неизвестную x_1 в базисные, а искусственную неизвестную v_1 в свободные неизвестные. Для нахождения базисного решения с базисными переменными x_1, v_2 следует пересчитать таблицу по правилам замещения. В результате пересчета получаем таблицу:

P_1	B	x_1	x_2	x_3	Σ
x_1	1	1	1	-1	2
v_2	2	0	$\boxed{1}$	2	5

Мы получили второе базисное решение расширенной системы (*б*'): x_1=l, x_2=0, x_3=0, v_1=0, v_2=2.

Далее исключаем из базисных неизвестных последнюю искусственную переменную v_2 и заменяем ее неизвестной x_2. В результате замещения получаем таблицу:

P_2	B	x_1	x_2	x_3	Σ
x_1	-1	1	0	-3	-3
x_2	2	0	1	$\boxed{2}$	5

При искусственных переменных v_1, v_2, равных нулю, решения расширенной системы (*б*') являются решениями исходной системы (*б*). Поэтому последней таблицей определяется первое базисное решение исходной системы (б): x_1= -1, x_2=2, x_3=0.

Далее мы можем перевести x_3 в базисные неизвестные и вывести x_2 в свободные, пересчитав последнюю таблицу с ключевым элементом 2, отмеченным в таблице рамкой. Новая таблица имеет следующий вид:

P_3	B	x_1	x_2	x_3	Σ
x_1	2	1	$\boxed{3/2}$	0	9/2
x_3	1	0	1/2	1	5/2

Этой таблицей определяется второе базисное решение системы (*б*): x_1=2, x_2=0, x_3= 1, что легко можно проверить.

Наконец, переводя x_2 в базисные неизвестные вместо x_1, получаем таблицу,

P_4	B	x_1	x_2	x_3	Σ
x_2	4/3	2/3	1	0	3
x_3	1/3	-1/3	0	1	1

соответствующую последнему базисному решению системы (*б*): x_1=0, x_2=4/3, x_3= 1/3. В этом примере все базисные решения содержат значения базисных переменных, отличные от нуля, такие базисные решения называются *невырожденными.*

Существуют базисные решения, в которых одна или несколько базисных переменных равны нулю; такие базисные решения называются *вырожденными.* Этот случай нам встретился в первом примере (базисная переменная x_3=0).

Основная особенность базисного решения состоит в том, что в нем ненулевые значения неизвестных всегда связаны с некоторым независимым набором столбцов матрицы системы, которые являются коэффициентами разложения вектора свободных членов B по этим независимым векторам.

Заметим, что если ранг системы r окажется меньше числа уравнений m в системе, то при нахождении базисных решений в процессе замещений базисных неизвестных неизбежно появятся нулевые строки в количестве m-r строк. Эти строки отвечают уравнениям, являющимся следствиями, исчезнувшими в процессе эквивалентных преобразований.

2.1.10. Опорное решение

Из приведенного в первой части описания общей модели задач линейного программирования следует, что существенным элементом модели является условие неотрицательности переменных, входящих в задачу. Поэтому нас будут интересовать только те решения системы ограничений задачи линейного программирования, в которых все неизвестные принимают неотрицательные решения. Такие решения называются *допустимыми,* а совокупность всевозможных допустимых решений системы ограничений задачи — *областью определения целевой функции.* Существует бесчисленное множество допустимых решений, среди них особое значение в методах линейного программирования имеют *опорные решения,* которые в гл. I назывались *программами,* или *опорными планами.*

Опорными решениями называются неотрицательные базисные решения, т. е. допустимые базисные решения, у которых все базисные неизвестные принимают только неотрицательные значения.

Опорное решение является некоторым базисным решением, но не всякое базисное решение является опорным. Поэтому опорных решений у системы не больше чем базисных, т. е. во всяком случае не больше, чем C_n^r, где n—число неизвестных и r—ранг системы.

В теории линейного программирования доказывается теорема об опорных решениях, которая имеет большое значение. Эта теорема утверждает, что *если задача линейного программирования имеет решение, то она имеет, по крайней мере, одно оптимальное опорное решение.* Из этой теоремы следует, что если задача линейного программирования имеет одно оптимальное решение, то это единственное оптимальное решение должно являться одним из опорных решений. Если же задача линейного программирования имеет бесчисленное множество решений (дающих одно и то же оптимальное значение целевой функции), то среди них найдется, по крайней мере, одно опорное решение.

Теорема об опорных решениях указывает, что оптимальное решение задачи линейного программирования следует искать не среди бесчисленного множества допустимых решений, а среди только конечного числа допустимых решений, которые являются опорными решениями.

Ниже будем рассматривать невырожденную задачу линейного программирования, в которой каждое опорное решение является невырожденным, т. е. в каждом опорном решении все базисные неизвестные положительны. Это значит, что в каждой таблице в столбце *B* содержатся только положительные числа. Для того чтобы исходное базисное решение, связанное с единичным базисом, было опорным, необходимо, чтобы свободные члены системы уравнений были положительными. Мы всегда можем сделать свободные члены системы уравнений положительными, изменяя, если это нужно, знаки в обеих частях уравнений. Поэтому в дальнейшем изложении мы всегда будем считать свободные члены уравнений положительными числами.

Существующие конечные методы решения задач линейного программирования, в частности *симплексный метод*, основаны на упорядоченном переборе опорных решений. Сначала находится некоторое исходное опорное решение и определяется, не является ли оно *оптимальным*. Если да, то задача решена, если нет, то переходят к другому опорному решению, которое по значению *целевой функции* лучше, чем исходное опорное решение. В случае задачи на максимум переход к новому опорному решению должен давать большее значение целевой функции, а в случае задачи минимизации — меньшее значение целевой функции. Так, постепенно, переходя от одного опорного решения к другому, мы в конце концов достигаем *оптимального решения*. Прежде надо выяснить вопрос, как перейти от одного опорного решения не к произвольному базисному решению, а снова к опорному решению (хотя бы даже не к «лучшему»). Для этого достаточно дополнить правила замещения следующим правилом выбора *ключевого элемента*.

В качестве ключевого столбца *(k*-го*)* может быть выбран любой столбец матрицы системы, в котором имеется хотя бы один положительный элемент a_{ik}. Выбрав таким образом ключевой столбец *(k*-й*),* составляем отношения $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ свободных членов системы к положительным элементам ключевого столбца. Для отрицательных и нулевых элементов ключевого столбца эти отношения не вычисляются (в дополнительном столбце чисел $\beta_i>0$ делаются прочерки). Все числа β_i положительны, так как мы рассматриваем невырожденную задачу.

Та (s-я) строка матрицы, для которой число β_i оказывается наименьшим, выбирается в качестве *ключевой строки*.

Докажем, что при таком выборе ключевого элемента (a_{sk}) мы получим снова опорное решение. В формулах (2.1.29) и (2.1.30) для преобразования строк, для столбца свободных членов следует положить $a_{ij}=b_i$; $a_{sj}=b_s$ и $b_{ij}=b'_i$, $b_{sj}=b'_s$, где b'_i (i=1,2,..., m) — новые свободные члены. Таким образом, имеем формулы, по которым преобразуются свободные члены:

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{sk}} b_s, \text{ при } i \neq s$$

и $b'_i = \dfrac{b_s}{a_{sk}}$.

Но по правилу выбора ключевого элемента

$$\frac{b_s}{a_{sk}} = \beta = \min\left(\beta_i = \frac{b_i}{a_{ik}} \right),$$

следовательно, имеем:

$$b'_i = b_i - \beta a_{ik}, \text{ при } i \neq s$$

и $b'_s = \beta$.

Число $\beta>0$, так как все числа β_i положительны. Если элемент a_{ik} в ключевом столбце меньше нуля или равен ему, то соответствующее число $b'_i \geq b_i > 0$, *т.* е. положительно. Если a_{ik} положительно, то число $b'_i = a_{ik}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}} - \beta \right) > 0$

также положительно, так как $\beta < \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ поскольку β минимальное из отношений $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ при положительных a_{ik}.

Таким образом, в новом невырожденном базисном решении все базисные неизвестные будут иметь положительные значения b'_i (i=1, 2, ..., m)*,* т. е. мы придем к опорному решению.

Пример. Найти какие-либо два оперных решения системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad\quad &= 2, \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 \quad &= 6, \\ + 2x_3 \quad + x_5 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Здесь мы имеем очевидное опорное решение: x_1=2, x_2=0, x_3= 0, x_4= 6, x_5=4 связанное с единичным базисом A_1=[1, 0, 0]; A_4=[0, I, 0]; A_5=[0, 0, I].

Составляем исходную таблицу (матрицу системы) и дополняем ее контрольным столбцом $\sum$ и столбцом отношений β_i>0.

P_0	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\sum$	β_i
x_1	2	1	2	-3	0	0	2	-
x_4	6	0	-1	2	1	0	8	3
x_5	4	0	0	$\boxed{2}$	0	1	7	2

Выберем, например, .столбец коэффициентов при неизвестной x_3 и запишем в столбце β_i, положительные отношения чисел столбца B к числам выбранного столбца (x_3). Наименьшее отношение β=2 получается в третьей строке. Поэтому переводим неизвестную x_3 в базисные вместо x_5. Соответствующий ключевой элемент, равный 2, обведен в исходной таблице рамкой. По правилам замещения получаем следующую таблицу:

P_1	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\sum$
x_1	8	1	2	0	0	3/2	25/2
x_4	2	0	-1	0	1	-1	1
x_3	2	0	0	1	0	1/2	7/2

Из этой таблицы следует второе опорное решение: x_1=8, x_2=0, x_3= 2, x_4= 2, x_5=0.

2.2.1. Различные формы задач линейного программирования и приведение их к канонической и стандартной формам

Общая форма задачи линейного программирования, как указывалось в главе 1, формулируется следующим образом.

Требуется найти совокупность неотрицательных чисел x_1, x_2,…,x_n, *которые обращают в максимум* (*минимум*) *целевую функцию* (*линейную форму*)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (2.2.1)$$

при выполнении условий:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ \text{...} \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k; \end{array}\right\} \qquad (2.2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \ \le b_{k+1};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1 \ \ + a_{m2}x_2 \ \ \ + \ldots + a_{mn}x_n \ \ \ \le b_m; \end{aligned}\right\}^{*} \qquad (2.2.3)$$

Задачу (2.2.1) – (2.2.3) при неотрицательности всех чисел x_j ($x_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,n$) будем называть *общей задачей линейного программирования*.

Иногда не требуется неотрицательности всех чисел x_j; в таком случае задача может быть легко приведена к общей задаче линейного программирования. Как это делается, покажем на конкретном примере.

Пусть требуется найти неотрицательные числа x_1,x_2 и число x_3 без ограничения по знаку, максимизирующие целевую функцию

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 &= 5;\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 6. \end{aligned}\right\}$$

В этой задаче никакого условия на знак переменной x_3 не накладывается. Введем две новые неотрицательные переменные $x_3^{'}$ и $x_3^{''}$, связанные с x_3 соотношением $x_3^{'} - x_3^{''} = x_3$. Тогда поставленная задача окажется эквивалентной следующей общей задаче линейного программирования.

Требуется найти неотрицательные числа x_1, x_2, $x_3^{'}, x_3^{''}$, которые обращают в максимум целевую функцию

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3^{'} + x_3^{''}$$

---

*Все неравенства (2.2.3) взяты для однообразия со знаком ≤, так как любое неравенство противоположенного смысла (со знаком ≥) может быть превращено в неравенство со знаком ≤ умножением обеих частей его на –1.

при выполнении условий:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} &= 5;\\ x_1 + 2x_2 - x_3^{'} + x_3^{''} &\le 6. \end{aligned}\right\}$$

Если в решении последней задачи окажется, что $x_3^{'} \geq x_3^{''}$, то значение переменной x_3 в решении исходной задачи будет неотрицательным, в противном случае x_3 окажется отрицательным.

В общем случае, если в задаче линейного программирования условиям неотрицательности подчинены не все переменные x_j, то такая задача приводится к общей задаче линейного программирования путем введения вместо каждой переменной, не подчиненной условию $x_j \geq 0$, двух неотрицательных переменных $x_j^{'}$ и $x_j^{''}$, связанных *с* x_j, соотношением $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$.

Примем следующую терминологию. Условия (2.2.2) и (2.2.3) будем называть *системой ограничений* задачи, а каждое условие в отдельности — ограничением. Таблица коэффициентов $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$ в системе ограничений (2.2.2) и (2.2.3) называется *матрицей условий* задачи. Столбцы этой матрицы $A_j = \{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\}$ называются *векторами условий.*

Вектор $B = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$, составленный из свободных членов ограничений, называется *вектором ограничений.* Вектор $C=(c_1,c_2,\ldots, c_n)$, составленный из коэффициентов целевой функции, будем называть *вектором коэффициентов целевой функции.*

Совокупность неотрицательных чисел $x_1, x_2,..., x_n$, удовлетворяющих системе ограничений задачи (2.2.2), (2.2.3), называется *допустимым решением,* или *планом,* задачи. Неотрицательный вектор $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ координаты которого составляют допустимое решение задачи, будем называть *допустимым вектором.* Система ограничений имеет как правило, не единственное допустимое решение. Каждое допустимое решение задачи связано с определенным значением ее целевой функции.

Допустимое решение, для которого целевая функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение, называется *оптимальным решением,* или *оптимальным планом,* задачи.

Бесчисленное множество всех допустимых решений (допустимых векторов) называется *областью определения целевой функции,* или *допустимой областью.*

В векторных обозначениях общая задача линейного программирования может быть переписана в

следующем компактном виде.

По заданной матрице условий $A = \| a_{ij}\|_{m\times n}$, m-мерному вектору ограничений $B = [b_1, b_2,\ldots, b_m]$ и n-мерному вектору коэффициентов целевой функции $C=(c_1,c_2,..., c_n)$ найти неотрицательный вектор $X=[x_1, x_2,..., x_n]$, для которого скалярное произведение

$$z = CX \tag{2.2.4}$$

максимально (минимально) при условиях:

$$A^i X = b_i, \quad i = 1,2,...,k; \tag{2.2.5}$$

$$A^i X \le b_i, \quad i = k+1,...,m, \tag{2.2.6}$$

где A^i —i-я строка матрицы условий A.

Если система ограничений задачи состоит только из неравенств, то такая форма задачи называется *стандартной* задачей линейного программирования.

Стандартная задача линейного программирования в векторно-матричных обозначениях формулируется следующим образом.

По заданной матрице $A = \| a_{ij}\|_{m\times n}$, m-мерному вектору $B = [b_1, b_2,..., b_m]$ и n-мерному вектору $C=(c_1, c_2,..., c_n)$ найти n-мерный неотрицательный вектор $X=[x_1, x_2,..., x_n]$, для которого скалярное произведение

$$z = CX \tag{2.2.7}$$

максимально (минимально) при условии

$$AX \le B. \tag{2.2.8}$$

Если система ограничений задачи состоит только из равенств, т. е. является системой линейных уравнений, то такая форма задачи называется *канонической* задачей линейного программирования.

Каноническая задача линейного программирования формулируется аналогично стандартной задаче.

По заданной матрице $A = \| a_{ij}\|_{m\times n}$ m-мерному вектору $B=[b_1, b_2,..., b_m]$ и n-мерному вектору $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ найти n-мерный неотрицательный вектор $X=[x_1, x_2,\ldots, x_n]$, для которого скалярное произведение

$$z = CX \tag{2.2.9}$$

максимально (минимально) при условии

$$AX = B \tag{2.2.10}$$

Отметим следующий очевидный факт. Точка X, в которой функция $f(X)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, одновременно является точкой, в которой функция — $f(X)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение, при этом $\left[f(X)\right]_{\max} = -\left[-f(X)\right]_{\min}$ и $\left[f(X)\right]_{\min} = -\left[-f(X)\right]_{\max}$. Таким образом, любая задача максимизации (минимизации) может быть заменена эквивалентной задачей минимизации (максимизации).

Так, если в задаче линейного программирования требуется минимизировать функцию CX, то, заменив, вектор $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ противоположным вектором — $C=(-c_1, -c_2, \ldots, -c_n)$, придем к эквивалентной задаче максимизации функции $-CX$, но при этом, конечно, $(CX)_{\min} = -(-CX)_{\max}$.

Приведение задач линейного программирования к канонической форме

Каноническая форма задачи линейного программирования оказывается необходимой при дальнейшем изложении основного метода решения задачи — симплексного метода.

Покажем, каким образом можно преобразовать любую задачу линейного программирования в эквивалентную каноническую задачу. Начнем с рассмотрения стандартной задачи (2.2.7) – (2.2.8)

Введем в рассмотрение неизвестный неотрицательный m-мерный вектор

$$X' = \left[x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}\right],$$

связанный с неизвестным вектором $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ соотношением

$$AX+X' = B. \qquad (2.2.11)$$

Вектор X' назовем *балансовым (выравнивающим) вектором*. Ясно, что неотрицательные векторы X и X', удовлетворяющие векторному уравнению (2.2.11), будут удовлетворять векторному неравенству (2.2.8) . Обратно, если вектор X неотрицательный и удовлетворяет неравенству (2.2.8), то балансовый вектор X', найденный из уравнения (2.2.11), окажется неотрицательным. Таким образом, условия (2.2.8) и (2.2.11) для искомого вектора X являются эквивалентными. Поэтому каноническая задача — *найти максимум (минимум) целевой функции*

$$z=CX+OX' \qquad (2.2.12)$$

при условиях:

$$AX + X' = B, \qquad (2.2.13)$$

$$X \geq 0, \quad X' \geq 0 \qquad (2.2.14)$$

будет эквивалентна стандартной задаче (2.2.7) — (2.2.8), поскольку вектор X, входящий в оптимальное решение задачи (2.2.12) — (2.2.14), будет, очевидно, являться оптимальным решением стандартной задачи (2.2.7) — (2.2.8). Действительно, неотрицательный вектор X, взятый из решения канонической задачи (2.2.12) — (2.2.14), будет удовлетворять условию (2.2.8) стандартной задачи и давать то же значение $(CX)_{\text{макс}}$ или $(CX)_{\text{мин}}$.

При решении канонической задачи (2.2.12) — (2.2.14) надо иметь в виду, что эта задача содержит $n+m$ неотрицательных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, и балансовые переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ следует считать входящими слагаемыми в целевую функцию (2.2.12) с нулевыми коэффициентами.

Пример 1. Привести к канонической форме следующую стандартную задачу линейного программирования. Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, при которых целевая функция

$$z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

имеет максимальное значение при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \quad\quad x_4 &\le 4; \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad &\le 3; \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &\le 3. \end{aligned}\right\}$$

Путем введения балансовых неизвестных x_5, x_6, x_7 превращаем ограничения-неравенства в уравнения. В результате указанного преобразования получим эквивалентную каноническую форму задачи в следующем виде.

Найти неотрицательные числа x_j, j=1, 2, . . ., 7, обращающие в максимум целевую функцию

$z=2x_1+4x_2+x_3+x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6+0\cdot x_7$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \quad\quad x_4 + x_5 \quad\quad\quad &= 4; \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad\quad + x_6 \quad &= 3; \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \quad\quad + x_7 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Оптимальные значения x_1, x_2, x_3, x_4, найденные в результате решения этой канонической задачи, являются оптимальным решением исходной стандартной задачи.

Пример 2. Привести к канонической форме следующую стандартную задачу минимизации. Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, минимизирующие целевую функцию

$z=x_1-x_2+x_3$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4_3 &\ge 2; \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 &\ge 6. \end{aligned}\right\}$$

Если записать эту стандартную задачу в виде задачи (2.2.7) — (2.2.8), изменив в ограничениях знаки неравенств $\ge$ на $\le$ путем умножения их на множитель -1, и затем прибавить к левым частям соответственно балансовые неизвестные x_4 и x_5, то результат получится тот же, если, не меняя знаков ограничений-неравенств, вычесть из левых частей их балансовые неизвестные x_4 и x_5. Выполнив указанное преобразование, получим следующую каноническую форму задачи.

Найти неотрицательные числа x_j, j=1, 2, . . ., 5, минимизирующие целевую функцию

$z=x_1-x_2+x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \quad\quad &= 2; \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 \quad\quad - x_5 &= 6. \end{aligned}\right\}$$

Вообще, балансовые неизвестные следует вводить в ограничения-неравенства, руководствуясь следующим элементарным правилом.

В каждое ограничение-неравенство типа

$a_1x_1 + a_2x_2 +,...,+a_nx_n \le b$

балансовая неизвестная входит в левую часть этого неравенства со знаком «плюс», а в случае неравенства

$a_1x_1 + a_2x_2 +,...,+a_nx_n \ge b$

— со знаком «минус».

Аналогично приводится к канонической форме общая задача линейного программирования (2.2.4) — (2.2.6), с той лишь мало существенной разницей, что балансовые неизвестные x_{n+1}, $x_{n+2},\ldots$, x_{n+m-k} вводятся только в ограничения-неравенства

(2.2.6). Таким образом, общая задача линейного программирования (2.2.4) — (2.2.6) сводится к следующей канонической задаче линейного программирования.

Требуется найти неотрицательные векторы $X=[x_1,x_2, \ldots, x_n]$ и $X'=[x_{n+1}, \ldots, X_{n-k+m}]$, *для которых целевая функция*

$$z = CX + OX' \qquad (2.2.15)$$

максимальна (минимальна) при условиях:

$$A^i X = b_i, \quad i = 1,2,\ldots, k; \qquad (2.2.16)$$

$$A^i X + X_{n-k+i} = b_i \quad i = k+1,\ldots, m, \qquad (2.2.17)$$

где $x_{n-k+i} \geq 0$ $(i = k+1,\ldots, m)$ — *координаты балансового вектора* X'.

Пример 3. Привести к канонической форме следующую общую задачу линейного программирования. Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, для которых целевая функция

$$z = -x_1+2x_2+x_3+2x_4$$

принимает наибольшее значение при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 7; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \geq 4. \end{array}\right\}$$

Вводя во второе и третье ограничения-неравенства балансовые неизвестные x_5 и x_6 с соответствующими знаками, получим следующую эквивалентную каноническую форму задачи.

Найти неотрицательные числа x_j, j=1, 2,..., 6, максимизирующие целевую функцию

$$z = -x_1+2x_2+x_3+2x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 7; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_6 = 4. \end{array}\right\}$$

Итак, решение любой задачи линейного программирования можно свести к решению эквивалентной канонической задачи, в которой система ограничений является неопределенной системой линейных уравнений.

Случай определенности системы ограничений не представляет интереса для исследования. В самом деле, если система имеет единственное неотрицательное решение, то оно и будет представлять оптимальный план, так как никаких других решений вообще нет. Если же это решение не является неотрицательным, то задача не имеет решения, так как оптимальный план должен быть неотрицательным, а имеющееся единственное решение таковым не является.

Приведение задач линейного программирования к стандартной форме

Иногда задачу линейного программирования целесообразно бывает представить в стандартной форме. При этом число переменных в эквивалентной стандартной задаче уменьшается.

Общая задача линейного программирования (2.2.1) — (2.2.3) может быть приведена к стандартной форме следующим образом. Система уравнений (2.2.2) разрешается относительно некоторых неизвестных; полученные выражения подставляются в линейную форму, в систему неравенств (2.2.3), а также в условия неотрицательности неизвестных $x_j \geq 0$ при всех j. В результате задача принимает стандартную форму (2.2.7) — (2.2.8). Аналогичным образом приводится каноническая задача линейного программирования к эквивалентной стандартной задаче.

Приведем численные примеры, иллюстрирующие порядок действий при преобразовании общей и канонических задач линейного программирования к эквивалентным стандартным задачам.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим задачу линейного программирования, заключающуюся в максимизации целевой функции

$$z=x_1+x_2+3x_3+3x_4 \tag{2.2.18}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+x_2+2x_3+x_4&=6;\\ 3x_1+3x_2+x_3+2x_4&=7; \end{aligned}\right\} \tag{2.2.19}$$

$$x_1+2x_2+x_3+x_4\leq 6; \tag{2.2.20}$$

$$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ x_3\geq 0,\ \ x_4\geq 0. \tag{2.2.21}$$

Последние условия (2.2.21) выражают неотрицательность переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

Приведем систему (2.2.19) к системе с единичным базисом, соответствующим, например, базисным неизвестным x_3 и x_4. Как это делается, нам известно (см. часть 1; 2.1.9).

Оформляем расширенную матрицу системы (2.2.19) в виде таблицы столбцов ее по отношению к единичному базису:

	A_1	A_2	A_3	A_4	**B**
e_1	4	1	2	$\boxed{1}$	6
e_2	3	3	1	2	7

Переходим к таблице векторов по отношению к базису A_3A_4.

	A_1	A_2	A_3	A_4	**B**
A_4	4	1	2	1	6
e_2	-5	1	$\boxed{-3}$	0	-5

A_4	2/3	5/3	0	1	8/3
A_3	5/3	-1/3	1	0	5/3

Отсюда получаем эквивалентную систему с единичным базисом:

$$\left.\begin{aligned} &5/3x_1 - 1/3x_2 + x_3 \qquad = 5/3. \\ &2/3x_1 + 5/3x_2 \qquad + x_4 = 8/3; \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.22)$$

Так как переменные x_3 и x_4 должны быть неотрицательными, то уравнения (2.2.22), а значит и система (2.2.19), переходят *в* систему неравенств с двумя переменными x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 5x_2 \le 8; \\ &5x_1 - \ x_2 \le 5 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.23)$$

Выразим из уравнений (2.2.22) переменные x_3 и x_4 через переменные x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned} &x_3 = 5/3 - 5/3x_1 + 1/3x_2; \\ &x_4 = 8/3 - 2/3x_1 - 5/3x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.24)$$

Полученные результаты (2.2.24) подставляем в линейную форму (2.2.18) и в ограничение-неравенство (2.2.20).

Тогда задача (2.2.18) — (2.2.21) перейдет в эквивалентную стандартную задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$z = 13- 6x_1-3x_2 \qquad (2.2.25)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 8; \\ 5x_1 - \ x_2 &\le 5; \\ -4x_1 + 2x_2 &\le 5. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.26)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \qquad (2.2.27)$$

Стандартная задача (2.2.25) — (2.2.27) легко решается графическим методом; x_1 =0, x_2 = 0 — есть оптимальное решение этой задачи и $z_{макс}$=13.

Чтобы получить решение исходной задачи (2.2.18) — (2.2.21), надо подставить найденное решение задачи (2.2.25) — (2.2.27) в равенства (2.2.24) и найти переменные x_3 и x_4.

Таким образом,

x_1=0, x_2=0, x_3=5/3, x_4=8/3,

— есть оптимальное решение, или оптимальный план, общей задачи линейного программирования (2.2.18) — (2.2.21).

Пример 2. Следующую каноническую форму задачи привести к стандартной форме. Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4,x_5, максимизирующие целевую функцию

$$z=5x_1+7x_2+2x_3+x_4+x_5 \qquad (2.2.28)$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + x_2 \qquad + x_4 + x_5 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 = 9 \end{array}\right\} \tag{2.2.29}$$

Преобразовав известным нам способом систему (2.2.29) в систему с единичным базисом, соответствующим базисным переменным x_3, x_4, x_5, получим:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \qquad + x_5 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad = 16 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 3 \end{array}\right\} \tag{2.2.30}$$

Отбрасывая в этих уравнениях неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, получим систему трех неравенств с переменными x_1 и x_2:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \le 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 16; \\ -x_1 + x_2 \le 3. \end{array}\right\} \tag{2.2.31}$$

Из уравнений (2.2.30) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 3 + x_1 - x_2; \\ x_4 = 16 - 3x_1 - 2x_2; \\ x_5 = 6 - 2x_1 + x_2. \end{array}\right\} \tag{2.2.32}$$

Подставляя эти значения x_3, x_4, x_5 в линейную форму (2.2.28), выразим ее только через переменные x_1 и x_2.

В результате придем к эквивалентной стандартной задаче. Найти неотрицательные числа x_1 и x_2, обращающие в максимум линейную форму

$$z=2x_1+4x_2+28 \tag{2.2.33}$$

при условиях (2.2.31).

Эта задача решается элементарно графическим способом; $x_1=2$, $x_2=5$ — оптимальное решение этой задачи и $z_{\text{макс}} = 52$. Подставляя это решение в равенства (2.2.32), найдем оптимальное решение исходной канонической задачи (2.2.28) — (2.2.29):

$x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=7$.

2.2.2. Двойственные или взаимосопряженные пары задач линейного программирования

Задачи, двойственные стандартным задачам линейного программирования

Обратимся к стандартной задаче нахождения n-мерного неотрицательного вектора

$$X=[x_1,x_2,\ldots,x_n], \tag{2.2.34}$$

который *максимизирует* скалярное произведение

$$z = CX \tag{2.2.35}$$

при условии

$$AX \le B, \tag{2.2.36}$$

где $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$—матрица условий;

$B = [b_1, b_2,..., b_m]$ — вектор ограничений;

$C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$—вектор коэффициентов целевой функции.

Приведенной задаче максимизации соответствует следующая стандартная задача минимизации.

Найти неотрицательный m-мерный вектор

$Y=[y_1,y_2,\ldots,y_m]$, (2.2.37)

который *минимизирует* скалярное произведение

$w = BY$ (2.2.38)

при условии

$A^{\text{T}}Y \geq C$, (2.2.39)

где A_{T}. — транспонированная матрица A.

Задача (2.2.37) — (2.2.39) называется *двойственной,* или *сопряженной,* задаче (2.2.34) — (2.2.36). Задача (2.2.34) — (2.2.36) называется *прямой.* Если считать задачу (2.2.37) —(2.2.39) прямой, то двойственная ей будет задача (2.2.34) — (2.2.36). Таким образом, стандартной задаче максимизации соответствует двойственная стандартная задача минимизации и, наоборот, стандартной задаче минимизации соответствует двойственная стандартная задача максимизации. Поэтому прямую и двойственную стандартные задачи называют *двойственной,* или *взаимосопряженной, парой* стандартных задач линейного программирования.

Можно доказать, но на этом мы останавливаться не будем, что *или обе взаимосопряженные задачи имеют решения, или ни одна из них не имеет решения.* Таким образом, из существования решения прямой задачи всегда вытекает существование решения двойственной задачи и наоборот.

Двойственная задача может быть составлена очень просто, если только помнить, что во взаимосопряженных задачах вектор коэффициентов целевой функции и вектор ограничений меняются ролями, а матрица условий одной задачи является транспонированной матрицей условий другой задачи, и, наконец, знаки неравенств в системе ограничений той и другой задач имеют противоположный смысл.

Взаимосвязь между двумя задачами можно представить с помощью следующей таблицы:

Табл.2.2.1

X / Y	x_1	x_2	……………………	x_n	$\leq$
y_1	a_{11}	a_{12}	……………………	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	……………………	a_{2n}	b_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	……………………	a_{mn}	b_m
$\geq$	c_1	c_2	……………………	c_n	B / C

Параллельная подробная запись условий обеих задач легко осуществляется с помощью этой таблицы и выглядит так:

Прямая задача	Двойственная задача
Найти неотрицательные числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$, максимизирующие целевую функцию $z=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n$ при условиях: $a_{11}x_1+ a_{12}x_2+\ldots\ a_{1n}x_n\leq b_1$;	Найти неотрицательные числа $y_1,y_2,\ldots,y_m$, минимизирующие целевую функцию $w=b_1y_1+ b_2y_2+\ldots+ b_my_m$ при условиях: $a_{11}y_1+ a_{21}y_2+\ldots\ a_{m1}y_m\geq c_1$;

………………………… $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots a_{mn}x_n\le b_m$	………………………… $a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\dots a_{mn}y_m\ge c_n$

Ограничения-неравенства прямой задачи называют также *строчечными* ограничениями, а ограничения-неравенства двойственной задачи — *столбцовыми.* Всякому строчечному ограничению $A_iX \le b_i$ соответствует условие $y_i \ge 0$, а столбцовому ограничению $A_jУ \ge c_j$ —условие $x_j \ge 0$.

Условия

$$A_iX \le b_i, \quad y_i \ge 0 \tag{2.2.40}$$

при фиксированном значении индекса i и условий

$$AjY \ge c_j, \quad x_j \ge 0, \tag{2.2.41}$$

при фиксированном значении индекса j называются *парами двойственных условий* взаимосопряженных задач.

Двойственная пара (2.2.40) называется *строчечной,* а пара (2.2.41) — *столбцовой.*

Пример. Дана задача: найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию

$$z=x_1+3x_2+x_4$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &\le 2; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &\le 1. \end{aligned}\right\}$$

Составить задачу, двойственную данной задаче. Взаимосвязь между обеими задачами представляется следующей таблицей (см. табл.2.2.1)

Табл.2.2.2

Y \ **X**	x_1	x_2	x_3	x_4	$\le$
y_1	1	0	1	2	2
y_2	1	1	4	-2	1
$\ge$	1	3	0	1	*B* \ *C*

Пользуясь этой таблицей, получаем формулировку двойственной задачи. Требуется найти неотрицательные числа y_1, y_2, обращающие в минимум целевую функцию

$$z=2y_1+y_2$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + \quad y_2 &\ge 1; \\ y_2 &\ge 3; \\ y_1 + \; 4y_2 &\ge 0; \\ 2y_1 - 2y_2 &\ge 1 \end{aligned}\right\}$$

Напомним, что неотрицательные векторы X и Y называются *допустимыми,* если они соответственно удовлетворяют условиям прямой и двойственной задач.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если векторы X и Y допустимы для сопряженных задач вида* (2.2.34) — (2.2.36) *и* (2.2.37) —(2.2.39), *то*

$$CX \leq BY. \tag{2.2.42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая скалярно неравенство (2.2.36) на неотрицательный вектор Y, получим

$$(AX)Y \leq BY. \tag{2.2.43}$$

Так же умножая неравенство (2.2.39) на неотрицательный вектор X, имеем

$$(A^{\mathrm{T}}Y)X \geq CX. \tag{2.2.44}$$

Проверкой можно убедиться, что

$$(AX)\ Y = (A^{\mathrm{T}}Y)\ X = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i . \tag{2.2.45}$$

Сопоставление неравенств (2.2.43) и (2.2.44), с учетом равенства (2.2.45), дает неравенство

$$CX \leq (A^{\mathrm{T}}Y)\ X = (AX)\ Y \leq BY, \tag{2.2.46}$$

и теорема доказана.

Таким образом, неравенство между значениями целевых функций для допустимых решений взаимосопряженных задач имеет в точности тот же вид, что и неравенство в условиях прямой задачи.

Теорема 2 (признак оптимальности). *Если для некоторых допустимых решений X^0 и Y^0 прямой и двойственной стандартных задач выполняется равенство*

$$CX^0 = BY^0, \tag{2.2.47}$$

то векторы X^0 и Y^0 являются оптимальными решениями соответствующих задач.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X произвольный другой допустимый вектор задачи (2.2.34)—(2.2.36). Тогда, по теореме 1,

$$CX \leq BY^0, \tag{2.2.48}$$

Учитывая равенство (2.2.47), получаем

$$CX \leq CX^0,$$

а это значит, что вектор X^0 является оптимальным решением прямой задачи. Аналогично доказывается оптимальность вектора Y^0 двойственной задачи. Теорема доказана.

Теорема 2 устанавливает достаточность условия (2.2.47) для оптимальности допустимых векторов X^0 и Y^0, т. е. если для некоторых допустимых решений взаимосопряженных задач их целевые функции совпадают по величине, то допустимые решения являются оптимальными.

Можно доказать, но на этом мы останавливаться не будем, что условие (2.2.47) является также и необходимым условием для оптимальности допустимых векторов X^0 и Y^0, т. е. *если допустимые векторы X^0 и Y^0 оптимальны, то целевые функции для этих векторов совпадают по величине.*

Обратим внимание на неравенство (2.2.46). Если допустимые векторы X и Y оптимальны, то неравенство (2.2.46) должно быть равенством. Обратно, если неравенство (2.2.46) является равенством для некоторых допустимых векторов X и У взаимосопряженных задач, то эти векторы оптимальны.

Итак, *для оптимальности допустимых векторов X и Y необходимо и достаточно выполнение условия*

$$CX=(A^{\mathrm{T}}Y)X=(AX)Y=BY. \tag{2.2.49}$$

Равенства (2.2.49) напишем еще в виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (A_j Y) x_j = \sum_{i=1}^{m} (A_i X) y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \qquad (2.2.50)$$

Имеет место следующая интересная теорема.

Теорема 3 (теорема равновесия). *Допустимые векторы X и Y прямой и двойственной задач являются оптимальными в том и только в том случае, если в парах их двойственных условий* (2.2.40) *и* (2.2.41) *одно условие является равенством, как только второе — строгим неравенством.*

П о я с н е н и е. Строгое неравенство имеет знак > вместо ≥ или < вместо ≤..

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде докажем достаточность условий теоремы. Предположим, что условия теоремы выполнены, т. е. что в некоторых парах двойственных условий (2.2.40)

$$y_i=0, \quad A_iX<b_i \qquad (2.2.51)$$

и

$$y_i>0, \quad A_iX = b_i \qquad (2.2.52)$$

в остальных парах.

Точно так же в некоторых парах двойственных условий (2.2.41)

$$x_j = 0, \quad A_jY>c_j \qquad (2.2.53)$$

и в остальных парах

$$x_j > 0, \quad A_jY=c_j \qquad (2.2.54)$$

Умножая i-е ограничение-неравенство прямой задачи $A_iX \le b_i$ на y_i и используя условия (2.2.51), получим

$$b_i y_i = (A_i X) y_i .$$

Суммируя это равенство по индексу i от 1 до m, находим

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (A_i X) y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i . \qquad (2.2.55)$$

Аналогично, умножая j-е ограничение-неравенство двойственной задачи $A_jY \ge c_j$ на x_j и используя условие (2.2.53), получим

$$c_j x_j = (A_j Y) x_j .$$

Суммируя это равенство по индексу j от 1 до n, находим

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (A_j Y) x_j = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i . \qquad (2.2.56)$$

Из равенств (2.2.55) и (2.2.56) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

или

$$CX=BY,$$

поэтому, в силу теоремы 2, векторы X и Y являются оптимальными решениями взаимосопряженных задач.

Теперь докажем необходимость условий теоремы. Предположим, что векторы X и Y являются оптимальными; тогда должны иметь место равенства (2.2.50). Из равенств (2.2.50) следует:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (A_j Y) x_j ; \qquad (2.2.57)$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (A_i X) y_i. \qquad (2.2.58)$$

Из первого равенства получаем

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (A_j Y - c_j) = 0.$$

Все слагаемые этой суммы неотрицательны, поскольку $x_j \geq 0$ и $A_j Y - c_j \geq 0$. Но сумма всех неотрицательных чисел может равняться нулю только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю, т. е. для каждого j имеем

$$x_j(A_j Y - c_j) = 0 \qquad (2.2.59)$$

откуда следует, что если $x_j>0$, то должно быть $A_j Y = c_j$ и, наоборот, если $AY>c_j$, то должно быть $x_j=0$, а это и есть условия (2.2.53) и (2.2.54) теоремы.

Аналогичные рассуждения с использованием равенства (2.2.58) доказывают справедливость условий (2.2.51) и (2.2.52).

Примечание. Равенство (2.2.59) выполняется при $A_j Y - c_j = 0$ и $x_j = 0$. Поэтому при оптимальных решениях X и Y взаимосопряженных задач могут существовать некоторые пары двойственных условий (2.2.40) и (2.2.41), в которых каждое условие является равенством, так как теорема утверждает, что если в какой-либо паре двойственных условий одно условие является строгим неравенством, то второе — обязано быть равенством. Обратное же утверждение теоремой не предусматривается.

Теорема равновесия часто может быть использована для проверки оптимальности предложенного решения задачи линейного программирования. Если задано решение прямой задачи, то, с использованием теоремы равновесия, часто удается найти допустимое решение двойственной задачи. Если допустимый вектор X (предложенное решение прямой задачи) и допустимый вектор Y двойственной задачи будут удовлетворять условиям теоремы равновесия, то оба вектора X и Y — оптимальны. Рассмотрим численный пример.

Найти неотрицательные числа x_1 x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию

$$z=2x_1+3x_2+x_3+x_4 \qquad (2.2.60)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \qquad\quad + x_4 &\leq 9; \\ 2x_1 + \quad x_2 \;\; + x_3 \qquad\quad &\leq 5; \\ 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &\leq 8. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.61)$$

Предположим, что вычислено оптимальное решение этой задачи:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0. \qquad (2.2.62)$$

Подставляя эти числа в уравнение (2.2.60), получаем

$z_{\text{max}}=2\cdot1 +3\cdot2+ 1+0 = 9.$

Как проверить, что никакой другой набор чисел x_j, также удовлетворяющий системе ограничений (2.2.61), не даст нам большего значения целевой функции (2.2.60)? Это можно проверить следующим образом. Составим условие двойственной задачи.

Двойственной к задаче (2.2.60) — (2.2.61) будет задача нахождения неотрицательных чисел y_1, y_2, y_3, для которых целевая .функция

$$w = 9y_1+ 5y_2 + 8y_3 \qquad (2.2.63)$$

минимальна и которые подчинены условиям:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \qquad &\geq 2; \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 3; \\ y_2 + 2y_3 &\geq 1; \\ y_1 + \qquad 5y_3 &\geq 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.64)$$

Из теоремы равновесия следует, что если допустимое решение (2.2.62) является оптимальным, то при оптимальном решении (y_1, y_2, y_3) двойственной задачи (2.2.63) — (2.2.64) первые три неравенства (2.2.64), соответствующие положительным значениям x_1, x_2, x_3, должны быть уравнениями, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \qquad &= 2; \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 &= 3; \\ y_2 + 2y_3 &+ 2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.65)$$

Система линейных уравнений (2.2.65) имеет единственное решение:

$$y_1 = 8/17, \quad y_2 = 13/17, \quad y_3 = 2/17. \qquad (2.2.66)$$

При значениях y_1 (2.2.66) четвертое ограничение-неравенство в системе ограничений (2.2.64) является строгим неравенством:

$$8/17 + 5 \cdot 2/17 = 18/17 > 1,$$

которое соответствует $x_4 = 0$.

Значениям y_1 (2.2.66), отличным от нуля, соответствуют ограничения (2.2.61), которые при значениях x_j (2.2.62) обращаются в равенства.

Итак, в каждой паре двойственных условий взаимосопряженных задач (2.2.60) — (2.2.61) и (2.2.63) — (2.2.64) при значениях неизвестных (2.2.62) и (2.2.66) одно условие является равенством, как только второе — строгим неравенством.

Следовательно, по теореме равновесия, допустимые решения (2.2.62) и (2.2.66) являются оптимальными.

Для оптимального решения (2.2.66) имеем следующее значение целевой функции (2.2.63):

$W_{\min}=9 \cdot 8/17+5 \cdot 13/17+8 \cdot 2/17=9.$

Мы видим, что значения $z_{\max}=9$ и $w_{\min}=9$, соответственно задач (2.2.60) — (2.2.61) и (2.2.63) — (2.2.64), совпадают, что, в силу теоремы 2, еще раз убеждает нас в том, что допустимые решения (2.2.62) и (2.2.66) оптимальны.

Задача, двойственная канонической задаче линейного программирования

Пусть каноническая задача линейного программирования задана в векторной форме.

Найти неотрицательный вектор $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, *который максимизирует целевую функцию*

$$z = CX \qquad (2.2.67)$$

при условиях:

$$A_iX = b_i, \quad i=1,2,...,m, \qquad (2.2.68)$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции; $A_i =(a_{i1}, a_{i2},..., a_{in})$ — строки матрицы условий $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$.

Всякое ограничение-равенство $f = 0$ может быть заменено парой неравенств вида $f \leq 0$ и $-f \leq 0$. Поэтому каноническую задачу (2.2.67) — (2.2.68) можно сформулировать в форме следующей стандартной задачи линейного программирования.

Найти неотрицательный вектор $X=[x_1,x_2,...,x_n]$, максимизирующий целевую функцию

$z=CX$ (2.2.69)

при условиях:

$A_iX \le b_i, \quad i=1, 2,..., m;$ (2.2.70)

$-A_iX \le -b_i \quad i = 1,2,..., m.$ (2.2.71)

Двойственной к задаче (2.2.69) — (2.2.71) будет следующая задача.

Найти неотрицательные векторы $Y'=[y'_1, y'_2,..., y'_m]$ и $Y''=[y''_1, y''_2,..., y''_m]$, минимизирующие целевую функцию

$w = B(Y'-Y'')$ (2.2.72)

при условиях:

$A_j(Y'-Y'') \ge c_j, \quad j=1, 2,..., n,$ (2.2.73)

где $B=[b_1,b_2,...,b_m]$ — вектор ограничений задачи (2.2.67) — (2.2.68); $A_j=[a_{1j}a_{2j},...,a_{mj}]$ — векторы условий той же задачи.

Если обозначить разность векторов Y' - Y'' через $Y = [y_1, y_2,\dots, y_m]$ то координаты этого вектора $y_i = y_i' - y_i''$ могут иметь любой знак. Поэтому двойственная задача (2.2.72) — (2.2.73) эквивалентна следующей задаче.

Найти вектор $Y=[y_1, y_2,\dots,y_m]$ *без ограничения его координат* y_i *по знаку, который обращает в минимум целевую функцию*

$w = BY$ (2.2.74)

при условиях:

$A_jY \ge c_j, \quad j=1,2,..., n.$ (2.2.75)

Задача (2.2.74) - (2.2.75) называется *двойственной канонической задаче линейного программирования* (2.2.67) — (2.2.68).

Таким образом, мы видим, что задача, двойственная канонической задаче линейного программирования, является задачей с ограничениями-неравенствами (2.2.75), без ограничений переменных y_i по знаку. Поэтому прямую каноническую задачу линейного программирования и двойственную ей нельзя назвать взаимосопряженными.

Аналогично можно доказать, что для канонической задачи, также как и для стандартной задачи, имеет место следующий критерий оптимальности.

Для оптимальности допустимых решений $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ и $Y = [y_1, y_2, ..., y_m]$ *задач* (2.2.67) — (2.2.68) *и* (2.2.74) — (2.2.75) *необходимо и достаточно равенство их целевых функций* CX *и* BY *для этих решений.*

Справедливо также следующее утверждение, аналогичное теореме равновесия для взаимосопряженных стандартных задач.

Для оптимальности допустимых решений X и Y задач (2.2.67) — (2.2.68) *и* (2.2.74) — (2.2.76) *соответственно необходимо и достаточно, чтобы в столбцовых парах двойственных условий* $x_j \ge 0$, $A_jY \ge c_j$ *одно условие было равенством, как только другое — строгим неравенством.*

Теорема равновесия для канонической задачи линейного программирования и для задачи двойственной ей также может быть использована для проверки оптимальности предложенных решений.

<u>Пример</u>. Пусть дана задача — найти неотрицательные числа x_j, $j = 1,2,...,5$, максимизирующие целевую функцию

$z= -x_i - 5x_2 + 6x_3 - x_4 - 4x_5$ (2.2.76)

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 2x_4 + x_5 &= 22; \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 + x_5 &= 15. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.77)$$

Проверить, что допустимое решение

$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0$ (2.2.78)

является оптимальным решением данной задачи.

Обратим внимание на пары двойственных условий:

$$\left.\begin{aligned} 4y_1 + y_2 &\ge -1, & x_1 &\ge 0; \\ -4y_1 - 2y_2 &\ge -5, & x_2 &\ge 0; \\ 12y_1 + 8y_2 &\ge 6, & x_3 &\ge 0; \\ 2y_1 - y_2 &\ge -1, & x_4 &\ge 0; \\ y_1 + y_2 &\ge -4, & x_5 &\ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.79)$$

Поскольку в предполагаемом решении x_2 и x_3 положительны, из теоремы равновесия следует, что во второй и третьей парах двойственных условий (2.2.79) первые ограничения должны быть уравнениями.

Таким образом получаем простую систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4y_1 + 2y_2 &= 5; \\ 12y_1 + 8y_2 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим:

$y_1 = 7/2, \quad y_2 = -9/2.$ (2.2.80)

Подставляя это решение в первое, третье и четвертое ограничения-неравенства (2.2.79), найдем:

$4y_1 + y_2 = 4 \cdot 7/2 - 9/2 = 19/2 > -1;$

$2y_1 - y_2 = 2 \cdot 7/2 + 9/2 = 23/2 > -1;$

$y_1 + y_2 = 7/2 - 9/2 = -1 > -4.$

Итак, в каждой паре двойственных условий (2.2.79) одно условие является равенством, как только второе — строгим неравенством, Следовательно, указанные допустимые решения (2.2.78) и (2.2.80), соответственно прямой и двойственной задач, являются оптимальными.

Для окончательной проверки убедимся в совпадении целевых функций обеих задач.

Для прямой канонической задачи (2.2.76) — (2.2.77) имеем значение

$$z_{\max} = -5x_2 + 6x_3 = -5 \cdot 1/2 + 6 \cdot 2 = 19/2$$

и для двойственной задачи то же значение:

$w_{\min} = 22y_1 + 15y_2 = 22 \cdot 7/2 + 15(-9/2) = 19/2.$

Ниже мы увидим, что критерий оптимальности и теорема равновесия будут использованы для доказательства очень важной теоремы об опорных решениях канонической задачи линейного программирования.

2.2.3. Теорема об опорных решениях

Напомним, что каноническая задача линейного программирования состоит в отыскании неотрицательного вектора $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, который максимизирует (минимизирует) целевую функцию

$z = CX$ (2.2.81)

при условии

$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = B,$ (2.2.82)

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции (2.2.81);

$A_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]$ — векторы условий;
$B = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$ — вектор ограничений.

Будем считать, что ранг системы уравнений (2.2.82) равен числу уравнений, т. е. $n_r = m$ и что $n > m$. В таком случае совместная система (2.2.82) является неопределенной. Мы знаем, что неопределенная система линейных уравнений имеет конечное число базисных решений. Напомним, что всякое базисное решение связано с некоторым базисом векторов условий A_j. В базисном решении ненулевые значения неизвестных соответствуют некоторому линейно независимому набору векторов условий A_j.

Всякое неотрицательное базисное решение системы ограничений (2.2.82) канонической задачи линейного программирования называется *опорным решением,* или *опорным планом.*

Докажем следующую очень важную для линейного программирования теорему.

Теорема 4. (об опорных решениях). *Если каноническая задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то существует по крайней мере одно оптимальное опорное решение.*

П о я с н е н и е. Если каноническая задача линейного программирования имеет единственное решение, то это решение должно быть опорным решением. Если же задача линейного программирования имеет бесчисленное множество решений, то среди этих решений найдется хотя бы одно опорное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякое допустимое решение задачи (2.2.81) — (2.2.82) есть неотрицательный вектор $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, удовлетворяющий векторному соотношению (2.2.82). Пусть вектор $X' = [x'_1, x_2', \ldots, x'_s, 0, \ldots, 0]$ — оптимальное решение, в котором первые s координат $x'_1, x_2', \ldots, x'_s$ положительны, а остальные равны нулю. Далее, если вектор $Y^0 = \left[y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\right]$ какое-нибудь оптимальное решение двойственной задачи, то, по теореме равновесия, имеем

$$A_j Y^0 = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{2.2.83}$$

где A_j векторы условий задачи.

Если векторы условий $A_1, A_2, \ldots, A_s$, соответствующие положительным координатам $x'_1, x_2', \ldots, x'_s$ вектора X', независимы ($s \le m$), то вектор $X' = [x'_1, x_2', \ldots, x'_s, 0, \ldots, 0]$ уже будет определять опорное решение.

Предположим теперь, что векторы A_1, $A_2, \ldots, A_s$ линейно зависимы. Тогда существуют такие числа λ_j, не все равные нулю, что

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_s A_s = 0. \tag{2.2.84}$$

Мы можем при этом считать некоторые λ_K положительными (в противном случае достаточно умножить равенство (2.2.84) на -1).

Пусть число Θ = макс. λ_k / x'_k. Изменяя, если это нужно, нумерацию, мы можем считать $\Theta = \lambda_s / x'_s > 0$.

Так как вектор $X' = [x'_1, x_2', \ldots, x'_s, 0, \ldots, 0]$ является неотрицательным решением уравнения (2.2.82), то имеем тождественно

$$x'_1 A_1 + x'_2 A_2 + \ldots + x'_s A_s = B. \tag{2.2.85}$$

Умножая равенство (2.2.84) на число 1/Θ и вычитая его почленно из равенства (2.2.85), получаем

$$\left(x_1^{'} - \lambda_1 / \Theta\right)A_1 + \left(x_2^{'} - \lambda_2 / \Theta\right)A_2 + ... + \left(x_s^{'} - \lambda_s / \Theta\right)A_s = B. \qquad (2.2.86)$$

Но, по определению числа Θ, коэффициент при векторе A_s в равенстве (2.2.86) равен нулю, а все остальные неотрицательны.

Таким образом мы получили неотрицательное решение уравнения (2.2.82):

$x_1^{''} = x_1^{'} - \lambda_1 / \Theta, \quad x_2^{''} = x_2^{'} - \lambda_2 / \Theta, ...;$

$x_{s-1}^{''} = x_{s-1}^{'} - \lambda_{s-1} / \Theta, \quad x_s^{''} = 0, ..., x_n^{''} = 0,$

в котором положительные координаты соответствуют s – 1 векторам условий A_1, $A_2,\ldots,A_{s\text{-}1}$.

Таким же образом мы можем построить неотрицательное решение уравнения (2.2.82), в котором положительные координаты будут соответствовать s-2 векторам условий A_1, $A_2,\ldots,A_{s\text{-}2}$. Продолжая этот процесс, мы дойдем до неотрицательного решения уравнения (2.2.82) X^0=[x_1^0, x_2^0, . . ., $x_k^{'}$, 0, . . ., 0] в котором положительные координаты x_1^0, x_2^0, . . ., x_k^0 будут связаны с независимым набором векторов условий A_1, $A_2,\ldots,A_k$ ($k \le m$). Следовательно, допустимый вектор X^0 будет определять некоторое опорное решение.

Докажем, что опорное решение X^0=[x_1^0, x_2^0, . . ., $x_k^{'}$, 0, . . ., 0] является оптимальным.

Так как независимый набор векторов A_1, $A_2,\ldots,A_k$ является частью совокупности векторов A_1, $A_2,\ldots,A_k ,\ldots,A_s$, то для него выполнены условия (2.2.83), т. е.

$$A_1 Y^0 = c_1, \; A_2 Y^0 = c_2, ..., A_k Y^0 = c_k. \qquad (2.2.87)$$

Напишем для опорного решения X^0 значение целевой функции (2.2.81):

$$CX^0 = x_1^0 c_1 + x_2^0 c_2 + ... + x_k^0 c_k + 0 \cdot c_{k+1} + ... + 0 \cdot c_n .$$

Используя равенства (2.2.87), получим

$$CX^0 = (x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + ... + x_k^0 A_k) Y^0 .$$

Но так как вектор X^0 допустимое решение задачи, то

$x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + ... + x_k^0 A_k = B,$

следовательно

$CX^0=BY^0$.

Таким образом, для допустимых решений X^0 и Y^0 соответственно прямой и двойственной задач их целевые функции совпадают по величине, но тогда, по критерию оптимальности, опорное решение X^0 является оптимальным решением, и теорема доказана.

Значение теоремы об опорных решениях в линейном программировании очень велико. Она показывает, что оптимальное решение канонической задачи линейного программирования следует искать среди конечного числа допустимых решений, а именно среди опорных решений. Поэтому в принципе возможен следующий путь решения канонических задач линейного программирования. Вычислить все опорные решения системы уравнений (2.2.82). Затем подсчитать значение целевой функции (2.2.81) для каждого из опорных решений. Опорное решение, соответствующее наибольшему (или наименьшему) значению целевой функции будет оптимальным решением задачи. Однако при сколько-нибудь значительных величинах m и n намеченный путь решения может оказаться практически неприемлемым. Например, если допустить, что решение задачи при m=25 и n=50 осуществляется машиной с быстродействием 10^5 операций в секунду, то для определения оптимального решения понадобится примерно миллион лет.*

Однако, несмотря на практическую неприемлемость метода, основанного на просмотре всех опорных решений, сама идея анализа опорных решений оказывается плодотворной. Все конечные методы решения задач линейного программирования в той или иной мере связаны с перебором опорных решений. Но этот перебор осуществляется таким образом, что для решения задачи требуется просмотреть лишь относительно малую часть всех опорных решений. Это достигается за счет упорядоченности перебора, в том смысле, что каждый переход осуществляется к «лучшему» опорному решению, и наличия критерия, позволяющего установить оптимальность или неоптимальность каждого опорного решения. Каждому конечному методу линейного программирования соответствует свой метод упорядочения перебора и свой критерий окончания перебора.

2.2.4 Геометрическая интерпретация линейного программирования

Геометрический смысл простейших задач линейного программирования

Допустим, что в некоторой задаче линейного программирования, в которой требуется найти значения n неотрицательных переменных x, y, $x_3, x_4, \ldots, x_n$, максимизирующих (или минимизирующих) целевую функцию

$$z = c_1 x + c_2 y_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n, \tag{2.2.88}$$

в системе ее ограничений содержится n-2 уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2,1}x + a_{n-2,2}y + a_{n-2,3}x_3 + \ldots + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}. \end{array}\right\} \tag{2.2.89}$$

Предположим, что система линейных уравнений (2.2.89) разрешима относительно переменных $x_3, x_4, \ldots, x_n$ при любых допустимых значениях x и y. Тогда переменные $x_3, x_4, \ldots, x_n$ могут быть выражены линейно через две переменные – x и y, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \gamma_{31}x + \gamma_{32}y + \gamma_{33}; \\ x_4 = \gamma_{41}x + \gamma_{42}y + \gamma_{43}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_{n1}x + \gamma_{n2}y + \gamma_{n3}. \end{array}\right\} \tag{2.2.90}$$

Подставляя выражения (2.2.90) вместо переменных, $x_3, x_4, \ldots, x_n$ в ограничения-неравенства (если таковые в задаче содержатся) и в условия неотрицательности переменных

$$x_3 \ge 0;\ \ x_4 \ge 0; \ldots; x_n \ge 0, \tag{2.2.91}$$

а также в целевую функцию (2.2.88), получим задачу линейного программирования с двумя переменными – x и y, система условий которой состоит только из ограничений-неравенств.

---

* Пример заимствован из книжки Д.Б.Юдина и Е.Г.Гольштейна «Задачи и методы линейного программирования» «Советское радио», 1964.

Итак, некоторые задачи линейного программирования, содержащие $n>2$ переменных, могут быть приведены к соответствующим задачам с двумя переменными x и y следующего вида.

Требуется найти числа x и y, обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию

$$z=c_1x + c_2y \tag{2.2.92}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x + a_{12}y \le b_1;\\ &a_{21}x + a_{22}y \le b_2;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m;\end{aligned}\right\} \tag{2.2.93}$$

$$x \ge 0; \quad y \ge 0. \tag{2.2.94}$$

Для задачи типа (2.2.92) - (2.2.94) можно дать простую геометрическую интерпретацию и географический способ ее решения.

Для получения оптимального решения исходной задачи с n переменными x, y, $x_3,x_4,\ldots,x_n$, которая приводится к задаче (2.2.92) – (2.2.94), надо подставить оптимальные значения x и y в выражения (2.2.90), и мы получим оптимальные значения остальных переменных $x_3,x_4,\ldots,x_n$.

Выясним геометрический смысл неравенства

$$a_1x + a_2y \le b. \tag{2.2.95}$$

Решая это неравенство относительно y, получим

$$y \le -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}, \quad \text{если} \quad a_2 > 0,$$

$$y \ge -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}, \quad \text{если} \quad a_2 < 0.$$

В случае точного равенства имеем уравнение

$$y = -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}. \tag{2.2.96}$$

Уравнению (2.2.96) удовлетворяют координаты, любой точки некоторой прямой (рис.2.2.1). Данная прямая линия разбивает плоскость на две полуплоскости: 1 и 2. Координаты точек нижней полуплоскости 1 удовлетворяют, очевидно, неравенству

$$y < -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2},$$

а координаты точек верхней полуплоскости 2 – неравенству

$$y > -\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b}{a_2}.$$

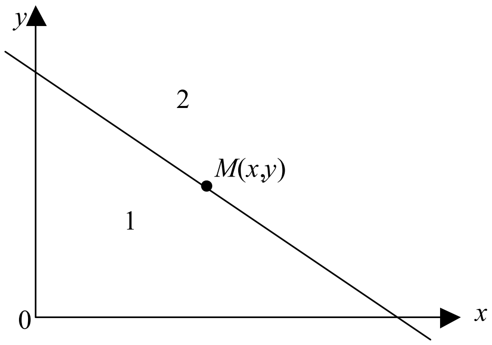


Рис.2.2.1

Итак, мы установили, что неравенство (2.2.95) определяет область, состоящую из точек нижней полуплоскости, границей которой служит прямая

$a_1x + a_2y = b,$

если коэффициент a_2 при неизвестном y положительный, и область, состоящую из точек верхней полуплоскости, с той же границей, в случае $a_2<0$.

Нетрудно себе представить, что совместная (непротиворечивая) система (2.2.93) нескольких неравенств вида (2.2.95) определяет на плоскости область, которая является общей частью всех полуплоскостей, каждая из которых определяется отдельным неравенством из системы. Эта область может быть ограниченной в виде многоугольника (рис.2.2.2), или неограниченной (рис.2.2.3). В частности, простейшая система неравенств (2.2.94) определяет неограниченную область, а именно, первый квадрант координатной плоскости.

Область, определяемая данной системой неравенств, обладает тем свойством, что только координаты точек этой области (включая и граничные точки) удовлетворяют каждому неравенству из системы. Кроме того, эта область является такой, что если какие-либо две точки принадлежат области, то и весь отрезок, соединяющий их, принадлежит этой области (такие области называют *выпуклыми*).

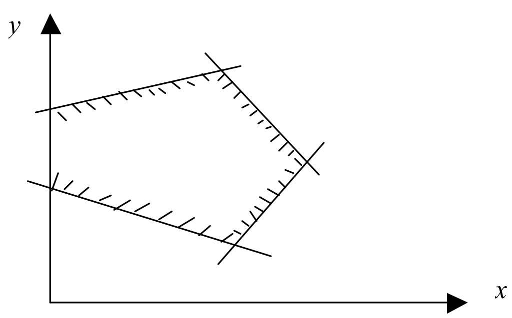


Рис.2.2.2

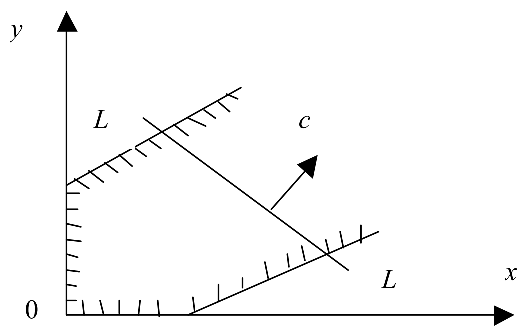


Рис.2.2.3

Теперь перейдем к графическому изображению целевой функции (2.2.92)

$z=c_1x+c_2y.$

Уравнение(2.2.92) при фиксированном значении z определяет прямую, а при изменении z – семейство параллельных прямых с параметром z. Для всех точек, лежащих на одной из прямых, функция z принимает одно определенное значение, поэтому указанные прямые называются *линиями уровня* для функции (2.2.92). Направление возрастания параметра z показывает вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$, перпендикулярный ко всем линиям уровня функции z. Так, на рис.2.2.4 показаны линии уровня функции z=x+2y при z=0;3;6;9.

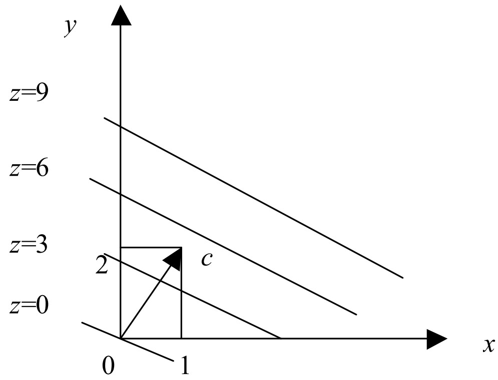


Рис.2.2.4

Область, определяемую системой ограничений задачи линейного программирования, будем называть *ограничительной областью*. Целевая функция (2.2.92), очевидно, будет определенной только для тех линий уровня, которые имеют хотя бы одну общую точку с ограничительной областью. Такие линии уровня будем называть *допустимыми линиями* уровня.

Решать задачу линейного программирования на максимум (или минимум) геометрически означает найти допустимую линию уровня, отвечающую наибольшему (или наименьшему) значению параметра z. Такую линию уровня будем называть *опорной*. Координаты точки соприкосновения опорной линии уровня с ограничительной областью определяют оптимальный план. Случай неединственности решения мы пока опускаем.

На рис.2.2.5 показана ограничительная область некоторой задачи линейного программирования в виде выпуклого четырехугольника. Прямая L на рис.2.2.5 – допустимая линия уровня, отвечающая произвольному допустимому значению параметра z. Параллельные линии L' и L'', проходящие соответственно через вершины M и N ограничительного многоугольника, по определению являются опорными линиями. Координаты вершины M дают решение задачи на максимум. Эти координаты представляют собой значения переменных x и y, удовлетворяющие ограничениям данной задачи и максимизирующие целевую функцию.

Аналогично убеждаемся, что координаты точки N дают решение задачи на минимум целевой функции, при тех же условиях.

В математическом анализе различаются так называемые *локальные и глобальные экстремумы*.

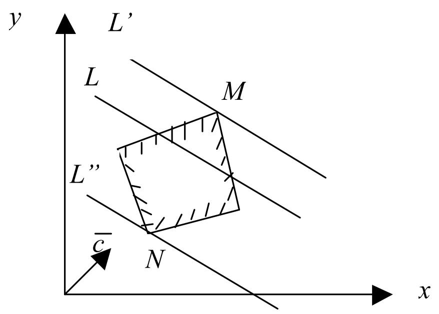


Рис.2.2.5

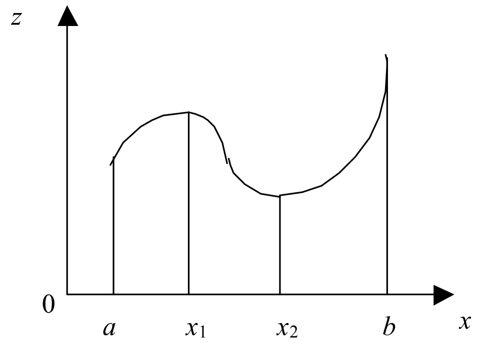


Рис.2.2.6

Локальный экстремум функции есть экстремальное ее значение по сравнению со значениями в сколь угодно малой окрестности данной точки. Глобальный экстремум – это наибольшее или наименьшее значение функции в данный области. Так, например, функция одной переменной $z=f(x)$, заданной в замкнутом интервале $[a,b]$ (рис.2.2.6), достигает локального максимума в точке x_1 и минимума в точке x_2, и глобального экстремума (наибольшего значения) в граничной точке b. Локальный экстремум (минимум) в точке x_2 одновременно является и глобальным экстемумом (наименьшим значением) функции в интервале $[a,b]$. Для линейной функции локальных экстремумов не существует, но всегда существуют глобальные экстремумы, которые достигаются только на границе области. Поэтому в линейном программировании принято называть наибольшее значение функции максимумом, а наименьшее – минимумом.

В качестве примера найдем графическим методом решение конкретной задачи.

Требуется найти максимум целевой функции

$$z = 4x + 6y, \qquad (2.2.97)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x + \ \ 2y &\le 70 \\ 17x + 40y &\le 1360, \\ 10x + \ \ 9y &\le 480; \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.98)$$

$$x \ge 0; \quad y \ge 0. \qquad (2.2.99)$$

Условия (2.2.99) указывают, что ограничительная область лежит справа от оси ординат и выше оси абсцисс, т.е. определяют первый квадрант координатной плоскости.

Строим прямые линии на плоскости $x0y$ (рис.2.2.7) по уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad x + \ \ 2y = 70; \\ &\text{II.} \ 17x + 40y = 1360; \\ &\text{III.} 10x + \ \ 9y = 480. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.100)$$

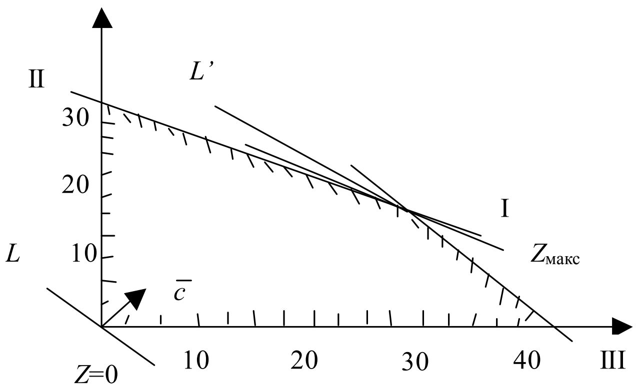


Рис.2.2.7

Так как в соответствующих ограничениях (2.2.98) коэффициенты при переменной y положительные, то каждое из этих неравенств определяет нижнюю полуплоскость с граничной прямой, имеющей соответствующее уравнение (2.2.100). Направление полуплоскостей в общей их части показывается на рисунке штриховкой, тем самым выделяется ограничительная область в виде выпуклого пятиугольника.

Строим на плоскости $x0y$ прямую линию уровня L функции (2.2.97) при некотором фиксированном значении параметра z, например при z=0, по уравнению $4x+6y=0$. Строим вектор $\overline{c}$ = (4,6), указывающий направление возрастания целевой функции. Проводим допустимую линию уровня L' (параллельную линии L) с наибольшим значением параметра z, т.е. наиболее удаленную в направлении вектора $\overline{c}$ допустимую линию уровня. Опорная прямая L' проходит через точку M пересечения прямых I и III. Следовательно, координаты точки M должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 70; \\ 10x + 9y &= 480. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.101)$$

Решение x=30 и y=20 системы (2.2.101) дает оптимальное решение задачи (2.2.97)-(2.2.99), при этом $z_{мах}$=240.

В рассмотренном примере задача линейного программирования имеет единственное решение. Возможны случаи, когда задача линейного программирования не имеет решения или имеет бесчисленное множество различных оптимальных решений, при этом, конечно, каждое из них дает одно и то же экстремальное значение целевой функции.

Задача линейного программирования на максимум не имеет решения, если ограничительная область не ограничена сверху (см.рис.2.2.3). Аналогично задача линейного программирования на минимум не имеет решения, если ограничительная область не ограничена снизу.

Наконец, задача линейного программирования не имеет решения в случае несовместности ее системы условий. Так, например, система неравенств

$$\left.\begin{aligned} &x + y \le 1; \\ &x - y \le -3; \\ &x \ge 0;\ y \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.102)$$

несовместима (противоречива), т.е. не имеет ни одного решения (ограничительная область пустая). Действительно, складывая почленно первые два неравенства системы (2.2.102), получим $2x\le-2$ или $x\le-1$, а это неравенство противоречит третьему неравенству ($x\ge0$) в системе (2.2.102).

Задача линейного программирования имеет бесчисленное множество решений, если опорная линия уровня, соответствующая искомому экстремуму целевой функции, совпадает с одной из сторон ограничительного многоугольника. Так, например, на рис.2.2.8 максимум достигается в двух вершинах M и N, а следовательно и в любой точке отрезка MN. Произошло это потому, что все линии уровня функции z параллельны стороне MN ограничительного многоугольника. В подобных случаях говорят, что задача имеет *альтернативное* оптимальное решение. В этом случае имеется свобода выбора оптимального решения; в качестве оптимального решения можно принять координаты любой точки отрезка *MN,* так как при этом мы будем иметь одно и то же максимальное значение целевой функции.

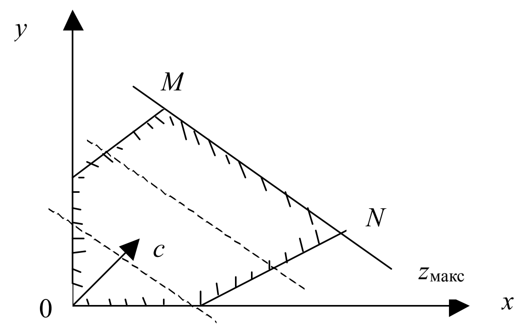


Рис.2.2.8

Аналогичную наглядность можно придать задаче линейного программирования с тремя переменными. Здесь ограничительная область изображается в виде некоторого выпуклого многоугольника или в виде выпуклой незамкнутой многогранной области. Поверхность уровня целевой функции представляется плоскостью. Поверхность уровня, соответствующая экстремальному значению целевой функции, проходит (в случае единственного решения) через одну из вершин многогранника. Координаты этой вершины определяют оптимальное решение.

В исключительно редких случаях можно свести задачу линейного программирования к задаче с двумя переменными и решить ее графическим методом. Классические методы математического анализа для решения задачи линейного программирования не применимы, так как эти методы дают возможность определить только локальные экстремумы функции внутри области, которые в задачах линейного программирования отсутствуют. Выше было замечено, что в задачах линейного программирования оптимизируемая целевая функция может иметь только глобальные экстремумы, которые заведомо достигаются на границе области, определяемой посредством системы линейных неравенств. Задачу линейного программирования можно условно разделить на две части: определение ограничительной области и нахождение в этой области оптимального решения. Так как ограничительная область задается системой линейных уравнений и неравенств, то прежде всего следует обратиться к разделу высшей алгебры, именуемому линейной алгеброй. Основам линейной алгебры, используемым для решения задач линейного программирования, посвящена первая часть главы. Заметим, что аппарат линейной алгебры применяется в экономико-математических исследованиях не только в связи с задачами линейного программирования. Этот аппарат, например, применяется в балансовых расчетах и при обработке статистических данных по методу наименьших квадратов.

Выше подробно изложен геометрический смысл задачи линейного программирования с двумя переменными. Здесь мы рассмотрим геометрическое истолкование задачи линейного программирования с тремя и более переменными. Случай трех переменных является не менее наглядным, чем случай двух переменных. Случай же четырех и более переменных может представляться геометрически лишь абстрактно в n-мерном пространстве, где по аналогии с обычным трехмерным пространством рассматриваются свойства некоторых геометрических образов. Знакомство с геометрической стороной линейного программирования является полезным, так как это позволяет наглядно представить истинный смысл задачи, а также понять причины возможных осложнений при решении задачи.

Геометрический смысл системы линейных неравенств, с тремя переменными

Пусть дана система линейных неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \le b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.103)$$

с тремя независимыми переменными x_1, x_2, x_3.

Будем представлять переменные x_1, x_2, x_3 как координаты точки P в прямоугольной системе координат в пространстве. Спрашивается, какую область в пространстве образует совокупность точек P (x_1, x_2, x_3), координаты которых удовлетворяют всем неравенствам (2.2.103).

Сначала решим этот вопрос для одного неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b. \qquad (2.2.104)$$

Рассмотрим плоскость, определяемую уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b. \qquad (2.2.105)$$

Эта плоскость разбивает все пространство на два полупространства, причем координаты точек одного из них и координаты точек граничной плоскости (2.2.105) удовлетворяют неравенству (2.2.104).

Система неравенств (2.2.103) определяет общую часть (пересечение) m полупространств, каждое из которых определяется одним из неравенств системы.

Область (тело) называется *выпуклой* (выпуклым), если все точки отрезка, соединяющего любые две точки этой области, также принадлежат этой области. Примерами выпуклых тел могут служить куб, тетраэдр, цилиндр, конус, шар и т. д.

Область (полупространство), определяемая одним неравенством (2.2.104), очевидно, является выпуклой. Покажем, что область, определяемая системой неравенств (2.2.103), также является выпуклой. Пусть $P_1(x_1', x_2', x_3')$ и $P_2(x_1'', x_2'', x_3'')$ — две произвольные точки области M. Из аналитической геометрии в пространстве известно, что координаты любой точки P (x_1, x_2, x_3), лежащей на отрезке P_1P_2, могут быть определены через координаты концов отрезка по формулам:

$$x_1 = (1-\lambda)x_1^{'} + \lambda x_1^{''};$$

$$x_2 = (1-\lambda)x_2^{'} + \lambda x_2^{''}; \qquad (2.2.106)$$

$$x_3 = (1-\lambda)x_3^{'} + \lambda x_3^{''},$$

где параметр λ удовлетворяет условию $0 \le \lambda \le 1$.

Координатные равенства (2.2.106) можно записать в виде одного векторного равенства

$$X=(1-\lambda)X' + \lambda X'', \quad 0\le\lambda\le 1, \qquad (2.2.107)$$

где X', X'' , X — радиусы-векторы точек P_1, P_2, P. Каждому значению параметра λ в интервале (0, 1) соответствует одна и только одна точка отрезка P_1P_2.

При изменении параметра от 0 до 1 точка P пробегает весь отрезок P_1P_2, от точки P_1 до точки P_2. В дальнейшем радиусы-векторы

$$X = [x_1, x_2, x_3],\ X' = [x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}],\ X'' = [x_1^{''}, x_2^{''}, x_3^{''}]$$

будем рассматривать как точки пространства, координаты которых совпадают с компонентами векторов.

Точка X, определяемая соотношением (2.2.107), называется *выпуклой комбинацией* точек X_1 и X_2. Систему неравенств (2.2.103) можно записать в следующем векторном виде:

$$A^i X_1 \le b_1,\ i = 1,2,...,m, \qquad (2.2.108)$$

где $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ — строки матрицы системы неравенств (2.2.103): $A=\|a_{ij}\|_{m\times 3}$.

Пусть точки X_1 и X_2 принадлежат области M, определяемой системой неравенств (2.2.108), тогда

$$A^iX_1\le b_i \quad i= 1, 2,..., m; \qquad (2.2.109)$$

$$A^iX_2\le b_i \quad i= 1, 2,..., m. \qquad (2.2.110)$$

Умножая неравенства (2.2.109) и (2.2.110) соответственно на неотрицательные числа 1 - λ и λ и затем почленно их складывая, получим

$$A^i[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2] \le b_i.$$

или, учитывая равенство (2.2.107),

$$A^iX\le b_i. \qquad (2.2.111)$$

Таким образом, точка X, являющаяся выпуклой комбинацией точек X_1 и X_2, принадлежащих области M, также принадлежит области M. Отсюда следует, что область, определяемая системой неравенств (2.2.103), является выпуклой. Если все точки области M находятся на конечном расстоянии от начала координат, то область M представляет собой *выпуклый многогранник*. Область M может быть в некоторых направлениях неограниченной, тогда она называется *выпуклой многогранной областью*. Возможен случай, когда не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы всем неравенствам (2.2.103) (система противоречива), тогда говорят, что область M пуста.

Вершинами выпуклого многогранника или выпуклой многогранной области называются те граничные точки, которые не могут быть внутренними точками любого отрезка, принадлежащего к области. Вершины — это точки пересечения плоских граней области M.

Геометрический смысл системы линейных неравенств с *n* переменными

Сначала приведем некоторые определения из геометрии n-мерного пространства, n-мерный вектор $X = [x_1, x_2, . . ., x_n]$ будем понимать как точку в n-мерном пространстве.

Расстояние $|X-Y|$ между двумя точками $X = [x_1, x_2,...,x_n]$ и $Y=[y_1, y_2,\dots,y_n]$ определяется следующим образом:

$$|X-0| = \left[\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right]^{1/2}. \qquad (2.2.112)$$

Это определение расстояния является обобщением определения расстояния в двух и трехмерном пространствах.

Длиной, или *абсолютной величиной* $|X|$, вектора $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется расстояние от начала координат, определяемого нулевым вектором 0=(0, 0, ... 0), до точки X:

$$|X| = |X-0| = \left[\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right]^{1/2}. \qquad (2.2.113)$$

Совокупность всех n-мерных векторов $X = [x_1, x_2,...,x_n]$ вместе с расстоянием, определенным выражением (2.2.112), называется *n-мерным евклидовым пространством* и обозначается символом E^n.

В обычном трехмерном пространстве прямая может быть задана с помощью векторного уравнения

$X=A + \lambda B$, (2.2.114)

где A и B — радиусы-векторы, разность которых A — B определяет направление прямой.

Точка X пробегает всю прямую при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$.

По аналогии с этим под «прямой» в n-мерном пространстве понимается совокупность точек $X = [x_1, x_2,...,x_n]$, удовлетворяющих векторному уравнению вида (2.2.114), где A и B — заданные n-мерные векторы.

Векторное уравнение (2.2.114) можно преобразовать следующим образом:

$X=(A-\lambda A) + (\lambda A + \lambda B) = (1-\lambda)A + \lambda (A+B)$. (2.2.115)

Точку A обозначим через X_1, *а* точку $A + B$ через X_2. Тогда уравнение прямой (2.2.115) будет иметь следующий вид:

$X=(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$. (2.2.116)

Если ограничить пределы изменения параметра неравенствами $0\le\lambda\le1$, то множество точек (2.2.116) называется *отрезком,* соединяющим точки X_1 и X_2. Точка X отрезка X_1X_2, определяемая равенством (2.2.116) при $0\le\lambda\le1$, так же как и в трехмерном случае, называется *выпуклой комбинацией* точек X_1 *и* X_2. Точки X_1 и X_2, отвечающие значениям $\lambda = 0$ и $\lambda= 1$, называются *концами отрезка.* Точки X, отвечающие значению параметра, удовлетворяющему строгим неравенствам $0\le\lambda\le1$, называются *внутренними точками* отрезка.

Обобщением понятия плоскости в обычном пространстве, задаваемой уравнением первой степени

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b,$

является так называемая *гиперплоскость* в n-мерном пространстве.

Гиперплоскость в n-мерном пространстве определяется как множество $X = [x_1, x_2,...,x_n]$, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени

$a_1x_2 + a_2x_2+ \dots +a_nx_n = b$. (2.2.117)

Вектор коэффициентов $A=(a_1, a_2,..., a_n)$ уравнения гиперплоскости (2.2.117) называется *нормалью* к гиперплоскости.

Уравнение гиперплоскости (2.2.117) можно записать в виде

$AX=b$. (2.2.118)

Гиперплоскость (2.2.118) разбивает все пространство E^n на два полупространства, и для одного из них

$AX\le b$. (2.2.119)

Неравенство (2.2.119) определяет так называемое *замкнутое полупространство,* границей которого является гиперплоскость (2.2.118).

Множество точек в n-мерном пространстве называется *выпуклым,* если оно содержит любую выпуклую комбинацию $X = (1 - \lambda) X_1 + \lambda X_2$, $0 \le \lambda \le 1$ любой пары точек X_1 и X_2 из этого множества. Таким образом, выпуклое множество содержит отрезок, соединяющий любые две точки из этого множества.

Замкнутое n-мерное полупространство, также как и обычное трехмерное полупространство, является выпуклым. Действительно, пусть X_1 и X_2 — две произвольные точки полупространства, определяемого неравенством (2.2.119), тогда

$$AX_1 \le b, \qquad AX_2 \le b.$$

Умножим первое неравенство на неотрицательное число $1 - \lambda$ и второе на λ $(0 \le \lambda \le 1)$ и затем полученные неравенства почленно сложим, в результате получим

$$A\left[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2\right] \le b.$$

Это означает, что выпуклая комбинация $X = (1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2$, $0 \le \lambda \le 1$ принадлежит тому же полупространству. Это и доказывает его выпуклость.

Пусть дана система m линейных неравенств с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{array}\right\} \qquad (2.2.120)$$

которую можно записать кратко в виде

$$A^i X \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (2.2.121)$$

где $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ — строки матрицы системы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$; $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — переменный вектор.

Каждое из этих неравенств (2.2.121) определяет некоторое замкнутое полупространство пространства E^n, а все неравенства совместно — некоторую область в n-мерном пространстве. Точно так же, как в предыдущем параграфе, для трехмерного пространства можно доказать, что эта область является выпуклой. Она, по аналогии с трехмерным пространством, называется *выпуклым многогранником,* если для всех ее точек выполняется неравенство $|X| < C$, где C — положительное число.

Если не существует положительного числа C, при котором бы выполнялось неравенство $|X| < C$, для всех точек области, то область называется *выпуклой многогранной областью.* Если система (2.2.120) несовместна, то говорят, что определяемая ею область пуста.

Геометрический смысл опорных решений

По аналогии с определением вершины выпуклого многогранника (многогранной области) в трехмерном пространстве определяется понятие вершины в n-мерном пространстве. Вершину выпуклого многогранника (многогранной области) в n-мерном пространстве можно охарактеризовать как точку многогранника, которая не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком принадлежащего данному многограннику. Примем следующее определение вершины: точка X, принадлежащая выпуклому многограннику (многогранной области), называется его *вершиной,* если в этой области не существует двух различных точек X_1 и X_2, для которых точка X являлась бы выпуклой комбинацией $X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$ при $0 < \lambda < 1$.

Область, определяемая системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.122)$$

и условиями неотрицательности переменных

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \qquad (2.2.123)$$

определяет выпуклую многогранную область или выпуклый многогранник. Действительно, каждое i-е уравнение в системе (2.2.122) можно заменить равносильной системой, состоящей из двух неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i; \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, система m уравнений (2.2.122) и система неравенств (2.2.123) равносильны системе $2m + n$ линейных неравенств и, следовательно, определяют выпуклую многогранную область или выпуклый многогранник.

Докажем следующую теорему.

Теорема (о соответствии вершин опорным решениям). *Опорное решение X системы уравнений*

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = B \qquad (2.2.124)$$

является одной из вершин области, определяемой системой (2.2.124) *и условиями неотрицательности неизвестных $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и, наоборот, каждая вершина указанной области есть некоторое опорное решение системы* (2.2.124).

Доказательство. Предполагаем, что ранг системы (2.2.124) равен числу m уравнений системы. Пусть точка $X^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, 0, 0, \ldots, 0\right]$ некоторое опорное решение, связанное с независимой группой векторов условий A_1, A_2, ..., A_k. Тогда имеем тождество

$$x_1^0A_1 + x_2^0A_2 + \ldots + x_k^0A_k = B. \qquad (2.2.125)$$

Допустим противное, что точка X^0 не является вершиной выпуклой области M, определяемой системой (2.2.124) и условиями неотрицательности неизвестных. Тогда существуют различные точки $X_1 = \left[x_1', x_2', \ldots, x_n'\right]$ и $X_2 = \left[x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right]$, принадлежащие области M, такие, что

$$X^0 = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2, \quad 0 < \lambda < 1,$$

или в координатах:

$$x_j^0 = (1-\lambda)x_j' + \lambda x_j'', \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < \lambda < 1.$$

При $j>k$, $x_j^0 = 0$, но тогда и $x_j' = x_j'' = 0$ при $j>k$, поскольку $\lambda>0$ и $1-\lambda>0$.

Условия принадлежности точек X_1 и X_2 области M принимают теперь вид:

$$x_1'A_1 + x_2'A_2 + \ldots + x_k'A_k = B;$$

$$x_1''A_1 + x_2''A_2 + \ldots + x_k''A_k = B.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получим

$$(x_1'' - x_1')A_1 + (x_2'' - x_2')A_2 + \ldots + (x_k'' - x_k')A_k = 0.$$

Здесь по крайней мере один коэффициент $x_j'' - x_j'$ отличен от нуля, так как точки X_1 и X_2 различны. Отсюда следует, что векторы A_1, A_2, . . .,A_k линейно зависимы вопреки условию. Полученное противоречие показывает, что опорное решение системы (2.2.124) является вершиной области M.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть точка X^0 = $\left[x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right]$ является вершиной области *M*. Допустим противное, что точка X^0 не является одним из опорных решений системы (2.2.124). Тогда, изменяя, если это нужно, нумерацию неизвестных, можно считать, что первые $k \le m$ положительных координат $\left[x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0\right]$точки X^0 будут связаны с линейно зависимым набором векторов A_1, A_2,…, A_k, и поэтому существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k = 0. \qquad (2.2.126)$$

Так как точка X^0 принадлежит области *M*, то имеем тождество (2.2.125).

Умножая равенство (2.2.126) на произвольное число *t* и складывая его почленно с равенством (2.2.125), получим

$$\left(x_1^0 + t\lambda_1\right)A_1 + \left(x_2^0 + t\lambda_2\right)A_2 + ... + \left(x_k^0 + t\lambda_k\right)A_k = B.$$

Так как числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0$ положительны, то и числа

$$x_1^0 + t\lambda_1,\ \ x_2^0 + t\lambda_2, ..., x_k^0 + t\lambda_k$$

при достаточно малом *t* положительны.

Взяв два таких значения *t*, отличающихся друг от друга знаками, $t = \varepsilon$ и $t = -\varepsilon$, получим две точки:

$$X_1 = \left[x_1^0 + \varepsilon\lambda_1,\ x_2^0 + \varepsilon\lambda_2, ..., x_k^0 + \varepsilon\lambda_k, 0, 0, ..., 0\right];$$

$$X_2 = \left[x_1^0 - \varepsilon\lambda_1,\ x_2^0 - \varepsilon\lambda_2, ..., x_k^0 - \varepsilon\lambda_k, 0, 0, ..., 0\right],$$

принадлежащие области *M*, для которых точка X^0 является выпуклой комбинацией:

$$X^0 = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \quad \text{при } \lambda = 1/2,$$

т. е. не является вершиной области *M*.

Полученное противоречие показывает, что любая вершина области *M* должна являться одним из опорных решений системы (2.2.124). Теорема полностью доказана.

Геометрический смысл задачи линейного программирования

Было показано, что всякая разрешимая задача линейного программирования может быть представлена в эквивалентной стандартной форме. В начале обратимся к стандартной задаче максимизации целевой функции с тремя переменными:

$$z = cx_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \qquad (2.2.127)$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{23}x_3 \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{m3}x_3 \le b_m, \end{array}\right\} \qquad (2.2.128)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0. \qquad (2.2.129)$$

Система неравенств (2.2.128)—(2.2.129) определяет в прямоугольной системе координат 0 x_1, x_2, x_3 некоторый выпуклый многогранник *M* (рассматривается случай ограниченной области). Неравенства (2.2.129) показывают, что эта область *M* расположена в первом октанте.

Рассмотрим далее целевую функцию (2.2.127). При каждом фиксированном значении параметра $z = a$ уравнение (2.2.127) определяет в пространстве некоторую плоскость, которая называется *плоскостью уровня* целевой функции (2.2.127). Совокупность всех плоскостей уровня образует семейство параллельных плоскостей, перпендикулярных к нормальному вектору $C=(c_1, c_2, c_3)$, который указывает направление наиболее интенсивного возрастания целевой функции. В направлении вектора $C=(c_1, c_2, c_3)$ целевая функция (2.2.127) возрастает равномерно. Будем называть плоскость уровня целевой функции *допустимой,* если она имеет хотя бы одну общую точку с выпуклым многогранником M, определяемым условиями задачи. Выпуклым многогранником M определяется область определения целевой функции. Допустимую плоскость уровня, отвечающую наибольшему значению целевой функции $z = z_{\text{мах}}$, будем называть *опорной плоскостью уровня.* Ясно, что вследствие монотонного возрастания целевой функции в направлении нормального вектора C выпуклый многогранник будет всегда расположен по одну сторону от опорной плоскости, а именно — в сторону, противоположную направлению вектора C. Поэтому опорная плоскость может проходить либо через одну из вершин, либо через ребро или грань выпуклого многогранника. В первом случае мы имеем единственное оптимальное решение (вершину), которое является опорным, во втором случае мы имеем бесчисленное множество оптимальных решений (каждая точка ребра или грани — оптимальное решение), среди которых имеется не менее чем два опорных решения (вершины, являющиеся концами ребра, или угловыми точками грани).

Если задача линейного программирования (2.2.127)—(2.2.128) не имеет решения, то это геометрически означает, что область, определяемая условиями задачи (2.2.127) — (2.2.128), либо пуста (система противоречива), либо представляет выпуклую многогранную область, не ограниченную в направлении нормального вектора $C=(\text{c}_1, c_2, c_3)$.

Геометрический смысл задачи минимизации аналогичен геометрической интерпретации задачи максимизации, с той лишь разницей, что выпуклый многогранник M располагается по одну сторону от опорной плоскости, вместе с нормальным вектором $C=(c_1, c_2, c_3)$.

Рассмотрим теперь задачу линейного программирования с $n>3$ переменными $x_1, x_2,...,x_n$. Формулировка задачи остается прежней. Требуется найти неотрицательный вектор $X = [x_1, x_2,\dots, x_n]$, максимизирующий целевую функцию

$$z = CX \tag{2.2.130}$$

при условиях:

$$A^iX = b_i, \quad i=1, 2,..., m, \tag{2.2.131}$$

где n-мерные векторы C, A^i и числа b_i являются заданными постоянными.

В этом случае все построения теряют реальную наглядность, так как они представляются абстрактно в n-мерном пространстве. Однако, по аналогии с трехмерным пространством, геометрическая интерпретация задачи (2.2.130)—(2.2.131) остается той же самой, что и в трехмерном случае. Единственное различие будет состоять в том, что слово «плоскость» заменяется на «гиперплоскость».

В (2.2.3) была доказана важная теорема об опорных решениях: *если каноническая задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то существует по крайней мере одно оптимальное опорное решение.*

Учитывая геометрический смысл опорного решения как некоторой вершины выпуклого многогранника M, мы можем утверждение этой теоремы осмыслить следующим образом: *если существуют точки области M, в которых целевая функция* (2.2.130) *достигает своего наибольшего значения $z = z_{\text{мах}}$, то это $z_{\text{мах}}$ достигается по крайней мере в одной из вершин области M.*

Мы знаем, что при решении задачи симплексным методом каждая таблица отвечает некоторому опорному решению, т. е. некоторой вершине области M. Переход от одной симплексной таблицы к другой геометрически означает переход от данной вершины к одной из соседних вершин (в случае невырожденности задачи), через которую проходит гиперплоскость уровня целевой функции с большим значением параметра z.

Такой переход осуществляется до тех пор, пока гиперплоскость уровня целевой функции, проходящая через одну из вершин выпуклого многогранника M (или через несколько вершин, в случае не единственности решения), не окажется опорной гиперплоскостью уровня.

При решении задачи линейного программирования симплексным методом мы как бы перемещаемся от некоторой вершины области M к оптимальной вершине этой области по «кратчайшему пути».

Глава 3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Симплексный метод разработал американский ученый Дж.Б.Данциг в 1947 г. и впервые опубликовал его в журнале «Эконометрика» во второй половине 1949 г., т.е. ровно через 10 лет после выхода в свет первой работы в области линейного программирования советского ученого Л. В. Канторовича, в которой был изложен *метод разрешающих множителей.*

Эти два метода в основе своей схожи, однако симплексный метод был разработан независимо от метода разрешающих множителей.

Название метода произошло от названия геометрической фигуры, уравнение которой было использовано Дж. Б. Данцигом в одном из доказательств.

Идея метода содержит три существенных момента. Во-первых, указывается способ вычисления исходной программы (опорного плана). Во-вторых, устанавливается признак, позволяющий проверять выбранную программу на оптимальность. И, в-третьих, приводится способ, позволяющий по выбранной неоптимальной программе построить другую программу, более близкую к оптимальной. Таким образом, выполнив конечное число повторяющихся математических вычислений (итераций), можно получить оптимальную программу (план). Исходя из этого, в целом ряде книг этот метод называют *методом последовательного улучшения плана.*

3.1. Основной алгоритм симплексного метода

К настоящему времени разработано и усовершенствовано несколько алгоритмов симплексного метода. Сначала здесь нами рассматривается решение задачи с помощью основного алгоритма симплексного метода.

Рассмотрим применение основного алгоритма симплексного метода на примере задачи, которая нами была изложена и математически сформулирована в 1.2.

В результате проведенных преобразований была получена математическая модель задачи, заключающаяся в максимизации целевой функции $F=3x_1+4x_2+6x_3+0{\cdot}x_4+0{\cdot}x_5+0{\cdot}x_6+0{\cdot}x_7$, при ограничениях, представляющихся в виде системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4 &= 1500,\\ x_1+4x_2+2x_3+x_5 &= 1000,\\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_6 &= 1800,\\ 4x_1+2x_2+5x_3+x_7 &= 2200 \end{aligned}\right\} \text{ и при условии } x_j \geq 0 \quad j=1,2,\ldots,7.$$

Далее перепишем значение целевой функции и ограничительные линейные уравнения еще раз. При этом, во-первых, поменяем местами левые и правые части уравнений. Во-вторых, в каждом уравнении укажем все до одного неизвестные и коэффициенты, включая и те, значения которые равны нулю.

Итак:

$$F=3x_1+4x_2+6x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7=\max \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} 1500 &= 2x_1+3x_2+5x_3+1x_4+0x_5+0x_6+0x_7,\\ 1000 &= 1x_1+4x_2+2x_3+0x_4+1x_5+0x_6+0x_7,\\ 1800 &= 3x_1+2x_2+3x_3+0x_4+0x_5+1x_6+0x_7,\\ 2200 &= 4x_1+2x_2+5x_3+0x_4+0x_5+0x_6+1x_7. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Уравнения вида (3.2) принято называть *симплексными п.*

Решение задачи симплексным методом осуществляется за несколько последовательных итераций (этапов), каждая из которых состоит из нескольких операций. Все расчеты выполняются в *симплексных таблицах*, которые заполняются по особой форме и показатели (элементы) которых пересчитываются в определенном порядке. Форма симплексной таблицы показана на рис.3.1. В процессе решения показатели в таблицах будут меняться, но форма ее в основном останется без изменения.

			Показатели критерия оптимальности (коэффициенты c_j целевой функции)			
C_0	P_0	B	Шапка матрицы (наимен. неизвестных)	$\sum$	β	α
Коэфф. целевой функции (c_j) при базисных неизв.	Наименование базисных неизв. x_i	Итогов. столбец (знач. базисных неизвест. B_i)	Основание матрицы (коэффициенты α_{ij} ограничительных условий задачи)	Контрольный столбец (суммы элементов по строкам $B_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$)	$\frac{B_i}{\alpha_{ik}}$	Коэффициенты пересчета элементов строк матрицы
		Знач. целев. функции	Оценочная строка (двойственные оценки Δ_j)			

Рис.3.1.

Каждая симплексная таблица соответствует определенному этапу решения задачи – в ней отражается определенный вариант программы (план).

Все исходные данные, содержащиеся в математическом условии задачи (целевой функции и симплексных уравнениях), переносятся в первую симплексную таблицу.

Рассмотрим порядок заполнения таблицы в несколько необычной последовательности.

Во-первых, прежде рассмотрим заполнение таблицы по строкам, а затем по столбцам. Во-вторых, не будем придерживаться строгой последовательности в соответствии с очередностью строк и столбцов.

Итак, рассмотрим таблицу по строкам.

Заполнение таблицы начинается со средней части второй (считая сверху) строки, которую называют *шапкой матрицы.* В нее записываются наименования всех неизвестных, входящих в симплексные уравнения.

Затем заполняют верхнюю строку таблицы. В нее заносятся коэффициенты c_j при неизвестных из целевой функции F (3.1)*.

* В приведенном примере постановки задачи коэффициенты c_j, выражают прибыль, приходящуюся на единицу продукции. В других экономических задачах коэффициенты c_j целевой функции могут иметь и другой смысл. В соответствующих разделах книги мы еще не раз будем рассматривать разные показатели критерия оптимальности.

Ниже шапки матрицы идут строки, которые образуют *матрицу условий.* В них записываются коэффициенты при неизвестных из симплексных уравнений (3.2). Этих строк в матрице должно быть ровно столько, сколько в данной задаче ограничений. Это хорошо видно на табл. 3.1, в которой показан пример заполнения первой симплексной таблицы применительно к условию общей формулировки стандартной задачи линейного программирования на максимум, при ограничениях — неравенствах со знаками $\leq$ и положительными числами $b_1,..., b_m$.

Последнюю строку таблицы называют оценочной (или дополнительной). В нее заносятся *двойственные оценки* Δ_j, которые непосредственно не вытекают из ранее сформулированного условия задачи, а рассчитываются по определенной формуле, которая будет рассмотрена несколько ниже. Оптимальность программы определяется по знакам чисел Δ_1, Δ_2,…, Δ_j,…,Δ_n оценочной строки. Кроме того, по числам Δ_j,- можно установить, за счет чего может' быть улучшена программа, если она *не оптимальная.*

Далее рассмотрим таблицу по столбцам. Столбцы, находящиеся слева от матрицы условий, имеют существенное значение и элементы их входят в условия задачи (в первой таблице) или получаются в процессе решения задачи (во второй и последующих таблицах) . Столбцы, стоящие справа от матрицы условий, являются вспомогательными и служат для определения направления продолжения расчетов и средства для ведения контроля за правильностью вычислений.

Сначала следует заполнить второй столбец таблицы (P_0). В него записываются наименования *базисных* неизвестных, связанных с *единичным базисом*. Напомним, что все неизвестные, входящие в задачу линейного программирования, подразделяются на базисные и свободные (см. гл. 2). Последние в любой программе (опорном решении) всегда равны нулю. Число базисных неизвестных обычно совпадает с числом ограничительных уравнений, которые входят в программу (план). В первой симплексной таблице в столбце P_0 указываются наименования всех дополнительных неизвестных [в случае стандартной задачи (1-10) при неотрицательных b_i], которые являются базисными неизвестными исходной программы.

В первый (слева) столбец C_0 записываются коэффициенты c_i целевой функции, которые соответствуют базисным неизвестным, вошедшим в исходную программу (записанным в столбце P_0).

Следующий, третий по счету, столбец — столбец B в первой симплексной таблице— заполняется значениями базисных неизвестных x_j, входящих в начальную программу. В случае стандартной задачи значения базисных неизвестных начальной программы представляют собой совокупность неотрицательных свободных членов ограничительной системы, поэтому для такой задачи столбец B заполняется неотрицательными числами $b_1,b_2,..., b_m$. Во второй и последующих симплексных таблицах в процессе итеративного (повторяющегося) расчета числа столбца B постепенно преобразуются в искомое оптимальное решение, т. е. характеризуют величину базисных неизвестных, входящих в оптимальную программу; поэтому этот столбец и называют *итоговым.*

На пересечении итогового столбца и оценочной строки находится клетка, в которой указывается значение целевой функции F_k, соответствующее данному этапу решения (данной k-й итерации).

Далее идут столбцы, которые представляют векторы условий. Количество этих столбцов равно числу всех неизвестных в канонической задаче. Эти столбцы в первой симплексной таблице заполняются коэффициентами при неизвестных в ограничительных уравнениях. Сначала располагаются столбцы коэффициентов при основных неизвестных, а далее столбцы коэффициентов при дополнительных неизвестных.

В следующем, первом по счету после матрицы условий столбце — столбце $\sum$ в первой симплексной таблице записываются суммы всех элементов по строкам (начиная со столбца B и кончая последним столбцом матрицы условий).

Т а б л . 3.1

			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+m}			
C_0	P_0	***B***	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	$\sum$	β	α
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	0	…	0			
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	1	…	0			
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	$b_i + \sum_j a_{ij}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$	
c_{n+i}	x_{n+i}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	0	…	0			
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…			
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	0	…	1			
		F	Δ_1	Δ_2	…	Δ_j	…	Δ_n	Δ_{n+1}	Δ_{n+2}	…	Δ_{n+m}			

Во второй и последующих симплексных таблицах эти суммы пересчитываются по правилам замещения, так же как и все другие элементы таблицы. Столбец $\sum$ называют *контрольным*, *так* как по его элементам проверяют правильность всех вычислений.

Последние два столбца (как и столбец $\sum$) являются вспомогательными. Без них можно было бы обойтись, рассматривая их формально, однако они способствуют упорядочению и тем самым некоторому упрощению расчетов, а потому их также рекомендуется заполнять. В столбец β записываются частные от деления элементов итогового столбца B на элементы некоторого столбца x_k матрицы условий, который выбирается по указанному ниже правилу. В столбец α заносятся коэффициенты для пересчета строк матрицы при переходе от одной симплексной таблицы к другой. Значение элементов столбца $\sum$ и столбца α известно из предыдущей главы.

Значение элементов столбца β также известно из последнего параграфа предыдущей главы. По минимальному значению из положительных чисел β определяется базисная неизвестная, которая должна быть выведена из базиса, чтобы получить новую лучшую программу (опорные решения системы ограничений). Но нам пока неизвестно, какая неизвестная из свободных должна войти в базисные для получения «лучшей» программы (опорного решения). Рассмотрим этот вопрос.

В (2.10) было показано, что в конечных методах решения задач линейного программирования, в частности в симплексном методе, осуществляется переход от одного опорного решения к «лучшему» опорному решению, при котором получается большее значение целевой функции в задаче максимизации, или меньшее значение в задаче минимизации. Такой переход осуществляется до тех пор, пока мы не получим оптимальное опорное решение, на котором целевая функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение. Установим, по какому признаку можно получить на следующей итерации «лучшее» опорное решение.

Выше приведена общая форма симплексной таблицы (табл. 3.1), основным содержанием которой является расширенная матрица системы с единичным базисом, отвечающим данному опорному решению. Нижняя дополнительная строка таблицы, называемая *оценочной,* рассчитана по формуле

$$\Delta_j = \sum_i c_i a_{ij} - c_j, \quad j = 1,2,...,n \tag{3.3}$$

где c_j — коэффициенты целевой функции;

c_i — коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных;
a_{ij}— элементы j-го столбца матрицы системы

Числа Δ_j называются *двойственными оценками.* Мы рассматриваем невырожденную задачу линейного программирования, в которой все числа b_i столбца B в любой симплексной таблице положительны, т. е. $b_i > 0$ при всех i.

Значение целевой функции $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ на опорном решении:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,..., x_n = 0,\ \ x_{n+1} = b_1,..., x_{n+m} = b_m,$$

которому отвечает табл. 3.1, равно:

$$F = c_{n+1}b_1 + c_{n+2}b_2 + ... + c_{n+s-1}b_{s-1} + c_{n+s}b_s + c_{n+s+1}b_{s+1} + ... + c_{n+m}b_m. \tag{3.4}$$

Допустим, что мы перешли к новому опорному решению с ключевым элементом $a_{sk}>0$, при котором переменная x_{n+s} ($s \le m$) исключается из базисных (становится равной нулю), а переменная x_k ($k \le n$) включается в базисные (становится положительной $x_k = b'_s > 0$).

Новое опорное решение будет

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,...,x_{k-1} = 0,\ \ x_k = b_s',\ x_{k+1} = 0,...,x_n = 0,$$
$$x_{n+1} = b_1',...,x_{n+s-1} = b_{s-1}', x_{n+s} = 0,\ x_{n+s+1} = b_{s+1}',...,x_{n+m} = b_m',$$

которому соответствует новое значение целевой функции:

$$F' = c_{n+1}b_1' + c_{n+2}b_2' + ... + c_{n+s-1}b_{s-1}' + c_{n+s+1}b_{s+1}' + ...$$
$$... + c_{n+m}b_m' + c_k'b_s'$$

или, учитывая формулу пересчета свободных членов, имеем:

$$F' = c_{n+1}(b_1 - \beta\alpha_{1k}) + ... + c_{n+s-1}(b_{s-1} - \beta\alpha_{s-1,k}) +$$
$$+ c_{n+s}(b - \beta\alpha_{sk}) + c_{n+s+1}(b_{s+1} - \beta\alpha_{s+1,k}) + ... \tag{3.5}$$
$$... + c_{n+m}(b_m - \beta\alpha_{mk}) + c_k\beta.$$

Правая часть этого равенства дополнена членом $c_{n+s}(b_s\text{-}\beta\alpha_{sk})$, который в силу определения числа $\beta = \dfrac{b_s}{\alpha_{sk}}$ равен нулю и поэтому не изменяет значения F'. Равенство можно записать в виде:

$$F' = \sum_i c_{n+i}b_i - \beta(\sum_i c_{n+i}\alpha_{ik} - c_k)$$

или учитывая, что $\sum_i c_i b_i = F$ — значение целевой функции при исходном опорном решении и $\sum_i c_{n+i}\alpha_{ki} - c_k = \Delta_k$ —двойственная оценка *k-го* столбца, имеем:

$$F' = F\text{-}\beta\Delta_k. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) дает связь между значениями целевой функции на двух смежных опорных решениях. Так как число β, являющееся значением новой базисной переменной x_k, положительно то из формулы (3.6) видно, что увеличение значения целевой функции получится только в том случае, когда оценка Δ_k отрицательна и целевая функция уменьшится только при положительной оценке Δ_k.

Отсюда и получается правило: *при решении задачи максимизации в качестве ключевого столбца надо брать тот столбец, для которого оценка* Δ_k *отрицательна и в котором имеются положительные элементы.* В случае задачи минимизации можно сохранить то же правило, что и в случае максимизации, если оценки Δ_j брать с противоположными знаками, т. е. если в нижнюю строку записать величины

$$\omega_j = -\Delta_j = c_j - \sum_i c_i\alpha_{ij}.$$

Из равенства (3.6) находим:

$$\Delta_k = -\frac{F' - F}{\beta}. \tag{3.7}$$

Таким образом, число Δ_K. характеризует изменение целевой функции *F,* приходящееся на единицу значения новой базисной переменной $x_k=\beta$. Слово «двойственная оценка» объясняется тем, что выражения оценок

$$\Delta_j = \sum_i c_i\alpha_{ij} - c_j,\ \ j = 1,2,...,n$$

в исходной симплексной таблице являются значениями левых частей ограничений — неравенств $\sum_i y_i\alpha_{ij} - c_j \geq 0$, при $y_i=c_i$, двойственной задачи, о которой речь пойдет ниже. В последней симплексной таблице, отвечающей оптимальному решению, среди оценок Δ_i содержится оптимальное решение двойственной задачи по отношению к рассматриваемой прямой задаче.

При выводе формулы (3.6) мы нигде не оговаривали, от какого и к какому опорному решению производится переход. Следовательно, формула (3.6) справедлива при переходе от любого произвольного опорного решения к смежному опорному решению. Так как число β в формуле (3.6) в любом случае положительно, то увеличение целевой функции в задаче максимизации может получиться только в том случае, если имеется хотя бы одна отрицательная двойственная оценка Δ_j. Если отрицательных оценок Δ_j в симплексной таблице нет, то переход к любому другому опорному решению приведет не к увеличению, а к уменьшению целевой функции. Значит, наибольшее значение целевой функции получается на опорном решении, для которого все двойственные оценки Δ_j неотрицательны. Наоборот, наименьшее значение целевой функции получается на опорном решении, для которого все двойственные оценки Δ_j неположительны, или же все числа $\omega_j = -\Delta_j$ неотрицательны.

Таким образом, *признаком оптимальности опорного решения является неотрицательность всех двойственных оценок Δ_j в случае задачи максимизации и неположительность всех (или неотрицательность $\omega_j = -\Delta_j$) в случае задачи минимизации целевой функции.*

Применим общие правила симплексного метода для решения нашей конкретной задачи.

В табл. 3.2 приведена первая симплексная таблица, заполненная числами из нашей задачи.

Т а б л . 3.2

			3	4	6	0	0	0	0			
C_0	P_0		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Σ	β	α
0	x_4	1500	2	3	$\boxed{5}$	1	0	0	0	1511	300	-
0	x_5	1000	1		2	0	1	0	0	1008	500	2/5
0	x_6	1800	3	2	3	0	0	1	0	1809	600	3/5
0	x_7	2200	4	2	5	0	0	0	1	2212	440	1
		0	-3	-4	-6	0	0	0	0	-13		-6/5

Сначала в шапку матрицы записываем все наши неизвестные от x_1 до x_7. Затем в столбце B записываем свободные члены уравнений (3.2), а в столбцы x_j - коэффициенты при неизвестных. Далее в первую строку (над шапкой матрицы) записываем коэффициенты из целевой функции. После этого в столбец P_0 (индекс 0 при P показывает, что это исходная таблица) заносятся все дополнительные неизвестные x_4, x_5, x_6, x_7,а в столбце C_0 - их нулевые коэффициенты из целевой функции.

Заполнение таблицы (матрицы) облегчается тем, что в преобразованной системе уравнений (3.2) все коэффициенты при неизвестных, а также свободные члены уравнении расположены в том же порядке, в котором их необходимо разместить в матрице.

В правой части матрицы условий .(см. столицы x_4, x_5, x_6, x_7) содержится квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, а остальные равны нулю. .Эту часть общей матрицы условимся называть *единичной подматрицей.*

Поскольку дополнительные неизвестные вошли как в шапку матрицы, так и в столбец P_0, единицы подматрицы находятся на пересечении одноименных строк и столбцов, т. е. в нашем примере на пересечении строки x_5 и столбца x_5, строки x_6 и столбца x_6, строки x_7 и столбца x_7.

Теперь пора перейти к рассмотрению сущности проведенной: операции заполнения первой симплексной таблицы.

В каждой симплексной таблице содержится одно допустимое решение из существующего бесконечного множества допустимых решений ее. *Допустимым решением* задачи линейного программирования называется любой набор значений неизвестных, удовлетворяющий условиям задачи. Следовательно, в первой симплексной таблице содержится первое допустимое решение — исходная программа. Поскольку в столбце P_0 записаны базисные неизвестные, вошедшие в программу, а в итоговом столбце *B* — значения их, то в качестве исходной имеем программу, характеризующуюся следующими ненулевыми значениями базисных неизвестных:

$$x_4=1500,\quad x_5=1000,\quad x_6=1800,\quad x_7,=2200$$

и нулевыми значениями свободных неизвестных:

$$x_1=0,\; x_2=0,\; x_3=0.$$

Легко убедиться в том, что данная исходная программа является одним из допустимых решений задачи. Для этого полученные значения неизвестных надо подставить в исходные уравнения условий задачи:

$$\begin{array}{llll}
2\cdot0+3\cdot0+5\cdot0+1500 & & & =1500,\; 1500=1500;\\
1\cdot0+4\cdot0+2\cdot0 & +1000 & & =1000,\; 1000=1000;\\
3\cdot0+2\cdot0+3\cdot0 & & +1800 & =1800,\; 1800=1800;\\
4\cdot0+2\cdot0+5\cdot0 & & & +2200=2200, 2200=2200.
\end{array}$$

Если обратиться к экономическому содержанию полученных чисел, то можно констатировать, что за исходную программу Дж. Б. Данциг принял такое состояние, когда ничто не вырабатывается, никакие производственные ресурсы не расходуются и прибыль от производства равна нулю.

Эта экономическая сущность исходной программы видна и в нашем примере. Здесь уместно напомнить, что под x_4 нами понимается недоиспользованное рабочее время по группе машин *A,* а под x_5— соответственно по второй группе машин *B.* В исходной же программе x_4 и x_5 равны общим ресурсам машинного времени по одним и другим машинам. Аналогичный смысл и величин x_6, x_7, которые представляют собой недоиспользованные виды материалов M_1 и M_2.

Для определения размера прибыли надо подставить полученные значения неизвестных в выражение целевой функции (*F*), т. е. просуммировать произведения величины выпуска (количества) продукции каждого вида, вошедшего в программу, на прибыль по этой продукции в расчете на единицу:

F = 3x0 +4x0 + 6x0 + 0 x 1500 + 0 x 1000 + 0 x 1800 +
+0 x 2200 = 0,

что и фиксируется в клетке *F,* специально отведенной для значения целевой функции.

Следующий этап в решении задачи заключается в проверке полученной программы *на оптимальность,* т. е. необходимо показать, является ли вариант программы (плана), представленный в данный момент в симплексной таблице, оптимальным, а если нет, то за счет чего он может быть улучшен. С этой целью заполняется оценочная строка показателями, названными выше двойственными оценками.

Вышеуказанная программа, при которой общая сумма прибыли равна нулю, очевидно является неоптимальной. Следовательно, необходимо перейти к «лучшей» программе. Для этого надо прежде всего просмотреть знаки двойственных оценок. Поэтому уже теперь надо рассматривать процедуру расчета двойственных оценок (показателей признака оптимальности программы).

Для расчета двойственной оценки, например, столбца x_j необходимо просуммировать согласно формуле (3.3) произведения элементов столбца c_0 на элементы столбца x_j, т. е. того столбца, для которого рассчитывается оценка, и из полученной суммы надо вычесть соответствующий коэффициент c_j, расположенный в таблице над x_j.

Используя формулу (3.3), рассчитаем двойственные оценки применительно к нашему примеру:

Δ_1=0 x 2+0 x 1+0 x 3+0 x 4-3=-3,
Δ_2=0 x 3+0 x 4+0 x 2+0 x 2-4=-4,
Δ_3=0 x 5+0 x 2+0 x 3+0 x 5-6=-6,
Δ_4=0 x 1+0 x 0+0 x 0+0 x 0-0=0,
Δ_5=0 x 0+0 x 1+0 x 0+0 x 0-0=0,
Δ_6=0 x 0+0 x 0+0 x 1+0 x 0-0=0,
Δ_7=0 x 0+0 x 0+0 x 0+0 x 1-0=0,

Результаты расчетов фиксируются в соответствующих клетках оценочной строки.

Двойственные оценки в первой симплексной таблице равны показателям критерия оптимальности c_J, взятым с обратным знаком. Однако это закономерно только для первой таблицы и только для тех случаев, когда все элементы столбца C_0 равны нулю.

Выше было доказано, что если все значения двойственных оценок Δj в оценочной строке окажутся неотрицательными, т. *е.* $\Delta j \geq 0$ (для всех j=1, 2, ..., n,..., $n+m$)*,* то программа (план) в случае решения задачи на максимум целевой функции является оптимальной. В случае же решения задачи на минимум целевой функции программа будет оптимальной, если все двойственные оценки Δj будут неположительными, т. е. отрицательными или нулевыми ($\Delta j \leq 0$).

В нашем примере исходная программа оказалась не оптимальной и об этом свидетельствуют (помимо изложенных выше логических рассуждений) отрицательные значения двойственных оценок.

Двойственные оценки имеют экономический смысл. Отрицательные оценки показывают, на сколько может быть увеличено значение целевой функции (в данном случае общей прибыли) в расчете на единицу продукции, если включить ее в программу. И, наоборот, положительные оценки показывают, на сколько уменьшится значение целевой функции при включении в базисные соответствующих неизвестных. Это отражено формулой (3.6).

Таким образом, воспользовавшись значениями двойственных. оценок, можно перейти от одной неоптимальной программы к другой, лучшей, программе, заменив выпуск какой-то продукции (или производственного ресурса), включенной в нее, выпуском какой-то другой продукции.

Поскольку за один переход в новую программу можно включить только один вид продукции (одну базисную неизвестную), то в первую очередь в новую программу должна быть включена та продукция (введена та базисная неизвестная), которая дает наибольшее увеличение целевой функции. Эта неизвестная выбирается. по наибольшей абсолютной величине отрицательной двойственной оценки.

В нашем примере такая оценка находится в столбце x_3, значит, в новую программу надо ввести эту неизвестную в качестве базисной. Столбец, соответствующий данной неизвестной, называют *ключевым (или разрешающим, или направляющим).*

Из теории линейного программирования известно, что в каждой программе число базисных неизвестных всегда равно числу строк в матрице, если все уравнения в системе ограничений независимы.

Следовательно, если мы хотим ввести новую базисную неизвестную, то какую-то базисную неизвестную надо вывести из старой программы.

С целью установления выводимой из программы базисной неизвестной рассчитывают (построчно) частные от деления элементов итогового столбца *B* на положительные элементы ключевого столбца (в нашем примере x_3). Выводимую базисную неизвестную устанавливают по соответствующему в ее строке наименьшему положительному частному β.

Проделаем эту операцию применительно к нашему примеру, пока не задумываясь над ее сущностью:

$$\beta_1 = \frac{b_1}{\alpha_{13}} = \frac{1500}{5} = 300, \quad \beta_2 = \frac{b_2}{\alpha_{23}} = \frac{1000}{2} = 500,$$

$$\beta_3 = \frac{b_3}{\alpha_{33}} = \frac{1800}{3} = 600, \quad \beta_4 = \frac{b_4}{\alpha_{43}} = \frac{2200}{5} = 440.$$

Результаты расчетов фиксируются в соответствующих клетках столбца β (см. табл. 3.2). Итак, мы видим, что неизвестную x_3 надо ввести в базисные неизвестные вместо неизвестной x_4.

Строку с неизвестной, подлежащей замене, принято называть *ключевой (или направляющей, или разрешающей).*

Далее рассмотрим, какова же экономическая сущность проделанной операции деления элементов итогового столбца на элементы ключевого столбца и почему ключевая строка выбирается с экономической точки зрения по наименьшему частному из положительных чисел β_i.

В первой симплексной таблице элементами итогового столбца являются ресурсы (машинное время и пр.), которые на первом этапе решения находятся «в покое», т. е. в производстве пока не используются. Элементами ключевого столбца являются нормы расхода ресурсов на единицу продукции (в данном случае x_3) .

Таким образом, поделив ресурсы разных видов на нормы расходования их $\left(\frac{b_i}{\alpha_{i3}}\right)$, получим количество продукции x_3, которое можно выпустить из имеющихся ресурсов, если рассматривать их в отдельности. Так, ресурсов четырех видов в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 достаточно для выпуска продукции третьего вида соответственно в количествах x_3 = 300; 500; 600 и 440 ед. Если в новой программе предусмотреть выпуск наибольшего количества продукции x_3 (600 ед.), то количества имеющихся ресурсов отдельных видов (в данном случае b_1, b_2, b_4) будет недостаточно для выпуска такого объема продукции. Поэтому в новой программе предусматривается выпуск наименьшего количества продукции (из полученных в результате деления $\frac{b_i}{\alpha_{ij}}$) с тем, чтобы хватило любых видов ресурсов, участвующих в выпуске этой продукции.

В ключевом столбце в иных примерах (и последующих итерациях нашего примера) могут быть элементы отрицательные и равные нулю. При делении элементов итогового столбца на отрицательные элементы получился бы выпуск отрицательного количества продукции, а при делении на нулевые элементы — выпуск сколь угодно большого количества продукции. Иными словами, эти ресурсы (или продукция) не лимитируют выпуск продукции, подлежащей вводу в программу. Следовательно, соответствующие этим ресурсам неизвестные не должны исключаться из базисных неизвестных.

Отсюда следует важное правило: *при выборе ключевой строки не принимаются во внимание строки, на пересечении которых с ключевым столбцом находятся нулевые или отрицательные элементы.*

В табл. 3.2 ключевой столбец и ключевая строка выделены специальной штриховкой. Элемент, находящийся на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, называют *ключевым элементом* (в литературе ключевые столбец, строку и элемент называют также по-другому — разрешающие, ведущие, направляющие, генеральные и др.).

Итак, ключевой столбец — это такой, который соответствует продукции (иначе базисной неизвестной), включаемой в данный момент (на данной итерации) в программу. Ключевая строка соответствует ресурсам (или продукции), которые в данный момент (на данной итерации) из программы исключаются.

Процесс решения задачи как раз и заключается в том, что поочередно заменяются ресурсы (или продукция в ряде случаев), входящие в программу, выпуском более выгодной продукции, причем на каждой итерации ресурсы (или менее выгодная продукция) одного вида полностью исключаются из программы, а на освободившееся место включается другая продукция, которая в предыдущей программе отсутствовала.

Выполняя такую замену при переходе от одной программы к другой, следует иметь в виду, что при этом изменяются числовые значения всех элементов таблицы. Следовательно, элементы табл. 3.2 должны быть преобразованы так, чтобы они соответствовали новому варианту плана, новой программе. В этом преобразовании важную роль играет ключевой элемент. Однако это подробно будет изложено ниже, а сейчас следует вычислить элементы столбцов $\sum$ и α, которые остались незаполненными.

В столбец $\sum$ (в дальнейшем его будем называть *контрольным столбцом)* в первой симплексной таблице записываются суммы элементов матрицы по строкам, начиная от столбца B и кончая столбцом x_{n+m} (в данном примере столбцом x_7).

Элементы столбца α для каждой строки рассчитываются путем деления элемента этой строки, стоящего в ключевом столбце, на ключевой элемент. Эти элементы выполняют чисто вспомогательную роль при преобразовании матрицы. В нашем примере можно было бы обойтись без них, однако в более сложных задачах наличие элементов α позволит несколько упростить технику расчетов при преобразовании матрицы.

Следующий этап (итерация) в решении задачи заключается в составлении новой программы и преобразовании элементов старой матрицы с тем, чтобы они соответствовали новой программе. Преобразованные элементы будем записывать в табл. 3.3.

Прежде всего в столбец P_1 записываются базисные неизвестные, входящие в новую программу (в нашем примере — старые x_5, x_6, x_7, вместо x_4—x_3), а в столбец c_0 — соответствующие коэффициенты c_3, c_5, c_6 и c_7 целевой функции.

Преобразование старой матрицы начинают с пересчета элементов *ключевой* строки. Если разделить все ее элементы на ключевой элемент, то получившиеся в результате элементы будут соответствовать новому варианту плана, новой программе. Эти показатели записываются в строку с вновь введенной базисной неизвестной x_3. Эту строку называют *главной* строкой. Так, разделив элемент b_1=1500 в прежней программе на ключевой элемент a_{13}=5, устанавливаем, сколько продукции x_3 (вида P_3) теперь должно вырабатываться в новом варианте программы. Все остальные элементы ключевой строки надо разделить на ключевой элемент, чтобы они в новой таблице также соответствовали не x_4 а вновь введенной базисной неизвестной x_3.

Экономический смысл деления прочих элементов ключевой строки на ключевой элемент заключается в следующем. Ключевой элемент можно рассматривать как показатель, указывающий во сколько раз затраты времени (или других ресурсов) на производство одной единицы продукции x_3 превышают затраты времени (или других ресурсов) на производство единицы x_4 (если под x_4 понимать условную фиктивную продукцию). Поэтому, чтобы перевести показатели ключевой строки, допустим, в показатели времени на производство единицы x_3, все показатели, относившиеся к x_4 делят на ключевой элемент.

Все остальные элементы матрицы пересчитываются по правилам замещения неключевых строк, подробно изложенным в гл. 2.

Строку с двойственными оценками также можно вычислять по правилам замещения, как и другие неключевые строки таблицы. Двойственные оценки можно было бы вычислять, пользуясь для этого формулой (3.3), с помощью которой нами были вычислены оценки для первой симплексной таблицы. Читатель может убедиться, что тот и другой способы дают одинаковые значения оценок.

Результаты пересчета табл. 3.2 приведены в табл. 3.3, которая соответствует новой «лучшей» программе.

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=300,\ x_4=0,\ x_5=400,\ x_6=900,\ x_7=700 \text{ и } F=1800. \qquad (3.8)$$

С целью упрощения арифметических действий (особенно в более сложных примерах) при преобразовании элементов матрицы уже в самом начале пересчета надо вычислить для каждой строки коэффициент, представляющий собой отношение элемента ключевого столбца (этой строки) к ключевому элементу, записать эти коэффициенты в столбец α и пользоваться ими при пересчете элементов таблицы следующим образом. Для получения нового элемента следует вычесть из соответствующего ему старого элемента произведение соответствующих ему элементов в ключевой строке и столбце α. Как, например, получается вторая (неглавная) строка в табл. 3.3.

Табл. 3.3

c_o	P_1	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\sum$	β	α
6	x_3	300	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1511}{5}$	750	$\frac{2}{10}$
0	x_5	400	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{2018}{5}$	2000	$\frac{1}{10}$
0	x_6	900	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1	0	$\frac{4512}{5}$	500	$\frac{9}{10}$
0	x_7	700	$\boxed{2}$	-1	0	-1	0	0	1	701	350	—
		1800	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	$\frac{9001}{5}$		$-\frac{3}{10}$

По правилу замещения она получается следующим образом. В табл. 3.2 второй строке соответствует коэффициент α = 2/5, на этот коэффициент умножаются все элементы первой (ключевой) строки, в результате получаем строку из чисел: 1500·2/5 = 600; 2·2/5 =4/5; 3·2/5 =6/5; 5·2/5 = 2; 1·2/5=2/5; 0·2/5 = 0; 0·2/5 = 0; 0·2/5 = 0; 1511·2/5=3022/5, затем полученный ряд чисел вычитаем соответственно из чисел преобразуемой второй строки. В результате имеем: 1000-600 = 400; 1- 4/5=1/5; 4-6/5 = 14/5; 2-2 = 0; 0-2/5 = - 2/5; 1-0=1; 0-0 = 0; 0-0 = 0; 1008-3022/5=2018/5, т. е. вторую строку в табл. 3.3, не считая чисел в столбце β и α.

Сумма чисел

$$400+\frac{1}{5}+\frac{14}{5}+\frac{2}{5}+1=\frac{2000+1+14-2+5}{5}=\frac{2018}{5}$$

совпадает с числом 1008—1511·2/5 = 2018/5, полученным по правилу замещения, что является признаком того, что вторая строка в табл. 3.3 получена правильно.

Аналогичным образом получены остальные строки, включая и последнюю оценочную строку.

Далее кратко рассмотрим экономическую сущность преобразования элементов симплексной таблицы. Зачем, например, надо было пересчитывать элементы итогового столбца *B* (1000, 1800, 2200)? Чтобы ответить на этот вопрос, надо вспомнить экономическое содержание этих цифр.

В нашем примере они представляют (в первой симплексной таблице) общие ресурсы машинного времени по группе машин типа *A*, *B* и ресурсы материалов вида M_1 и M_2. Поскольку в новую программу вводится новая неизвестная x_3, представляющая выпуск продукции P_3, то на ее производство будет израсходована какая-то часть ресурсов. Эту израсходованную часть ресурсов надо учесть (исключить из первоначального значения) при расчете элементов итогового столбца, соответствующих новой программе.

Следует ответить также на вопрос, зачем надо преобразовывать элементы матрицы условий. Элементы матрицы условий первоначальной симплексной таблицы характеризуют затраты машинного времени и нормы расхода материалов на единицу продукции, но можно их рассматривать и как показатель количества продукции. Они характеризуют количество продукции через затраты времени и нормы расхода материалов, необходимого для их производства, а точнее — соотношения выпуска разных видов продукции, определяемые соотношениями в затратах времени и в нормах расхода материалов. При этом затраты времени разных машин (а также и материалов) на производство разной продукции не только не одинаковы, но и не пропорциональны. В результате при замене одной продукции другой (или производственных ресурсов выпуском продукции) образуются резервы свободного времени на одном оборудовании и начинает не хватать времени на другом оборудовании. Именно поэтому, когда одна продукция (или ресурсы) заменяются в программе другой, изменяется выпуск остальных видов продукции (или ресурсов), входящих в данный момент в программу, а также изменяются соотношения, в которых одни виды продукции могут заменять другие.

Вторая программа P_1 «лучше» исходной P_0 с нулевой прибылью, в ней уже прибыль составляет 1800 руб., но она оказывается также не оптимальной, так как две двойственные оценки в табл. 3.3 Δ_1 и Δ_2 отрицательны.

В таком случае надо перейти к новой программе P_2, для чего следует проделать все последовательные операции подобно тем, которые были выполнены при переходе от исходной программы P_0 к программе P_1.

В качестве ключевого столбца здесь надо принять столбец x_1, так как включение в программу P_2 базисной неизвестной x_1 дает наибольшее повышение значения целевой функции.

В качестве ключевой строки следует принять строку x_7 — с минимальным частным $\dfrac{b_4}{\alpha_{41}} = 350$.

Таким образом, неизвестную x_1 надо ввести в базисные вместо базисной неизвестной x_7, содержащейся в программе P_1.

Далее производится преобразование элементов матрицы — табл. 3.3 по правилам замещения с ключевым элементом $\alpha_{41} = 2$. В результате операции одноразового замещения получаем третью симплексную табл. 3.4.

Т а б л. 3.4

c_0	P_2	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\sum$	β	α
6	x_3	160	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	162	200	$\frac{8}{29}$
0	x_5	330	0	$\boxed{\frac{29}{10}}$	0	$-\frac{3}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{667}{2}$	$\frac{3300}{29}$	–
0	x_6	270	0	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{9}{10}$	$\frac{543}{2}$	$\frac{2700}{11}$	$\frac{11}{29}$
3	x_1	350	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{701}{2}$	-	$\frac{5}{29}$
		2010	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{9}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4021}{2}$	-	$-\frac{7}{29}$

Пользуясь табл. 3.4, мы можем выписать программу P_2:

$$x_1 = 350;\ x_2 = 0;\ x_3=160;\ x_4 = 0;\ x_5 = 330;\ x_6 = 270;$$
$$x_7 = 0;\ F = 2010. \tag{3.9}$$

Программа P_2 лучше программы P_1 (3.8), так как в ней значение целевой функции (суммарная прибыль) выше по сравнению с программой P_1 на 210 руб., однако и она не является оптимальной. Поэтому надо перейти к следующей новой программе P_3, путем введения в нее неизвестной x_2 в качестве базисной вместо x_5.

Составим следующую табл. 3.5, в которой заполним столбец P_3 и столбец c_0. Далее необходимо вычислить новые значения элементов матрицы.

Сначала преобразуем элементы оценочной строки. Все значения двойственных оценок получились положительные и нулевые. Значит, надо вычислить только элементы итогового столбца, а числа в матрице условий и в столбцах $\sum$, β, α, более не нужны, поскольку элементы итогового столбца уже определяют оптимальную программу, не требующую дальнейших преобразований. На этом решение задачи закончено.

Т а б л . 3.5

c_o	P_2	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\sum$	β	α
6	x_3	2000										

		29										
4	x_2	$\frac{3300}{29}$										
0	x_6	$\frac{4200}{29}$										
3	x_1	$\frac{11800}{29}$										
		2089,6	0	0	0	$\frac{24}{29}$	$\frac{7}{29}$	0	$\frac{8}{29}$			

Оптимальная программа задачи (3.1) – (3.2)

$$x_1 = \frac{11800}{29} \approx 407;\ x_2 = \frac{3300}{29} \approx 114; x_3 = \frac{2000}{29} \approx 69;$$
$$x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = \frac{4200}{29} \approx 145;\ x_7 = 0 \text{ и } \max F = 2089{,}6. \tag{3.10}$$

Остается проверить результаты и рассмотреть их экономическое содержание. Полученное решение должно быть прежде всего допустимым, т.е. удовлетворять ограничениям задачи:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 1000, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 2200. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставим значения неизвестных (3.10) в неравенства (3.11):

$$2 \cdot \frac{11800}{29} + 3 \cdot \frac{3300}{29} + 5 \cdot \frac{2000}{29} = 1500 = 1500;$$
$$\frac{11800}{29} + 4 \cdot \frac{3300}{29} + 2 \cdot \frac{2000}{29} = 1000 = 1000;$$
$$3 \cdot \frac{11800}{29} + 2 \cdot \frac{3300}{29} + 3 \cdot \frac{2000}{29} = \frac{48000}{29} < 1800;$$
$$4 \cdot \frac{11800}{29} + 2 \cdot \frac{3300}{29} + 5 \cdot \frac{2000}{29} = 2200 = 2200;$$

Мы видим, что 1, 2 и 4-е ограничения выполняются как равенства и третье ограничение как строгое неравенство, при этом разность $1800 - \frac{48000}{29} = \frac{4200}{29}$ равна значению выравнивающей переменной x_6.

Экономический результат решения (3.10) заключается в том, что с целью получения максимальной прибыли необходимо выпустить 407 ед. продукции P_1, 114 ед. продукции P_2 и 69 ед. продукции P_3. При таком округлении плана выпуска продукции до целых чисел максимальный доход от ее производства составит 2091 руб.

Имеющиеся ресурсы используются при этом следующим образом: машинное время и материалы вида M_2 используются полностью, а материалы вида M_1 используются не полностью (приблизительно на 92%).

3.2. Симплексный метод в решении задач с условием в виде уравнений и неравенств со знаком ≥ (метод искусственного базиса)

В предыдущем параграфе нами рассмотрен основной алгоритм симплексного метода для решения так называемой стандартной задачи линейного программирования на максимум целевой функции $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, условие которой было представлено в виде неравенств $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,...,m)$ с положительными свободными членами. Исходные неравенства нами были преобразованы в уравнения путем ввода дополнительных неотрицательных неизвестных ($x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$). Дополнительные неизвестные входили в симплексные уравнения со знаком плюс, и в единичной подматрице на главной диагонали мы имели элементы, равные единице. Это позволило нам получить исходную программу.

В целом ряде экономических задач исходные ограничительные условия могут быть представлены в виде уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,...,m),$$

или неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = 1,2,...,m),$$

или, наконец, ограничительные условия могут быть смешанными в виде уравнений и неравенств с любыми знаками:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i \quad (i = 1,2,...,m).$$

Предположим, дано условие задачи в виде системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

и требования минимизации целевой функции

$$F(x)=2x_1+x_2-x_3-x_4 \qquad (3.13)$$

при неотрицательных переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 или то же в общем развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

при $bi \ge 0$, $i=1, 2, \ldots, m$ и при $x_j \ge 0$, $j=1,2,\ldots,n$ и минимизации целевой функции

$$F=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n. \qquad (3.15)$$

Как в числовом примере, так и в общей формулировке задачи нет таких переменных x_j, которые бы входили с коэффициентом + 1 один раз в какое-либо одно уравнение системы.

Следовательно, нет и явной исходной программы.

Рассмотрим еще один пример — раскройную задачу, которая нами была изложена и математически сформулирована в 1.2 В результате проведенной постановки была получена математическая модель задачи, заключающаяся в минимизации целевой функции

$$F=0{,}5x_1+0{,}6x_2+0{,}4x_3+0{,}2x_4+0{,}3x_5 \tag{3.16}$$

при ограничениях, представленных в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{aligned}
x_3 + x_4 \quad &\geq \ 500,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad &\geq 1000,\\
3x_1 + \qquad\qquad x_5 &\geq \ 200,\\
x_2 + \quad 2x_4 + x_5 &\geq \ 400.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

при $x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4,5)$

или то же в общем виде

$$F=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n.= \min \tag{3.18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m
\end{aligned}\right\}$$

$$\text{при } x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n) \ \text{ и} \tag{3.19}$$

при $b_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,m)$.

Эти исходные неравенства надо преобразовать в равенства с неотрицательными неизвестными. Для этого надо ввести дополнительные неотрицательные неизвестные x_6, x_7, x_8 и x_9 (а в общем случае x_{n+1}, $x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$) в неравенства-ограничения так, чтобы они превратились в уравнения.

В данной задаче неравенства имеют противоположный смысл по сравнению с неравенствами, рассмотренными в предыдущем параграфе, т. е. левые части должны быть не менее правых частей, поэтому дополнительные неотрицательные неизвестные должны вводиться со знаком плюс в правые части неравенств, либо со знаком минус (с коэффициентами — 1) в левые части этих неравенств-ограничений.

Итак, вышеуказанные системы неравенств преобразуются в следующие эквивалентные системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
x_3 + x_4 \quad - x_6 \qquad\qquad &= 500,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad - x_7 \qquad &= 1000,\\
3x_1 \qquad\qquad + x_5 \qquad - x_8 \quad &= 200,\\
x_2 \quad + 2x_4 + x_5 \qquad\qquad - x_9 &= 400
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$$F=0{,}5x_1+0{,}6x_2+0{,}4x_3+0{,}2x_4+0{,}3x_5-0x_6-0x_7-0x_8-0x_9=\min \text{ при } x_j\geq 0 \tag{3.21}$$

или, в общем виде,

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m,
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

$$F=c_1x_1+\ldots+ c_nx_n.+0x_{n+1}+\ldots+0x_{n+m}= \min. \tag{3.23}$$

В матрицах систем уравнений такого вида не содержится единичной подматрицы, в которой диагональные элементы были бы равны единице, а остальные — нулю. В них содержатся подматрицы, соответствующие дополнительным неизвестным, с диагональными элементами, равными — 1. Поэтому, если принять дополнительные неизвестные в качестве базисных, то они окажутся отрицательными ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = -500$, $x_7 = -1000$, $x_8 = -200$, $x_9 = -400$), т. е. не будут удовлетворять условиям неотрицательности всех переменных. Следовательно, здесь мы не имеем явной неотрицательной исходной программы.

Для решения задачи необходима единичная подматрица (с положительными элементами). Чтобы получить ее, надо ввести еще одну группу неизвестных, число которых равно числу исходных неравенств (или уравнений — в первом примере), по одному такому неизвестному на каждое неравенство (или уравнение). Эти новые неизвестные в отличие от дополнительных — уравновешивающих — называют *искусственными.* В данной задаче обозначим их через y_1, y_2, y_3, y_4 и введем их в левые части уравнений со знаком плюс.

Симплексные уравнения исходных условий в окончательном виде, допускающем перенесение коэффициентов при неизвестных непосредственно в первоначальную симплексную таблицу, будут[1]:

$$\left.\begin{aligned}
&500 = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1\cdot x_4 + 0x_5 - 1\cdot x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 + \\
&+ 1\cdot y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4, \\
&1000 = 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - 0\cdot x_6 - 1x_7 - 0x_8 - 0x_9 + \\
&+ 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 + 0y_4, \\
&200 = 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 1x_8 - 0x_9 + \\
&+ 0y_1 + 0y_2 + 1\cdot y_3 + 0y_4, \\
&400 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 1\cdot x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 1x_9 + \\
&+ 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 1\cdot y_4.
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

В этих уравнениях имеется единичная подматрица и все неизвестные считаются неотрицательными. Дальнейшее решение задачи может быть выполнено двумя способами. Рассмотрим их последовательно.

Первый способ заключается в отыскании какой-то программы (опорного плана) основной задачи (3.16), (3.17) посредством решения *вспомогательной задачи,* которая заключается в нахождении минимума целевой функции:

$$F' = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \min \tag{3.25}$$

или, в расширенном виде,

$$F' = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 + 1y_4 = \min$$

Если получится минимум этой целевой функции, равный нулю ($F' = 0$), то в решении этой вспомогательной задачи (3.24; 3.25) получится искомая программа исходной задачи (3.16; 3.17).

Последняя таблица вспомогательной задачи при $F'=0 = \min$ служит основой для составления первоначальной симплексной таблицы для решения исходной задачи. С этой целью надо из последней таблицы вспомогательной задачи отбросить столбцы, соответствующие неизвестным y_1, y_2, y_3 и y_4, затем изменить коэффициенты c_j в первой строке и столбце c_0, заменив их соответствующими коэффициентами c_j, из целевой функции

(3.17) исходной задачи и продолжить таким образом решение на минимум целевой функции исходной задачи.

Если окажется, что минимум целевой функции вспомогательной задачи не равен нулю, то опорного плана исходной задачи не существует, т. е. исходная задача не имеет решения.

Рассмотрим сущность этого способа на решении приведенной здесь раскройной задачи (первая, с условием $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i$, решается подобным же образом).

Итак, с целью отыскания одного из решений этой задачи, приступим к решению вспомогательной задачи, ограничительные условия которой выражены симплексными уравнениями (3.24), а целевая функция — выражением (3.25).

---

[1]Симплексные уравнения исходных условий, применительно к первому примеру, примут окончательную форму:

$2=1x_1-1x_2+2x_3-1x_4+1y_1+0y_2+0y_3$;

$6=2x_1+1x_2-3x_3+1x_4+0y_1+1y_2+0y_3$;

$7=1x_1+1x_2+1x_3+1x_4+0y_1+0y_2+1y_3$.

Для этого составляем первую симплексную таблицу и проводим последовательные вычисления и преобразования подобно тому, как было изложено в предыдущем параграфе.

С целью некоторого упрощения вычислений компоненты вектора свободных членов разделим на общий коэффициент 100. В дальнейшем, после того как задача будет решена, и будет найден оптимальный план, полученные значения базисных переменных умножим на этот же коэффициент 100.

Поскольку читатель уже освоил технику вычислений решения задачи симплексным методом, все итерации представим в одной общей табл. 3.6.

Отличительная особенность решения этой задачи от рассмотренной в предыдущем параграфе заключается в том, что здесь определяется не максимум, а минимум целевой функции. При решении этой задачи на минимум можно было поменять все знаки двойственных оценок на обратные и дальше все операции производить тем же способом как и ранее. Но можно сделать иначе. Оставим те знаки двойственных оценок, какие они есть, а в качестве ключевого выберем такой столбец, у которого имеется наибольшая положительная оценка, а не наименьшая, отрицательная как раньше. Решение будет оптимально тогда, когда не останется ни одной положительной оценки, превышающей ноль, т.е. когда все $\Delta_j \leq 0$. Так мы и будем решать эту задачу.

Первая программа оказалась не оптимальной. Переходим ко второй программе. Для этого введем в базисные переменную x_1, поскольку двойственная оценка в этом столбце оказалась наибольшей из положительных. При переходе к «лучшему» решению это обеспечивает наибольшее снижение целевой функции F' при ее минимизации. Принимая в качестве базисной переменную x_1, вместо y_3, получим новую программу P_2.

Однако эта 2-я программа, соответствующая 2-й итерации, так же как и первая, оказалась не оптимальной. Поэтому переходим к следующей программе. Для этого в качестве базисной примем переменную x_4 вместо y_4, так как в столбце, соответствующем x_4, оказалась самая большая положительная двойственная оценка на этой 2-й итерации.

Программы, соответствующие 3-й, а затем и 4-й итерации, оказались также не оптимальными. По табл. 3.6 нетрудно проверить это и проследить последовательные переходы от одной итерации к другой с целью улучшения плана.

Программа P_5, соответствующая 5-й итерации, оказалась оптимальной, так как нет ни одной оценки Δ_j более нуля. Целевая функция F'_5 равна нулю. Следовательно, в решении этой задачи содержится одно из опорных решений исходной задачи, т. е. полученный результат с учетом коэффициента 100, на который теперь умножим значения неизвестных,

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot 100 = \frac{200}{3};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{10}{3} \cdot 100 = \frac{1000}{3};\ x_4 = 2 \times 100 = 200;$$

$$x_5 = 0;\ x_6 = \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{100}{3};\ x_7 = 0;\ x_8 = 0;\ x_9 = 0$$

одновременно является опорным планом исходной задачи (3.16), (3.17), ограничительные условия которой для удобства чтения запишем еще раз:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 \qquad & \geq 500, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad & \geq 1000, \\ 3x_1 + \qquad\qquad x_5 & \geq 200, \\ x_2 + \qquad 2x_4 + x_5 & \geq 400. \end{aligned}$$

В этом нетрудно убедиться, подставив значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 в неравенства:

Табл. 3.6

			0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1			
c_0	P_0	***B***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	Σ	β	α
1-я итерация																		
1	y_1	5	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	7	∞	0
1	y_2	10	2	1	2	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	16	5	2/3
1	y_3	2	$\boxed{3}$	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	2/3	-
1	y_4	4	0	1	0	2	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	8	∞	0
	$F_1' =$	21	5	2	3	4	2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	33	-	5/3
2-я итерация																		
1	y_1	5	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	7	5	1/2
1	y_2	26/3	0	1	2	1	-2/3	0	-1	2/3	0	0	1	-2/3	0	12	26/3	1/2
0	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
1	y_4	4	0	1	0	$\boxed{2}$	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	8	2	-

	$F_2^{'} =$	53/3	0	2	3	4	1/3	-1	-1	2/3	-1	0	0	-5/3	0	69/3	-	2

Продолжение табл. 3.6

3-я итерация																		
1	y_1	3	0	-1/2	$\boxed{1}$	0	-1/2	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	-1/2	3	3	-
1	y_2	20/3	0	1/2	2	0	-7/6	0	-1	2/3	1/2	0	1	-2/3	-1/2	8	10/3	2
0	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
0	x_4	2	0	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	0	1/2	4	∞	0
	$F_3^{'} =$	29/3	0	0	3	0	-5/3	-1	-1	2/3	1	0	0	-5/3	-2	7	-	
4-я итерация																		
0	x_3	3	0	-1/2	1	0	-1/2	-1	0	0	1/2	1	0	0	-1/2	3	-	-1/2
1	y_2	2/3	0	3/2	0	0	-1/6	$\boxed{2}$	-1	2/3	-1/2	-2	1	-2/3	1/2	2	2/6	-
0	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
0	x_4	2	0	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	0	1/2	4	∞	0

$F_4^{'} =$	2/3	0	3/2	0	0	-1/6	2	-1	2/3	-1/2	-3	0	-5/3	-1/2	-2	-	1

Продолжение табл. 3.6

5-я итерация																		
0	x_3	10/3	0	1/4	1	0	-7/12	0	-1/2	-1/3	1/4							
0	x_6	1/3	0	3/4	0	0	-1/12	1	-1/2	1/3	-1/4							
0	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0							
0	x_4	2	0	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2							
$F_5^{'} =$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-4		

$$\begin{aligned}
&\frac{100}{3}+200=\frac{1600}{3}>500;\\
&2\cdot\frac{200}{3}+1\cdot 0+2\cdot\frac{1000}{3}+200=\frac{3000}{3}=1000;\\
&3\cdot\frac{200}{3}+1\cdot 0=\frac{600}{3}=200;\\
&1\cdot 0+2\cdot 200+1\cdot 0=400=400.
\end{aligned}$$

Однако мы не знаем, является ли это решение оптимальным, т. е. дают ли значения неизвестных минимум целевой функции исходной задачи (3.16). С этой целью надо приступить к ее решению. Для этого составляем первую симплексную таблицу (табл. 3.7), используя последнюю таблицу вспомогательной задачи. Как было указано выше, отбросим столбцы, соответствующие искусственным переменным, и заменим показатели критерия оптимальности на коэффициенты целевой функции 3.16):

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 = \min.$$

При этом для упрощения вычислений коэффициент 0,1 вынесем за скобки с тем, чтобы избавиться от дробности этого показателя при вычислениях в симплексной таблице.

$$F = 0{,}1(5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5) = \min. \qquad (3.26)$$

Оказалось, что в строке этой первой таблицы не содержится ни одной двойственной оценки, превышающей значение ноля. Это свидетельствует о том, что найдено оптимальное решение исходной задачи (3.16), (3.17), обеспечивающее минимальное значение ее целевой функции.

Т а б л . 3.7

			5	6	4	2	3	0	0	0	0			
c_0	P_0	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\sum$	β	α
4	x_3	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{-7}{12}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$			
0	x_6	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{-1}{12}$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{4}$			
5	x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{-1}{3}$	0			
2	x_4	2	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{-1}{2}$			
		$\frac{62}{3}$	0	-4	0	0	$\frac{-8}{3}$	0	-2	$\frac{-1}{3}$	0			

В этом примере уже первая программа решения исходной задачи оказалась оптимальной. Она характеризуется следующими значениями базисных неизвестных (с учетом коэффициента упрощения 100).

$$x_1 = \frac{200}{3};\ x_3 = \frac{1000}{3};\ x_4 = 200;\ x_6 = \frac{100}{3},$$

а значения свободных неизвестных x_2, x_5, x_7, x_8, x_9 равны нулю.

В других примерах первая программа может оказаться не оптимальной. В таком случае ее надо довести до оптимальной способом последовательного улучшения плана, т.е. выполнить столько итеративных вычислений, сколько потребуется для получения оптимального решения.

Оптимальное решение найдено; остается проверить результаты. Для этого подставляют значения неизвестных x_1, x_2, …. x_5 в первоначальные неравенства и целевую функцию. В нашем примере оптимальное решение исходной задачи (значения базисных неизвестных) совпало с последним планом вспомогательной задачи, проверку которого мы сделали выше. Поэтому нет необходимости повторно подставлять значения неизвестных в первоначальные ограничительные неравенства — они удовлетворяют условию задачи.

Подставим значения неизвестных в целевую функцию (3.16)

$$F = 0{,}5 \cdot \frac{200}{3} + 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4\frac{1000}{3} + 0{,}2 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 0 = \frac{620}{3} = \min.$$

Далее рассмотрим ***второй способ*** решения этой задачи. Он в значительной мере отличается от первого хотя бы тем, что здесь не требуется решать вспомогательную задачу для отыскания опорного плана (какого-то решения) исходной задачи. Этот способ позволяет нам приступить к непосредственному решению исходной задачи, поскольку в симплексных уравнениях, представленных в окончательной форме, имеется единичная подматрица.

Напомним читателю еще раз симплексные уравнения (3.24):

$$\left.\begin{aligned}
&500 = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 - 1x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 + \\
&+ 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4, \\
&1000 = 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 - 0x_6 - 1x_7 - 0x_8 - 0x_9 + \\
&+ 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 + 0y_4, \\
&200 = 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 1x_8 - 0x_9 + \\
&+ 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 + 0y_4, \\
&400 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 1x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 1x_9 + \\
&+ 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 1y_4.
\end{aligned}\right\}$$

Целевая функция была представлена выражением (3.16):

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 = min$$

или (3.26), что то же самое лишь в иной форме:

$$F = 0{,}1\,(5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5) = \min.$$

Искусственные переменные y_1, y_2, y_3 и y_4 входят в первоначальную программу, с которой начинается процесс решения задачи, как базисные с положительными значениями, но по ходу решения они постепенно исключаются из базисных переменных. Оптимальной программа станет не раньше, чем все эти искусственные переменные перейдут из базисных в свободные. Чтобы это обеспечить, искусственные неизвестные вводятся в уравнение целевой функции с коэффициентами (ценами), равными M.

Под M понимается величина больше любого другого сколько угодно большего наперед заданного числа. Таким образом, мы блокируем искусственные неизвестные, т. е. введением коэффициентов M мы избавляемся от влияния искусственных переменных на истинную оптимальную программу. Действительно, как только хотя бы одна из искусственных переменных в программе положительна, значение целевой функции расширенной задачи (с искусственными переменными), соответствующим подбором положительного числа M, может быть сделано больше любого значения целевой функции (3.16) исходной задачи при любых значениях основных переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Следовательно, минимум целевой функции может быть получен только при нулевых значениях искусственных переменных.

Целевая функция нашей задачи примет следующее выражение:

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 + My_1 + My_2 + My_3 + My_4 = \min$$

или с учетом сокращения на 0,1:

$$F = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 + My_1 + My_2 + My_3 + My_4 = \min$$

Теперь все готово для решения задачи. Можно приступить к составлению первой симплексной табл. (3.8), которая будет иметь точно такой же вид, как и в задачах, рассмотренных ранее[1]. В первоначальную программу войдут все искусственные переменные. Однако есть и некоторая особенность таблицы, заключающаяся в том, что в задачу входит неопределенное число M.

Исходная программа P_1 характеризуется следующими значениями переменных: $y_1 = 5$, $y_2 = 10$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$, все остальные неизвестные равны нулю.

Поскольку M рассматривается как обычное число, исходная величина целевой функции $F_1^{'}$ определяется, как

$$F_1^{'} = M\cdot 5 + M\cdot 10 + M\cdot 2 + M\cdot 4 = 21M,$$

что и записано в клетке F_1.

Далее вычисляем двойственные оценки и записываем их в оценочную строку. Для столбца x_1 она будет равна 5М – 5

$$\Delta_1 = (0\cdot M + 2\cdot M + 3\cdot M + 0\cdot M) - 5 = 5M - 5.$$

В результате получилось составное число. Поскольку величина M сколь угодно велика, может возникнуть вопрос: зачем надо умножать или тем более прибавлять к этому числу или вычитать из него ничтожно малые по сравнению с ним числа? Однако в процессе решения задачи абсолютная величина двойственных оценок не играет какой-либо существенной роли, важны соотношения между ними. И может оказаться, что одно составное число больше или меньше другого составного именно на сравнительно небольшую величину. К тому же и в ходе вычислений из некоторых составных чисел будут исключены M, и о величине соответствующих оценок надо будет судить по цифровой их части.

Все дальнейшие действия осуществляются обычным порядком.

Наибольшая оценка $\Delta_1 = 5M - 5$ находится в столбце с неизвестной x_1. Этот столбец и будет ключевым. В качестве ключевой строки принимается строка с неизвестной y_3, поскольку в ней минимальное положительное частное $\dfrac{b_i}{\alpha_{ij}}$, равное 2/3. Переходим к следующей программе, в которую введем неизвестную x_1 вместо y_3. Преобразуем матрицу и результат записываем в табл. 3.8 в части, соответствующей 2-й итерации.

Чтобы упростить операции с оценочной строкой, можно разделить ее на две строки. В верхней ее части следует записывать коэффициенты при M, в нижней — остальную часть соответствующего составного числа. Так, оценка столбца x_2 (вычисляемая с помощью коэффициента α) должна быть

$$\Delta_2 = (2M - 6) - 0\left(\frac{5M - 5}{3}\right) = 2M - 6.$$

В верхней части оценочной строки в этом столбце записываем 2, а в нижней — (-6).

Оценка, например, столбца x_5 будет

$$\Delta_5 = (2M - 3) - 1\left(\frac{5M - 5}{3}\right) = \frac{1}{3}M - \frac{4}{3}.$$

---

[1] Как и в предыдущем случае, составим одну обобщенную таблицу, в которую запишем расчеты по всем итерациям.

Табл. 3.8

			5	6	4	2	3	0	0	0	0	***M***	***M***	***M***	***M***			
c_0	P_0	***B***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	$\sum$	β	α
1-я итерация																		
M	y_1	5	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	7	∞	0
M	y_2	10	2	1	2	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	16	5	2/3
M	y_3	2	$\boxed{3}$	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	2/3	-
M	y_4	4	0	1	0	2	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	8	∞	0
	$F_1 =$	21M	5M-5	2M-6	3M-4	4M-2	2M-3	-M	-M	-M	-M	0	0	0	0		-	(5M-5)/3
2-я итерация																		

M	y_1	5	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	7	5	1/2
M	y_2	26/3	0	1	2	1	-2/3	0	-1	2/3	0	0	1	-2/3	0	12	26/3	1/2
5	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
M	y_4	4	0	1	0	$\boxed{2}$	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	8	2	-
	$M\to$	53/3	0	2	3	4	1/3	-1	-1	2/3	-1	0	0	-5/3	0		-	2
		10/3	0	-6	-4	-2	-4/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0		-	-1 119

Продолжение табл. 3.8

3-я итерация																		
M	y_1	3	0	-1/2	$\boxed{1}$	0	-1/2	-1	0	0	1/2	1	0	0	-1/2	3	3	-
M	y_2	20/3	0	1/2	2	0	-7/6	0	-1	2/3	1/2	0	1	-2/3	-1/2	8	10/3	2
5	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
2	x_4	2	0	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	0	1/2	4	∞	0

	$M\to$	29/3	0	0	3	0	-5/3	-1	-1	2/3	1	0	0	-5/3	-2		-	3
		22/3	0	-5	-4	0	-1/3	0	0	-1/3	-1/2	0	0	5/3	1		-	-4
4-я итерация																		
4	x_3	3	0	-1/2	1	0	-1/2	-1	0	0	1/2	1	0	0	-1/2	3	-	-1/2
M	y_2	2/3	0	3/2	0	0	-1/6	$\boxed{2}$	-1	2/3	-1/2	-2	1	-2/3	1/2	2	1/3	-
5	x_1	2/3	1	0	0	0	1/3	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2	∞	0
2	x_4	2	0	1/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	0	1/2	4	∞	0
	$M\to$	2/3	0	3/2	0	0	-1/6	2	-1	2/3	-1/2	-3	0	-5/3	-1/2		-	1
		58/3	0	-7	0	0	-7/3	-4	0	-5/3	1	4	0	5/3	-1		-	-2

Продолжение табл. 3.8

5-я итерация														
4	x_3	10/3												
0	x_6	1/3												
5	x_1	2/3												

2	x_4	2																
	$M\to$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-4	-	
		62/3	0	-4	0	0	-8/3	0	-2	-1/3	0	0	2	1/3	0	42/3	-	

Как в предыдущем случае, в верхней части оценочной строки записывается $\frac{1}{3}$, в нижней - $\left(-\frac{4}{3}\right)$.

Такое разделение оценочной строки не обязательно, однако создает некоторые удобства в дальнейших вычислениях.

Программа P_2, соответствующая 2-й итерации (x_1 = 2/3, y_1 = 5, $y_2 = \frac{26}{3}$, y_4 = 4, остальные x_j и y_3 равны нулю), оказалась также не оптимальной. Наибольшая двойственная оценка из положительных $\Delta_4 = 4M$-2 находится в столбце, соответствующем неизвестной x_4. Этот столбец следует принять за ключевой, переменную x_4 надо ввести в базис вместо переменной y_4, чтобы обеспечить переход к лучшему опорному плану. Все дальнейшие преобразования выполняются обычным порядком. Результаты записываются в таблице (3.8) в частях, соответствующих последовательным итерациям.

Итак, в оценочной строке, соответствующей 5-й итерации, в симплексной табл. 3.8 нет ни одной двойственной оценки больше нуля. Следовательно, программа P_5 (x_1=2/3, x_3 = 10/3, x_4=2, $x_6 = 1/3$), а с учетом коэффициента сокращения 100 —

$$x_1 = \frac{200}{3},\ x_3 = \frac{1000}{3},\ x_4 = 200,\ x_6 = \frac{100}{3},\ x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_7 = 0,\ x_8 = 0,\ x_9 = 0.$$

является оптимальной. Целевая функция F_5 приняла минимальное значение, равное $\frac{62}{3}$ или $\frac{620}{3}$, откорректировав на принятые ранее условности (коэффициенты 100 и 0,1). Нами получен такой же результат, как и при решении задачи первым способом. Иначе не должно быть. Решение задачи закончено.

Теперь перейдем к решению первого примера (3.12, 3.13) этого параграфа.

Здесь примем несколько иную форму изложения: более краткую (с надеждой на то, что читатель уже освоил «механику» симплексного метода); кроме того, будем применять более строгую математическую терминологию, свойственную линейному программированию (с тем, чтобы неподготовленный читатель постепенно привыкал к чтению математических разделов и книг).

Рассмотрим решение этой задачи на максимум целевой функции. Для этого составим эквивалентную задачу максимизации. В нашем примере надо найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию (3.13)

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

при условиях 3.13:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Сформулируем расширенную задачу максимизации

Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3, максимизирующие целевую функцию

$$F_1 = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - My_1 - My_2 - My_3{}^{*} \qquad (3.29)$$

---

* Поскольку целевую функцию F в данной задаче необходимо максимизировать, искусственные переменные y_1, y_2 и y_3, вводим в нее с отрицательными коэффициентами ($-M$). Здесь —M величина меньше всякого другого сколь угодно малого отрицательного числа.

при условиях

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 \qquad\quad &= 2,\\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad + y_2 \qquad &= 6,\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad + y_3 &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Имеем очевидную программу этой задачи $x_1 = 0$, $x_2=0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 6$, $y_3=7$, связанную с единичной подматрицей. Составляем симплексную таблицу. Исходная программа отражена в 1-й итерации (табл. 3.9). Данная таблица в отличие от предшествующих не содержит столбцов для искусственных переменных y_1, y_2, y_3, без них можно обойтись.

Применяя алгоритм симплексного метода, получаем в табл. 3.9 опорные планы на последующих итерациях.

Исходная программа оказалась не оптимальной. Для улучшения ее необходимо базисную переменную y_1 заместить свободной переменной x_1, поскольку в оценочной строке в этом столбце находится наименьшая отрицательная двойственная оценка Δ_1.

Поскольку и вторая программа P_2 оказалась также не оптимальной, переходим к следующей P_3. Для этого введем в нее неизвестную x_2 вместо базисной неизвестной y_2.

На следующей итерации будет вытеснена из базисных последняя искусственная переменная y_3 и мы получим программу исходной задачи, с базисными переменными x_1, x_2, x_3. Поэтому оценочная строка (в данном случае в 4-й итерации) должна быть заново сосчитана по формуле (3.12).

Табл. 3.9

			-2	-1	1	1			
Co	P_0	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum$	β	α
1-я итерация									
-*M*	y_1	2	$\boxed{1}$	-1	2	-1	3	2	-1
-*M*	y_2	6	2	1	-3	1	7	3	2
-*M*	y_3	7	1	1	1	1	11	7	1
M→		-15	-4	-1	0	-1	-21	—	-4
		0	2	1	-1	-1	1	—	2
2-я итерация									
-2	x_1	2	1	-1	2	-1	3	—	-1/3
-*M*	y_2	2	0	$\boxed{3}$	-7	3	1	2/3	—
-*M*	y_3	5	0	2	-1	2	8	5/2	2/3
M→		-7	0	-5	8	-5	-9	—	-5/3

		-4	0	3	-5	1	-5	—	1

Продолжение табл.3.9

3-я итерация

-2	x_1	8/3	1	0	-1/3	0	10/3	—	-1/11
-1	x_2	2/3	0	1	-7/3	1	1/3	—	-7/11
$-M$	y_3	11/3	0	0	$\boxed{11/3}$	0	22/3	1	-
	$M\rightarrow$	-11/3	0	0	-11/3	0	-22/3	—	- 1
		-6	0	0	2	-2	-6	—	6/11

4-я итерация

-2	x_1	3	1	0	0	0	4	∞	0
-1	x_2	3	0	1	0	$\boxed{1}$	5	3	-
1	x_3	1	0	0	1	0	2	∞	0
		-8	0	0	0	-2	- 10	—	-2

5-я итерация

-2	x_1	3							
1	x_4	3							
1	x_3	1							
		-2	0	2	0	0	0		

Четвертая программа (x_1 = 3, x_2=3, x_3=1, x_4=0) не является оптимальной, так как в оценочной строке, соответствующей 4-й итерации, двойственная оценка Δ_4= -2<0. Переходим к «лучшей» программе. С этого момента мы уже отошли от расширенной задачи и перешли к решению исходной задачи, правда, замененной еще эквивалентной задачей максимизации.

На 5-й итерации получено оптимальное решение исходной задачи. Оно характеризуется следующими значениями переменных: x_1=3, x_2=0, x_3=1, x_4=3 и целевая функция F = 2 = min.

Из рассмотренных примеров видно, что оптимальное решение исходной задачи (если она разрешима) содержится в оптимальном решении расширенной M-задачи при нулевых значениях искусственных переменных.

3.3. Двойственные задачи линейного программирования и применение теории двойственности

В гл. I было указано, что стандартной задачей максимизации является задача нахождения неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающих в максимум целевую функцию

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \tag{3.31}$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}\right\} \tag{3.32}$$

Или в краткой записи $F(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \max$ (3.31')

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i; \quad i = \overline{1,m} \tag{3.32'}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n}.$$

Аналогично формулируется стандартная задача минимизации, которая отличается в записи от стандартной задачи максимизации только знаками неравенств в системе ограничений (3.32). В стандартной задаче минимизации все ограничения-неравенства выражаются со знаками неравенств $\ge$.

Стандартной задаче максимизации соответствует стандартная задача минимизации, которая составляется по заданным числовым характеристикам a_{ij}, b_i, c_j исходной задачи следующим образом.

Будем называть исходную задачу (3.31), (3.32) *прямой* задачей. Каждому ограничению-неравенству (3.32) прямой задачи ставится в соответствие неотрицательная переменная двойственной задачи. Таким образом, число переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены b_1, b_2, ...,b_m в ограничениях-неравенствах прямой задачи. Число ограничений-неравенств в двойственной задаче равно числу переменных в прямой задаче, так что каждой переменной x_j ставится в соответствие j-е ограничение двойственной задачи. Коэффициентами этого j-го ограничения являются коэффициенты a_{1j}, a_{2j},..., a_{mj} при переменной x_j в системе ограничений (3.32) прямой задачи, т. е. j-и столбец A_j матрицы системы ограничений, а свободным членом — коэффициент c_j при переменной x_j в целевой функции (3.31) прямой задачи. Таким образом, двойственная задача по отношению к прямой задаче (3.31), (3.32) будет следующая задача.

Найти неотрицательные числа y_1, y_2,..., y_m, обращающие в минимум целевую функцию

$$G = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_iy_i + \ldots + b_my_m \tag{3.33}$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{i1}y_i + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ .... \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{ij}y_i + ... + a_{mj}y_m \ge c_j, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{in}y_i + ... + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{array}\right\} \qquad (3.34)$$

Или в краткой записи $G(y_i) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \min$ (3.33')

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j; \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.34')$$

$$y_i \ge 0; \; i = \overline{1,m}.$$

Если по вышеуказанным правилам составить задачу двойственную по отношению к последней задаче (3.33), (3.34), то получится исходная задача (3.31), (3.32). Поэтому обе эти задачи называются *взаимосопряженными*. Какую из этих задач называть прямой и какую — двойственной, зависит каждый раз от нашего соглашения.

Напомним, что *допустимым решением* или *планом* задачи линейного программирования называется любая совокупность значений неизвестных, входящих в задачу, которая удовлетворяет всем условиям задачи, т. е. допустимое решение — это любое неотрицательное решение системы ограничений задачи.

Оптимальное решение задачи — это такое допустимое решение, при котором целевая функция имеет наибольшее (или наименьшее) значение среди множества значений целевой функции на бесчисленном множестве допустимых решений. Этими определениями мы постоянно будем пользоваться при изложении основных соотношений между взаимосопряженными стандартными задачами.

Лемма. *Если x_1, x_2, ...,x_n допустимое решение стандартной задачи на максимум (3.31), (3.32) и y_1, y_2,..., y_m допустимое решение двойственной стандартной задачи на минимум (3.33), (3.34), то имеет место неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (3.35)$$

Иными словами, значение целевой функции на любом из .допустимых решений стандартной задачи на максимум не превосходит значения целевой функции на любом из допустимых решений двойственной стандартной задачи на минимум.

Доказательство. Умножим неравенства (3.34) соответственно на неотрицательные числа x_1, x_2, ..., x_n и просуммируем их; в результате получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i. \qquad (3.36)$$

Аналогично, умножая неравенства (3.32) соответственно на неотрицательные числа y_1, y_2,. . . , y_m и суммируя их, получаем:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (3.37)$$

Сопоставление неравенств (3.36) и (3.37) дает нам неравенство (3.35) и лемма доказана.

На основании доказанной леммы установим признак оптимальности допустимых решений взаимосопряженных стандартных задач.

Теорема 1 (первая теорема двойственности). *Если для допустимых решений* x_1, x_2, ..., x_n и $y_1, y_2,...,y_m$ *взаимосопряженных стандартных задач*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3.38}$$

то эти допустимые решения являются оптимальными решениями соответствующих задач.

Иными словами, если значения целевых функций взаимосопряженных задач совпадают при некоторых их допустимых решениях, то оба эти решения являются оптимальными.

Доказательство. Пусть $x_1^{'}, x_2^{'},..., x_m^{'}$ — какое-нибудь другое решение задачи на максимум. Тогда по лемме

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{'} \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Заменяя сумму в правой части этого неравенства равной суммой, на основании соотношения (3.38) получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{'} \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Это неравенство показывает, что значение целевой функции па любом допустимом решении $x_1^{'}, x_2^{'},..., x_m^{'}$ получается меньше, чем на допустимом решении x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющем условию теоремы. Это значит, что последнее допустимое решение задачи на максимум оптимальное. Аналогично можно доказать оптимальность допустимого решения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ двойственной задачи на минимум.

В теории линейного программирования не так просто доказывается, что условие равенства целевых функций (3.38) является не только достаточным, но и необходимым условием оптимальности допустимых решений; взаимосопряженных стандартных задач, т. е. если x_1, x_2, ..., x_n, и y_1, $y_2,...,y_m$ *оптимальные решения взаимосопряженных задач, то значения целевых функций для этих оптимальных решений одинаковы.* Имеет место еще одно соотношение между взаимосопряженными задачами, которое также является признаком оптимальности допустимых решений этих задач.

Теорема 2 (вторая теорема двойственности). *Допустимые решения* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и y_1, $y_2,...,y_m$ *взаимосопряженных стандартных задач являются оптимальными решениями этих задач тогда и только тогда, если в парах их двойственных условий*

$$y_i \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i . \tag{3.39}$$

и

$$x_j \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j . \tag{3.40}$$

первое условие является равенством, как только второе строгим неравенством.

Разъяснение. Строгие неравенства имеют знак > или <.

Доказательство. Допустим, что условия теоремы выполнены, т. е. что

$$y_i = 0 \text{ при } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i . \tag{3.41}$$

и

$$x_j = 0 \text{ при } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j . \tag{3.42}$$

Умножим ограничения-неравенства (3.32) соответственно на y_1, y_2,...,y_m, тогда при условии (3.41) все они превратятся в равенства

$$b_i y_i = y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,...,m.$$

Суммируя эти равенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i. \qquad (3.43)$$

Аналогично из ограничений-неравенств (3.34), при условии (3.42), мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i, \qquad (3.44)$$

а равенства (3.43) и (3.44) показывают, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

поэтому в силу теоремы 1 допустимые решения x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2,...,y_m являются *оптимальными решениями*.

Наоборот, если допустимые решения x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2,...,y_m являются оптимальными решениями, то значения целевых функций при этих решениях должны быть одинаковы, т. е. неравенство (3.35) должно быть равенством:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (3.45)$$

Из соотношения (3.45) получаем два равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \qquad (3.46)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \right) = 0. \qquad (3.47)$$

Поскольку числа x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2,...,y_m являются допустимыми, слагаемые сумм (3.46) и (3.47) неотрицательны. Но сумма неотрицательных чисел может равняться нулю только в том случае, если каждое слагаемое равно нулю. Следовательно,

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad \text{для всех } j. \qquad (3.48)$$

$$y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0 \quad \text{для всех } i \qquad (3.49)$$

откуда следуют условия теоремы (3.41) и (3.42).

Более того, из равенств (3.48) и (3.49) следует, что при оптимальных $x_j>0$ и $y_i>0$ соответствующие им ограничения-неравенства должны быть равенствами.

Полученный результат можно интерпретировать **с точки зрения экономики**. Например, задача определения оптимального производственного плана выпуска n видов продукции при имеющихся запасах m видов сырья имеет модель типа задачи максимизации (3.31) — (3.32), в котором: свободные члены b_i ограничений-неравенств (3.32)—объемы имеющихся запасов сырья; коэффициенты c_j целевой функции (3.31)—прибыли, приходящиеся на единицу j-и продукции, производимой предприятием; коэффициенты a_{ij} в ограничениях (3.32) —затраты i-го вида сырья на изготовление единицы j-и продукции. Целевая функция (3.31) представляет собой суммарную прибыль от реализации всех n видов продукции.

Каждое из ограничений-неравенств (3.32) выражает, что расход j-го вида сырья не может превышать его запаса b_i.

Переменные y_i двойственной задачи минимизации (3.33) — (3.34) можно интерпретировать как цены (относительные оценки) единицы i-го сырья, которые учитывают лимитированность и интенсивность расходования i-го сырья при изготовлении всей продукции. Целевая функция (3.33) двойственной задачи (суммарная стоимость всего сырья, которым располагает производство) должна быть минимальной. Ограничения-неравенства (3.34) двойственной задачи выражают, что относительная стоимость сырья, затрачиваемая на производство единицы j-го продукта, должна быть не меньше получаемой от реализации единицы этого продукта прибыли c_j

Равенство целевых функций (3.31) и (3.33) при оптимальных решениях обеих задач, означает, что максимальная прибыль получается при равной минимальной относительной стоимости всех видов сырья, в том числе и не полностью израсходованных.

Условие (3.41) означает, что если на предприятии имеется избыток i-го вида сырья (i-е сырье расходуется при оптимальном плане производства не полностью), то цена его y_i (относительная оценка, с точки зрения лимитированности и интенсивности расходования) должна опуститься до нуля.

Условие (3.42) означает, что если стоимость сырья, затрачиваемого на производство единицы j-го продукта, превосходит прибыль c_j от реализации этой единицы, то j-и продукт производить не рационально (с точки зрения получения максимальной общей прибыли), т. е. должно быть в оптимальном плане производства x_j=0.

Пусть теперь дана каноническая форма задачи линейного программирования, заключающаяся в нахождении неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n обращающих в максимум целевую функцию

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_jx_j.+\ldots+c_nx_n \tag{3.50}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.
\end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

В этой задаче система ограничений (3.51) представляет собой систему $m<n$ линейных уравнений с n неизвестными. Двойственная задача по отношению к данной задаче (3.50) — (3.51) составляется так же, как и для стандартной задачи, с той лишь разницей, что на переменные y_1, y_2,..., y_m *не накладываются никакие ограничения по знаку*, т. е. эти переменные могут иметь любой знак.

Таким образом, двойственной по отношению к канонической задаче является следующая задача.

Требуется найти числа y_1, y_2,..., y_m, обращающие в минимум целевую функцию

$$G = b_1y_1 + b_2y_2 + \ \dots\ + b_iy_i + \ \dots\ + b_my_m \qquad (3.52)$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{ij}y_i + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{in}y_i + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{array}\right\} \qquad (3.53)$$

Для задач (3.50), (3.51) и (3.52), (3.53) приемлема первая теорема двойственности, а также вторая теорема двойственности, в которой рассматриваются только пары двойственных условий (3.40).

Аналогично составляется задача двойственная к канонической задаче минимизации, с той лишь разницей, что в ограничениях-неравенствах двойственной задачи должны быть знаки неравенств ≤.

$$F(x_j) = \sum c_j x_j = \min \qquad G = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1,n}$$

Кроме симплексного метода решения задачи линейного программирования, существуют и другие методы, основанные на идее двойственности. При решении задачи симплексным методом одновременно получается оптимальное решение двойственной задачи. Это оптимальное решение представляется в последней симплексной таблице двойственными оценками Δj, соответствующими базисным неизвестным в исходной симплексной таблице. *Если задача решается методом искусственного базиса*, то оптимальными переменными двойственной задачи являются двойственные оценки Δ_j в последней симплексной таблице, соответствующие искусственным переменным, *взятые с их знаками в задачах минимизации и с обратными знаками в задачах максимизации.*

Используя теоремы двойственности, можно проверить правильность решения задачи линейного программирования и в некоторых случаях применить более простые приемы решения задач.

Применяя изложенные выше положения теории двойственности, проверим правильность решения задач, приведенных в § 1 и 2 данной главы.

Так, табл. 3.5 в 3.1 является последней симплексной таблицей, в которой содержится результат решения задачи: найти максимум целевой функции

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \qquad (3.54)$$

при условиях:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 1000, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 2200. \end{aligned}\right\} \qquad (3.55)$$

Из табл. 3.5 было получено следующее оптимальное решение:

$$x_1 = \frac{11800}{29};\ x_2 = \frac{3300}{29};\ \ x_3 = \frac{2000}{29}. \qquad (3.56)$$

В исходной симплексной табл. 3.2 базисными переменными являются дополнительные (выравнивающие) переменные x_4, x_5, x_6, x_7, которые соответствуют первому, второму, третьему и четвертому ограничениям-неравенствам. Следовательно, оптимальным решением двойственной задачи будет совокупность двойственных оценок $y_1=\Delta_4$, $y_2=\Delta_5$, $y_3=\Delta_6$, $y_4=\Delta_7$ в последней симплексной таблице. Эти оценки находятся в последней строке табл. 3.5 в столбцах x_4, x_5, x_6, x_7. Откуда:

$$y_1 = \frac{24}{29};\ y_2 = \frac{7}{29};\ \ y_3 = 0; y_4 = \frac{8}{29}. \qquad (3.57)$$

Составим двойственную задачу.

Найти минимум целевой функции

$$G = 1500y_1 + 1000y_2 + 1800y_3 + 2200y_4 \qquad (3.58)$$

при условиях: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$; $y_3 \ge 0$; $y_4 \ge 0$

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 &\ge 3, \\ 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2y_4 &\ge 4, \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 5y_4 &\ge 6. \end{aligned}\right\} \qquad (3.59)$$

Решения (3.56) и (3.57) допустимы, так как они неотрицательны и условия (3.55) и (3.59) соответственно выполняются. Значения целевых функций (3.54) и (3.58) для этих допустимых решении $\max F = \dfrac{60600}{29}$ и $\min G = \dfrac{60600}{29}$ одинаковы, следовательно, по первой теореме двойственности оба допустимых решения (3.56) и (3.57) действительно являются оптимальными. Значит задача решена правильно.

Проверим также правильность решения раскройной задачи (3.16), (3.17), приведенной в 3.2, в которой требовалось найти минимум целевой функции

$$F = 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 \qquad (3.60)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_3 + x_4 &\ge 500, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\ge 1000, \\ 3x_1 + x_5 &\ge 200, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 &\ge 400. \end{aligned}\right\} \qquad (3.61)$$

Решение этой задачи проведено так, что искусственные переменные (мы их обозначали y_i в отличие от основных и дополнительных x_j) y_1, y_2, y_3, y_4, которые являлись исходными базисными переменными в 1-й итерации в симплексной табл. 3.6, в результативной таблице 3.7 опущены. Поэтому оптимального решения двойственной задачи в окончательной табл. 3.7 не содержится. Однако мы можем проконтролировать правильность решения задачи. Из табл. 3.7 мы получаем оптимальное решение задачи (3.60), (3.61):

$$x_1 = \frac{200}{3};\ x_2 = 0; x_3 = \frac{1000}{3};\ \ x_4 = 200; x_5 = 0. \qquad (3.62)$$

Совокупность неизвестных (3.62) удовлетворяет ограничениям (3.61). При этом 2, 3 и 4-е ограничения являются равенствами, а первое ограничение — строгим неравенством $\left(\frac{1600}{3} > 500\right)$. Значение целевой функции для допустимого решения (3.62) равно

$$F = \frac{620}{3}.$$

Составим условие двойственной задачи. При этом неизвестные ее здесь будем обозначать z_i, поскольку символ y_i был использован при решении прямой задачи (3.16), (3.17) для обозначения искусственных переменных.

Найти максимум целевой функции:

$$G=500z_1+100\,z_2+200\,z_3+400\,z_4 \qquad (3.63)$$

при условиях:

$$z_1\geq 0,\ z_2\geq 0;\ z_3\geq 0;\ z_4\geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2z_2 + 3z_3 \qquad &\leq 0{,}5,\\ z_2 \qquad + z_4 &\leq 0{,}6,\\ z_1 + 2z_2 \qquad\qquad &\leq 0{,}4,\\ z_1 + \ z_2 \qquad + 2z_4 &\leq 0{,}2,\\ z_3 + z_4 &\leq 0{,}3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.64)$$

Предположим, что $z_1^{'}, z_2^{'}, z_3^{'}, z_4^{'}$ неизвестное оптимальное решение двойственной задачи (3.63), (3.64) и (3.62) действительно оптимальное решение исходной задачи (3.60), (3.61). Переменная z_1 соответствует первому ограничению-неравенству в системе (3.61), которое при оптимальном решении (3.62) является строгим неравенством. Следовательно, по второй теореме двойственности должно быть $z_1^{'} = 0$. По этой же теореме первое, третье и четвертое ограничения в системе (3.64) должны быть равенствами, так как соответствующие им переменные x_1, x_3 и x_4 положительны:

$$x_1 = \frac{200}{3} > 0;\ \ x_3 = \frac{1000}{3} > 0;\ \ x_4 = 200 > 0.$$

Таким образом, учитывая, что $z_1^{'} = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} 2z_2^{'} + 3z_3^{'} &= 0{,}5,\\ 2z_2^{'} \qquad &= 0{,}4,\\ z_2^{'} + 2z_4^{'} &= 0{,}2, \end{aligned}$$

откуда

$$z_2^{'} = \frac{1}{5},\ z_3^{'} = \frac{1}{30} \text{ и } z_4^{'} = 0.$$

Подставим найденные значения z'_2, z'_3, z'_4 во второе и пятое ограничения (3.64)

$$0{,}2+0<0{,}6,$$

$$\frac{1}{30}+0<0{,}3,$$

которые выполняются как строгие неравенства и поэтому соответствующие этим ограничениям переменные x_2 и x_5 должны равняться нулю (они действительно равны нулю).

Таким образом, допустимое решение (3.62) и допустимое решение двойственной задачи

$$z_1=0, z_2=\frac{1}{5},\ z_3=\frac{1}{30},\ z_4=0 \tag{3.65}$$

удовлетворяют всем условиям второй теоремы двойственности и поэтому являются оптимальными. Значит, задача (3.60), (3.61) решена правильно. Можно еще раз убедиться в правильности решения этой задачи, применив первую теорему двойственности, по которой должно быть совпадение значений целевых функций на допустимых решениях .прямой (3.60) и сопряженной (3.63) задач.

Действительно, $F=\dfrac{620}{3}$ и

$$G=500\cdot 0+1000\cdot\frac{1}{5}+200\cdot\frac{1}{30}+400\cdot 0=\frac{620}{3}.$$

Итак, доказав с помощью теории двойственности правильность решения раскройной задачи (3.16),(3.17), можно сделать еще одно существенное замечание.

Задачу, условие которой представлено целевой функцией

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\min$$

и ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\ i=1,2,...,m$$

$$x_j\ge 0,$$

можно было бы решить гораздо проще, чем это было сделано в 3.2 данной главы. Здесь проще решается симплексным методом двойственная задача по отношению этой прямой на максимум целевой функции

$$G=\sum_{i=1}^{m}b_iz_i$$

и ограничениями

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \le c_j, \; j = 1,2,...,n,$$

$$z_i \ge 0.$$

При решении этой двойственной задачи не требуется решать вспомогательную или *M*-задачу.

Таким образом, можно было бы в нашем случае решить задачу (3.63), (3.64), и в последней симплексной таблице мы бы имели решение заданной задачи (3.60), (3.61). Рекомендуется это сделать читателю.

Наконец, проверим, правильно ли решена каноническая задача (3.12), (3.13), приведенная в 3.2 настоящей главы. Еще раз перепишем условие этой задачи.

Найти минимум целевой функции

$$F=2x_1+x_2-x_3-x_4 \tag{3.66}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7, \end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Оптимальное решение этой задачи получено из последней симплексной таблицы (3.9)

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3=1,\ x_4 = 3 \text{ и } F_{\min}=2. \tag{3.68}$$

В табл. 3.9 столбцы для искусственных переменных опущены, следовательно, мы не имеем возможности прочесть оптимальное решение двойственной задачи:

найти максимум целевой функции

$$G=2y_1+6y_2+7y_3 \tag{3.69}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\le 2, \\ -y_1 + y_2 + y_3 &\le 1, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 &\le -1, \\ -y_1 + y_2 + y_3 &\le -1. \end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

Однако мы его можем просто найти. Пусть $y_1^{'}, y_2^{'}, y_3^{'}$— оптимальное решение двойственной задачи (3.69), (3.70). Если (3.68) оптимальное решение, то при $y_1 = y_1^{'}, y_2 = y_2^{'}, y_3 = y_3^{'}$ первое, третье и четвертое ограничения (3.70) должны быть равенствами:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{'} + 2y_2^{'} + y_3^{'} &= 2, \\ 2y_1^{'} - 3y_2^{'} + y_3^{'} &= -1, \\ -y_1^{'} + y_2^{'} + y_3^{'} &= -1, \end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

так как они соответствуют положительным значениям переменных в оптимальном решении (3.68) ($x_1 = 3>0$; $x_3=1>0$; $x_4 = 3>0$). Система (3.71) имеет единственное решение:

$$y_1 = 12/11,\ y_2 = 9/11,\ y_3= -8/11. \tag{3.72}$$

Подставляя эти числа во второе ограничение (3.70), получим строгое неравенство

$$-12/11+9/11-8/11=-1<1,$$

которому соответствует в решении (3.68) $x_2 = 0$. Таким образом, выполняется условие второй теоремы двойственности и допустимые решения (3.68) и (3.72) действительно являются оптимальными решениями. В этом можно еще дополнительно убедиться проверкой равенства $F_{min} = G_{max}$. Действительно, подставляя значения (3.72) в выражение (3.69), имеем

$$G_{max}=2\cdot12/11+6\cdot9/11-7\cdot8/11=2$$

И из (3.66), (3.68) $F_{min}=2$.

В оптимальном решении двойственной задачи (3.69), (3.70) переменная $y_3 = -8/11$ приняла отрицательное значение. Этим не следует смущаться, так как в задаче двойственной к канонической задаче переменные не ограничиваются по знаку.

3.4. Понятие о вырожденности

Вычислительные правила симплексного метода выводятся в предположении, что в каждой программе все m базисных переменных имеют положительные значения. Такие программы называются *невырожденными.* Программа, в которой хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение, является *вырожденной,* а задача линейного программирования, имеющая хотя бы одну вырожденную программу,— *вырожденной задачей.*

Условие невырожденности используется только при обосновании правил перехода (см. 3.1) от одной программы (опорного решения) к «лучшей» программе, т. е. к такому решению, при котором происходит увеличение значения целевой функции. Там же установлена связь между двумя смежными значениями целевой функции F и F' в виде формулы

$$F^{'} = F - \beta\,\Delta_k, \qquad \text{где}$$

$$\beta = \min\left[\frac{b_i}{a_{ik}}\right] > 0.$$

В невырожденном случае всегда $\beta>0$, в вырожденном же случае, когда не все $b_i>0$, минимум отношения $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ может оказаться равным нулю, т. е. $\beta = 0$, и никакого «улучшения» при переходе к новому опорному решению не получится. Не исключена возможность неограниченного количества итераций без какого-либо увеличения значения целевой функции. Это случится, если последовательные замещения базисных переменных образуют так называемый *цикл,* т. е. если будет происходить повторение нескольких программ при невыполнении признака оптимальности по знакам чисел Δ_j оценочной строки.

Хотя вырожденные задачи линейного программирования встречаются относительно часто, «зацикливание» при решении их симплексным методом появляется лишь в исключительных случаях. Это объясняется тем, что зацикливание обусловлено не только вырождением, но и другими условиями, которые встречаются весьма редко. Установлено, что зацикливание невозможно, если каждая программа содержит не менее чем m—1 положительных значений переменных.

Существуют различные способы устранения возникновения зацикливания. Однако в практических вычислениях они почти никогда не применяются. Обычно при решении реальных вырожденных задач линейного программирования придерживаются обычной схемы симплексного метода. В любом случае делают некоторое замещение базисного вектора. После ряда замещений «без улучшения» в конце концов становится возможным либо произвести замещение с улучшением, либо получить оптимальное решение.

Рассмотрим конкретный числовой пример.

Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, максимизирующие целевую функцию

$$F= x_1+2x_2+3x_3 \tag{3.73}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3 &\le 6,\\ -x_1+2x_2+2x_3 &\le 3,\\ x_1-2x_2+x_3 &\le 0,\\ -x_1+2x_2+x_3 &\le 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

Приведем данную задачу к эквивалентной канонической задаче. Найти неотрицательные числа x_1, x_2,…, x_7, максимизирующие целевую функцию

$$F= x_1+2x_2+3x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7 \tag{3.75}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 6,\\ -x_1+2x_2+2x_3+x_5 &= 3,\\ x_1-2x_2+x_3+x_6 &= 0,\\ -x_1+2x_2+x_3+x_7 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

Т а б л. 3.10

			1	2	3	0	0	0	0			
c_o	P_o	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\sum$	β	α
1-я итерация												
0	x_4	6	3	2	1	1	0	0	0	13	6	1
0	x_5	3	-1	2	2	0	1	0	0	7	3/2	2
0	x_6	0	1	-2	$\boxed{1}$	0	0	1	0	1	0	-
0	x_7	0	-1	2	1	0	0	0	1	3	0	1
		0	-1	-2	-3	0	0	0	0	-6	-	-3

2-я итерация												
0	x_4	6	2	4	0	1	0	-1	0	12	$^3/_2$	1
0	x_5	3	-3	6	0	0	1	-2	0	5	1/2	3/2
3	x_3	0	1	-2	1	0	0	1	0	1	-	-1/2
0	x_7	0	-2	$\boxed{4}$	0	0	0	-1	1	2	0	-
		0	2	-8	0	0	0	3	0	-3	-	-2
3-я итерация												
0	x_4	6	$\boxed{4}$	0	0	1	0	0	-1	10	3/2	-
0	x_5	3	0	0	0	0	1	-1/2	-3/2	2	∞	0
3	x_3	0	0	0	1	0	0	1/2	1/2	2	-	0
2	x_2	0	-1/2	1	0	0	0	-1/4	1/4	1/2	-	-1/8
		0	-2	0	0	0	0	1	2	1	-	-1/2
4-я итерация												
1	x_1	3/2										
0	x_5	3										
3	x_3	0										
2	x_2	3/4										
		3	0	0	0	1/2	0	1	3/2	6		

Эта задача имеет очевидную вырожденную исходную программу x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=6, x_5=3, x_6=0, x_7=0, связанную с единичной подматрицей. Здесь две базисных неизвестных x_6 и x_7 равны нулю. Составим симплексную табл. (3.10) и проведем последующие итерации.

Несмотря на явную вырожденность предложенной задачи (все программы вырожденные), применение обычного алгоритма симплексного метода привело очень быстро к оптимальному решению $x_1 = {}^3/2$, $x_2 = {}^3/4$, $x_3 = 0$, x_4=0, $x_5 = 3$, $x_6 = 0$, x_7 =0. При этом только на последней итерации получилось приращение целевой функции. На всех предыдущих итерациях значение целевой функции оставалось неизменным нулевым исходным значением.

3.5. Обнаружение неразрешимости задачи линейного программирования

Неразрешимость задачи линейного программирования может происходить по двум причинам: либо задача не имеет ни одной программы (опорного решения), либо целевая функция условиями задачи не ограничена.

В первом случае неразрешимость задачи обнаруживается тем, что в процессе решения *М*-задачи будет получено ее оптимальное решение еще до того, как будут выведены из базисных все искусственные переменные. При этом из оставшихся искусственных базисных переменных y_i хотя бы одна будет отлична от нуля. Это значит, что в процессе решения M-задачи мы не достигнем программы (опорного решения) исходной задачи, потому что таковой не существует или же вообще система уравнений несовместна. А так как разрешимая задача линейного программирования, заданная в канонической форме, всегда имеет хотя бы одну программу (опорное решение), являющуюся оптимальной, то отсутствие программ указывает на ее неразрешимость.

Рассмотрим два небольших примера неразрешимых задач линейного программирования (на две причины неразрешимости).

В отличие от всех уже рассмотренных нами задач в этих примерах примем ограничительные условия смешанного типа:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge\} b_i, \ (i = 1,2,...,m),$$

чтобы читатель попутно освоил решение и этого типа задач.

Необходимо найти неотрицательные числа $x_1 \ge 0$ и, $x_2 \ge 0$ максимизирующие целевую функцию

$$F = 2x_1 + x_2 \qquad (3.77)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\ge 3, \\ 3x_1 - x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.78)$$

Путем введения дополнительных неотрицательных переменных x_3, x_4 приводим эту задачу к следующей эквивалентной канонической задаче.

Найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию

$$F = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \qquad (3.79)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad &= 3, \\ 3x_1 - \ x_2 \qquad + x_4 &= 2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.80)$$

Составляем условие эквивалентной M-задачи. Требуется найти неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, максимизирующие целевую функцию

$$F_1 = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - My_1, \qquad (3.81)$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad + y_1 &= 3, \\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.82)$$

Составим симплексную табл.3.11 (столбец для искусственной переменной y_1 в таблицу не включаем) и проделаем последовательные итерации.

Исходная программа ($y_1 = 3$, $x_4 = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) оказалась не оптимальной. Для улучшения плана проводим замещение базисной переменной x_4 свободной переменной x_1, поскольку в этом столбце отрицательная двойственная оценка.

Табл. 3.11

			2	1	0	0			
Co	P_0	B	x_1	x_2	x_3	x_4	Σ	β	α

1-я итерация									
$-M$	y_1	3	2	-3	-1	0	1	3/2	2/3
0	x_4	2	$\boxed{3}$	-1	0	1	5	2/3	-
	$M\to$	-3	-2	3	1	0	-1	-	-2/3
		0	-2	-1	0	0	-3	-	-2/3
2-я итерация									
$-M$	y_1	5/3							
2	x_1	2/3							
	$M\to$	-5/3	0	7/3	1	2/3	7/3		
		4/3	0	-5/3	0	2/3	1/3		

Уже на второй итерации решения задачи в оценочной строке нет отрицательных оценок, следовательно, полученное решение системы (3.82).

$$x_1=2/3,\quad x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0,\ y_1=5/3$$

является оптимальным решением M-задачи, в котором искусственная переменная y_1 не равна нулю.

Следовательно, задача (3.79, 3.80), а значит и задача (3.77, 3.78) не имеют решения.

Неразрешимость задачи линейного программирования вследствие неограниченности целевой функции также обнаруживается в процессе замещений. Предположим, что на некоторой итерации в симплексной таблице все столбцы, в которых числа оценочной строки Δj отрицательны, не имеют положительных элементов a_{ij}.

Тогда по правилам симплексного метода нет возможности определить, какую переменную следует ввести в базисные и какую переменную следует вывести из базисных. В таком случае задача неразрешима (целевая функция не ограничена сверху при максимизации и снизу при минимизации).

Требуется найти неотрицательные числа $x_1\geq0$, $x_2\geq0$, максимизирующие целевую функцию

$$F=x_1+2x_2 \tag{3.83}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2&\leq 3,\\ x_1+x_2&\geq 2.\end{aligned}\right\} \tag{3.84}$$

Путем введения дополнительных (выравнивающих) неотрицательных переменных x_3, x_4 приводим эту задачу к эквивалентной канонической задаче.

Найти неотрицательные числа x_1 x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию

$$F=x_1+2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4 \tag{3.85}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2+x_3 \quad &= 3, \\ x_1+x_2 \quad -x_4 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{3.86}$$

Составляем условие M-задачи. Требуется найти неотрицательные числа x_1 x_2, x_3, x_4, y_2, максимизирующие целевую функцию

$$F=x_1+2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4-My_2 \tag{3.87}$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2+x_3 \qquad &= 3, \\ x_1+x_2 \quad -x_4+y_2 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{3.88}$$

Составляем симплексную табл. 3.12 (без столбца y_2) и проводим соответствующие вычисления по итерациям.

Для перехода от 1-й итерации ко 2-й исключаем из базисных переменных искусственную переменную y_2, заменяя ее свободной переменной x_2.

На 2-й итерации двойственная оценка Δ_4 отрицательная, следовательно, надо перейти к третьей итерации. Для этого исключаем из базисных переменную x_3, заменяя ее свободной переменной x_4.

На 3-й итерации в оценочной строке имеется отрицательная двойственная оценка Δ_1.

Т а б л . 3.12

			1	2	0	0			
C_0	P_0	B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum$	β	α
1-я итерация									
0	x_3	3	-2	1	1	0	3	3	1
-M	y_2	2	1	$\boxed{1}$	0	-1	3	2	-
$M\rightarrow$		-2	-1	–1	0	1	-3	-	-1
		0	-1	-2	0	0	-3	-	-2
2-я итерация									
0	x_3	1	-3	0	1	$\boxed{1}$	0	1	-
2	x_2	2	1	1	0	-1	3	-	-1
		4	1	0	0	-2	3	-	-2
3-я итерация									
0	x_4	1	-3	0	1	1	0		
2	x_2	3	-2	1	1	0	3		
		6	-5	0	2	0	3		

По признаку знаков двойственных оценок следовало бы ввести в базисные переменные только x_1, но в столбце x_1 нет положительных элементов, следовательно, задача решения не имеет. Целевая функция условиями задачи не ограничена сверху.

Глава 4. ТРАНСПОРТНЫЕ АЛГОРИТМЫ. ИХ СУЩНОСТЬ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

В 1.3 рассмотрена экономико-математическая постановка транспортной задачи, которая заключается в отыскании значений x_{ij}, минимизирующих целевую функцию

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{4.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = 1,2,...,m, \tag{4.2}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = 1,2,...,n, \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = 1,2,...,m; \; j = 1,2,...,n. \tag{4.4}$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.5}$$

Напомним, что условие (4.2) означает, что из i-го пункта производства надо вывезти во все пункты потребления количество материалов a_i, предназначенное к реализации, а условие (4.3) — что в каждый пункт потребления j должно быть завезено (поставлено) заданное количество материалов, равное спросу на них в этом пункте. При этом суммарные затраты на поставку всех материалов, выраженные в целевой функции (4.1), должны быть минимальными.

Решение транспортной задачи, а также приведенных к ней задач, может осуществляться различными математическими методами линейного программирования, в том числе и ранее рассмотренным симплексным методом. Однако такие задачи целесообразнее решать специальными методами линейного программирования, относящимися к группе транспортных алгоритмов. В эту группу входят: распределительный метод, модифицированный распределительный (кратко — моди), метод потенциалов, метод дифференциальных рент, венгерский и др.

Самым простым (однако менее рациональным) методом в этой группе является распределительный метод. Между тем при решении транспортной задачи посредством этого метода наиболее показательно прослеживается экономическая сущность принципа последовательного улучшения плана и вообще отыскания оптимального решения.

Для практического применения наиболее приемлемыми следует считать: метод потенциалов, модифицированный распределительный и метод дифференциальных рент. Следует заметить, что метод потенциалов и модифицированный распределительный метод чрезвычайно похожи друг на друга.

В этой главе будут рассмотрены распределительный метод, метод потенциалов и метод дифференциальных рент.

4.1. Распределительный метод

Распределительный метод является одним из вариантов базового симплексного метода. Поэтому идея распределительного метода (как и симплексного) содержит такие же три существенных момента.

Прежде всего отыскивается какое-то решение задачи — исходный опорный план. Затем посредством специальных показателей опорный план проверяется на оптимальность. Если план оказывается не оптимальным, переходят к другому плану. При этом второй и последующие планы должны быть лучше предыдущего. Так за несколько последовательных переходов от не оптимального плана приходят к оптимальному.

Сущность алгоритма распределительного метода читатель может лучше всего понять на рассмотрении числового примера.

Предположим, имеются четыре леспромхоза – поставщика лесопродукции (например, пиловочника) A_1, A_2, A_3, A_4. Известны объемы (в тыс.м^3) возможностей поставки пиловочника – a_1, a_2, a_3, a_4 в планируемом году.

Потребителями пиловочника являются четыре лесопильно-деревообрабатывающих предприятия B_1, B_2, B_3, B_4 с возможным объемом (в тыс.м^3) переработки - b_1, b_2, b_3 и b_4.

Известны затраты (в руб.) на поставку 1 м^3 пиловочника из пункта его производства в пункт потребления, т.е. из лесопромхозов в ЛДП.

Исходные данные условия задачи приведены в табл. 4.1.

Т а б л. 4.1

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
		Затраты на поставку 1м^3, руб.			
A_1	150	5	3	2	3
A_2	250	3	4	5	4
A_3	230	2	5	6	5
A_4	220	1	2	3	6

В задаче требуется определить направление и объемы поставки пиловочника из леспромхозов на лесопильно-деревообрабатывающие предприятия, которые обеспечили бы минимальные суммарные затраты на поставку при условии, что потребности ЛДП в пиловочнике будут удовлетворены полностью и продукция леспромхозов реализована без остатка.

Иными словами, в задаче необходимо отыскать матрицу перевозки:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

или, короче, $X=[x_{ij}]_{mn}$, при i=1,2,3,4; j=1,2,3,4, которая удовлетворяла бы условиям (4.1)-(4.4). Здесь также выдержано условие (4.5):

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 850.$$

Решение задачи выполняется за несколько последовательных итераций.

Первая итерация заключается в определении исходного опорного плана и проверке его на оптимальность.

Определение исходного опорного плана. Первый опорный план может быть найден посредством различных способов: по правилу северо-западного угла, приоритету ближайших пунктов, способу минимального элемента $C=(c_{ij})$, способу Фогеля и, наконец, по способу Лебедева-Тихомирова. Рассмотрим некоторые из них.

Самый простой (и в то же время самый плохой) способ называется *правилом северо-западного угла.* Это формальный способ (порядок) распределения поставок между потребителями, приводящий обычно к плану поставок, весьма далекому от оптимального. Рассмотрим его на нашем примере. Для этого исходные условия задачи представим в рабочей табл.4.2.

Т а б л. 4.2

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
		Затраты на поставку 1м^3, руб.			
A_1	150	5 150	3	2	3
A_2	250	3 50	4 200	5	4
A_3	230	2	5	6 230	5
A_4	220	1	2	3 20	6 200

В соответствии с примером (табл.4.2) первый опорный план можно определить следующим образом.

Согласно правилу северо-западного угла сначала находим значение x_{11} (т.е. в первую очередь заполняем поставкой клетку A_1B_1, расположенную в северо-западном углу) из условия

$$x_{11}=\min(a_1,b_1).$$

Если $a_1\leq b_1$, то $x_{11}= a_1$ и все остальные $x_{1j}=0$; если же $a_1\geq b_1$, то $x_{11}= b_1$ и остальные $x_{i1}=0$. Для данного примера $x_{11}=\min(150,200)=150$, $x_{12}=0$, $x_{13}=0$, $x_{14}=0$. Поставку $x_{11}=150$ записываем в табл. 4.2 в клетку A_1B_1.

После этого определяем значение x_{21} по аналогичному правилу: $x_{21}=\min(250,200-150)=50$. Тогда $x_{31}=0$ и $x_{41}=0$.

Иными словами, потребности потребителя B_1 $b_1=200$ удовлетворяются частично за счет поставщика A_1-150 тыс.м^3 и частично поставщика A_2 – 50 тыс.м^3, поскольку мощность первого поставщика ограничена и оказалась меньше спроса потребителя B_1.

Далее определяется значение x_{22} для заполнения клетки A_2B_2. У поставщика A_2 нераспределенными остались 200 тыс.м^3, потребителю B_2 необходимы также 200 тыс.м^3, следовательно $x_{22}=200$, $x_{23}=0$ и $x_{24}=0$, $x_{32}=0$ и $x_{42}=0$.

Затем определяем значение x_{33} в данном случае из условия $x_{33}=\min(a_3,b_3)$, $x_{33}=\min(230,250)=230$ и записываем его в клетку A_3B_3. При этом $x_{34}=0$. Остались незаполненными две клетки A_4B_3 и A_4B_4. Для данного случая $x_{43}=20$, $x_{44}=200$.

Этот способ в некоторой литературе называется *диагональным*, поскольку распределение поставок по клеткам производится последовательно, начиная с левой верхней клетки и далее уступами по диагонали к нижней правой, в нашем примере с A_1B_1 к A_4B_4.

В результате такого распределения получен опорный план (табл.4.2), удовлетворяющий условиям (4.2, 4.3, 4.4), однако очень далекий, как будет видно дальше, от оптимального.

Значение целевой функции (4.1) для этого опорного плана равно

$$F=5\cdot150+3\cdot50+4\cdot200+6\cdot230+3\cdot20+6\cdot200=4340.$$

Таким образом, если бы осуществить поставки пиловочника по этому опорному плану, общие затраты на поставку составили бы 4340 тыс.руб.

Запомним значение целевой функции, характеризующее опорный план, найденный по правилу северо-западного угла. Сам же план оставим, и отыщем иное исходное решение задачи, но на этот раз посредством лучшего способа, называемого *способом минимального элемента* (или наименьшего элемента в матрице $C(c_{ij})$).

Способ минимального элемента позволяет в малой и большой задаче отыскать исходный опорный план, очень близко стоящий к оптимальному, иногда – сразу оптимальный.

Однако использование этого способа требует большого внимания. Поэтому рассмотрим его детально на том же примере. Сущность его заключается в следующем.

В матрице стоимостей поставки $C=(c_{ij})$ отыскивается клетка, содержащая наименьший элемент c_{ij}, затем в эту клетку записывается поставка $x_{ij}=\min(a_i,b_j)$. Если матрица содержит несколько одинаковых значений c_{ij}, тогда выбирают любое одно (безразлично какое) и заполняют эту клетку поставкой.

После занесения поставки x_{ij} в клетку с минимальным c_{ij} вычеркивают (мысленно) столбец или строку (или то и другое). Если $a_i>b_j$, вычеркивается столбец. При $a_i<b_j$, вычеркивают строку и при $a_i=b_j$ вычеркивают и столбец и строку.

Далее процесс (шаги) повторяется до тех пор, пока не будут распределены все поставки.

Если матрица большая, и в уме трудно держать разбитые в процессе распределения на части значения a_i и b_j, в конце каждого шага вычисляют остаточные (нераспределенные) мощности поставщиков и неудовлетворенные емкости потребителей.

В табл.4.3 запишем исходные данные рассматриваемого примера и определим исходный опорный план по способу минимального элемента матрицы $C(c_{ij})$.

Т а б л. 4.3

Поставщики и		Потребители и их спрос				Нераспределенные мощности на шагах				
		B_1	B_2	B_3	B_4					
их мощности		200	200	250	200	2-м	3-м	4-м	5-м	6-м
A_1	150	5	3	**2** 150 3	3	150	150	0	0	0
A_2	250	3	**4** 180 4	5	4 70 5	250	250	250	70	0
A_3	230	2	5	**6** 100 7	**5** 130 6	230	230	230	230	0
A_4	220	**1** 200 1	**2** 20 2	3	6	20	0	0	0	0
Не-удов. спрос на	2-м	0	200	250	200	650	-	-	-	-
	3-м	0	180	250	200	-	630	-	-	-

шагах	4-м	0	180	100	200	-	-	480	-	-
	5-м	0	0	100	200	-	-	-	300	-
	6-м	0	0	0	0	-	-	-	-	0

В нашем примере в матрице стоимостей поставки $C=(c_{ij})$ наименьший элемент $c_{41}=1$ находится в клетке A_4B_1. Следовательно, в эту клетку следует занести первую поставку $x_{41}=\min(a_4,b_1)=\min(220,200)=200$. Спрос потребителя B_1 оказался удовлетворенным полностью, поэтому столбец B_1 "вычеркиваем" (исключаем из дальнейшего процесса распределения).

При переходе ко второму шагу вычисляем нераспределенные мощности поставщиков и неудовлетворенный спрос потребителей; записываем их в дополнительных графе и строке.

Дальше процесс повторяется в том же порядке. В оставшейся матрице стоимостей поставки два одинаковых наименьших значения $c_{42}=2$ и $c_{13}=2$ находятся соответственно в клетках A_2B_2 и A_1B_3. Выбираем любую из этих двух клеток, например A_4B_2, и заполняем ее поставкой $x_{42}=20$, равной нераспределенной к этому шагу части мощности поставщика A_4. Вычеркиваем строку A_4, поскольку мощность этого поставщика теперь оказалась распределенной полностью.

На следующем, третьем, шаге заполняем клетку A_1B_3 поставкой $x_{13}=\min(a_1,b_3)=\min(150,250)=150$ и т.д., на 4-м шаге – клетку A_2B_2 поставкой $x_{22}=\min(a_2,b_2-20)=\min(250,200-20)=180$, затем на 5-м шаге в клетку A_2B_4 записываем поставку $x_{24}=\min(a_2-180,b_4)=\min(250-180,200)=70$. Наконец, остались незаполненными A_3B_3 и A_3B_4 – в них записываются поставки $x_{33}=100$ и $x_{34}=130$.

Последовательность заполнения клеток переменными x_{ij} мы указали цифрами помещенными в нижнем правом углу каждой клетки.

В результате такого распределения получен исходный опорный план, удовлетворяющий всем условиям модели транспортной задачи. Значение целевой функции (4.1) для этого опорного плана равно

$$F=2\cdot150+4\cdot180+4\cdot70+6\cdot100+5\cdot130+1\cdot200+2\cdot20=2790. \qquad (4.7)$$

Таким образом, если бы осуществить поставки пиловочника по этому опорному плану, общие затраты на поставку составили бы 2790 тыс.руб.

Читателю нетрудно убедиться в том, что посредством способа минимального элемента $C(c_{ij})$ получен значительно лучший исходный опорный план, чем по правилу северо-западного угла. Разница в значениях целевых функций составила 1550 тыс.руб. (4340-2790).

Исходный опорный план, вычисленный посредством способа минимального элемента, представим в табл.4.4. Этот план является допустимым решением заданной транспортной задачи. В этом нетрудно убедиться, подставив значения переменных x_{ij} в ограничительные условия (4.2), (4.3) задачи. Так, например,

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2,\ 0+180+0+70=250=250$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=b_2,\ 0+180+0+20=200=200 \text{ и т.д.}$$

Табл.4.4

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
A_1	150	5	3	**2** 150	**3**

A_2	250	3	**4** 180	5	4 70
A_3	230	2	5	**6** 100	**5** 130
A_4	220	**1** 200	2 20	3	6

Кроме того, этот опорный план считается *невырожденным*, т.к. число положительных поставок $x_{ij}>0$ равно рангу $r=m+n-1$ системы ограничительных уравнений (4.2), (4.3). В данном примере $r=4+4-1=7$ и число базисных клеток – клеток, заполненных числами $x_{ij}>0$, также равно 7.

Следующий этап решения транспортной задачи заключается *в проверке полученного исходного опорного плана на оптимальность*.

Проверка опорного плана на оптимальность. Чтобы установить является ли опорный план оптимальным, надо проверить, как повлияет на величину целевой функции (4.7) любое возможное перераспределение поставок, удовлетворяющее ограничительным условиям (4.2), (4.3), (4.4).

План распределения поставок будет оптимальным лишь в том случае, когда целевая функция (4.1) имеет минимальное значение, т.е. когда дальнейшее уменьшение затрат на поставку будет невозможно.

Проверим возможность уменьшения суммарных затрат на поставку продукции. С этой целью для каждой свободной от поставки клетки определяется величина Δ_{ij}, характеризующая изменение суммарных затрат на поставку (в расчете на единицу перераспределяемой продукции), при условии включения в план единичной поставки $x_{ij}=1$ от поставщика A_i к потребителю B_j. При этом должно быть произведено такое изменение остальных поставок, чтобы получившаяся совокупность поставок не нарушала баланса спроса и поставок транспортной задачи, т.е. удовлетворяла ограничительным условиям (4.2), (4.3), (4.4).

Величину Δ_{ij} в дальнейшем будем называть *оценкой свободной клетки* (некоторые авторы называют характеристикой).

В нашем примере, в исходном решении задачи (см.табл.4.4) клетки A_1B_1, A_1B_2, A_1B_1, A_2B_1, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_3 и A_4B_4 оказались свободными от поставок.

Необходимо вычислить значение оценок Δ_{ij} для этих свободных от поставок клеток. С этой целью для каждой свободной клетки составляется означенный цикл перерасчета (в литературе иногда называют его замкнутой *цепью, кругом, кольцом, контуром* и т.д.).

Рассмотрим сначала наиболее простые формы циклов (цепей) приминительно к нашему примеру.

Вычислим оценку Δ_{21} для свободной клетки A_2B_1 при условии включения в план единичной поставки $x_{21}=1$.

Поставщик и их мощности		Потребители и их спрос		
		B_1	B_2	
		200	200	
A_2	250	3 +1	4 180-1	
A_4	220	1 200-1	2 20+1	

Рис.4.1

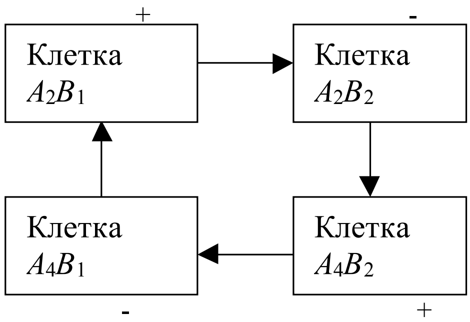


Рис.4.2

При включении в план поставки x_{21}=1 для восстановления баланса спроса и предложений необходимо уменьшить поставки x_{22} и x_{41} на единицу и увеличить поставку x_{42} также на единицу. Представим фрагмент матрицы, относящейся только к этому перераспределению (рис.4.1).

Перераспределяя поставки, в данном случае мы прошли по четырем клеткам. Путь нашего движения по этим взаимосвязанным клеткам образовал *замкнутый цикл* пересчета (цепь), показанный на рис.4.2. Для этого и других циклов пересчета транспортной задачи характерны следующие особенности.

Под циклом пересчета (цепью) *понимается замкнутая ломаная линия*. Вершинами цикла (цепи) являются клетки таблицы, проще – вершины лежат в клетках таблицы. Причем одна из вершин находится в свободной от поставки клетке, в той, для которой определяется оценка Δ_{ij}. Все другие вершины находятся в базисных клетках, т.е. клетках, занятых поставками.

Все углы цикла прямые, каждый отрезок его, ограниченный вершинами, целиком принадлежит одной строке или одному столбцу матрицы. В цикле всегда четное число вершин.

Отрезки ломаной линии, составляющей цикл, могут проходить через клетки, не являющиеся вершинами данного цикла, а следовательно, вообще не входящими в данный цикл.

Для каждой свободной клетки в плане с числом базисных клеток m+n-1 всегда может быть составлен замкнутый цикл пересчета, при этом только один.

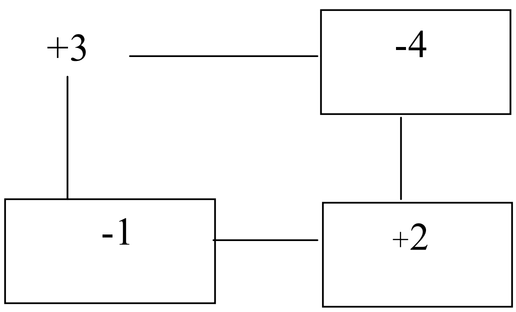


Рис.4.3

Наконец, форма цикла может быть различной. На рис. 4.2 представленный цикл пересчета для клетки A_2B_1имеет форму четырехугольника. В других случиях цикл пересчета может быть в виде многоугольника различной конфигурации.

Вершины, в которых поставки при перераспределении увеличиваются (на рис. 4.1 – вершины A_2B_1 и A_4B_2), отмечаются плюсом и называются *положительными вершинами* И, наоборот, вершины, в которых поставки при перераспределении уменьшаются (на рис. 4.1 - A_2B_2 и A_4B_1) отмечаются минусом и называются о*трицательными* вершинами. В цикле знаки по вершинам расставляют начиная с вершины, лежащей в свободной клетке, для которой определяется Δ_{ij}. В нее записывают знак плюс, затем знаки по вершинам чередуются: минус, плюс , минус, плюс и т. д., независимо от того, расставляют ли их по часовой стрелке или в обратном направлении. Таким образом, в цикле всегда насчитывается одинаковое число положительных и отрицательных вершин.

Поскольку конечная цель составления циклов пересчета заключается в определении оценок Δ_{ij} свободных клеток, условимся по вершинам цикла пересчета записывать соответствующие клеткам показатели критерия оптимальности c_{ij} с присвоенным вершине знаком. И еще одна условность. Вершины, лежащие в базисных клетках, будем отмечать квадратами, а вершину, лежащую в свободной клетке, без квадрата. Тогда для клетки A_2B_1 цикл пересчета можно представить в форме четырехугольника, показанного на рис.4.3.

Теперь можем определить оценку этой свободной клетки A_2B_1. Поскольку оценка Δ_{ij} этой и любой другой свободной клетки должна характеризовать изменения суммарных затрат на поставку (в расчете на единицу перераспределяемой продукции), ее можно вычислить как *алгебраическую сумму стоимостей поставок, расставленных по вершинам замкнутого цикла пересчета,* т.е.

$$\Delta_{ij} = \sum c_{ij}. \tag{4.8}$$

Так, для свободной клетки A_2B_1 оценка Δ_{21} будет равна:

$$\Delta_{21}=+3-4+2-1=0$$

Поясним, что записав поставку, равную 1м^3, в клетку A_2B_1 (см.рис.4.1), мы увеличили значение целевой функции на 3 (c_{21}=3). Уменьшив на 1 м^3 поставку A_2B_2, мы тем самым уменьшили значение целевой функции на 4 (c_{22}=4); увеличив поставку в клетке A_4B_2, мы увеличили целевую функцию на 2, и, наконец, уменьшив поставку в клетке A_4B_1, мы уменьшили целевую функцию на 1. Те же числа фигурируют в вершинах цикла на рис. 4.3.

Поскольку оценка свободной клетки A_2B_1 оказалась равной нулю, занятие ее поставкой не отразится на величине целевой функции (4.7). Далее построим циклы пересчета (рис.4.4) и по ним вычислим значение оценок Δ_{ij} для всех остальных свободных клеток табл.4.4.

Проведенные расчеты оценок свободных клеток показывают, что исходный опорный план, представленный в табл. 4.4, является неоптимальным решением задачи, так как оценка свободной клетки A_3B_1 оказалась равной – 2, что свидетельствует о возможности снижения значения целевой функции (4.7) на 2 руб. в расчете на каждый перераспределенный кубометр продукции.

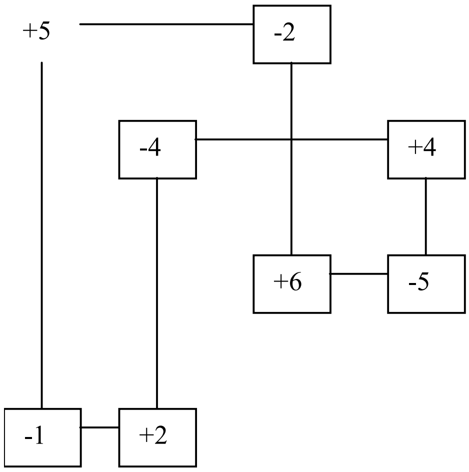
Следующий этап решения транспортной задачи заключается в *улучшении опорного плана.*

Переход от неоптимального опорного плана к лучшему. Поскольку в исходном опорном плане рассматриваемой задачи только одна свободная клетка A_3B_1 имеет отрицательную оценку, то для получения плана, обеспечивающего меньшее значение целевой функции, эту клетку следует занять возможно большей поставкой, не нарушающей при этом условий допустимости плана.

Если при каком-то опорном плане оказывается несколько свободных клеток с отрицательными оценками Δ_{ij}, то за один переход к лучшему плану можно занять поставкой только одну клетку – ту, которая обеспечивает наибольшее снижение целевой функции.

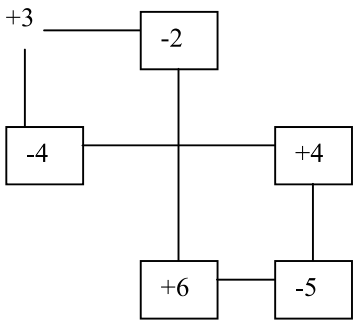
Для того, чтобы установить величину поставки, подлежащей записи в клетку A_3B_1, представим на рис. 4.5 цикл пересчета для этой клетки. В отличие от рис. 4.4 в данном случае в квадратах, являющихся вершинами цикла, будем записывать не показатели c_{ij}, а величины поставок x_{ij} из соответствующих базисных клеток. При этом знаки в вершинах сохраним без изменения.

Для A_1B_1



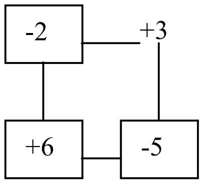
Δ_{11}=5-2+6-5+4-4+2-1=5

Для A_1B_2



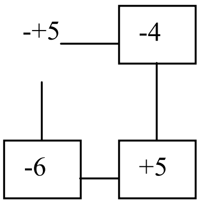
Δ_{12}=3-2+6-5+4-4=2

Для A_1B_4



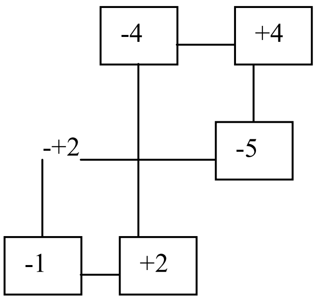
Δ_{14}=3-5+6-2=1

Для A_2B_3



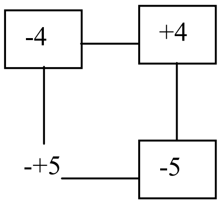
Δ_{23}=5-4+5-6=0

Для A_3B_1



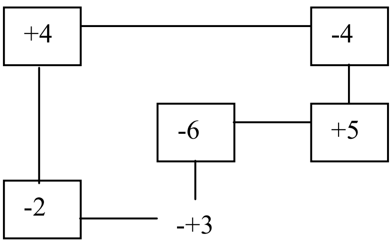
Δ_{31}=2-1+2-4+4-4-5=-2

Для A_3B_2



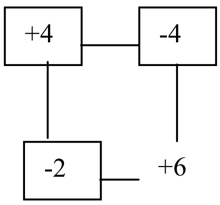
Δ_{32}=5-4+4-5=0

Для A_4B_3



Δ_{43}=3-2+4-4+5-6=0

Для A_4B_4



Δ_{44}=6-2+4-4=4

Рис.4.4

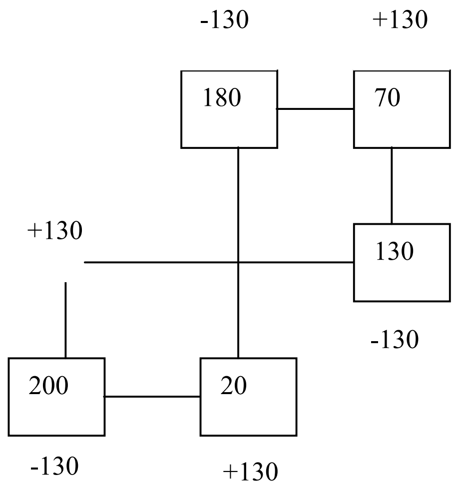


Рис. 4.5

В данном цикле пересчета (рис.4.5) три поставки x_{22}=180, x_{34}=130 и x_{41}=200 отмечены знаком минус.

Для получения нового, лучшего, опорного плана, в клетку A_3B_1 следует записать наименьшую из поставок, отмеченных знаком минус в цикле пересчета (в данном случае поставку x_{34}, равную 130). Далее по вершинам цикла эту поставку (130) следует прибавить или вычесть, в зависимости от знака в вершине (так, как это показано на рис.4.5). Поставки, не вошедшие в цикл пересчета (в данном случае x_{13}=150 и x_{33}=100), переносятся в новый план без изменения.

В результате проведения этих операций получится новый опорный план (табл.4.5), удовдетворяющий условиям (4.2), (4.3), (4.4). Следовательно, этот план является допустимым решением рассматриваемой транспортной задачи.

Т а б л . 4.5

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
A_1	150	5	3	2 150	3
A_2	250	3	4 50	5	4 200
A_3	230	2 130	5	6 100	5
A_4	250	1 70	2 150	3	6

Целевая функция (4.1), соответствующая этому новому опорному плану, равна

$$F_2=2\cdot150+4\cdot50+4\cdot200+2\cdot130+6\cdot100+1\cdot70+2\cdot150=2530 \qquad (4.9)$$

Таким образом, в связи с переходом к новому плану произошло уменьшение целевой функции (4.7) на 260 тыс. руб. (2790— 2530).

Выше указывалось, что оценка Δ_{ij} свободной клетки указывает на изменение целевой функции (с минусом — уменьшение, с плюсом — увеличение) при условии занятия свободной клетки поставкой x'_{ij} =1. И действительно, эти 260 тыс. руб. равны произведению оценки клетки A_3B_1 (-2) на величину записанной в эту клетку поставки

x'_{31}(130). Следовательно, зависимость целевой функции на двух смежных опорных решениях можно представить как

$$F' = F + \Delta_{ij} x'_{ij} . \qquad (4.10)$$

Относительно рассматриваемого примера

$$\mathbf{F_2 = 2790+(—2) \cdot 130 = 2530.}$$

Итак, план поставок в табл. 4.5 является допустимым решением задачи; причем он лучше предыдущего.

Далее, посредством уже известной методики и этот новый план следует проверить на оптимальность. Если он также окажется неоптимальным, надо перейти к лучшему опорному плану. Так за конечное число итераций от неоптимального плана можно перейти к оптимальному плану, при котором целевая функция (4.1) примет минимальное значение.

Доведение опорного плана до оптимального. На следующей итерации вновь надо составить циклы пересчета (цепи) и вычислить оценки Δ_{ij}, каждой свободной клетки в плане поставок табл. 4.5.

Опорный план в табл. 4.5 является неоптимальным, поскольку оценки клеток A_2B_3 и A_4B_3 (рис. 4.6) оказались отрицательными, при этом одинаковыми по величине (-2).

Для перехода к лучшему плану практически может быть занята любая клетка из этих двух. Однако, если придерживаться принципа достижения наибольшего снижения целевой функции за один очередной переход, то в данном случае надо проанализировать, каково будет это общее снижение при занятии поставкой клетки A_2B_3 по сравнению с A_4B_3.

С этой целью вновь построим циклы пересчета для этих двух свободных клеток, с записью поставок x_{ij} по вершинам (рис.4.7).

Это необходимо еще и потому, что один из них потребуется для перестроения плана.

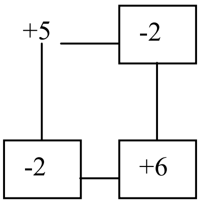
Из рис.4.7 видно, что при занятии поставкой свободной клетки A_2B_3 в нее следует записать поставку x_{23}, равную 50 тыс. м^3, и это приведет к общему снижению целевой функции ($\Delta_{ij} x'_{ij}$) в 100 тыс. руб. Если же за очередной переход к лучшему плану занять поставкой клетку A_4B_3, а не A_2B_3, то ее следует заполнить поставкой x_{43} ==70 тыс. м^3. Тогда общее снижение целевой функции (4.9) будет равно —140 тыс. руб. (-2 · 70).

Таким образом, мы установили, что в данном случае при переходе к лучшему плану следует занять поставкой x_{43}=70 клетку A_4B_3.. При этом поставки x_{41} и x_{33} должны быть уменьшены на 70, а x_{31}—увеличена на 70, в соответствии со знаками по вершинам цикла (рис. 4.7).

Поставки, не вошедшие в цикл пересчета клетки A_4B_3 (x_{13} = 150, x_{22}. = 50, x_{24} = 200 и x_{42} =150), перейдут в новый план табл. 4.6 без изменения.

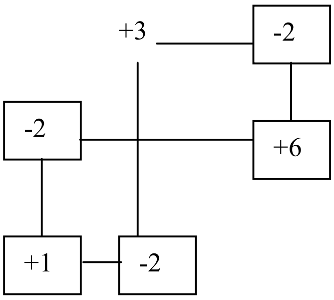
В табл. 4.6 получен новый опорный план, являющийся допустимым решением рассматриваемой задачи, поскольку удовлетворяет ограничительным условиям (4.2, 4.3, 4.4).

Для A_1B_1



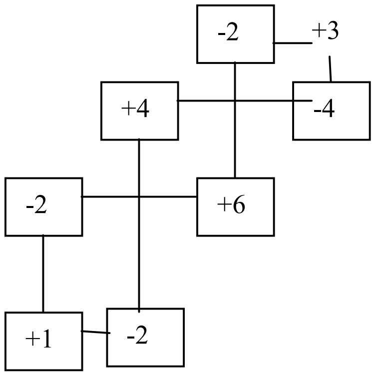
Δ_{11}=5-2+6-2=7

Для A_1B_2



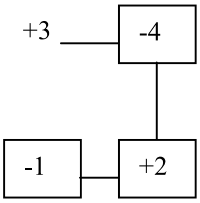
Δ_{12}=3-2+6-2+1-2=4

Для A_1B_4



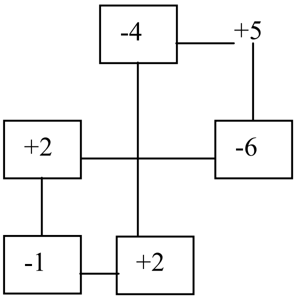
Δ_{14}=3-4+4-2+1-2+6-2=4

Для A_2B_1



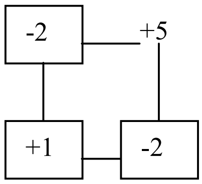
Δ_{21}=3-4+2-1=0

Для A_2B_3



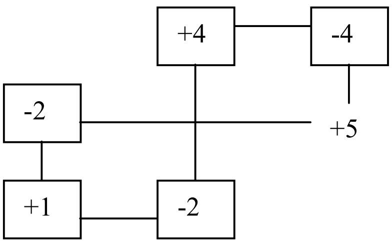
Δ_{23}=5-6+2-1+2-4=-2

Для A_3B_2



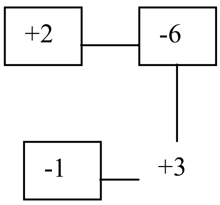
Δ_{32}=5-2+1-2=2

Для A_3B_4



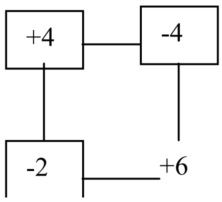
Δ_{34}=5-2+1-2+4-4=2

Для A_4B_3



Δ_{43}=3-1+2-6=-2

Для A_4B_4



Δ_{44}=6-2+4-4=4

Рис.4.6

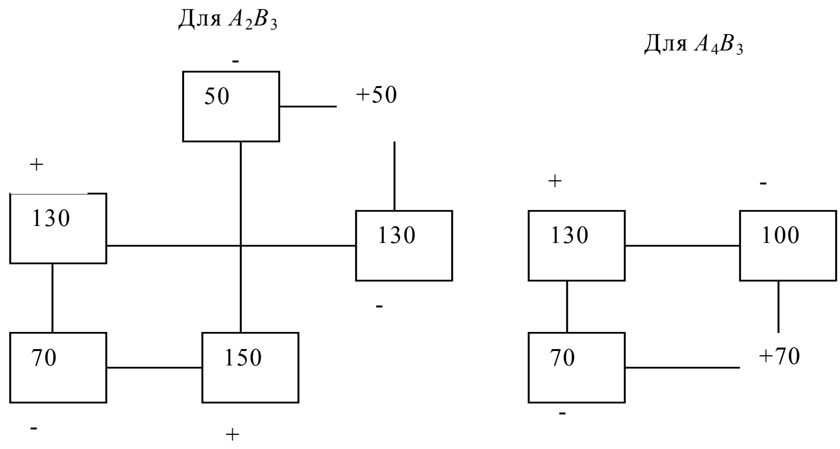


Рис.4.7

Т а б л .4.6

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
A_1	150	5	3	2 150	3
A_2	250	3	4 50	5	4 200
A_3	230	2 200	5	6 30	5
A_4	220	1	2 150	3 70	6

Целевая функция (4.1), соответствующая этому плану, равна

$$F_3 = = 2\cdot150+4\cdot50+4\cdot200+2\cdot200+6\cdot30+2\cdot150+3\cdot70 = = 2390 \qquad (4.11)$$

или, по формуле (4 .10),

$$F_3 = 2530 + (-2)\cdot 70 = 2390.$$

Опорный план табл. 4.6 является лучшим планом поставок по сравнению с предыдущими. Его также необходимо проверить на оптимальность.

Поскольку выше довольно подробно была изложена методика составления циклов пересчета (цепей), на этой итерации для проверки плана на оптимальность приведем лишь расчет оценок свободных клеток по циклам без изображения последних на рисунке. При определенном навыке читатель также может не рисовать все циклы пересчета на каждой итерации, а держать их в уме при вычислении оценок.

Оценки свободных клеток по плану поставок табл. 4.6 будут равны:

Δ_{11}=5-2+6-2=7; Δ_{32}=5-6+3-2=0

Δ_{12}=3-2+3-2=2; **Δ_{34}=5-6+3-2+4-4=0**

Δ_{14}=3-4+4-2+3-2=2; **Δ_{41}=1-2+6-3=2**

$$\Delta_{21}=3\text{-}4+2\text{-}3+6\text{-}2=2; \qquad \Delta_{44}=6\text{-}2+4\text{-}4=4$$

$$\Delta_{23}=5\text{-}3+2\text{-}4=0;$$

Из приведенного расчета видно, что ни одна свободная клетка не имеет отрицательной оценки, следовательно, дальнейшее снижение целевой функции (4.11) невозможно, поскольку она достигла минимального значения.

F= 2390= min.

Таким образом, последний опорный план табл. 4.6 является *оптимальным*.

Решение задачи практически закончено. Однако следует обратить внимание читателя еще на один существенный момент.

В оптимальном решении задачи свободные клетки A_2B_3, A_3B_2 и A_3B_4 имеют оценку равную нулю (Δ_{23}=0, Δ_{32}=0 и Δ_{34}=0). Это является свидетельством того, что среди бесчисленного множества решений этой задачи существуют еще решения, являющиеся также оптимальными, поскольку значение целевой функции остается одинаковым— минимальным. Их принято называть *альтернативными.*

Для непосредственного управления процессом снабжения целесообразно знать все взаимозаменяемые варианты плана поставок. Это позволит более удачно организовать систему снабжения при соблюдении принципа минимизации общих затрат на поставку.

С целью отыскания альтернативного плана необходимо в обычном порядке выполнить процедуру последовательного перехода от одного опорного плана к другому, только на этот раз от одного оптимального к другому также оптимальному плану.

В табл. 4.7 приведен один из альтернативных планов, полученный в результате занятия положительной поставкой свободной клетки A_3B_4.

Т а б л .4.7

Поставщики и их мощности		Потребители и их емкости			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	200	250	200
A_1	150	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 150	$\boxed{3}$
A_2	250	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 170
A_3	230	$\boxed{2}$ 200	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 30
A_4	220	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 120	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{6}$

Значение целевой функции (4.1), соответствующей этому плану, равно

$$F=2\cdot150+4\cdot80+4\cdot170+2\cdot200+5\cdot30+2\cdot120+3\cdot100 =2390= \min \qquad (4.12)$$

Значения целевых функций (4.11) и (4.12) равны между собой. Иначе и не могло быть, если решение правильно в том и другом случае.

Другие альтернативные планы рекомендуется читателю найти самостоятельно. Это послужит упражнением для приобретения соответствующих навыков в решении задач.

4.2. Метод потенциалов

Основной алгоритм распределительного метода, рассмотренный нами в 4.1 является далеко не лучшим методом решения транспортных задач, так как на каждой итерации для проверки опорного плана на оптимальность приходилось строить [*mn*—(*m*+*n*—1)] циклов пересчета, что при больших размерах матрицы оказывается очень громоздким и трудоемким делом. Так, для расчетов по матрице 10x10 на каждой итерации надо строить 81 цикл, а по матрице 20x20—361 цикл.

Оценки (или характеристики) свободных клеток можно вычислить и иным, менее трудоемким путем, без составления циклов пересчета. Для этого существуют два способа, отличающихся друг от друга несущественной деталью.

В 1940 г. советским ученым Л. В. Канторовичем был разработан метод решения транспортной задачи, и в первой публикации (1942 г.) содержались основные идеи метода. Впоследствии (в 1949 г.) в совместной статье Л. В. Канторовичем и.М. К. Гаву-риным был изложен сам метод (в сетевой постановке), названный *методом потенциалов.*

Позднее (в 1951 г.) американским ученым Дж. Б. Данцигом был разработан аналогичный метод, получивший название *модифицированного распределительного метода,* который в иностранной и некоторой советской литературе сокращенно именуют методом МОДИ.

Поскольку разница между этими способами чрезвычайно незначительна, в дальнейшем не будем их разграничивать и станем именовать общим названием—*методом потенциалов.*

В самом начале рассмотрения метода потенциалов следует обратить внимание читателя на то, что этот метод имеет не только различия с распределительным методом, а в некоторой части схож с ним (недаром Дж. Б. Данциг назвал его модифицированным распределительным методом). Метод потенциалов и распределительный метод похожи между собой тем, что исходный опорный план и переход от не оптимального плана к лучшему как в одном, так и в другом методе осуществляются с помощью одинаковых приемов. Разница этих двух методов заключается в методике проверки опорного плана задачи на оптимальность. Так, в распределительном методе она производится с помощью оценок свободных клеток, вычисленных по циклам пересчета. В методе потенциалов, как это будет видно из дальнейшего изложения, — с помощью *характеристик свободных клеток,* довольно легко вычисляемых посредством специальных чисел, называемых *потенциалами.*

Сущность потенциалов и способ вычисления их в ряде литературных источников рассматриваются на некоторых логических рассуждениях. Мы же здесь изберем иной путь. Выведем потенциалы и зависимость их посредством использования основ теории двойственности, которые были изложены в 3.3.

Для этого составим условие двойственной задачи по отношению прямой транспортной задачи (4.1)—(4.4), в которой требовалось отыскать не отрицательные значения переменных x_{ij}, минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{4.13}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,...,m; \tag{4.14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,...,n. \qquad (4.15)$$

С целью составления двойственной задачи переменные x_{ij} в условии (4.14) заменим на u_1, u_2,…, u_i,…,u_m, а переменные условия (4.15) на v_1, v_2,…, v_j,…,v_n.

Поскольку каждая переменная x_{ij} входит в условия (4.14, 4.15) и целевую функцию (4.13) по одному разу, то двойственную задачу по отношению к прямой транспортной задаче можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти не отрицательные числа v_i (при i= 1, 2, ..., m) и v_j (при j=1, 2, ..., n), обращающие в максимум целевую функцию

$$G = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad (4.16)$$

при условии

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad i=1,2,\dots,m; \; j=1,2,\dots,n \qquad (4.17)$$

В системе условий (4.17) будет mхn неравенств. По теории двойственности для оптимальных планов прямой и двойственной задачи для всех i,j должно быть

$$\left.\begin{aligned} u_i + v_j &\le c_{ij}, \quad \text{если} \quad x_{ij} = 0, \\ u_i + v_j &= c_{ij}, \quad \text{если} \quad x_{ij} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

Эти *условия* (4.18) *являются необходимыми и достаточными признаками оптимальности плана транспортной задачи.*

Числа u_i и v_j, удовлетворяющие условиям (4.18), называются *потенциалами.* Причем число u_i, называется потенциалом поставщика A_i, а число v_j — потенциалом потребителя B_j.

При решении задачи для проверки опорного плана на оптимальность потенциалы поставщиков и потребителей легко определяются из условия, что для всех базисных клеток, т. е. клеток с x_{ij}>0 должно быть справедливо равенство

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (4.19)$$

Отсюда

$$u_i = c_{ij} - v_j \qquad (4.20)$$

$$v_j = c_{ij} - u_i \qquad (4.21)$$

Поскольку как u_i так и v_j неизвестны, произвольно принимают один из потенциалов равным какой-то величине (например, потенциал поставщика с максимальной мощностью — равным нулю). Затем вычисляются все остальные потенциалы из уравнений (4.20), (4.21).

Проверка плана на оптимальность производится посредством сопоставления для каждой свободной клетки суммы потенциалов поставщика и потребителя со стоимостью поставки в клетке. Для всех свободных клеток сумма потенциалов в оптимальном плане не должна превышать стоимости поставки, т. е. должно выполняться условие:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad (4.22)$$

Таким образом, план считается оптимальным, если сумма потенциалов для свободных клеток, меньше или равна стоимости поставок в них.

Если обозначить через Δ_{ij}, *характеристику свободной* клетки A_iB_j то ее можно вычислить из формулы (4.22):

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \qquad (4.23)$$

В оптимальном решении $\Delta_{ij} \ge 0$. (4.24)

Кроме того, по первой теореме двойственности в оптимальном решении значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают: F=G.

Здесь следует заметить, что значение целевой функции *G* следует рассчитывать лишь по *потенциалам задачи,* которые вытекают из последнего, т. е. оптимального плана.

Рассмотрим метод потенциалов на числовом примере транспортной задачи. Положим, заданы условия задачи, приведенные в табл. 4.8. В задаче необходимо определить оптимальные транспортные связи между пунктами производства и потребления, обеспечивающие поставки лесоматериалов с минимальными общими затратами на производство и поставку.

Т а б л . 4.8

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		180	200	150	120
		Затраты на производство и поставку 1м^3, руб.			
A_1	190	5	4	3	2
A_2	200	4	7	4	4
A_3	160	3	5	6	8
A_4	100	4	3	7	5

Решение задачи следует начать с отыскания исходного опорного плана задачи. Для этого, как и в предыдущем случае (4.1), воспользуемся способом минимального элемента матрицы $C=(c_{ij})$, так как он позволяет найти план более близкий к оптимальному.

Т а б л . 4.9

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления				Потенциалы поставщиков u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		180	200	150	120	
A_1	190	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{\mathbf{3}}$ 70	$\boxed{\mathbf{2}}$ 120	-1
A_2	200	$\boxed{\mathbf{4}}$ 20	$\boxed{\mathbf{7}}$ 100	$\boxed{\mathbf{4}}$ 80	$\boxed{4}$	0
A_3	160	$\boxed{\mathbf{3}}$ 160	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	-1
A_4	100	$\boxed{4}$	$\boxed{\mathbf{3}}$ 100	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	-4
Потенциалы потребителей v_j		4	7	4	3	

Поскольку этот вопрос нами подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, здесь в табл. 4.9 приведем исходный опорный план рассматриваемой задачи без пояснений.

Этот опорный план является допустимым решением заданной транспортной задачи, поскольку удовлетворяет условиям (4.14, 4.15). В этом читатель может убедиться, если подставит значения переменных x_{ij}, в ограничительные условия задачи. Кроме того, этот опорный план является невырожденным, так как число базисных клеток, заполненных поставками $x_{ij}>0$, равно рангу $r=m+n-1$ системы ограничительных уравнений (4.14), (4.15).

Следующий этап решения задачи методом потенциалов заключается в проверке исходного опорного плана на оптимальность. С этой целью прежде всего необходимо вычислить *предварительные потенциалы.* Для этого потенциал поставщика A_2 принимаем равным нулю, т. е. $u_2=0$. Остальные потенциалы вычисляются по формулам (4.20) и (4.21), они будут равны

$$v_1=c_{21}-u_2=4-0=4, \qquad u_1=c_{13}-v_3=3-4= -1;$$
$$v_2=c_{22}-u_2=7-0=7, \qquad u_3=c_{31}-v_1=3-4= -1;$$
$$v_3=c_{23}-u_2=4-0=4, \qquad u_4=c_{42}-v_2=3-7= -4;$$
$$v_4=c_{14}-u_1=2-(-1)=3.$$

Полученные значения предварительных потенциалов записываются, в дополнительную строку (v_j) и дополнительную графу (u_i) табл. 4.9.

Далее по формуле (4.23) вычисляются значения характеристик свободных клеток:

$$\Delta_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)=5-(-1+4)=2,$$
$$\Delta_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=4-(-1+7)= \underline{-2,}$$
$$\Delta_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)=4-(0+3)=1,$$
$$\Delta_{32}=c_{32}-(u_3+v_2)=5-(-1+7)=-\underline{1,}$$
$$\Delta_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=6-(-1+4)=3,$$
$$\Delta_{34}=c_{34}-(u_3+v_4)=8-(-1+3)=6,$$
$$\Delta_{41}=c_{41}-(u_4+v_1)=4-(-4+4)=4,$$
$$\Delta_{43}=c_{43}-(u_4+v_3)=7-(-4+4)=7,$$
$$\Delta_{44}=c_{44}-(u_4+v_4)=5-(-4+3)=6,$$

Из этих данных видно, что условие (4.24), а следовательно, и (4.22) не выполняются. Таким образом, исходный опорный план (табл. 4.9) не оптимальный.

Для улучшения плана следует занять положительной поставкой клетку A_1B_2, имеющую минимальную отрицательную характеристику.

Переход к лучшему опорному плану в методе потенциалов осуществляется так же, как и в распределительном методе.

Т а б л. 4.10

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления				Потенциалы поставщиков u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		180	200	150	120	
A_1	190	5	4 70	3	2 120	-3
A_2	200	4 20	7 30	4 150	4	0
A_3	160	3 160	5	6	8	-1
A_4	100	4	3 100	7	5	-4
Потенциалы потребителей v_j		4	7	4	5	

На рис. 4.8 представлен цикл перераспределения поставок относительно свободной клетки A_1B_2. В эту клетку следует записать поставку, равную 70 (наименьшую из отмеченных знаком минус по вершинам цикла), далее в положительных вершинах следует прибавить эту поставку, в отрицательных — вычесть.

Поставки, не вошедшие в цикл перераспределения: x_{14} = 120, x_{21} = 20, x_{31}=160, x_{42}=100, переносятся в новый план табл. 4.10 без изменения.

Для проверки на оптимальность полученного плана поставок (табл. 4.10) определяем *новые предварительные потенциалы* и записываем их в соответствующую строку v_j и столбец u_i.

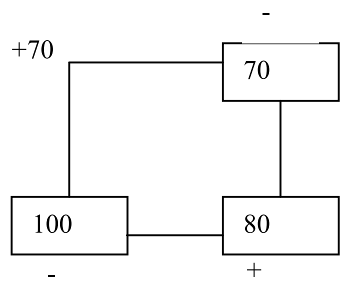


Рис.4.8

Далее вычисляем характеристики свободных клеток:

Δ_{11}=5-(-3+4)=4, Δ_{34}=8-(-1+5)=4,

Δ_{13}=3-(-3+4)=2, Δ_{41}=4-(-4+4)=4,

$\Delta_{24}=4-(0+5)=\underline{-1}$, Δ_{43}=7-(-4+4)=7,

$\Delta_{32}=5-(-1+7)=-\underline{1}$, Δ_{44}=5-(-4+5)=4.

Δ_{33}=6-(-1+4)=3,

Для дальнейшего улучшения плана занимаем положительной поставкой x_{24}=30 свободную клетку A_2B_4. Заполнение поставкой x_{32}= 30 клетки A_3B_2 привело бы к такому же экономическому результату. Выполнив соответствующие расчеты, получим опорный план табл. 4.11.

Т а б л. 4.11

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления				Потенциалы поставщиков u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		180	200	150	120	
A_1	190	5	4 100	3	2 90	-2
A_2	200	4 20	7	4 150	4 30	0
A_3	160	3 160	5	6	8	-1
A_4	100	4	3 100	7	5	-3
Потенциалы потребителей v_j		4	6	4	4	

Этот опорный план является оптимальным решением заданной транспортной задачи, так как характеристики всех свободных клеток не отрицательные (Δ_{11}=3; Δ_{13}=1; Δ_{22}=1; Δ_{32}=0; Δ_{33}=3, Δ_{34}=5; Δ_{41}=3; Δ_{43}=6; Δ_{44}=4). При этом характеристика Δ_{32} оказалась равной нулю. Значит, имеется еще вариант оптимального плана этой задачи. Найти его и проверить на оптимальность предлагается читателю в качестве небольшого упражнения.

Вычислим значения целевых функций F и G.

$$F=4\cdot 100+2\cdot 90+4\cdot 20+4\cdot 150+4\cdot 30+3\cdot 160+3\cdot 100=2160,$$

$$G=190\cdot(-2)+200\cdot(0)+160\cdot(-1)+100\cdot(-3)+$$
$$+180\cdot 4+200\cdot 6+150\cdot 4+120\cdot 4=2160.$$

Как и следовало ожидать, значения целевых функций одинаковы, т. е. $F=G$. Это еще раз подтверждает оптимальность плана. Общие затраты на поставку продукции по этому оптимальному плану составят минимальную величину, равную 2160 тыс. руб.

На этом можно было бы закончить рассмотрение сущности алгоритма метода потенциалов, если бы не один вопрос, который нами еще не рассмотрен.

Читатель уяснил сущность, а также общность и различия, рассмотренных выше двух математических методов — метода потенциалов и распределительного. Эти методы различаются друг от друга способом оценки плана на оптимальность. В этой связи возникает вопрос: есть ли какая-нибудь зависимость между показателями *оценки* свободных клеток, вычисленной по циклу пересчета, и *характеристикой* ее, рассчитанной по потенциалам задачи? Такая зависимость есть, так как если для какой-либо свободной клетки рассчитать оценку ее, а затем характеристику, то значения их непременно совпадут.

В качестве примера рассмотрим свободную клетку A_2B_2 из плана табл. 4.11. Оценка этой свободной клетки, вычисленная по циклу пересчета, равна единице.

Этот расчет формульной записи может быть представлен так:

$$\Delta_{22}=(c_{22}+c_{14})-(c_{12}+c_{24}) \qquad (4.25)$$

Характеристика этой же свободной клетки, вычисленная по потенциалам задачи и формуле

$$\Delta_{22}=c_{22}-(u_2+v_2) \qquad (4.26)$$

равна также единице.

Из соотношений (4.20), (4.21) получим значения

$$c_{14}=u_1+v_1,\ c_{12}=u_1+v_2 \quad \text{и} \quad c_{24}=u_2+v_4. \qquad (4.27)$$

Далее подставим значения (5.27) в (5.25) и получим

$$\Delta_{22}=(c_{22}+u_1+v_4)-(u_1+v_2+u_2+v_4).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены. В результате получим

$$\Delta_{22}=c_{22}-(u_2+v_2),$$

что равно характеристике (4.26).

Аналогичное соотношение можно дать и для всех других свободных клеток при любой форме цикла.

4.3. Метод дифференциальных рент

Этот метод создан советскими учеными. В конце 50-х годов А.Л.Лурье на основе общих идей линейного программирования, сформулированных Л.В.Канторовичем, разработал метод решения транспортных задач, который назвал методом *разрешающих слагаемых*. Затем А.Л. Брудно, используя основные идеи метода А.Л.Лурье, разработал оригинальный алгоритм - *алгоритм дифференциальных рент* - и реализовал его в машинной программе. В дальнейшем самими же авторами были предложены и другие названия этих методов (первый называли - *методом приближения условно-оптимальными планами,* второй - *алгоритмом вычеркивающей нумерации*). Однако в литературе уже утвердились старые названия, к тому же термин *дифференциальных рент* удачно отражает экономическую сущность алгоритма. Это будет видно из дальнейшего изложения.

В этой главе нами будет рассмотрена сущность алгоритма метода дифференциальных рент, который является наиболее оригинальным и удачным для решения малых и крупных задач транспортного типа задач, приводимых к типу таковых.

Сущность алгоритма метода дифференциальных рент

Ранее были рассмотрены распределительный метод и его модификация - метод потенциалов. Особенность этих методов заключалась в том, что сначала определялся некоторый опорный план, какое-то неотрицательное решение задачи, а затем шаг за шагом план улучшался до тех пор, пока не становился оптимальным.

Метод разрешающих слагаемых, дифференциальных рент, венгерский и некоторые другие основаны на противоположном принципе; в них план с самого начала соответствует критерию оптимальности, но должен проверяться на допустимость. Если план оказывается недопустимым, т.е. если сумма поставок оказывается меньше (а иногда и больше) мощностей поставщиков (или спросов потребителей), а так именно и бывает на первой и промежуточных итерациях, то постепенно, шаг за шагом план доводится до допустимого. Как только это достигается, решение считается законченным и полученный план оказывается оптимальным.

Таким образом, до самого конца решения план, удовлетворяя критерию оптимальности, не является допустимым - он является условно оптимальным. Поэтому все методы, относящиеся к этой группе, называются методами условно оптимальных планов.

Основная идея метода дифференциальных рент заключается в том, что первоначально в каждом столбце отмечаются кружками или (как в данном случае) полужирным курсивом минимальные показатели c_{ij} *и в клетки с выделенными минимальными стоимостями записываются величины поставок* x_{ij}. *Если вся продукция окажется распределенной и спрос потребителей удовлетворен полностью, это означает, что получен оптимальный план. Если это условие не выполняется, начинается итеративный процесс, в ходе которого матрица* $C = \|c_{ij}\|$ *изменяется особым образом и процесс распределения поставок повторяется, но уже в соответствии с новой матрицей стоимости поставок. При этом общее количество распределенной продукции*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

при переходе от одной итерации к другой постепенно увеличивается.

Если на какой-то итерации оказывается распределенной вся продукция, то на этом процесс заканчивается и при правильном выполнении его последний план будет оптимальным.

Рассмотрим сущность метода дифференциальных рент на небольшом числовом примере.

Предположим, что имеются поставщики A_1, A_2, A_3 *какого-то конкретного сортимента лесоматериалов, потребителями которого являются деревообрабатывающие предприятия* B_1, B_2, B_3.

В условии задачи известны: количества лесоматериалов (тыс.м^3), предназначенных к реализации (поставке) от каждого из поставщиков a_i, потребности (спрос) в них по деревообрабатывающим предприятиям b_j, а также себестоимость производства и доставки

1м^3 лесоматериалов от любого из поставщиков к любому из потребителей. Эти данные приведены в табл. 4.12.

Табл. 4.12

Поставщики лесоматериалов	Объем лесоматериалов, предназначенных к поставке, тыс.м^3	Потребители лесоматериалов		
		B_1	B_2	B_3
		Потребности (спрос), тыс.м^3		
		200	280	270
		Себестоимость производства и доставки 1 м^3		
A_1	200	9	7	8
A_2	300	6	8	10
A_3	250	11	9	12

1м^3 лесоматериалов от любого из поставщиков к любому из потребителей. Эти данные приведены в табл. 4.12.

Из данных, приведенных в табл.4.12 видно, что суммарный спрос на лесоматериалы трех потребителей (750 тыс.м^3) равен суммарному объему лесоматериалов, предназначенных к реализации у трех поставщиков (750 тыс.м^3), т.е. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (4.28)$$

В задаче необходимо найти оптимальный план снабжения лесоматериалами деревообрабатывающих предприятий, при котором суммарные затраты на производство и доставку всех лесоматериалов были бы минимальными.

Иными словами, требуется найти матрицу неотрицательных чисел x_{ij}:

$$\begin{array}{ccc|l} x_{11} & x_{12} & x_{13} & a_1, \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & a_2, \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & a_3, \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & \end{array} \qquad (4.29)$$

которая минимизировала бы целую функцию

$$F = \sum_{j=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} . \qquad (4.30)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,3, \qquad (4.31)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,3, \qquad (4.32)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Таким образом, в условии задачи содержится шесть ограничений с девятью неизвестными.

Отыскание оптимального плана поставок проводится за несколько последовательных приближений (итераций).

Первая итерация. Прежде представим исходные данные в рабочей табл.4.13.

Затем в каждом столбце отметим минимальный показатель затрат[1] c_{ij} , по которым каждый потребитель мог бы получить лесоматериал, если бы мощности поставщиков, связанных с ними минимальными c_{ij}, не были ограничены.

Если в каком-либо столбце окажется несколько одинаковых (наименьших) значений себестоимости поставок, то отмечается только одна, причем безразлично какая. Далее составляется схема распределения лесоматериалов в соответствии с отмеченными жирным шрифтом минимальными затратами.

Распределение продукции по клеткам с выделенными минимальными значениями себестоимости начинается с первого столбца, при этом в клетку записывается поставка

$$x_{ij} = \min(a_i, b_j). \qquad (4.33)$$

Если к моменту записи очередной поставки исчерпана мощность соответствующего поставщика или полностью удовлетворен спрос соответствующего потребителя, то в клетку следует записывать нулевую поставку. Проведем распределение лесоматериалов применительно к рассматриваемому примеру: в клетку A_2B_1 записываем поставку x_{21}=min(300, 200)=200, в клетку A_1B_2 - поставку x_{12}=min(200, 280)=200. Поскольку мощность первого поставщика A_1 оказалась исчерпаной, в клетку A_1B_3 записывается поставка x_{13}=0.

По окончании распределения схема проверяется на допустимость, т.е. исчерпаны ли мощности поставщиков и удовлетворен ли спрос потребителей. В нашем примере целиком распределены лесоматериалы поставщика A_1, как наиболее дешевые, и частично лесоматериалы поставщика A_2 (200 из 300 тыс.м^3).

[1]Числа, которые набраны жирным курсивом.

По этой схеме полностью удовлетворяется спрос лишь потребителя B_1 и частично потребителя B_2 (200 из 280 тыс.м^3). Поэтому эта схема распределения не является допустимым планом поставок, т.е. не является решением задачи. В связи с этим далее необходимо произвести *оценку каждого поставщика* в следующем порядке.

Если вся продукция поставщика полностью распределена, а спрос связанных с ним потребителей, отмеченных жирным шрифтом, не удовлетворен в полной мере, то такой поставщик считается *недостаточным* и оценкой его служит недостаток, равный величине неудовлетворенных запросов, со знаком минус. И, наоборот, если продукция поставщика распределена не полностью, он считается *избыточным*. Оценкой его служит нераспределенная часть продукции со знаком плюс.

Если в какой-либо строке нет ни одного значения себестоимости, отмеченного кружком или жирным шрифтом, то оценкой такого избыточного поставщика служит число, равное его мощности.

Данные оценки поставщика заносятся в последнюю графу рабочей табл.4.13.

Табл.4.13

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			Оценка поставщиков
		B_1	B_2	B_3	
		200	280	270	
A_1	200	9	***7*** 200	***8*** 0	-350
A_2	300	***6*** 200	8	10	+100
A_3	250	11	9	12	+250
Разность себестоимости		-	$\boxed{1}$	2	

В нашем примере поставщик A_1 является недостаточным, так как спрос потребителей B_2B_3, связанных с ним минимальными себестоимостями, равен 280+270=550 тыс.м^3, а мощность A_1 только 200 тыс.м^3. Поэтому его оценка будет - 350, величина, которая характеризует неудовлетворенную часть спроса потребителей B_2 и B_3.

Поставщик A_2 является избыточным, поскольку не вся его продукция распределена; его оценка +100 (300 - 200).

Продукция поставщика A_3 осталась полностью нераспределенной, следовательно, он избыточный, его оценка +250.

Строчку матрицы с избыточным поставщиком принято называть *положительной*, а с недостаточным поставщиком - *отрицательной*.

Здесь следует заметить, что при правильной оценке всех поставщиков алгебраическая сумма оценок всегда равна нулю.

Поскольку наиболее "дешевых" лесоматериалов поставщика A_1 в связи с его ограниченными ресурсами недостаточно для удовлетворения всех потребностей потребителей B_2 и B_3 , приходится предусматривать использование свободных ресурсов поставщиков A_2 и A_3. При этом сначала будут использоваться лесоматериалы, затраты на которые отличаются от затрат на лесоматериалы, в данном случае поставщика A_1, в наименьшей мере.

Для этого в столбцах матрицы себестоимости поставок необходимо определить разность между наименьшей себестоимостью c_{ij} в одной из положительных строк с минимальной себестоимостью, отмеченной жирным шрифтом в этом столбце. Полученные разности записываются в нижней строке таблицы.

В тех столбцах матрицы, где есть хотя бы одна себестоимость, отмеченная жирным шрифтом в одной из положительных строк, такая разность не определяется.

В нашем примере в первом столбце B_1 минимальная себестоимость c_{21}=6=min находится в положительной строке A_2, следовательно, для этого столбца B_1 разность не вычисляется. Во втором столбце B_2 себестоимость c_{12}=7=min расположена в отрицательной строке. Ближайший к ней по величине показатель одной из положительных строк c_{22}=8. Поэтому разность себестоимости для данного столбца B_2 равна 1 (8—7). Таким же способом определяется разность себестоимости и по другим столбцам.

Наименьшую из вычисленных разностей принято называть *промежуточной рентой.* В таблице ее следует отметить квадратом (заключить в него). В нашем примере промежуточная рента равна 1 столбец B_2.

Вторая итерация заключается в составлении новой таблицы-матрицы (табл. 4.14) транспортной задачи и обработке данных, помещенных в ней. При ее составлении себестоимости поставок по отрицательным строкам увеличиваются на величину исчисленной в предыдущей итерации промежуточной ренты. Себестоимости поставок по положительным строкам переписываются в эту новую таблицу без изменения. В нашем примере на промежуточную ренту 1 следует увеличить себестоимости строки A_1.

Табл.4.14

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			Оценки поставщиков
		B_1	B_2	B_3	
		200	280	270	
A_1	200	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{9}$ 200	-250
A_2	300	$\boxed{6}$ 200	$\boxed{8}$ 100	$\boxed{10}$	-0

A_3	250	11	9	12	+250
Разность себестоимости		5	1	3	

Последовательность выполнения второй и последующих итераций остается общей — подобной первой итерации. Однако есть здесь и свои особенности.

Сначала отмечаются кружками или жирным шрифтом все минимальные себестоимости поставок по столбцам, считая и повторяющиеся по величине. Затем снова по минимальным для каждого потребителя затратам, отмеченным полужирным шрифтом, производится распределение поставок. Поскольку количество клеток с отмеченными минимальными себестоимостями на второй и последующих итерациях становится больше числа столбцов, необходим особый порядок в составлении схемы распределения поставок. Он заключается в следующем. Прежде просматриваются все столбцы, а затем строки, или, наоборот, сначала строки, а потом столбцы. В первую очередь заполняются поставками $x_{ij}= min(a_i, b_j)$ клетки тех столбцов (или строк), в которых имеется *лишь одна* минимальная себестоимость, отмеченная жирным шрифтом (или кружком), а затем все остальные.

Для упорядочения последовательности заполнения клеток поставками можно провести нумерацию их, присвоение очередных порядковых номеров.

В нашем примере при просмотре столбцов слева- направо № 1 присваивается клетке A_2B_1, №2 - клетке A_1B_3. Далее переходим к просмотру матрицы по строкам. Первая и вторая строки находятся в одинаковом положении — в них по две клетки с отмеченными минимальными себестоимостями. При этом в той и другой строке по одной клетке уже получили порядковые номера. Следовательно, очередной порядковый № 3 присваивается клетке A_1B_2, № 4 — клетке — A_2B_2 (номера очередности в таблицу не записываются— они запоминаются).

Только теперь можно приступить к распределению поставок по клеткам. Оно выполняется в строгом соответствии с присвоенными номерами очередности — сначала поставка записывается в клетку № 1, затем в клетку № 2 и т. д.

В нашем примере записываем поставку x_{21} = min (300; 200) =200 в клетку A_{21} (№ 1), затем поставку x_{13} = min (200; 270)=200 в клетку A_1B_3, которой присвоен очередной № 2. В клетку A_1B_2 (с очередным № 3) может быть записана лишь нулевая поставка, так как лесоматериалы поставщика A_1 уже распределены потребителю B_3. Последней на этой итерации заполняется клетка A_2B_2 с очередным № 4. В нее записывается поставка $x_{22} = min$ (100, 280) = 100. Здесь 100 — остаточная мощность поставщика A_2 к моменту заполнения этой клетки.

Далее производится оценка поставщиков, как и в предыдущей итерации. Продукция поставщика A_1 распределена полностью, однако вследствие ограниченности его мощности часть спроса потребителя B_2 (180 тыс. м^3 из 280) и потребителя B_3 (70 тыс. м^3 из 270) осталась неудовлетворенной. Поэтому оценка поставщика A_1 будет равна — 250 и соответствующая ему строка будет отрицательной.

Поставщик A_3 избыточный, его оценка равна +250, строка положительная.

Продукция поставщика A_2 распределена полностью, поэтому избытка мощности у него нет, с другой стороны, неудовлетворенная часть спроса потребителя B_2, связанного с ним минимальной себестоимостью, уже учтена при оценке поставщика A_1 который также связан с потребителем B_2 минимальными затратами на поставку.

Поэтому оценка поставщика A_2 равна нулю. Какой же должна быть строка — отрицательной или положительной?

Знак при нулевой оценке поставщика устанавливается путем анализа связей: если нулевая строка связана по столбцу минимальной себестоимостью, отмеченной жирным шрифтом (или кружком) с отрицательной строкой, то она считается отрицательной и, наоборот, если строка с нулевой оценкой поставщика связана минимальной себестоимостью (отмеченной жирным шрифтом или кружком) с положительной строкой, она считается положительной.

В нашем примере строка A_2 является отрицательной и при оценке ноль следует записать знак минус, так как она по столбцу B_2 связана минимальными себестоимостями (c_{22}=c_{12}=8) со строкой A_{13}, которая является отрицательной.

То, что знак при нулевой оценке поставщика A_2 нами установлен правильно, можно доказать следующим образом. На этой второй итерации могла быть и несколько другая оценка поставщиков A_1 и A_2. Так, неудовлетворительную часть спроса потребителя B_2, равную 180 тыс.м^3, мы с успехом могли учесть при оценке поставщика A_2, а не A_1. Тогда оценкой поставщика A_1 была бы величина равная - 70 (неудовлетворительная часть потребности B_3), поставщика A_2 - 180 (неудовлетворенная часть спроса потребителя B_2).

Возможны случаи, когда строка с нулевой оценкой поставщика минимальными себестоимостями связана одновременно с отрицательной и положительной строками. В таких случаях для определения знака строки (знака при нуле) необходимо мощность соответствующего этой строке поставщика несколько увеличить (например, на единицу) и распределить поставки заново (мысленно, без записи в таблицу). Если при этом распределении суммарный объем всех поставок по матрице в целом не изменится, поставщик считается избыточным, а строка положительной. Если же объем поставок увеличится, поставщик считается недостаточным, а строка отрицательной.

В подобных случаях не исключается и другой подход к установлению знака строки - посредством переоценки поставщиков, подобно той, которая была рассмотрена выше на примере по второй итерации.

Теперь можно дать более общее и точное определение понятий избыточности и недостаточности поставщика. Поставщик является избыточным, если при данной системе выделенных (жирным шрифтом или кружками) минимальных себестоимостей увеличение его мощности не приводит к увеличению общего объема поставок. И, наоборот, поставщик является недостаточным, если при данной системе выделенных минимальных себестоимостей увеличение его мощности приводит к увеличению общего объема поставок.

Продолжим рассмотрение нашего примера дальше. На второй итерации промежуточная рента снова оказалась равной единице. Поэтому, переходя к последующей третьей итерации, показатели c_{1j} и c_{2j} по отрицательным строкам A_1 и A_2 табл.4.14 увеличиваем на величину промежуточной ренты; показатели c_{3j} переносим в новую матрицу (табл.4.15) без изменения.

Далее третья итерация и все последующие выполняются подобно второй итерации.

В нашем примере на третьей итерации в первом и третьем столбце отмечено по одной минимальной себестоимости; в третьей отмечена одна, в первой и второй строках по две минимальных себестоимости.

Согласно изложенному выше правилу нумерация клеток для установления последовательности их заполнения будет следующей.

Табл.4.15

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			Оценки поставщиков
		B_1	B_2	B_3	
		200	280	270	
A_1	200	11	**9** 0	**10** 200	-70
A_2	300	**7** 200	**9** 30	11	+70

A_3	250	11	**9** 250	12	+0
Разность себестоимости		-	-	1	

Просматривая столбцы, присваиваем клетке A_2B_1 № 1, а клетке A_1B_3 № 2. Затем просматривая строки, клетке A_3B_2 присваиваем очередной № 3 и, наконец, клеткам A_1B_2 № 4, A_2B_2 № 5.

В соответствии с этой последовательностью производится распределение поставок: в эти клетки последовательно записываются числа $x_{ij} = \min (a_i, b_j)$ (см. табл. 4.15)

Оценка поставщика A_3 оказалась равной нулю. Так как эта строка минимальными значениями $c_{32} = c_{22} = c_{12} = 9$ связана одновременно с отрицательной строкой A_1 и положительной A_2, для установления знака мощность поставщика A_3 увеличим, например, на единицу. Поскольку суммарный объем всех поставок по матрице в целом при этом не изменится, поставщик A_3 является избыточным, а строка положительной.

На цифрах это выглядит следующим образом.

Суммарный объем поставок в соответствии со схемой распределения (табл. 4.15) равен

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 200 + 200 + 30 + 250 = 680.$$

При условии увеличения мощности поставщика A_3 на единицу сверх 250 и некоторого изменения распределения в связи с этим суммарный объем поставок будет равен .

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x'_{ij} = 200 + 200 + 29 + 251 = 680.$$

Прежде чем перейти к четвертой итерации, необходимо обратить внимание читателя еще на один существенный момент.

На каждой итерации, установив числовую оценку всех поставщиков, следует подсчитать общий нераспределенный остаток. Так, в нашем примере на первой итерации он был равен 350, на второй 250, на третьей итерации он уменьшился до 70. Общее правило состоит в том, что при переходе от итерации к итерации нераспределенный остаток должен уменьшаться или по крайней мере на каких-то переходах оставаться без изменения. *Увеличение нераспределенного остатка при переходе от одной итерации* к другой означает, что *в вычислениях допущена ошибка*.

Схема распределения поставок, полученная на третьей итерации (табл. 4.15), не может считаться допустимым планом. Поэтому необходимо продолжить решение задачи — известным читателю порядком выполнить последовательные расчеты четвертой итерации.

В табл. 4.16 представлены результаты этих расчетов.

Табл. 4.16

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			Оценки поставщиков	Ренты
		B_1	B_2	B_3		
		200	280	270		
A_1	200	12	10	**11** 200	0	3
A_2	300	**7** 200	**9** 30	**11** 70	0	1

A_3	250	11	9 250	12	0	0

Для определения последовательности распределения поставок (табл. 4.16) нумерацию клеток для разновидности проведем начиная с просмотра строк сверху вниз. В первой и третьей строках по одной минимальной c_{ij}, поэтому клетке A_1B_3 присвоим № 1, клетке A_3B_2 — № 2. Далее просматриваем столбцы. В первом слева столбце одно минимальное значение c_{21}, следовательно, клетка A_2B_1 в очередности распределения будет третьей, ее номер — 3. Остались две клетки A_2B_2 и A_2B_3 и независимо от того, какая из них будет четвертая, какая пятая, в общей нумерации результат распределения будет одинаков.

Далее, распределив поставки в соответствии с вычисленной очередностью, мы получили схему при которой оценки всех поставщиков равны нулю, а следовательно, и *нераспределенный остаток равен нулю.*

На этом решение задачи закончено. Нами получен допустимый план, удовлетворяющий ограничительным условиям задачи (4.14), (4.15), к тому же он *оптимальный.*

Таким образом, исчисление наименьших разностей себестоимости по столбцам и добавление их к себестоимости поставок по отрицательным строкам позволило включить в число поставщиков наряду с лучшим сначала среднего, а затем и худшего поставщика. А. Л. Лурье эти наименьшие разности назвал разрешающими слагаемыми.

Однако этот термин не отражает экономической природы этих разностей. В политической экономии имеется иной термин — дифференциальная рента, который в точности соответствует экономической природе разностей.

Условием образования ренты в нашем примере служит ограниченность мощностей (в силу ограниченности ресурсов и др.) лучшего поставщика A_1 и среднего A_2.

Рассмотренный здесь пример несколько сходен с классическим примером К. Маркса, изложенным в III томе «Капитала», где он показывает образование дифференциальной ренты при последовательном введении в обработку четырех различных по качеству участков земли.

В последней графе табл. 4.16 указаны ренты строк. Ренты (не путать с промежуточными рентами!) вычисляются по окончании решения. Они представляют собой числа, которые постепенно за весь ход решения были прибавлены к первоначальным показателям c_{ij} исходной матрицы, в результате чего получились показатели c'_{ij} в окончательной матрице. При правильном решении не менее чем одна рента всегда равна нулю. Это означает, что хотя бы одна строка в процессе решения всегда была положительной.

Забегая вперед, можно отметить, что ренты имеют весьма полезное свойство. Они могут использоваться для независимого контроля и некоторого экономического анализа результатов решения.

Однако вернемся к изложенному выше примеру. В табл. 4.16 общий нераспределенный остаток равен нулю, это означает, что если все вычисления по указанным приемам произведены правильно, то распределение *оптимально.*

Полученный оптимальный план представим в табл. 4.17, в которой затраты на поставку лесоматериалов запишем действительные (данные в задаче) и по ним и полученным объемам распределения определим суммарные расходы на производство и поставку всех лесоматериалов на деревообрабатывающие предприятия.

Табл. 4.17

Поставщики и	Потребители и их спрос

их мощности		B_1	B_2	B_3
		200	280	270
A_1	200	9	7	8 200
A_2	300	6 200	8 30	10 70
A_3	250	11	9 250	12

Величина целевой функции *F*, вычисленная по формуле (4.30), будет характеризовать минимальные суммарные затраты на поставку всех лесоматериалов:

$F = 8{\cdot}200 + 6{\cdot}200 + 8{\cdot}30 + 10{\cdot}70 + 9{\cdot}250 = 5{\cdot}990$ тыс. руб.

Логическая структура алгоритма дифференциальных рент сложнее, чем в распределительном методе или методе потенциалов. Кроме того, алгоритм требует преобразования матрицы на каждой итерации, что в свою очередь также усложняет решение.

Однако метод дифференциальных рент оказывается весьма удобным при выполнении расчетов с помощью ЭВМ, поэтому находит более широкое применение.

Независимый контроль решения транспортной задачи

Ранее было указано, что при решении задачи методом дифференциальных рент план становится допустимым и оптимальным как только нераспределенный остаток оказывается равным нулю.

Кроме того, в оптимальном распределении поставок количество базисных клеток (клеток с положительными перевозками, отмеченными кружками) должно быть равно рангу системы условий транспортной задачи

$r = m + n - 1.$

Применительно к рассмотренному выше примеру $r = 5$ (из расчета 3 + 3—1); количество базисных клеток в последней табл. 4.17 также равно 5.

Эти условия необходимы, однако они являются недостаточными для окончательного суждения об оптимальности плана распределения ресурсов поставщиков между потребителями, так как в невырожденной транспортной задаче всякий опорный план содержит $m + n$—1 базисных клеток в матрице перевозок и нераспределенный остаток для любого опорного плана равен нулю.

Поэтому с целью проверки правильности решения и подтверждения того, что полученный план распределения является оптимальным, проводят *независимый контроль решения транспортной задачи.*

Независимый контроль решения транспортной задачи можно произвести, используя достаточный признак оптимальности решения, применяемый в методе *потенциалов.*

Напомним, что в методе потенциалов для проверки допустимого решения (плана) на оптимальность особым образом определяются числа, называемые потенциалами, с помощью которых легко вычисляются характеристики свободных клеток. Единственное требование, предъявляемое к потенциалам задачи, заключается в том, что каждый показатель себестоимости в базисной клетке должен быть равен алгебраической сумме потенциалов, соответствующих строке и столбцу, на пересечении которых находится базисная клетка.

Обозначив потенциалы поставщиков (строк) через u_i, потенциалы потребителей (столбцов) через v_j, показатели себестоимости в базисных клетках через c_{ij} математически эту зависимость можно выразить

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j. \qquad (4.34)$$

Потенциалы, как известно, могут быть вычислены. Для этого один из потенциалов принимается произвольно равным какой-то величине. Остальные потенциалы вычисляются исходя из приведенного выше соотношения (4.34):

$$u_i = \bar{c}_{ij} - v_j, \qquad (4.35)$$

$$v_j = \bar{c}_{ij} - u_i. \qquad (4.36)$$

Однако если задача уже решена методом дифференциальных рент, то потенциалы можно не рассчитывать, а принять по результатам решения. Так, потенциалы потребителей могут быть приняты равными себестоимостям $\bar{c}_{ij}$ отмеченным жирным шрифтом в столбцах последней итерации. В нашем примере (см. табл. 4.16):

$v_1 = 7$, $v_2 = 9$, $v_3=11$.

Потенциалы поставщиков принимаются равными рентам строк (табл. 4.16), взятым с обратным знаком:

u_1=-3, u_2=-1, u_3=0

или просто вычисляются, как разность между первоначальными себестоимостями c_{ij} (табл. 4.12, 4.13) и условными себестоимостями c'_{ij}, полученными в последней итерации (табл. 4.16):

u_1=-3, (9-12, 7-10, 8-11);
u_2=-1, (6-7, 8-9, 10-11);
u_3=0 (11-11, 9-9, 12-12);

Наконец, потенциалы поставщиков можно также вычислять по формуле (4.35), при этом показатели c_{ij} принимаются первоначальными:

u_1=8-11=-3, u_2=6-7=-1(8-9, 10-11), u_3=9-9=0

Для проверки решения на оптимальность достаточно для каждой свободной клетки сопоставить сумму соответствующих потенциалов с первоначальной себестоимостью c_{ij} в ней. План считается оптимальным, если для каждой свободной клетки сумма потенциалов не превышает себестоимости, т. е. удовлетворяется условие

$u_i+v_j \le c_{ij}$.

Из этого выражения можно вычислить так называемые характеристики свободных клеток, которые обозначим через Δ_{ij}. Зная потенциалы, характеристики Δ_{ij} можно вычислить по формуле

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j). \qquad (4.37)$$

Если себестоимость c_{ij} меньше алгебраической суммы соответствующих потенциалов поставщика и потребителя, характеристика Δ_{ij} отрицательна. Это говорит о том, что перераспределение поставок при заполнении этой свободной клетки уменьшает значение целевой функции (в расчете на единицу перераспределяемой продукции) на величину характеристики Δ_{ij}. И, наоборот, если себестоимость c_{ij} больше алгебраической суммы соответствующих потенциалов поставщика и потребителя, характеристика Δ_{ij} положительна. Занятие поставкой этой свободной клетки привело бы к увеличению целевой функции (в расчете на единицу перераспределения продукции) на величину характеристики Δ_{ij}. Если себестоимость c_{ij} равна сумме соответствующих потенциалов поставщика и потребителя, характеристика Δ_{ij}. равна нулю и, следовательно, перераспределение поставок с заполнением этой свободной клетки не изменит величины целевой функции.

Из вышеизложенного следует, что распределение является оптимальным, если сумма потенциалов для всех базисных клеток равна себестоимости, а для всех свободных клеток не превосходит себестоимости, т. е. характеристика неотрицательна: $\Delta_{ij}. \geq 0$.

Результаты решения задачи (табл. 4.17) представим в табл. 4.18, которую дополним еще одной графой для записи потенциалов поставщиков и строкой для потенциалов потребителей.

По этим данным нетрудно убедиться в том, что для базисных клеток выполняется условие (4.34): для A_1B_3-3+11=8; A_2B_1-1 + 7 = 6 и т. д.

Таблица 4.18

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			Потенциалы поставщиков u_i
		B_1	B_2	B_3	
		200	280	270	
A_1	200	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$ 200	-3
A_2	300	$\boxed{6}$ 200	$\boxed{8}$ 30	$\boxed{10}$ 70	-1
A_3	250	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ 250	$\boxed{12}$	0
Потенциалы потребителей v_j		7	9	11	

По данным, представленным в табл. 4.18, и выражению (4.37) вычислим характеристики Δ_{ij} для всех свободных клеток:

Δ_{11}=9-(-3+7)=5; Δ_{31}=11-(0+7)=4;

Δ_{12}=7-(-3+9)=1; Δ_{13}=12-(0+11)=1.

Оказалось, что все Δ_{ij}, соответствующие свободным клеткам, положительны — удовлетворяют признаку оптимальности. Это подтверждает оптимальность полученного плана распределения и поставок лесоматериалов.

Кроме того, целевая функция двойственной задачи по отношению к прямой транспортной задаче на основании теории двойственности может быть выражена через потенциалы поставщиков и потребителей и их мощности и емкости.

$$G = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = \max. \qquad (4.38)$$

Вычислим ее числовое значение:

G = 200 (- 3) + 300(-1)+ 250·0 + 200·7+ 280·9 + 270·11=5990 тыс. руб.

Напомним, что по первой теореме двойственности решение является оптимальным, если значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.

В нашем примере F=G = 5990 тыс. руб., что еще раз подтверждает оптимальность полученного плана снабжения деревообрабатывающих предприятий лесоматериалами.

На этом можно закончить рассмотрение сущности метода и независимого контроля решения задачи. Здесь следует еще отметить, что потенциалы задачи могут использоваться не только для проверки плана на оптимальность, а также и для экономического анализа транспортной задачи. Они могут рассматриваться как *условные оценки* грузов в пунктах отправления и назначения для анализа возможных последствий тех или иных изменений в исходных предпосылках, на основе которых составлялся оптимальный план. Разность между потенциалами двух пунктов производства показывает, на сколько можно было бы уменьшить при составлении оптимального плана общие затраты на поставку, если бы ресурсы пункта с большим потенциалом увеличить на единицу за счет пункта с меньшим потенциалом. Разность потенциалов по любой паре пунктов потребления показывает, на сколько пришлось бы увеличить общую сумму затрат на поставку продукции при аналогичном изменении размеров потребления.

Глава 5. УСЛОЖНЕННЫЕ И ВИДЕОИЗМЕНЕННЫЕ ПОСТАНОВКИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.

Транспортная задача линейного программирования в 4 главе рассматривалась в простейшем общем варианте и вместе с тем в ее естественном виде (в канонической форме).

В то же время довольно широкая сфера применения транспортных алгоритмов обусловливает необходимость более сложных постановок транспортной задачи и ее видоизменения. Иная постановка задачи может потребовать и иные способы ее решения. Однако в большинстве случаев изменения формулировки транспортной задачи вызывают необходимость преобразования первоначальной модели и исходной матрицы, а сами алгоритмы решения остаются теми же.

В этой главе будут рассмотрены наиболее важные примеры усложненной постановки транспортной задачи применительно к вопросам оптимизации перевозок, а также планирования и управления производством и рассмотрена методика приведения поставленных задач к типу и форме транспортных с тем, чтобы решение могло быть выполнено с помощью транспортных алгоритмов.

Для решения целого ряда экономических задач транспортные алгоритмы оказываются неприемлемыми, а симплексный метод приводит к довольно трудоемким вычислениям. В этих случаях могут оказаться полезными и более рациональные видоизмененные постановки транспортной задачи. Одна из таких видоизмененных постановок получила название обобщенной транспортной задачи (или лямбда-задачи). Алгоритм лямбда-задачи оказался наиболее удобным для решения разного вида распределительных задач. Поэтому он также будет рассмотрен в этой главе.

5.1. Транспортная задача с вырожденным опорным планом

Как в постановке транспортной задачи 1.3, так и в примерах, рассмотренных нами в 4.1, 4.2, мы всюду встречались с опорными планами, в которых число базисных клеток, занятых числами x_{ij}>0, было равно рангу системы ограничительных уравнений $r=m+n-1$. Это позволяло беспрепятственно выполнять проверку планов на оптимальность посредством вычисления оценок и характеристик всех свободных клеток.

Опорные планы, в которых число положительных поставок x_{ij}>0 равно рангу системы ограничительных уравнений, считаются *невырожденными.*

В практике решения задач нередки случаи распределения, при которых число положительных поставок x_{ij}>0 оказывается меньше, чем $m+n$-1. Такие планы считаются *вырожденными.*

Вырожденным может оказаться исходный опорный план или любой промежуточный.

Вырожденность плана вытекает непосредственно из условия задачи, когда при записи поставки в какую-то клетку мощность окажется равной спросу, т. е.

$$x_{ij}=\min(a_i,b_j) \quad \text{при } a_i= b_j.$$

В этом случае из. дальнейшего распределения одновременно будут исключены и строка и столбец. Тогда число базисных клеток получится меньше, чем $m+n$-1, и не все они лучем могут быть связаны между собой, поэтому нельзя будет построить циклы для всех свободных клеток.

В таких случаях, прежде чем допустимый опорный план проверять на оптимальность, надо преодолеть вырожденность. Для этого в одну из свободных клеток следует записать поставку x_{ij}=0. Если же до ранга системы не хватает двух базисных клеток, нулевые поставки записываются в две свободные клетки и т. д.

Нулевая поставка должна быть записана в свободную клетку того столбца или строки, в которых находится поставка $x_{ij}>0$, не связанная лучем с другими поставками.

Пример вырожденного опорного плана, являющегося допустимым решением задачи, приведен в табл. 5.1.

Табл. 5.1

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	160	190	150
A_1	140	6	3	2 140	3
A_2	210	4	4 160	5	4 50
A_3	150	2 0	5	6 50	5 100
A_4	100	1 100	2	3	6

После распределения поставок по методу минимального элемента получен план, в котором шесть базисных клеток, тогда как ранг системы ограничительных уравнений (4.2), (4.3) равен

$$r=m+n-1=4+4-1=7.$$

В этом плане поставка $x_{41}=100$ в клетке A_4B_1 не может быть связана лучами с другими положительными поставками. В связи с этим нельзя построить циклы пересчета ни для одной свободной клетки столбца B_1 и строки A_4, а также вычислить для них потенциалы u_4 и v_1, пока не будет число базисных клеток доведено до $r=7$.

В данном примере поставку $x_{ij}=0$ следует записать в одну из свободных клеток столбца B_1 или строки A_4—ту, в которой наименьшее значение показателя c_{ij}, т. е. в клетку A_3B_1 или A_4B_2.

Дальнейший процесс решения задачи обычный. Следует вычислить потенциалы u_i и v_j, записать их в дополнительной графе и строке табл. 5.1 и по ним рассчитать характеристики свободных клеток Δ_{ij}, для проверки плана на оптимальность. Если план окажется не оптимальным, надо обычным путем перейти к лучшему плану.

В нашем примере характеристики свободных клеток равны: $\Delta_{11}=8$; $\Delta_{12}=2$; $\Delta_{14}=2$; $\Delta_{21}=3$; $\Delta_{23}=0$, $\Delta_{32}=0$; $\Delta_{42}=-2$; $\Delta_{43}=-2$; $\Delta_{44}=2$.

Таким образом, опорный план табл. 5.1 оказался не оптимальным, поскольку возможно снизить значение целевой функции F за счет перераспределения поставок. Оценки свободных клеток A_4B_2 и A_4B_3 отрицательные и одинаковые по величине. Какую из них занять в первую очередь? На рис.5.1 показаны циклы пересчета для этих клеток.

В данном случае при переходе к лучшему плану наибольшее снижение целевой функции F может быть достигнуто при занятии свободной клетки A_4B_2, так как в нее должна быть записана большая поставка ($x_{42}=100$), чем в клетку A_4B_3.

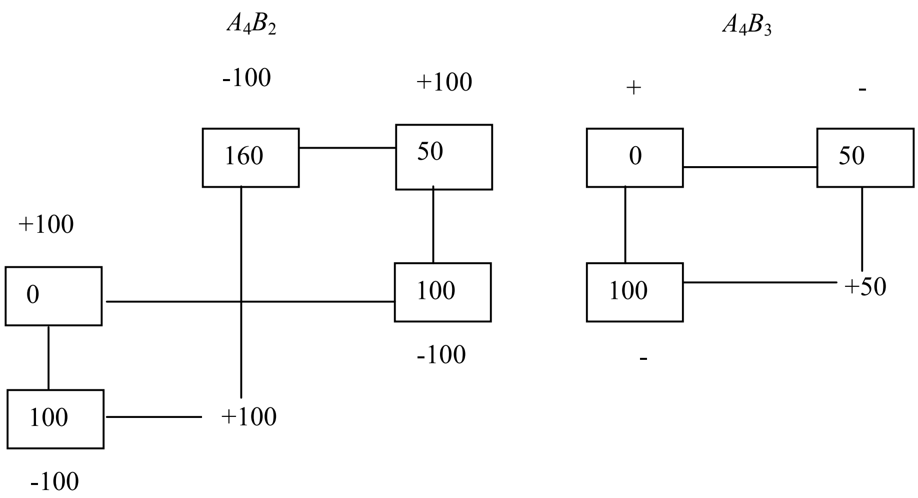


Рис.5.1

После перераспределения поставок по циклу пересчета клетки A_4B_2в новом плане эта клетка оказывается базисной, в то же время две старые базисные клетки A_4B_1и A_3B_4 должны превратиться в свободные, так как в них одинаковые минимальные поставки (100), отмеченные знаком минус в цикле пересчета. В связи с этим новый опорный план табл. 5.2 оказывается также вырожденным. Для преодоления вырожденности в одной из этих двух клеток (A_4B_1 или A_3B_4) следует записать нулевую поставку. Допустим x_{34}=0.

Табл.5.2

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления							
		B_1		B_2		B_3		B_4	
		100		160		190		150	
A_1	140	6		3		2	140	3	
A_2	210	4		4	60	5		4	150
A_3	150	2	100	5		6	50	5	0
A_4	100	1		2	100	3		6	

Опорный план табл.5.2 является оптимальным решением задачи, так как характеристики всех свободных клеток не отрицательные и значение целевых функций F=G=1820. Однако возможны еще варианты оптимального плана (альтернативные программы). Желательно, чтобы читатель самостоятельно нашел их и проверил на оптимальность. Это послужит упражнением для усвоения теоретических познаний в этой области.

5.2. Открытые модели транспортной задачи

При экономико-математической постановке транспортной задачи в 1.3, а также в примерах гл. 4 предусматривалось условие равенства между суммарной мощностью m поставщиков и суммарной емкостью n потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (5.1)$$

Такое предположение вполне логично, например, для задач о перевозках, когда необходимо найти оптимальную схему транспортных связей между какой-то группой поставщиков и потребителей, при этом объемы имеющейся и потребляемой продукции не выходят за установленные пределы.

Модель задач, в которых соблюдается условие (5.1), в линейном программировании называют *закрытой моделью* задачи.

Однако в целом ряде экономических задач условие (5.1) не обязательно, а в иных— должно быть непременно нарушено. К числу таких задач можно отнести, например, задачи по размещению и концентрации производства. В этих задачах наряду с другими вопросами определяются оптимальные размеры производства в заданных пунктах в условиях, когда суммарный *допустимый* объем производства (вытекающий из возможностей сырьевой базы и пр.) превышает реальные потребности в продукции данного производства на ближайший планируемый перспективный период.

Модели задач, в которых условие (5.1) нарушено, принято называть *открытыми* моделями задач.

Могут быть два случая открытых моделей задач. Первый, когда суммарная мощность всех m поставщиков превышает суммарный спрос всех n потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i . > \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (5.2)$$

Эти задачи в практике планирования и управления производством встречаются довольно часто, когда задачи решаются по лесоизбыточным комплексам.

Второй случай, когда суммарная мощность всех m поставщиков меньше суммарного спроса всех n потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i . < \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (5.3)$$

Эти задачи встречаются в случаях решения по лесодефицитным районам.

Математическая формулировка открытой модели транспортной задачи несколько отличается от закрытой модели.

При превышении суммарной мощности над суммарным спросом (5.2) ограничительное условие (1.32), (4.2) изменится и будет выглядеть так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i , \; i = 1,2,...,m. \qquad (5.4)$$

При превышении суммарного спроса над суммарной мощностью (5.3) меняется условие (1.33), (4.3):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j , \; j = 1,2,...,n. \qquad (5.5)$$

Уравнение целевой функции (1.31), (4.1) и условие неотрицательности переменных (1.34), (4.4) остаются прежними.

Вычислительные приемы для решения открытой модели просты. Наиболее распространенный способ, пригодный для решения задачи с помощью любого транспортного алгоритма, заключается в небольшом преобразовании условия для расчета — в сведении открытой модели (5.4) или (5.5) к закрытой модели (4.2, 4.3) задачи.

Если в первоначальной открытой модели задачи содержится условие типа (5.3), то для приведения модели к закрытой форме вводится *фиктивный потребитель* B_{n+i} с емкостью, равной

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.6)$$

При этом в матрице условий добавляется еще одна графа (столбец n+1).

Показатели стоимости поставки от любого из поставщиков к фиктивному потребителю $c_{i,\, n+i}$ принимаются равными нулю.

Если в открытой модели задачи содержится условие (5.5), для приведения модели к закрытой форме вводится *фиктивный поставщик* A_{m+1} с мощностью

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (5.7)$$

показатели $c_{m+i,j}$ также принимаются равными нулю. В матрице условий добавляется еще одна строка m+1.

В дальнейшем нами будет рассмотрено применение открытой модели к некоторым производственным задачам, здесь же рассмотрим небольшой числовой пример решения открытой модели транспортной задачи, в которой, положим, необходимо определить оптимальный план распределения части лесопродукции между предприятиями потребителями ЛПК.

Условия задачи характеризуются данными табл. 5.3

Табл.5.3

Пункты и объемы производства		**Пункты и объемы потребления**		
		B_1	B_2	B_3
		190	210	260
		Затраты на поставку		
A_1	200	6	7	4
A_2	260	5	6	7
A_3	220	4	5	6
A_4	110	3	5	8

В данном случае суммарная мощность четырех поставщиков:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 790 \text{ тыс.м}^3,$$

а суммарный спрос трех потребителей, имеющих производственные связи с поставщиками (положим, входящих в один лесопромышленный комплекс),

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 660 \text{ тыс.м}^3.$$

Таким образом, часть лесоматериалов не распределяется между потребителями комплекса.

Для решения задачи вводим фиктивного потребителя B_{n+1} с емкостью b_{n+1}=130 тыс. м^3, затраты на поставку $c_{i,\text{n}+1}$ принимаем равными нулю.

Условия задачи в обычном порядке записываем в первую рабочую табл. 5.4, в которой запишем также исходный опорный план, найденный по способу минимального элемента матрицы затрат.

Поскольку в матрице $C=[c_{ij}]$ оказалось четыре одинаковых значения минимального элемента ($c_{i,\text{n}+1}$ =0), расположенных в одном дополнительном столбце, на первом шаге распределения поставок практически может быть выбрана любая клетка из четырех имеющих $c_{i,\text{n}+1}$ =0 и в нее записана первая поставка:

$$x_{i,\text{n}+1} = \min(a_i,\ b_{n+1}).$$

Однако чаще исходный план оказывается ближе к оптимальному, если первая поставка $x_{i,\text{n}+1}$ будет записана в строку, в которой сумма стоимостей поставки ($\sum_j c_{ij}$) является наибольшей.

В нашем примере такой строкой является строка A_2. Поэтому первая поставка $x_{2,n+1}$=min (260, 130)=130 записывается в клетку A_2B_{n+1}. Дальнейший порядок распределения поставок производится соответственно методике, изложенной в гл.4.

Может быть предложен и иной подход к нахождению исходного опорного плана: прежде находятся значения неизвестных x_{ij} по способу минимального элемента матрицы $\lfloor C_{ij} \rfloor_{m\times n}$; столбец n+1 заполняется в последнюю очередь.

Табл.5.4

Пункты и объемы производства		Пункты и объемы потребления				Потенциалы u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		190	210	260	130	
A_1	200	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$ 200	$\boxed{0}$	-3
A_2	260	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 70	$\boxed{7}$ 60	$\boxed{0}$ 130	0
A_3	220	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{5}$ 140	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$	-1
A_4	110	$\boxed{3}$ 110	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{0}$	-2
Потенциалы v_j		5	6	7	0	

Этот план является оптимальным решением задачи, так как характеристики всех свободных клеток удовлетворяют признаку оптимальности $\Delta_{ij} \geq 0$. Целевая функция $F=G$. Общие затраты на поставку, равные 2990 тыс. руб., являются минимальными.

Поскольку Δ_{21} =0 и Δ_{33}=0, существуют еще варианты оптимального решения задачи, отыскать которые рекомендуется читателю.

Читатель заметил, что в решении открытой модели транспортной задачи нет никаких особых премудростей. Однако есть особенность, на которой следует остановиться.

При решении задачи по открытой модели в ряде случаев требуется учесть условие, что какой-либо один или несколько поставщиков должны направить реальным потребителям не менее некоторого определенного количества продукции. Тогда к фиктивному потребителю от этих поставщиков может быть направлена продукция в объеме, не превышающем определенные количества. В таких задачах, помимо верхних границ, должны фиксироваться и нижние границы мощностей поставщиков. Однако этот вопрос особый и нами будет рассмотрен особо.

5.3. Транспортная задача с ограниченными возможностями транспортных средств и коммутаций

В общей постановке транспортной задачи 1.3 и в рассмотренных примерах, предполагалось, что из любого пункта производства в любой пункт потребления может быть перевезено любое количество груза.

В целом ряде случаев оптимизации планирования перевозок приходится учитывать ограниченные возможности транспортных путей и средств. Это может иметь место и при планировании перевозок по лесовозным дорогам лесных и лесоперерабатывающих предприятий как внутри предприятий, так и между предприятиями комплекса. Поэтому в математическую модель транспортной задачи:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min; \qquad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,...,m. \qquad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,...,n. \qquad (5.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (5.11)$$

должны быть введены дополнительные ограничительные условия, учитывающие возможность транспортных путей и средств.

Если обозначить транспортные возможности между пунктами i и j через d_{ij}, то количество груза x_{ij}, которое может быть перевезено по этому направлению за планируемый период времени, не должно превышать транспортных возможностей, т. е.

$$x_{ij} \leq d_{ij}. \qquad (5.12)$$

Тогда ограничения 5.11, 5.12 объединяются и модель задачи осложняется двусторонними ограничениями на переменные

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}. \qquad (5.13)$$

При этом общая транспортная возможность дорог, соединяющих i-й пункт производства со всеми n пунктами потребления, должна быть равна или больше количества продукции, предназначенной к поставкам из этого i-го пункта всем n потребителям, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i,\ i = 1,2,...,m. \qquad (5.14)$$

Общая же транспортная возможность дорог, соединяющих j-й пункт потребления со всеми m пунктами производства, должна быть равна или больше количества продукции, которую надо поставить в этот j-й пункт от всех m поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j,\ j = 1,2,...,n. \qquad (5.15)$$

Существуют различные подходы к решению этой задачи. Рассмотрим наиболее простой из них.

Путем некоторых преобразований условий ее можно свести к типу обычной транспортной задачи. Для этого пункт производства (поставщика i) или потребления (потребитель j), для которых в условии ограничены транспортные возможности разбивается на два условных пункта. При этом следует подчеркнуть; непременно один пункт (положим, поставщик A_i разбивается на $A_i^{'}$ и $A_i^{''}$).

Мощность условного поставщика $A_i^{'}$ принимается равной установленной возможности средств, соединяющих пункт i с потребителем j,

$$a_i^{'} = d_{ij}, \qquad (5.16)$$

а мощность условного поставщика $A_i^{''}$— равной разности между заданными в условии задачи мощностью поставщика в пункте i и возможностью средств между i-м и j-м пунктами, т. е.

$$a_i^{''} = a_i - d_{ij}. \qquad (5.17)$$

При этом затраты на поставку грузов из пункта i' в пункт j—$c_{i^{'}j}$, принимаются равными действительным расходам c_{ij}, приведенным в условии задачи. В оптимальном решении переменные $x_{i^{'}j}$, могут иметь любое неотрицательное значение от нуля до $a_i^{'}$т. е.

$$0 \leq x_{i^{'}j} \leq a_i^{'}. \qquad (5.18)$$

В отличие от них переменные $x_{i^{''}j}$ в оптимальном решении непременно должны быть равны нулю, поскольку мощность $a_i^{''}$ характеризует количество груза в пункте i сверх установленной возможности средств, соединяющих пункты i и j, следовательно, эта часть груза должна быть направлена не j-му, а любому другому потребителю. Для того чтобы в оптимальном решении обеспечить значения переменных $x_{i^{''}j}$=0, затраты на поставку груза из пункта i'' в пункт j принимаются равными M, т. е. $c_{i^{''}j} = M$ (здесь M— число больше любого сколько угодно большого числа).

При минимизации целевой функции (5.8) и коэффициентах $c_{i^{''}j}$ =M, в оптимальном решении получим

$$x_{i^{''}j}=0$$

Отсюда следует, что

$$x_{ij} = x_{i^{'}j} + x_{i^{''}j} = x_{i^{'}j}. \qquad (5.19)$$

Тогда, исходя из условий (5.16), (5.18), получим

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}.$$

Таким образом, объем поставки груза из пункта i в пункт j не превысит установленной способности транспортных средств, обеспечивающих эти пункты.

Если для какой-то пары пунктов производства i и потребления s транспортные возможности не ограничены, объем поставки груза от поставщика A_i к потребителю B_s определится как сумма значений пары соответствующих переменных:

$$x_{is} = x_{i's} + x_{i''s}\,. \qquad (5.20)$$

Рассмотрим некоторый числовой пример. Положим имеется задача, исходные данные которой приведены в табл. 5.5. В этой же таблице показан оптимальный план поставок в предположении, что пропускные способности всех транспортных средств и путей не ограничены.

Табл.5.5

Поставщики и их мощности, тыс. м^3		Потребители и их потребности, тыс.м^3			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		180	200	170	100
A_1	220	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 130	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 90
A_2	180	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 170	$\boxed{4}$ 10
A_3	250	$\boxed{3}$ 180	$\boxed{5}$ 70	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$

Введем в условие задачи дополнительное ограничение типа (5.12). Предположим, что пропускная способность транспортного пути, соединяющего поставщика A_3 с потребителем B_1 ограничена, и по нему в планируемом периоде можно перевезти не более 100 тыс. м^3 лесоматериалов. Тогда в оптимальном решении значение переменной x_{31} должно удовлетворять условию

$$0 \le x_{31} \le 100 \qquad (5.21)$$

Положим, что по другим транспортным связям ограничений нет. В соответствии с изложенной выше методикой построена матрица (табл. 5.6). Дальнейший расчет может быть выполнен с помощью любого транспортного алгоритма. Это и рекомендуется проделать читателю для лучшего усвоения материала. В табл. 5.6 приведена результативная схема поставок, являющаяся оптимальным планом с учетом ограничения (5.21).

Если введение ограничения по пропускной способности транспортных средств и путей вызовет изменение плана, то это должно отразиться на величине целевой функции в сторону увеличения ее значения. И действительно, в нашем примере целевая функция .F_1=2570 (по плану табл. 5.5), с введением ограничения пропускной способности одной лишь дороги, увеличилась до F'=2650 (по плану табл.5.6).

Табл.5.6

Поставщики и их мощности, тыс. м^3		Потребители и их спрос, тыс.м^3			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		180	200	170	100
A_1	220	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{4}$ 70	$\boxed{3}$ 100

A_2	180	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{4}$
$A_3^{'}$	100	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$
$A_4^{''}$	150	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$ 150	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$

Выше проведено перестроение матрицы по строкам относительно поставщика A_3, для которого было введено ограничение пропускной способности транспортного пути (5.13), (5.21). Однако по той же методике можно было перестроить матрицу не по строкам, а по столбцам относительно потребителя B_1, для которого также справедливо ограничение (5.13), (5.21). В табл. 5.7 приведены соответствующие преобразования матрицы и результаты решения задачи.

Табл. 5.7

Поставщики и их мощности, тыс. м^3		Потребители и их спрос, тыс.м^3				
		$B_1^{'}$	$B_1^{''}$	B_2	B_3	B_4
		100	80	200	170	100
A_1	220	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{4}$ 70	$\boxed{3}$ 100
A_2	180	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{4}$
A_3	250	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$ 150	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$

Результат решения задачи как в первом (табл. 5.6), так и во втором случае (табл. 5.7) одинаков. Иначе и не должно быть.

5.4. Нелинейная модель транспортной задачи

Одним из недостатков рассмотренных ранее моделей (1.31)— (1.34), (4.1)—(4.4) является то, что в них предполагается линейный характер всех зависимостей и, главным образом, зависимостей затрат на производство от его объема.

Удельные затраты на поставку материалов от i-го поставщика j-му потребителю c_{ij} представим как сумму удельных затрат на производство материала и транспортировку его:

$$c_{ij}=c_i+t_{ij}. \quad (5.22)$$

Удельные транспортные расходы t_{ij} можно принять не меняющимися от объемов перевозки.

В то же время известно, что при равенстве прочих условий увеличение масштабов производства ведет к снижению удельных текущих затрат на производство c_i вследствие постоянства целого ряда статей затрат или по крайней мере их непропорционального (более медленного) роста. Здесь имеет место гиперболическая зависимость себестоимости единицы продукции от объема производства x_i (рис. 5.2).

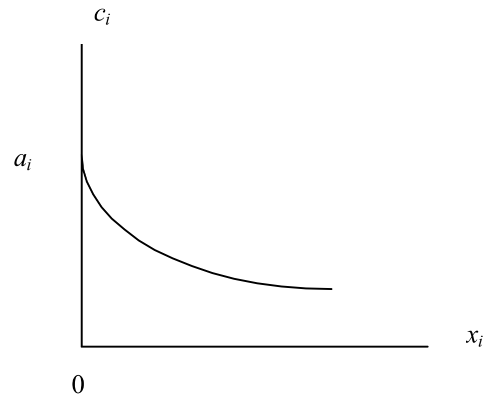


Рис.5.2

Функция удельных затрат при такой зависимости имеет следующий вид:

$$c_i(x_i) = \frac{a_i}{1 + b_i x_i}, \qquad (5.23)$$

где a_i и b_i — постоянные для данного производства,

В таком случае в задаче оптимизации поставки материалов в целевой функции должна быть отражена нелинейная зависимость затрат на производство материалов (сырья, продукции).

В математической модели задачи предыдущее условие целевой функции (4.1) следует заменить на

$$F(x_i, x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i)x_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} = \min, \qquad (5.24)$$

где $c_i(x_i)$ - функции, характеризующие зависимость себестоимости материала от объема производства в пункте i;

t_{ij} - транспортные расходы на доставку единицы материала из пункта i в пункт j.

При этом предполагается возможность отыскания зависимости $c_i(x_j)$ для каждого предприятия. Такие зависимости можно определить посредством анализа работы действующих предприятий и обобщения большого числа статистических данных, применив для этого метод регрессионного анализа путем построения производственных функций.

Функциональная зависимость затрат $f_i(x_i) = c_i(x_i)x_i$, на весь объем производства графически показана на рис. 5.3. Возможный путь решения подобной задачи состоит в линеаризации соответствующих нелинейных зависимостей и последовательном решении целого ряда линейных задач (предложен советскими учеными И. В. Гирсановым и Б.Т.Поляком).

Для решения задачи функции $f_i(x_i)$ аппроксимируются кусочно-линейными функциями (рис. 5.4) и на каждом отрезке (l_k, d_k) с номером k принимают следующий вид:

$$f_i(x_i) = f_i(l_k) + f_i'(x_k)(x_i - l_k), \qquad (5.25)$$

т. е. функция $f_i(x_i)$ в точке x_i равна сумме функции в начальной точке k-то отрезка плюс производная функции в промежуточной точке x_k отрезка (l_k, d_k), умноженной на разность аргументов. Здесь производная функции $f_i'(x_k)$ вычисляется по теореме Лагранжа и равна:

$$f_i^{'}(x_k) = \frac{f_i(d_k) - f_i(l_k)}{d_k - l_k}, \qquad (5.26)$$

т. е. производная в промежуточной точке x_k равна отношению приращения функции на k-м отрезке к длине его.

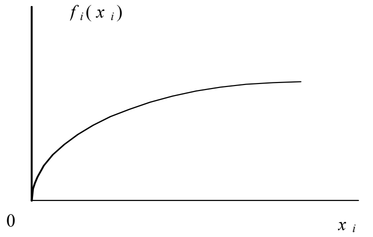


Рис.5.3

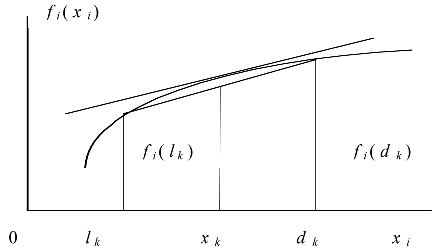


Рис.5.4

Подставив значение функции $f_i(x_i)$ в целевую функцию (5.24), получим:

$$F(x_i, x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\left[f_i(l_k) + f_i^{'}(x_k)(x_i - l_k)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i^{'}(x_k)x_i + \sum_{i=1}^{m}\left[f_i(l_k) - f_i^{'}(x_k)l_k\right]$$

Так как $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, то

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}x_{ij} + l, \qquad (5.27)$$

где

$$\varphi_{ij} = t_{ij} + f_i^{'}(x_k),$$

$$l = \sum_{i=1}^{m}\left[f_i(l_k) - f_i^{'}(x_k)l_k\right] = \text{const}.$$

В результате задача сводится к задаче линейного программирования, близкой к транспортной и сводимой к ней.

Приближенное решение исходной нелинейной задачи может быть получено путем решения некоторого числа линейных, при этом решение будет тем точнее, чем больше звеньев будет иметь аппроксимирующая кусочно-линейная функция. Возрастание точности будет сопровождаться увеличением числа решаемых линейных задач, которое равно S^m, где S — число звеньев ломаной, m—число предприятий (в настоящее время практически разрешимы задачи при $m \le 20$ и $S \le 3$).

Предположим, что функции $f_i(x_i)$ аппроксимированы вписанными ломаными (рис.5.5).

Зафиксировав для каждого k интервал $\left(h_k^l, h_k^{l+1}\right)$, решаем линейную задачу, при этом l_k заменяем на h_k^l и d_k на h_k^{l+1}.

Пусть оптимальное решение для этого интервала равно F^l. Затем аналогичные задачи решаются для всевозможных сочетаний интервалов.

Тогда $\overline{F} = \min\limits_{k_i} F^{k'_i}$ и соответствующий план (x_i, x_{ij}) может быть принят в качестве приближенного решения исходной задачи (k_i — номера сочетаний интервалов).

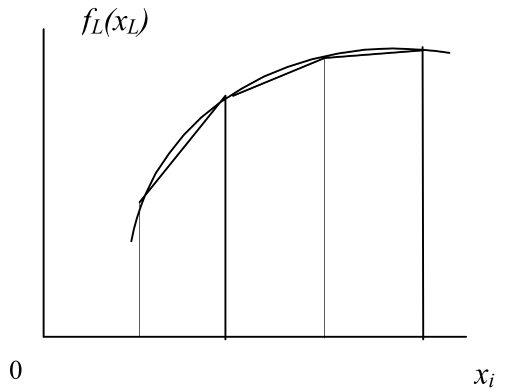


Рис.5.5

Ввиду громоздкости описанного метода в смысле большого объема вычислений целесообразно применять его лишь в случае крайней нужды, когда функции $f_i(x_i)$, найденные эмпирическим путем, заданы таблично или графически. Если же функции $f_i(x_i)$ заданы аналитически, дифференцируемы и имеют сравнительно небольшие вариации в параметрах их изменения, то несравненно проще применять иной способ (без линеаризации функций), описанный ниже в гл. 6. Там же метод иллюстрирован числовыми примерами.

5.5. Лямбда-задача и метод Малкова в ее решении

Для решения целого ряда важных экономических задач транспортные алгоритмы оказываются неприемлемыми. К таким задачам можно отнести: задачи по распределению задания по выработке изделий между предприятиями (цехами, участками или оборудованием—машинами и станками), задачи об использовании транспортных средств, по определению плана посевов, топливно-энергетического баланса и т. п. Эти и другие разного вида распределительные задачи могут успешно решаться с помощью симплексного метода или лямбда-алгоритмов (иногда лямбда-задачу называют распределительной задачей или обобщенной транспортной задачей).

Экономико-математическая формулировка задачи. Разработаем математическую модель лямбда-задачи на примере задачи оптимизации распределения задания по выработке продукции между исполнителями (машинами, участками, цехами— это однотипные задачи).

Положим на m участках (машинах или других исполнителях) в планируемом периоде должна вырабатываться продукция n видов; при этом продукции j-го вида должно быть выработано b_j, единиц.

Производственные ресурсы (по фонду времени работы основного оборудования) на i-м участке (у i-го исполнителя) составляют a_i.

Известны:

- производительность основного оборудования по участкам по выпуску разных видов продукции

$$\Lambda=[\lambda_{ij}]_{m\times n},$$

- себестоимость изготовления продукции на разных участках (в данном случае часового выпуска продукции $c'_{ij}\lambda_{ij,}$ здесь c'_{ij} - себестоимость производства единицы продукции)

$$C=[c_{ij}]_{m\times n}.$$

В *задаче требуется* найти оптимальный план распределения задания по выпуску продукции между исполнителями (машинами), который обеспечил бы выполнение задания с минимальными суммарными затратами.

Если через x_{ij} обозначить время работы в часах i-го исполнителя (или машины) по выпуску j-и продукции, то задача будет заключаться в отыскании неотрицательных значений переменных x_{ij}, минимизирующих целевую функцию.

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{5.28}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,...,m; \tag{5.29}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,...,n; \tag{5.30}$$

$$\left.\begin{matrix}x_{ij}\ge 0\\ \lambda_{ij}\ge 0\end{matrix}\right\};\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n. \tag{5.31}$$

Экономическое содержание условия (5.29) заключается в следующем. На каждом i-м участке (машине) общие затраты машинного времени на выпуск всех n видов продукции не должны превышать имеющихся ресурсов.

Содержание условия (5.30) или суммарный выпуск продукции j-го вида у всех m исполнителей (машинах) должен быть равен заданному объему производства.

Могут быть несколько измененные постановки этой задачи. Например, в качестве критерия оптимальности может служить прибыль, получаемая от реализации изделий. Тогда необходимо максимизировать целевую функцию

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{5.32}$$

где c_{ij} — прибыль на единицу j-го вида продукции при изготовлении ее на i-м участке (у i-го исполнителя);

x_{ij}—количество единиц j-и продукции, вырабатываемой на i-м участке.

Ограничительные условия задачи также могут быть несколько видоизменены. Так, если через λ_{ij} обозначить время, затрачиваемое на производство одного изделия j-го вида на i-мучастке, а через a_i—фонд времени по i-му участку, то ограничительными условиями задачи будут:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,...,m; \tag{5.33}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ \ j=1,2,...,n; \tag{5.34}$$

Экономическое содержание условий (5.29) и (5.33), а также (5.30) и (5.34) идентичны.

Приведенные уравнения и неравенства (5.28)—(5.34) очень немногим отличаются от математической модели транспортной задачи, описанной в 5.2 настоящей главы.

Поэтому не случайно иногда в литературе лямбда-задачу называют *обобщенной транспортной задачей.* Основное отличие этой задачи (5.28)—(5.34) от транспортной (5.4, 5.5) заключается в том, что в уравнение (5.30) или неравенство (5.33) входят коэффициенты λ_{ij}, при переменных x_{ij}. Именно эти коэффициенты и дали название задаче— лямбда.

Сущность алгоритма Малкова. Имеется несколько алгоритмов решения лямбда-задачи, которые, как и транспортные, можно подразделить на алгоритмы улучшения плана и алгоритмы условно оптимальных планов[1].

Рассмотрим более или менее подробно алгоритм, разработанный русским ученым У. Х. Малковым, который относится к группе алгоритмов улучшения плана. Этот алгоритм основан на идеях метода потенциалов.

Сущность метода Малкова рассмотрим на числовом примере, в котором информация нами взята условная с тем, чтобы цифры не затрудняли понимание хода и существа решения. Следует предупредить читателя, что сущность алгоритма лямбда-задачи значительно сложнее алгоритмов транспортной задачи. И, чтобы уяснить ее, надо несколько задач решить самостоятельно.

Исходные условия рассматриваемой задачи (5.28)—(5.31) приведены в табл.5.8.

Табл.5.8

Исполнители (станки, машины)и фонд эфф.рабоч.времени, ч		Наименование продукции и заданное количество ее производства, единиц			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		2000	2200	1500	2550
		В числителе производительность, единиц в час; в знаменателе себестоимость, руб.			
A_1	100	$\frac{20}{2}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{20}{5}$	$\frac{20}{2}$
A_2	250	$\frac{20}{1}$	$\frac{20}{4}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{15}{3}$
A_3	200	$\frac{10}{5}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{8}{2}$
A_4	230	$\frac{15}{3}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{15}{2}$

В этой задаче необходимо найти оптимальный вариант распределения задания по производству продукции между четырьмя исполнителями, обеспечивающий минимальные суммарные затраты на производство, т. е. необходимо найти

$$X=[x_{ij}]$$

минимизирующие целевую функцию (5.28).

В решении задачи x_{ij}—затраты времени на производство j-й. продукции на i-м станке (машине). В экономической интерпретации результата решения определяется задание исполнителям на производство—в единицах продукции.

Исходные условия задачи запишем в рабочей табл. 5.9. При этом условимся показатели себестоимости записывать в левом верхнем углу каждой клетки (они напечатаны курсивом), показатели производительности—в правом верхнем углу каждой клетки (напечатаны обычным шрифтом). Кроме того, поскольку модель задачи (5.28)—(5.31) открытая (она всегда открытая), введем дополнительный столбец. В него будет

---

[1] Один из первых алгоритмов ламбда-задачи был разработан А. Л. Лурье. Затем ряд алгоритмов доведены до машинных программ, в частности алгоритмы М. К. Гавурина, Г. Ш. Рубинштейна и С. С. Сурина, В. В. Шкурбы, А. Л. Брудно, Е. Б. Триуса. Американские ученые А. Фергюсон и Дж. Б. Данциг также описали эту задачу и указали способ ее решения.

записываться резерв времени. *Величина резерва времени на каждой итерации зависит от конкретного распределения задания.* Это обусловливается наличием коэффициентов λ_{ij}. Поэтому величину резерва времени заранее, как это было в открытой модели транспортной задачи, установить нельзя. Показатели c_{ij} в столбце резерва времени принимаются равными нулю, а коэффициенты λ_{ij}— равными единице.

Табл. 5.9

Исполнители и фонд времени, ч		Наименование продукции и ее количество, ед.				B_{n+1}-резерв времени, ч.	u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4		
		2000	2200	1500	2550		
A_1	100	*2* 20	*1* 10 **100**	*5* 20	*2* 20	0 1	$-\frac{3}{2}$
A_2	250	*1* 20 **100**	*4* 20	*2* 8	*3* 15 **90**	0 1 **60**	0
A_3	200	*5* 10	*2* 8	*2* 10 **150**	*2* 8	0 1 **50**	0
A_4	230	*3* 15	*1* 8 **150**	*4* 8	*2* 15 **80**	0 1	-1
v_j		$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	

Решение задачи выполняется в несколько последовательных итераций, и первая из них начинается с *определения исходного опорного плана* (первый шаг первой итерации). Для этого воспользуемся идеями способа минимального элемента матрицы. В отличие от предыдущего описания его здесь имеем не одну, а две матрицы условий

$$C=[c_{ij}] \quad \text{и} \quad \Lambda=[\lambda_{ij}].$$

По ним вычислим показатели r_{ij}, как частные от деления коэффициентов λ_{ij} на показатели затрат c_{ij}

$$r_{ij}=\frac{\lambda_{ij}}{c_{ij}}, \tag{5.35}$$

и получим матрицу

$$R=[r_{ij}]. \tag{5.36}$$

Показатель (5.35) характеризует, сколько единиц продукции приходится на 1 руб. затрат, и, естественно, чем выше этот показатель, тем он лучше с точки зрения минимизации целевой функции (5.28).

Поэтому при распределении задания в первую очередь должны быть заполнены клетки, в которых показатель r_{ij}, больший [в поставке (5.28)—(5.31), наоборот, чем он меньше, тем лучше для максимизации целевой функции (5.32)]*.

***) При максимизации целевой функции исходный опорный план отыскивается по минимальным значениям r_{ij} а перераспределение поставок при переходе к лучшему плану выполняется по циклам пересчета не с отрицательными, а с положительными характеристиками. Целевая функция примет максимальное значение при отсутствии положительных характеристик, превышающих нулевое значение.**

Итак, вычислим значения r_{ij} для каждой клетки табл. 5.9 (кроме столбца B_{n+1}). Чтобы не загромождать таблицу, запишем их в отдельной матрице табл. 5.10.

Табл. 5.10

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	10	4	10
A_2	$\boxed{20}$	5	4	5
A_3	2	4	5	4
A_4	5	8	2	7,5

Максимальное значение r_{ij}, равное 20, находится в клетке A_2B_1, поэтому первую переменную x_{ij} надо записать в эту клетку.

Величина переменной x_{ij}, определяется в соответствии с тем же правилом, что и в транспортной задаче (гл. 4), лишь дополнительно учитываются коэффициенты λ_{ij}.

$$x_{ij} = \min\left(a_{ij}; \frac{b_j}{\lambda_{ij}}\right). \qquad (5.37)$$

В нашем примере

$$x_{21} = \min\left(250; \frac{2000}{20}\right) = 100.$$

Записываем переменную x_{21}=100 в табл. 5.9 и мысленно вычеркиваем из дальнейшего распределения столбец B_1, поскольку выпуск продукции первого вида (B_1) полностью запланирован.

В оставшейся части матрицы 5.10 наибольшее значение r_{ij}, равное 10, находится в двух клетках A_1B_2 и A_1B_4. Заполним одну из них, например A_1B_2, значением

$$x_{21} = \min\left(100; \frac{2200}{10}\right) = 100.$$

Поскольку фонд времени исполнителя A_1 исчерпан полностью, эта строчка выбывает из дальнейшего распределения.

Теперь в оставшейся части матрицы табл. 5.10 наибольшее значение показателей r_{ij} равное 8, находится в клетке A_4B_2.

Поскольку производство продукции B_2 в количестве 1000 единиц ($x_{12}\lambda_{12}$= 100·10) нами уже запланировано на станке A_1 (x_{12}= 100), в клетку A_4B_2 может быть записана переменная

$$x_{42} = \min\left(a_4; \frac{b_2 - x_{12}\lambda_{12}}{\lambda_{42}} \right),$$

т.е.

$$x_{42} = \min\left(230; \frac{2200 - 100 \cdot 10}{8} \right) = 150.$$

Дальнейший порядок заполнения клеток табл. 5.9 следующий. Заполняем клетку A_4B_4 переменной

$$x_{44} = \min\left(a_4 - x_{42}; \frac{b_4}{\lambda_{44}} \right) = \min\left(230 - 150; \frac{2550}{15} \right) = 80;$$

затем клетку A_2B_4 переменной

$$x_{24} = \min\left(a_2 - x_{21}; \frac{b_4 - x_{44}\lambda_{44}}{\lambda_{24}} \right) = \min\left(250 - 100; \frac{2550 - 80 \cdot 15}{15} \right) = 90;$$

далее, клетку A_3B_3 переменной

$$x_{33} = \min\left(a_3; \frac{b_3}{\lambda_{33}} \right) = \min\left(200; \frac{1500}{10} \right) = 150;$$

В результате такого распределения получено допустимое решение задачи, поскольку выпуск заданных объемов продукции обеспечивается полностью наличием фонда эффективного рабочего времени исполнителей.

Далее следует выяснить возможные недоиспользованные ресурсы эффективного рабочего времени по исполнителям путем сравнения значений a_i, с величиной $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$:

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \qquad (5.38)$$

В нашем примере по предприятию A_2 имеются резервы времени, равные 60 ч и по A_3—50 ч. Записываем их в соответствующие клетки столбца B_{n+1}.

Следующий, *второй шаг* в решении задачи заключается *в проверке опорного плана* (табл. 5.9) на оптимальность. Для этого можно воспользоваться признаками оптимальности плана из теории двойственности.

Модель двойственной задачи по отношению прямой 5.28-5.31 будет:

$$G(u_i; v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = \max \qquad (5.39)$$

при условиях

$$u_i + \lambda_{ij} v_j \le c_{ij}; \begin{cases} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (5.40)$$

где при x_{ij}>0 (базисных) неравенства превращаются в уравнения

$u_i+\lambda_{ij}v_j=c_{ij}$; (5.41)

для x=0 (свободные) справедливо неравенство

$u_i+\lambda_{ij}v_j\leq c_{ij}$; (5.42)

Показатели потенциалов u_i и v_j, которые нам надо вычислить, аналогичны потенциалам строк и столбцов в транспортной задаче, но соотношения, связывающие их друг с другом и с показателями c_{ij} зависят от значений λ_{ij}. В лямбда-задаче для базисных клеток должно выполняться условие:

$$u_i+\lambda_{ij}\, v_j =c_{ij}. \quad (5.43)$$

Отсюда потенциал строки может быть вычислен как разность между показателем c_{ij} в базисной клетке и произведением потенциала столбца на лямбду:

$$u_i= c_{ij} - \lambda_{ij}\, v_j, \quad (5.44)$$

а потенциал столбца, равен частному от деления разности показателя c_{ij} (в базисной клетке) и потенциала строки на лямбду:

$$v_j = \frac{c_{ij} - u_i}{\lambda_{ij}}. \quad (5.45)$$

В *лямбда-задаче потенциал столбца* B_{n+1} (с резервом времени) *всегда принимается равным нулю,* т. е. он принимается равным показателю $c_{i,n+1}$

$$V_{n+1}=c_{i,n+1}=0. \quad (5.46)$$

Воспользовавшись зависимостями (5.44), (5.45) и значением (5.46), вычислим потенциалы для проверки плана табл. 5.9 на оптимальность.

Если v_{n+1}=0, то

$$u_2=0-0\cdot 1=0 \quad \text{и} \quad u_3=0-0\cdot 1=0;$$

$$v_1 = \frac{1-0}{20} = \frac{1}{20}; \; v_3 = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5} \text{ и } v_4 = \frac{1}{5};$$

$$u_4 = 2 - \frac{1}{5}\cdot 15 = -1; \; v_2 = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{и } u_1 = 1 - \frac{1}{4}\cdot 10 = -\frac{3}{2}$$

Вычисленные значения потенциалов заносим в дополнительные столбец и строку табл. 5.9.

Далее для непосредственной проверки плана на оптимальность вычисляются характеристики Δ_{ij}, для всех свободных клеток.

В лямбда-задаче характеристика свободной клетки вычисляется как разность между показателем c_{ij} в этой клетке и суммой потенциала строки и потенциала столбца, умноженного на ламбду,т. е.

$$\boldsymbol{\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j\lambda_{ij}).} \quad \textbf{(5.47)}$$

При минимизации целевой функции (5.28) оптимальное решение задачи наступает при $\Delta_{ij}\geq 0$ для всех свободных клеток.

Поскольку в лямбда-задаче столбец B_{n+1} (с резервом времени) заполняется заново по результатам каждого распределения (каждого плана), для свободных клеток этого столбца характеристики не вычисляются.

По формуле (5.47) вычислим характеристики Δ_{ij} для свободных клеток плана табл. 5.9 нашего примера.

$$\Delta_{11} = 2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{20}\cdot 20\right) = \frac{3}{2}; \qquad \Delta_{31} = 5 - \left(0 + \frac{1}{20}\cdot 10\right) = \frac{9}{2};$$

$$\Delta_{13} = 5 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\cdot 20\right) = \frac{5}{2}; \qquad \Delta_{32} = 2 - \left(0 + \frac{1}{4}\cdot 8\right) = 0;$$

$$\Delta_{14} = 2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\cdot 20\right) = -\frac{1}{2}; \qquad \Delta_{34} = 2 - \left(0 + \frac{1}{5}\cdot 8\right) = \frac{2}{5};$$

$$\Delta_{22} = 4 - \left(0 + \frac{1}{4}\cdot 20\right) = -1; \qquad \Delta_{41} = 3 - \left(-1 + \frac{1}{20}\cdot 15\right) = \frac{13}{4};$$

$$\Delta_{23} = 2 - \left(0 + \frac{1}{5}\cdot 8\right) = \frac{2}{5}; \qquad \Delta_{42} = 4 - \left(-1 + \frac{1}{5}\cdot 8\right) = \frac{17}{5}.$$

Из этих расчетов видно, что опорный план табл. 5.9 не оптимальный, поскольку характеристики свободных клеток A_1B_4 и A_2B_2 оказались отрицательными, что указывает на возможность снижения значения целевой функции, т.к. $F_s = F_{s-1} + \Delta_{ij} x'_{ij}$.

Таким образом, следующий, *третий шаг* в решении задачи *заключается в переходе от не оптимального* плана *к лучшему плану.*

Переход к лучшему опорному плану, так же как и в транспортной задаче, осуществляется посредством перераспределения заданий по циклу пересчета (цепям), поскольку запись новой переменной в одну из свободных клеток нарушает ограничительные условия (5.29, 5.30). Однако здесь это не настолько просто, как это было в транспортной задаче.

Поскольку в уравнение (5.30) входят лямбды, путем простого перераспределения по циклу пересчета общего баланса (т. е. удовлетворения условий (5.29), (5.30) добиться не удается. Поэтому в ламбда-задаче на каждой итерации, помимо перераспределения заданий по специфическим циклам пересчета, производится балансировка за счет записи заданий в столбец резерва времени, величина которого является переменной.

В связи с этим циклы (цепи) в ламбда-задаче строятся таким образом, чтобы они обязательно *имели выход на одну или две базисные клетки столбца* B_{n+1}. Соединение цикла пересчета с базисной клеткой столбца B_{n+1} называют *шлейфом.*

Возвратимся к нашему примеру и для клетки A_2B_2, в которой наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка, построим цикл пересчета. Если бы это была транспортная задача, цикл пересчета имел бы форму четырехугольника с вершинами в клетках A_2B_2, A_2B_4, A_4B_4 и A_4B_2. В ламбда-задаче этот цикл надо соединить шлейфом еще с базисной клеткой A_2B_{n+1}. Таким образом, в этом цикле (рис. 5.6) появилась новая, пятая, вершина, в отличие от других клеток (не принадлежащих столбцу (B_{n+1}), имеющая одностороннюю связь.

Прежде чем сформулировать свойства циклов пересчета ламода-задачи, построим циклы для всех остальных свободных клеток. Это нами делается не из требований решения данного примера задачи (на этой итерации достаточно цикла клетки A_2B_2, которую следует занять x_{22} для перехода к лучшему плану), а для демонстрации различных вариаций в построении циклов для того, чтобы читатель мог разобраться в этом новом, сначала не легком деле. Вершины циклов (рис. 5.6 и 5.7), соответствующие клеткам для которых они построены, отмечены квадратами, остальные вершины— кружками. В них указаны «координаты» соответствующих вершин.

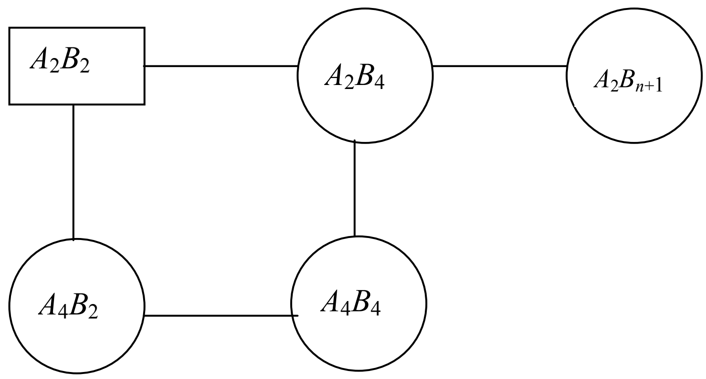


Рис.5.6

Сформулируем основные *свойства циклов* в ламбда-задаче.

Цикл представляет собой ломаную (не обязательно замкнутую) *линию, одна из вершин которой находится в одной из свободных клеток, остальные* — в *базисных клетках.*

Если в опорном плане *число базисных клеток равно* m+n-1, то *для каждой свободной клетки можно построить цикл* пересчета и притом *только один.*

Максимальное число вершин в цикле $m+n$-1, минимальное— четыре.

Каждая из вершин, находящихся в клетках столбцов B_1, B_2,…, B_n, *обязательно имеет двустороннюю связь с другими вершинами* (с учетом шлейфа могут иметь и трехстороннюю). *Вершины, находящиеся в базисных клетках столбца* B_{n+1}, *имеют только одностороннюю связь через шлейф.*

Если для свободной клетки удается построить замкнутый цикл по клеткам, связанным с столбцами B_1. . .B_n, то в этом случае шлейфом непосредственно или через другие клетки *соединяют его только с одной базисной клеткой столбца* B_{n+1}.

В случаях, когда для какой-то свободной клетки *не удается построить замкнутый цикл* по клеткам, связанным с столбцами B_1. . .B_n, *соединяют его шлейфами с двумя базисными клетками столбца* B_{n+1}.

Возвратимся к рассматриваемому примеру. Для перехода к лучшему плану необходимо провести перераспределение заданий по циклу пересчета клетки A_2B_2. Переменные, не вошедшие в этот цикл пересчета (x_{12}=100, x_{21}=100 и x_{33}=150), переносятся в новый план без изменения.

Перераспределение поставок в транспортной задаче выполнялось просто, без затруднений. В ламбда-задаче перераспределение по циклу значительно усложняется в связи с наличием показателей λ_{ij} в условии задачи.

В ламбда-задаче без предварительных расчетов нельзя заранее определить, какими будут (положительными или отрицательными) вершины цикла, входящие в шлейф. Нельзя также заранее по внешним признакам определить наименьшую переменную на вершине, отмеченной знаком "-".

Для установления знака в вершине и определения минимальной переменной перераспределения выполняют ряд последовательных расчетов, сущность которых заключается в следующем.

Прежде составляется и решается специальная система уравнений. Обозначим показатели, характеризующие размер изменения переменных x_{ij} при перераспределении их по циклу, a_{ij}.

В нашем примере новая переменная x'_{22} (см. рис. 5.6) должна появиться в клетке A_2B_2. В этой строке A_2 находятся еще две клетки, входящие в цикл пересчета, A_2B_4, и A_2B_{n+1}. Поэтому в клетку A_2B_2 может быть вписана такая x_{22}, которая не нарушит баланс по строке [условие (5.29)]. Тогда сумма измененных значений по строке должна быть непременно равна нулю. Следовательно, первое уравнение примет вид

$$\alpha_{22}+\alpha_{24}+\alpha_{2,n+1}=0 \qquad (5.48)$$

Подобным образом может быть составлено уравнение по строке* А$_4$*, из которой в цикл пересчета (рис. 5.6) вошли клетки* А$_4$В$_2$ *и* А$_4$В$_4$*,

$$\alpha_{42}+\alpha_{44}=0 \qquad (5.49)$$

При перераспределении заданий по циклу нельзя нарушать баланс и по столбцам, так как необходимо, чтобы выполнялось условие (5.30). По столбцам уравнения составляют несколько иначе. Здесь необходимо учитывать значения показателей λ_{ij} в соответствующих клетках. Уравнения по столбцам должны быть представлены суммами произведений $\lambda_{ij}\cdot\alpha_{ij}$. В нашем примере для столбца B_2, входящего в цикл пересчета, уравнение будет

$$20\alpha_{22}+8\alpha_{42}=0, \qquad (5.50)$$

для столбца B_4—

$$15\alpha_{24}+15\alpha_{44}=0. \qquad (5.51)$$

Таким образом, мы получили систему из четырех уравнений (5.48)—(5.51). Для ее решения предположим, что в клетку A_2B_2 будет записана переменная x_{22}=1, тогда α_{22}=l. Далее вычислим значения всех других α_{ij}. Они будут равны:

$$\text{если } \alpha_{22}=1; \text{ то } \alpha_{42}=-\frac{5}{2}; \alpha_{44}=\frac{5}{2}; \alpha_{24}=-\frac{5}{2}; \alpha_{2,n+1}=\frac{3}{2}.$$

Заметим, что алгебраическая сумма их равна нулю, иначе и не могло быть.

Итак, вычисленные значения a_{ij} показывают, на сколько изменится переменная в той или иной клетке цикла, если в клетку A_2B_2 будет записано единичное значение. Так, в клетке A_4B_2 уменьшится на 5/2, а в клетке A_4B_4—увеличится на 5/2 и т. д.

Далее необходимо установить, переменная в какой отрицательной вершине *лимитирует* величину x_{22}, в клетку A_2B_2. Для этого надо значения x_{ij} по отрицательным вершинам цикла разделить на соответствующие значения показателей α_{ij}, (знак при α в процессе деления не учитывается); частное от деления обозначим — β_{ij}.- Тогда

$$\beta_{ij}=\frac{x_{ij}}{\alpha_{ij}}. \qquad (5.52)$$

Применительно к рассматриваемому примеру

$$\beta_{42}=\frac{x_{42}}{\alpha_{42}}=150:\frac{5}{2}=60; \beta_{24}=90:\frac{5}{2}=36.$$

Наименьшая из вычисленных β_{ij} принимается в качестве новой переменной x'_{ij} и записывается в занимаемую клетку для перехода к лучшему плану. Таким образом, в рассматриваемом примере в клетку A_2B_2 должна быть записана переменная x_{22}=36.

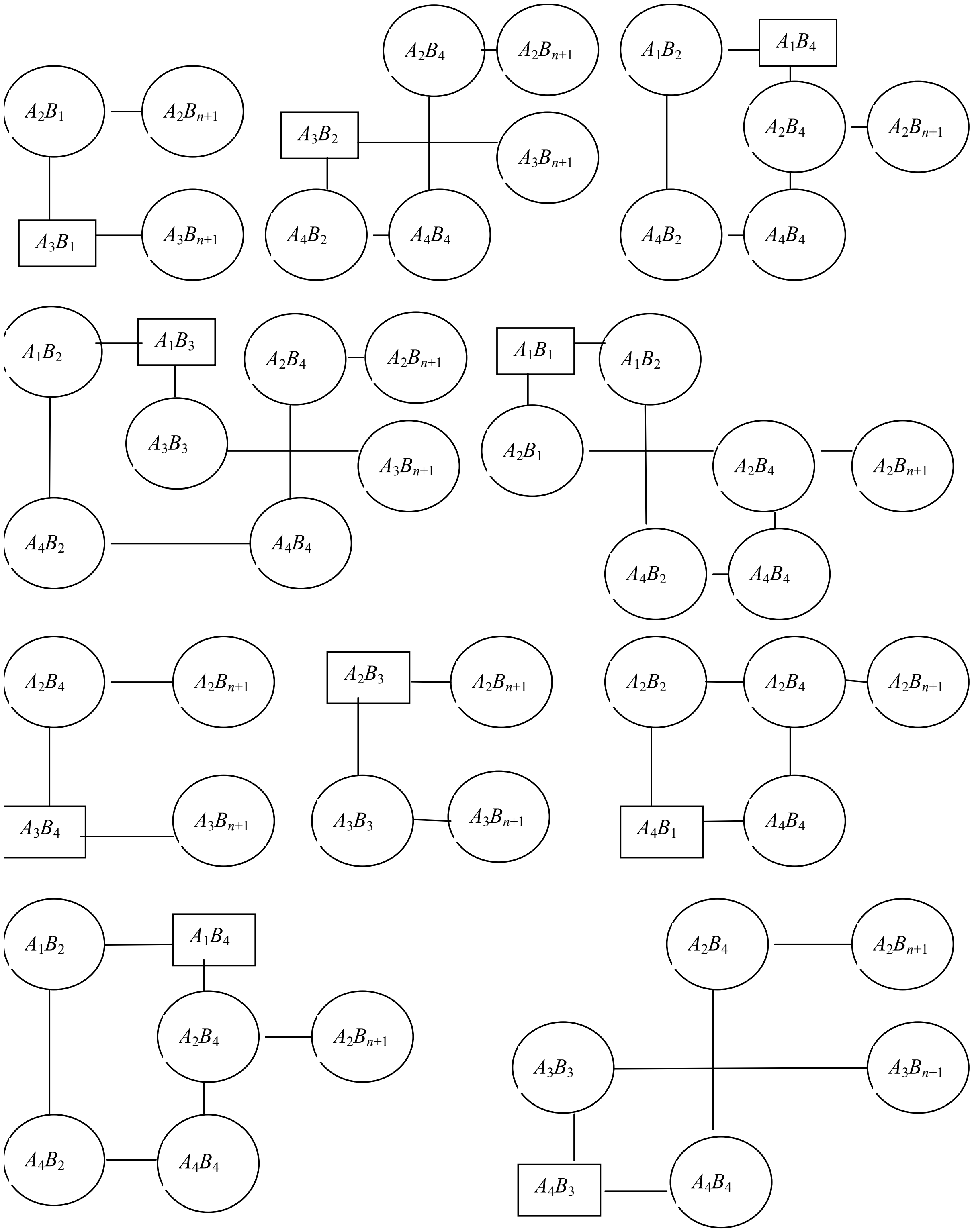


Рис.5.7

Затем надо вычислить, на какую величину изменятся все остальные переменные по вершинам цикла пересчета (рис. 5.6). Для этого достаточно умножить показатели α_{ij}, на наименьшую β_{ij}.

Обозначив величину изменения переменных в вершинах цикла $\alpha_{ij}^{'}$, получим

$$\alpha_{42}^{'} = -\frac{5}{2}\cdot 36 = -90; \quad \alpha_{24}^{'} = -\frac{5}{2}\cdot 36 = -90;$$

$$\alpha_{44}^{'} = \frac{5}{2}\cdot 36 = 90; \quad \alpha_{2,n+1}{'} = \frac{3}{2}\cdot 26 = 54.$$

Теперь подготовлено все необходимое для перехода к лучшему опорному плану. В клетку A_2B_2. записывается x_{22}=36.

Вычисленные значения $a_{ij}^{'}$, следует сложить (с учетом знака) с переменными x_{ij} по вершинам цикла (рис. 5.6). Переменные, не вошедшие в цикл пересчета, переносятся в новую табл. 5.11 без изменения. В результате получим новый опорный план (табл. 5.11), который является допустимым решением задачи (5.28)— (5.31).

Вторая итерация, как и все последующие, выполняется подобно первой итерации.

Табл. 5.11

Исполнители и фонд времени, ч		Наименование продукции и ее количество, ед.				B_{n+1}-резерв времени, ч.	u_i
		B_1	B_2	B_3	B_4		
		2000	2200	1500	2550		
A_1	100	*2* 20	*1* 10 **100**	*5* 20	*2* 20	*0* 1	-1
A_2	250	*1* 20 **100**	*4* 20 **36**	*2* 8	*3* 15	*0* 1 **114**	0
A_3	200	*5* 10	*2* 8	*2* 10 **150**	*2* 8	*0* 1 **50**	0
A_4	230	*3* 15	*1* 8 **60**	*4* 8	*2* 15 **170**	*0* 1	$-\frac{3}{5}$
v_j		$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{75}$	0	

Прежде всего полученный опорный план *проверяется на оптимальность.* Для этого по формулам (5.44) и (5.45) следует вычислить потенциалы и записать их в дополнительные столбец и строку табл. 5.11. Если теперь сравнить потенциалы предыдущего плана табл. 5.9 с планом табл. 5.11, то можно заметить, что в столбцах, клетки которых не входили в цикл пересчета, потенциалы не изменились. Поэтому некоторые потенциалы можно было не пересчитывать.

Характеристики свободных клеток плана табл. 5.11, вычисленные по формуле (5.47), равны

$$\Delta_{11} = 2; \Delta_{13} = 2; \Delta_{14} = -\frac{7}{15}; \Delta_{23} = \frac{2}{5}; \Delta_{24} = \frac{2}{5};$$

$$\Delta_{31} = \frac{9}{2}; \Delta_{32} = \frac{2}{5}; \Delta_{34} = \frac{46}{75}; \Delta_{41} = \frac{57}{20}; \Delta_{43} = 3.$$

Они показывают, что полученный нами второй опорный план (табл. 5.11) также не является оптимальным решением задачи, поскольку целевая функция (5.28) может быть снижена за счет занятия положительной переменной свободной клетки A_1B_4, оценка которой оказалась отрицательной.

Для осуществления *перехода к лучшему плану* надо проделать все те операции, которые выполнялись в первой итерации.

Сначала необходимо составить и решить систему уравнений для вычисления показателей a_{ij}, характеризующих размер изменения переменных x_{ij} при перераспределении их по циклу пересчета клетки A_1B_4 (рис. 5.8).

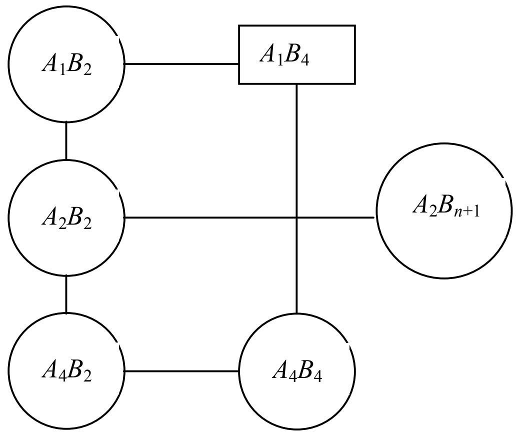


Рис.5.8

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{12}+\alpha_{14}=0;\\&\alpha_{22}+\alpha_{2,n+1}=0;\\&\alpha_{42}+\alpha_{44}=0;\\&10\alpha_{12}+20\alpha_{22}+8\alpha_{42}=0;\\&20\alpha_{14}+15\alpha_{44}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.53)$$

Как в этой системе, так и в (5.48) — (5.51) количество уравнений равно числу сторон цикла, а число неизвестных a_{ij}— числу вершин цикла. Так оно и должно быть.

Решение системы (5.53) при α_{14}=l дает следующие значения показателей α_{ij}:

$$\alpha_{12}=-1;\ \alpha_{22}=-\frac{1}{30};\ \alpha_{42}=\frac{4}{3};\ \alpha_{44}=-\frac{4}{3};\ \alpha_{2,n+1}=\frac{1}{30}.$$

Таким образом, мы установили, какие вершины цикла являются положительными (A_1B_4; A_4B_2, и A_2B_{n+1}) и какие — отрицательными (A_1B_2; A_2B_2, и A_4B_4), а также размерность изменения переменных по вершинам при перераспределении.

Далее по формуле (5.52) вычислим значение β для всех отрицательных вершин и установим (по min β) величину новой переменной x_{14}, которую необходимо занести в свободную клетку A_1B_4 для перехода к лучшему плану:

$$\beta_{12}=100;\ \beta_{22}=1080 \text{ и } \beta_{44}\approx 127.$$

Следовательно, x_{14} принимается равной 100.

Затем вычисляются значения α'_{ij}, характеризующие величину изменения всех переменных, входящих в цикл пересчета клетки A_1B_4 (рис. 5.8). Для этого ранее вычисленные значения α_{ij} умножаются на минимальное β_{ij}

$$\alpha'_{12} = -1 \cdot 100 = -100;$$

$$\alpha'_{22} = -\frac{1}{30} \cdot 100 = -\frac{10}{3} \approx -3{,}3;$$

$$\alpha'_{42} = \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{400}{3} \approx 133{,}3;$$

$$\alpha'_{44} = -\frac{4}{3} \cdot 100 = -\frac{400}{3} \approx -133{,}3;$$

$$\alpha'_{2,n+1} = \frac{1}{30} \cdot 100 = \frac{10}{3} \approx 3{,}3.$$

Вычисленные значения α'_{ij} позволяют преобразовать опорный план табл. 5.11 - произвести перераспределение заданий по циклу пересчета и тем самым перейти к новому лучшему опорному плану табл. 5.12, который является допустимым решением рассматриваемой задачи,

Табл. 5.12

Испол	***Наименование и количество продукции.***				**B_{n+1} *P***	**u_i**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**		

нители и фонд времени, ч		*2000*	*2200*	*1500*	*2550*	*езерв времени, ч*	
А *1*	*100*	**2** *20*	**1** *10*	**5** *20*	**2** 100 *20*	**0** *1*	—
А	*25*	**1** 100	**4** 32,7	**2**	**3**	**0** 117,3	*0*

2	0	20	20	8	15	1	
A 3	200	510	28	$\boxed{150}$ 210	28	$\boxed{50}$ 01	0
A 4	230	315	$\boxed{193,3}$ 18	48	$\boxed{36,7}$ 215	01	–
v j		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	0	

На *третьей итерации* проверяем опорный план табл. 5.12 на оптимальность, для этого вычисляем потенциалы и записываем их в соответствующий столбец и строку.

Характеристики свободных клеток, вычисленные по формуле (5.47), равны

$$\Delta_{11}=\frac{47}{15};\Delta_{12}=\frac{8}{15};\ \Delta_{13}=\frac{37}{15};\ \Delta_{23}=\frac{2}{5};\ \Delta_{24}=\frac{2}{5};$$

$$\Delta_{31}=\frac{9}{5};\ \Delta_{32}=\frac{2}{5};\ \Delta_{34}=\frac{46}{75};\ \Delta_{41}=\frac{57}{20};\ \Delta_{43}=3.$$

Характеристики всех свободных клеток оказались не отрицательными, следовательно, опорный план табл. 5.12 *является оптимальным решением задачи*. Целевая функция (5.28) достигла минимального значения.

Поскольку в оптимальном решении нет ни одной характеристики равной нулю, *план* табл. 5.12 *является единственным* оптимальным решением задачи.

В экономическом условии задачи требуется определить каждому исполнителю A_i объем производства продукции того или иного вида. Оптимальный же план (табл. 5.12) получен в часах работы исполнителей. По этим данным, а также по производительности (цифры в правом верхнем углу каждой клетки) нетрудно вычислить объемы производства продукции. В табл. 5.13 в числителе показано задание исполнителям по количеству продукции, в знаменателе - время работы (по основному оборудованию)

Табл. 5.13

Исполнители и фонд времени, ч		Наименование и количество продукции, ед.				Резерв времени, ч
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		2000	2200	1500	2550	
		Распределение задания: в числителе – количество продукции, в знаменателе – часы работы				
	1	2	3	4	5	6
A_1	100				$\frac{2000}{100}$	
A_2	250	$\frac{2000}{100}$	$\frac{654}{32,7}$			$\frac{}{117,3}$
A_3	200			$\frac{1500}{150}$		$\frac{}{50}$
A_4	230		$\frac{1546}{193,3}$		$\frac{550}{36,7}$	

Выполнение задания по выпуску всей продукции полностью обеспечивается ресурсами времени. Кроме того, у исполнителей A_2 и A_3 имеются резервы времени— соответственно 117,3 и 50 *ч*. По величине резерва времени судят о напряженности плана. Оптимальное распределение задания между исполнителями позволяет выполнить его с минимальными суммарными расходами.

Таким образом, решение задачи закончено. Как дальше использовать выявленные резервы времени—вопрос другой, и экономисты всегда найдут на него ответ.

На решении этого примера рассмотрен интересный и нужный для оптимизации планирования и управления производством алгоритм—лямбда-задачи. Не все особенности алгоритма нашли здесь отражение, так как на одном примере это невозможно сделать. Читатель в своей практике может встретиться с моментами, несколько усложняющими процесс решения. На возникшие вопросы он найдет ответ в других книгах, в которых алгоритм изложен полнее на многих примерах, например в книге И. Я. Бирмана.

Изучив алгоритм последовательного решения этого примера распределительной нетранспортной задачи (5.28-5.31), читатель может самостоятельно разработать алгоритм (для: определения исходного опорного плана, проверки плана на оптимальность, перехода к "лучшему" плану) для другой постановки задачи (5.32-5.34), которая была изложена выше. Естественно, что алгоритм решения претерпит соответствующие изменения, поскольку изменилась экономико-математическая модель задачи.

Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи отыскания наибольшего или наименьшего значения целевой функции на множестве допустимых планов носят название экстремальных задач. *Экстремальные задачи, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны, называются задачами нелинейного программирования.* Интерес даже к простейшим нелинейным задачам оптимизации вполне закономерен, ибо линейное моделирование реальных процессов осуществляется во многом числе случаев ценой весьма серьезных допущений, искажающих действительную картину явления. Например, в линейных моделях минимизации затрат предполагается, что производственные затраты пропорциональны количеству произведенной продукции. Этим делается допущение, что производственные затраты на единицу продукции (удельные затраты) не зависят от ее количества. В действительности это не так. Для большинства видов производства затраты на выпуск единицы продукции обычно уменьшаются с ростом объема производства.

Если в линейной модели минимизации производственных затрат по группе предприятий, или изделий и т. п., целевая функция имеет вид

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_jx_j+\ldots+c_nx_n \qquad (6.1)$$

где c_j — постоянные затраты на выпуск единицы продукции;
x_j — количества производимой продукции,
то в действительности эта функция такого вида

$$Z=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_j(x_j)+\ldots+f_n(x_n), \qquad (6.2)$$

которую можно записать иначе следующим образом:

$$Z=c_1(x_1)x_1+c_2(x_2)x_2+\ldots+c_j(x_j)x_j+\ldots+c_n(x_n)x_n \qquad (6.3)$$

где

$c_j(x_j)=\dfrac{f_j(x_j)}{x_j}$ - переменные затраты на выпуск единицы продукции.

К числу задач с функцией вида (6.2) или (6.3) относится, например, задача размещения и концентрации производства, в которой производственные затраты зависят от объема выпуска продукции нелинейно и др.

Постановка подробной задачи (уравнение целевой функции) приведена в 5.4.

Целевая функция должна представлять собой сумму приведенных затрат на производство и транспортировку лесоматериалов, т. е. должна иметь вид:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}, \qquad (6.4)$$

где x_i — объемы производства лесопродукции;
x_{ij}— количество продукции, транспортируемой из пункта i в пункт j;
$f_i(x_i)$ —приведенные затраты по производству количества продукции x_i;
t_{ij} — затраты по транспортировке единицы продукции из пункта i в пункт j.

Ограничительные условия этой задачи математически могут быть записаны следующим образом: $x_{ij}\geq 0$, условие неотрицательности переменных;

$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$ — объем поставки продукции из пункта i всем n потребителям равен объему производства продукции в этом пункте, который не должен превосходить допустимой мощности;

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ - каждому потребителю доставляется требуемое количество продукта.

Ниже будет показано, каким образом эту задачу можно свести к обычной транспортной задаче открытого типа, но с переменными стоимостями поставки лесоматериалов.

Если линейное программирование можно считать относительно законченным разделом математического программирования, то это ни в коей мере нельзя отнести к нелинейному программированию, которое бурно развивается и, вероятно, никогда не будет считаться законченным. В настоящее время имеется достаточно обширная переводная и отечественная литература по нелинейному программированию, которую невозможно хотя бы кратко охватить в учебном процессе. Поэтому мы постараемся лишь в весьма краткой и в то же время в доходчивой форме осветить идею и основные положения теории нелинейного программирования, применительно только к задачам оптимизации некоторых специальных классов нелинейных целевых функций при линейных ограничениях. Такого рода задачи чаще всего возникают в практических приложениях. Заметим, что задачи нелинейного программирования решаются труднее, чем задачи линейного программирования. Иногда удается свести решение некоторых задач нелинейного программирования к решению последовательного ряда линейных задач, сопровождающихся в общем случае, решением нелинейных систем уравнений. В практике иногда возникают задачи оптимизации линейных целевых функций при отсутствии ограничений или с ограничениями в виде уравнений. Методы решения таких задач известны очень давно (около 200 лет тому назад) и поэтому называются классическими методами оптимизации. На примере этих методов мы также вкратце остановимся. При очень малом количестве неизвестных в задаче (равном двум) и при условии гладкости[1] функций, входящих в условие задачи, она может быть решена элементарно при помощи геометрических построений и решения в общем нелинейной системы уравнений с тремя неизвестными. С этого простого случая мы и начнем изложение элементов теории нелинейного программирования.

6.1. Геометрический способ решения задач нелинейного программирования

Задачу нелинейного программирования с двумя неизвестными x_1 и x_2 в общем виде можно сформулировать следующим образом. Найти наибольшее (или наименьшее) значение целевой функции

$$Z=f(x_1, x_2) \qquad (6.5)$$

при условиях

$$g_i(x_1, x_2) \le 0, \quad i=1,\ 2, \ldots, m. \qquad (6.6)$$

Заданные функции $f(x_1, x_2)$, $g_i(x_1, x_2)$, ..., $g_m(x_1, x_2)$ будем считать гладкими.

Требование неотрицательности переменных $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, если это необходимо, также будем выражать в виде ограничений типа (6.6), т. е. представлять следующим образом:

$$g_1(x_1,x_2)= - x_1 \le 0; \quad g_2(x_1,x_2)= - x_2 \le 0. \qquad (6.7)$$

Для решения нелинейной экстремальной задачи геометрическим способом все ограничения обязательно должны быть представлены в виде (6.6), т.е. левая часть неравенства должна быть неположительной. Всякое ограничение другого вида легко преобразуется к виду (6.6). Например, дано ограничение

$$x_1 + x_2^2 \geq 3.$$

[1] Гладкость функции означает непрерывность ее частных производных первого порядка.

Умножая это ограничение на — 1, получим

$$-x_1 - x_2^2 \leq -3.$$

Наконец перенесение числа 3 в левую часть неравенства с обратным знаком дает неравенство вида (6.6)

$$3 - x_1 - x_2^2 \leq 0.$$

Так же как в линейном программировании, набор значений неизвестных x_1, x_2 называется *допустимым решением,* если он удовлетворяет условиям задачи (6.6).

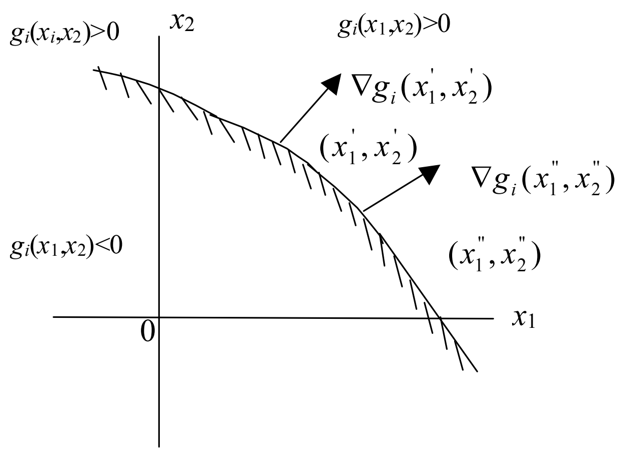


Рис. 6.1

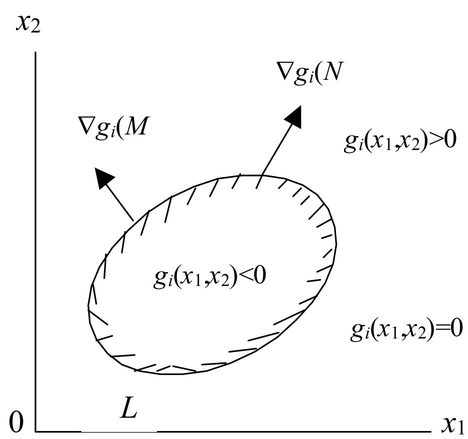


Рис.6.2

Множество всех допустимых решений называется *допустимой областью.* Каждое допустимое решение (x_1, x_2), геометрически изображается точкой X=(x_1, x_2) в прямоугольной системе координат x_1Ox_2. Допустимая область геометрически изобразится некоторой ограниченной или неограниченной частью координатной плоскости. Геометрическое изображение допустимой области называется ее построением. Для геометрического решения задачи необходимо прежде всего построить графически допустимую область. Но для этого надо знать, что представляет собой допустимая область каждого ограничения в отдельности, которую мы будем называть *частной допустимой* областью. Очевидно, допустимая область задачи (6.5), (6.6) будет представлять собой общую часть всех частных допустимых областей. Частная допустимая область, соответствующая одному ограничению $g_i(x_1, x_2)\leq 0$ строится следующим образом. Полагая $g_i(x_1, x_2)=0$ мы получаем одно неопределенное уравнение с двумя неизвестными x_1, x_2 . Бесчисленное множество решений этого уравнения представляет геометрическое место точек некоторой кривой L в плоскости x_1Ox_2. (рис. 6.1).

Обычно эта кривая разделяет плоскость на две части, в одной из которых функция $g_1(x_1, x_2)$ положительна ($g_i(x_1, x_2)>0$), а в другой — отрицательна ($g_i(x_1, x_2)<0$). На самой кривой L функция равна нулю. Таким образом, частная допустимая область представляет собой часть плоскости (ограниченной кривой L), на которой $g_i(x_1, x_2)\leq 0$. Если кривая L не замкнута, то частная, допустимая область не ограничена, если же замкнута и $g_i(x_1, x_2)<0$, внутри контура, то ограничена (рис.6.2). Но как узнать по какую сторону от кривой L лежит частная допустимая область, определяемая неравенством $g_i(x_1, x_2)\leq 0$?

Это определяется очень просто, если построить в произвольной точке контура вектор $\nabla g_i(x_1, x_2)$, который называется гр*адиентом функции* $g_i(x_1, x_2)$. *Градиентом функции* называется *вектор, у которого координаты являются частными производными функции*. Градиент функции обозначается символом ∇, проставляемым перед функцией (знак ∇ называется «набла»). Иногда градиент функции обозначается через *grad* $g_i(x_1, x_2)$. Обозначение ∇ короче и поэтому наиболее употребительно. Таким образом градиент функции $g_i(x_1, x_2)$—переменный двумерный вектор:

$$\nabla g_i(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}; \frac{\partial g_i}{\partial x_2} \right). \tag{6.8}$$

Градиент функции в заданной точке всегда направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку в сторону возрастания функции.

Нулевая линия уровня $g_i(x_1, x_2)=0$ отделяет область положительных значений

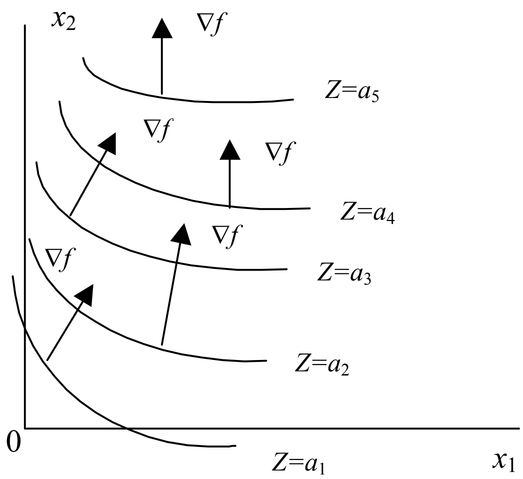


Рис.6.3

функции от области отрицательных ее значений. Поэтому частная допустимая область лежит по ту сторону от кривой L, где векторы $\nabla g_i(x_1, x_2)$ не располагаются.

Перейдем теперь к геометрическому изображению целевой функции $Z=f(x_1, x_2)$. Если придать Z определенное фиксированное числовое значение $Z = a$, то мы получим одно уравнение $f(x_1, x_2)=a$ с двумя неизвестными x_1, x_2, которому будут удовлетворять координаты точек некоторой кривой. При перемещении по этой кривой x_1 и x_2 будут непрерывно изменяться, но значение функции (6.5) будет оставаться постоянным, равным числу $Z = a$. Поэтому такая кривая называется *линией уровня функции* (6.5), соответствующая величине $Z = a$. Каждому числовому значению параметра a соответствует своя линия уровня. Таким образом, целевая функция $Z =f(x_1, x_2)$ изображается на плоскости x_1Ox_2 семейством линий уровня (рис. 6.3).

Градиент

$$\nabla f(x_1 x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

целевой функции в любой точке (x_1, x_2), где функция определена, направлен в сторону возрастающего уровня функции по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку. Таким образом, построив произвольную линию уровня целевой функции и построив вектор ∇f в какой-либо точке этой линии, мы будем знать направление возрастания функции.

Линия уровня, имеющая хотя бы одну общую точку с допустимой областью, называется *допустимой линией уровня*. Точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ допустимой области будет представлять оптимальное решение задачи, если она будет лежать на допустимой линии

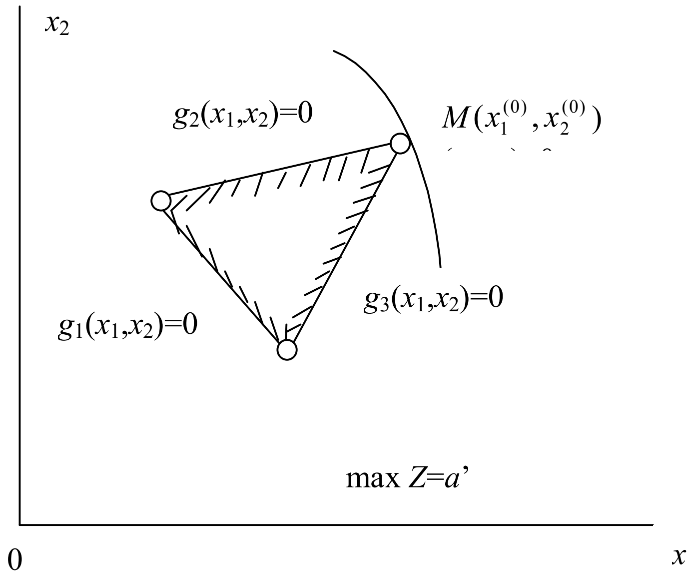


Рис.6.4

уровня, отвечающей наибольшему значению max$Z$ = a' при отыскании наибольшего значения целевой функции и наименьшему min$Z$ = a'' при задаче минимизации.

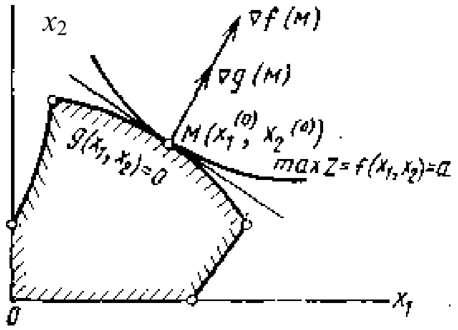


Рис.6.5

При геометрическом способе решения задачи приблизительное положение этой экстремальной точки легко определяется, а точное значение ее координат $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ определяется расчетом. Здесь возможны три случая, при единственности решения.

1. Точка ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) является внутренней точкой допустимой области. В этом случае линии уровня в окрестности этой точки замкнуты и стягиваются в точку ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$), в которой $\nabla f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})=0$. Для вычисления координат этой точки надо вычислить первые частные производные функции и приравнять их нулю. Оптимальное решение ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) найдется как решение полученной системы:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0; \ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \qquad (6.9)$$

2. Точка M ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) — граничная угловая точка допустимой области (рис.6.4).

В этом случае точные значения ее координат найдутся как координаты точки пересечения двух смежных граничных кривых.

Например, для определения координат оптимальной M($x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$) (рис. 6.4) надо решить систему уравнений:

$$g_2(x_1, x_2) = 0; \ \ g_3(x_1, x_2) = 0.$$

3. Точка M ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) —граничная не угловая точка допустимой области (рис. 6.5). В оптимальной точке M касательная к граничной линии $g(x_1, x_2)=0$ и к допустимой линии уровня $\max Z=f(x_1, x_2)= a$ общая и поэтому будет общей и нормаль. Следовательно, векторы $\nabla g(M)$ и $\nabla f(M)$ имеют одинаковое направление, так как они должны лежать на нормали. Два вектора, лежащие на одной прямой, должны иметь пропорциональные координаты. Из этого следует, что координаты $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ оптимальной точки должны удовлетворять системе трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ &\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\ &g(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

с тремя неизвестными — x_1, x_2 и λ (коэффициент пропорциональности). Третье уравнение выражает требование принадлежности точки M к соответствующей граничной линии. Итак, для определения координат оптимальной точки M ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$) надо составить систему уравнений (6.10) и затем ее решить. При этом определять число λ не обязательно, так как нас интересуют только значения координат $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$.

Пример. Рассмотрим нелинейную задачу об использовании ресурсов при изготовлении двух видов продукции P_1 и P_2, в том случае когда использование некоторых видов ресурсов не пропорционально количеству продукции. К таким видам ресурсов могут относиться, например, затраты машинного времени, рабочего времени и т. д. Мы не будем здесь конкретизировать виды продукции и ресурсов, а поставим задачу в относительно общем виде.

Предположим, что для изготовления продукции P_1 и P_2 требуется использование трех видов ресурсов R_1, R_2, R_3. Располагаемое количество ресурсов и нормы их расхода на изготовление единицы каждого вида продукции известны и задаются табл. 6.1.

Табл. 6.1

Виды ресурсов	Количество ресурсов	Нормы расхода ресурсов на единицу продукции	
		P_1	P_2
R_1	80	3—0, 045x_1	4—0, 71x_2
R_2	125	1	5
R_3	60	2	1

Расход ресурса вида R_1 на единицу продукции вида P_1 и P_2 не постоянный и уменьшается с увеличением соответствующего количества продукции x_1 и x_2.

Прибыль, получаемая предприятием от реализации единицы продукции P_1 и P_2, составляет соответственно 4 и 5 денежных единиц. *В задаче требуется составить такой план выпуска продукции видов P_1 и P_2, при котором прибыль предприятия от реализации всей продукции оказалась бы максимальной.*

Процесс составления математической модели этой задачи не отличается от составления математических моделей рассмотренных выше линейных задач (см. гл. III). Поэтому мы сформулируем ее без объяснений.

Требуется найти неотрицательные числа x_1 и x_2, максимизирующие целевую функцию (функцию прибыли)

$$f(x_1,x_2)=4x_1+5x_2 \tag{6.11}$$

и удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} (3-0{,}045x_1)x_1 & + & (4-0{,}071x_2)x_2 & \le & 80, \\ x_1 & + & 5x_2 & \le & 125, \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 60. \end{array}\right\} \tag{6.12}$$

Эта задача нелинейная, так как одно из ограничений нелинейно. Если представить ограничения (6.12) в виде $g_i(x_1, x_2) \le 0$ (i=1, 2, 3), то функции $g_i(x_1, x_2)$ будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} g_1(x_1,x_2) & = & (3-0{,}045x_1)x_1 & + & (4-0{,}071x_2)x_2 & - & 80 & \le & 0, \\ g_2(x_1,x_2) & = & x_1 & + & 5x_2 & - & 125 & \le & 0, \\ g_3(x_1,x_2) & = & 2x_1 & + & x_2 & - & 60 & \le & 0. \end{array}\right\} \tag{9.13}$$

Вычислим градиенты всех функций

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x_1,x_2)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1};\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(4;5), \\ \nabla g_1(x_1,x_2)=\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1};\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)=(3-0{,}090x_1;4-0{,}142x_2), \\ \nabla g_2(x_1,x_2)=\left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1};\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)=(1;5), \\ \nabla g_3(x_1,x_2)=\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial x_1};\dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}\right)=(2;1). \end{array}\right\} \tag{6.14}$$

В силу неотрицательности $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ допустимая область должна быть расположена в первой четверти координатной плоскости x_1Ox_2.

Для построения контура допустимой области следует приравнять нулю функции $g_i(x_1;x_2)$ (6.14) и построить соответствующие нулевые линии уровня этих функций. Нулевые линии уровня $g_2(x_1;x_2)$ и $g_2(x_1;x_2)$ являются прямыми, способ построения их элементарен и поэтому не требует пояснений.

Нулевая линия уровня $g_1(x_1;x_2) = 0$ — кривая. Для построения ее достаточно вычислить координаты трех-четырех точек этой кривой и провести с помощью лекала эту линию (рис. 6.6). В произвольных точках этих линий следует построить соответствующие градиенты и после этого заштриховать допустимую область, которая вполне определится (см. рис. 6.6).

Далее, задаваясь произвольным значением линейной целевой функции (6.11), например, равным 100, строим соответствующую прямую уровня (см. рис. 6.6). Затем по градиенту ∇f определяем направление возрастания этой функции и строим допустимую линию уровня, соответствующую максимуму функции (6.11), которая проходит через точку M пересечения граничных линий $g_2(x_1;x_2)=0$; $g_1(x_1;x_2)=0$. Эта линия уровня не рассчитывается, а строится параллельным переносом линии уровня $4x_1 + 5x_2=100$ в направлении вектора ∇f, так как линии уровня всякой линейной функции параллельны. Координаты точки M, которая является пересечением кривой линии $g_1(x_1;x_2)=0$. с прямой $g_2(x_1;x_2)=0$, являются оптимальным планом задачи.

Для вычисления координат оптимальной точки M следует решит нелинейную систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} (3-0{,}045x_1)x_1 & + & (4-0{,}071x_2)x_2 & \le & 80, \\ x_1 & + & 5x_2 & \le & 125. \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

Неотрицательное решение этой системы: $.x_1=10$; $x_2=23$. Таким образом, для

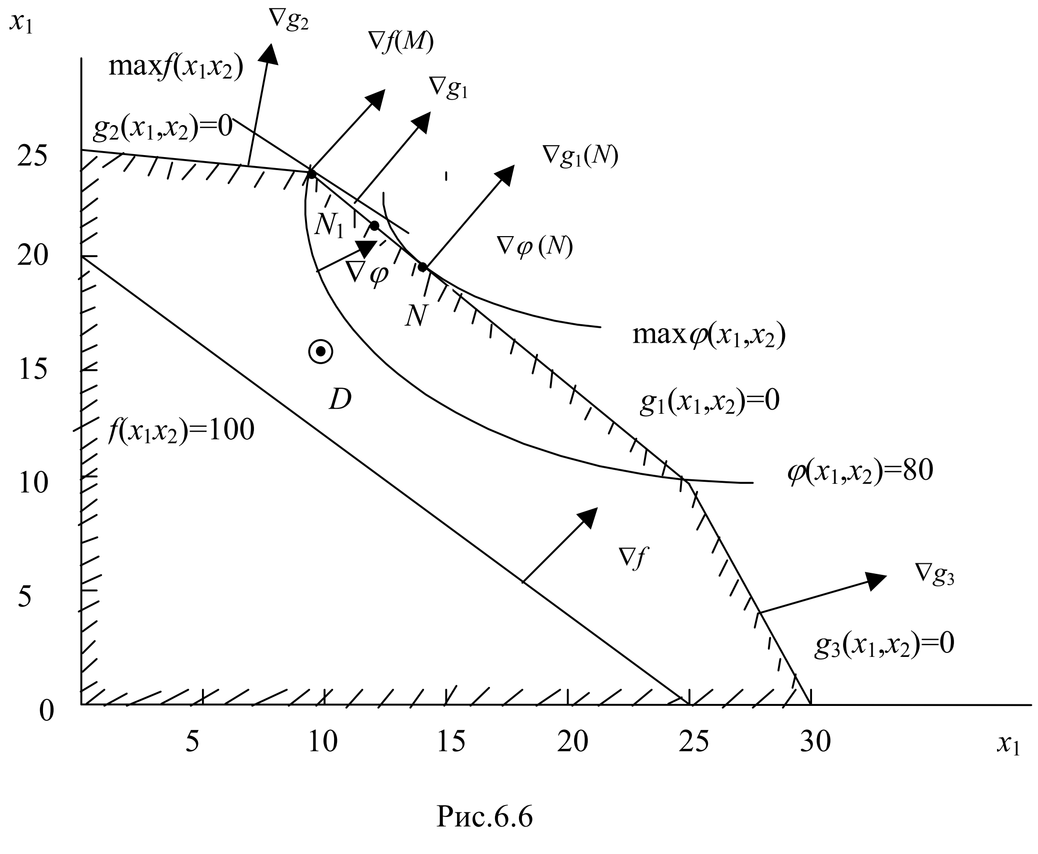


Рис.6.6

обеспечения максимальной прибыли необходимо производить 10 единиц продукции вида P_1 и 23 единицы продукции вида P_2 При этом максимальная прибыль составит:

$max f(M) = 4\cdot 10 + 5\cdot 23 = 155$ денежных единиц.

Теперь изменим условия задачи. Представим себе, что целевая функция нелинейна и имеет следующий вид:

$$\varphi = (x_1, x_2) = (4 — 0{,}100x_1)x_1 + (5 — 0{,}126x_2)x_2. \qquad (6.16)$$

В этом случае чистая прибыль на единицу продукции уменьшается с увеличением ее выпуска. Положим, что такой случай вызван, например, увеличением дополнительных непроизводительных затрат, связанных с дальнейшим увеличением выпуска продукции (расходы по хранению, местной транспортировки и т. д.). Задаваясь произвольным значением функции (6.16), например числом 80, строим соответствующую линию уровня этой функции (см. рис. 6.6). Вычисляем градиент функции (6.16):

$$\nabla\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = (4 - 0{,}200x_1, 5 - 0{,}252x_2). \qquad (6.17)$$

Построение $\nabla\varphi$ в произвольной точке кривой $\varphi(x_1, x_2) = 80$ показывает, что целевая функция (6.16) в допустимой области монотонно возрастает. Из рисунка ясно видно, что допустимая линия уровня, соответствующая максимуму этой функции, должна соприкасаться с граничной линией $g_1(x_1;x_2)=0$ в некоторой точке N, в которой градиенты $\nabla\varphi$ (N) и $\nabla g_1(N)$ имеют одинаковое направление. Следовательно, координаты точки N должны удовлетворять нелинейной системе уравнений (6.10), которая для данного примера будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &4—0{,}200x_1 = \lambda(3—0{,}090x_1), \\ &5—0{,}252x_2 = \lambda(4—0{,}142x_2), \\ &(3 — 0{,}045x_1)x_1 + (4 — 0{,}071x_2)x_2 = 80. \end{aligned} \qquad (6.18)$$

Неотрицательное решение этой системы

$x_1=12{,}8;\quad x_2=17{,}9$

является оптимальным планом выпуска продукции P_1 и P_2 *с* нелинейной целевой функцией (6.16), при этом максимальная прибыль составляет:

$\max\varphi(x_1, x_2) = \varphi(12{,}8;\ 17{,}9) \approx 84$ денежных единиц.

Снова несколько изменим условия задачи. Представим себе, что целевая функция имеет вид:

$$\psi(x_1, x_2) = (4 — 0{,}125\,x_1)\,x_1 + (5 — 0{,}250x_2)x_2. \qquad (6.19)$$

Эта функция отличается от функции (6.16) только тем, что прибыль на единицу продукции уменьшается с увеличением количества ее быстрее, чем в предыдущем случае. Вычислим градиент этой функции

$$\nabla\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = (4 - 0{,}25x_1; 5 - 0{,}50x_2). \qquad (6.20)$$

Приравняем составляющие градиента нулю

$$\begin{aligned} &4 — 0{,}25x_1 = 0, \\ &5 — 0{,}50x_2 = 0. \end{aligned} \qquad (6.21)$$

Решением этой системы является внутренняя точка D допустимой области (см. рис. 6.6) с координатами $x_1=16$; $x_2=10$. Эта точка и будет оптимальным планом выпуска продукции видов P_1 и P_2, при этом

$\max\psi(x_1, x_2) = \psi(16{,}10) = 57$ денежных единиц.

На этом примере мы рассмотрели все возможные случаи, которые могут встретиться при решении задачи графическим способом. Кроме того, этот пример наглядно показывает отличительные черты нелинейных задач по сравнению с линейными. В линейном программировании допустимая область всегда является выпуклым многоугольником. Область называется *выпуклой, если любой отрезок, соединяющий две точки области, целиком принадлежит этой области.* В нелинейном программировании допустимая область может быть и не выпуклой. На рис. 6.6 криволинейный заштрихованный пятиугольник не выпуклый. Например, любой отрезок, соединяющий две точки граничной кривой $g_1(x_1, x_2)=0$, не будет принадлежать области (кроме его концов). В линейном программировании экстремум целевой функции может достигаться только на границе допустимой области. В нелинейном же программировании он может достигаться и во внутренних точках области (см. рис. 6.6, точка D).

Наконец, в линейном программировании единственный экстремум целевой функции достигается только в угловой точке области. В нелинейном программировании он может быть в любой граничной точке как угловой, так и не угловой (см. рис. 6.6, точки M и N).

6.2. Понятие о классических методах оптимизации

Классические методы оптимизации применяются преимущественно к решению тех нелинейных задач, в которых ограничения отсутствуют или представляются только в виде уравнений.

В экономических приложениях ограничения могут отсутствовать, например, в тех случаях, когда затраты или прибыль не являются определенными детерминированными, а зависят от значения случайных параметров. В таких экономических задачах целевой функцией является не сама целевая функция (прибыль или затраты), а ее математическое ожидание на определенном интервале времени.

Классические методы оптимизации применяются преимущественно по отношению к гладким функциям.

В классической теории максимума и минимума следует ясно понимать различие между абсолютным и локальным максимумом и минимумом, часто вместо термина «абсолютный» используется термин «глобальный».

Функцию от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ мы будем обозначать кратко через $f(X)$, где $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ вектор или точка n-мерного пространства.

Говорят, что функция $f(X)$ достигает локального максимума в точке X_0, если $f(X) \leq f(X_0)$ для любой точки X из сколь угодно малой окрестности точки X_0. Аналогично определяется локальный минимум функции $f(X)$ в точке X_0. В окрестности этой точки должно быть $f(X) \geq f(X_0)$.

Абсолютный максимум (минимум) — это наибольшее (наименьшее) значение функции $f(X)$ на всем множестве точек, где она определена. Абсолютный максимум (минимум) одновременно является одним из локальных максимумов (минимумов) функции.

Для объединения понятий максимума и минимума употребляется слово *экстремум.*

Классическая теория экстремума не указывает на конкретные способы отыскания абсолютного экстремума. Она дает только признаки локального экстремума. Однако существуют функции, имеющие единственный экстремум в области определения функции. В этом случае абсолютный и локальный экстремумы совпадают В дальнейшем изложении мы будем считать функцию $f(X)$ гладкой, заданной на непрерывном сплошном замкнутом множестве точек X. Такое точечное множество мы будем кратко называть *областью.*

Если локальный экстремум достигается в некоторой внутренней точке X_0 области, то в этой точке градиент функции равен нулю $\nabla f(X_0) = 0$. Обратное утверждение не всегда верно: могут существовать точки области, в которых градиент равен нулю, однако локального экстремума там нет. Поэтому равенство градиента функции нулю, или (что все равно) равенство всех ее частных производных нулю, в некоторой точке является только необходимым, но недостаточным условием локального экстремума функции в этой точке.

При решении экстремальных задач нас, конечно, интересует нахождение абсолютного экстремума.

Экстремальные задачи при отсутствии ограничений возникают в тех случаях, когда заранее известно, что абсолютный экстремум функции достигается внутри области или же когда функция задана на открытом (не замкнутом) множестве точек.

Процесс решения экстремальных задач при отсутствии ограничений заключается в следующем.

Надо составить систему уравнений

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}=0,...,\frac{\partial f(X)}{\partial x_n}=0. \tag{6.22}$$

Решения системы (6.22) называются стационарными точками функции $f(X)$.

Далее следует найти все стационарные точки и вычислить значения функции $f(X)$ в этих стационарных точках. Оптимальным решением задачи является та стационарная точка, в которой функция имеет наибольшее значение в случае задачи максимизации и наименьшее значение при минимизации функции.

Рассмотрим экстремальные задачи при наличии ограничений в виде уравнений. В общем задача такого типа формулируется следующим образом.

Требуется найти числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, без ограничений их по знаку, при которых заданная функция

$$Z=f(X) \tag{6.23}$$

принимает наибольшее (наименьшее) значение, при условии, что точка $X_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ удовлетворяет неопределенной системе уравнений

$$g_1(X)=0;\ g_2(X)=0;\ldots,\ g_m(X)=0, \tag{6.24}$$

вообще говоря, нелинейной. Экстремум функции (6.23) при условиях (6.24) называется относительным экстремумом. Как уже говорилось выше, все функции $f(X)$, $g_i(X)$ от $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ считаются гладкими.

Если точка X_0 является некоторой точкой локального экстремума функции (6.23) и если в этой точке градиенты $\nabla g_1(X_0)$, $\nabla g_2(X_0)$,…, $\nabla g_m(X_0)$ линейно независимы, то в этой точке имеет место соотношение:

$$\nabla f(X_0) = \lambda_1\nabla g_1(X_0) +\lambda_2\nabla g_2(X_0)+\ldots+ +\lambda_m\nabla g_m(X_0), \tag{6.25}$$

где коэффициенты $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ – действительные числа.

Таким образом, всякая точка локального минимума функции (6.23) должна удовлетворять системе, состоящей из n уравнений вида:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_1}=\lambda_1\dfrac{\partial g_1(X)}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(X)}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m(X)}{\partial x_1},\\
\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_2}=\lambda_1\dfrac{\partial g_1(X)}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(X)}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m(X)}{\partial x_2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_n}=\lambda_1\dfrac{\partial g_1(X)}{\partial x_n}+\lambda_2\dfrac{\partial g_2(X)}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m(X)}{\partial x_n}
\end{array}\right\} \tag{6.26}$$

и m уравнений (6.24), представляющих условия задачи. Итак, мы имеем систему $n + m$ уравнений (6.24) — (6.26) с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1,\lambda_2,\ldots, \lambda_m$. Условия (6.24) — (6.26) являются только необходимыми, но недостаточными условиями локального экстремума функции (6.23) при условиях (6.24). Это значит, что могут существовать точки, которые являются решениями системы (6.24) — (6.26), но в них функция (6.23) не будет иметь относительного локального экстремума. Поэтому для определения абсолютного экстремума целевой функции необходимо найти все решения системы (6.24) — (6.26), затем подсчитать значения функции (6.23) для каждого из этих решений и выбрать среди них то, которое дает наибольшее (наименьшее) значение. Числа λ_i, которые не обязательно находить, называются *множителями Лагранжа*, а описанный метод нахождения относительного экстремума получил название *метода множителей Лагранжа.*

Как в случае нахождения абсолютного экстремума функции при отсутствии ограничений, так и в случае нахождения абсолютного относительного экстремума, необходимо находить все решения в общем случае нелинейных систем уравнений.

К сожалению, не существует вычислительного метода для получения всех решений любых нелинейных систем, поэтому практическое применение классических методов оптимизации оказывается полезным лишь в случае, когда система имеет единственное решение. Это условие выполняется при *минимизации выпуклых* функций и *максимизации вогнутых* функций. Прежде чем дать определение выпуклой и вогнутой функции, уясним понятие выпуклого множества точек $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном эвклидовом[1] пространстве.

Всякая точка X отрезка, соединяющего точки X_1, X_2, выражается через эти точки следующим образом:

$$X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \quad (0 \le \lambda \le 1). \qquad (6.27)$$

Каждой точке отрезка соответствует определенное значение λ, заключенное между нулем и единицей. Выражение (6.27) называется *выпуклой комбинацией* точек X_1, X_2.

Множество точек называется *выпуклым*, если оно содержит любую выпуклую комбинацию любых двух точек X_1 и X_2 из этого множества. Таким образом, выпуклое множество содержит отрезок, соединяющий любые две точки из этого множества.

Определение выпуклой и вогнутой функции имеет смысл только тогда, когда она задана на выпуклом множестве.

Функция $f(X)$, заданная на выпуклом множестве, называется *выпуклой*, если для любых двух точек X_1 и X_2 этого множества и любого λ, заключенного между нулем и единицей ($0 \le \lambda \le 1$), значения функции от выпуклой комбинации $X = (1-\lambda)X_1+\lambda X_2$ не превосходит выпуклую комбинацию значений функции в точках X_1 и X_2 при том же значении λ. Сказанное выражается в виде следующего неравенства:

$$f\left[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2\right] \le (1-\lambda) f(X_1) + \lambda f(X_2). \qquad (6.28)$$

Аналогичным образом определяется вогнутая функция. Функция $f(X)$, заданная на выпуклом множестве, называется *вогнутой,* если для любых двух точек X_1 и X_2 этого множества и любого λ $0 \le \lambda \le 1$

$$f\left[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2\right] \ge (1-\lambda) f(X_1) + \lambda f(X_2). \qquad (6.29)$$

Если умножить обе части неравенства (6.28) на — 1, то оно превратится в неравенство вида (6.29). Из этого следует, что если $f(X)$ — выпуклая функция, то — *f(X)* — вогнутая, и наоборот.

Если неравенства (6.28) или (6.29) выполняются на всем выпуклом множестве как строгие неравенства со знаками < или >, то функция называется *строго выпуклой* или *строго вогнутой.*

Линейная функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{6.30}$$

является выпуклой (и вогнутой) на всем эвклидовом пространстве однако линейная функция не является ни строго выпуклой, ни строго вогнутой. Это значит, что условия (6.28) и (6.29) выполняются для линейной функции только со знаками равенства.

Сумма выпуклых (вогнутых) функций есть выпуклая (вогнутая) функция.

Существуют дифференциальные признаки выпуклости и вогнутости гладких функций. Эти признаки являются простыми только для функций одной и двух переменных.

---

[1] n-мерное пространство называется эвклидовым, если расстояние между двумя точками $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $X'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ определяется следующим образом

$$\left|X'' - X'\right| = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'' - x_j'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Функция $f(x)$ одной переменной x является выпуклой на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка $f''(x) \geq 0$.

Функция $f(x_1, x_2)$ двух переменных x_1, x_2, заданная на выпуклом множестве ω плоскости x_10x_2, является выпуклой, если в любой точке множества ω

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \geq 0 \quad \left(\text{или} \;\; \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \geq 0\right) \\ \text{и} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 \geq 0. \end{array}\right\} \tag{6.31}$$

Дифференциальные признаки вогнутости функции аналогичны. Разница состоит только в том, что у вогнутых функций производные второго порядка неположительны

$$f''(x) \leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \leq 0 \;\; \text{и} \;\; \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \leq 0.$$

Выпуклые и вогнутые функции представляют собой интерес в нелинейном программировании вследствие следующих свойств этих функций.

Любой локальный минимум выпуклой функции является ее абсолютным *минимумом. Абсолютный минимум строго выпуклой функции достигается в единственной точке выпуклого множества, на котором она задана.*

Точка минимума выпуклой функции $f(X)$ является одновременно точкой максимума вогнутой функции - $f(X)$. Поэтому все, что сказано в отношении к минимуму выпуклой функции, справедливо по отношению к максимуму вогнутой функции.

Ценой увеличения расчетов можно обобщить метод множителей Лагранжа на случай, когда переменные ограничены. Такой случай рассмотрим на конкретном примере.

Пусть однородная лесопродукция может производиться на предприятиях $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$. Прибыль, получаемая j-м предприятием от реализации произведенной продукции в количестве x_j единиц, представляется в виде следующей нелинейной функции

$$f_j(x_j) = (a_j - k_j x_j)x_j,$$

где $a_j>0$, $k_j>0$ — постоянные коэффициенты.

Известны также производственные мощности M_j предприятий $П_j$.

Требуется распределить заказ по производству однородной лесопродукции в количестве N единиц между предприятиями так, чтобы получить наибольшую прибыль от ее реализации.

Математическая модель этой задачи будет следующей. Требуется найти абсолютный максимум целевой функции

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n}(a_j - k_j x_j)x_j \qquad (6.32)$$

при условиях:
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = N;\ 0 \le x_j \le M_j. \qquad (6.33)$$

Конкретизируем задачу. Пусть n =5; N=1000. Параметры a_j, k_j и M_j заданы в табл. 6.2.

Таб. 6.2

Наименование параметров	Предприятия				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
a_j	20	18	22	19	21
k_j	0,020	0,015	0,022	0,018	0,016
M_j	250	260	240	270	200

Определим тип целевой функции (6.32). Вторая производная по x_j от каждого слагаемого этой функции

$$\left[\left(a_j - k_j x_j\right)x_j\right]'' = -2k_j < 0.$$

Поэтому функция (6.32) является строго вогнутой функцией, как сумма строго вогнутых функций, во всем n-мерном пространстве. Эта функция имеет единственный максимум на любом выпуклом множестве точек X= (x_1, x_2, ..., x_n), в частности на выпуклом множестве, определяемом линейными ограничениями (6.33).

На первом этапе решим задачу (6.32) — (6.33) при отсутствии ограничений $0 \le x_j \le M_j$. Точка максимума $f(X)$ должна определиться по методу множителей Лагранжа, как результат решения системы уравнений

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = \lambda\,\frac{\partial g(X)}{\partial x_j},\ (j = 1,2,...,n);\ g(X) = 0 \qquad (6.34)$$

При условиях нашей задачи получаем:

$$\left.\begin{array}{l} a_j - 2k_j x_j = \lambda, \qquad (j = 1,2,3,4,5), \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = N. \end{array}\right\} \tag{6.35}$$

Находим

$$x_j = \frac{a_j - \lambda}{2k_j}, \; (j = 1,2,3,4,5) \tag{6.36}$$

и, подставляя его в последнее уравнение системы (6.35),получаем

$$\sum_{j=1}^{5} \frac{a_j}{k_j} - \lambda \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{k_j} = 2N$$

и из последнего соотношения находим выражение множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^{5} \frac{a_j}{k_j} - 2N}{\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{k_j}}. \tag{6.37}$$

Затем, подставляя значение λ (6.37) в выражения (6.36), получаем все значения x_j, при которых функция (6.32) имеет абсолютный максимум.

Произведя указанные расчеты по формулам (6.37) и (6.36), получаем:

λ=12,734; x_1=181,6; x_2=175,6; x_3=210,6; x_4=174,1; x_5=258,3.

Все значения x_j получились положительными, но значение x_5 = 258,3 получилось больше мощности предприятия $П_5$ M_5=200. Зафиксируем значение x_5 = 200 и найдем максимум функции (6.32) при условии

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 800$,

точно таким же образом, как на первом этапе, по формулам (6.37) и (6.36) при N=800 и n=4.

В результате расчета получаем на втором этапе:

λ =12,198; x_1= 195,0; x_2 = 193,4; x_3 = 222,8; x_4=188,8.

Полученные значения неизвестных условиям задачи (6.32), (6.33) удовлетворяют. Таким образом, имеем оптимальное распределение (с округлением до единицы) заказа между предприятиями

x_1= 195; x_2 = 193; x_3 = 223; x_4=189, x_5=200.

При этом максимальный доход составляет
$max f(X)$=16375.

6.3. Задача сепарабельного программирования

Рассмотрим теперь пример из области *сепарабельного программирования*[1]

Деревообрабатывающий завод выпускает три вида продукции, затрачивая на их производство некоторое количество определенного вида ресурса. Необходимо найти, какое количество каждого наименования продукции следует произвести, чтобы суммарная прибыль от реализации была максимальной. Исходные данные в табл.6.3.

Табл.6.3

Наименование	Предприятия

параметров	$П_1$	$П_2$	$П_3$
a_j	25	15	20
k_j	0,05	0,01	0,02
M_j	200	350	150

В качестве переменных x_1, x_2, x_3, приняты искомые величины объема производства продукции каждого вида в тысячах единиц. Функция, отражающая суммарную прибыль от реализации продукции всех видов, имеет вид :

$$f(X) = (6x_1 - 3x_1^2) + (4x_2 - 2x_2^2) + \left(2x_3 - \frac{1}{3}x_3^2\right). \qquad (6.38)$$

Фонд ресурса, необходимого для производства продукции составляет 4 тысячи единиц. Для выпуска единицы продукции первого и третьего вида требуется по одной единице ресурса, для выпуска единицы продукции второго вида - две единицы ресурса:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4; \\ &x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0;\ \ x_3 \ge 0. \end{aligned} \qquad (6.39)$$

Итак, требуется максимизировать функцию (6.38) при условиях (6.39).

[1]Подготовлен к публикации А.Б.Ловковым.

Пусть сетка точек для x_1 и x_2 имеет вид (0; 0,4; 0,7; 1), а для x_3 - (0; 1; 1,5; 2; 3), так что

$$\begin{aligned} &x_1 = 0y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}7y_3 + 1y_4; \\ &x_2 = 0y_5 + 0{,}4y_6 + 0{,}7y_7 + 1y_8; \\ &x_3 = 0y_9 + 1y_{10} + 1{,}5y_{11} + 2y_{12} + 3y_{13}. \end{aligned} \qquad (6.40)$$

Тогда ограничения сепарабельной модели можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &0y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}7y_3 + 1y_4 + 0y_5 + 0{,}8y_6 + 1{,}4y_7 + 2y_8 + \\ &+ 0y_9 + 1y_{10} + 1{,}5y_{11} + 2y_{12} + 3y_{13} \le 4, \\ &y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, \\ &y_5 + y_6 + y_7 + y_8 = 1, \\ &y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} = 1, \\ &y_1, y_2, \dots, y_{13} \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.41)$$

Целевая функция сепарабельной модели примет вид:

$$\begin{aligned} g(Y) = {} & 0y_1 + 1{,}92y_2 + 2{,}73y_3 + 3{,}00y_4 + 0y_5 + 1{,}28y_6 + 1{,}82y_7 + \\ & + 2{,}00y_8 + 0y_9 + 1{,}67y_{10} + 2{,}25y_{11} + 2{,}67y_{12} + 3{,}00y_{13} \to \max. \end{aligned} \qquad (6.42)$$

Оптимальным решением является следующий набор переменных: y_4=1, y_7=1, y_{11}=0,8, y_{13}=0,2, которому соответствует значение целевой функции 7,15. Это эквивалентно значениям x_1=1, x_2=0,7, x_3=0,8·1,5+0,2·2=1,6 и значению целевой функции (6.38), равному 7,17. В то же время, следует указать на то, что точное оптимальное решение имеет вид x_1=0,875, x_2=0,625, x_3=1,875 со значением (6.38) равным 7,25. Как видно, решение, полученное методами сепарабельного программирования, находится достаточно близко от точного решения.

Рассмотрим другой пример. В деревообрабатывающем производстве лесопромышленного предприятия планируется выпуск двух видов продукции. Искомые объемы производства - x_1 и x_2 в тысячах единиц. Себестоимость обеих видов продукции на единицу выпуска отражается функцией

$$f(Y) = \left(0{,}05x_1 - 0{,}00005x_1^2\right) + \left(0{,}04x_2 - 0{,}00005x_2^2\right). \quad (6.43)$$

Система ограничений имеет вид:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 \le 950, \\ &4x_1 + 2x_2 \le 800, \\ &x_1 \le 70, \\ &x_2 \ge 150. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Это означает, что используются два вида ресурсов, и объем выпуска продукции первого вида ограничен сверху, а второго вида - снизу.

В задаче требуется найти объемы производства продукции обоих видов при условии минимальной суммарной себестоимости.

Таким образом, необходимо минимизировать целевую функцию (6.43) при условиях (6.44)

Пусть сетка точек для x_1 и x_2 имеет вид (0; 50; 125; 170; 200).

С целью линеаризации функцию (6.43) удобно представить в виде суммы двух функций одного аргумента

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2), \quad (6.45)$$

где

$$f_1(x_1) = 0{,}05x_1 - 0{,}00005x_1^2;$$

$$f_2(x_2) = 0{,}04x_2 - 0{,}00005x_2^2.$$

Расчет коэффициентов F_k приведен в табл.6.4

Табл.6.4

X_k	X_{k+1}	X_{k+1}- X_k	$f(X_k)$	$f(X_{k+1})$	$f(X_{k+1})$- $f(X_k)$	F_k	
0	50	50	0	2,4	2,4	0,0480	$f_1(X)$
50	125	75	2,4	5,5	3,1	0,0413	
125	170	45	5,5	7,1	1,6	0,0356	
170	200	30	7,1	8,0	0,9	0,0300	
0	50	50	0	1,9	1,9	0,0380	$F_2(X)$
50	125	75	1,9	4,2	2,3	0,0307	
125	170	45	4,2	5,4	1,2	0,0267	
170	200	30	5,4	6	0,6	0,0200	

Представим x_1 и x_2 в виде сумм

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4; \\ x_2 &= z_5 + z_6 + z_7 + z_8, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где

$$\left.\begin{array}{l}0 \le z_1 \le 50\\ 0 \le z_2 \le 75\\ 0 \le z_3 \le 45\\ 0 \le z_4 \le 30\\ 0 \le z_5 \le 50\\ 0 \le z_6 \le 75\\ 0 \le z_7 \le 45\\ 0 \le z_8 \le 30\end{array}\right\} \qquad (6.47)$$

Тогда задача предстанет в следующем виде:

$$\begin{aligned} g(Z) = 0{,}0480z_1 + 0{,}0413z_2 + 0{,}0356z_3 + 0{,}0300z_4 + 0{,}0380z_6 +\\ + 0{,}0307z_6 + 0{,}0267z_7 + 0{,}0200z_8 \to \max \end{aligned} \qquad (6.48)$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l}2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 3z_5 + 3z_6 + 3z_7 + 3z_8 \le 950\\ 4z_1 + 4z_2 + 4z_3 + 4z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 2z_7 + 2z_8 \le 800\\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \le 70\\ z_5 + z_6 + z_7 + z_8 \ge 150\end{array}\right\} \qquad (6.49)$$

z_1, z_2,…, z_8 находятся в пределах, установленных системой неравенств (6.41). Как видим, эта задача линейного программирования, легко решаемая симплексным методом.

Оптимальным решением будет

z_3=40;
z_4=30;
z_6=75;
z_7=45;
z_8=30;
max $g(Z)$=6,428.

Отсюда найдем x_1 и x_2:

x_1=70;
x_2=150.

Значение целевой функции $f(X)$ составит 8,13.

Следует указать, однако, на то, что функция $f(X)$ не является вогнутой, поэтому найденный экстремум является локальным минимумом. Только дальнейший анализ функции может убедить в том, что это также и глобальный минимум.

Методика использования персональных ЭВМ для решения задач в нелинейной постановке

Выше были изложены различные методики решения нелинейных задач. Их отличительной чертой является представление нелинейных задач в линейном виде и дальнейшее решение с помощью методов линейного программирования. Поэтому в качестве средства решения нелинейных задач на персональном компьютере может служить программа, используемая обычно для решения задач линейного программирования.

В основу программы заложен усовершенствованный симплексный метод, который превосходит все остальные методы решения задач линейного программирования как по простоте, так и по эффективности вычислительной процедуры. Он называется модифицированным симплексным методом или *методом обратной матрицы*.

Программа, кроме того, позволяет для каждой итерации вычислять симплексный мультипликатор.

Таким образом, подвергнув задачу нелинейного программирования линеаризации и заложив в программу исходные данные вспомогательной задачи линейного программирования, мы через конечное число итераций получим оптимальное решение.

Программа, листинг которой представлен в нашем издании [2] содержит исходные данные для решения примера, изложенного выше.

Рассмотрим теперь вопросы, которые необходимо учитывать при работе с персональным компьютером в данном случае.

Представленная программа выполнена на языке программирования Бейсик, ориентированном на применении персональных компьютеров IBM и совместимых с ними. Для ввода и выполнения программ и отдельных команд Бейсика необходимо передать управление персональной ЭВМ интерпретатору. Для запуска интерпретатора Бейсика необходима операционная система MS - DOS. Поэтому, прежде всего, следует произвести загрузку этой системы.

Интерпретатор дискового Бейсика находится в файле BASICA.COM, а расширенного - в файле BASIC.COM. Для запуска любого из этих интерпретаторов требуется набрать имя соответствующего файла без расширения COM и нажать клавишу "Enter".

Сообщение "Ok", появляющееся на экране дисплея в конце идентификационного сообщения, означает, что интерпретатор готов обрабатывать команды Бейсика.

Программу, помещенную в дисковый файл, можно извлечь и разместить в основной памяти с помощью оператора LOAD, набрав название команды и нажав клавишу "Enter".

LOAD "b : LP"

Команда LIST позволяет вывести на экран программу, находящуюся в памяти машины. В команде LIST можно указать диапазон номеров строк, которые нужно вывести. В нашем случае имеет смысл выводить на экран для редактирования только последние строки программы, в которых представлены исходные данные для конкретной задачи. Поэтому команду LIST следует задавать таким образом

LIST 5000 -

или

LIST - - -

После появления на экране строк программы необходимо разместить данные задачи в строках программы, отмеченных оператором ДАТА, который создает список постоянных значений.

В начало массива вводится тип задачи "1" при решении задачи на минимум целевой функции и "-1" при решении задачи на максимум. В следующую строку следует ввести через запятую количество переменных, количество неравенств со знаком "больше или равно", количество неравенств со знаком "меньше или равно". В оставшиеся строки через запятую вводятся коэффициенты при переменных в ограничительных условиях, свободные члены ограничений, коэффициенты целевой функции. После ввода данных в каждую строку программы необходимо нажимать клавишу "Enter", указывая тем самым, что строка закончена.

Если требуется записать программу с новыми исходными данными в дисковый файл, то следует воспользоваться командой SAVE. С ее помощью осуществляется пересылка Бейсик-программ из основной памяти в дисковый файл.

SAVE "b : lp"

После окончания ввода данных, с помощью команды RUN можно инициировать выполнение программы. На экран будут выводиться результаты решения. Одновременное нажатие клавиш "Shift" и "PrtSc" позволит скопировать изображение с экрана на печатающее устройство.

Если необходимо приостановить вывод информации на экран дисплея, следует одновременно нажать клавиши "Ctrl" и "Num Lock". На экране ничего не появится, пока не будет снята блокировка нажатием любой из клавиш, кроме "Ctrl", "Shift", "Alt", "Caps Lock", "Num Lock", "Scroll Lock".

В заключении следует указать на то, что для набора наиболее часто употребляемых команд в Бейсике ПЭВМ предусмотрены специальные функциональные клавиши, обеспечивающие ускоренный ввод этих команд.

Клавиша F1 соответствует команде "LIST", F2-RUM, F3-LOAD, F4-SAVE. При этом в нижней строке экрана высвечиваются команды, соответствующие используемым функциональным клавишам. Листинг (см. сп. тр. [34]).

6.4.Задача оптимизации размещения производства при нелинейных затратах

Выше была приведена целевая функция в нелинейной форме (6.4). Преобразуем эту задачу в транспортную задачу открытого типа с переменными стоимостями производства и будем ее рассматривать в более широком аспекте - как задачу о размещении производства.

Целевую функцию (6.4) можно записать в виде

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i) \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \tag{6.50}$$

или

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[c_i(x_i) + t_{ij} \right] x_{ij},$$

где $c_i(x_i) = \dfrac{f_i(x_i)}{x_i}$ - переменные затраты на выпуск единицы продукции.

При этом принимается

$$c_i(0) = \lim_{x_i \to o} \frac{f_i(x_i)}{x_i} = f'(0).$$

Затраты на единицу продукции могут быть представлены в виде:

$$C_i(x_i) = c_i(0) \pm \varphi_i(x_i) x_i, \tag{6.51}$$

где функция $\varphi_i(x_i)>0$, которая в практических задачах изменяется мало. В частности, она может быть постоянной. Функция $\varphi_i(x_i)$ сама по себе относительно мала. Это следует хотя бы из грубой оценки этой функции. Уменьшение затрат на единицу продукции происходит во всяком случае не более чем на 50% при увеличении x_i до предельной мощности a_i поставщика A_i. Поэтому имеем

$$\varphi_i(x_i) \le \frac{c_i(0)}{2a_i}.$$

В выражении (6.51) берется знак « + » при увеличении затрат на единицу продукции и знак «—» при их уменьшении.

Подставляя выражение (6.51) в целевую функцию (6.50), получаем следующую транспортную задачу. Требуется найти абсолютный минимум функции

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x_i)x_{ij} \qquad (6.52)$$

где

$C_{ij}(x_i) = c_i(0)+t_{ij}\pm\varphi_i(x_i)x_i,$

- затраты на поставку при условиях:

$$x_{ij}\geq 0;\ x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq a_i;\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j. \qquad (6.53)$$

Для большинства видов производства целевая функция (6.52) монотонно возрастает и вогнута. В этом случае произведение $\varphi_i(x_i)x_i$ берется со знаком минус. Для некоторых же видов производства, например при эксплуатации месторождений полезных ископаемых и т. п., функция (6.52) также монотонно возрастает и выпукла; здесь $\varphi_i(x_i)x_i$ берется со знаком плюс. В последнем случае функция имеет единственный минимум, который, однако, не будет являться одним из опорных планов. Оптимальный план может быть любой граничной точкой выпуклого многогранника, определяемого системой ограничений (6.53). В первом случае, когда *целевая функция (6.52) вогнута оптимальный план обязательно является одним из опорных планов.* Но в этом случае задача имеет множество локальных минимумов, каждый из которых также достигается в некоторой вершине выпуклого многогранника, представляющей некоторый опорный план.

В случае вогнутости целевой функции задача в принципе может быть решена при помощи перебора всех опорных планов с вычислением целевой функции для каждого опорного плана. Однако при достаточно большом числе неизвестных x_{ij} такой перебор практически неосуществим ввиду колоссально большого количества вычислений.

Существуют методы решения транспортных задач с выпуклой целевой функцией или с вогнутой при $\varphi_i(x_i) = k_i$, равной постоянной величине. Однако алгоритмы этих методов очень сложные и требуют вычислений большого объема. Поэтому мы рассмотрим лишь весьма простой приближенный способ решения транспортной задачи при любых дифференцируемых однотипных функциях $\varphi_i(x_i)$, при которых целевая функция (6.52) является выпуклой или вогнутой[1]. Рассмотрим сначала случай вогнутости целевой функции, соответствующий уменьшению производственных затрат на единицу продукции при увеличении ее объема. Этот случай наиболее соответствует действительности.

Для вогнутой функции, заданной на выпуклом множестве, имеет место неравенство

$$\nabla f(X_0)\cdot(X-X_0)\geq f(X)-f(X_0), \qquad (6.54)$$

из которого видно, что любой локальный минимум функции $f(X)$ в точке X_0 одновременно является локальным минимумом линейной функции $\nabla f(X_0)X$ в той же точке X_0. Значит, и точки абсолютного минимума для этих функций также совпадают. Таким образом, задача абсолютной минимизации функции (6.52) при условиях (6.53) оказывается эквивалентной задаче абсолютной минимизации линейной функции.

[1] Этот способ, предложенный В.В. Шерстобитовым, был доложен на Всесоюзной межвузовской научно-технической конференции, проходившей в июне 1968 года в Московском лесотехническом институте. Нами впервые был опубликован в 1974 г. [9].

$$\nabla f(X_0)X = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_{ij}}x_{ij}. \qquad (6.55)$$

Однако постоянные коэффициенты $c_{ij} = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_{ij}}$ нам неизвестны, поскольку неизвестна точка X_0, в которой достигается абсолютный минимум функции (6.55). Поэтому для нахождения точки X_0 задача решается последовательными сближениями. На первом этапе полагаем $\varphi_i(x_i)$=0 и решаем линейную транспортную задачу минимизации целевой функции

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[c_i(0) + t_{ij}\right]x_{ij}. \qquad (6.56)$$

при ограничениях (6.53). Обозначим оптимальный план этой задачи через $X_0^{(1)}$. На втором этапе вычисляем постоянные коэффициенты $c_{ij}^{(1)} = \dfrac{\partial f(x_0^{(1)})}{\partial x_{ij}}$ и решаем задачу минимизации линейной функции

$$\nabla f(X_0^{(1)})X = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^{(1)}x_{ij}, \qquad (6.57)$$

и таким образом получаем оптимальный план $X_0^{(2)}$. Таким же образом перейдем от $X_0^{(2)}$ к третьему оптимальному плану $X_0^{(3)}$.

Этот процесс очень быстро сходится к некоторому опорному плану X_0, который и принимается за решение задачи.

Проверка эффективности способа на ряде примеров показывает, что указанные сближения приводят к точному абсолютному минимуму целевой функции (6.52), в случае если матрица размеров mхn

$$A=[c_i(0)+t_{ij}]_{m\text{x}n} \qquad (6.58)$$

имеет существенно различные по величине элементы. Если элементы матрицы A постоянны (особенно по строкам) или относительно мало различаются, то указанный процесс может сходиться к локальному минимуму, отличному от абсолютного. Однако в этом случае целевая функция изменяется относительно мало и полученный локальный минимум, не совпадающий с абсолютным минимумом, может приниматься за хороший приближенный результат.

Применение указанного процесса сближения для выпуклой функции, как правило, не сходится к одному опорному плану. Здесь обычно получается цикл повторяющихся опорных планов и за приближенное решение задачи принимается тот опорный план в цикле, который дает наименьшее значение целевой функции (6.52). Если процесс сближений сойдется к одному опорному плану, то это будет означать, что абсолютный минимум находится в одной из вершин выпуклого многогранника и мы получаем (в силу единственности решения для выпуклой функции) точное решение задачи. Для ускорения сходимости к циклу опорных планов следует на первом этапе минимизировать линейную форму

$$f^*(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\max c_{ij}(x_i)\right]x_{ij}, \qquad (6.59)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \max c_{ij}(x_i) &= c_i(0) + t_{ij} + \varphi_i(a_i)a_i, \quad \text{при } b_j \geq a_i, \\ \max c_{ij}(x_i) &= c_i(0) + t_{ij} + \varphi_i(b_j)b_j, \quad \text{при } b_j < a_i. \end{aligned}\right\} \qquad (6.60)$$

Рассмотрим решение задачи на конкретном числовом примере. Требуется решить задачу о размещении производства при уменьшении затрат на выпуск единицы продукции при исходных данных, представленных в табл.6.5.

Табл. 6.5

Постав- щик	Мощность a_i	$c_i(0)$	$\varphi_i(x_i)=k_i$	Потребители B_j, объемы потребления b_j и затраты на поставку t_{ij}		
				B_1	B_2	B_3
				50	40	60
A_1	40	20	0,12	9	6	12
A_2	30	18	0,15	7	8	10
A_3	50	22	0,11	11	9	7
A_4	40	16	0,10	6	8	10
A_5	40	19	0,12	8	5	4
A_6	50	14	0,08	10	9	12

В этом примере функция $\varphi_i(x_i)$ принимается постоянной. Целевая функция задачи является вогнутой, как сумма вогнутых функций.

На первом этапе решаем транспортную задачу открытого типа с объемом фиктивного потребителя $\sum_1^6 a_i - \sum_1^3 b_j = 100$, при постоянных затратах на поставку $c_{ij}=c_i(0)+t_{ij}$. Результат решения приведен в следующей табл. (6.6).

Табл.6.6

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{фикт}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	29	26	32	0 40	0
A_2	30	25 10	26	28 10	0 10	0
A_3	50	33	31	29	0 50	0
A_4	40	22 40	24	26	0	-3
A_5	40	27	24	23	0	-5

				40		
A_6	50	24	23 40	26 10	0	-2
Потенциалы потребителей		25	25	28	0	

Переходим ко второму этапу вычислений.

Вычисляем частные производные [составляющие вектора $\nabla f(X_0)$] целевой функции

$$f(X)=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}\left[c_i(0)+t_{ij}-k_i x_i\right]x_{ij}, \qquad (6.61)$$

где

$$x_i=\sum_{j=1}^{3}x_{ij};\ \ (i=1,2,3,4,5,6).$$

Частные производные от этой функции имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}}=c_i(0)+t_{ij}-k_i(x_i+x_{ij}). \qquad (6.62)$$

Вычисляем $c_{ij}^{(1)}=\dfrac{\partial f(X_0^{(1)})}{\partial x_{ij}}$ по формуле (6.62) по значениям x_i и x_{ij}, приведенным в таблице 6.6 и с этими стоимостями перевозок снова решаем транспортную задачу. Результат решения приведен в табл.6.7, в которой значения $c_{ij}^{(1)}$ представлены в квадратиках в левых верхних углах клеток.

Табл.6.7

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{фикт}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	29,0	26,0	32,0	0 40	0
A_2	30	20,5 10	23,0	23,5 10	0 10	0
A_3	50	33,0	31,0	29,0	0 50	0
A_4	40	14,0 40	20,0	22,0	0	-6,5
A_5	40	22,2	19,2	13,4	0	-10,1

				40		
A_6	50	20,0	15,8 40	21,2 10	0	-2,3
Потенциалы потребителей		20,5	18,1	23,5	0	

При проверке оптимальности опорного плана потенциалы поставщиков с действительными поставками фиктивному потребителю принимаются равными нулю.

На втором этапе заканчивается решение задачи, так как получено распределение, совпадающее с распределением на первом этапе. Опорный план x_{21}=10, x_{23}=10, x_{41}=40, x_{53}=40, x_{62}=40, x_{63}=10, остальные x_{ij}=0, является оптимальным, при этом получаются наименьшие суммарные затраты на производство и транспортировку продукции, которые можно подсчитать подстановкой полученного решения в выражение целевой функции (6.61), что предоставляется сделать читателю.

В табл. 6.7 видно, что строить предприятие в пунктах A_1 и A_3 нецелесообразно, так как в этих пунктах объемы производства x_i казались равными нулю. Предприятия в пунктах A_4, A_5, A_6 должны работать на полную мощность, а в пункте A_2 на 2/3 полной мощности.

Далее рассмотрим эту же задачу, т.е. с теми же исходными данными, но с выпуклой целевой функцией:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}\left[c_i(0) + t_{ij} + k_i x_i\right]x_{ij}. \tag{6.63}$$

В этом случае производственные затраты на единицу продукции возрастают с увеличением объема производства.

На первом этапе решаем транспортную задачу со стоимостями поставок лесопродукции $max\ c_{ij}(x_i)$, вычисленными по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \max c_{ij}(x_i) &= c_i(0) + t_{ij} + k_i a_i, \quad \text{при } b_j \ge a_i, \\ \max c_{ij}(x_i) &= c_i(0) + t_{ij} + k_i b_j, \quad \text{при } b_j < a_i. \end{aligned}\right\} \tag{6.64}$$

Эти стоимости поставок приведены в табл.6.8.

Табл.6.8

Поставщики	Потребители		
	B_1	B_2	B_3
A_1	33,8	30,8	36,8
A_2	29,5	30,5	32,5
A_3	38,5	35,4	34,5
A_4	26,0	28,0	30,0
A_5	31,8	28,8	27,8
A_6	28,0	26,2	30,0

В табл.6.9 приведен результат решения транспортной задачи со стоимостями поставок лесопродукции, заданными табл.6.8.

Табл. 6.9

Поставщики и их	Потребители и их спрос	Потенциа-

мощности		B_1	B_2	B_3	$B_{фикт}$	лы постав-
		50	40	60	100	щиков
A_1	40	33,3	30,8	36,8	0 40	0
A_2	30	29,5 10	30,5	32,5 10	0 10	0
A_3	50	38,5	35,4	34,5	0 50	0
A_4	40	26,0 40	28,0	30,0	0	-3,5
A_5	40	31,8	28,8	27,8 40	0	-4,7
A_6	50	28,0	26,2 40	30,0 10	0	-2,5
Потенциалы потребителей		29,5	28,7	32,5	0	

По данному распределению рассчитаем стоимости поставок (фиктивные)

$$c_{ij} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} = c_i(0) + t_{ij} + k_i(x_i + x_{ij}) \qquad (6.65)$$

и с этими стоимостями поставок решим задачу на втором этапе.

Результат решения на втором этапе приведен в табл. 6.10.

Получилось распределение отличное от распределения на первом этапе.

Снова рассчитываем фиктивные стоимости поставок по формулам (6.65) при данных $x_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$ и x_{ij} в последней таблице и решаем транспортную задачу. Результат ее решения приведен в табл.6.11.

Табл. 6.10

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{фикт}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	29,0	26,0 40	32,0	0	-2,8
A_2	30	29,5 0	29,0	32,5	0 30	0
A_3	50	33,0	31,0	29,0 20	0 30	0
A_4	40	30,0	28,0	28,0 40	0	-1,0
A_5	40	31,8	28,8 0	32,6	0 40	0
A_6	50	28,0	30,2	30,2	0	-1,5

		50				
Потенциалы потребителей		29,5	28,8	29,0	0	

Табл. 6.11

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{\text{фикт}}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	$\boxed{33,8}$	$\boxed{35,6}$	$\boxed{36,8}$	$\boxed{0}$ 40	0
A_2	30	$\boxed{25,0}$ 10	$\boxed{26,0}$	$\boxed{28,0}$ 20	$\boxed{0}$	-2,0
A_3	50	$\boxed{35,2}$	$\boxed{33,2}$	$\boxed{33,4}$	$\boxed{0}$ 50	0
A_4	40	$\boxed{26,0}$ 40	$\boxed{28,0}$	$\boxed{34,0}$	$\boxed{0}$	-1,0
A_5	40	$\boxed{27,0}$	$\boxed{24,0}$	$\boxed{23,0}$ 40	$\boxed{0}$	-7,0
A_6	50	$\boxed{32,0}$	$\boxed{27,0}$ 40	$\boxed{30,0}$ 0	$\boxed{0}$ 10	0
Потенциалы потребителей		27,0	27,0	30,0	0	

Табл. 6.12

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{\text{фикт}}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	$\boxed{29,0}$	$\boxed{26,0}$ 40	$\boxed{32,0}$	$\boxed{0}$	-2,0
A_2	30	$\boxed{31,0}$	$\boxed{30,5}$	$\boxed{35,5}$	$\boxed{0}$ 30	0
A_3	50	$\boxed{33,0}$	$\boxed{31,0}$	$\boxed{29,0}$ 50	$\boxed{0}$	-1,0
A_4	40	$\boxed{30,0}$ 0	$\boxed{28,0}$ 0	$\boxed{30,0}$ 10	$\boxed{0}$ 30	0
A_5	40	$\boxed{31,8}$	$\boxed{28,8}$	$\boxed{32,6}$	$\boxed{0}$ 40	0
A_6	50	$\boxed{27,2}$ 50	$\boxed{29,4}$	$\boxed{29,2}$	$\boxed{0}$	-2,8

Потенциалы потребителей	30,0	28,0	30,0	0	

Снова получилось отличное от предыдущего распределение. На четвертом этапе производим аналогичный расчет и получаем распределение, приведенное в табл.6.12.

Опять получено распределение отличное от предыдущих. Таким же образом производим пятый этап вычисления, результаты которого приводим в табл.6.13.

Табл. 6.13

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос				Потенциалы поставщиков
		B_1	B_2	B_3	$B_{фикт}$	
		50	40	60	100	
A_1	40	33,8	35,6	36,8	0 / 40	0
A_2	30	25,0 / 10	26,0	28,0 / 20	0	-2,0
A_3	50	38,5	36,5	40,0	0 / 50	0
A_4	40	23,0 / 40	25,0	28,0	0	-4,0
A_5	40	27,0	24,0	23,0 / 40	0	-7,0
A_6	50	32,0	27,0 / 40	30,0 / 0	0 / 10	0
Потенциалы потребителей		27,0	27,0	30,0	0	

Цикл замкнулся, мы получили распределение, которое уже ранее было (см. табл.6.11). Обозначим опорный план, представленный табл.6.11, через X_1, а табл.6.13 – через X_2. Повторение двух опорных планов X_1 и X_2 свидетельствуют о том, что точка X_0 единственного минимума целевой функции (6.63) является внутренней точкой отрезка $X_1 X_2$, т.е. является выпуклой комбинацией точек X_1 и X_2:

$$X_0=(1-\lambda) X_1+\lambda X_2, \quad (0<\lambda<1).$$

Точку X_0 в принципе можно было бы вычислить, используя для этого необходимый и достаточный признак минимума выпуклой функции на границе выпуклого множества, но большой необходимости в этом нет. Если бы точка была вычислена, то она содержала бы, как видно из табл.6.12, 6.13, девять положительных координат, в то время как точка X_1 содержит четыре, а точка X_2 – пять положительных координат.

Таким образом, погоня за точностью приведет к удвоению числа коммуникаций, что будет связано с увеличением транспортных расходов.

Есть еще одна причина, по которой не следует добиваться точного решения, и она, пожалуй главная. При точном решении должны работать предприятия во всех пунктах A_i, притом все не на полную мощность, и, следовательно, задача размещения теряет смысл. Поэтому целесообразно в качестве приближенного решения принять ту точку X_1 или X_2, для которой значение целевой функции меньше. Производя расчет по формуле (6.63), имеем: $f(X_1)$=4627, $f(X_2)$=4145. Значение целевой функции в точке X_2, соответствующей табл.6.13, намного меньше, чем в точке X_2, соответствующей табл.6.12.

Итак, мы получили оптимальный (приближенный) опорный план x_{21}=10, x_{23}=20, x_{41}=40, x_{53}=40, x_{62}=40, остальные x_{ij}=0.

Строить предприятия в пунктах A_1 и A_3 нецелесообразно. Предприятия в пунктах A_2, A_4, A_5 должны работать на полную мощность, а в пункте A_6 – на 80% полной мощности.

Глава 7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА И УПРАВЛЕНИИ ИМ

Для решения некоторых типов задач нелинейного программирования может быть применено динамическое программирование.

Динамическое программирование является сравнительно новым разделом той отрасли математики, которая занимается анализом и разработкой числовых методов решения экстремальных задач.

Динамическое программирование возникло в 50-х годах двадцатого столетия в результате изучения задач, в которых были существенны изменения во времени. Точнее, возникновение его связано с исследованием некоторых типов многошаговых процессов управления, особенно многошаговых и стохастических процессов, возникающих в теории создания запасов.

В дальнейшем аппарат динамического программирования был значительно усовершенствован и развит для решения задач, не связанных с временными изменениями.

Термин «динамическое программирование» относится скорее к вычислительному методу, чем к особому типу задач нелинейного программирования.

Таким образом, под динамическим программированием следует понимать вычислительный метод, опирающийся на аппарат рекуррентных соотношений, разработанный в значительной степени американским ученым Р.Беллманом.

В этой главе рассмотрена сущность вычислительного метода динамического программирования и типы задач, которые могут решаться с его помощью.

7.1.Сущность и основные свойства динамического программирования

Идея метода динамического программирования состоит в том, что отыскание максимума (или минимума) функции многих переменных заменяется многократным отысканием максимума (минимума) функции одного или небольшого числа переменных.

Сущность метода динамического программирования сводится к составлению функциональных уравнений, управляющих процессом, и дальнейшему решению этих уравнений посредством нестандартных вычислительных процедур.

Функциональным называется такое уравнение, которое выражает функциональную связь между множеством функций.

Составление функциональных уравнений проводится на основе *принципа оптимальности Р.Беллмана*, сущность которого заключается в следующем.

Оптимальная стратегия[1] *имеет то свойство, что каково бы ни было начальное состояние и принятое начальное решение, все остальные решения на последующих шагах должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, возникшего в результате первого решения.*

Итак, динамическое программирование есть поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг.

Задачи, которые могут быть отнесены к задачам динамического программирования, должны обладать тремя основными свойствами.

Первое свойство задач динамического программирования заключается в том, что задача (сформулированная в гл.1) может рассматриваться как N-шаговый процесс принятия решения, в котором на каждом шаге принимается решение о количестве

[1]Под стратегией или поведением понимается определенная последовательность выборов.

ресурсов, направленных на переработку по j-му способу, т.е. выбирается x_j. Природа задачи не меняется с изменением числа шагов.

Иными словами, форма задачи инварианта относительно N (числа шагов). Использование этого факта и лежит в основе метода динамического программирования. Это дает возможность решать последовательность задач так, что сначала решается одношаговая, затем двухшаговая и т.д., пока в конце не будут включены все N шагов. Таким образом, сущность подхода динамического программирования состоит в возможности замены решения данной N-шаговой задачи решением целой последовательности задач. Поэтому задачи динамического программирования часто называют *многошаговыми* или *многоэтапными*.

Второе свойство, которому должны удовлетворять задачи, относимые к динамическому программированию, заключается в том, что оптимальный план зависит не от предыстории, не от того, как процесс достиг исходного состояния, а только от состояния процесса в исходный момент времени. Это свойство *независимости* оптимального плана от предыстории как раз указывает на то, что данную задачу можно рассматривать с точки зрения динамического программирования, и именно на его основе строится большинство численных методов решения подобных задач.

Третье свойство заключается в *аддитивности* оптимального плана. Аддитивным считается план, полученный путем сложения результатов по этапам (шагам) решения.

Наконец, можно указать еще на одну особенность, которой характеризуются задачи, связанные со временем, решаемые методами динамического программирования. Это свойство можно назвать *регрессивностью* решения задач. Сущность этого свойства сводится к тому, что процесс решения таких задач динамического программирования разворачивается в обратном по времени направлении, т.е. от конца к началу.

7.2. Задача по оптимизации распределения ресурсов

В гл.1 была рассмотрена постановка задачи распределения денежных ресурсов (или других: сырья, материалов и т.п.), которую можно рассматривать как частный случай общей задачи распределения ресурсов. Эта задача имеет целью найти рациональное распределение ресурсов по различным категориям мероприятий. К таким типам задач относятся, например, задача о распределении средств на оборудование, закупку сырья и наем рабочей силы при организации работы промышленного предприятия, задача о распределении товаров по торговым и складским помещениям, задача о распределении средств между различными отраслями промышленности и т.п.

Рассмотрим одну из самых простых задач распределения ресурсов. Пусть имеется заданное исходное количеств средств Z_0, которое мы должны распределить между двумя промышленными предприятиями $П_1$ и $П_2$ в течение m лет.

Средства, вложенные в предприятие в начале какого-либо года, приносят за этот год определенный доход, зависящий от количества средств. Но эти средства, принося в течение года доход, частично тратятся, т.е. уменьшаются, и к концу года от них остается остаток, так же зависящий от количества средств, вложенных в предприятие в начале года.

В табл.7.1 в общем виде представлена форма исходных данных, приведены количества средств, вложенных в предприятие в начале i-го года и соответствующие им значения функций дохода и функций остатков. Предполагается, что новых средств не поступает и по истечении каждого года оставшиеся средства заново распределяются между предприятиями. При таком предположении между величинами, приведенными в табл.7.1, существуют следующие соотношения.

Табл. 7.1

Предприятие	Количество выделяемых средств	Значения функций дохода	Значения функций остатков
$П_1$	x_i	$f(x_i)$	$\varphi(x_i)$
$П_2$	y_i	$g(y_i)$	$\psi(y_i)$

Суммарный доход за i-й год – W_i равен

$$W_i=f(x_i)+g(y_i) \qquad (7.1)$$

Общее количество средств, вкладываемое в предприятие в начале i-го года (обозначим Z_{i-1}), будет

$$Z_{i-1}=x_i+y_i=\varphi(x_{i-1})+\psi(y_{i-1}), \qquad (7.2)$$
$$(i=1,2,\ldots,m).$$

При указанных условиях требуется так распределить средства между предприятиями по годам в течение m лет, чтобы суммарный доход за весь период (m лет) был наибольшим.

Рассмотрим, как может быть решена такая задача методом динамического программирования.

Процесс решения этой задачи будем развертывать в обратном во времени направлении. Сначала условно оптимально спланируем распределение средств в последний m-й год, затем оптимально спланируем распределение средств в m – 1-й год и т.д., пока не дойдем до 1-го года. Каждый год планирования будем называть этапом операции.

Первый этап. Функция суммарного дохода за m-й год будет

$$W_m=f(x_m)+g(y_m) \qquad (7.3)$$

Максимальный суммарный доход за m-й год найдется в результате решения задачи максимизации *сепарабельной функции* двух переменных x_m, y_m (7.3) при линейном ограничении $x_m+ y_m= Z_{m-1}$ и неотрицательности переменных x_m и y_m. Этот максимум будет являться функцией от Z_{m-1}:

$$\max W_m=W_m^*(Z_{m-1}). \qquad (7.4)$$

Задаваясь различными значениями Z_{m-1}, мы можем каждый раз найти оптимальное решение (x_m^*, y_m^*) задачи максимизации функции (7.3), при этом Z_{m-1}. Таким образом, мы получим либо аналитическое выражение функции (7.4), либо таблицу ее значений, либо график этой функции. Каждому значению Z_{m-1} будет соответствовать условная оптимальная стратегия (x_m^*, y_m^*). На этом заканчивается первый этап решения задачи.

Второй этап. На втором этапе требуется найти условную оптимальную стратегию (x_{m-1}^*, y_{m-1}^*). Согласно принципу оптимальности Р.Беллмана функция суммарного дохода за m-1-й и m-й годы должна слагаться из функций суммарного дохода за m – 1-й год и максимального дохода за m-й годт.е.

$$W_{m-1,m}= W_{m-1}+ \max W_m =f(x_{m-1})+g(y_{m-1})+ W_m^*(Z_{m-1}). \quad (7.5)$$

Согласно соотношению (7.2)

$$Z_{m-1}=\varphi(x_{m-1})+ \psi(y_{m-1}),$$

поэтому

$$W_{m-1,m}= W_{m-1,m}(x_{m-1}, y_{m-1}), \qquad (7.6)$$

т.е. является функцией двух неотрицательных аргументов x_{m-1}, y_{m-1} которые должны удовлетворять линейному ограничению

$$Z_{m-2}=x_{m-1}+y_{m-1}. \qquad (7.7)$$

Таким образом, на втором этапе требуется максимизировать функцию (7.6) при линейном ограничении (7.7) и неотрицательности переменных x_{m-1}, y_{m-1}. Но это точно такая же задача, которая возникла на первом этапе. Для каждого Z_{m-2} может быть найдена условная оптимальная стратегия (x^*_{m-1}, y^*_{m-1}) и соответствующий ей условный максимальный доход

$$\max W_{m-1,m}= W^*_{m-1,m}(Z_{m-2}). \qquad (7.8)$$

Третий этап. На третьем этапе аналогичным образом находится условная оптимальная стратегия (x^*_{m-2}, y^*_{m-2}) для предпредпоследнего года в результате максимизации суммарного дохода за последние 3 года.

$$W_{m-2,\ldots,m}= W_{m-2}+ \max W_{m-1,\,m} =f(x_{m-2})+g(y_{m-2})+ W^*_{m-1,m}\left[\varphi(x_{m-2})+\psi(y_{m-2})\right]. \qquad (7.9)$$

При условии

$$Z_{m-3}=x_{m-2}+y_{m-2}; \quad x_{m-2}\geq 0; \quad y_{m-2}\geq 0. \qquad (7.10)$$

Продолжая процесс условной оптимизации точно так же, получим для любого $(m-i)$-го года условную оптимальную стратегию (x^*_{m-i}, y^*_{m-i}) и соответствующий ей условный максимальный доход за все годы, начиная с данного:

$$W^*_{m-i,\ldots,m}(Z_{m-i-1}) = \max W_{m-i,m}(x_{m-i,}\, y_{m-i}), \qquad (7.11)$$

где

$$W_{m-i,\ldots,m}= f(x_{m-i})+g(y_{m-i})+ W^*_{m-i+1,m}\left[\varphi(x_{m-i})+\psi(y_{m-i})\right]. \qquad (7.12)$$

Когда таким образом мы произведем условную оптимизацию всех годов, кроме первого, нам останется найти оптимальную стратегию, т.е. оптимальное распределение средств на первый год и найти максимальный полный суммарный доход за все m лет. Планирование на первый год качественно отлично от остальных, так как здесь мы будем исходить из известного начального запаса средств Z_0, в то время как при планировании последующих лет средства Z_{i-1} варьировались.

Для получения функций дохода за весь период надо в общей формуле (7.12) положить i=m-*1, тогда*

$$W_{1,m}= f(x_1)+g(y_1)+ W^*_{2,m}\left[\varphi(x_1)+\psi(y_1)\right]. \qquad (7.13)$$

Для получения оптимальной стратегии для первого года следует максимизировать функцию (7.13) двух аргументов x_1, y_1 при условии

$$Z_0=x_1+y_1; \quad x_1\geq 0; \quad y_1\geq 0. \qquad (7.14)$$

Оптимальное решение (x^*_1, y^*_1) этой задачи не будет условно оптимальным, а будет просто оптимальной стратегией, т.е. оптимальным распределением средств в начале первого года между предприятиями $П_1$ и $П_2$ и $W=\max W_{1,m}$ будет максимальным доходом за весь период (m лет).

Зная оптимальное распределение средств в начале первого года, мы можем найти оптимальное распределение средств между предприятиями во все последующие годы. Для этого надо снова пройти все годы, но уже в обратном направлении – от начала к концу. Найдя x_1, y_1, мы можем вычислить

$$Z_1=\varphi(x_1)+\psi(y_1). \qquad (7.15)$$

По ранее полученной зависимости оптимальной стратегии (x^*_2, y^*_2) от значений Z_1 находим оптимальное распределение средств (x_2, y_2) в начале второго года, по которому мы можем найти средства

$$Z_2=\varphi(x_2)+\psi(y_2), \qquad (7.16)$$

по которым найдем оптимальное распределение средств (x_3,y_3) в начале третьего года и т.д. вплоть до последнего года. Таким образом будет найдено окончательное решение задачи.

Мы рассмотрели общее решение задачи о распределении ресурсов между двумя объектами. Все проведенные рассуждения не изменяются, если мы в соотношениях (7.1), (7.2) будем брать не два, а n слагаемых, соответствующих n предприятиям:

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} f_i(x_{ij}), \qquad (7.17)$$

$$Z_{i-1} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_{i-1,j}), \qquad (7.18)$$

где $f_j(x)$ – функция дохода, а $\varphi_j(x)$ – функция остатка для j-го предприятия, x_{ij} – количество средств, выделяемых j-му предприятию в начале i-го года.

Для усвоения теории решения задачи о распределении ресурсов полезно применить ее на конкретном примере.

Рассмотрим некоторый пример на условных данных.

Положим, планируется работа двух промышленных предприятий $П_1$ и $П_2$ на период, состоящий из 4 лет. Функции дохода и функции остатков в начале i-го года представлены в табл.7.2.

Табл. 7.2

Промышленные предприятия	Количество выделяемых средств на i-й год	Функция дохода	Функции остатков
$П_1$	x_i	$(3\text{-}0{,}002x_i)x_i$	$0{,}6x_i$
$П_2$	y_i	$(2\text{-}0{,}001y_i)y_i$	$0{,}8y_i$

Требуется произвести распределение ресурсов, исходная величина которых равна Z_0=1000 (с точностью до 0,1), между предприятиями $П_1$ и $П_2$ на каждый год планируемого периода, так чтобы получить максимальный суммарный доход за весь период.

Первый этап решения. Условная оптимальная стратегия (x_4^*, y_4^*) на последнем, четвертом году (количества средств, выделяемых промышленным предприятием) находится как оптимальное решение задачи максимизации нелинейной функции дохода на четвертом году:

$$W_4(x_4,y_4)=(3\text{-}0{,}002x_4)x_4+(2\text{-}0{,}001y_4)y_4 \qquad (7.19)$$

при линейных ограничениях

$$x_4+y_4=Z_3;\ \ x_4\geq 0;\ \ y_4\geq 0, \qquad (7.20)$$

где Z_3 суммарный остаток средств по прошествии 3 лет, считающийся в этой задаче *постоянным фиксированным числом.*

Функция $W_4(x_4,y_4)$ строго вогнутая, поэтому существует единственная точка (x_4,y_4), в которой эта функция достигает своего максимума. Если не учитывать условия неотрицательности переменных x_4 и y_4, то точка максимума функции (7.19) легко может быть найдена по методу Лагранжа. Для этого надо составить функцию Лагранжа и приравнять все ее частные производные нулю. В результате должна получиться система уравнений, из которой определяется точка максимума. Проделаем эту операцию. Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x_4,y_4,\lambda)=(3\text{-}0{,}002\ x_4)\ x_4+(2\text{-}0{,}001y_4)\ y_4+\lambda(\ x_4+\ y_4\text{-}Z_3). \qquad (7.21)$$

Вычисляем частные производные этой функции и приравниваем их нулю:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_4} &= 3 - 0{,}004x_4 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_4} &= 2 - 0{,}002y_4 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x_4 + y_4 - Z_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.22)$$

Получилась система (7.22) трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_4,y_4 иλ. Поскольку значение множителя Лагранжа λ нас не интересует, то мы можем его исключить почленным вычитанием второго уравнения из первого. В результате получаем систему (7.23) двух линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_4 - y_4 &= 500, \\ x_4 + y_4 &= Z_3. \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

Единственное решение этой системы:

$$x_4 = \frac{1}{3}(Z_3 + 500); \; y_4 = \frac{1}{3}(2Z_3 - 500). \qquad (7.24)$$

Это решение будет удовлетворять условию неотрицательности, если $Z_3 \geq 250$. Следовательно, (7.24) будет представлять условную оптимальную стратегию на четвертый год планирования при любом $Z_3 \geq 250$.

Подставляя выражения (7.24) в формулу (7.19) и приводя подобные члены с Z_3 и Z_3^2, получаем условный максимальный доход за четвертый год

$$\max W_4(Z_3) = \frac{1}{3}(250 + 7Z_3 - 0{,}002Z_3^2). \qquad (7.25)$$

Второй этап решения. Перейдем к распределению средств на третий год. Пусть мы подошли к нему с запасом средств Z_2. Найдем условную оптимальную стратегию (x_3^*, y_3^*) на третий год и условный максимальный доход за 2 последних года.

По принципу оптимальности Р.Беллмана, функция дохода за последние 2 года должна слагаться из функции дохода за третий год и максимальной функции дохода (7.25) за четвертый год:

$$W_{3,4} = W_3(x_3, y_3) + \max W_4(Z_3) = (3 - 0{,}002x_3)x_3 + (2 - 0{,}001y_3)y_3 + \\ + \frac{1}{3}(250 + 7Z_3 - 0{,}002Z_3^2).$$

Но

$$Z_3 = 0{,}6x_3 + 0{,}8y_3 \qquad (7.26)$$

и следовательно,

$$W_{3,4} = (3 - 0{,}002x_3)x_3 + (2 - 0{,}001y_3)y_3 + \\ + \frac{1}{3}[250 + 7(0{,}6x_3 + 0{,}8y_3) - 0{,}002(0{,}6x_3 + 0{,}8y_3)^2]. \qquad (7.27)$$

Условная оптимальная стратегия (x_3^*, y_3^*) найдется в результате максимизации функции (7.27) при ограничениях

$$x_3 + y_3 = Z_2; \; x_3 \geq 0; \; y_3 \geq 0. \qquad (7.28)$$

Отвлекаясь от условия неотрицательности переменных и применяя метод Лагранжа, получаем следующую систему линейных уравнений, которой должна удовлетворять условная оптимальная стратегия (x_3,y_3) на третий год:

$$\left.\begin{aligned} -144x_3 + 83y_3 &= 15000, \\ x_3 + \quad y_3 &= Z_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

Решение этой системы

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 0{,}366Z_2 - 66{,}1, \\ y_3 &= 0{,}634Z_2 + 66{,}1 \end{aligned}\right\} \qquad (7.30)$$

представляет собой условную оптимальную стратегию на третий год при любом $Z_2 \geq 181$.

Подставляя выражение (7.30) в формулах (7.27) и приводя подобные члены с Z_2 и Z_2^2, получаем условный максимальный доход за 2 последних года (третий и четвертый).

$$\max W_{3,4}(Z_2) = 34{,}8 + 4{,}062Z_2 - 0{,}001022Z_2^2. \qquad (7.31)$$

Третий этап решения. Найдем распределение средств на второй год. Пусть мы подошли к нему с запасом средств Z_1. Задача отыскания условной оптимальной стратегии (x_2^*, y_2^*) на 2-й год по своему решению ничем не отличается от решения аналогичной задачи на втором этапе. Оптимальная стратегия на второй год найдется как оптимальное решение задачи максимизации дохода за последние 3 года (2,3,4-й годы):

$$\begin{aligned} W_{2,3,4}(x_2, y_2) &= W_2(x_2, y_2) + \max W_{3,4}(Z_2) = (3 - 0{,}002x_2)x_2 + \\ &+ (2 - 0{,}001y_2)y_2 + 34{,}8 + 4{,}062Z_2 - 0{,}001022Z_2^2, \end{aligned} \qquad (7.32)$$

где

$$Z_2 = 0{,}6x_2 + 0{,}8y_2 \qquad (7.33)$$

При ограничениях:

$$x_2 + y_2 = Z_1;\ x_2 \geq 0;\ y_2 \geq 0. \qquad (7.34)$$

Применение метода Лагранжа для решения этой задачи приводит к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 37x_2 - 23y_2 &= 1876, \\ x_2 + \quad y_2 &= Z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.35)$$

Условная оптимальная стратегия на второй год является решением этой системы

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0{,}383Z_1 + 31{,}3, \\ y_2 &= 0{,}617Z_1 - 31{,}3 \end{aligned}\right\} \qquad (7.36)$$

при любом $Z_1 \geq 51$.

Для отыскания условного максимального дохода за последние 3 года надо выражение (7.36) подставить в формулу (7.32) и привести подобные члены с Z_1 и Z_1^2, в результате чего имеем:

$$\max W_{2,3,4}(Z_1) = 37{,}7 + 5{,}321Z_1 - 0{,}001209Z_1^2. \qquad (7.37)$$

Четвертый этап решения. На этом последнем этапе мы найдем не условную, а действительно оптимальную стратегию (x_1^*, y_1^*) планирования на первый год, так как мы будем теперь исходить не из предполагаемого, а из определенного наличия начальных средств $Z_0=1000$. Функция дохода за весь период по принципу оптимальности имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned} W(x_1, y_1) &= W_1(x_1, y_1) + \max W_{2,3,4}(Z_1) = (3 - 0{,}002x_1)x_1 + \\ &+ (2 - 0{,}001y_1)y_1 + 37{,}7 + 5{,}321Z_1 - 0{,}001209Z_1^2, \end{aligned} \qquad (7.38)$$

где

$$Z_1 = 0{,}6x_1 + 0{,}8y_1. \qquad (7.39)$$

Чтобы определить оптимальное распределение начальных средств Z_0=1000, надо максимизировать функцию полного дохода (7.38) при ограничениях:

$$x_1+y_1=1000;\ x_1\geq 0;\ y_1\geq 0. \qquad (7.40)$$

Применяя метод Лагранжа, получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -19x_1+12y_1 &= 321, \\ x_1+\quad y_1 &= 1000. \end{aligned}\right\} \qquad (7.41)$$

Эта система имеет единственное решение (с точностью до 0,1)

$$x_1=376{,}7;\ y_1=623{,}3, \qquad (7.42)$$

которое и представляет собою начальную оптимальную стратегию.

Подставляя значения (7.42) в формулу (7.38), получаем максимальный суммарный доход за весь четырехлетний период:

$$\max W(x_1,y_1)=4963{,}1 \qquad (7.43)$$

Таким образом, в начале четырехлетнего периода предприятию $П_1$ должно быть выделено средств x_1=376,7, а предприятию $П_2$ – остальные начальные средства y_1=623,3.

Для определения оптимальных стратегий в последующие годы надо пройти все этапы в обратном направлении.

Вычисляем по формуле (7.39) значение

$$Z_1=0{,}6\cdot 376{,}7+0{,}8\cdot 623{,}3=724{,}7.$$

Но тогда мы можем вычислить по формуле (7.36) значения x_2 и y_2:

$$x_2=0{,}383\cdot 724{,}7+31{,}3=308{,}9$$

$$y_2=0{,}617\cdot 724{,}7-31{,}3=415{,}8.$$

Значит, в начале второго года предприятию $П_1$ выделяется средств 308,9, а предприятию $П_2$ – 415,8.

Зная значения x_2 и y_2, мы можем вычислить величину Z_2 по формуле (7.33):

$$Z_2=0{,}6\cdot 308{,}9+0{,}8\cdot 415{,}8=518{,}0>181,$$

затем по формулам (7.30) вычисляем значения x_3 и y_3

$$x_3=0{,}366\cdot 518{,}0-66{,}1=123{,}5$$

$$y_3=0{,}634\cdot 518{,}0+66{,}1=394{,}5.$$

В начале третьего года предприятию $П_1$ выделяется средств 123,5, а предприятию $П_2$ – 394,5.

Вычисляем по формуле (7.26) остаток средств после третьего года:

$$Z_3=0{,}6\cdot 123{,}5+0{,}8\cdot 394{,}5=389{,}7>250$$

и по формулам (7.24) определяем значения x_4 и y_4.

$$x_4=\frac{1}{3}(389{,}7+500)=296{,}6;$$

$$y_4=\frac{1}{3}(2\cdot 389{,}7-500)=93{,}3.$$

Итак, в последний год предприятию $П_1$ должно быть выделено средств 296,6, а предприятию $П_2$ – 93,3.

Полный результат решения этой задачи представим в виде табл.7.3.

Табл. 7.3

Год	Оптимальный план распределения ресурсов		Доход
	$П_1$	$П_2$	
1	376,7	623,3	1704,4
2	308,9	415,8	1394,6
3	123,5	394,5	973,4
4	296,6	93,3	891,8

Суммарный доход	4964,2

При таком распределении суммарный доход получился на 1,1 больше ранее рассчитанного (7.43). Это объясняется ошибками округлений при вычислениях.

Из табл. 7.3 видно, что относительная доля средств, выделяемых первому предприятию, меньше в течение первых 3 лет, в последний же год первому предприятию выделяется средств относительно больше, чем второму, в 3 с лишнем раза.

Теперь задачу, поставленную в начале этого параграфа, усложним тем, что доход (полностью или частично) вкладывается в производство вместе с основными средствами. Для этого доход и основные средства должны быть приведены к одному эквиваленту (например, к деньгам).

Обозначим через $u(x_i)$ и $v(y_i)$ количества средств от дохода, получаемого соответственно предприятиями Π_1 и Π_2 вкладываемых в производство в начале i+1-го года.

Очевидно, $u(x_i)\leq f(x_i)$; $v(y_i)\leq g(y_i)$.

В зависимости от обстановки эта задача может ставиться различным образом. Можно искать такое распределение средств, которое обеспечивает максимальный суммарный чистый доход за весь период (m лет). Можно искать и такое распределение средств, которое обращает в максимум общую сумму средств (включая доход и сохранившиеся основные средства) в конце периода. Возможны и другие постановки задачи. Здесь мы покажем схему решения методом динамического программирования задачи в первой ее постановке, т.е. задачи распределения средств между предприятиями по годам в течение m лет так, чтобы получить максимальный суммарный чистый доход за весь период. По-прежнему процесс решения этой задачи будем развертывать в обратном по времени направлении.

Первый этап. Функция суммарного дохода за последний m-й год будет

$$W_m = f(x_m) + g(y_m). \tag{7.1'}$$

Условный максимальный доход за этот год найдется в результате решения задачи максимизации функции (7.1') при линейных ограничениях:

$$x_m + y_m = Z_{m-1};\ x_m \geq 0;\ \ y_m \geq 0. \tag{7.2'}$$

Этот максимум будет являться функцией от Z_{m-1}.

$$\max W_m = W_m^*(Z_{m-1}), \tag{7.3'}$$

где

$$Z_{m-1} = \varphi(x_{m-1}) + u(x_{m-1}) + \psi(y_{m-1}) + v(y_{m-1}) \tag{7.4'}$$

средства, вкладываемые в производство в начале m-го года, которые слагаются из остатка после m-1-го года основных средств и отчислений от дохода за m-1-й год. На первом этапе мы найдем условную оптимальную стратегию

$$x_m = x_m^*(Z_{m-1});\ \ y_m = y_m^*(Z_{m-1}). \tag{7.5'}$$

Второй этап. На этом этапе надо максимизировать чистый доход (полный доход минус вложения в производство) за последние 2 года, т.е. за m-1-й и m-й годы. Чистый доход за m-1-й год будет

$$f(x_{m-1}) - u(x_{m-1}) + g(y_{m-1}) - v(y_{m-1}), \tag{7.6'}$$

а чистый доход за m-й год совпадает с полным доходом, так как отчисления от дохода в конце периода не производятся.

Согласно принципу оптимальности Р.Беллмана функция чистого суммарного дохода за последние 2 года должна слагаться из чистого дохода (7.6') и максимального условного дохода (7.3') за m-й год, т.е.

$$W_{m-1,m}(x_{m-1}, y_{m-1}) = f(x_{m-1}) - u(x_{m-1}) + g(y_{m-1}) - v(y_{m-1}) + \max W_m(Z_{m-1}), \tag{7.7'}$$

где Z_{m-1} имеет выражение (7.4'). Мы видим, что функция (7.7') является функцией двух переменных x_{m-1}, y_{m-1}, которые должны удовлетворять системе линейных ограничений:

$$x_{m-1}+y_{m-1}=Z_{m-2};\; x_{m-1}\geq 0;\;\; y_{m-1}\geq 0. \qquad (7.8')$$

где

$$Z_{m-2}=\varphi(x_{m-2})+u(x_{m-2})+\psi(y_{m-2})+v(y_{m-2}). \qquad (7.9')$$

Условный максимальный чистый доход за последние 2 года находится в результате решения задачи максимизации функции (7.7') при линейных ограничениях (7.8'). Причем при решении этой задачи Z_{m-2} считается фиксированным постоянным параметром. В результате решения этой задачи мы получим условный максимум

$$\max W_{m-1,m}=W^{*}_{m-1,m}(Z_{m-2})$$

и соответствующую ему условную оптимальную стратегию на (m-1)-й год

$$x_{m-1}=x^{*}_{m-1}(Z_{m-2});\;\; y_{m-1}=y^{*}_{m-1}(Z_{m-2}).$$

Третий этап. Вычисления на третьем этапе аналогичны вычислениям на втором этапе. Здесь надо максимизировать чистый доход за последние 3 года (m-2-й, m-1-й и m-й годы). Эта задача сводится к максимизации целевой функции

$$\begin{aligned}W_{m-2,m}(x_{m-2},y_{m-2})&=f(x_{m-2})-u(x_{m-2})+\\&+g(y_{m-2})-v(y_{m-2})+\max W_{m-1,m}(Z_{m-2}),\end{aligned} \qquad (7.10')$$

где Z_{m-2} имеет выражение (7.9') при линейных ограничениях:

$$x_{m-2}+y_{m-2}=Z_{m-3};\;\; x_{m-2}\geq 0;\;\; y_{m-2}\geq 0. \qquad (7.11')$$

Оптимальное решение этой задачи определит условную оптимальную стратегию на m-2-й год

$$x_{m-2}=x^{*}_{m-2}(Z_{m-3});\;\; y_{m-2}=y^{*}_{m-2}(Z_{m-3})$$

и соответствующий ей условный максимальный чистый доход за последние три года

$$\max W_{m-2,m}=W^{*}_{m-2,m}(Z_{m-3}).$$

На следующем, четвертом этапе надо полагать:

$$Z_{m-3}=\varphi(x_{m-3})+u(x_{m-3})+\psi(y_{m-3})+v(y_{m-3}). \qquad (7.12')$$

Аналогичные вычисления производятся на четвертом, пятом и т.д. этапах, но последний этап, т.е. этап определения оптимальной стратегии в первый год, отличается от предшествующих. Здесь определится не условная, а действительная оптимальная стратегия на первый год и соответствующий ей не условный, а действительный максимальный чистый доход за весь период в результате решения задачи максимизации целевой функции

$$W(x_1,y_1)=f(x_1)-u(x_1)+g(y_1)-v(y_1)+\max W_{2,m}(Z_1), \qquad (7.13')$$

где

$$Z_1=\varphi(x_1)+u(x_1)+\psi(y_1)+v(y_1) \qquad (7.14')$$

при линейных ограничениях:

$$x_1+y_1=Z_0;\; x_1\geq 0;\; y_1\geq 0. \qquad (7.15')$$

Получив оптимальную стратегию

$$x_1=x_1^{*},\;\; y_1=y_1^{*}, \qquad (7.16')$$

т.е. распределение основных средств между предприятиями $П_1$ и $П_2$ в начале периода, мы можем найти оптимальные стратегии во все последующие годы. Для этого надо снова пройти весь период, но уже в прямом направлении – от начала к концу. Зная оптимальную стратегию (7.16'), мы можем вычислить по формуле (7.14') величину Z_1, по которой можно вычислить оптимальную стратегию на второй год:

$$x_2=x_2^{*}(Z_1);\;\; y_2=y_2^{*}(Z_1). \qquad (7.17')$$

По оптимальной стратегии (7.17') можно вычислить величину Z_2, а по ней оптимальную стратегию на третий год

$$x_3 = x_3^*(Z_2);\ y_3 = y_3^*(Z_2).$$

и т.д. вплоть до последнего года.

Схема решения такой задачи методом динамического программирования не изменится, если функция $u(x_i)$ и $v(y_i)$ (отчисления от дохода, вкладываемые в производство) будут не одинаковыми, а изменяющимися от года к году.

Пример. Положим, планируется работа двух промышленных предприятий $П_1$ и $П_2$ на период, состоящий из 4 лет. Функция дохода и функция остатков в начале i-го года имеют те же выражения, что и в предыдущем примере, представленные в табл.7.2. Функция отчислений от дохода в конце i-го года в производство имеют соответственно для предприятий $П_1$ и $П_2$ следующие выражения:

$$u(x_i)=0{,}3x_i;\quad v(y_i)=0{,}2\,y_i\quad (i=1,2,3). \tag{7.18'}$$

Первый этап решения. Вычисления на этом этапе ничем не отличаются от вычислений на первом этапе предыдущего примера, с теми же исходными данными. Поэтому на этом этапе имеем условную оптимальную стратегию (7.24) на четвертый год.

$$x_4 = \frac{1}{3}(Z_3 + 500);\quad y_4 = \frac{1}{3}(2Z_3 - 500)$$

при любом $Z_3 \geq 250$. Соответствующий этой стратегии условный максимальный доход на четвертый год имеет выражение (7.25), т.е.

$$\max W_4(Z_3) = \frac{1}{3}\left(250 + 7Z_3 - 0{,}002Z_3^2\right).$$

Будем продолжать решение этой задачи без подробных словесных объяснений, так как существо метода достаточно ясно показано в предыдущем примере. Разница будет состоять только в том, что функции Z_i от x_i и y_i будут иметь несколько иное выражение.

Второй этап решения. На этом этапе надо условно максимизировать чистый доход на 3 и 4-й годы, имеющий общее выражение (7.7') при m=4, которое в приложении к нашему примеру (после приведения подобных членов) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{3,4}(x_3, y_3) = (2{,}7 - 0{,}002x_3)x_3 + (1{,}8 - 0{,}001y_3)y_3 +\\ + \frac{1}{3}(250 + 7Z_3 - 0{,}002Z_3^2). \end{aligned} \tag{7.19'}$$

где

$$Z_3=0{,}9x_3+y_3 \tag{7.20'}$$

согласно вычислениям по общей формуле (7.4').

Ограничения этой задачи следующие:

$$x_3 + y_3 = Z_2;\ x_3 \geq 0;\ y_3 \geq 0. \tag{7.21'}$$

Решение задачи максимизации функции (7.19') при линейных ограничениях (7.21') методом Лагранжа приводит к системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 291x_3 - 160y_3 &= 50000;\\ x_3 + y_3 &= Z_2. \end{aligned}\right\}$$

Оптимальная условная стратегия на третий год является решением этой системы

$$x_3=0{,}355Z_2+110{,}9;\quad y_3=0{,}645Z_2-110{,}9 \tag{7.22'}$$

При любом $Z_2 \geq 172$.

Подставляя выражения (7.22') для x_3 и y_3 в формулу (7.19'), получаем выражение для условного максимального дохода за 3 и 4-й годы.

$$\max W_{3,4}(Z_2) = 120{,}3 + 4{,}370Z_2 - 0{,}001288Z_2^2, \tag{7.23'}$$

Третий этап решения. На этом этапе надо условно максимизировать чистый доход на 2,3 и 4-й годы, имеющий общее выражение (7.10') при m=4, которое в нашем примере имеет следующий вид:

$$W_{2,3,4}(x_2, y_2) = (2{,}7 - 0{,}002x_2)x_2 + (1{,}8 - 0{,}001y_2)y_2 + \\ + 120{,}3 + 4{,}370Z_2 - 0{,}001288Z_2^2, \qquad (7.24')$$

где

$$Z_2 = 0{,}9x_2 + y_2. \qquad (7.25')$$

Максимум этой функции надо найти при линейных ограничениях:

$$x_2 + y_2 = Z_1;\ x_2 \geq 0;\ y_2 \geq 0. \qquad (7.26')$$

Решение этой задачи методом Лагранжа приводит к системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 18841x_2 - 11288y_2 &= 2315000; \\ x_2 + y_2 &= Z_1. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы

$$x_2 = 0{,}375Z_1 + 76{,}8; \quad y_2 = 0{,}625Z_1 - 76{,}8 \qquad (7.27')$$

Является условной оптимальной стратегией на 2-й год при любом $Z_1 \geq 123$.

Подставляя выражения (7.27') для x_2, y_2 в формулу (7.24'), получим:

$$\max W_{2,3,4}(Z_1) = 138{,}1 + 6{,}343Z_1 - 0{,}001865Z_1^2. \qquad (7.28')$$

Четвертый этап решения. На этом последнем этапе не условно, а действительно максимизируется чистый доход за весь четырехлетний период. Согласно общей формуле (7.13') надо при условиях нашей задачи максимизировать функцию

$$W(x_1, y_1) = (2{,}7 - 0{,}002x_1)x_1 + (1{,}8 - 0{,}001y_1)y_1 + \\ + 138{,}1 + 6{,}343Z_1 - 0{,}001865Z_1^2, \qquad (7.29')$$

где

$$Z_1 = 0{,}9x_1 + y_1. \qquad (7.30')$$

при линейных ограничениях

$$x_1 + y_1 = Z_0 = 1000;\ x_1 \geq 0;\ y_1 \geq 0. \qquad (7.31')$$

Решение этой задачи по методу Лагранжа приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 36643x_1 - 23730y_1 &= 2657000; \\ x_1 + \qquad y_2 &= 1000. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы – есть оптимальная стратегия планирования на первый год

x_1=437,1 y_1=562,9

Таким образом в начале периода предприятию $П_1$ должно быть выделено средств 437,1, а второму предприятию $П_2$- 562,9. При этом согласно выражению (7.29') максимальный суммарный доход за весь период составит max W=5992,8.

По формуле (7.30') получаем Z_1=956,3 и по формуле (7.27') получаем распределение средств на второй год.

x_2=435,4 y_2=520,9

Далее по формуле (7.29') вычисляем Z_2=912,8 и по формуле (7.22') вычисляем распределение средств на 3-й год

x_3=434,9 y_3=477,9

Наконец, по формуле (7.20') определяем Z_3=869,3 и по формулам (7.24') вычисляем распределение средств на последний четвертый год периода

x_4=412,9; y_4=456,4.

Полный результат решения представлен в табл. 7.3'.

Табл. 7.3'

Год			Доход	Отчисления от дохода	Чистый доход
	$П_1$	$П_2$			
1	437,1	562,9	1738,1	243,7	1494,4
2	435,4	520,9	1697,6	234,8	1462,8
3	434,9	477,9	1653,8	226,1	1427,7
4	412,9	456,4	1602,2	нет	1602,2
Суммарный чистый доход					5987,1

Расхождение в величине чистого дохода с ранее рассчитанным максимальным доходом 5992,8 на 0,1% объясняется накоплением ошибок округлений при расчетах.

7.3. Задача о составлении оптимального маршрута

Эта задача может иметь разное экономическое приложение. Например, при определении кратчайшего пути следования деталей по станкам, нахождения критического пути в сетевом графике, при проектировании лесовозных дорог и т.д.

Однако прежде чем рассматривать числовой пример, сформулируем задачу в общем виде.

Предположим, имеется некоторое множество, состоящее из намеченных пунктов. Эти пункты могут быть занумерованы произвольно числами натурального ряда от 1 до N включительно.

Предполагается, что каждые два пункта, входящие во множество, непосредственно соединены между собой (дорогой и пр.).

Время, необходимое для проезда (или продвижения деталей) из любого пункта i множества N (в дальнейшем принадлежность к множеству будем обозначать через $\in$) в пункт $j\in N$, непропорционально расстоянию между пунктами i и j.

В этой связи задана квадратная несимметричная матрица

$$T=\left\| t_{ij} \right\|,$$

где t_{ij} – время проезда (продвижения) из пункта i в пункт j, взятых из множества N.

В *задаче требуется определить оптимальный маршрут* следования через все пункты множества N, при котором время переезда (продвижения) из начального пункта 1 в конечный пункт N было бы минимальным.

Сформулированная задача может быть отнесена к типу задач динамического программирования, ибо нетрудно убедиться в том, что она удовлетворяет основным свойствам задач динамического программирования.

Весь процесс переезда (продвижения) из пункта 1 в пункт N является многоэтапным. На каждом этапе выбирается пункт с таким расчетом, чтобы время на переезд было минимальным. Отсюда следует, что рассматриваемая задача является *многоэтапной (многошаговой).*

Свойство *аддитивности* для этой задачи вытекает из того, что общее время на переезд (продвижение деталей и т.п.) равно сумме времен переезда на каждом отрезке между двумя пунктами.

И, наконец, нетрудно представить, что наименьшее время на переезд из любого пункта i в пункт N зависит не от того, каким образом мы достигли пункта i, а только от расположения этого пункта в общей схеме (сети) дорог, соединяющих между собой все пункты множества N. Таким образом, для данной задачи выполняется и это основное свойство задач динамического программирования – свойство *независимости оптимальной стратегии от предыстории.*

Если в сформулированной задаче имеется конечное число путей, то задача может быть решена посредством перебора возможных вариантов и выбора из них оптимального. Однако метод перебора чрезвычайно громоздок и поэтому практически неприменим при достаточно большом числе N.

Сравнительно быстро и просто оптимальным результат задачи может быть получен посредством составления и решения *функциональных уравнений*, являющихся основой метода динамического программирования.

Составим функционирование уравнения для сформулированной выше задачи определения маршрута переезда из i-го в N-й пункт, обеспечивающего минимальные затраты времени на переезд (или продвижение, например, деталей).

Для этого примем следующие обозначения. Через f_{iN} – обозначим время, необходимое для переезда из i-го пункта в конечный пункт N при использовании оптимальной стратегии.

$$I=1,2,\ldots,N\text{-}1.$$

Полагаем, что $f_{NN}=0$.

Используя принцип оптимальности Р.Беллмана, можно записать следующие функциональные уравнения (рекуррентные соотношения), полностью описывающие данный процесс (ситуацию):

$$\left.\begin{aligned} & f_{kN} = \min_{j\neq i}\left[t_{ij} + f_{jN}\right],\ \ i = 1,2,\ldots,N-1, \\ & f_{NN} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.44)$$

Решение задачи производится поэтапно, в прямом и обратном по времени направлении перемещения из пункта 1 в конечный пункт N. Это вызвано жестким ограничением задачи, заключающимся в том, что должны быть пройдены все пункты и ни на один из них движение не должно замыкаться.

На первом этапе (в обратном направлении) рассматриваются перемещения из последнего пункта в конечный пункт N. На втором этапе перемещения из предпоследнего через последний пункт в конечный пункт N и т.д. При прямом направлении перемещения на первом этапе рассматривается перемещение из начального пункта в первый пункт, на втором этапе – перемещение из начального во второй пункт через первый и т.д.

Общую схему решения задачи на s-м этапе математически можно изобразить так:

$$\left.\begin{aligned} & f_{jN}^{(0)} = t_{jN},\ j = 2,3,\ldots,N-1, \\ & f_{kN}^{(s)} = \min_{i\neq j}\left[t_{ij} + f_{jN}^{(s-1)}\right],\ j = 2,3,\ldots,N-1 \end{aligned}\right\} \qquad (10.45)$$

при разворачивании процесса в обратном направлении и

$$\left.\begin{aligned} & f_{1i}^{(0)} = t_{1i},\ i = 2,3,\ldots,N-1, \\ & f_{1k}^{(s)} = \min\left[t_{ij} + f_{1i}^{(s-1)}\right],\ j = 2,3,\ldots,N-1 \end{aligned}\right\} \qquad (7.46)$$

при разворачивании процесса в прямом направлении.

Если в (7.45) будет получаться при разных j одинаковое k или в (7.46) одинаковое k при различных i, то в первом случае в качестве $f_{kN}^{(s)}$ следует принимать $\min\left[t_{kj}+f_{jN}^{(s-1)}\right]$, а во втором случае за значение $f_{1k}^{(s)}$ следует принять $\min\left[t_{ik}+f_{1i}^{(s-1)}\right]$.

Будем в дальнейшем называть величины $f_{kN}^{(s)}$ и $f_{1k}^{(s)}$ условными оптимальными временами, а соответствующие им маршруты – условными оптимальными маршрутами. Оптимальный маршрут получится на последнем этапе решения задачи. Им будет условный оптимальный маршрут на последнем этапе, для которого $f_{kN}^{(N-1)}$ или $f_{1k}^{(N-1)}$ будет минимально.

Рассмотрим числовой пример этой задачи с той целью, чтобы читатель мог лучше уяснить метод.

Положим, имеются шесть пунктов (или станков), через которые необходимо проехать (или направить детали), при этом каждая пара из них имеет связь между собой.

Известны затраты времени на переезд (продвижение деталей) из каждого пункта в любой другой. Эти исходные данные заданы в виде матрицы затрат времени $T=\left[t_{ij}\right]$ размеров 5 x 6 (табл.7.4).

Табл. 7.4

Номера пунктов	$\boxed{1}$	2	3	4	5	$\boxed{6}$
$\boxed{1}$	0	9	4	11	10	-
2	8	0	7	13	12	7
3	5	9	0	6	5	4
4	10	11	4	0	13	3
5	8	9	8	10	0	9

В задаче необходимо *найти маршрут переезда* (продвижения деталей) из 1-го начального пункта в 6-й конечный с обязательной остановкой в пунктах 2,3,4,5, который обеспечил бы минимальные затраты времени на переезд (или перемещения деталей).

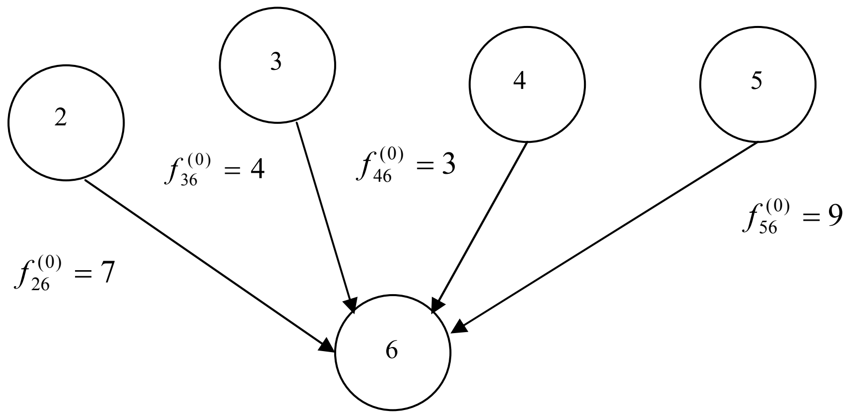


Рис.7.1

Как уже указывалось выше, задача решается в несколько этапов.

Для наглядности решение задачи по этапам будем сопровождать рисунками. Будем сначала разворачивать процесс перемещения в обратном по времени направлении.

Первый этап. На рис.7.1 показаны возможные пути перемещения в конечный пункт 6 из пунктов 2,3,4,5.

Рядом со стрелками на основе табл.7.4 представлены по формуле (7.45) значения функций $f_{jN}^{(0)}$. На этом заканчивается первый этап вычислений.

Второй этап. На втором этапе находятся условные оптимальные времена $f_{kN}^{(1)}$ и соответствующие им условные оптимальные маршруты. Пользуясь табл.7.4 и полученными на первом этапе значениями $f_{jN}^{(0)}$, по формуле (7.45) при s=1 и j=2,3,4,5 находим:

$$\min(t_{32}+f_{26}^{(0)};\ t_{42}+f_{26}^{(0)};\ t_{52}+f_{26}^{(0)}) = \min(\underline{9+7};$$

$$11+7;\ \underline{9+7}) = f_{36}^{(1)'} = f_{56}^{(1)} = 16;$$

$$\min(t_{23}+f_{36}^{(0)};\ t_{43}+f_{36}^{(0)};\ t_{53}+f_{36}^{(0)}) = \min(7+4;\ \underline{4+4};\ 8+4) = f_{46}^{(1)} = 8;$$

$$\min(t_{24}+f_{46}^{(0)};\ t_{34}+f_{46}^{(0)};\ t_{54}+f_{46}^{(0)}) = \min(13+3;\ \underline{6+3};\ 10+3) = f_{36}^{(1)''} = 9;$$

$$\min(t_{25}+f_{56}^{(0)};\ t_{35}+f_{56}^{(0)};\ t_{45}+f_{56}^{(0)}) = \min(12+9;\underline{5+9};\ 13+9) = f_{36}^{(1)'''} = 14.$$

Для $f_{36}^{(1)}$ получены значения 16, 9 и 14, минимальное $f_{36}^{(1)} = 9$, по которому соответствует условный оптимальный маршрут 3→4→6, показанный на рис.7.2.

На рис.7.2 также изображены условно оптимальные маршруты на втором этапе, соответствующие $f_{56}^{(1)} = 16$, и $f_{46}^{(1)} = 8$.

Третий этап. На третьем этапе в пункт 3 или 4, с которых начинается второй этап, можно попасть только из пунктов 2 или 5, в пункт 5 – из пунктов 3 или 4, в противном случае получится возврат в один из пунктов, что условием задачи запрещено. Таким же образом, как на втором этапе, найдем условные оптимальные времена $f_{kN}^{(2)}$ и соответствующие им условные оптимальные маршруты

$$\min(t_{23}+f_{36}^{(1)};\ t_{53}+f_{36}^{(1)}) = \min(\underline{7+9};\ 8+9) = f_{26}^{2)} = 16;$$

$$\min(t_{24}+f_{46}^{(1)};\ t_{54}+f_{46}^{(1)}) = \min(13+8;\underline{10+8}) = f_{56}^{(2)} = 18;$$

$$\min(t_{35}+f_{56}^{(1)};\ t_{45}+f_{56}^{(1)}) = \min(\underline{5+16};\ 13+16) = f_{36}^{(2)} = 21.$$

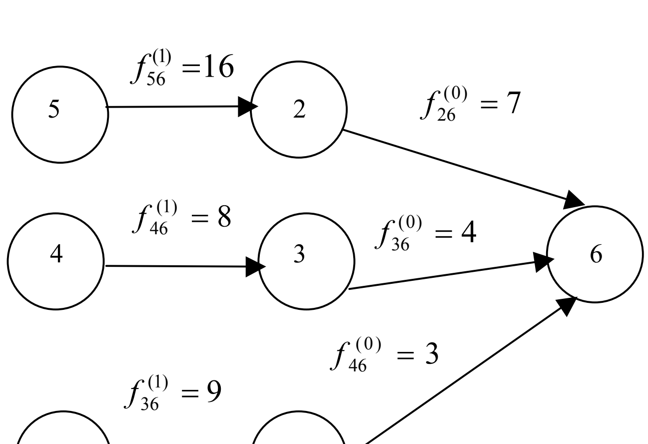


Рис. 7.2

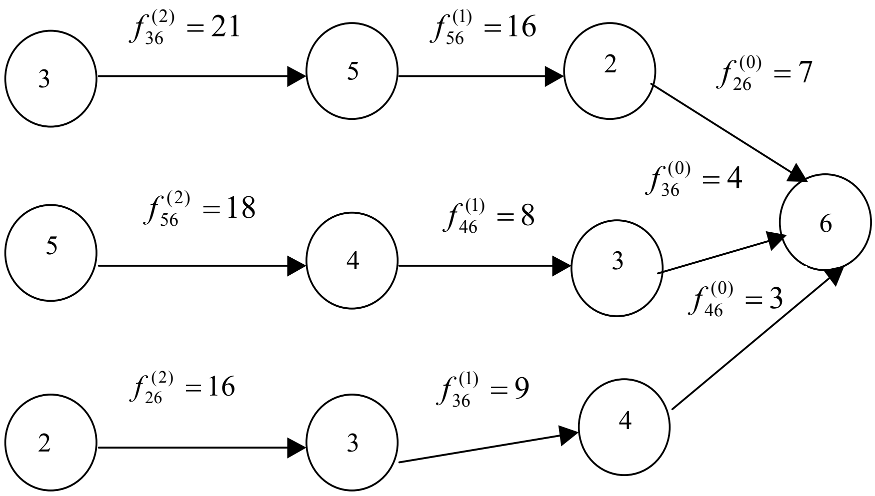


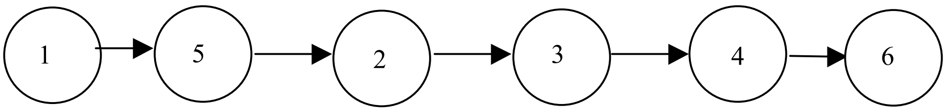
Рис.7.3

На рис. 7.3 показаны условные оптимальные маршруты на третьем этапе.

Четвертый этап. Четвертый этап можно считать последним, так как теперь не нужно делать различных гипотез, с какого пункта этот этап начинается. Действительно, из пункта 1 мы можем попасть в пункт 2 только через пункт 5, в пункт 3 через пункт 4 и в пункт 5 через пункт 2. Для этих маршрутов соответственно имеем времена

$$f_{16}^{'}=t_{15}+t_{52}+f_{26}^{(2)}=10+9+16=35;$$
$$f_{16}^{''}=t_{14}+t_{43}+f_{36}^{(2)}=11+4+21=36;$$
$$f_{16}^{'''}=t_{12}+t_{25}+f_{56}^{(2)}=9+12+18=39,$$
$$f_{16}^{(3)}=\min\left(f_{16}^{'},f_{16}^{''},f_{16}^{'''}\right)=\min(35,36,39)=35.$$

Итак, при разворачивании процесса методом динамического программирования в обратном по времени направлении мы получили оптимальный маршрут (7.47)



(7.47)

с суммарным временем перемещения T_1=35.

Теперь развернем процесс в прямом направлении. При расчете условных оптимальных времен будем пользоваться соотношениями (7.46)

Первый этап. На первом этапе рассматриваем возможные перемещения из пункта 1 непосредственно в пункты 2,3,4,5 (рис.7.4) и записываем соответствующие условные оптимальные времена

$$f_{12}^{(0)} = t_{12} = 9; \quad f_{13}^{(0)} = t_{13} = 4;$$
$$f_{14}^{(0)} = t_{14} = 11; \quad f_{15}^{(0)} = t_{15} = 10.$$

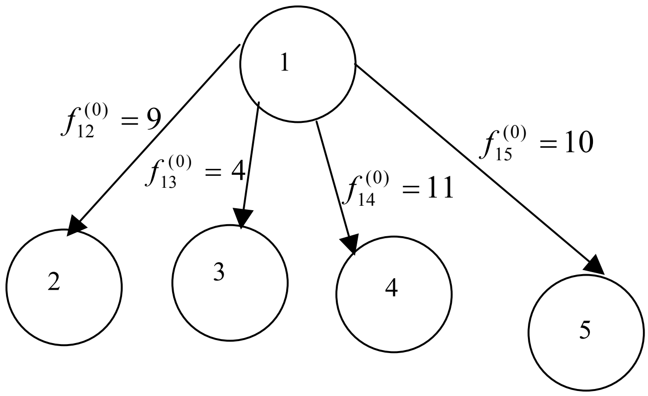
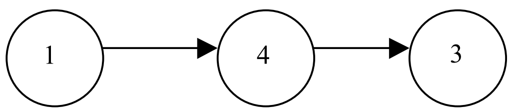


Рис.7.4

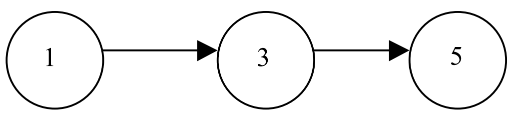
Второй этап. На втором этапе рассчитываем условные оптимальные времена движения из пункта 1 с остановкой в одном пункте. Сначала рассчитываем все возможные значения f_{1k}^{1} по формулам (7.46)

$$\min(t_{23} + f_{12}^{(0)};\ t_{24} + f_{12}^{(0)};\ t_{25} + f_{12}^{(0)}) = \min(\underline{7+9}; 13+9; 12+9) = f_{13}^{(1)} = 16;$$
$$\min(t_{32} + f_{13}^{(0)};\ t_{34} + f_{13}^{(0)}; t_{35} + f_{13}^{(0)}) = \min(9+4; 6+4; \underline{5+4}) = f_{15}^{(1)} = 9;$$
$$\min(t_{42} + f_{14}^{(0)};\ t_{43} + f_{14}^{(0)}; t_{45} + f_{14}^{(0)}) = \min(11+11; \underline{4+11}; 13+11) = f_{13}^{(1)} = 15;$$
$$\min(t_{52} + f_{15}^{(0)};\ t_{53} + f_{15}^{(0)}; t_{54} + f_{15}^{(0)}) = \min(9+10; \underline{8+10}; 10+10) = f_{13}^{(1)} = 18.$$

Мы получили три различных значения $f_{13}^{(1)}$, а именно: 16 при движении через пункт 2;15 – при движении через пункт 4 и 18 – при движении через пункт 5. Минимальное из них $f_{13}^{(1)}$=15 и будет одним из условных оптимальных времен, и соответствующий ему условный оптимальный маршрут будет



Второму условному оптимальному времени $f_{15}^{(1)}$=9 соответствует условный маршрут



Условные оптимальные маршруты на втором этапе показаны на рис.7.5.

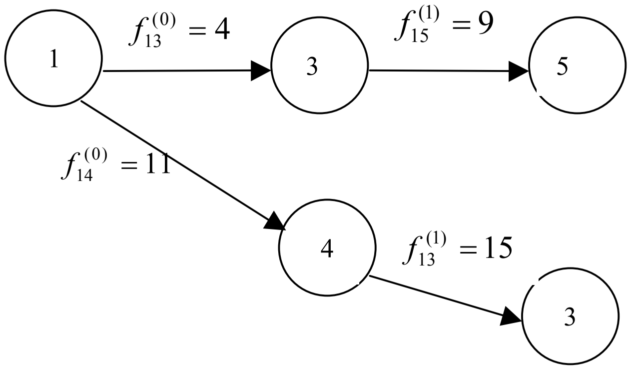


Рис. 7.5

Третий этап. На третьем этапе возможны перемещения из пункта 3 в пункт 2 или из пункта 5 в пункты 2 или 4. Рассчитаем соответствующее условное оптимальное время для каждого перемещения по формулам (7.46)

$$\min(t_{32} + f_{13}^{(1)};\ t_{35} + f_{13}^{(1)}) = \min(9+15;\underline{5+15}) = f_{15}^{(2)} = 20;$$

$$\min(t_{52} + f_{15}^{(1)};\ t_{54} + f_{15}^{(1)}) = \min(\underline{9+9};10+9) = f_{12}^{(2)} = 18;$$

Соответствующие этим значениям времени условные оптимальные маршруты на третьем этапе показаны на рис.7.6.

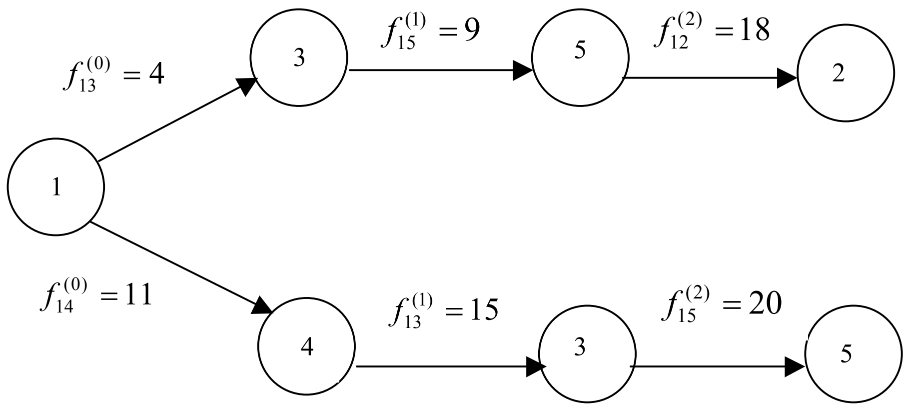


Рис. 7.6

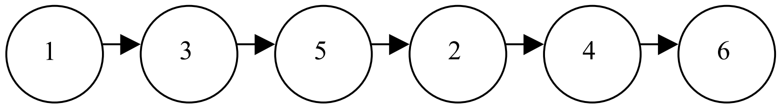
Четвертый этап. На этом последнем этапе в пункт 6 можно пройти из пункта 2 только через пункт 4 и из пункта 5 только через пункт 2. Для этих маршрутов соответственно имеем:

$$f_{16}^{'} = t_{24} + t_{46} + f_{12}^{(2)} = 13 + 3 + 18 = 34;$$

$$f_{16}^{''} = t_{52} + t_{26} + f_{15}^{(2)} = 9 + 7 + 20 = 36.$$

Итак, при развертывании процесса методом динамического программирования в прямом направлении мы получили оптимальный маршрут 7.48,

(7.48)



на преодоление которого требуется суммарное время T_2=34. Это время оказалось меньше времени T_1=35, полученного при развертывании процесса в обратном направлении и определении маршрута 7.47, поэтому маршрут 7.48 является оптимальным решением рассмотренной задачи.

7.4. Задача о замене оборудования

В отраслях лесной и лесоперерабатывающей промышленности используется разнообразное оборудование – от трелевочного трактора и строгального станка до варочного котла и бумагоделательной машины. По мере того как части оборудования изнашиваются (или просто стареют), производственные затраты и расходы на содержание оборудования обычно возрастают, тогда как производительность и относительная продажная цена снижаются. Как правило, затратив достаточно много средств на техническое обслуживание и содержание (на технические уходы, ремонты и т.п.), машины можно использовать сравнительно долго. Тем не менее при любой непрерывной работе всегда наступает момент, когда выгоднее приобрести новую машину, чем использовать дальше старую. На это влияет целый ряд причин и факторов, однако здесь мы их рассматривать не будем. Так или иначе, одна из важных проблем, с которыми приходится встречаться в промышленности, состоит в определении оптимальной политики замены ооборудования[1].

До настоящего времени вопрос о целесообразности замены оборудования решался путем прямых расчетов. Применяемая методика приводит к системам уравнений с большим числом неизвестных. В модели задачи фигурируют ограничения типа неравенств. Обычные методы часто оказываются непригодными для решения подобных задач.

Динамическое программирование позволяет решать задачи по этапам, тем самым представляется возможность избежать составления и рассмотрения сложных систем уравнений.

Динамическое программирование обеспечивает *единый подход* к решению всех видов задач о замене. Решение данной проблемы может считаться оптимальным, если оно обеспечивает *максимальный суммарный эффект* от использования оборудования *за весь временной период его эксплуатации.*

Задачи этого типа математически формулируются посредством двух функциональных уравнений, составленных на основе принципа оптимальности Р.Беллмана, которые записываются для каждого этапа рассматриваемого процесса. Посредством первого уравнения, что будет видно ниже, рассчитывается доход от эксплуатации единицы оборудования в течении года на рассматриваемом этапе при условии замены старого оборудования. Второе функциональное уравнение позволяет вычислить доход при сохранении старого оборудования.

Принятие решения о сохранении или замене оборудования обусловливается тем, в каком случае доход окажется наибольшим.

Таким образом, в качестве показателя критерия оптимальности нами принимается доход (ожидаемая прибыль) от эксплуатации оборудования, который максимизируется. Может быть принят в качестве критерия оптимальности и иной экономический показатель (например, приведенные затраты, которые необходимо минимизировать). Как первый, так и второй показатели имеют свои достоинства и недостатки. Показатель прибыли наиболее приемлем для определения политики отношения к оборудованию. Однако его сложнее, чем приведенные затраты, подготовить к решению (очистить от влияния изменяющих прибыль факторов, независящих от оборудования: изменения цен, ассортимента, пересортицы и др.).

Общая экономическая эффективность использования оборудования зависит прежде всего от производительности его и размера эксплуатационных расходов по содержанию, а также от величины остаточной и восстановительной стоимости. Первые три показателя существенно зависят от состояния и возраста оборудования. Поэтому при постановке задачи о замене оборудования эти показатели должны быть известны.

Разработаем математическую модель задачи, т.е. составим функциональные уравнения, выражающие величину дохода от эксплуатации оборудования.

Для этого примем следующие обозначения:

$r(t)$ – стоимость продукции, выбранной за 1 год на единице оборудования возраста t лет (за вычетом расходов, не связанных с работой оборудования);

$u(t)$ – годовые затраты на содержание единицы оборудования возраста t лет;

---

[1]А также подобные этой проблемы целесообразности капитальных ремонтов и модернизации оборудования. Эти задачи решаются также методом динамического программирования.

$s(t)$ – остаточная стоимость единицы оборудования возраста t лет;

P – стоимость единицы нового оборудования (с учетом затрат по доставке, монтажу и наладке);

$c(t)$ – затраты по замене единицы оборудования; они равны разности стоимости нового оборудования и остаточной стоимости старого $c(t)=P-s(t)$;

N – длительность рассматриваемого периода времени в годах.

Все эти показатели должны быть известны. Предполагается, что в каждый новый год замены оборудования показатели $r(t)$, $u(t)$, $c(t)$ изменяются. Эти показатели в i-й год замены будем обозначать через $r_i(t)$, $u_i(t)$, $c_i(t)$. Показатели по старому оборудованию будем обозначать теми же буквами без индекса, т.е. через $r(t)$, $u(t)$, $c(t)$.

Решение проблемы замены оборудования рассматривается на перспективный период времени из N лет. Процесс решения разворачивается, как это принято в динамическом программировании, в обратном направлении: от N-го года к 1-му году рассматриваемого периода. При этом максимизируется доход от эксплуатации единицы оборудования за весь рассматриваемый N-й период лет при условии замены или сохранении оборудования в тот или иной год периода.

Выведем функциональное уравнение, определяющее максимальный суммарный доход за все будущее время при условии, что замена оборудования производится или не производится в $(N-k)$-й год.

Предположим, что оборудование заменяется новым в последний N-й год (k=0). Поскольку в этом году будет ставиться новое оборудование, т.е. оборудование, не имеющее возраста (t=0), показатели его будут, согласно принятым выше обозначениям $r_N(0)$, $u_N(0)$. Это оборудование принесет за N-й год доход

$$r_N(0) - u_N(0). \qquad (7.49)$$

Если старое оборудование прослужило до рассматриваемого N-летнего периода t_0 лет, то замена его будет производиться в $(N+t_0)$-й год, считая от начала его использования. В этот год на постановку нового оборудования потребуются затраты $c(N+t_0)$, так что новое оборудование может принести в N-й год доход

$$f_N^{'}(N+t_0) = r_N(0) - u_N(0) - c(N+t_0). \qquad (7.50)$$

Если величина $f'_N(N+t_0)$ окажется отрицательной, то это означает, что замена оборудования приведет не к доходу, а к убытку. В таком случае следует в этот год сохранить старое оборудование, которое принесет за N-й год доход

$$f''_N(N+t_0)=r(N+t_0)-u(N+t_0). \qquad (7.51)$$

Если же величины $f'_N(N+t_0)$ и $f''_N(N+t_0)$ окажутся неотрицательными, то следует заменить старое оборудование при $f'_N(N+t_0)>f''_N(N+t_0)$ и оставить старое при $f'_N(N+t_0)\le f''_N(N+t_0)$. Максимальный доход за N-й год определится как

$$f_N(N+t_0)=\max\left[f'_N(N+t_0);f''_N(N+t_0)\right]$$

или

$$f_N(N+t_0)=\max\begin{Bmatrix} r_N(0)-u_N(0)-c(N+t_0)-\text{политика замены;}\\ r(N+t_0)-u(N+t_0)-\text{политика сохранения.}\end{Bmatrix} \qquad (7.52)$$

На этом не заканчиваются вычисления на первом шаге. Дело в том, что мы здесь разворачиваем процесс динамического программирования в обратном по времени направлении, поэтому не исключено, что до N-го года могут быть замены старого оборудования. Поэтому мы должны рассчитать значения максимального дохода в предположении, что замена оборудования производилась в N— 1, N —2,..., 2, 1-м году.

Если замена оборудования была произведена в (N-1)-м году (k=1), то при повторной замене оборудования в N-м году будет получен доход

$$r_N(0) — u_N\, 0) — c_{N-1}(1),$$

а если замены оборудования не будет, то доход будет равен

$$r_{N-1}(1) - u_{N-1}(1)$$

и максимальный доход в N-й год при этой гипотезе будет

$$f_N(1)=\max\begin{Bmatrix} r_N(0)-u_N(0)-c_{N-1}(1)-\text{политика замены;}\\ r_{N-1}(1)-u_{N-1}(1)-\text{политика сохранения.}\end{Bmatrix} \qquad (7.53)$$

Аналогичным образом мы получим выражение для максимального дохода за N-й год в предположении, что замена оборудования может быть произведена в (N—2)-и год.

Теперь уже нетрудно подметить закономерность в составлении общего выражения для максимального дохода за N-й год в предположении, что замена оборудования может быть произведена в начале N—1,N — 2,...,2,1-го года

$$f_N(t)=\max\begin{Bmatrix} r_N(0)-u_N(0)-c_{N-t}(t)-\text{политика замены;}\\ r_{N-t}(t)-u_{N-t}(t)-\text{политика сохранения;}\\ t=1,2,...,N-1.\end{Bmatrix} \qquad (7.54)$$

Переходим теперь ко **второму шагу** операции вычислений, т. е. к определению формулы для вычисления условного максимального дохода за последние 2 года, а именно за N—1-й и N-й годы. Сначала рассмотрим гипотезу незамены старого оборудования в предшествующие годы (до N-1-го года). Предположим, что старое оборудование заменяется новым в предпоследний N—1-й год (k=l). Согласно принятым выше обозначениям это новое оборудование принесет доход за вычетом затрат по замене.

$$r_{N-1}(0)-u_{N-1}(0)-c(N-1+t_0). \qquad (7.55)$$

Если же в N—1-м году сохранить старое оборудование, то от эксплуатации его получится за N—1-й год доход

$$r(N\text{-}1+t_0) - u(N\text{-}1+t_0) \qquad (7.56)$$

В N-й год новое оборудование, поставленное в N-1-м году, а также старое оборудование может сохраняться или не сохраняться, т. е. заменяться другим новым оборудованием. За N-й год должна соблюдаться та политика (замены или сохранения оборудования), при которой получается больший доход, а это значит, что доход за 2 последних года должен слагаться: из дохода (7.55) и максимального дохода $f_N(1)$ (7.53) при политике замены и из дохода (7.56) и максимального дохода $f_N(N+t_0)$ (7.52) при политике сохранения. Суммарный же максимальный доход и соответствующая ему политика определятся из выражения

$$f_{N-1}(N-1+t_0) = \\ = \max\left\{\begin{matrix} r_{N-1}(0) - u_{N-1}(0) - c(N-1+t_0) + f_N(1) - \\ -\text{политика замены;} \\ r(N-1+t_0) - u(N-1+t_0) + f_N(N+t_0) - \\ -\text{политика сохранения.} \end{matrix}\right\} \qquad (7.57)$$

Аналогичные рассуждения приведут к выражению для максимального дохода на втором шаге при гипотезах, что оборудование может быть заменяно ранее в начале N-2, N-3,...,2,1-го годов.

$$f_{N-1}(t) = \max\left\{\begin{matrix} r_{N-1}(0) - u_{N-1}(0) - c_{N-1-t}(t) + f_N(1) - \\ -\text{политика замены;} \\ r_{N-1-t}(t) - u_{N-1-t}(t) + f_N(t+1) - \\ -\text{политика сохранения;} \\ t = 1,2,\ldots,N-3,\ N-2. \end{matrix}\right\} \qquad (7.58)$$

Точно таким же образом мы можем вывести выражения для максимального дохода на третьем шаге исследуемой операции.

Максимальный суммарный доход за последние 3 года (k= 2) при гипотезе незамены старого оборудования до N-2-го года и соответствующая ему политика найдутся из выражения:

$$f_{N-2}(N-2+t_0) = \max\left\{\begin{matrix} r_{N-2}(0) - u_{N-2}(0) - c(N-2+t_0) + f_{N-1}(1) - \\ -\text{политика замены;} \\ r(N-2+t_0) - u(N-2+t_0) + f_{N-1}(N-1+t_0) - \\ -\text{политика сохранения;.} \end{matrix}\right\} \qquad (7.59)$$

Максимальный суммарный доход за последние 3 года (k=2), при гипотезах, что оборудование может быть заменено в начале N—3, N—2, . . . , 2, 1-го годов, и соответствующая ему политика найдутся из выражения

$$f_{N-2}(t)=\max\begin{cases} r_{N-2}(0)-u_{N-2}(0)-c_{N-2-t}(t)+f_{N-1}(1)- \\ \qquad -\text{политика замены;} \\ r_{N-2-t}(t)-u_{N-2-t}(t)+f_{N-1}(t+1)- \\ \qquad -\text{политика сохранения;} \\ \qquad t=1,2,...,N-3. \end{cases} \qquad (7.60)$$

Таким же образом мы можем вывести формулы для суммарного максимального дохода на последующих шагах.

Последний N-й шаг (здесь рассматривается 1-й год периода) будет отличаться от предшествующих тем, что теперь мы уже не будем строить различные гипотезы о том, с чего начинается этот шаг. Этот шаг может начинаться только с замены или сохранения старого оборудования. Поэтому на последнем шаге мы имеем только одну формулу для максимального суммарного дохода:

$$f_1(1+t_0)=\max\begin{cases} r_1(0)-u_1(0)-c(1+t_0)+f_2(1)- \\ \qquad -\text{политика замены;} \\ r(1+t_0)-u(1+t_0)+f_2(2+t_0)- \\ \qquad -\text{политика сохранения;} \end{cases} \qquad (7.61)$$

Из выражений (7.57) — (7.60) нетрудно подметить общий закон образования $f_{N-k}(t)$ при замене или сохранении оборудования в $(N — k)$-й год. Максимальный суммарный доход за все будущее время при замене или сохранении старого оборудования в $(N — k)$-й год и соответствующая ему политика находятся из функционального уравнения:

$$f_{N-k}(N-k+t_0)=\max\begin{cases} r_{N-k}(0)-u_{N-k}(0)-c(N-k+t_0)+f_{N-k+1}(1)- \\ \qquad -\text{политика замены;} \\ r(N-k+t_0)-u(N-k+t_0)+f_{N-k+1}(N-k+1+t_0)- \\ \qquad -\text{политика сохранения;} \\ \qquad k=0,1,2,...,N-2,N-1. \end{cases} \qquad (7.62)$$

Функциональные уравнения для определения максимального суммарного дохода за все будущее время при замене приобретенного в t-м году оборудования в N-k-й год и определения соответствующей ему политики имеют следующий общий вид:

$$f_{N-k}(t)=\max\begin{cases} r_{N-k}(0)-u_{N-k}(0)-c_{N-k-t}(t)+f_{N-k+1}(1)- \\ \qquad -\text{политика замены;} \\ r_{N-k-t}(t)-u_{N-k-t}(t)+f_{N-k+1}(t+1)- \\ \qquad -\text{политика сохранения;} \\ \qquad k=0,1,2,...,N-2;t=1,2,...,N-k-1. \end{cases} \qquad (7.63)$$

В формулах (7.62), (7.63) надо полагать $f_{N+1}(t)$=0 при любом t, так как N+1-й год выходит за рамки рассматриваемого периода.

После того как шаг за шагом мы рассчитаем все функции $f_{N-k}(t)$ по функциональным уравнениям (7.62), (7.63) и определим соответствующие политики замены или сохранения оборудования, мы должны снова просмотреть все шаги, но уже в обратном направлении от 1-го до N-го года. В результате этого мы будем знать, в какие годы, какое оборудование заменяется и какое новое оборудование вступает в строй, т. е. узнаем оптимальную стратегию замены оборудования за весь N-летний период.

Чтобы читатель мог лучше уяснить сущность функциональных уравнений и усвоить способ решения их, рассмотрим некоторый числовой пример. При этом мы не преследуем невыполнимой цели рассмотрения тонкостей экономической сущности проблемы замены оборудования на реальном производственном примере. Эта проблема достаточно сложна, особенно в части сбора и обработки необходимой исходной информации. Здесь нами рассматривается механизм метода динамического программирования в задаче о замене оборудования на условном числовом примере.

Пример. Предположим, рассматривается период, равный шести годам. Тогда N=6.

Исходные данные в денежных единицах, характеризующие стоимость выработанной продукции $r_i(t)$, расходы по содержанию оборудования $u_i(t)$ и затраты по замене оборудования $c_i(t)$, приведены в табл. 7.5 по новому оборудованию, в зависимости от года приобретения, и в табл. 7.6 — по старому (исходному) оборудованию, находящемуся, допустим, 3 года в эксплуатации к 1-му году рассматриваемого периода.

Решение задачи выполняется за ряд последовательных шагов.

На первом шаге производим расчет по формулам (7.52) и (7.54) при t_o=3. Формулы и результаты расчета сводим в табл. 7.7.

Табл. 7.5

Наименование показателей нового оборудования	Значения показателей в денежных единицах при возрасте оборудования (*t* лет)					
	0	1	2	3	4	5
В 1-й год						
$r_1(t)$	190	90	80	75	70	70
$u_1(t)$	10	15	15	20	25	30
$c_1(t)$	-	135	140	130	150	160
Продолжение табл.7.5						
Во 2-й год						
$r_2(t)$	160	110	90	80	70	
$u_2(t)$	10	10	15	20	20	
$c_2(t)$	-	125	130	150	150	
В 3-й год						
$r_3(t)$	130	125	120	110		
$u_3(t)$	10	10	15	15		
$c_3(t)$	-	135	140	150		
В 4-й год						
$r_4(t)$	140	135	130			
$u_4(t)$	5	10	20			
$c_4(t)$	-	155	140			
В 5-й год						
$r_5(t)$	155	100				
$u_5(t)$	5	25				

$c_5(t)$	-	105		
В 6-й год				
$r_6(t)$	190			
$u_6(t)$	5			
$c_6(t)$	-			

Табл. 7.6

Наименование показателей старого оборудования	Значения показателей в денежных единицах при возрасте оборудования (*t* лет)					
	4	5	6	7	8	9
$r(t)$	80	70	70	60	55	50
$u(t)$	20	55	30	30	35	40
$c(t)$	130	140	140	150	170	180

В табл. (7.7) формулы, соответствующие принятой политике, заключены в рамки. Для чего это делается, будет объяснено ниже.

На втором шаге расчет производим по формулам (7.57), (7.58) и результаты его сводим в табл. 7.8.

На третьем шаге расчет производим по формулам (7.59), (7.60) и результаты его сводим в табл. 7.9.

На четвертом шаге расчет производим по общим формулам (7.62), (7.63) при k = 3, N=6 и t_0=3 и результаты его сводим в табл. 7.10.

На пятом шаге расчет произведем по тем же общим формулам (7.62, 7.63) при k=4, N=6, t_0=3 и результаты его сводим в табл. 7.11.

На последнем, шестом шаге мы получим не условный, а действительный суммарный максимальный доход за весь период 6 лет. Вычисление этого максимального дохода и определение соответствующей ему политики следует производить по формуле (7.61) при t_0=3. Результат расчета приведем в табл. 7.12.

Табл. 7.7

1-й шаг. Рассматривается последний 6-й год.

Обору-дование	Воз-раст	Условный максимальный доход от эксплуатации ед.оборудования		Политика
		Формула	Расчет	

Старое	9	$f_6(9)=\max\begin{cases} r_6(0)-u_6(0)-c(9) \\ \boxed{r(9)-u(9)} \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-180\\ 50-40\end{cases}=\max\begin{cases}5\\ 10\end{cases}=10$	Сохранение
Новое	1	$f_6(1)=\max\begin{cases} \boxed{r_6(0)-u_6(0)-c_5(} \\ r_5(1)-u_5(1) \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-105\\ 100-25\end{cases}=\max\begin{cases}80\\ 75\end{cases}=80$	Замена
Новое	2	$f_6(2)=\max\begin{cases} r_6(0)-u_6(0)-c_4(2 \\ \boxed{r_4(2)-u_4(2)} \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-140\\ 130-20\end{cases}=\max\begin{cases}45\\ 110\end{cases}=110$	Сохранение
Новое	3	$f_6(3)=\max\begin{cases} r_6(0)-u_6(0)-c_3(3 \\ \boxed{r_3(3)-u_3(3)} \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-150\\ 110-15\end{cases}=\max\begin{cases}35\\ 95\end{cases}=95$	Сохранение
Новое	4	$f_6(4)=\max\begin{cases} r_6(0)-u_6(0)-c_2(4 \\ \boxed{r_2(4)-u_2(4)} \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-150\\ 70-20\end{cases}=\max\begin{cases}35\\ 50\end{cases}=50$	Сохранение
Новое	5	$f_6(5)=\max\begin{cases} r_6(0)-u_6(0)-c_1(5 \\ \boxed{r_1(5)-u_1(5)} \end{cases}$	$\max\begin{cases}190-5-160\\ 70-30\end{cases}=\max\begin{cases}25\\ 40\end{cases}=40$	Сохранение

Табл. 7.8

2-й шаг. Рассматривается предпоследний год 5-й

Обо-ру-дование	Воз-раст	Условный максимальный доход за 5 и 6-й год		Поли-тика
		Формула	Расчет	
Ста-рое	8	$f_5(8)=\max\begin{cases} r_5(0)-u_5(0)-c(8)+f_6(\\ r(8)-u(8)+f_6(9)\end{cases}$	$\max\begin{cases}155-5-170+80\\ 55-35+10\end{cases}=\max\begin{cases}60\\ 30\end{cases}=60$	Заме-на
Но-вое	1	$f_5(1)=\max\begin{cases} r_5(0)-u_5(0)-c_4(1)+f_6 \\ r_4(1)-u_4(1)+f_6(2)\end{cases}$	$\max\begin{cases}155-5-155+80\\ 135-10+110\end{cases}=\max\begin{cases}75\\ 235\end{cases}=235$	Сохра-нение
Но-вое	2	$f_5(2)=\max\begin{cases} r_5(0)-u_5(0)-c_3(2)+f_6 \\ r_3(2)-u_3(2)+f_6(3)\end{cases}$	$\max\begin{cases}155-5-140+80\\ 120-15+95\end{cases}=\max\begin{cases}90\\ 200\end{cases}=200$	Сохра-нение
Но-вое	3	$f_5(3)=\max\begin{cases} r_5(0)-u_5(0)-c_2(3)+f_6(1) \\ r_2(3)-u_2(3)+f_6(4)\end{cases}$	$\max\begin{cases}155-5-150+80\\ 80-20+50\end{cases}=\max$	Сохра-нение

			$\begin{cases}80\\ =110\\ 110\end{cases}$	
Но-вое	4	$f_5(4)=\max\begin{cases}r_5(0)-u_5(0)-c_1(4)+f_6(\\ \boxed{r_1(4)-u_1(4)+f_6(5)}\end{cases}$	$\max\begin{cases}155-5-150+80\\ \qquad\qquad =\max\\ 70-25+40\end{cases}$ $\begin{cases}80\\ =85\\ 85\end{cases}$	Сохра-нение

Табл. 7.9

3-й шаг. Рассматривается 4-й год периода

Обору-дова-ние	Воз-раст	Условный максимальный доход за 4,5 и 6-й год		По-ли-ти-ка
		Формула	Расчет	
Старое	7	$f_4(7)=\max\begin{cases}\boxed{r_4(0)-u_4(0)-c(7)+f_5}\\ r(7)-u(7)+f_5(8)\end{cases}$	$\max\begin{cases}140-5-150+235\\ \qquad\qquad =\max\\ 60-30+60\end{cases}$ $\begin{cases}210\\ =210\\ 90\end{cases}$	За-ме-на
Продолжение табл.7.9				
Новое	1	$f_4(1)=\max\begin{cases}r_4(0)-u_4(0)-c_3(1)+f_5\\ \boxed{r_3(1)-u_3(1)+f_5(2)}\end{cases}$	$\max\begin{cases}140-5-135+235\\ \qquad\qquad =\max\\ 125-10+200\end{cases}$ $\begin{cases}235\\ =315\\ 315\end{cases}$	Со-хра-не-ни-е

Новое	2	$f_4(2)=\max\begin{cases}\boxed{r_4(0)-u_4(0)-c_2(2)+f_5}\\ r_2(2)-u_2(2)+f_5(3)\end{cases}$	$\max\begin{cases}140-5-130+235\\ \qquad\qquad=\max\\ 90-15+100\end{cases}$ $\begin{cases}240\\ =240\\ 185\end{cases}$	Замена
Новое	3	$f_4(3)=\max\begin{cases}\boxed{r_4(0)-u_4(0)-c_1(3)+f_5(1}\\ r_1(3)-u_1(3)+f_5(4)\end{cases}$	$\max\begin{cases}140-5-130+235\\ \qquad\qquad=\max\\ 75-20+85\end{cases}$ $\begin{cases}240\\ =240\\ 140\end{cases}$	Замена

Табл. 7.10

4-й шаг. Рассматривается 3-й год периода.

Оборудование	Возраст	Условный максимальный доход за 3,4,5 и 6-й год		Политика
		Формула	Расчет	
Старое	6	$f_3(6)=\max\begin{cases}\boxed{r_3(0)-u_3(0)-c(6)+f_4}\\ r(6)-u(6)+f_4(7)\end{cases}$	$\max\begin{cases}130-10-140+315\\ \qquad\qquad=\max\\ 70-30+210\end{cases}\begin{cases}295\\ =295\\ 250\end{cases}$	Замена
Новое	1	$f_3(1)=\max\begin{cases}r_3(0)-u_3(0)-c_2(1)+f_4\\ \boxed{r_2(1)-u_2(1)+f_4(2)}\end{cases}$	$\max\begin{cases}130-10-125+315\\ \qquad\qquad=\max\\ 110-10+240\end{cases}\begin{cases}310\\ =340\\ 340\end{cases}$	Сохранение
Новое	2	$f_3(2)=\max\begin{cases}r_3(0)-u_3(0)-c_1(2)+f_4\\ \boxed{r_1(2)-u_1(2)+f_4(3)}\end{cases}$	$\max\begin{cases}130-10-140+315\\ \qquad\qquad=\max\\ 80-15+240\end{cases}\begin{cases}295\\ =305\\ 305\end{cases}$	Сохранение

Табл. 7.11

5-й шаг. Рассматривается 2-й год периода

Обо-рудо-вание	Воз-раст	Условный максимальный доход за 2,3,4,5 и 6-й год		Поли-тика
		Формула	Расчет	
Старое	5	$f_2(5) = \max\begin{cases} r_2(0) - u_2(0) - c(5) + f_3 \\ r(5) - u(5) + f_3(6) \end{cases}$	$\max\begin{cases} 160 - 10 - 140 + 340 \\ \qquad = \max \\ 70 - 55 + 295 \end{cases}$ $\begin{cases} 350 \\ = 350 \\ 310 \end{cases}$	Замена
Новое	1	$f_2(1) = \max\begin{cases} r_2(0) - u_2(0) - c_1(1) + f_3 \\ r_1(1) - u_1(1) + f_3(2) \end{cases}$	$\max\begin{cases} 160 - 10 - 135 + 340 \\ \qquad = \max \\ 90 - 15 + 305 \end{cases}$ $\begin{cases} 355 \\ = 380 \\ 380 \end{cases}$	Сохранение

Табл. 7.12

6-й шаг. Рассматривается 1-й год периода.

Обо-рудо-вание	Воз-раст	Максимальный доход за 6-лет		Поли-тика
		Формула	Расчет	
Старое	4	$f_1(4) = \max\begin{cases} r_1(0) - u_1(0) - c(4) + f_2(\\ r(4) - u(4) + f_2(5) \end{cases}$	$\max\begin{cases} 190 - 10 - 130 + 380 \\ \qquad = \max \\ 80 - 20 + 350 \end{cases}$ $\begin{cases} 430 \\ = 430 \\ 410 \end{cases}$	Замена

Для принятия оптимального решения, соответствующего максимальному доходу $f_1(4)$=430 денежных единиц, надо просмотреть все таблицы (7.7) — (7.12) в обратном направлении.

По табл. 7.12 мы видим, что для получения максимального суммарного дохода надо заменить старое оборудование новым в начале первого года. Из этой же таблицы по формуле, заключенной в рамку, мы видим, что в первый год рассматриваемого периода будет получен доход, за вычетом затрат на замену оборудования,

$$r_1(0)\text{-}u_1(0)\text{-}c(4)=190\text{-}10\text{-}130=50.$$

Из этой же формулы, заключенной в рамку, мы видим, что максимальный доход $f_1(4)$ связан с условным максимальным доходом $f_2(1)$. Теперь обращаемся к табл. 7.11, из которой мы видим, что $f_2(1)$ получено при сохранении нового оборудования. При этом по формуле в рамке мы получим за второй год доход

$$r_1(1)\text{-}u_1(1)=90\text{-}15=75.$$

Из той же формулы в рамке мы видим, что доход $f_2(1)$ связан с условным доходом $f_3(2)$.

Теперь аналогичным образом из табл.7.10 в строке $f_3(2)$ видим, что новое оборудование сохраняется. Доход за третий год будет равен

$$r_1(2)\text{-}u_1(2)=80\text{-}15=65.$$

Доход $f_3(2)$ связан с условным максимальным доходом $f_4(3)$.

Обращаясь к строке $f_4(3)$ в табл.7.9, мы видим, что новое оборудование, поставленное в начальный период взамен старого, *должно быть заменено другим новым оборудованием*, при этом доход за четвертый год, за вычетом затрат на смену оборудования, составит

$$r_4(0)\text{-}u_4(0)\text{-}c_1(3)=140\text{-}5\text{-}130=5.$$

Из формулы в рамке для $f_4(3)$ видно, что этот доход связан с условным максимальным доходом $f_5(1)$.

По табл. 7.8 видно, что при $f_5(1)$ новое оборудование сохраняется, доход за пятый год составляет

$$r_4(1)\text{-}u_4(1)=135\text{-}10=125$$

и $f_5(1)$ связан с условным максимальным доходом $f_6(2)$.

Наконец, по последней рассматриваемой таблице (7.7) мы видим, что при $f_6(2)$ новое оборудование сохраняется и доход за шестой год составит по формуле в рамке

$$r_4(2)\text{-}u_4(2)=130\text{-}20=110$$

Для проверки правильности оптимальной стратегии целесообразно просуммировать доходы по годам:

$$50+ 75 + 65+5+125 + 110 = 430.$$

Мы видим, что суммарный доход действительно совпадает с максимальным доходом за весь период, полученным на последнем шаге (см. табл. 7.12).

Итак, оптимальная стратегия замены оборудования должна состоять в следующем. В начале периода старое оборудование должно быть заменено новым, которое должно прослужить 3 года, после чего должно быть снова заменено другим новым оборудованием, которое должно служить до конца рассматриваемого периода.

Усложненная постановка и э.-м. модели задачи оптимизации технического перевооружения предприятий

В постановке задачи и ее модели, описанной нами выше, каждый раз при принятии решения рассматривались только две возможности - продолжать использовать имеющуюся машину или заменить ее новой, какого-то одного определенного типа.

Рассмотрим два более сложных варианта.

Сущность первого заключается в том, что к двум прежним возможностям - использовать старую машину или заменить ее новой, добавляется еще одна (третья) возможность - капитальный ремонт имеющейся машины (или, например, ее модернизация, - метод решения будет идентичным).

В этом случае, все функции будем предполагать зависящими не только от возраста машины и года ее приобретения, а также от времени, прошедшего после последнего капитального ремонта (или последней модернизации). Для описания функции состояния теперь потребуется два параметра - один для возраста используемой машины и второй для числа периодов (лет), прошедших с момента ее последнего капитального ремонта (или последней модернизации).

Составим *функциональные уравнения* (рекуррентные соотношения) *для первого усложненного варианта, учитывающего три возможности решения.*

Как и в прежней постановке, в качестве критерия оптимальности примем показатель, выражающий величину дохода от эксплуатации единицы оборудования в течении года.

Для составления функциональных уравнений примем следующие обозначения:

$R(t_1;t_2)$ - стоимость продукции, выработанной за один год машиной возраста t_1 лет, если последний капитальный ремонт ее проводился в начале t_2-го года (при этом, время, необходимое для проведения капитального ремонта, считается пренебрежительно малым);

$S(t_1;t_2)$ - ожидаемые годовые эксплуатационные затраты на содержание машины возраста t_1 лет, если последний капитальный ремонт ее проводился в начале t_2-го года;

$H(t_1;t_2)$ - затраты на капитальный ремонт (или модернизации) машины возраста t_1 лет, если последний капитальный ремонт был в начале t_2- года;

$C(t_1;t_2)$ - затраты по замене машины возраста t_1-лет; они включают в себя затраты на приобретение, установку и наладку машины за вычетом возможной выручки от реализации старой машины;

N - длительность рассматриваемого периода времени в годах.

В постановке задачи предполагается, что все эти показатели должны быть известны. Однако, в настоящее время, в силу сложившихся объективных условий в экономике промышленности, прогнозирование их представляет определенные трудности.

Функции состояния $F_k(t_1;t_2)$ выражают в этом случае суммарный доход на планируемый период, приведенный к началу k-го периода, если начиная с k-го периода принимаются оптимальные решения, используемая машина имеет возраст t_1 лет, а последний капремонт ее проводился в начале t_2-го периода (года).

Рекуррентные соотношения для этих функций определения условного максимального дохода при сохранении старой машины, проведении капитального ремонта, установке новой машины в k-й год и во все последующее время до N-го года, и определения соответствующей ему политики отношения к оборудованию имеют следующий вид:

$$F_k(t_1;t_2) = \max \begin{cases} R_{k-t_1}(t_1+1;t_2) - S_{k-t_1}(t_1+1;t_2) + F_{k+1}(t_1+1;t_2) - \\ -\text{продолжать использовать машину без капитального ремонта;} \\ R_{k-t_1}(t_1+1;t_2) - S_{k-t_1}(t_1+1;k) - H_{k-t_1}(t_1;t_2) + F_{k+1}(t_1+1;1) - \\ -\text{произвести капитальный ремонт;} \\ R_k(1;0) - S_k(1;0) - C_{k-t_1}(t_1;t_2) + F_{k+1}(1;0) - \\ -\text{купить и установить новую машину} \end{cases} \tag{7.64}$$

Из-за наличия двух параметров состояния (t_1 и t_2) эта задача значительно труднее чем та, которая нами рассмотрена ранее. Однако, так как максимум вычисляется довольно просто и значения t_2 никогда не бывают слишком большими, подобные задачи без особого труда могут решаться на ПЭВМ. При этом, к трем рассмотренным возможностям отношения к оборудованию может быть добавлена четвертая возможность - произвести модернизацию машины.

Конечно, на практике могут встретиться, как отмечалось выше, значительные трудности в статистической обработке (прогнозировании) исходной информации. Тем не менее эффект оправдывает труды.

Второй вариант усложненной постановки задачи о замене оборудования заключается в следующем.

Когда речь идет о замене старой машины новой всегда имеется возможность выбора между машинами различных типов. В этом случае задача заключается в определении политики отношения к оборудованию по возможностям - продолжать эксплуатировать имеющуюся машину или приобрести одну новую из нескольких типов.

Пусть функции $R_{ku}(j)$; $S_{ku}(j)$ и $C_{ku}(j)$ имеют ранее введенный смысл в j-й период, а дополнительный индекс u определяет тип машины.

Для примера остановимся на случае машин только двух типов, хотя без особого труда можно решать задачи, где это число произвольно.

Функции состояния снова зависят от двух параметров - возраста используемой машины, если эта машина первого типа, и аналогичной характеристики для машины второго типа. Оба параметра не могут быть положительными одновременно, так как в любой момент времени имеется лишь одна машина.

Пусть вновь $F_k(t_1;t_2)$ выражает суммарный доход от эксплуатации машины (в течение года и последующий период), приведенный к началу k-го периода, если в конце предыдущего (k-1) периода имелась машина данного возраста и данного типа, а решения, принимаемые в начале k-го периода и во все последующие, были оптимальны.

Если в конце первого периода имеется машина первого типа, то параметр t_1 определяет ее возраст, а параметр t_2 полагается равным нулю. Наоборот, если имеется машина второго типа, то t_2 определяет ее возраст, а t_1=0. Отметим, что для этой задачи, если t_1 и t_2 могут принимать n значений, функция $F_n(t_1;t_2)$ принимает только $2n$-1 значение, а не n^2, как в случаях, когда приходится рассматривать все комбинации t_1 и t_2.

Рекуррентные соотношения для функций состояния (функциональные уравнения) в предположении, что (k-1)-й период закончился и имеется машина возраста t_1 первого типа, имеют следующий вид:

$$F_k(t_1;0) = \max \begin{cases} R_{k-t_1,1}(t_1+1) - S_{k-t_1,1}(t_1+1) + F_{k+1}(t_1+1;0) - \\ - \text{использовать имеющуюся машину;} \\ R_{k1}(1) - S_{k1}(1) - C_{k1}(t_1) + F_{k+1}(1;0) - \\ - \text{купить и установить машину первого типа;} \\ R_{k2}(1) - S_{k2}(1) - C_{k2}(t_1) + F_{k+1}(0;1) - \\ - \text{купить и установить машину второго типа.} \end{cases} \qquad (7.65)$$

Если все расчеты выполняются с помощью ПЭВМ, то без особого труда задача может быть решена с пятью и более типами машин.

Здесь рассмотрены лишь некоторые типовые задачи, решаемые методами динамического программирования. Однако следует заметить, что существует необозримое множество различных задач, укладывающихся в схему динамического программирования.

Рассмотрим еще одну очень важную задачу из области оптимального управления производством, - задачу управления запасами.

7.5. Задача управления запасами

Необходимость решения этой задачи в реальных производственных условиях вызвана тем, что зачастую предприятиям выгодно изготовлять в течение некоторого периода времени продукцию в объеме, превышающем спрос в пределах этого периода и хранить излишки, используя их для удовлетворения последующего спроса. Вместе с тем, хранение возникающих при этом запасов связано с определенными затратами. В зависимости от обстоятельств затраты обусловлены такими факторами, как арендная плата за складские помещения, страховые взносы и расходы по содержанию запасов. Эти затраты необходимо учитывать при установлении программы выпуска. Цель предприятия, в данном случае, разработать такую производственную программу, при которой общая сумма затрат на производство запасов была бы минимальной при условии полного и своевременного удовлетворения спроса на продукцию. Рассмотрим решение задачи в простейшей ее постановке.

Введем переменные:

x_n — выпуск продукции в течение отрезка n некоторого планового периода; y_n— уровень запасов на конец отрезка n.

Спрос на продукцию для отрезка n обозначен P_n. Предполагается, что величины P_n для всех n отображены неотрицательными целыми числами, а все P_n известны. Предполагается также, что для каждого отрезка n затраты зависят от выпуска продукции x_n и уровня запасов y_n на конец отрезка n. Затраты на отрезке n обозначены $c_n(x_n, y_n)$.

На значения переменных x_n и j_n наложено несколько ограничений. Во-первых, предполагается целочисленность объемов выпуска:

$X_n = 0, 1, 2, 3...$ $(n=1, 2, ..., N)$.

Во-вторых, предполагается, что предприятию желателен нулевой уровень запасов на конец отрезка N:

$Y_N = 0$.

В-третьих, ставится условие полного и своевременного удовлетворения спроса в пределах каждого отрезка. Выполнение этого условия обеспечивается двумя ограничениями.

Первое состоит в том, что уровень запасов на конец отрезка n (y_n) складывается из уровня запасов на начало отрезка n (z_n) и объема выпуска продукции на отрезке $n(x_n)$ за вычетом объема реализации (спроса) на этом отрезке:

$$y_n = z_n + x_n - P_n. \qquad (7.66)$$

Согласно второму ограничению, уровень запасов на начало каждого отрезка и объем выпуска продукции в течение этого отрезка должны быть достаточно велики для того, чтобы уровень запасов на конец отрезка был бы неотрицательным. При этом требуется не только неотрицательность, но и целочисленность уровней запасов:

$y_n = 0,1,2,3...$ $(n=1,2, ...,N-1)$.

Число шагов при решении данной задачи определяется числом планируемых отрезков, которые нумеруются в порядке, противоположном естественному ходу процесса, т. е. вычисления строятся от конечного состояния к исходному. Конечным состоянием будет начало последнего отрезка планового периода, а исходным — начальный момент первого отрезка.

Состояние системы в начале любого отрезка определяет уровень запасов на начало отрезка. Для принятия решения об объеме выпуска нет необходимости знать, каким образом достигнут начальный уровень. Обозначив затраты, соответствующие оптимальной стратегии в течение n последних отрезков планового периода при начальном уровне запасов. z_n - $f_n(z_n)$, можно составить функциональные уравнения, описывающие поиск решения задачи:

$$f_n(z_n)=\min(c_n(x_n,z_n+x_n-P_n)+f_{n-1}(z_n+x_n-P_n),\\ n=1,2,\dots,N \qquad (7.67)$$

Начальный уровень запасов z_n рассматривается как переменная величина, полностью характеризующая состояние системы.

Рассмотрим числовой пример. Мебельная фабрика функционирует таким образом, что в течение одного квартала не может производить более 5 партий мебели. Максимальный объем хранения на складе — 4 партии.

$$\left.\begin{aligned} x_n&=0,1,\dots,5\\ z_n&=0,1,\dots,4\end{aligned}\right\}$$

Спрос на мебель, выпускаемую фабрикой, составляет 3 партии в квартал, т. е. $P_n=3$. Затраты фабрики складываются из затрат на производство $c(x)$ и стоимости содержания запасов, которая является линейной функцией объема запасов, $g(y)=2y$. В свою очередь, производственные затраты $c(x)$ можно рассматривать как сумму условно-постоянных затрат на операции по переналадке— 13 млн. руб. и пропорциональных затрат — 3 млн. руб. на каждую партию мебели. Значения функции производственных затрат представлены во вспомогательной табл. 7.13.

Табл. 7.13

Значения функции производственных затрат

$c(0)$	$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$	$c(4)$	$c(5)$
0	16	19	22	25	28

Определим оптимальную стратегию выпуска продукции и управления ее запасами на год.

Учитывая исходные данные и формулы (7.66), (7.67), функциональные уравнения задачи будут выглядеть следующим образом:

$$f_n(z_n)=\min(c(x_n)+2(z_n+x_n-3)+f_{n-1}(z_n+x_n-3)),\ n=1,2,3,4 \qquad (7.68)$$

$$z_n=0,1,2,3,4 \qquad (7.69)$$

$$3-z_u\le x_n\le\min(5,7-z_n) \qquad (7.70)$$

Ограниченность производственных мощностей не позволяет превысить 5, а ограниченность уравнения запасов на конец отрезка не позволяет превысить ($7-z_n$).

Начнем рассматривать процесс с последнего квартала года, обозначив его как I этап.

I этап. Значения $f_1(z_n)$ представлены в табл. 7.14. Они получены из следующих соображений. Так как на конец года предприятие не желает иметь запасы продукции, а спрос на продукцию в каждом квартале равен 3, то запасы на начало последнего (четвертого) квартала могут меняться от 0 до 3. Соответственно, если запас на начало квартала (z_1) равен 0, то, чтобы удовлетворить спрос, предприятие должно произвести 3 партии мебели ($x_1=3$). Если запас был равен 1 партии (z_1=l), то объем производства составит 2 партии ($x_1^{'}=2$) и т. д. Суммарные затраты для каждого из возможных состояний определятся в соответствии с формулой (7.68) только значениями $c(x)$, (см. табл. 7.13), т. к. ввиду отсутствия запасов на конец квартала, затраты на хранение равны $0(2z_1+x_1-P_1)=0$).

Т а б л. 7.14

Задача управления запасами (n=1)

z_1	x_1	$f_1(z_1)$ -
0	3	22
1	2	19
3	0	0

II этап. Данные, полученные при рассмотрении третьего квартала, представлены в табл. 7.15.

Табл. 7.15

Задача управления запасами (n = 2)

z_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	x_2	$f_2(z_2)$
0				44	46	48	3	44
1			41	43	45	34	5	34
2		38	40.	42	31		4	31
3	22	37	39	28			0	22
4	21	36	25				0	21

Рассмотрим структуру таблицы подробнее. В ней предусмотрено по одной строке для каждого возможного значения начального уровня запасов z_n и по одному столбцу для каждого значения выпуска продукции x_n. Каждое из представленных в клетке таблицы чисел представляет собой сумму затрат для рассматриваемого квартала и оптимальных затрат для всех последующих кварталов. Клетки, соответствующие некоторым недопустимым сочетаниям z_n и x_n, выделяют из рассмотрения. Например, если z_2=1, то спрос, равный 3 партиям, удастся удовлетворить только при условии $x_2 \geq 2$. Если z_2 = 4, то $x_2 \leq 2$, иначе нарушится условие нулевого уровня запасов на конец года, т. к. $P_1 = P_2 = 3$ и т. п.

Для клеток, участвующих в решении, расчеты проводятся в соответствии с формулой (7.68). Например, при z_2 = 0 и x_2 = 3 затраты на производство равны 22 (см. табл. 7.13), затраты на хранение: 2· (0 + 3 -3)=0. Так как запасы на конец третьего квартала (начало четвертого квартала) составят: 0 + 3 - 3 = 0, то из табл. 7.14 находим $f_1(0)$=22. В итоге, для такого сочетания z_2 и x_2 получим величину суммарных затрат: 22 + 0 + 22=44.

Еще пример. При z_2=1 и x_2 = 4 затраты на производство:

$c(4)=25$, затраты на хранение: $2(1+4-3)=4$, $f_1(1+4-3)=f_1(2)=16$. Суммарные затраты составят: $25+4+16=45$.

Для каждого фиксированного z_2 значение функции $f_2(z_2)$ представляет собой минимальную величину из всех значений суммарных затрат в клетках данной строки, а x_2 — соответствующий объем производства продукции.

III этап. Данные, полученные в результате расчетов на основе выражения (7.68) для второго квартала представлены в табл. 7.16.

Табл. 7.16

Задача управления запасами (n = 3)

z_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	x_3	$f_3(z_3)$
0				66	61	63	4	61
1			63	58	60	56	5	56
2		60	55	57	53	57	4	53
3	44	52	54	50	54		0	44
4	36	51	47	51			0	36

В рассмотрении вновь не участвуют некоторые сочетания z_3 и x3, т. к. x_3 может принимать значения лишь в соответствии с неравенствами (7.70). Величины суммарных затрат в клетках таблицы получены так же, как и на предыдущем этапе.

Например, при z_3=3 и x_3=4 производственные затраты: $c(4)$=25, затраты на хранение: 2(3 + 4 - 3)=8, величина f_2 (3 + 4 - 3), т. е. $f_2(4)$ получена на II этапе и равна 21. Суммарные затраты составят: 25 + 8 + 21 = 54. В каждой строке выбраны минимальные из всех значений суммарных затрат. Они составляют величину $f_3(z_3)$ для каждого z_3.

IV этап. Аналогично II и III этапам получены значения $f_4(z_4)$ (см. табл. 7.17).

Отметим, что для z_4 = 0 оптимальным являются два значения выпуска: 3 партии и 4 партии.

Табл. 7.17

Задача управления запасами (n=4)

z_4 \ x_4	0	1	2	3	4	5	x_4	$f_4(z_4)$
0				83	83	85	3,4	83
1			80	80	82	78	5	78
2		77	77	*79*	75	72	5	72
3	61	74	76	7.2	69		0	61
4	58	73	69	66			0	58

На этом этапе можно приступать к анализу деятельности предприятия. В нашем распоряжении оптимальные стратегии для каждого уровня запасов на начало планового года.

Допустим, на начало года на складе оставалось 2 партии мебели. Мы располагаем стратегией, которой соответствуют затраты на производство и хранение 72 млн. руб. Это единственно возможная стратегия деятельности с минимальными затратами. При начальном уровне запасов в 2 партии нужно в I квартале произвести 5 партий (см. табл. 7.17). Следовательно, при объеме реализации (спросе) 3 партии в квартал на начало II квартала будем иметь запас в 4 партии (z_n+x_n - P_n = 2 + 5 - 3 = 4). При таком уровне запаса во II квартале нет необходимости в дополнительном производстве мебели, т. е. x_3 = 0 (см. табл. 7.16). В таком случае, объем запасов на начало III квартала составит 1 партию (z_n+x_n - P_n = 4 + 0 - 3=1). Для этого уровня запасов в III квартале требуется объем производства 5 партий мебели. При этом запас на начало IV квартала составит 3 партии (z_n+x_n - P_n=1+5 - 3 = 3). Запас будет полностью реализован в течение квартала и на начало следующего года будет равен 0.

Рассчитав значения затрат на производство и хранение продукции для каждого этапа, проверим полученные результаты.

I этап F_1 =0+2·0=0,

II этап F_2 =28+2·3=34,

Ш этап F_3 =0+2·1=2,

IV этап F_4 =28+2·4=36

F_4(2)=F_1+ F_2+ F_3+ F_4=0+34+2+36=72

Сходный анализ можно провести и для других значений исходного уровня запасов на начало года.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Проблема оптимизации экономических решений всегда занимала умы ученых и инженеров, подвигала их на разработку новых алгоритмов экономико-математических методов (ЭММ) и создание быстродействующей вычислительной техники (ПЭВМ).

Дело в том, что если в какой-то задаче $m<n$ (где: m – число векторов-строк, а n – число искомых переменных), то такая задача имеет бесчисленное множество решений.

Использование экономико-математических методов и ПЭВМ позволяют найти оптимальное [1] решение среди множества решений.

Однако, следует помнить, что ЭММ и ПЭВМ это лишь средства – инструмент отыскания наилучшего решения. Никакие совершенные алгоритмы ЭММ и оперативная память компьютеров не заменят главных, творческих элементов подготовки нахождения оптимального решения:

- экономической (содержательной) постановки задачи, тем более, сложной экономической проблемы;
- разработки математической модели; ее преобразования до разрешимого вида;
- подбора и обработки достоверной информации;
- определения показателя (показателей) критерия[2] оптимальности;
- анализа полученного решения;
- проведения экономико-математического эксперимента.

Особенность и значение (содержательной) постановки задачи или проблемы заключаются в том, чтобы дальнейшее их моделирование было успешным, и для этого надо выполнить три правила, которые по мнению древних, являются признаком мудрости. Эти правила применительно к экономической (содержательной) постановке задач и проблем заключаются в следующем:

- учитывать главные свойства рассматриваемого объекта;
- - пренебрегать его второстепенными свойствами;
- уметь отделить главные свойства от второстепенных*⁾.

Содержательная постановка проблемы и ее дальнейшее моделирование будут успешными если эта работа выполняется специалистами хорошо знающими предмет моделирования (особенности отрасли, экономику и управление производством и т.п.), владеющие знаниями в области оптимального программирования и моделирования экономических процессов.

Первоначальная экономико-математическая модель (Э.-м.м.) в большинстве своем требует некоторых преобразований с тем, чтобы удовлетворяла использованию того или иного алгоритма ЭММ. Какие бы преобразования ни проводились с моделью она должна быть эквивалентна той первой, которая отражает сущность решаемой задачи.

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества:

- во-первых, позволяет быстро найти наилучшее решение;
- во-вторых, предоставляет возможность широкого экономико-математического эксперимента.

---

[1] optimus – лат. наилучший

[2] kriterion – греч. мерило, оценка

*⁾Б.Курицкий. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. Изд."BHV-Санкт-Петербург", СПб, 1997.

Проанализировав математически и экономически результат решения и удостоверившись в оптимальности его (посредством проведения независимого контроля на базе использования теории двойственности), можно приступить к проведению эксперимента.

Для этого необходимо дополнить или внести какие-то изменения в содержательное условие задачи, уточнить или откорректировать числовую информацию, внести соответствующие изменения в Э-м.м и провести повтор решения.

Содержательная постановка сложных экономических проблем и их решение всегда должны сопровождаться проведением экономико-математического эксперимента. Это позволит принять правильное решение по внедрению результатов расчетов.

В этой связи и в соответствие с изложенным во второй части книги рассматривается экономическая постановка и математическое моделирование некоторых основных задач и проблем из области оптимального текущего и перспективного планирования производства, которая достаточно обширна и многообразна. Она охватывает различные аспекты обеспечения и непосредственной промышленной деятельности предприятий и может рассматриваться как взаимообусловленный комплекс связанных между собой основных и подчиненных оптимизационных проблем и задач, решаемых на разных уровнях (отрасль, регион, объединение, предприятие) и видах (перспективное, текущее, оперативное) планирование. Здесь нами будут рассмотрены лишь некоторые, но наиболее важные проблемы:

- Методика постановки и математического моделирования типовых оптимизационных задач;
- Методология постановки и последовательное формирование математических моделей сложных производственных проблем;
- Оптимизация производственных программ комплексных лесопромышленных предприятий;
- Оптимизация перспективного планирования развития и размещения отдельных лесопромышленных комплексов (ЛПК);
- Оптимизация структуры и размеров производств регионального ЛПК.

Глава 8. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В практике планирования и управления на любом уровне (в корпорации, ассоциации, предприятиях или их подразделениях) имеют место множество различных оптимизационных задач, охватывающих различные сферы деятельности производства.

Среди этого множества можно выделить группы задач, которые наиболее часто встречаются в практике управления производством, и являющиеся первостепенными, от решения которых зависит принятие управленческих решений по большому кругу вопросов.

К таким задачам, прежде всего, следует отнести:

- Задачи по оптимизации программы выпуска продукции по ассортименту на отдельных предприятиях и входящих в состав различных объединений;
- Задачи оптимизации распределения разнообразных производственных заданий между полностью и частично взаимозаменяемыми исполнителями;
- Задачи по оптимизации раскроя материалов; поскольку от использования материальных и других видов производственных ресурсов в значительной степени зависит экономический результат производства.

Методика постановки и математического моделирования этих задач рассматривается в данной главе книги.

8.1. Особенности моделирования задачи оптимизации программы выпуска продукции

В практике управления производством наиболее распространенными следует считать задачи по определению оптимальной программы выпуска продукции по ассортименту. Они могут решаться как в перспективном, так и текущем планировании на уровне объединения (ассоциации или корпорации предприятий) или отдельного предприятия (цеха, участка). Это первостепенные задачи, от решения которых, наряду с другими факторам, в значительной мере зависит экономический результат промышленной деятельности предприятий.

Понятие оптимальной программы выпуска продукции будет разное в зависимости от уровня решения задачи.

Под оптимальной производственной программой предприятия, рассматриваемого как составное звено объединения (ассоциации, корпорации и т.п.), понимается такая программа выпуска продукции, при которой достигается максимальный экономический эффект по отношению объединения. В этом случае решается единая задача по объединению с дифференциацией по составляющим звеньям.

Рассматривая предприятие как отдельное самостоятельное подразделение, под оптимальной производственной программой следует понимать такую программу выпуска продукции, при которой достигается максимальная экономическая эффективность (max: суммарной прибыли, объема товарной продукции в действующих ценах и т.п.) для данного предприятия.

Простейшая модель задачи оптимизации производственной программы

В главе (1.2) была рассмотрена постановка стандартной задачи линейного программирования при максимизации целевой функции на примере задачи по определению оптимальной производственной программы. В этой задаче в качестве критерия оптимальности была принята прибыль от реализации продукции, а ограничениями служили ресурсы сырья, материалов и машинного времени.

Задача заключалась в определении количества продукции каждого вида x_j(j=1,2,…,n), которые обеспечивают максимальную суммарную прибыль от ее реализации, т.е. максимум целевой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (8.1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j \le b_r \quad r = 1,2,...,\varepsilon, \qquad (8.2)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = 1,2,...,n, \qquad (8.3)$$

где n – число видов продукции;

ε - число видов производственных ресурсов, расходуемых на выпуск продукции;

c_j – размер прибыли на единицу j-й продукции;

b_r – количество ресурсов r-го вида, которым располагает предприятие на планируемый период;

a_{rj} – норма расхода r-го ресурса на выпуск единицы j-й продукции.

Система ограничительных неравенств (8.2) означает, что на производство продукции всех видов может быть израсходовано любого вида производственных ресурсов не более того количества, которым располагает предприятие в планируемый период.

Здесь под производственными ресурсами понимаются: сырье, материалы, покупные полуфабрикаты, изделия, время работы производственного оборудования, денежные ресурсы, площади основных цехов, энергия, пар и др.

Рассмотрим особенности этой экономико-математической модели.

Во-первых, она относится к отдельному предприятию (или отдельному подразделению его цеху, участку) и может использоваться для определения, например, дополнительного выпуска продукции из свободных производственных ресурсов (b_r) или для целей экономического анализа (какая «открытая» программа выпуска продукции была бы наивыгоднейшей для данного предприятия в конкретных условиях?), служила бы ориентиром для заключения контрактов по поставкам продукции.

Во-вторых, в данной постановке учтен один вид ограничений (отражающих один фактор зависимости цели от условий) по наличию и использованию производственных ресурсов, определяющих возможности данного предприятия. Кроме того, в этой Э.-м.м. заложено одинаковое отношение (≤) ко всем видам производственных ресурсов; таким образом, искомая программа как бы ориентирована на «узкое место» в производственном процессе.

Далее, в этой простейшей Э.-м.м. по определению программы выпуска продукции по ассортименту не отражена связь с потребностью народного хозяйства в той или иной продукции, т.е. потребности внутреннего и внешнего рынков, отражающие возможности реализации продукции.

Экономико-математическая модель (8.1)-(8.3) линейная, однокритериальная. Следовательно оптимальное решение находится на пике множества. Естественно, целесообразнее решать подобные задачи как многокритериальные для отыскания области оптимальных решений. Методика постановки и решения многокритериальных задач оптимизации программы выпуска продукции будут рассмотрены ниже.

Видоизменим первоначальную Э.-м.м. задачи оптимизации программы выпуска продукции таким образом, чтобы приблизить ее к форме близкой для решения реальных производственных задач. С тем, чтобы видоизмененная Э.-м.м. служила основой для дальнейшей разработки подобных моделей применительно к конкретным производственным условиям, специфическим для той или иной отрасли промышленности.

Поскольку предприятия, в силу определенных условий, объединяются в различного рода ассоциации (корпорации и др. объединения), целесообразным уровнем оптимального планирования программы выпуска продукции на предприятиях является объединение (под ним будем понимать все формы объединений: корпорации, ассоциации и т.п.).

Рассмотрим такую постановку и Э.-м.м.

Э.-м.м. оптимизации производственной программы предприятий объединения

Задача заключается в отыскании искомых переменных x_{ji}, характеризующих количества j-ой продукции, вырабатываемой на i-х предприятиях объединения, максимизирующих целевую функцию

$$F(x_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}x_{ji}, \qquad (8.4)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rji} x_{ji} \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_{ri}; \begin{cases} r = \overline{1, \varepsilon}, \\ i = \overline{1, m} \end{cases} \tag{8.5}$$

$$x_{ji} \ge 0, \; j = 1,2,...,n; \quad i = 1,2,...,m. \tag{8.6}$$

где b_{ri} – фонд r-го производственного ресурса, которым располагает i-е предприятие в планируемом периоде;

a_{rji} – нормы расхода r-го ресурса на выпуск единицы (10 ед., комплекта) j-й продукции на i-м предприятии;

m – число предприятий в объединении.

Система ограничительных условий (8.5) отражает условия по наличию и использованию разных производственных ресурсов на предприятиях объединения. При этом, в систему могут включаться как уравнения (=), предусматривающие полное (100%) использования какого-то ресурса (например, эффективного машинного времени ведущей группы оборудования), так и неравенства с разными знаками (≤, ≥).

В неравенства типа

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r_1 ji} x_{ji} \le b_{r_1 i}, \tag{8.5.1}$$

для приведения к канонической форме вводится уравновешивающая переменная $x_{nm+r_1 i}$, характеризующая величину неиспользуемой части ресурса r_1 на i-м предприятии $- x_{nm+r_1 i}$, и условие (8.5.1) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r_1 ji} x_{ji} + x_{nm+r_1 i} = b_{r_1 i}; \begin{cases} r_1 = \overline{1, \varepsilon_1}, \\ i = \overline{1, m} \end{cases} \tag{8.5.1'}$$

В неравенства типа

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r_2 ji} x_{ji} \ge b_{r_2 i}, \tag{8.5.2}$$

вводится уравновешивающая переменная $- x_{nm+r_2 i}$ (с коэффициентом –1), характеризующая дополнительную величину ресурса r_2 на i-м предприятии сверх фонда $b_{r_2 i}$, необходимую для обеспечения оптимального варианта программы выпуска продукции. Условие (8.5.2) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r_2 ji} x_{ji} - x_{nm+r_2 i} = b_{r_2 i}; \begin{cases} r_2 = \overline{1, \varepsilon_2}, \\ i = \overline{1, m} \end{cases} \tag{8.5.2'}$$

Посредством изменения условий (8.5) и внесения дополнительных корректив в постановку задачи, проводится как бы экономический эксперимент многоразового решения одной и той же задачи с целью отыскания лучшего, приемлемого варианта для внедрения в производство.

В тех случаях, когда изыскание дополнительных ресурсов $r_2 i$ связано с необходимостью, например, расширения производственных площадей, приобретением и установкой дополнительного оборудования на каких-то операциях и т.п., в модель задачи (8.4 – 8.6) вводится дополнительное условие по наличию и использованию денежных средств на эти цели

$$\sum_{r_2=1}^{\varepsilon_2}\sum_{i=1}^{m} d_{r_2 i} x_{nm+r_2 i} \le D. \qquad (8.7)$$

Здесь D – денежные средства объединения, предназначенные на расширение производства и приобретение оборудования;

$d_{r_2 i}$ - денежные вложения на единицу приращения ресурса r_2 на i-м предприятии.

Условие (8.7) в модель задачи может быть включено в несколько ином виде, если собственных средств D^0 недостаточно:

$$\sum_{r_2=1}^{\varepsilon_2}\sum_{i=1}^{m} d_{r_2 i} x_{nm+r_2 i} - y = D^0. \qquad (8.7')$$

Здесь, искомая переменная y будет характеризовать потребность в заемных денежных средствах.

Задачи по определению оптимальной программы выпуска продукции относятся к классу *ассортиментных задач*.

В Э.-м.м. этих задач, помимо ограничений по использованию производственных ресурсов (8.5), необходимо предусматривать ограничения по ассортименту выпускаемой продукции (по соотношению выпуска тех или иных видов продукции, выполнению обязательств по поставкам и т.п.).

Однако, первый вариант решения задачи должен предусматривать условие «открытого плана» выпуска продукции $x_{ji} \geq 0$ для всех $j=1,2,\ldots,n$ и $i=1,2,\ldots,m$. Это позволит установить наивыгоднейший вариант программы объединения, без учета обязательств по поставкам. Это необходимо для последующего заключения договорных обязательств.

После определения госзаказа и других обязательств по поставкам продукции проводится повтор решения задачи с включением в модель ограничений по ассортименту выпускаемой продукции. Рассмотрим некоторые из них.

В ряде производственных задач в исходных условиях может быть установлен (задан) объем выпуска какого-то одного или нескольких видов продукции, т.е. объем производства продукции, положим вида s, является фиксированным ($x_s=P_s$) и в интересах объединения дополнительный выпуск нецелесообразен. В этом случае в модель задачи вводится следующее ограничение:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{si} = P_s, \quad s = \overline{1,S}. \qquad (8.8.1)$$

В исходных условиях некоторых задач могут быть заданы нижние пределы производства какой-то продукции, например, вида l-$\underline{P_l}$ или верхние пределы - например, по продукции t-$\overline{P_t}$. Соответственно в систему ограничительных условий вводятся:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{li} \ge \underline{P_l}, \quad l = \overline{1,L} \qquad (8.8.2)$$

$$\sum_{t=1}^{\tau} x_{ti} \le \overline{P_t}, \quad t = \overline{1,\tau} \qquad (8.8.3)$$

В расширенном условии задачи, приведенном к канонической форме, уравновешивающая переменная $x_{li} \geq 0$ в условии (8.8.2) будут характеризовать выпуск продукции l на i-м предприятии сверх установленного минимума; в ограничениях (8.8.3) уравновешивающие переменные $x'_{ti} \geq 0$ вместе с основными x_{ti} будут характеризовать суммарный объем производства t-й продукции в пределах установленного верхнего объема производства.

В условии некоторых ассортиментных задач могут быть одновременно установлены нижний и верхний пределы объема производства продукции тех или иных видов. В ограничительные условия такой задачи войдут дополнительные двусторонние ограничения вида

$$\underline{P_k} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ki} \leq \overline{P_k}, \qquad k = \overline{1, K}, \tag{8.8.4}$$

которые сводятся к условиям (8.8.2) – (8.8.3).

Наконец, в исходных данных некоторых ассортиментных задач может содержаться условие комплектности в выпуске отдельных изделий (или деталей). Такие условия задачи чаще всего встречаются при установлении оптимальной программы выпуска продукции в цехах и на участках (в машиностроении, мебельной и деревообрабатывающей промышленности).

Предположим, что изделия j и l должны быть изготовлены в соотношении $\alpha : \beta$. Математически это может быть представлено в виде следующего выражения

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ji}}{\sum_{i=1}^{m} x_{li}} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{8.8.5}$$

или, что то же в разрешимом виде

$$\beta \sum_{i=1}^{m} x_{ji} - \alpha \sum_{i=1}^{m} x_{li} = 0. \tag{8.8.5'}$$

Нами рассмотрены основные виды и типы ограничительных условий задачи по определению оптимальной программы выпуска продукции по ассортименту на предприятиях объединения. В зависимости от конкретных производственных условий в системе ограничений могут быть учтены и другие факторы, влияющие на результат решения. Однако, следует предупредить читателя о том, что нельзя этим увлекаться. В условиях задачи должны быть учтены основные (определяющие) факторы, от которых коренным образом зависит решение поставленной проблемы (или задачи). Второстепенные факторы могут исказить результат решения, кроме того, усложнят и затруднят процесс решения. Необходимо учитывать только главное и отбрасывать все второстепенное. В этом и состоит искусство смысловой постановки проблемы или задачи.

Оптимизация производственной программы в многокритериальной постановке

Общий и особенно экономический результат решения любой проблемы зависит прежде всего от того, какие факторы и условия, как и в какой мере учтены при ее решении, какая и насколько достоверная информация заложена в условие, какие показатели использованы в качестве критерия оптимальности.

Еще ведутся дискуссии вокруг основных понятий оптимизации - таких как критерий оптимальности плана, согласование глобального и локального оптимумов, динамический аспект плана и др. Здесь мы их рассматривать не будем.

В оптимизации любой проблемы большое значение имеет выбор критерия (критериев) оптимальности. Ибо *под критерием оптимальности понимается* *показатель, выражающий меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения для сравнительной оценки возможных решений и выбора наилучшего из них.*

При решении разных проблем и задач в качестве критерия оптимальности используются различные экономические, технико-экономические и другие показатели: действующие оптовые цены, производственные затраты, прибыль, хозрасчетный доход, приведенные затраты, грузовая работа и др.

Целый ряд экономических задач без существенного ущерба может решаться с одним, наиболее подходящим для данных условий, критерием. Однако каждый показатель в конкретном случае использования имеет как свои преимущества, так и недостатки. Кроме того, как было показано в разделе, посвященном элементам теории математического программирования, оптимум, найденный по одному критерию, находится на пике множества. Тем самым ставит условия реализации оптимального решения в жесткие рамки. Чтобы сгладить влияние на результат решения проблемы какого-то одного показателя, целесообразно решать ее как многокритериальную задачу.

Существуют различные подходы к реализации многокритериального решения:

- оптимизируя по одному критерию (почему-либо признанному наиболее важным); остальные при этом играют роль дополнительных ограничений;
- посредством упорядочения заданного множества критериев и последовательной оптимизации по каждому из них, затем выбирают компромиссное решение;
- сведения многих критериев к одному комплексному с помощью балльных оценок, ранжирования и других способов сопоставления.

Наиболее сложный третий путь многокритериального решения - он связан с дополнительными трудностями подготовки обобщающего комплексного показателя. Однако и в нашей стране, и за рубежом (Б.И.Кузин - Россия, Ст.Стойков - Болгария и др.) он нашел применение.

Поскольку оценка промышленной деятельности предприятий и объединений осуществляется на основе системы показателей, то и критерий оптимальности определения производственной программы может представлять собой систему разнообразных научно-технических, экономических и производственно-технических требований.

Для учета разнообразных требований, предъявляемых к номенклатуре выпускаемой продукции, можно использовать различные способы сопоставления (бальные оценки, ранжирование и др.)

Следующий путь решения проблемы оптимизации производственных программ в многокритериальной постановке заключается в повторе решений с разными критериями (на max отдельных) (8.4) и заключительного решения на min суммарного отклонения от максимальных их значений.

Таким образом, находится вариант производственных программ предприятий объединения, обеспечивающий наибольшее приближение к экстремумам нескольких целевых функций (нескольких критериев).

Минимизация суммарных отклонений от max значений целевых функций по отдельным критериям (в заключительном варианте решения проблемы) осуществляется на min функции

$$W = \sum_k \left(\alpha_k \frac{\overline{G_k} - F_k(x_{ji})}{\overline{G_k}} \right) \qquad (8.9)$$

здесь: $\overline{G_k}$ - максимальное значение (или min в других постановках) целевой функции по соответствующему критерию оптимальности -*k*.

$$\overline{G_k} = \max F_k(x_{ji}); \qquad (8.10)$$

$F_k(x_{ji})$ - значение целевой функции по критерию - *k*, при решении задач на максимум смежного критерия;

α_k - весовой коэффициент того или иного критерия оптимизации.

Величина весового коэффициента (α_k) может быть одинаковой для разных критериев и разной в зависимости от значимости тех или иных показателей для данных производственных условий.

В то же время, для всех вариантов принимаемых решений должно соблюдаться условие

$$\sum_k \alpha_k = 1. \qquad (8.11)$$

На этот подход к решению данной проблемы в многокритериальной постановке нас привела работа ученых ЦЭМИ АН СССР (Борисова Э.П. и др.,1985), посвященная для несколько иных задач линейного программирования.

8.2. Экономико-математическое моделирование оптимизационных распределительных задач

В практике планирования и управления производством на разных этапах и уровнях встречается большая группа задач, связанных с нахождением плана распределения производственного задания по выпуску продукции (или выполнению работ) между какими-то исполнителями (предприятиями, цехами, участками, бригадами; наконец, между отдельными машинами, станками); задачи по распределению машин, рабочих по видам работ; земельных участков - под посев или посадки разных культур и т.п.

Эта группа задач в литературе получила название *распределительных нетранспортных оптимизационных задач*. В 5.5 нами была сформулирована одна из таких задач (5.28-5.31) с целью рассмотрения одного из методов ее решения (метода Малкова).

Поскольку эта группа задач обширна и многообразна рассмотрим методику экономико-математического моделирования некоторых типов распределительных нетранспортных задач.

Оптимизация распределения задания по производству продукции между исполнителями

Экономическое содержание задачи. Известно производственное задание по выпуску продукции (или выполнению работ) - P_j; j=1,2,…,n, которое следует распределить между взаимозаменяемыми исполнителями (положим, машинами и т.п.) таким образом, чтобы это задание было выполнено с max экономическим эффектом.

При этом, полагаем, что любая продукция (или работа) может производиться у любого исполнителя (на любой машине)

В условии задачи *известны*: фонд эффективного рабочего времени каждого исполнителя в планируемом периоде - b_i; i=1,2,…,m; нормы затрат эффективного рабочего времени на производство единицы продукции (или выполнение ед.работы) - q_{ij}; (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n), а также известны показатели прибыли от реализации разной продукции выработанной разными исполнителями - c_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n). Исходная информация представлена в табл.8.1.

Табл.8.1

Исполни-тели	Фонд эф. рабочего времени, ч	Нормы затрат Э.Р.В. прибыль от реализации ед. продукции
		1 … j … n
1	b_1	$Q = \lfloor q_{ij} \rfloor_{m\times n}$ $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{m\times n}$
…………………..	…………………………..	
i	b_i	
…………………...	…………………………..	
m	b_m	
Производственное задание		P_1 … P_j … P_n

В качестве критерия оптимальности здесь приняты показатели прибыли от реализации продукции. В других постановках распределительных нетранспортных задач в качестве критерия могут быть приняты и другие показатели: доход, цены, затраты на производство и др.

Математическая модель задачи.

Поскольку в задаче требуется установить задание по производству продукции каждому из исполнителей, в качестве искомых переменных приняты - x_{ij} (при i=1,2,…,m; j=1,2,…,n), характеризующие количество j-й продукции вырабатываемое i-м исполнителем.

Матрица искомых переменных

$$X = \lfloor x_{ij} \rfloor_{m\times n}$$

будет характеризовать искомый план распределения производственного задания.

Уравнение целевой функции

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \max \qquad (8.12)$$

характеризует суммарную прибыль от реализации продукции в заданных объемах; при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \le b_i; i = \overline{1,m}, \qquad (8.13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = P_j; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (8.14)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad \begin{cases} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (8.15)$$

Система линейных неравенств (8.13) характеризует условие, что суммарные затраты эффективного рабочего времени на производство продукции всех видов у каждого из исполнителей не должны превышать фонда времени, которым располагают исполнители в планируемом периоде.

При приведении к канонической форме

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} + x_{mn+i} = b_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.13'}$$

уравновешивающая (дополнительная) переменная $x_{mn+i}>0$ в решении задачи будет характеризовать недоиспользованную часть фонда эффективного рабочего времени у того или иного исполнителя. *По величине этих переменных оценивают напряженность производственного задания.*

Система линейных уравнений (8.14) характеризует условие непременного (100%) выполнения

производственного задания по всем его видам.

Может быть другой вариант решения этой задачи.

Представим ограничительные условия в несколько измененном виде:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} = b_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.16}$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq P_j; \quad j = \overline{1,n}, \tag{8.17}$$

В этом варианте решения задачи предусматривается полное использование фонда эффективного рабочего времени у каждого исполнителя.

При приведении условия (8.17) к канонической форме

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x_{mn+j} = P_j; \quad j = \overline{1,n}, \tag{8.17'}$$

дополнительная переменная $x_{mn+j}>0$ в оптимальном решении будет характеризовать возможный выпуск продукции того или иного вида сверх задания P_j.

Рассмотрим еще некоторые особенности постановки и решения этой распределительной нетранспортной задачи.

В условии задачи предполагается, что исходные показатели параметров, b_i, q_{ij} и P_j для всех i=1,2,…,m и j=1,2,…,n совместны, следовательно задача имеет решение.

Однако, в практике планирования и управления может оказаться, что исходная информация по показателям b_i, q_{ij} и P_j (i=1,2,…,m и j=1,2,…,n), скажем, недостаточно "увязана" (условие несовместно) и задача, в следствие этого, может оказаться неразрешимой, - не имеет опорного решения.

В этом случае следует повторить решение задачи изменив знак ограничения (8.13) на противоположенный

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} \geq b_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.18}$$

при

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = P_j; \quad j = \overline{1,n}, \tag{8.19}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \begin{cases} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{8.20}$$

Тогда в решении задачи по этой э.-м.м. дополнительная переменная $x_{mn+i}>0$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} - x_{mn+i} = b_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.18'}$$

будет характеризовать недостающую часть фонда эффективного рабочего времени у этого или иного исполнителя для обеспечения полного (100%) выполнения производственного задания.

Как поступить в подобной ситуации подскажут обстоятельства.

В условии задачи полагалось, что любая продукция (или работа) может производиться у любого из исполнителей, таким образом рассматривался вариант задачи с полностью взаимозаменяемыми исполнителями.

Однако, в практике работы подчас имеет место не полная, а частичная взаимозаменяемость исполнителей. Положим, какие-то виды продукции (или работы) не могут производиться (выполняться) какими-то исполнителями (машинами). Для примера, положим продукция k по технологии или другим причинам, не может вырабатываться на i-й машине, а продукция l - на машине m. Следовательно, на переменные x_{ik} и x_{ml} налагаются строгие ограничения: в оптимальном решении они должны принять значения: x_{ik}=0, x_{ml}=0.

Для того, чтобы обеспечить это условие соответствующие показатели критерия оптимальности в целевой функции (8.12) следует принять равными: c_{ik}=-M и c_{ml}=-M, где -"M" есть число меньше другого сколько угодно малого числа.

При максимизации целевой функции (8.12) переменные x_{ik} и x_{ml} примут нулевое значение.

Рассмотрим еще один пример экономико-математической постановки распределительной нетранспортной задачи.

Оптимизация распределения земельных участков под посадки разных культур

Условия задачи. Имеются участки земли определенной площади, различающиеся между собой плодородием. На участках планируется проводить посадки (или посев) с тем, чтобы вырастить различные культуры в заданных количествах (объемах).

Известны: задание по выращиванию различных культур (на период зрелости) - P_k (k=1,2,…n); площади (в га) участков различного плодородия - S_i (i=1,2,…,m); запас (урожай) на 1 га в спелом возрасте - q_{ik} (м^3 или тонн. на га); денежные затраты за весь период выращивания в расчете на 1 га - c_{ik} (k = 1,2,…n).

Вся исходная информация представлена в табл.8.2.

Табл.8.2

<table>
<tr><td rowspan="2">NN
зем.участков</td><td rowspan="2">Площадь
участка, га</td><td>Запас культур на га.
Денежные затраты у.ед. на га</td></tr>
<tr><td>1 … k … n</td></tr>
<tr><td>1</td><td>S_1</td><td rowspan="5">$Q = [q_{ik}]_{m \times n}$

$U = [u_{ik}]_{m \times n}$</td></tr>
<tr><td>………………..</td><td>…………………
……..</td></tr>
<tr><td>i</td><td>S_i</td></tr>
<tr><td>………………...</td><td>…………………
……..</td></tr>
<tr><td>m</td><td>S_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание по выращиванию</td><td>P_1 … P_k … P_n</td></tr>
</table>

В задаче требуется распределить земельные участки под посадки (посев) различных культур таким образом, чтобы получить урожай в соответствие с заданием, при этом суммарные денежные затраты за весь период выращивания были бы минимальными.

Если через x_{ik} обозначить площадь i-го участка земли, отведенную под посадки (посев) k-й культуры, то задача будет заключаться в отыскании неотрицательных значений переменных x_{ik} минимизирующих целевую функцию:

$$F(x_{ik}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}x_{ik} \tag{8.21}$$

при условиях:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = S_i; \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ik}x_{ik} \geq P_k; \quad k = \overline{1,n},$$

$$x_{ik} \geq 0; \quad \begin{cases} i = \overline{1,m}, \\ k = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{8.23}$$

Содержание ограничительных условий (8.22) заключается в том, что площади земельных участков должны быть использованы (засеяны) полностью.

Содержание линейных неравенств (8.23) заключается в следующем. Суммарный объем урожая каждой культуры (высаженной на всех m участках) должен быть не менее задания.

Уравновешивающая переменная x_{mn+k}>0 в условии (8.23') приведенном к канонической форме.

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ik}x_{ik} - x_{mn+k} = P_k; \quad k = \overline{1,n}, \tag{8.23'}$$

в решении задачи будет характеризовать дополнительный (сверх задания P_k) сбор урожая по k-й культуре.

Если на каких-то участках земли по агрономическим (лесоводственным) или другим соображениям не могут высаживать какие-то культуры, читатель знает (из предыдущего изложения) как надо поступить. Разница заключается лишь в том, что при минимизации целевой функции F критерий оптимальности при соответствующих переменных принимается U=M, где M - есть число больше всякого другого сколько угодно большого числа.

8.3. Экономико-математическое моделирование задач оптимизации раскроя материалов

Лесоперерабатывающая промышленность относится к материалоемким отраслям, так как в структуре себестоимости более половины всех затрат на производство продукции приходится на затраты по сырью и материалам. Поэтому проблема оптимального использования сырья и материалов для лесоперерабатывающей промышленности является одной из основных в борьбе за повышение эффективности производства.

Лесоперерабатывающие предприятия в больших количествах потребляют различное сырье и материалы, большая масса которых подвергается раскрою, прежде чем поступит в основное производство. Так, на деревообрабатывающих предприятиях производится раскрой на заготовки и детали древесностружечных и древесноволокнистых плит (ДСП и ДВП), фанеры, текстурной бумаги, пиломатериалов и др.

В ряде случаев раскрою подвергается вырабатываемая продукция, прежде чем она будет отгружена потребителю. Например, на целлюлозно-бумажных предприятиях производится раскрой бумаги (точнее - бумажного полотна) на листы и рулоны.

В настоящее время на лесоперерабатывающих предприятиях отходы при раскрое сырья и материалов составляют еще не малую долю, если раскрой сырья и материалов производится без определения оптимальных вариантов.

Для раскроя материалов обычно составляют несколько вариантов (карт) раскроя; выбирают из них те, которые дают меньше отходов, и по этим вариантам выполняется раскрой материалов. Однако, для оптимизации раскроя по двум параметрам листового материала имеется программное обеспечение и на этот счет.

В настоящее время математические методы позволяют оптимизировать раскрой и тем самым максимально сократить отходы раскраиваемых сырья и материалов[1].

Рассмотрим особенности постановки задачи на примере раскроя *древесностружечных плит* (ДСП)*

Оптимизация раскроя ДСП стандартного размера

Пусть имеются ДСП стандартных размеров, из которых необходимо нарезать m различных по размеру заготовок и деталей для производства мебели. ДСП определенного размера может быть раскроена n способами (вариантами). По каждому из возможных вариантов раскроя составляется соответствующая карта раскроя, из которой видно, что при j-м (j=1,2,…,n) способе раскроя из одной плиты получается определенное количество (обозначим через a_{tj}) заготовок t-го (t=1,2,…,τ) вида (размера).

По картам раскроя устанавливается также величина отходов (площадь, вес, стоимость) при раскрое одной плиты j-м способом (обозначим - c_j).

В задании на раскрой должно быть указано общее количество заготовок каждого t-го вида (размера) - P_t, которое необходимо нарезать из плит, поступивших в раскрой.

В задаче требуется отыскать оптимальный план раскроя ДСП, обеспечивающий минимальные отходы (или минимальный расход раскраиваемых материалов), при условии выполнения задания по выходу заготовок. Иными словами, задачу можно сформулировать так: *определить какое количество ДСП следует раскраивать по каждому из возможных вариантов x_j с тем, чтобы нарезать заданное число заготовок каждого вида,* при этом суммарные отходы (или суммарный расход плит) должны быть минимальными. Следовательно, данная задача заключается в следующем.

Требуется найти неотрицательные значения переменных x_j, минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (8.24)$$

при условиях:

[1]Впервые задачи раскроя промышленных материалов были поставлены академиком Л.В.Канторовичем как ассортиментные задачи на максимум выхода некоторого количества выкраиваемых заготовок из заданного количества сырья

(см.Кантарович Л.В., Залгаллер В.А. «Расчет рационального раскроя промышленных материалов», Л., 1951).

*Задача по раскрою фанеры, шпона, листов железа и других листовых материалов формулируется подобным же образом. Несколько специфична постановка задачи по раскрою бумаги, поэтому далее эту задачу рассмотрим отдельно.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = P_t, \quad t = \overline{1,\tau}, \tag{8.25}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}. \tag{8.26}$$

В левой части уравнения основной системы ограничительных условий (8.25) стоит суммарный выход заготовок t-го вида по всем j-м вариантам раскроя; в правой части - задание по количеству заготовок вида P_t. Такое ограничение составляется по каждому виду заготовок. Таким образом, в ограничительной системе (8.25) число уравнений равно числу видов заготовок; a_{tj} и P_t - целые положительные числа, x_j могут быть и дробными, однако практически это целые числа.

Такой вариант решения, в котором ограничительные условия (8.25) представлены в виде линейных уравнений, полностью удовлетворял бы поставленной задаче, - обеспечивал бы полную *комплектность в производстве заготовок и деталей* для мебельного производства. Однако, задача со строгими линейными уравнениями в большинстве случаев окажется неразрешимой.

В этой связи ограничительные условия (8.25) следует представить в виде линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq P_t, \quad t = \overline{1,\tau}, \tag{8.27}$$

Они показывают, что в результате раскроя всех материалов должно быть нарезано заготовок t-го размера не менее заданного количества. Таким образом, здесь в результате раскроя всего материала, помимо задания по выходу заготовок, может быть некоторый выход заготовок тех или иных видов сверх программы. В оптимальном плане их число будут характеризовать значения уравновешивающих переменных x_{n+t}.

В канонической форме ограничения представлены как:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_{ij} - x_{n+t} = P_i; \quad i = \overline{1,\tau}, \tag{8.27'}$$

Чтобы ограничить величину уравновешивающих переменных, характеризующих выход заготовок сверх задания в модель задачи вводятся дополнительные ограничения (на каждый вид заготовок):

$$x_{n+t} \leq \gamma P_t; \quad t = \overline{1,\tau}; \tag{8.28}$$

здесь: γ - коэффициенты, характеризующие допустимые нормы превышения задания по выходу.

В этом случае размер задачи (по ограничительным условиям) удваивается.

Можно поступить иначе.

Чтобы ограничить величины x_{n+t} в модель задачи в дополнение к условиям (8.27) вводится всего лишь одно дополнительное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le R, \qquad (8.29)$$

где: R – количество материала поступающего в раскрой (в данном случае число ДСП)

Это неравенство (8.29) выражает условие, что не может быть раскроено (на заданный выход P_t (t=1,2,…,τ); число ДСП более R.

Число материала R, направляемого в раскрой может быть заранее вычислено

$$R = \frac{\sum_{t=1}^{\tau} S_t P_t + \Delta \sum_{t=1}^{\tau} S_t P_t}{S_{ДСП}} \qquad (8.30)$$

Здесь:

- в числителе полезная площадь всех (P_t) заготовок плюс плановый коэффициент отходов (Δ) умноженный на полезную площадь;
- в знаменателе – площадь одной ДСП стандартных размеров.

Может быть и более простой путь решения этой раскройной задачи.

В качестве критерия оптимальности, как уже указывалось выше, могут быть приняты и другие показатели, например, минимум общего расхода раскраиваемых материалов на выполнение производственной программы:

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j = \min. \qquad (8.31)$$

Эти два критерия должны привести к одинаковым оптимальным планам, так как экономия при раскрое всего материала должна совпадать с экономией на отходах. С точки зрения техники выполнения расчетов, наиболее удобным является критерий (8.31), так как в этом случае отпадает необходимость в подсчете величины отходов c_j по каждому варианту раскроя и коэффициенты целевой функции при всех неизвестных одинаково равны единице. Это несколько упрощает расчеты.

Оптимизация раскроя материала разных размеров

Рассмотрим еще одну особенность постановки раскройной задачи. Предположим, что в раскрой поступают разные по величине листы материала. Тогда лист каждого данного k-го размера может быть раскроен n_k вариантами (k=1,2,…,K). При j-м варианте раскроя из одного листа k-го размера может быть получено a_{tj}^k заготовок t-го вида и отходы составят c_j^k.

Предположим, что как и в предыдущей постановке, задано общее количество заготовок каждого вида P_t, которое должно быть получено в результате раскроя, и количество листов каждого размера, поступающих в раскрой, R_k.

В задаче необходимо найти количество листов каждого размера, которое следует раскроить по каждому из возможных вариантов x_j^k с тем, чтобы выход заготовок каждого вида был не менее заданного количества и суммарные отходы материалов были минимальными.

Следовательно, необходимо найти неотрицательные числа x_j^k, минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j^k \qquad (8.32)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{tj}^{k} x_j^k \geq P_t \qquad t=\overline{1,\tau} \tag{8.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^k \leq R_k; \qquad k=\overline{1,K} \tag{8.34}$$

$$x_j^k \geq 0; \quad j=\overline{1,n}; \qquad k=\overline{1,K} \tag{8.35}$$

Ограничения (8.34) могут быть заданы не по всем размерам раскраиваемых листов. Они могут быть и не заданы, а критерий оптимальности принят в виде уравнения (8.31), тогда модель задачи примет вид:

$$F=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \min, \tag{8.36}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{tj}^{k} x_j^k \geq P_t \qquad t=\overline{1,\tau} \tag{8.37}$$

$$x_j^k \geq 0; \quad j=\overline{1,n}; \qquad k=\overline{1,K'} \tag{8.38}$$

В описанной постановке задача оптимального раскроя листовых (двухмерных) материалов представляет общую задачу линейного программирования.

Линейные модели оптимального раскроя материалов позволяют решать также задачи на раскрой по одному измерению (раскрой досок, брусков, хлыстов деревьев, труб и т.п.), а также задачу на раскрой рулонов по ширине.

Следует заметить, что в ряде случаев идеальный раскройный план не может быть найден, поскольку не существует алгоритма перебора всей совокупности возможных комбинаций раскроя. Это относится особенно к тем случаям, когда общее количество вариантов раскроя чрезвычайно велико – необозримо.

При решении практических задач раскроя лиственных материалов совокупность исходных вариантов раскроя в ряде случаев целесообразно сузить. В частности, если число вариантов раскроя n значительно больше числа выкраиваемых заготовок τ, т.е. $n \gg \tau$, то из рассмотрения можно исключить варианты с отходами, превышающими некоторое заранее заданное число, т.е. явно неудовлетворительные варианты раскроя, которые не войдут в оптимальный план. После осуществления расчетов по оптимизации раскроя на суженном множестве наиболее выгодных вариантов раскроя с помощью признака оптимальности, основанного на свойствах оценок оптимального плана, можно проверить, в состоянии ли какой-либо из отсеянных вариантов улучшить найденный план.

Далее рассмотрим особенности постановки и моделирования *задачи оптимизации раскроя бумаги*

Оптимизация раскроя бумажного полотна

На целлюлозно-бумажных предприятиях вырабатываемая бумага разрезается на листы и на рулоны малых (потребительских) размеров.

В настоящее время в листовом виде выпускаются около 50 видов бумаги. Раскрой бумажного полотна на листы производится с помощью бумагорезальных машин, на рулоны – с помощью продольно-резальных станков. В целлюлозно-бумажной промышленности эксплуатируется большое число бумагорезальных машин с обрезной шириной полотна бумаги от 920 до 4560 мм. Поэтому задачу оптимизации раскроя бумаги необходимо решать применительно к форме, виду бумаги и типоразмеру бумагорезальных машин.

Математическая модель задачи оптимизации раскроя бумаги составляется на основании общей задачи линейного программирования и в общей форме походит на рассмотренные выше модели, однако имеет некоторые особенности:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min, \tag{8.39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq P_t; \quad t = \overline{1,\tau}, \tag{8.40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq R; \tag{8.41}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}. \tag{8.42}$$

В отличие от ДСП, ДВП и фанеры, общее поступление которых в раскрой измеряется в штуках плит и листов, бумага измеряется в тоннах. Это накладывает определенные особенности в толковании (естественно, и содержании) элементов модели.

Так, P_t в данном случае выражает количество бумаги в тоннах, которое необходимо нарезать в виде листов (или рулонов) t-го размера; x_j – обозначает вес бумаги в тоннах, раскраиваемой по j-му варианту раскроя.

Тогда c_j – доля отходов в общей площади полотна бумаги в рулоне, а a_{tj} – доля выхода листов (или малых рулонов) t-го размера из общей площади полотна бумаги в рулоне при j-м варианте раскроя.

Таким образом, c_j и a_{tj} составляют соответствующие доли единицы, за которую принята вся площадь полотна бумаги в рулоне, т.е.

$$c_j + \sum_{t=1}^{\tau} a_{tj} = 1. \tag{8.43}$$

В ограничительном условии (8.41) R обозначает производительность в тоннах бумагорезальной машины за планируемый отрезок времени (или продольно-резательного станка) при разрезании конкретного вида бумаги.

При принятых значениях элементов целевая функция F выражает суммарные отходы бумаги в тоннах при разрезании всей массы, поступившей в раскрой. Ограничительное условие (8.40) обеспечивает выход в тоннах листовой бумаги (или рулона) установленного формата в заданных количествах. Ограничительное условие (8.41) учитывает возможности бумагорезальной машины (или продольно-резального станка) при раскрое конкретного вида бумаги.

Подготавливая раскройную задачу к решению, прежде всего составляют возможные варианты раскроя. При раскрое рулонов бумаги следует учитывать число форматов бумаги, одновременно нарезаемых на машине. Имеются, например, двухформатные бумагорезальные машины. Это значит, что при раскрое бумаги на этой машине одновременно можно нарезать только два различных формата листов. Более двух различных форматов на двухформатной бумагорезальной машине можно нарезать только при одной длине отруба. Число возможных комбинаций различных форматов бумаги при резании определяется по формуле

$$c_{\tau}^{r} = \frac{\tau!}{r!(\tau - r)!} \tag{8.44}$$

где τ – заданное количество форматов бумаги;

r – число одновременно нарезаемых различных форматов.

Определение числа сочетаний различных форматов бумаги имеет очень существенное значение, при большом количестве разнообразных форматов.

С целью глубокого освещения методики раскройной задачи, рассмотрим некоторый числовой пример. Из всех раскройных задач, встречающихся на предприятиях лесозаготовительной и лесоперерабатывающей промышленности, более сложной задачей следует считать задачу по раскрою бумаги. Задачи по раскрою ДСП, ДВП, фанеры, пиломатериалов и брусков несколько проще. В связи с этим для демонстрации числового примера здесь нами выбрана задача по раскрою бумаги, при этом вся исходная информация взята из реальных условий работы одного из целлюлозно-бумажных комбинатов.

Пример. Положим на бумагоделательной машине вырабатывается писчая бумага плотностью 70 г/см^2 в рулонах, размер полотна которой по ширине равен 4,56 м, по длине – 7583 м. Раскрой бумаги на листы требуемых форматов производится на двухформатной бумагорезальной машине, установленной в потоке с бумагоделательной машиной. Известно месячное задание по выпуску листовой писчей бумаги определенных форматов (табл.8.3)

Табл.8.3

№ листов (форматов)	Размеры (формат) листов писчей бумаги, см	Месячное задание по выпуску бумаги, т**
1	60 x 84	51
2	60 x 90	71
3	70 x 84	88
4	70 x 108	42
	И т о г о:	252

В задаче необходимо найти оптимальный план раскроя полотна бумаги на листы заданных форматов, который обеспечивал бы выполнение задания с минимальными суммарными отходами бумаги.

Для подготовки задачи к решению прежде всего необходимо составить возможные варианты раскроя полотна бумаги на листы заданных форматов.

По формуле (8.44) определяется число возможных комбинаций различных форматов бумаги при резании:

$$C_4^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (4-2)!} = 4; \qquad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (4-2)!} = 6;$$

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (4-3)!} = 4.$$

C_4^3 меньше расчетного, так как на двухформатной бумагорезальной машине можно одновременно резать три различных формата в том случае, если у двух из них одинаковая длина. По этой же причине в данном конкретном случае отсутствует C_4^4.

Варианты раскроя полотна бумаги на листы обсчитывают следующим образом. Предположим, что из полотна бумаги размером 456 х 758300 см нарезаются листы только одного формата 60 х 84 см (1 вариант). При этом по ширине полотна может быть выкроено 7 листов (456/60), по длине – 9027 листов (758300/84). Отходы бумаги при раское одного полотна ее по этому 1 варианту составят 2731,2 см^2 (из расчета 456 х 758300 – 60 х 84 х 7 х 9027).

** По фактическим данным за 1 месяц для получения указанных количеств листовой писчей бумаги (без нахождения оптимального варианта раскроя) на ЦБК потребовалось разрезать 281,8 т бумаги. Отходы составили 29,8 т, т.е. 10,6%.

Подобные вычисления производятся по всем вариантам раскроя. Результаты вычислений сводятся в табл.8.4

Табл.8.4

Варианты раскроя полотна бумаги на листы и площадь отходов

№ лис-тов	Размер листов	Количество листов, нарезаемых по ширине и длине одного полотна, и площадь отходов при раскрое его по вариантам*							
		1	2	3	4	. . .	48	. . .	58
1	60x84	7x9027	-	-	-	. . .	1x9027	. . .	1x9027
2	60x90	-	7x8425	-	-	. . .	1x8425	. . .	-
3	70x84	-	-	6x9027	-	. . .	4x9027	. . .	4x9027
4	70x107	-	-	-	6x7021	. . .	-	. . .	1x7021
Площадь отходов, см^2		2731,2	2732	2731,2	2731,2	. . .	4247,87	. . .	3489,5

Из табл. 8.4 видно, что в данном примере количество возможных вариантов раскроя полотна бумаги равно 58. Следовательно, в математической модели в целевой функции (8.39) системе организаций (8.40) – (8.41) число неизвестных n равно 58.

Для нахождения элементов матрицы a_{tj} и коэффициентов целевой функции c_j составляется новая табл.8.5 по данным предыдущей таблицы. Как указывалось выше, площадь полотна бумаги принимается за единицу, и в долях от единицы рассчитывается выход листов по форматам и отходы по каждому варианту раскроя раздельно. Например, по первому варианту выход бумаги в виде листов размером 60 х 84 см составляет

$$\frac{60 \cdot 84 \cdot 7 \cdot 9027}{456 \cdot 758300} = 0{,}92101,$$

и отходов

$$\frac{2731{,}2}{456 \cdot 758300} = 0{,}07899.$$

Табл.8.5

Выход листов и отходов при резании полотна бумаги по вариантам раскроя (в долях от единицы, за которую принята площадь полотна бумаги 1 рулона)

№ лис-тов	Размер листов	Выход листов и отходов по вариантам раскроя (в долях от единицы)							
		1	2	3	4	. . .	48	. . .	58

1	60x84	0,921	-	-	-	. . .	0,1316	. . .	0,1316
2	60x90	-	0,921	-	-	. . .	0,1316	. . .	-
3	70x84	-	-	0,921	-	. . .	0,6140	. . .	0,6140
4	70x107	-	-	-	0,921	. . .	-	. . .	0,1535
Отходы		0,079	0,079	0,079	0,079	. . .	0,1228	. . .	0,1009

---

*Поскольку основная цель демонстрации примера заключается в изложении методики решения задачи и показа эффективности оптимальности раскроя материала, для сокращения размера таблицы здесь и в следующей таблице нами приводятся данные не по всем 58 вариантам раскроя, а лишь по 6.

При составлении математической модели задачи, значения коэффициентов a_{tj} и c_j берутся из табл.8.5, b_i - из табл.8.3.

$$F = 0{,}079x_1 + 0{,}079x_2 + 0{,}079x_3 + 0{,}079x_4 + ... + 0{,}1228x_{48} + ... + 0{,}1009x_{58} = \min$$

$$0{,}921x_1 + ... + 0{,}1316x_{48} + ... + 0{,}1316x_{58} \geq 51;$$

$$0{,}921x_2 .... + 0{,}1316x_{48} \qquad \geq 71;$$

$$0{,}921x_3 + ... + 0{,}6140x_{48} ..... + 0{,}6140x_{58} \geq 88;$$

$$0{,}921x_4 + ... + 0{,}1535x_{58} \geq 42;$$

$$x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 + ...x_{48} .... + x_{58} \leq 281{,}8$$

Затем составляется исходная симплексная таблица по общему правилу.

Для решения задачи использована типовая программа алгоритма симплекс-метода.

В результате решения были получена следующие значения:

$x_{59} = 26; \quad c_{59} = 0; \quad n = 59;$

$x_{28} = 39{,}9; \quad c_{28} = 0{,}0132; \quad n = 28;$

$x_{18} = 50{,}7; \quad c_{18} = 0{,}0132; \quad n = 18;$

$x_{33} = 0{,}9; \quad c_{33} = 0{,}07898; \quad n = 33;$

$x_{46} = 190{,}3; \quad c_{46} = 0{,}0132; \quad n = 46;$

$F = 3{,}8, \;\; N = 7.$

Эти цифры означают, что в данном примере по 18-му варианту раскроя надо разрезать 50,7 т бумаги, по 28-му варианту – 39,9 т, по 33-му варианту – 0,9 т и по 46-му варианту – 190,3 т. При этом раскрое отходы бумаги будут минимальными 3,8 т. Переменная x_{59}, равная 26 т, характеризует выход бумаги в листах размером 60 х 84 см сверх плана.

Нетрудно убедиться в эффективности оптимизации раскроя. Отходы бумаги при применении оптимального раскроя могут быть снижены на

$$\frac{29{,}8 - 3{,}8}{281{,}8} 100 = 9{,}24\%.$$

Учитывая, что 1% отходов вызван обрывами полотна бумаги в процессе размотки и резки на бумагорезальной машине и остатками деформированной бумаги на гильзах, непосредственно за счет оптимизации раскроя отходы бумаги сокращаются на 8,24% от всей массы бумаги, поступившей в раскрой.

Изложенная выше методика моделирования задачи оптимального раскроя листовых материалов и приведенные практические расчеты по раскрою бумаги показывают, что для решения этих задач требуется небольшой круг исходной информации. Сбор и подготовка ее к решению просты и требуют незначительного времени. Оптимальное решение отыскивается посредством симплексного метода с помощью ПЭВМ по стандартной программе. Таким образом, раскройные задачи не трудоемки, а эффект от нахождения оптимальных планов раскроя значительный.

Глава 9. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

9.1. Экономико-математическое моделирование программы выпуска продукции предприятиями лесопромышленного объединения

Особенности содержательной постановки проблемы

Задачи оптимального планирования производственной программы промышленной деятельности на любом уровне (предприятие, объединение, отрасль) заключаются в установлении объемов выпуска продукции по ассортименту, обеспечивающих максимальный экономический эффект производственной деятельности предприятия, объединения или отрасли в целом, в зависимости от уровня решения задачи.

Результат решения задачи зависит, прежде всего, от того, какие факторы и условия, как и в какой мере учтены при ее решении. Естественно, что определяющими факторами следует считать:

- во-первых, потребности народного хозяйства в отдельных видах сырья, материалов и готовой продукции, а также возможности реализации на внешнем рынке;
- во-вторых, производственные возможности предприятий (объединений, отрасли в целом) с точки зрения обеспеченности их сырьевыми, материальными, энергетическими, денежными и трудовыми ресурсами, наличия производственных мощностей и возможности их дальнейшего развития.

Для целей оптимального планирования производственных программ выпуска продукции лесопромышленными предприятиями, в дополнение к общим, необходимо учитывать отраслевые определяющие факторы:

- специфику запасов древесины по лесосырьевым базам и времени эксплуатации их;
- специфику сырья из древесины;
- возможные направления дальнейшего использования сырья и готовой продукции из древесины с учетом потребностей народного хозяйства и рынка;
- сложившийся состав и мощности лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств на том или ином уровне планирования;
- возможности развития (расширения действующих, строительства новых) производств;
- необходимость комплексного полного использования лесосырьевых ресурсов как первичных, так и отходов в качестве вторичного сырья.

Одним из важнейших факторов является характеристика лесосырьевых ресурсов. Дело в том, что запасы древесины по лесосырьевым базам и времени их эксплуатации значительно разнятся по преобладающим породам, степеням крупности и качеству.

Запасы древесины по каждой породе подразделяются на крупную четырех сортов, среднюю – четырех сортов, мелкую – двух сортов, дровяную-топливную и технологическую.

Таким образом по одной породе запас древесины подразделяется на 12 размерно-качественных групп. Положим, в сырьевой базе четыре преобладающие породы (сосна, ель, береза и осина), следовательно, запасы древесины дифференцированы по 48-ми породно-размерно-качественным (ПРК) группам. В то же время, по существующим

ГОСТам установлено из какой древесины (по ПРК группам) можно вырабатывать те или иные сортименты продукции, в зависимости от дальнейшего их использования. В приложениях 1-3 приведены таблицы, характеризующие возможные связи «качество древесины $\rightarrow$ сортимент».

Значительное разнообразие количественных сочетаний этих факторов еще в большей степени подтверждает многовариантность решения проблемы, следовательно, и необходимость оптимизации задач планирования производства вообще в лесной промышленности, и основной из них – оптимизации производственной программы выпуска продукции по ассортименту. Тем более это необходимо в условиях, когда «разброс» цен на продукцию различного назначения, выработанную из разной древесины (по ПРКгр.) колеблется $\approx$1:8 (по хвойной древесине) и $\approx$1:4 (по лиственной).

Лесопромышленные предприятия (ЛПП) объединяются в различного рода ассоциации, корпорации и холдинги. Далее эти формирования будем просто называть – объединения.

В этой связи, для определения программ выпуска продукции отдельными предприятиями объединения, решается единая задача оптимизации программы в целом по объединению с дифференциацией по его субъектам.

Проблема оптимизации программы выпуска продукции ЛПП объединения включает в себя отыскание комплексного ответа на следующие взаимосвязанные вопросы.

- Установление сортиментных планов лесозаготовительным производствам объединения по сырьевым базам ЛПП и пунктам примыкания. Здесь устанавливаются объемы заготовки сотриментов круглых лесоматериалов из отведенных в рубку запасов древесины, дифференцированных по ПРК группам в разрезе сырьевых баз по примыканию, для поставок круглых лесоматериалов за пределы объединения, обеспечения сырьем деревоперерабатывающих производств на нижних складах предприятий, обеспечения круглыми лесоматериалами собственных нужд ЛПП на капитальный ремонт и строительство лесовозных дорог и сооружений.
- Установление плана выпуска готовой продукции по ассортименту деревоперерабатывающими производствами ЛПП, исходя из заданий в целом по объединению, наличия производственных мощностей, количества и качества перерабатываемого сырья и существующих норм выхода продукции.
- В случаях несоответствия (или корректировки) заданий (обязательств по контрактам) в целом по объединению, с установленными ранее общими объемами производства, в решении задачи параллельно рассматривается вопрос расширения (или, наоборот, сокращения) общих объемов заготовки древесины по сырьевым базам с учетом примыкания (в пределах допустимой расчетной лесосеки), а также расширения действующих и строительства новых деревоперерабатывающих производств с установлением возможностей, целесообразности и размеров развития производств на нижних складах предприятий, при условии полного эффективного использования лесосырьевых ресурсов как первичных, так и отходов.

В общей постановке задачи оптимизации производственных программ выпуска продукции ЛПП объединения *считаются известными и заданными* следующие показатели:

- фонды производственных ресурсов на предприятиях объединения на планируемый период;
- нормы затрат ресурсов на единицу (десяток или комплект) продукции;
- обязательства объединения по номенклатуре, объему производства и поставкам продукции;
- допустимые нижние и верхние пределы производства продукции, по которой не предусматривается фиксированный объем;

- потребности в лесоматериалах ЛПП на капремонт и строительство;
- общие годовые объемы заготовки древесины по сырьевым базам предприятий с учетом примыкания;
- мощности (по переработке сырья) деревоперерабатывающих производств на нижних складах ЛПП объединения;
- денежные средства объединения и возможности привлечения заемных средств, предназначенные на расширение и реконструкцию производства, приобретение и установку оборудования.

В оптимизационных задачах большое значение имеет *выбор критерия оптимальности*. Напомним, что *под критерием оптимальности* понимается экономический, технический или технико-экономический показатель, закладываемый в условие задачи для суждения об оптимальности ее решения.

При решении разных проблем и задач в качестве критерия оптимальности используются различные экономические показатели: цены, прибыль, доход, затраты и др.

В данном случае, при решении проблемы оптимизации программы выпуска продукции по ассортименту наиболее подходящими являются показатели прибыли или дохода от производства и реализации продукции. Предпочтительным было бы решение с несколькими показателями – в многокритериальной постановке.

Решение столь сложных проблем, каковой является проблема оптимизации программы выпуска продукции, никогда не ограничивается одноразовыми расчетами.

Такие задачи решаются в несколько последовательных этапов.

Прежде рассчитывается так называемая «открытая программа», объемы выпуска продукции в которой определяются исходя из производственных возможностей предприятий, в предположении, что сбыт продукции не ограничен. При этом обязательства по поставкам продукции не учитываются.

Результаты таких расчетов являются исходной информацией для последующего заключения «выгодных для предприятий» контрактов по производству и поставкам продукции.

На следующем этапе расчетов определяется программа выпуска продукции предприятиями объединения с учетом обязательств по государственным заказам и контрактам.

Наконец, расчеты могут быть повторены после каких-либо уточнений, внесения новых условий, корректировки исходной информации и т.п. Окончательное решение принимается после соответствующего анализа повторных расчетов.

Далее последовательно рассмотрим эту проблему в годовом планировании применительно к предприятиям лесозаготовительного объединения. *Разработаем экономико-математическую модель оптимального планирования производственной программы промышленной деятельности всех взаимосвязанных производств ЛПП объединения*, в которой с достаточной полнотой были бы отражены специфические условия и особенности, присущие комплексным лесозаготовительным предприятиям.

Экономико-математическая модель

Напомним, что *экономическая сущность задачи* оптимального планирования производственной программы промышленной деятельности ЛПП объединения заключается в:

- -определении сортиментных планов лесозаготовительных производств объединения с дифференциацией по тяготению лесосырьевых баз к пунктам примыкания лесовозных транспортных путей;

- установлении направлений дальнейшего использования древесины и вторичного сырья из отходов раскряжевки и первичной деревопереработки;
- расчете плана выпуска готовой продукции по ассортименту по всем деревоперерабатывающим производствам, расположенным на нижних складах предприятий;
- исследовании возможностей и целесообразности расширения действующих и нового строительства производств.

В целях описания экономико-математической модели проблемы оптимизации производственной программы выпуска продукции ЛПП объединения примем следующие обозначения:

k – индекс ПРК группы древесины (деловой и дровяной), $k=1,2,\dots,\xi$;

i - индекс сырьевой базы (ЛПП), $i=1,2,\dots,m$;

j - индекс товарного сортимента, реализуемого в круглом виде (на сторону – j_1 и собственные нужды – j_2), $j=1,2,\dots,J$;

r – индекс сырьевого сортимента, реализуемого на сторону, - r_1 или вид деревоперерабатывающего производства (д/п) в ЛПП – r_2, $r=1,2,\dots,R$;

l – индекс вида готовой продукции д/п производств ЛПП, $l=1,2,\dots,L$;

k' - индекс вторичного сырья из используемой части отходов $k'=1,2,\dots,\xi'$.

Условные обозначения заданных показателей:

$q_{ki\rho}$ - запасы древесины по ПРК группам с дифференциацией по сырьевым базам и пунктам примыкания, отведенные в рубку на планируемый год;

P_j – объем заготовки j-го товарного сортимента круглых лесоматериалов в целом по объединению, соответственно P_{j_1} - для поставки за пределы его, $P_{j_2 i\rho}$ - на собственные нужды на соответствующем нижнем складе;

P_{r_1} - объем заготовки r_1-го сырьевого сортимента в целом по объединению для поставки за его пределы;

$M_{r_2 i\rho}$ - мощность по переработке сырья r_2-го д/п производства (цеха), расположенного на ρ-*м нижнем складе* i-го ЛПП;

P_{lr_2} - объем выпуска l-й продукции в r_2-х д/п производствах в целом по объединению.

Условные обозначения показателей критерия оптимальности:

$c_{c_1 ki\rho}$ - прибыль в руб./м^3 от реализации на сторону j_1 товарного сортимента круглых лесоматериалов, заготовленного из древесины k-й ПРК группы, в сырьевой базе i-го ЛПП, примыкающей к ρ-му нижнему складу;

$c_{c_2 ki\rho}$ - то же от реализации на собственные нужды;

$c_{r_1 ki\rho}$ - прибыль в руб./м^3 от реализации на сторону r_1-го сырьевого сортимента, заготовленного из k-й древесины в i-й сырьевой базе;

$c_{lr_2 ki\rho}$ - прибыль в руб./м^3 (*в пересчете на м^3 сырья*) от реализации l-й готовой продукции, выработанной из k-го сырья в соответствующем деревоперерабатывающем цехе – $r_2 i\rho$;

$c_{l'r_2'k'i\rho}$ то же из вторичного сырья - k'-х отходов.

Условные обозначения искомых переменных:

$x_{j_1 ki\rho}$ - объем заготовки j_1-го товарного сортимента круглых лесоматериалов из k-й ПРК группы древесины в i–й сырьевой базе, примыкающей к ρ-му пункту для поставки за пределы объединения;

$x_{j_2 ki\rho}$ - то же для использования на собственные нужды (капремонт и строительство);

$x_{r_1 ki\rho}$ - объем заготовки r_1-го сырьевого сортимента из k-й древесины в i-й сырьевой базе, ρ-го примыкания для поставки за пределы объединения;

$x_{lr_2 ki\rho}$ - то же для переработки в соответствующем д/п производстве на выпуск l-й продукции.

Матрицы значений искомых переменных

$$X = \left[x_{j_1 ki\rho}\right]_{J\times\xi\times m\times P,}$$
$$X = \left[x_{j_2 ki\rho}\right]_{J\times\xi\times m\times P,}$$
$$X = \left[x_{r_1 ki\rho}\right]_{R\times\xi\times m\times P,}$$
$$X = \left[x_{lr_2 ki\rho}\right]_{L\times R\times\xi\times m\times P,}$$

будут характеризовать сортиментные планы лесозаготовительных производств объединения с дифференциацией по сырьевым базам и пунктам примыкания, а также направления дальнейшего использования древесины.

Матрица значений искомых переменных

$$X = \left[x_{l'r_2'k'i\rho}\right]_{L'\times R'\times\xi'\times m\times P}$$

будет характеризовать объемы переработки отходов в качестве вторичного сырья для изготовления готовой продукции в соответствующих д/п производствах.

Уравнение целевой функции, отражающее суммарную прибыль в целом по объединению ЛПП от производственной деятельности всех лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств, имеет вид:

$$F(x) = \sum_{j,k,i,\rho}^{J,\xi,m,P} c_{j_1 ki\rho} x_{j_1 ki\rho} + \sum_{j,k,i,\rho}^{J,\xi,m,P} c_{j_2 ki\rho} x_{j_2 ki\rho} + \sum_{r,k,i,\rho}^{R,\xi,m,P} c_{r_1 ki\rho} x_{r_1 ki\rho} + \sum_{l,r,k,i,\rho}^{L,R,\xi,m,P} c_{lr_2 ki\rho} x_{lr_2 ki\rho} + \\ + \sum_{l',r_2',k',i,\rho}^{L',R',\xi',m,P} c_{l'r_2'k'i\rho} x_{l'r_2'k'i\rho} = \max. \quad (9.1)$$

На искомые переменные налагается условие неотрицательности и ограничения, отражающие основные условия и факторы, от которых зависит искомая производственная программа выпуска продукции ЛПП объединения.

Первый блок ограничений запишем по условию использования сырьевых ресурсов в строгом соответствии с годовым отводом леса в рубку, с дифференциацией запасов по ПРК группам и сырьевым базам; оно примет следующий вид:

$$\sum_{j_1=1}^{J} x_{j_1 ki\rho} + \sum_{j_2=1}^{J} x_{j_2 ki\rho} + \sum_{r_{1}=1}^{R} x_{r_1 ki\rho} + \sum_{l,r_2}^{L,R} x_{lr_2 ki\rho} + \sum_{l',r_2'}^{L',R'} x_{l'r_2'ki\rho} + \\ + \sum_{l'',r_2'}^{L'',R'} x_{l''r_2'ki\rho} = q_{ki\rho}, k = \overline{1,\xi}, \quad i = \overline{1,m}, \quad \rho = \overline{1,P}. \quad (9.2)$$

Содержание этих ограничений заключается в следующем: какие бы сортименты и в каком бы количестве ни заготовлялись в той или иной лесосырьевой базе ($i\rho$, при $i = \overline{1,m}$; $\rho = \overline{1,P}$) их объемы должны вытекать из запасов соответствующих лесосырьевых ресурсов ($q_{ki\rho}$), отведенных в рубку на планируемый период.

Эта система линейных уравнений (в соответствие с изложенным выше) лишь по одной сырьевой базе, тяготеющей к одному пункту примыкания лесовозной дороги, состоит из 48 уравнений (ξ=48), т.к. запасы древесины (q_k), отведенные в рубку, дифференцированы по 48 ПРК группам.

В дальнейшем будут рассмотрены некоторые особенности возможной корректировки этих условий.

Следующие системы ограничений сформулируем по условиям производства (заготовки) круглых лесоматериалов разного назначения.

Так, условия производства товарных (несырьевых) сортиментов круглых лесоматериалов для поставки за пределы объединения примут вид:

При расчетах «открытой программы»

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} x_{j_1 ki\rho} \geq \underline{0}, \quad j_1 = \overline{1,J}; \tag{9.3}$$

при повторных расчетах, учитывающих обязательства по поставкам

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} x_{j_1 ki\rho} \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} \underline{P}_{j_1}, \quad j_1 = \overline{1,J}. \tag{9.3'}$$

Здесь знаки (≥) относятся к тем разновидностям товарных сортиментов, по которым еще не полностью сформирован «портфель заказов».

Уравновешивающие переменные (x>0) в оптимальном решении будут характеризовать для какого объема соответствующего сортимента следует найти сферу сбыта.

При формировании других ограничений подобного типа (9.3 и 9.3') условия будем отображать одной системой.

Условия производства сырьевых сортиментов, направляемых за пределы объединения, примут вид

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} x_{r_1 ki\rho} \begin{Bmatrix} \geq \\ = \end{Bmatrix} \frac{0}{\underline{P}_{r_1}}, \quad r_1 = \overline{1,R}. \tag{9.4}$$

Условия обеспечения собственных потребностей на капремонт и строительство круглыми несырьевыми сортиментами лесоматериалов ЛПП с дифференциацией по нижним складам примут вид

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_2 ki\rho} = P_{j_2 i\rho}, \begin{cases} j_2 = \overline{1,J}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \tag{9.5}$$

Здесь $P_{j_2 i\rho}$ - потребность в планируемом периоде строительного леса (свай, столбов, опор и др.) на соответствующем нижнем складе.

Условия обеспечения первичным сырьем действующих, не предназначенных к расширению, мощностей $M_{r_2 i\rho}$ деревообрабатывающих (лесопильных, шпалорезных) производств с дифференциацией по нижним складам имеют следующий вид

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{lr_2 ki\rho} \leq M_{r_2 i\rho}, \begin{cases} r_2 = \overline{1,R}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \tag{9.6}$$

Ограничительные условия по производству готовой продукции (l) в цехах (r_2), перерабатывающих только первичное сырье, имеют вид

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} \eta_{lr_2 ki\rho} x_{lr_2 ki\rho} \begin{Bmatrix} \geq \\ = \end{Bmatrix} \frac{0}{\underline{P}_{lr_2}}, \begin{cases} l = \overline{1,L}, \\ r_2 = \overline{1,R} \end{cases}. \tag{9.7}$$

здесь $\eta_{lr_2 ki\rho}$ - нормы выхода (коэффициент полезного выхода) l-й готовой продукции в r_2-м деревоперерабатывающем производстве из k-го сырья в i-ом ЛПП.

Условия обеспечения первичным сырьем деревоперерабатывающих производств, с установлением возможностей и целесообразности их расширения или нового строительства имеют следующий вид:

по действующим производствам

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{lr_2ki\rho} - M'_{r_2}\, y_{r_2i\rho} \le M_{r_2i\rho}, \begin{cases} r_2 = \overline{1,R}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \tag{9.8}$$

по новым производствам

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{lr_2ki\rho} - M'_{r_2}\, y_{r_2i\rho} \le \underline{0}, \begin{cases} r_2 = \overline{1,R}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \tag{9.8'}$$

здесь M'_{r_2} - минимальная типовая мощность цеха по переработке первичного сырья; $y_{r_2i\rho}$ - искомая переменная, характеризующая коэффициент кратности типовой мощности, на которую налагается ограничение целочисленности решения y=0,1,2,3,…;

Условия образования на нижних складах ЛПП (при раскряжевке хлыстов, в лесопилении, шпалопилении и др.) отходов вида k', и дальнейшего использования их в других деревоперерабатывающих производствах (тары, щепы, стружки и др.) в качестве вторичного сырья, имеют следующий вид:

$$\sum_{k,j}^{\xi,J} \gamma_{k'j_1ki\rho} x_{j_1ki\rho} + \sum_{k,j}^{\xi,J} \gamma_{k'j_2ki\rho} x_{j_2ki\rho} + \sum_{k,r}^{\xi,R} \gamma_{k'r_1ki\rho} x_{r_1ki\rho} +$$

$$+ \sum_{k,r,l}^{\xi,R,L} \gamma_{k'r_2ki\rho} x_{lr_2ki\rho} + \sum_{k,r,l}^{\xi,R,L} \gamma'_{k'r_2ki\rho}\, x_{lr_2ki\rho} - \sum_{l',r_2'}^{L',R'} x_{l'r_2'k'i\rho} - x_{k'i\rho} = \underline{0}, \quad \begin{cases} k' = \overline{1,\xi}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \tag{9.9}$$

где γ - норма (коэффициент выхода) образования используемых отходов вида k' при раскряжевке и при переработке первичного сырья (γ') в деревоперерабатывающих производствах; $x_{l'r_2'k'i\rho}$ - искомая переменная, характеризующая объем отходов по видам и месту образования (по нижним складам) и направлениям дальнейшего использования; $x_{k'i\rho}$ - переменная, характеризующая объем отходов k', который не может быть использован на производство продукции l' ($l' = 1, L'$).

Условие обеспечения сырьем деревоперерабатывающих цехов (r_2'), перерабатывающих как круглое – первичное сырье, так и отходы, имеет вид

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{l'r_2'ki\rho} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'kl'} x_{l'r_2'k'i\rho} \le M_{r_2'i\rho},$$
$$r_2' = \overline{1,R'}, \quad i = \overline{1,m}, \quad \rho = \overline{1,P}. \tag{9.10}$$

где $\varphi_{k'kl'}$ - коэффициент, учитывающий взаимозаменяемость первичного сырья вторичным (отходами), если в производстве l'-й продукции они не равнозначны; φ≥1.

Условия (9.10) для случаев исследования возможностей, целесообразности и размеров расширения действующих и строительства новых деревоперерабатывающих производств имеют вид:

по действующим производствам

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{l'r_2'ki\rho} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'kl'} x_{l'r_2'k'i\rho} - M'_{r_2'} \, y_{r_2'i\rho} \le M_{r_2'i\rho}, \begin{cases} r_2' = \overline{1,R'}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \qquad (9.11)$$

по новым производствам

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{l'r_2'ki\rho} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'kl'} x_{l'r_2'k'i\rho} - M'_{r_2'} \, y_{r_2'i\rho} \le \underline{0}, \begin{cases} r_2' = \overline{1,R'}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}. \end{cases} \quad . \qquad (9.11')$$

Условия производства продукции l' для поставки ее за пределы объединения в соответствии с обязательствами (=) и возможностями дополнительного выпуска (≥) имеют вид:

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} \eta_{l'r_2'ki\rho} x_{l'r_2'ki\rho} + \sum_{k',i,\rho}^{\xi',m,P} \eta_{l'r_2'k'i\rho} x_{l'r_2'k'i\rho} \begin{Bmatrix} = \\ \ge \end{Bmatrix} \underline{P}_{l'r_2'}, \begin{cases} l' = \overline{1,L'}, \\ r_2' = \overline{1,R'} \end{cases} . \qquad (9.12)$$

Если по каким-то видам продукции l'' не установлено задание, в то же время ставится вопрос целесообразности выпуска ее, в модель вводится дополнительное условие вида

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} \eta_{l''r_2'ki\rho} x_{l''r_2'ki\rho} + \sum_{k',i,\rho}^{\xi',m,P} \eta_{l''r_2'k'i\rho} x_{l''r_2'k'i\rho} \ge 0, \; \begin{cases} l'' = \overline{1,L''}, \\ r_2' = \overline{1,R'}. \end{cases} \qquad (9.13)$$

В практике планирования работы ЛПП общий объем отпуска леса в рубку по годам не всегда является стабильным – имеет место планирование наращивания общих объемов заготовки древесины по сырьевым базам и пунктам примыкания $\Delta Q_{i\rho}$, что вызвано корректировками заданий производства продукции. Для этих условий ограничения (9.2) принимают следующий вид:

$$\sum_{j_1=1}^{J} x_{j_1ki\rho} + \sum_{j_2=1}^{J} x_{j_2ki\rho} + \sum_{r_1=1}^{R} x_{r_1ki\rho} + \sum_{l,r_2}^{L,R} x_{lr_2ki\rho} + \sum_{l',r_2'}^{L',R'} x_{l'r_2'ki\rho} +$$
$$+ \sum_{l'',r_2'}^{L'',R'} x_{l''r_2'ki\rho} - w_{ki\rho} = q_{ki\rho}, \qquad (9.2')$$
$$k = \overline{1,\xi}, \quad i = \overline{1,m}, \quad \rho = \overline{1,P}.$$

где $w_{ki\rho}$ - искомая переменная, характеризующая дополнительный отвод леса в рубку с дифференциацией по ПРК группам древесины, сырьевым базам и пунктам примыкания.

В этом случае в систему вводятся дополнительные ограничения, учитывающие условие, что общий дополнительный объем древесины, отводимой в рубку в той или иной сырьевой базе, должен находиться в пределах допустимой величины $\Delta Q_{i\rho}$, исходя из расчетной лесосеки:

$$\sum_{k=1}^{\xi} w_{ki\rho} \le \Delta Q_{i\rho}, \begin{cases} i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}, \end{cases} \qquad (9.14)$$

а также условия, учитывающие соотношение запасов древесины по ПРК группам:

$$\upsilon_{ki\rho} w_{ki\rho} - \upsilon_{\xi i\rho} w_{\xi i\rho} = 0, \begin{cases} k = \overline{1,\xi}, \\ i = \overline{1,m}, \\ \rho = \overline{1,P}, \end{cases} \quad (9.15)$$

где $\upsilon_{k(\xi)i\rho}$ - коэффициенты, учитывающие долю соответствующей ПРК группы в общем запасе древесины, отведенной в рубку на планируемый год в сырьевой базе с учетом пункта примыкания.

При наличии в экономико-математической модели ограничительных условий (9.8; 9.11; 9.2') ,предусматривающих определение возможностей и целесообразности расширения действующих и строительства новых мощностей, в модель вводится дополнительное ограничение по наличию собственных денежных средств D на развитие производств, которым располагает объединение ЛПП:

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} d_{i\rho} w_{ki\rho} + \sum_{r_2, r_2', i, \rho}^{R,R',m,P} d_{r_2(r_2')i\rho} M'_{r_2(r_2')} y_{r_2(r_2')i\rho} \le D \quad (9.16)$$

где $d_{i\rho}$ - удельные капвложения на развитие лесозаготовительного производства; $d_{r_2(r_2')i\overline{\rho}}$ - удельные капвложения на развитие деревоперерабатывающих производств по видам, пунктам примыкания и предприятиям.

Если собственных средств на развитие производств недостаточно, так чаще всего и бывает, условие (9.16) может быть представлено в виде:

$$\sum_{k,i,\rho}^{\xi,m,P} d_{i\rho} w_{ki\rho} + \sum_{r_2, r_2', i, \rho}^{R,R',m,P} d_{r_2(r_2')i\rho} M'_{r_2(r_2')} y_{r_2(r_2')i\rho} - Z = D \quad (9.16')$$

где Z – искомая переменная, характеризующая потребность в заемных денежных средствах.

Выше представлено описание ограничительных условий по использованию лесосырьевых ресурсов, производственных мощностей деревоперерабатывающих производств, выпуску круглых лесоматериалов и готовой продукции, которые являются определяющими при планировании производственной программы выпуска продукции.

Естественно, что в эту систему могут быть введены дополнительные ограничения, учитывающие конкретные специфические условия предприятий объединения, например, по использованию трудовых ресурсов, машин на валке и вывозке леса и др., если имеют место жесткие условия по наличию и использованию соответствующих производственных ресурсов.

Ограничительные условия по использованию фондов энергетических, трудовых ресурсов, эффективного рабочего времени работы машин на основных фазах производства и др. в общем виде могут иметь следующий вид:

$$\sum_{j,r,k}^{y,R,\xi} a_{tjrki\rho} x_{jrki\rho} \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} \underline{B}_{ti\rho}, \begin{cases} t = \overline{1,\tau}, \\ i = 1,m, \\ \rho = \overline{1,P} \end{cases}. \quad (9.17)$$

Здесь: $B_{ti\rho}$ - фонд t-го ресурса, которым располагает в планируемом периоде i –е предприятие в ρ-м подразделении (лесопункте, нижнем складе и т.п.);

$a_{tjrki\rho}$ - нормы затрат производственных ресурсов t-го вида на конкретном производстве.

В систему ограничений (9.17) могут включаться как уравнения, предусматривающие полное (100%) использование какого-то производственного ресурса, так и неравенства с разным знаком (≤, ≥). В решении задачи уравновешивающие переменные будут характеризовать величину недоиспользуемой части ресурса (при ≤) или дополнительного фонда ресурса (при≥), который необходимо изыскать для обеспечения оптимальной производственной программы.

Считаем необходимым еще раз предупредить читателя о том, что не следует загружать экономико-математическую модель второстепенными условиями.

Помните основное правило математического моделирования:

- учитывать только главное,
- отбрасывать все второстепенное.

По этой экономико-математической модели нами были выполнены расчеты оптимальной производственной программы предприятий ряда объединений ЛПП, тем самым подтверждена достоверность, разработанной методологии решения проблемы. Кроме того, анализ проведенных расчетов показал значительный экономический эффект оптимизации производственных программ ЛПП.

9.2. Формирование оптимальной производственной программы предприятиям объединения на основе согласования их интересов

Сложившиеся к настоящему моменту организационные структуры в лесной промышленности и частичный переход к рыночной экономике требуют некоторых корректив в процесс формирования оптимальных производственных программ. В настоящее время определенная часть объединений реорганизована в ассоциации. Изменение статуса объединений привело к тому, что основным звеном в лесной промышленности становится предприятие. Ассоциации же остается ограниченный круг координирующих функций. В этих условиях определение производственных программ должно исходить из экономических интересов каждого предприятия. Таким образом, оптимальные производственные программы предприятий, входящих в ассоциацию должны быть сформированы на основе такого распределения заказов, имеющихся у ассоциации, которое обеспечило бы максимальную эффективность от деятельности, прежде всего, каждого отдельного предприятия.

С этой целью, не меняя существа постановки проблемы и принципиальной методики ее решения (9.1), внесем некоторые частные коррективы в экономико-математическую модель (9.1 – 9.17) и последовательность расчетов.

В соответствии с принятой ранее методикой, проблема решалась на максимум суммарной прибыли от выпуска продукции всех видов по объединению в целом:

$$F(x) =^{*)} \sum_{j,r,k,i,\rho}^{J,R,\xi,m,P} c_{jrki\rho} x_{jrki\rho} + \sum_{l,r',k,i,\rho}^{L,R',\xi,m,P} c_{lr'ki\rho} x_{lr'ki\rho} = \max \qquad (9.18)$$

где: c – прибыль (в руб. на м^3) от реализации круглых лесоматериалов и готовой продукции;

x – объемы заготовки различных сортиментов круглых лесоматериалов и производства готовой продукции разных видов;

j,r – индексы сортиментов в круглых лесоматериалов ($j = \overline{1,J}$; $r = \overline{1,R}$);

---

*) Здесь приведена в сокращенной форме.

l – индекс вида готовой продукции, ($l = \overline{1, L}$);

k – индекс породно-размерно-качественной группы лесосырьевых ресурсов, ($k = \overline{1, \xi}$);

i – индекс сырьевой базы, ($i = \overline{1, m}$);

ρ – индекс пункта примыкания, ($\rho = \overline{1, \rho}$).

Система ограничений формировалась, исходя из учета основных условий и факторов, влияющих на формирование производственных программ: объемы и качественный состав лесосырьевых ресурсов, отводимых в рубку на планируемый период по сырьевым базам, с учетом примыкания; состав и мощности деревоперерабатывающих производств на нижних складах предприятий; госзаказ и другие обязательства объединения по поставкам круглых лесоматериалов и продукции из древесины и др. (9.2 – 9.17).

Естественно, что для отдельного предприятия оптимальной может считаться такая программа выпуска продукции, которая обеспечивает ему получение максимального экономического эффекта (прибыли) от реализации его продукции. Однако, этого нельзя обеспечить для всей совокупности предприятий, входящих в состав ассоциации. Поэтому каждое предприятие должно как бы поступиться частью своего частного возможного максимального эффекта ради достижения максимального суммарного эффекта по совокупности предприятий, входящих в ассоциацию. При этом каждое предприятие должно находиться в равных условиях по отношению остальных.

Для обеспечения этого условия нахождение оптимальной производственной программы предприятиям ассоциации осуществляется посредством многоразового повтора решения задачи. Так, на первом этапе решения устанавливается программа выпуска продукции предприятиями в условиях обеспечения максимально возможного эффекта (прибыли) первому предприятию, интересы остальных подчинены этому условию; на втором этапе – второму; на третьем – третьему предприятию и т.д.

На последнем этапе решений определяются программы выпуска продукции предприятиям объединения (ассоциации) с использованием дополнительного показателя критерия оптимальности, характеризующего минимальное суммарное отклонение экономического эффекта (суммарной прибыли) от максимальной его величины:

$$G(t_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \frac{\overline{Z_i} - F_i(x_i)}{\overline{Z_i}} \right) \to \min; \qquad (9.19)$$

$$F(x)^{*)} = \sum_{j,r,k,\rho}^{J,R,\xi,P} c_{jrki\rho} x_{jrki\rho} + \sum_{l,r',k,\rho}^{L,R',\xi,P} c_{lr'ki\rho} x_{lr'ki\rho} \quad ; \quad i = \overline{1, m} \qquad (9.20)$$

$$\overline{Z_i} = \max F_i(x_i);$$

α_i - весовой коэффициент,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

*) В сокращенной форме

Использование этого подхода для формирования оптимальной производственной программы лесопромышленным предприятием ассоциации позволит в наибольшей степени согласовать интересы всех предприятий, входящих в нее.

Таким образом, производственные программы предприятий будут сформированы таким образом, что их выполнение позволит в наибольшей степени приблизиться к тому максимуму расчетной прибыли, который могло бы получить каждое предприятие, если бы остальные предприятия действовали и в его интересах. Кроме того, отпадает необходимость перераспределения полученной прибыли, что было дополнительной проблемой при оптимизации планирования.

Проиллюстрируем изложенный выше подход на условном примере, чтобы убедиться в достоверности предложенного математического подхода.

Предположим, что три лесопромышленных предприятия А,В и С объединены в ассоциацию. За год предполагается заготовить, соответственно, 870, 830 и 820 т.м^3 древесины. Ассоциация имеет договоры на поставку 110т.м^3 хвойного пиловочника, 100 т.м^3 лиственного пиловочника, 180 т.м^3 хвойных и 80 т.м^3 лиственных балансов, 90 т.м^3 хвойного стройлеса, 150 т.м^3 лиственного стройлеса, 40 т.м^3 технологических и 230 т.м^3 топливных дров.

На предприятии А имеется один лесопильный цех, на предприятии В – два. Минимальная типовая мощность цеха – 120 т.м^3 (по распилу сырья). В соответствии с договорными обязательствами ассоциация в течении года должна поставить различным потребителям 210 т.м^3 хвойных пиломатериалов.

В задаче требуется определить программы выпуска продукции (по сортиментам круглых лесоматериалов и пиломатериалов) *предприятиями ассоциации* для выполнения договорных обязательств и производства продукции по «открытому» плану, обеспечивающих максимальную суммарную прибыль ассоциации, при условиях наибольшего согласования экономических интересов отдельных предприятий и использования их производственных возможностей (по наличию производственных мощностей, количественной и породно-размерно-качественной характеристике лесофонда отведенного в рубку на планируемый год и др.). Параллельно проанализируем возможности расширения лесопильного производства.

Для целей последующего сравнительного анализа, прежде рассчитаем оптимальную производственную программу предприятиям данного объединения по известной методике (9.2 – 9.17) и критерию (9.1).

В табл.9.1 представлены результаты соответствующих расчетов – производственная программа предприятиям, обеспечивающая максимальную прибыль по ассоциации в целом, без согласования экономических интересов отдельных предприятий.

Суммарная расчетная прибыль составит 46397 т.р., в т.ч. у предприятия А – 15317 т.р., предприятия В – 18287 т.р., предприятия С – 12793 т.р. Выявлены существенные дополнительные возможности на поставку хвойных балансов и стройлеса; объем производства пиломатериалов может составить 357 т.м^3 при условии создания еще по одному цеху на предприятиях А и В.

Далее решим эту же задачу, но уже раздельно на максимум суммарной расчетной прибыли каждого предприятия. В табл.9.2; 9.3; 9.4 представлены производственные программы, построенные в интересах предприятий А, В и С.

Табл.9.1

Производственная программа, соответствующая максимуму прибыли по ассоциации в целом

Наименование лесопродукции	Заказы на поставку т.м^3	Возможный объем производства, т.м^3			
		Всего	В том числе на		
			Предприятии А	Предприятии В	Предприятии С
Пиловочник хв.	110	110	-	-	110
Пиловочник лист.	100	490	200	90	200
Балансы хв.	180	500	190	140	170
Балансы лист.	80	80	-	80	-
Стройлес хв.	90	150	-	40	110
Стройлес лист.	150	320	150	20	150
Тех.дрова	40	40	-	40	-
Топ.дрова	230	230	90	60	80
Пиломатериалы хв.	210	357	142,6	214,4	-
Объем лесопиления (по распилу сырья)		600	240	360	-
Прибыль		46397	15317	18287	132793

Табл.9.2

Производственная программа, соответствующая максимуму прибыли предприятия А

Наименование лесопродукции	Заказы на поставку т.$м^3$	Возможный объем производства, т.$м^3$			
		Всего	В том числе на		
			Предприятии А	Предприятии В	Предприятии С
Пиловочник хв.	110	390	-	280	110
Пиловочник лист.	100	300	200	100	-
Балансы хв.	180	290	190	-	100
Балансы лист.	80	440	-	90	350
Стройлес хв.	90	90	-	-	90
Стройлес лист.	150	150	150	-	-
Тех.дрова	40	150	-	60	90
Топ.дрова	230	230	90	60	80
Пиломатериалы хв.	210	284,2	142,6	141,6	-
Объем лесопиления (по распилу сырья)		480	240	240	-
Прибыль		38948	15317	14901	8730

Прежде чем перейти к последнему этапу решения задачи (по критерию 9.19), проведем некоторый предварительный анализ полученных данных.

Максимум прибыли, которую могло бы получить предприятие А, если бы производственные программы всех предприятий ассоциации были сформированы в его интересах, составляет около 15317 т.р. (табл.9.2). Следовательно, несмотря на определенные различия в программах, предприятие А получит одинаковую величину прибыли вне зависимости от того, как будет построена работа ассоциации: либо на основе интересов всей совокупности (табл.9.1), либо – только предприятия А (табл.9.2).

Если же сформировать производственную программу ассоциации в интересах предприятия В, то станет возможным получить максимум прибыли на предприятии В, в существующих условиях, в размере 18779 т.р. (табл.9.3). Как видим, различие с уровнем прибыли, соответствующим программе, рассчитанной первоначально (табл.9.1), составляет 492 т.р. Из данных таблиц (9.1 и 9.3) следует, что предприятию В выгодно развивать лесопиление на собственных нижних складах, отказавшись от поставок пиловочного сырья на сторону. При этом ассоциация должна существенно увеличить заготовку (производство) хвойного пиловочника и лиственных балансов, сократив до возможного минимума выпуск лиственного пиловочника и несколько уменьшить производство других сортиментов.

Табл.9.3.

Производственная программа, соответствующая максимуму прибыли предприятия В

Наименование лесопродукции	Заказы на поставку т.м^3	Возможный объем производства, т.м^3			
		Всего	В том числе на		
			Предприятии А	Предприятии В	Предприятии С
Пиловочник хв.	110	340	230	-	110
Пиловочник лист.	100	100	-	90	10
Балансы хв.	180	280	-	180	100
Балансы лист.	20	540	200	-	340
Стройлес хв.	90	130	-	40	90
Стройлес лист.	150	250	150	100	-
Тех.дрова	40	170	80	-	90
Топ.дрова	230	230	90	60	80
Пиломатериалы хв.	210	285,2	70,8	214,4	-
Объем лесопиления (по распилу сырья)		480	120	360	-
Прибыль		37876	10367	18779	8730

Решая задачу для предприятия С, получим максимум прибыли, которую она могла бы получить, равным 12798 т.р. (табл.9.4), что на 5 т.р. меньше уровня соответствующего первой производственной программе.

Таким образом формируя производственные программы на основе максимума суммарной прибыли всей ассоциации (9.1), оказались достаточно выгодными условиями для деятельности предприятий А и С и невыгодные для предприятия В, которые недополучат почти 0,5 млн.р.

Табл.9.4

Производственная программа, соответствующая максимуму прибыли предприятия С

Наименование лесопродукции	Заказы на поставку т.м^3	Возможный объем производства, т.м^3			
		Всего	В том числе на		
			Предприятии А	Предприятии В	Предприятии С
Пиловочник хв.	110	490	230	160	100
Пиловоч ник лист.	100	300	-	100	200
Балансы хв.	180	180	-	-	180
Балансы лист.	80	290	200	90	-
Стройлес хв.	90	110	-	-	110
Стройлес лист.	150	300	150	-	150
Тех.дрова	40	140	80	60	-
Топ.дрова	230	230	90	60	80
Пиломатериалы хв.	210	283,6	70,8	212,8	-
Объем лесопиления (по распилу сырья)		480	120	360	-
Прибыль		39894	10367	16729	12798

Далее решим задачу с использованием дополнительного критерия оптимальности (9.19). При этом, исходя из предыдущих расчетов имеем: $\overline{z_1} = 15317$ т.р., $\overline{z_2} = 18779$ т.р., $\overline{z_3} = 12798$ т.р.: весовые коэффициенты примем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$.

Производственная программа предприятий (соответствующая заключительному этапу решения задачи), обеспечивающая максимум прибыли ассоциации, с учетом согласования экономических интересов отдельных предприятий, представлена в табл. 9.5.

Анализируя полученные результативные данные, следует обратить внимание на то, что суммарная прибыль и объемы производства продукции по ассоциации в целом (с учетом согласования интересов) совпадают с данными их значениями по первоначальному расчету (табл.9.1), т.е. программы в целом по ассоциации совпали. Различие состоит в перераспределении объемов выпуска отдельных сортиментов между предприятиями и, как следствие, в перераспределении прибыли. При общем максимуме суммарной прибыли по ассоциации, прибыль по предприятию А на 162 т.р. меньше возможного локального максимума, соответственно, по предприятию В – на 199 т.р., по предприятию С – на 136 т.р.

Табл.9.5.

Производственная программа, построенная на принципе согласования интересов предприятий

Наименование лесопродукции	Заказы на поставку т.м^3	Возможный объем производства, т.м^3			
		Всего	В том числе на		
			Предприятии А	Предприятии В	Предприятии С
Пиловочник хв.	110	110	-	-	110
Пиловоч ник лист.	100	490	200	90	200
Балансы хв.	180	500	179,2	162,4	158,4
Балансы лист.	80	80	80	-	-
Стройлес хв.	90	150	-	40	110
Стройлес лист.	150	320	70	100	150
Тех.дрова	40	40	10,8	17,6	11,6
Топ.дрова	230	230	90	60	80
Пиломатериалы хв.	210	357	142,6	214,4	-
Объем лесопиления (по распилу сырья)		600	240	360	-
Прибыль		46397	15155	18580	12662

Таким образом, все предприятия находятся примерно в равных условиях и ассоциация сохраняет максимально возможный уровень прибыли.

Приведенные расчеты подтверждают достоверность предположенного математического подхода согласования интересов отдельных предприятий при формировании производственной программы ЛПП объединения.

9.3. Оптимизация программы выпуска продукции в лесопильном производстве

Общая постановка проблемы

Сущность проблемы можно рассматривать, с одной стороны, как разработку оптимальных поставов раскроя пиловочных бревен на пиломатериалы; с другой, - при некотором усложнении экономико-математической модели, - как разработку оптимальной программы выпуска продукции в лесопильном производстве по ассортименту.

Дело в том, что в результате распиловки бревен может вырабатываться самая различная продукция: строительный брус, пиломатериалы разные по размерам и качеству, а также по назначению - экспортного и внутреннего потребления. Кроме того, часть стволовой древесины может далее направляться на производство щепы, которая в свою очередь может быть направлена на производство целлюлозы, бумаги или древесно-стружечных плит.

Наконец, в лесопильном производстве всегда имеют место отходы в виде коры, опилок, реек, кусковых обрезков. Рейки и обрезки также могут использоваться на производство щепы. Из коры и опилок могут производиться высококачественные, водостойкие плиты.

Для математической постановки и решения проблемы оптимального раскроя пиловочных бревен, а также и оптимизации программы выпуска продукции по ассортименту, требуется определенная информация.

Прежде всего, характеристика поставов, в которой отражается полезный вывод пиломатериалов разных типо-размеров и качества, объем стволовой части и реек, направляемых на производство щепы, величина отходов (коры и опилок) при распиловке разных (по породо-размерно-качественным группам) бревен теми или иными поставами.

В условии задачи также должны быть известны:

- характеристики пиловочного сырья;
- объемы (количество бревен по породно-размерно-качественным группам) ПРК, на которые сортируется сырье перед распиловкой (на складе, а затем в бассейне перед подачей в лесопильный цех);
- мощность оборудования (рам или станков) по распилу сырья за тот временной период, на который производится расчет оптимальной программы (декаду, месяц или квартал);
- для разработки критерия оптимальности должны быть известны действующие цены на продукцию лесопиления (пиломатериалы, щепу, брус и др.).

Объемы производства продукции могут быть заданы: полностью по пиломатериалам определенного назначения и типо-размерам, или частично - в виде нижнего предела объема производства, или могут быть величиной искомой. В последнем случае определяется экономическая целесообразность выпуска той или иной продукции в определенных объемах с целью достижения максимального экономического эффекта лесопильного производства.

Экономико-математическая модель

При разработке экономико-математической модели приняты следующие обозначения:

d - индекс размерно-качественных характеристик пиловочного сырья (диаметр), $d = \overline{1, D}$;

t - индекс типо-размеров пиломатериалов, бруса высокого качества (экспортных и др.), $t = \overline{1, \tau}$;

h - индекс типо-размеров пиломатериалов низкого качества, $h = \overline{1, H}$;

r - индекс стволовой части и реек, направляемых на производство щепы, $r = \overline{1, R}$;

j - индекс варианта постава, $j = \overline{1, n}$;

q_{tdj}- полезный выход в м^3 t-х пиломатериалов и бруса при распиловке одного d-го бревна j-м поставом;

q_{hdj}- то же по h-м пиломатериалам;

q_{rdj}- то же по стволовой части и рейкам (обрезкам), направляемым на щепу;

P - задание по производству (выпуску) той или иной продукции;

M - мощность л/п производства за планируемый период (по объемам распиловки);*)

Q_d - наличие пиловочного сырья по породо-размерно-качественным группам в планируемом периоде.

Искомые переменные:

x_{dj}- количество пиловочных бревен d-й ПРК группы, распиливаемых j-м поставом.

Критерий оптимальности

В качестве критерия оптимальности при решении данной проблемы могут быть приняты разные показатели: полезный выход готовой продукции (в м^3) или объем отходов (в м^3), и др.

Однако, наиболее целесообразным, с экономической точки зрения, и, в то же время простым для подготовки информации к решению следует считать выход продукции в действующих ценах (C_{dj}) при распиловке одного бревна тем или иным поставом.

Здесь:

$$C_{dj} = \sum_{t=1}^{\tau} U_t q_{tdj} + \sum_{h=1}^{H} U_h q_{hdj} + \sum_{r=1}^{R} U_r q_{rdj} + C_0,$$

где U - действующие цены за м^3 продукции лесопиления;

C_0 - цена (выручка) от реализации используемых отходов.

Уравнение целевой функции, выражающей стоимость продукции лесопиления в действующих ценах (иначе объем товарной продукции) примет следующий вид:

$$J(x_{dj}) = \sum_{d,j}^{D,n} C_{dj} x_{dj} \Rightarrow \max. \qquad (9.21)$$

Первый блок ограничения по условию выхода (производству) продукции высокого качества (бруса, обрезных экспортных пиломатериалов и др.):

- при условии заданных объемов производства

$$\sum_{d,j}^{D,n} q_{tdj} x_{dj} \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} \underline{P}_t; \;\; t = \overline{1,\tau}; \qquad (9.22)$$

то же в условиях пока незапланированных объемов, с целью исследования целесообразности и возможностей выпуска продукции, по которой еще не заключены контракты:

$$\sum_{d,j}^{D,n} q_{t'dj} x_{dj} \geq 0; \quad t' = \overline{1,\tau'}; \qquad (9.23)$$

Здесь: t' - разновидности продукции по которой нет задания.

Ограничения по условиям выпуска пиломатериалов низких сортов, однако, имеющих спрос на рынке сбыта (необходимых для народного хозяйства)

$$\sum_{d,j}^{D,n} q_{hdj} x_{dj} \begin{Bmatrix} = \\ \leq \end{Bmatrix} \overline{P}_h; \;\; h = \overline{1,H}; \qquad (9.24)$$

здесь: $\overline{P}_h$ - фиксированный или верхний предел производства низкокачественных материалов.

Ограничения по условиям использования стволовой части, реек и обрезков для производства щепы

*) В других постановках может быть представлена как фонд эффективного рабочего времени лесопильных рам в планируемом периоде.

$$\sum_{d,j}^{D,n} q_{rdj}\varphi_{rl}x_{dj} \geq \begin{cases} P_l \\ 0 \end{cases}; \quad l = \overline{1,L}, \tag{9.25}$$

где: φ_{rl} - коэффициент выпуска кондиционерной щепы из стволовой части, реек и обрезков;

P_l - задание по производству щепы.

Ограничения по условиям наличия и использования пиловочного сырья. Иными словами оптимальная программа лесопиления должна исходить (базироваться) на наличном сырье:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{dj} \begin{Bmatrix} = \\ \leq \end{Bmatrix} Q_d; \quad d = \overline{1,D}. \tag{9.26}$$

Ограничения по условиям наличия и использования мощности лесопильного производства (по основному ведущему оборудованию - лесопильным рамам или лесопильным станкам, лесопильным потокам и т.п.):

$$\sum_{d,j}^{D,n} V_d x_{dj} \leq M. \tag{9.27}$$

Здесь: V_d - объем (в м^3) одного d-го бревна.

Ограничения (9.27) могут быть представлены и в иной форме, - как условие использования фонда эффективного рабочего времени основного (ведущего) оборудования в плановом периоде:

$$\sum_{d,j}^{D,n} a_{dj} x_{dj} \leq B, \tag{9.27'}$$

где: B - фонд эффективного рабочего времени ведущего оборудования;

a_{dj} - норма затрат времени на распиловку одного d-го бревна j-м поставкам.

Ограничительные условия (9.27), а равно и условия (9.27') могут быть введены в модель несколько иначе, если, например, в результате решения задачи необходимо параллельно с искомой программой выпуска продукции определить величину целесообразного наращивания производственной мощности лесопильного цеха

$$\sum_{d,j}^{D,n} V_d x_{dj} \leq M + M^0 y, \tag{9.27''}$$

здесь: M^0 - типовая мощность лесопильного агрегата (потока и т.п.);

y – искомая характеризующая коэффициент кратности; y= 0,1,2,…

В разрешимом виде ограничений (9.27'') примет вид:

$$\sum_{d,j}^{D,n} V_d x_{dj} - M^0 y \leq M \tag{9.27''}$$

Наконец, условие неотрицательности переменных

$$x_{dj} \geq 0, \begin{cases} d = \overline{1,d} \\ j = \overline{1,n} \end{cases}. \tag{9.28}$$

Используя эту экономико-математическую методику можно оптимизировать программу выпуска продукции в лесопилении в разных производственных ситуациях.

На первом этапе рассчитывается открытая программа (проект) выпуска продукции по ассортименту при неизвестных или частично известных объемах производства той или иной продукции. Таким образом определяется возможная программа выпуска продукции, которая могла бы обеспечить максимальный экономический эффект при использовании имеющихся ресурсов пиловочного сырья. При этом используются варианты наилучших поставов при распиловке бревен разных размерно-качественных групп (9.22). Программа выпуска продукции, рассчитанная на первом этапе планирования, является базой для последующего заключения контрактов на производство и поставку продукции потребителям.

Затем, после изучения рынка и заключения контрактов на поставку продукции, следует провести второй этап расчетов программы выпуска продукции по ассортименту с учетом выполнения договорных обязательств и возможного производства той или иной продукции сверх контрактных заданий, если имеются условия ее сбыта на рынке.

Эта методология позволяет: оперативно реагировать на изменение спроса и цен на рынке на ту или иную продукцию, вносить соответствующие коррективы в банк исходной информации и рассчитывать оптимальную программу выпуска продукции по ассортименту на любой планируемый отрезок времени.

Изложенную методику можно использовать в несколько ином направлении, так сказать третий этап, решения задачи (3-й вариант).

Положим, заключены контракты и другие обязательства на поставку продукции лесопиления во времени, и для того чтобы эту программу выполнить надо знать сколько каких бревен надо подать в лесопильный цех и какими поставами распилить в планируемые отрезки времени.

На этом этапе решения ограничительные условия (9.26) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{dj} \geq 0,\ d = \overline{1, D}. \qquad (9.29)$$

Эта сумма $\sum_{j=1}^{n} x_{dj}$ покажет сколько (Q'_d) каких породо-размерно-качественных групп пиловочных бревен необходимо направить в лесопильный цех в этот период времени (декаду, месяц), или для выполнения какого-то конкретного контракта.

9.4. Экономико-математическая модель оптимального планирования последовательности освоения лесосырьевой базы ЛПП

Проблема оптимизации производства многогранна. Она охватывает различные аспекты обеспечения и непосредственной промышленной деятельности предприятий и может рассматриваться как взаимообусловленный комплекс связанных между собой основных и подчиненных им оптимизационных задач, решаемых на разных уровнях и при разных видах планирования.

В целях обеспечения выполнения ежегодных сортиментных планов лесозаготовительного производства и планов выпуска готовой продукции в деревоперерабатывающих производствах возникает необходимость решения оптимизационных задач по установлению ежегодных планов рубок — планов набора лесосек (делянок) в рубку. И по результатам решения этих задач и в развитии их может быть разработана схема транспортного освоения лесосырьевой базы на расчетный год (а также и на пятилетку).

Задача последовательного освоения лесосырьевой базы по расчетным годам может быть решена на базе установления оптимального плана отвода лесосек в рубку на 1-й, 2-й и последующие годы пятилетия, который, в свою очередь, необходим для обеспечения выполнения годовых сортиментных планов лесозаготовок и на их базе планов выпуска готовой продукции деревоперерабатывающих производств.

Для этого в лесосырьевой базе выделяется зона освоения на пятилетний срок оптимизации, которая по мере освоения последовательно расширяется за счет включения в расчеты дополнительных делянок, расположенных вблизи границ ранее выделенной зоны. Это необходимо, прежде всего, для обеспечения многократности расчетов при отыскании оптимального плана отвода лесосек в рубку, а также для установления более или менее равноценной ассортиментной программы по годам, близкой к усредненной, что в свою очередь обеспечивает стабильную работу всех производств.

Все кварталы зоны освоения разбиты на делянки с таким расчетом, чтобы их запасы последовательно включались в расчеты по годам в границах выделенной зоны освоения.

Размер зоны освоения по запасам древесины на корню определяется по данным банка лесоучетных данных и из необходимости обеспечения, с одной стороны, не менее пятилетнего объема рубок, с другой стороны — в расчеты включается лишь половина общего запаса древесины в каждом квартале, что вызвано необходимостью соблюдения последовательности рубок с учетом сроков примыкания.

Для решения задачи необходима следующая **исходная информация:**

- характеристика запасов древесины в делянках с дифференциацией по породно-размерно-качественным группам;

- предполагаемый ежегодный объем заготовки круглых и сырьевых сортиментов лесоматериалов для поставки их за пределы предприятия, в собственные деревоперерабатывающие производства, а также на собственные нужды (капитальное строительство и ремонт).

В целях формирования условия задачи и разработки экономико-математической модели ее примем следующие обозначения:

d— индекс делянки (или квартала); $d=\overline{1,u}$, где u — число делянок (или кварталов) в зоне рубки;

k — индекс породно-размерно-качественной (ПРК) группы древесины (деловой и дровяной); $k=\overline{1,\xi}$, где ξ —число ПРК групп древесины;

j — индекс сортимента, реализуемого в круглом виде на сторону и на собственные нужды (капремонт и строительство); $j=\overline{1,n}$, где n — число сортиментов, реализуемых в круглом виде;

r — индекс сырьевого сортимента, реализуемого на сторону и направленного в собственные перерабатывающие производства; $r=\overline{1,\varepsilon}$, где ε —число сырьевых сортиментов.

В условии задачи должен быть задан ряд показателей, которые обозначим следующим образом:

q_{dk} - запас древесины k-й ПРК. группы в d-й делянке, тогда матрица $Q=[q_{dk}]_{u\times\xi}$ характеризует запасы древесины в пятилетней зоне освоения сырьевой базы, дифференцированные по ПРК группам и делянкам;

P_j — годовой объем заготовки j-го сортимента для реализации в круглом виде, тогда выражение $P=(P_1,..., P_j,...,P_n)$ характеризует сортиментный план заготовки лесоматериалов для реализации в круглом виде на сторону и собственные нужды в планируемом году;

P_r — годовой объем заготовки r-го сырьевого сортимента для реализации на сторону и в собственных перерабатывающих производствах, тогда выражение $P=(P_1$, ...,

P_r, ..., P_ε) характеризует сортиментный план заготовки сырьевых сортиментов в планируемом году.

В качестве наиболее простого *показателя критерия оптимальности* может быть принято расстояние (в км.) от центра делянки до раскряжевочной площадки нижнего склада (l). В этом случае задача решается на min. грузовой работы (м^3 км) лесовозного транспорта.

Между заданными объемными показателями при решении комплекса задач последовательного освоения пятилетней зоны имеет место определенная зависимость, выраженная следующим условием:

$$\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi} q_{dk} \cong 5\left(\sum_{j=1}^{n} P_j + \sum_{r=1}^{\varepsilon} P_r\right). \qquad (9.30)$$

При этом на каждом этапе решения последовательных задач общие остаточные запасы древесины в зоне освоения $\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi} q'_{dk}$ корректируются: уменьшаются на величину запасов, отводимых в рубку в 1-м, затем соответственно во 2, 3 и 4-м годах, и в связи с необходимостью соблюдения сроков примыкания (-Δq_1), а также увеличиваются (+Δq_2) посредством расширения зоны освоения:

$$\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi} q'_{dk} = \left[\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi} q_{dk} - \left(\sum_{j=1}^{n} P_j + \sum_{r=1}^{\varepsilon} P_r\right)\right] - \Delta q_1 + \Delta q_2 . \qquad (9.31)$$

Эта величина $\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi} q'_{dk}$ с одной стороны, может рассматриваться как величина остаточных ресурсов древесины при решении первой (т. е. предшествующей) задачи, с другой стороны, как величина общих исходных запасов древесины при решении последующей 2-й задачи и т. д.

Дополнительно к первоначальной информации следует учитывать грузооборот лесовозных дорог (или возможности транспортных средств) $M_{\mu\rho}$ и общие годовые объемы заготовки древесины по сезонам летней и зимней вывозки древесины Q_ρ..

Для учета этих условий примем дополнительные обозначения:

μ — индекс лесовозной дороги; $\mu = \overline{1,m}$, где m — число проектируемых лесовозных дорог в зоне освоения;

ρ — индекс зоны вывозки древесины; ρ = 1, 2, где ρ = 1 — летняя зона вывозки, ρ = 2 — зимняя зона вывозки древесины.

Таким образом, *искомые переменные* будут:

$x_{dkj\mu\rho}$ - объем древесины k-й ПРК группы, отводимой в рубку в d-й делянке (квартале) для выработки из нее j-го сортимента лесоматериалов, реализуемых в круглом виде и вывозимых по μ-й лесовозной дороге из ρ-й зоны вывозки;

$x_{dkr\mu\rho}$ - объем древесины k-й ПРК группы, отводимой в рубку в d-й делянке (квартале) для заготовки из нее r-го сырьевого сортимента, вывозимой по μ-й лесовозной дороге из ρ -й зоны вывозки.

Тогда матрицы искомых переменных

$$X = \lfloor x_{dkr\mu\rho} \rfloor_{u\times\xi\times\varepsilon\times m\times 2}; \quad X = \lfloor x_{dkj\mu\rho} \rfloor_{u\times\xi\times n\times m\times 2} \qquad (9.32)$$

(тыс. м^3) будут характеризовать возможность выполнения заданий по ассортименту продукции лесозаготовок.

Вторая группа искомых *целочисленных переменных* будет характеризовать:

$y_{d\mu\rho}$ - коэффициент, характеризующий отвод d-й делянки, примыкающей к μ-й дороге и расположенной в ρ-й зоне вывозки, в рубку на заданный год.

Переменная может принимать значения, равные либо 0, либо 1. При $y_{d\mu\rho} = 0$ данная делянка в рубку на заданный год не отводится, при $y_{d\mu\rho} = 1$ данная делянка должна быть полностью вырублена в заданном году.

Матрица

$$Y = \left\lfloor y_{d\mu\rho} \right\rfloor_{u\times m\times 2} \tag{9.33}$$

характеризует отвод лесосек в рубку па заданный год.

Согласно изложенному **экономико-математическая модель** будет выглядеть следующим образом.

Уравнение целевой функции (по грузовой работе):

$$L(y) = \sum_{d=1}^{u}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{2} l_{d\mu\rho} q_{d\mu\rho} y_{d\mu\rho} = \min. \tag{9.34}$$

или в расширенной форме

$$L(y) = \sum_{d,j,r,k,\mu,\rho}^{u,n,\varepsilon,\xi,m,2} ox_{jrdk\mu\rho} + \sum_{d,\mu,\rho}^{u,m,2} l_{d\mu\rho} q_{d\mu\rho} y_{d\mu\rho} = \min \tag{9.34'}$$

Оно отражает суммарную грузовую работу по вывозке всей древесины из всех делянок, вошедших в план рубок в расчетном году. Здесь l - расстояние (км) от делянки до нижнего склада.

Ограничительные условия будут следующие.

Первая группа ограничений отражает условие обеспечения лесфондом обязательного выполнения сортиментного плана заготовки круглых товарных и сырьевых сортиментов лесоматериалов в полном соответствии с выходом их по действующим ГОСТам:

$$\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{2} x_{dkj\mu\rho} = P_j; \quad j = \overline{1,n}, \tag{9.35}$$

$$\sum_{d=1}^{u}\sum_{k=1}^{\xi}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=2}^{2} x_{dkr\mu\rho} = P_r; \quad r = \overline{1,\varepsilon}. \tag{9.36}$$

Вторая группа ограничений составляется по наличию и использованию лесосырьевых ресурсов выделенной зоны освоения сырьевой базы в разрезе ПРК групп:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{dkj\mu\rho} + \sum_{r=1}^{\varepsilon} x_{dkr\mu\rho} \le q_{dk\mu\rho}; \begin{cases} d = \overline{1,u}; \\ k = \overline{1,\xi}; \\ \mu = \overline{1,m}; \\ \rho = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{9.37}$$

Третья группа также составляется по наличию и использованию лесосырьевых ресурсов выделенной зоны освоения сырьевой базы в разрезе делянок:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\xi} x_{dkj\mu\rho} + \sum_{r=1}^{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\xi} x_{dkr\mu\rho} - q_{d\mu\rho} y_{d\mu\rho} = 0; \tag{9.38}$$

$$\text{при} \quad y_{d\mu\rho} = 0;1; \begin{cases} d = \overline{1,u}; \\ \mu = \overline{1,m}; \\ \rho = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{9.39}$$

Четвертая группа ограничений обеспечивает соответствие объемов вывозки древесины по лесовозным дорогам расчетному грузообороту данных лесовозных дорог (или возможностям лесовозных транспортных средств):

$$\sum_{d=1}^{u} q_{d\mu\rho} y_{d\mu\rho} \le M_{\mu\rho}; \begin{cases} \mu = \overline{1,m}; \\ \rho = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{9.40}$$

Согласно ограничений (9.40) добавим еще одно условие, обеспечивающее соответствие объемов вывозки древесины плановым объемам лесозаготовок по зонам вывозки (летней и зимней):

$$\sum_{d=1}^{u} \sum_{\mu=1}^{m} q_{d\mu\rho} y_{d\mu\rho} = Q_{\rho} \pm \Delta Q_{\rho}, \ \ \rho = 1,2 \tag{9.41}$$

Необходимость введения ΔQ_{ρ} обусловлена невозможностью заранее обеспечить строгое равенство запасов древесины на лесосеках, отводимых в рубку в расчетном году, плановым объемам заготовки древесины в разрезе зон вывозки в данном году.

Сезонное равенство в данном ограничении может не выполняться вследствие необходимости вырубки лесосеки полностью.

Поэтому для данной группы ограничений предусматривается интервал изменения значения по строке ($\pm\Delta Q_{\rho}$).

Согласно требованиям компьютерных программ для строк, имеющих интервал, в столбце свободных членов ограничительных условий помещается верхняя граница изменения свободного члена (Q_{ρ} $+\Delta Q_{\rho}$), а в столбец интервалов — значение, равное интервалу изменений ($2\Delta Q_{\rho}$).

Последняя группа ограничений отражает условие неотрицательности переменных:

$$x_{dkj\mu\rho} \ge 0; x_{dkr\mu\rho} \ge 0 \begin{cases} d = \overline{1,u}; \\ k = \overline{1,\xi}; \\ j = \overline{1,n}; \\ r = \overline{1,\varepsilon}; \\ \mu = \overline{1,m}; \end{cases} \tag{9.42}$$

Для решения проблемы оптимизации последовательного освоения лесосырьевых баз могут использоваться разные показатели в качестве *критерия оптимальности*

Так, при наиболее простом решении (9.34) в качестве критерия оптимальности принято расстояние перевозки лесоматериалов в км от мест заготовки (делянок) до нижнего склада (обозначено через l_d) и, следовательно, решается задача на минимум общей грузовой работы в м^3·км, на перевозку лесоматериалов в течение планируемого года. Естественно, что минимизация грузовой работы обеспечивает и минимум протяженности лесовозных дорог.

Основное преимущество этого показателя перед другими заключается в простоте его исчисления при подготовке исходной информации к решению, а это в свою очередь обеспечивает повышенную точность его вычисления. И если с некоторыми погрешностями считать, что капитальные вложения на строительство лесовозных дорог находятся в прямой зависимости от их протяженности, то решение задачи на минимум грузовой работы приведет и к минимуму капитальных вложений на их строительство. Однако в этом показателе не нашли отражение природно-географические факторы, характеризующие конкретные условия, от которых в значительной мере зависит величина общих капитальных вложений на строительство транспортных путей.

Кроме того, этот показатель не учитывает эксплуатационных затрат по вывозке, хотя и оказывает основное влияние на их величину.

Для решения тех задач, которые требуют более точного, экономически обоснованного результата, в качестве критерия оптимальности решения следует применять показатель *приведенных затрат* на освоение древостоев той или иной делянки (квартала) c_d.

В показателе приведенных затрат находят отражение эксплуатационные затраты по вывозке древесины из делянки (квартала) на нижний склад s_d, отнесенные на 1 м^3, и соответственно капиталовложения на строительство лесовозных дорог — k_d;

$$c_d = s_d + E_H k_d, \tag{9.43}$$

где $E_н$ — нормативный коэффициент эффективности капвложений.

В этом варианте задача решается на минимум суммарных приведенных затрат по вывозке древесины, что и обеспечивает оптимизацию транспортного освоения лесосырьевой базы.

Поскольку показатель приведенных затрат c_d дифференцирован лишь по делянкам (кварталам), которые в решении задачи выступают в роли «поставщиков», и принят независимым от сортиментного состава вывозимой древесины, в матрице исходной информации показатель критерия оптимальности будет одинаков по группам строк (от 1 до ξ) в каждом столбце (от 1 до ε).

При таком критерии оптимальности результат решения задачи будет удовлетворять минимуму суммарных приведенных затрат по вывозке условию обеспечения выполнения сортиментного плана сырьем. Однако при такой постановке не учитывается, каким образом и с каким конечным результатом в дальнейшем на нижнем складе будет выполнен сортиментный план.

Для одновременного учета конечной результативности работы предприятия, в целях влияния на нее необходимо параллельно устанавливать, из какой древесины по ПРК группам, какие сортименты целесообразно вырабатывать. Для этого критерий оптимальности приведенных затрат φ_d можно дифференцировать и по столбцам, характеризующим разновидности сортиментов плана. С этой целью можно вычислить корректировочные коэффициенты γ_{kj} и γ_{kr} на базе соотношения действующих оптовых цен на продукцию лесозаготовительного производства в зависимости от ее ассортимента и качества.

Тогда откорректированные показатели критерия оптимальности будут равны:

$$c'_{dkj(r)} = c_d \gamma_{kj(r)}. \tag{9.44}$$

В процессе подготовки информации для решения задачи должны быть вычислены матрицы этих показателей:

$$C = \left[c'_{dkj}\right]_{u\times\xi\times n}, \quad C\left[c'_{dkr}\right]_{u\times\xi\times\varepsilon}. \tag{9.45}$$

По действующим ГОСТам из древесины определенных ПРК групп возможно производство строго определенных сортиментов. В то же время те или иные сортименты не могут вырабатываться из древесины определенных ПРК групп.

Таким образом, еще в процессе подготовки информации для решения задачи необходимо обеспечить это соответствие. С этой целью в условиях, когда какие-то сортименты не должны вырабатываться из какой-то древесины (например, сортимент n из k-й ПРК группы), критерий оптимальности (C_{dkn}) принимается равным величине M, где M есть число очень большое, больше всякого другого числа:

$$C_{dkn} = M. \tag{9.46}$$

При минимизации целевой функции в результате решения задачи эта связь $dk \rightarrow n$ непременно будет равна нулю, что нам и требовалось для соблюдения ГОСТа ($x_{dkn} = 0$).

По этой модели нами был решен ряд задач по лесосырьевым базам леспромхозов Архангельской области.

Ввиду большого числа переменных, на которые налагается условие целочисленности, решение задачи по сырьевой базе ЛПХ с годовым объемом заготовки древесины, равным 350 тыс. м^3, потребовало от 5 до 6 часов машинного времени (на ЕС-1022).

Однако эффект от оптимизации производства значителен: по сравнению с дополнительными издержками.

Глава 10. ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА

Одной из важнейших проблем экономики является проблема развития и размещения производительных сил. "Только общество, способное устанавливать гармоническое сочетание своих производительных сил по единому общему плану может позволить промышленности разместиться по всей стране, как это наиболее удобно для ее развития и сохранения, а также и для развития прочих элементов производства"*).

Проблема оптимизации развития и размещения производства имеет исключительное значение для лесной и лесоперерабатывающей промышленности в силу их специфических особенностей (значительного разнообразия в характеристиках лесосырьевых ресурсов, их размещения и взаимообусловленности эксплуатации и др.). Результаты размещения производства оказывают непосредственное влияние на использование и воспроизводство лесных ресурсов, а также на величину капитальных вложений и текущие издержки по производству и транспортному перемещению продукции.

Рациональное размещение производства обеспечивает минимальные капитальные вложения и текущие затраты. Ошибка, допущенная в размещении, обычно, не может быть исправлена в течении длительного времени, а иногда и в течении всего периода функционирования производственных мощностей, и в связи с этим снижает эффективность производства.

Поэтому естественно стремление повысить уровень обоснования и решения проблемы развития и размещения производств, программ выпуска продукции и производственных и реализационных связей - найти оптимальное их решение.

В разные исторические периоды в соответствии с уровнем научных исследований проблема развития и размещения производств лесной и лесоперерабатывающей отраслей промышленности (ЛПК) решалась по разному.

Был период, когда разрабатывались "генсхемы" (планы) развития производства ЛПК по регионам страны на перспективу 15 и 10 лет, без какого-либо количественного анализа многообразия возможных решений, тем более без отыскания оптимального решения.

Затем появились исследовательские и прикладные работы с применением методов оптимального программирования. Однако, в большей части этих работ проблема развития и размещения производств ЛПК решалась раздельно по производствам отдельных отраслей или последовательно-раздельно по лесозаготовительному (л/з) и комплексу деревоперерабатывающих (д/п) производств. Раздельное или последовательно-раздельное решение проблемы развития и размещения л/з, далее д/п производств и затем транспортных связей, во-первых, требует балансовой узязки результатов решения отдельных задач на основе методов качественного анализа (что в большей части не делалось), во-вторых, все производства ЛПК и транспортные связи в планировании развития и размещения взаимосвязаны и взаимообусловлены, и отход от единого количественного анализа (посредством ЭММ и ЭВМ) не обеспечивает оптимального решения проблемы в целом и достижения max экономического эффекта.

Необходимость раздельного решения этой единой проблемы раньше была обусловлена ограниченными возможностями ЭВМ. Современные ЭВМ позволяют решать оптимизационные задачи практически любого размера.

---

*) Энгельс Ф. "Анти-Дюринг". Сочинения. Маркс К. Энгельс Фь Изд.2-е,т.20,с.307.

В этой работе проблема оптимального перспективного планирования развития и размещения производств ЛПК рассматривается как единая к о м п л е к с н а я проблема.

Объективные оптимальные решения отыскиваются посредством математических методов количественного анализа вариантов (на базе экономико-математического моделирования и использования ЭММ и ЭВМ), который в сочетании с качественным анализом позволяет исключить субъективные факторы, тем самым ставит решение проблемы на научную основу.

В решении проблемы планирования развития и размещения производств ЛПК определяются оптимальные:

- состав и размеры всех производств ЛПК;
- объемы развития их в планируемом перспективном периоде;
- проекты программ выпуска продукции по основному (укрупненному) ассортименту по всем производствам комплекса;
- транспортные производственные связи и по реализации продукции.

Общий, и особенно экономический, результат решения любой проблемы зависит прежде всего от того, какие факторы и условия как и в какой мере учтены при ее решении, какая и насколько достоверная информация заложена в ее условие.

При решении проблемы развития и размещения производств ЛПК должны учитываться как общие так и отраслевые определяющие факторы:

- потребности народного хозяйства в отдельных видах сырья, лесоматериалов и готовой продукции, возможности и целесообразность их реализации на внешнем рынке;
- наличие производственных мощностей и возможности их дальнейшего развития;
- производственные возможности предприятий с точки зрения обеспеченности их сырьевыми, материальными, трудовыми и энергетическими ресурсами;
- характеристика запасов древесины по лесосырьевым базам;
- территориальное размещение производств лесопромышленного комплекса (ЛПК) и потребителей их продукции, наличие и характер транспортных путей, определяющих возможности производственных и реализационных связей;
- денежные средства, предназначенные на расширение и новое строительство производств, природоохранные сооружения, создание социальной инфраструктуры.

Правильное решение любых задач невозможно без достоверной прогрессивной технико-экономической информации, данной проблемы - без информации, учитывающей динамику показателей. Это требует математико-статистической обработки показателей за значительный прошедший период и на этой основе прогнозирования показателей на перспективу.

Еще ведутся дискуссии вокруг основных понятий - таких, как критерий оптимальности плана, согласование глобального и локального оптимумов, период планирования, динамический аспект плана и др.

Эти вопросы мы не рассматриваем в данной работе.

Глава посвящена рассмотрению методологии экономической (содержательной) постановки проблемы и последовательному математическому моделированию ее для разных условий сложности решения.

10.1. Простейшая Э.-м.м. оптимизации развития производств ЛПК

Проблема оптимизации развития и размещения производств, в изложенной выше форме, достаточно сложна. Следовательно, имеют место определенные трудности в понимании постановки и ее экономико-математического моделирования.

Поэтому общую постановку и моделирование ее прежде рассмотрим на наиболее простом варианте задачи с тем, чтобы далее рассматривать, в более сложной форме, все взаимосвязанные аспекты методологии. При этом первую простейшую задачу развития и размещения производств ЛПК подготовим к решению с помощью транспортных алгоритмов, как наиболее простых методов оптимизации.

Постановка проблемы

Предприятия (производства) ЛПК и потребителей их продукции представим в виде некоторой упорядоченной системы (рис.10.1), в которой все субъекты системы сформируем в виде 3-х взаимосвязанных групп.

В первую группу входят лесозаготовительные производства, наделенные самостоятельными лесосырьевыми базами, тяготеющие к собственным пунктам примыкания лесовозных дорог к общей транспортной сети (обозначим их - Q_i, i=1,2,…,m).

Во вторую - среднюю группу объединены все деревоперерабатывающие (ДОП) и деревоперерабатывающие (ДПП) производства, расположенные как на нижних складах, (в пунктах примыкания) так и на самостоятельных производственных площадках в разных географических пунктах (обозначим - M_r, r=1,2,…,R).

В третью группу объединены все потребители лесоматериалов и продукции из древесины (обозначим – B_j; j=1,2,…,n).

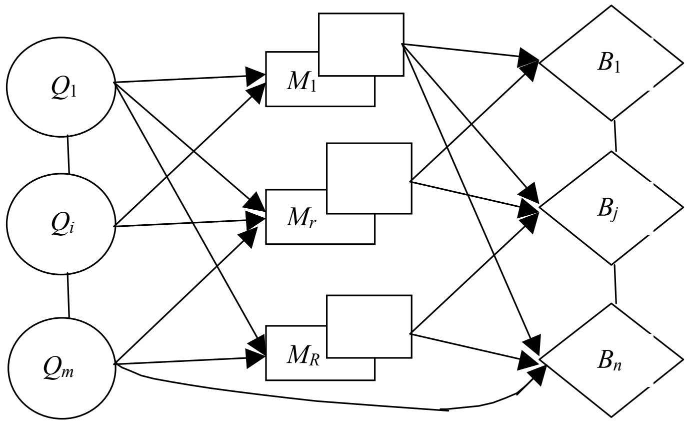


Рис.10.1

Определение оптимального плана развития и размещения производств ЛПК на планируемых перспективный период сводится к отысканию ответа на комплекс взаимосвязанных вопросов.

В *задаче требуется определить:*

- оптимальные размеры заготовки древесины (по сортиментам) по каждой лесосырьевой базе;
- - размер развития действующих и строительства новых лесозаготовительных производств по каждой лесосырьевой базе;
- оптимальные размеры ДОП и ДПП производств (предприятий) в каждом пункте;
- размеры развития действующих и строительства новых ДОП и ДПП;
- оптимальный план транспортных связей между поставщиками товарных круглых лесоматериалов и сырьевых сортиментов (Q_i, i=1,2,…,m) и их потребителями (M_r, r=1,2,…,R; B_j; j=1,2,…,n);
- опттмальный план транспортных связей между поставщиками продукции ДОП и ДПП (M_r, r=1,2,…,R) и потребителями ее (B_j; j=1,2,…,n).

Для решения проблемы в этой постановке *требуется следующая исходная информация*:

- достигнутые на действующих и min допустимые на проектируемых объемы заготовки различных сортиментов по каждой лесосырьевой базе (обозначим $\underline{q}_{si}$, где s – индекс сортимента, s=1,2,…,S; i=1,2,…,m);
- max допустимые объемы заготовки сортиментов ($\overline{q}_{si}$);
- достигнутые объемы производства продукции на действующих и min допустимые на проектируемых ДОП и ДПП ($\underline{M}_{lr}$, где l – индекс вида продукции, l=1,2,…,L);
- max допустимые объемы производства продукции ДОП и ДПП ($\overline{M}_{lr}$);
- потребности потребителей круглых лесоматериалов (B_{sj}; $s = 1,2,...,S$; j=1,2,…,n) и продукции ДОП и ДПП (B_{lj}).

Поскольку *Э.-м.м.* предполагается *преобразовать до типа разрешимых с помощью транспортных алгоритмов, все объемные, а также и стоимостные, показатели должны быть пересчитаны на один вид условной продукции,* используя для этого коэффициенты полезного выхода или нормы затрат сырья (материалов) на единицу продукции.

Критерий оптимальности

В качестве *критерия* оптимальности могут быть приняты разные экономические показатели, например, *приведенные затраты на производство* и *поставку* лесоматериалов и продукции

$$C_{sij} = C_{si} + t_{sij} + E_{н} K_i, \qquad C_{sir} = C_{si} + t_{sir} + E_{н} K_i;$$

где: C_{si} – удельные затраты по заготовке древесины;

t_{sir}; t_{sij} – затраты по поставкам (перевозкам) круглых лесоматериалов и продукции;

K_i – удельные капиталовложения;

$E_н$ – нормативный коэффициент эффективности капвложений.

Подобным образом рассчитываются приведенные затраты на производство и поставку продукции ДОП и ДПП – C_{lrj}; l=1,2,…L; r=1,2,…,R; j=1,2,…,n.

В качестве критерия может быть принят показатель *расчетной прибыли от реализации лесоматериалов и продукции с учетом эффекта от оптимизации транспортных связей:*

$$p'_{sir(j)} = p_{si} + \Delta t_{sir(j)},$$

где: $\Delta t_{sir(j)} = t^{\max}_{sir(j)} - t_{sir(j)}$

p – показатель расчетной прибыли;

$t^{\max}_{sir(j)}$ - максимальный показатель затрат на поставку в совокупности связей, поставщиков круглых сортиментов с потребителями;

$t_{sir(j)}$ - удельные затраты на поставку сортиментов от i-го поставщика r-му (или j-му) потребителю.

Подобным образом рассчитываются эти удельные показатели критерия оптимальности по производству и поставкам продукции ДОП и ДПП к потребителям.

Показатель расчетной прибыли, как критерий оптимальности, обобщает результаты деятельности всей совокупности производств ЛПК.

Он позволяет выделить из общей массы прибавочного продукта ту часть, которая является непосредственным результатом использования производственных ресурсов.

Экономико-математическая модель

В целях формирования экономико-математической модели, примем следующие условные обозначения искомых переменных:

x_{sir} - объем заготовки *s*-го сырьевого сортимента в *i*-й сырьевой базе для поставки в *r*-е ДОП или ДПП;

x_{sij} - объем заготовки *s*-го сортимента круглых лесоматериалов в *i*-й сырьевой базе для поставки *j*-му потребителю;

x_{lrj} - объем производства *l*-й продукции из древесины для поставки *j*-му потребителю.

Матрицы значений искомых переменных

$X = [x_{sir}]_{S \times m \times R}$,

$X = [x_{sij}]_{S \times m \times n}$,

$X = [x_{lrj}]_{L \times R \times n}$

будут характеризовать оптимальные объемы заготовки сырьевых и товарных сортиментов лесоматериалов по сырьевым базам, объемы производства готовой продукции из древесины по ДОП и ДПП и поставки их потребителям.

Уравнение целевой функции, отражающее суммарные приведенные затраты на производство и поставку (транспортировку) сырьевых и товарных сортиментов и готовой продукции в целом по ЛПК имеет следующий вид:

$$F(x) = \sum_{s,i,r}^{S,m,R} C_{sir} x_{sir} + \sum_{s,i,j}^{S,m,n} C_{sij} x_{sij} + \sum_{l,r,j}^{L,R,n} C_{lrj} x_{lrj} = \min. \qquad (10.1)$$

Уравнение целевой функции, отражающее суммарную расчетную прибыль с учетом эффекта от оптимизации транспортных связей в целом по ЛПК примет следующий вид:

$$F(x) = \sum_{s,i,r}^{S,m,R} p'_{sir} x_{sir} + \sum_{s,i,j}^{S,m,n} p'_{sij} x_{sij} + \sum_{l,r,j}^{L,R,n} p'_{lrj} x_{lrj} = \max. \qquad (10.1')$$

На искомые переменные налагается условие неотрицательности (все $x \geq 0$) и ограничения, отражающие основные условия и факторы, от которых зависит план развития производств ЛПК.

Ограничительные условия, в которых находятся предприятия первой группы, – лесозаготовительные производства, имеют первоначальный вид

$$\underline{q}_{si} \leq x_{si} = \sum_{r=1}^{R} x_{sir} + \sum_{j=1}^{n} x_{sij} \leq \overline{q}_{si}; \begin{cases} s = \overline{1,S} \\ i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (10.2)$$

Здесь x_{si} – оптимальный годовой объем заготовки *s*-го сортимента в *i*-й сырьевой базе.

Смысловое содержание ограничений (10.2) заключается в следующем.

Оптимальный годовой размер заготовки *s*-го сортимента в *i*-й сырьевой базе равен суммарному объему поставки его всем потребителям, в то же время он должен быть не менее достигнутого и не более max допустимого объема заготовки.

Оптимальный годовой объем заготовки древесины всех сортиментов в разрезе сырьевых баз будет

$$\underline{Q}_i \leq x_i = \sum_{\delta=1}^{S} x_{si} \leq \overline{Q}_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (10.3)$$

Здесь: $\underline{Q}_i = \sum_{S=1}^{S} \underline{q}_{si}$; $\overline{Q}_i = \sum_{s=1}^{S} \overline{q}_{si}$, - допустимые (достигнутый и max) годовые объемы заготовки древесины по сырьевым базам ЛПК.

Ограничительные условия, в которых находятся ДОП и ДПП имеют вид

$$\underline{M}_{lr} \le x_{lr} = \sum_{j=1}^{n} x_{lrj} = \sum_{i=1}^{m} x_{sir} \le \overline{M}_{lr}; \quad \begin{cases} l = \overline{1, L} \\ r = \overline{1, R} \end{cases} \tag{10.4}$$

Содержание условия.

Оптимальный годовой объем производства l-й продукции на r-м ДОП или ДПП (x_{lr}) равен суммарному объему поставки ее всем потребителям, в то же время, он равен суммарному объему сырья (в условных единицах), поступившего r-е производство из всех сырьевых баз, но он должен быть не менее достигнутого и не более max допустимого объемов производства.

Оптимальный объем производства всех видов продукции (x_r) в r-м ДОП или ДПП равен

$$\underline{M}_r \le x_r = \sum_{l=1}^{L} x_{lr} \le \overline{M}_r, \; r = \overline{1, L}. \tag{10.5}$$

Здесь $\underline{M}_r$ и $\overline{M}_r$ - достигнутая и max допустимая мощности r-го ДОП и ДПП.

Условия обеспечения потребителей (предприятий третьей группы) круглыми лесоматериалами и готовой продукции соответственно их потребностям имеют вид:

По круглым лесоматериалам

$$\sum_{i=1}^{m} x_{sij} = B_{sj}; \; \begin{cases} s = \overline{1, S}, \\ j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{10.6}$$

по готовой продукции из древесины

$$\sum_{r=1}^{R} x_{lrj} = B_{lj}; \; \begin{cases} l = \overline{1, L}, \\ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$
(10.7)

Первоначальная Э.-м.м. (10,1÷10,7), содержащая двусторонние ограничения (10.2) и (10.4), для решения транспортными алгоритмами требует некоторых преобразований.

Преобразование экономико-математической модели

С целью преобразования первоначальной Э.-м.м. к разрешимому виду с односторонними ограничениями, каждого поставщика (предприятия первой группы) условно представим как два «самостоятельных поставщика» (рис.10.2), тогда искомые переменные x_{sir} и x_{sij} в решении задачи будут представлены как суммы двух слагаемых.

$$x_{sir} = x'_{sir} + x''_{sir}; \; x_{sij} = x'_{srj} + x''_{sij}.$$

Тогда ограничения (10.2) примут вид

$$x_{si}^{'} = \sum_{r=1}^{R} x_{sir}^{'} + \sum_{j=1}^{n} x_{srj}^{'} = \underline{q}_{si}; \quad \begin{cases} s = \overline{1,S}, \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{10.2.1}$$

$$x_{si}^{''} = \sum_{r=1}^{R} x_{sir}^{''} + \sum_{j=1}^{n} x_{srj}^{''} \le (\overline{q}_{si} - \underline{q}_{si}); \quad \begin{cases} s = \overline{1,S}, \\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{10.2.2}$$

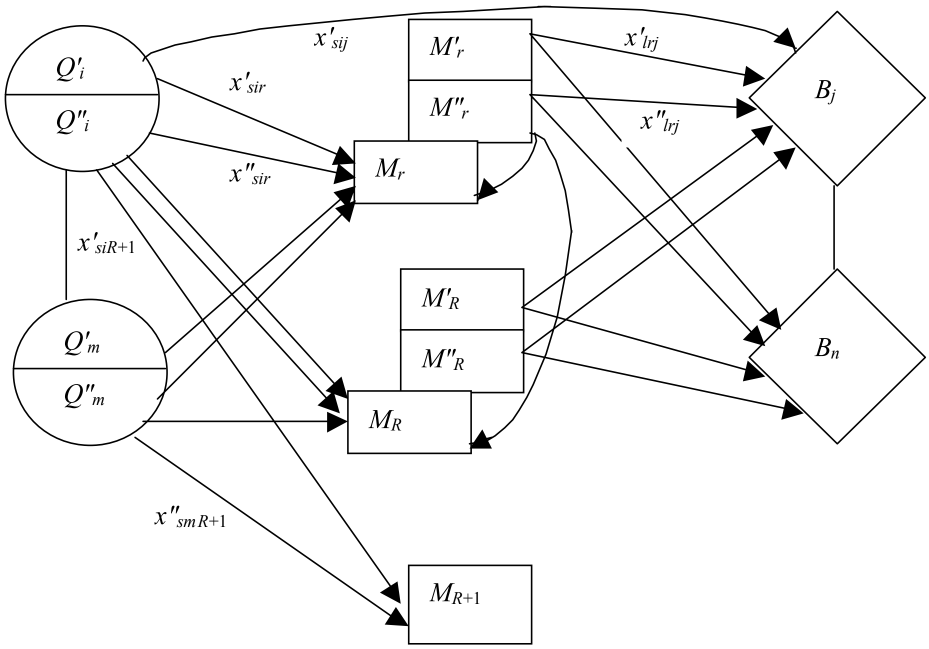


Рис.10.2

Ограничения (10.2.1) характеризуют условия распределения *достигнутых объемов* заготовки отдельных сортиментов между потребителями (r и j).

Ограничения (10.2.2) характеризуют условия распределения *объемов развития* заготовки сортиментов.

Разности между max допустимыми и достигнутыми объемами заготовки ($\overline{q}_{si} - \underline{q}_{si}$) характеризуют *возможные объемы развития* заготовки сортиментов в сырьевых базах.

Приведем эти условия к канонической форме

$$\sum_{r=1}^{R} x_{sir}^{''} + \sum_{j=1}^{n} x_{srj}^{''} + x_{siR+1} = (\overline{q}_{si} - \underline{q}_{si}); \quad \begin{cases} s = \overline{1,S}, \\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{10.2.2'}$$

Здесь x_{siR+1} - дополнительные переменные, характеризующие *резерв для последующего развития* заготовки древесины по сортиментам и базам за пределами рассматриваемого перспективного периода.

В решении задачи $x_{siR+1} > 0$ выступают как объемы поставки к фиктивному потребителю.

Преобразование условия (10.4).

Ограничительные условия (10.4) преобразуются в разрешимый вид по той же схеме, что и ограничения (10.2). Разница здесь лишь в том, что из (10.4) прежде выделяются условия обеспечения сырьем ДОП и ДПП

$$\sum_{i=1}^{m}(x'_{sir}+x''_{sir})\le \overline{M}_{lr};\quad \begin{cases} l=\overline{1,L},\\ r=\overline{1,R}. \end{cases} \tag{10.4.1}$$

Другие ограничения имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n}x'_{lrj}=\underline{M}_{lr};\begin{cases} l=\overline{1,L},\\ r=\overline{1,R}, \end{cases} \tag{10.4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x''_{lrj}\le(\overline{M}_{lr}-\underline{M}_{lr});\begin{cases} l=\overline{1,L},\\ r=\overline{1,R}. \end{cases} \tag{10.4.3}$$

Далее ограничительные условия (10.4.1) и (10.4.3) приведем к канонический форме

$$\sum_{i=1}^{m}(x'_{sir}+x''_{sir})+x_{lr'r''}=\overline{M}_{lr};\begin{cases} l=\overline{1,L},\\ r=\overline{1,R}, \end{cases} \tag{10.4.1'}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}x''_{srj}+x_{lr'r''}=(\overline{M}_{lr}-\underline{M}_{lr});\begin{cases} l=\overline{1,L},\\ r=\overline{1,R}. \end{cases} \tag{10.4.3'}$$

Здесь, дополнительные переменные $x_{lr'r''}$ характеризуют *резерв для последующего* развития ДОП и ДПП за пределами рассматриваемого перспективного периода.

В оптимальном решении задачи $x_{lr'r''}>0$ характеризуют "поставки самому-себе" и располагаются на фиктивной диагонали нижней левой четверти табл. (10.1).

Условия (10.6) и (10.7) в окончательной форме примут вид

$$\sum_{i=1}^{m}(x'_{sij}+x''_{sij})=B_{sj};\begin{cases} s=\overline{1,S},\\ j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{10.6'}$$

$$\sum_{r=1}^{R}(x'_{lrj}+x''_{lrj})=B_{lj};\begin{cases} l=\overline{1,L},\\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{10.7'}$$

В результате преобразований экономико-математической модели задача развития и размещения производств ЛПК сведена, к так называемой, многоэтапной многопродуктовой транспортной задаче и может быть решена транспортным алгоритмом. Фрагмент формы матрицы исходной информации приведен в табл. 10.1.

Основной недостаток изложенной выше методологии математического моделирования проблемы оптимизации развития и размещения производств ЛПК заключается в том, что оптимальные размеры производств (x_{si}; x_i; x_{lr}; x_r), а равно и объемы развития производств

$$\left(\sum_{r=1}^{R} x''_{sir} + \sum_{j=1}^{n} x''_{sij} \text{ и} \sum_{j=1}^{n} x''_{lrj} \right),$$

определяются без учета *целочисленности решения.*

Целочисленное решение проблемы означает решение эквивалентное неделимости частей, составляющих мощности. Этого в данной постановке нет.

Кроме того, в изложенной постановке проблемы и Э.-м.м. ее решения не нашли отражение (точнее - не конкретизированы) интегральные связи производств ЛПК с смежными по отношению рассматриваемого комплекса потребителями и поставщиками, а также с поставками на внешний рынок.

Поэтому в следующих параграфах этой главы, проблемы перспективного планирования рассматриваются в более сложной постановке, - читатель в состоянии в них

разобраться, - с учетом целочисленности решений и в форме для применения к решению сложных реальных производственных проблем.

10.2. Оптимизация структуры и размеров производств лесопромышленного комплекса лесоизбыточного региона

Прошедший период с начала перехода к нерегулируемой рыночной экономике в нашей стране показал всю пагубность для народного хозяйства страны, так называемого свободного рынка. Произошло обвальное падение промышленного и сельскохозяйственного производства. За всю историю России (и СССР), включая даже годы гражданской войны, коллективизации и Великой Отечественной войны, ее экономика не знала таких обвальных темпов падения производства.

Нарушились интеграционные связи в народном хозяйстве страны, развивавшиеся и совершенствовавшиеся в течение многих десятилетий. И много других негативных последствий принес свободный рынок экономике страны.

Как свидетельствуют исследования в экономике, без государственного регулирования не может нормально развиваться народное хозяйство любой страны и, в особенности, столь большой, какой является Россия. Сочетание рыночных принципов с государственным регулированием экономического развития является одним из важнейших путей становления, нормального развития и функционирования народного хозяйства.

В экономике лесопромышленных комплексов (ЛПК) отдельных регионов и страны в целом одной из важнейших проблем является определение структуры и объемов развития лесозаготовительного и деревоперерабатывающих производств. От уровня научного решения этой проблемы зависят результаты использования производственных ресурсов региона: лесосырьевых, энергетических, трудовых, мощностей производств и денежных средств на их развитие. В конечном счете зависит экономический результат развития и деятельности ЛПК и обеспечение его продукцией народного хозяйства.

Общая постановка проблемы

Каждый регион страны обладает определенными лесосырьевыми ресурсами, которые различны по запасам, возрастным, породным и качественным характеристикам. На базе использования этих лесосырьевых ресурсов и потребностей народного хозяйства в лесопродукции развивался ЛПК по заготовкам древесины и дальнейшей ее переработки на готовую продукцию.

Развитие ЛПК в отдельных регионах, как показала практика, не всегда проходило по научно-обоснованным проектам. Кроме того, в недалеком прошлом методы обоснования не имели той необходимой научной базы, которой ученые располагают в настоящее время. Это привело к тому, что в ряде регионов были созданы недостаточные мощности, в других - избыточные, не обеспеченные собственной сырьевой базой на длительный период их функционирования. Это в свою очередь привело к необходимости перевозки сырья на дальние расстояния, увеличивающие затраты.

За годы, так называемых, рыночных реформ ЛПК страны претерпел значительные изменения не в лучшую сторону (значительно снизились объемы производства, ухудшилась структура ЛПК, произошел застой в техническом и технологическом обеспечении и пр.).

В то же время совершенствуются научные методы принятия экономических решений.

Экономико-математическое моделирование позволяет создать научную методологию обоснования оптимальных структуры и размеров производств ЛПК, а современные математические методы и ЭВМ создают возможности решения больших сложных оптимизационных задач.

Сущность проблемы оптимизации структуры и размеров производств ЛПК региона заключается в следующем.

Зная характеристики лесосырьевых ресурсов, уровень развития мощностей составляющих ЛПК, потребности региона в лесопродукции (с учетом перспектив развития), а также возможности и необходимости интеграции с другими регионами и экспортом, *необходимо определить оптимальные состав и размеры производств внутрирегионального ЛПК.*

Общий, и особенно экономический результат решения любой проблемы зависит прежде всего от того, какие факторы и условия как и в какой мере учтены при ее решении, какая и насколько достоверная информация заложена в ее условие.

При решении данной проблемы определяющими факторами следует считать:

- потребности народного хозяйства данного региона в отдельных видах сырья, круглых лесоматериалов и готовой продукции;
- производственные возможности предприятий ЛПК с точки зрения обеспеченности их сырьевыми, материальными, энергетическими и трудовыми ресурсами;
- наличие производственных мощностей и возможности их дальнейшего развития (а в отдельных случаях сокращения).

Особое значение для решения проблемы по ЛПК имеет характеристика лесосырьевых ресурсов по породно-размерно-качественным группам (ПРК гр.), поскольку экономический результат ее решения в значительной степени зависит от того какие сортименты в каком объеме из какой древесины (по ПРК гр.) должны быть заготовлены и куда далее направлены, какая продукция выработана.

Правильное решение этой проблемы, как и любой другой, невозможно без достоверной прогрессивной технико-экономической информации - без информации, учитывающей динамику показателей. Поэтому вся информация, необходимая для решения проблемы должна быть подвергнута математико-статистической обработке показателей за значительный период времени и на этой основе прогнозирования их.

Мы уже указывали, что есть целый ряд дискуссионных вопросов, связанных с решением данной проблемы, таких как критерий оптимальности, согласование глобального и локального оптимумов, величина временного периода, динамический аспект искомого решения и др. Эти вопросы мы не рассматриваем в данной работе.

Настоящее исследование, в основной его части, посвящено содержательной постановке проблемы оптимизации структуры и размеров производств ЛПК региона, разработке экономико-математической модели (Э-м.м) решения проблемы, проверке "работоспособности" Э.-м.м. на макете, имитирующем соответствующую производственную ситуацию, и доведения ее до рабочего - достоверного варианта, описание которого и приводится ниже.

Экономико-математическая модель оптимизации структуры и размеров производств ЛПК лесоизбыточного региона

С целью разработки экономико-математической модели примем следующие условные обозначения:

k - индекс породно-размерно-качественной (ПРК) группы древесины, $k=\overline{1,\xi}$, где ξ - число ПРК групп, по которым дифференцирован запас древесины в сырьевой базе региона;

k' - индекс вида отходов (от раскряжевки, лесопиления, шпалопиления и пр.), возможных к использованию в качестве вторичного сырья в соответствующих деревоперерабатывающих производствах (щепы для ЦБП, ДСП, ДВП, и др.), $k'=\overline{1,\xi'}$;

j - индекс товарных не сырьевых сортиментов (стройлес, столбы, сваи, опоры, рудстойка) круглых лесоматериалов заготавливаемых в регионе, $j=\overline{1,n}$;

соответственно для поставок

j_1 - внутрирегиональным потребителям;

j_2 - в другие регионы России;

j_3 - на экспорт;

r - индекс сырьевых сортиментов (фанерн., спич., тарн.кряжи, пиловочник, шпальник, балансы) круглых лесоматериалов, $r=\overline{1,\varepsilon}$;

соответственно для поставок:

r_1 - внутрирегиональным деревоперерабатывающим производствам;

r_2 - в другие регионы России;

r_3 - на экспорт;

l - индекс наименования готовой продукции, вырабатываемой только из первичного сырья (пилопродукция, фанера, шпалы), $l=\overline{1,L}$;

l' - то же, из первичного и вторичного сырья (продукция: ЦБП, ДСП, ДВП, тара, лесохимическая);

d - индекс низкосортной (дровяной) древесины, d=1,2; d_1 - технологической, d_2 - топливной.

Обозначения базовой исходной информации:

Q - допустимый годовой объем заготовки древесины в лесосырьевой базе региона, исходя из расчетной лесосеки;

q_k - объем древесины дифференцированный по ПРК группам, отведенной в рубку на год по лесосырьевой базе региона, исходя из средних характеристик эксплуатационного запаса;

M_r - суммарные (по региону) годовые мощности по видам деревоперерабатывающих производств (*r* - фанерного, лесопильного, шпалорезного; *r'*- ЦБП, ДСП, ДВП, тарного, лесохим.), выраженные объемами переработки сырья за год;

P_{j_1}; P_{r_1};- суммарные годовые потребности внутрирегиональных потребителей по видам товарных и сырьевых сортиметнов;

$\underline{P}_{j_2};\underline{P}_{r_2}$ - обязательства по поставкам товарных и сырьевых сортиментов в другие регионы России, если таковые имеют место;

$\underline{P}_{j_3};\underline{P}_{r_3}$- обязательства по поставкам товарных и сырьевых сортиментов на экспорт, если имеют место соответствующие контракты;

$P_{r_1 l};P_{r'_1 l'}$ - годовые потребности внутрирегиональных потребителей готовой (*l* и *l'*) продукции деревоперерабатывающих производств.

Обозначения основной группы искомых переменных:

$x_{j_1 k}$ - годовой объем заготовки *j*-го товарного сортимента круглых лесоматериалов из *k*-й ПРК группы древесины для обеспечения внутрирегиональных потребностей;

$x_{j_2 k}$ - то же для поставки в другие регионы России;

$x_{j_3 k}$ - то же для поставки на экспорт;

$x_{r_1 kl}$ - годовой объем заготовки *r*- го сырьевого сортимента из *k*-й ПРК группы древесины для переработки внутри региона на выпуск *l*-й продукции (в производствах перерабатывающих только первичное сырье);

$x_{r_2 k}$ - то же для поставки (без переработки) в другие регионы России;

$x_{r_3 k}$ - то же для поставки на экспорт;

$x_{r'_1 kl'}$ - годовой объем заготовки *r*-го сырьевого сортимента из *k*-й ПРК группы древесины для переработки на *l'*-ю продукцию в *r'* -х производствах, использующих как первичное, так и вторичное сырье:

$x_{r'_1 k'l'}$ - годовой объем образования *k'*-го вторичного сырья и, соответственно переработки его в *r'*-ом производстве на выпуск *l'*-й продукции;

$x_{d_1 kl''}$ - годовой объем заготовки *d*-й низкосортной древесины из *k*-й ПРК группы и переработки ее на выпуск *l''*-й продукции;

$x_{d_2 k}$ - годовой объем заготовки *d*-й топливной древесины;

$x_{k'}$ - объем *k'*-х отходов, используемых в качестве топлива.

Критерий оптимальности

При решении оптимизационных задач исключительное значение придается выбору критерия (критериев) оптимальности.

В наиболее простом варианте задачи решаются с каким-то одним критерием, взятым в линейной зависимости, например, на максимум суммарной прибыли (или дохода, либо объема товарной продукции в действующих ценах) от реализации всей продукции ЛПК или на минимум суммарных приведенных затрат (в экономической литературе этот показатель подвергался критике. Однако, в сочетании с другими показателями его можно использовать) и другие.

Возможны решения задач с учетом нелинейной зависимости критерия оптимальности от изменения объема производства.

Решение задачи может быть выполнено как многокритериальное, используя для этого разные экономические показатели, и разные пути решения. Это предпочтительно.

Все эти вопросы достаточно подробно нами были освещены в предшествующих главах этой книги, а также в экономико-математической литературе, в том числе и в работах автора (см.список трудов).

Далее рассмотрим формирование Э.-м.м. этой важной и в то же время не простой проблемы, однако без детализации пояснений, - в надежде на то, что читатель получил некоторые знания из предыдущих разделов по методике экономико-математического моделирования.

Целевая функция, отражающая суммарный доход (или суммарный объем товарной продукции и т.п.), представлена следующим уравнением:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \sum_{j,k}^{n,\xi} C_{j_1k} x_{j_1k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} C_{j_2k} x_{j_2k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} C_{j_3k} x_{j_3k} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} C_{r_1kl} x_{r_1kl} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} C_{r_2k} x_{r_2k} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} C_{r_3k} x_{r_3k} + \\ & + \sum_{r',k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} C_{r'_1kl'} x_{r'_1kl'} + \sum_{r',k',l'}^{\varepsilon,\xi',L'} C_{r'_1k'l'} x_{r'_1k'l'} + \sum_{k,l''}^{\xi,L''} C_{d_1kl''} x_{d_1kl''} + \sum_{k} C_{d_2k} x_{d_2k} + \sum_{k'=1}^{\xi'} C_{k'} x_{k'} \to \max. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Первый и второй блоки ограничений представляют условия использования первичных суммарных лесосырьевых ресурсов и с учетом характеристики их запасов по ПРК группам, и соблюдения гостов по заготовке сортиментов (в соответствии с сортиментными таблицами)

- по общему допустимому объему заготовки древесины

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k}^{n,\xi} x_{j_1k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} x_{j_2k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} x_{j_3k} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} x_{r_2k} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} x_{r_3k} + \\ & + \sum_{r',k',l'}^{\varepsilon,\xi,L'} x_{r'_1k,l'} + \sum_{k,l''}^{\varepsilon,L'} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2k} \le Q, \end{aligned} \tag{10.9}$$

здесь Q - max. допустимый годовой объем заготовки (вывозки) древесины по региону, исходя из расчетной лесосеки;

- в разрезе запасов по ПРК группам древесины.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{j_1k} + \sum_{j=1}^{n} x_{j_2k} + \sum_{j=1}^{n} x_{j_3k} + \sum_{r,l}^{\varepsilon,L} x_{r_1kl} + \sum_{r=1}^{\varepsilon} x_{r_2k} + \sum_{r=1}^{\varepsilon} x_{r_3k} + \\ & + \sum_{r',l'}^{\varepsilon,L'} x_{r'_1k,l'} + \sum_{l''}^{L''} x_{d_1kl''} + x_{d_2k} \le q_k; \;\; k = \overline{1,\xi}, \end{aligned} \tag{10.10}$$

Поскольку из решения проблемы необходимо установить объем развития (наращивания) лесозаготовительных производств в регионе (Z_1), в модель задачи вводится ограничение

$$\sum_{j_1,k}^{n,\xi} x_{j_1k} + \sum_{j_2,k}^{n,\xi} x_{j_2k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} x_{j_3k} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} x_{r_2k} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} x_{r_3k} + \\ + \sum_{r',k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} x_{r'_1k,l'} + \sum_{k,l''}^{\xi,L''} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2k} - Z_1 = Q^0, \tag{10.11}$$

где: Q^0- достигнутый годовой объем вывозки древесины по региону в целом;

Z_1 - объем развития лесозаготовок (вывозки) по региону в планируемом перспективном периоде.

Ограничительные условия по образованию объемов вторичного сырья (k') на нижних складах ЛПХ и дальнейшему использованию их, наряду с первичным сырьем в соответствующих деревоперерабатывающих производствах на выпуск готовой продукции (l') представлены следующими системами линейных уравнений:

$$\sum_{j,k}^{n,\xi} \gamma_{k'k} x_{j_1k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} \gamma_{k'k} x_{j_2k} + \sum_{j,k}^{n,\xi} \gamma_{k'k} x_{j_3k} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} \gamma_{k'k} x_{r_1kl} + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} \gamma_{k'k} x_{r_2k} + \\ + \sum_{r,k}^{\varepsilon,\xi} \gamma_{k'k} x_{r_3k} + \sum_{r',k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} \gamma_{k'k} x_{r'_1kl'} + \sum_{k,l''}^{\xi,L''} \gamma_{k'k} x_{d_1k,l''} + \sum_{k=1}^{\xi} \gamma_{k'k} x_{d_2k} - \sum_{r',l'}^{\varepsilon',L'} x_{r'_1k'l'} - x_{k'} = 0, \quad k' = \overline{1,\xi'}, \tag{10.12}$$

здесь: $\gamma_{k'k}$ - коэффициенты, характеризующие нормы образования отходов от раскряжевки и др., которые могут использоваться в качестве вторичного сырья в некоторых деревоперерабатывающих производствах (тарном, ДСП, щепы для ЦБП и др.);

$x_{r'_1k'l'}$ - объемы образования и дальнейшей переработки k'-го вторичного сырья в r'_1-м деревоперерабатывающем производстве на выпуск l' продукции;

x'_k - объемы образования k' отходов, неиспользуемых в деревоперерабатывающих производствах, направляемых в качестве топлива.

Следующий блок ограничений характеризует условия обеспечения сырьем деревоперерабатывающих производств (лесопильных, фанерных и шпалорезных)региона, расположенных как на собственных промплощадках, так и на нижних складах ЛПХ, перерабатывающих лишь первичное сырье:

а) без исследования возможностей и целесообразности расширения и нового строительства

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} \le M_r, \quad r = \overline{1,\varepsilon}; \tag{10.13}$$

здесь M_r - суммарные по региону мощности r -х деревоперерабатывающих производств, выраженные возможными объемами переработки сырья в год;

б) с учетом исследования возможностей расширения действующих и строительства новых мощностей

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} - M'_r\, y_r \le 0, \quad r = \overline{1,\varepsilon}; \tag{10.13'}$$

здесь: M'_r - минимальные типовые мощности цехов (или потоков, агрегатов), выраженные объемами переработки сырья в год;

y_r -искомые переменные, характеризующие коэффициент кратности, на которые налагаются ограничения целочисленности решения: y=0,1,2,3,... - для новых производств; y=1(2),3... - для действующих; здесь нижняя граница устанавливается в зависимости от величины достигнутых объемов производства.

Если по каким-то деревоперерабатывающим производствам в э.-м.м. включены ограничения типа (10.13'), из решения проблемы необходимо установить объемы развития (наращивания) этих производств. Для этого в модель задачи вводятся ограничения

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} - Z_r = M_r^0, \quad r = \overline{1,\varepsilon}; \tag{10.14}$$

где: M_r^0 - достигнутый готовой объем переработки сырья в r-х деревоперерабатывающих производствах;

Z_r - объем развития r-го производства

Ограничения по условиям образования в деревоперерабатывающих производствах вторичного сырья и его дальнейшего использования при выпуске готовой продукции в соответствующих производствах представлены следующими уравнениями:

$$\sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} \gamma_{k'r} x_{r_1kl} - \sum_{r',l'}^{\varepsilon',\xi'} x_{r'_1k'l'} - x_{k'} = 0, \quad k' = \overline{1,\xi'}; \tag{10.15}$$

здесь $\gamma_{k'r}$ - коэффициенты, характеризующие нормы образования (в фанерном, лесопильном, шпалорезном производствах) отходов, которые могут быть направлены в качестве вторичного сырья в некоторые деревоперерабатывающие производства (ЦБП, ДСП, гидролизное и др.) для производства готовой продукции l'.

Ограничения по условиям обеспечения первичным и вторичным сырьем деревоперерабатывающих производств (ЦБП,ДВП,ДСП, тары и др.) региона:

а) без исследования возможностей и целесообразности расширения действующих и строительства новых

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1k'l'} \le M_{r'_1}; \quad r' = \overline{1,\xi'}; \tag{10.16}$$

здесь: $M_{r'_1}$ - суммарные по региону мощности r'-х деревоперерабатывающих производств (ЦБП, ДСП и др.), выраженные объемами переработки сырья в год;

$\varphi_{k'k}$ - коэффициент взаимозаменяемости первичного сырья (k) вторичным (k'), если они неравноценны; $\varphi \geq 1$;

б) с учетом исследования возможностей и целесообразности расширения действующих и строительства новых мощностей

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1k'l'} - M'_{r'} \; y_{r'} \le 0, \; r' = \overline{1,\xi'}; \tag{10.16'}$$

здесь: $M'_{r'}$ - минимальная типовая мощность потока или агрегата, выраженная объемом переработки сырья в год; $y_{r'}$ - искомая переменная, на которую налагается условие целочисленности решения: y=0,1,2,3,... - по новым производствам, y=1(2),3... - по действующим.

В ограничительные условия (10.16) и (10.16') по деревообрабатывающим производствам (тарное, щепы и т.п.), использующим технологические дрова наряду с другими видами сырья, в левую часть неравенств вводится дополнительное слагаемое

$\sum_{k,l''}^{\xi,L''} x_{d_1kl''}$, характеризующее объем переработки технологических дров на выпуск l''-й продукции.

В некоторых случаях, исходя из сложившихся интеграционных связей с близлежащими регионами, в левую часть неравенств (10.13; 10.13'; 10.16 и 10.16') могут входить дополнительные слагаемые $\sum_{k,l}^{\xi,L} x'_{r_1kl}$, характеризующие объемы переработки сырьевых сортиментов, поставляемых из соседних регионов страны. В этом случае они должны войти и в уравнение целевой функции.

Как и в предыдущем случае (10.14), если в э.-м.м. содержатся условия (10.16') в модель задачи вводятся дополнительные ограничения, посредством которых устанавливается объем развития соответствующих деревоперерабатывающих производств

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1 kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1 k'l'} - Z_{r'} = M_{r'}^0 \quad r' = \overline{1,\xi'}\,; \tag{10.17}$$

здесь $Z_{r'}$ - характеризует объем развития соответствующих r'-х деревоперерабатывающих производств.

Следующий блок ограничений характеризует условия обеспечения товарными сортиментами внутрирегиональных потребителей в соответствии с их потребностями

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_1 k} = P_{j_1},\ j_1 = \overline{1,n}. \tag{10.18}$$

Ограничительные условия по заготовкам и поставкам в другие регионы России товарных и сырьевых сортиментов, при определенных частичных договорных обязательствах ($\underline{P}$), представлены следующими неравенствами:

по товарным сортиментам

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_2 k} \geq \underline{P}_{j_2},\ j_2 = \overline{1,n}; \tag{10.19}$$

по сырьевым сортиментам

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{r_2 k} \geq \underline{P}_{r_2},\ r_2 = \overline{1,\varepsilon}. \tag{10.20}$$

В случае отсутствия соответствующих договорных обязательств в модель задачи могут быть включены ограничения:

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_2 k} \geq 0,\ j_2 = \overline{1,n}.\ \text{и} \tag{10.19'}$$

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{r_2 k} \geq 0,\ r_2 = \overline{1,\varepsilon}., \tag{10.20'}$$

которые позволяют установить возможности, экономическую целесообразность и объемы заготовки соответствующих товарных (10.19') и сырьевых (10.20') сортиментов для реализации в другие регионы России.

Подробным образом формируются ограничения по условиям заготовки и поставки на экспорт:

товарных сортиментов

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_3 k} \geq \begin{cases} \underline{P}_{j_3} \\ 0, \end{cases} \quad j_3 = \overline{1,n}, \tag{10.21}$$

сырьевых сортиментов

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{r_3 k} \geq \begin{cases} \underline{P}_{r_3} \\ 0, \end{cases} \quad r_3 = \overline{1,\varepsilon}. \tag{10.22}$$

Ограничения по условию заготовки топливной (дровяной) древесины для обеспечения внутрирегиональных потребителей в соответствии с их потребностями (P_{d2}) представлены следующими уравнениями:

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2 k} + \sum_{k'=1}^{\xi'} x_{k'} = P_{d_2}, \tag{10.23}$$

здесь $x_{k'}$ - объем отходов, используемых в качестве топлива.

Следующий блок ограничений характеризует условия, обеспечения готовой продукцией (l) деревообрабатывающих производств (фанерного, лесопильного и шпалорезного) внутрирегиональных потребителей в соответствии с их потребностями (P_{rl}) и возможностями ее производства для поставок в другие регионы России и на экспорт

$$\sum_{k=1}^{\xi}\eta_{r_1kl}x_{r_2kl_1}-x_{r_1l_2}-x_{r_1l_3}=P_{r_1l_1},\quad \begin{cases} r_1=\overline{1,\varepsilon}, \\ l=\overline{1,L}, \end{cases} \tag{10.24}$$

здесь: η_{r_1kl} - коэффициенты полезного выхода продукции l в r-м производстве из первичного сырья k-й ПРК группы древесины;

$x_{r_1l_2}, x_{r_1l_3}$ - искомые переменные, характеризующие объемы производства и поставки продукции соответственно в другие регионы ($x_{r_1l_2}$) и на экспорт ($x_{r_1l_3}$).

Если в сложившихся производственных условиях договорами и контрактами оговорены частичные объемы поставки каких-то видов продукции (l) в другие регионы и на экспорт, на переменные $x_{r_1l_2}, x_{r_1l_3}$ налагаются соответствующие ограничения:

$$x_{r_1l_2}\ge P_{r_1l_2},\qquad x_{r_1l_3}\ge P_{r_1l_3},\qquad \begin{cases} r=\overline{1,\varepsilon}, \\ l=\overline{1,L}. \end{cases} \tag{10.25}$$

Подобным образом формируются ограничения по условиям обеспечения продукцией l' (ЦБ,ДСП,ДВП, тарой и др.) внутрирегиональных потребителей и возможности производства и поставки ее в другие регионы и на экспорт

$$\sum_{k=1}^{\xi}\eta_{r'_1kl'}x_{r'_1kl'}+\sum_{k'=1}^{\xi'}\eta_{r'_1k'l'}x_{r'_1k'l'}-x_{r'_1l'_2}-x_{r'_1l'_3}=P_{r'_1l_1},\begin{cases} r'_1=\overline{1,\varepsilon'}, \\ l'=\overline{1,L'}, \end{cases} \tag{10.26}$$

здесь $\eta_{r'_1k'l}'$ - коэффициенты полезного выхода продукции l' из вторичного сырья k'.

На переменные $x_{r'_1l'_2}, x_{r'_1l'_3}$, характеризующие возможные объемы производства продукции l' для поставок в другие регионы России и на экспорт могут быть наложены ограничения:

$$x_{r'_1l'_2}\ge P_{r'_1l'_2},\qquad x_{r'_1l'_3}\ge P_{r'_1l'_3},\qquad \begin{cases} r_1'=\overline{1,\varepsilon'}, \\ l'=\overline{1,L'}, \end{cases} \tag{10.27}$$

если имеют место соответствующие договорные и контрактные обязательства.

Однако при отсутствии обязательств, для определения целесообразности производства и поставки, например, на экспорт, условие (10.27) примет вид

$$x_{r_1'l_3'}\ge 0 \tag{10.27'}$$

Поскольку в модели содержатся ограничения (10.13' и 10.14; 10.16' и 10.17), исследующие возможности и экономическую целесообразность расширения действующих и строительства новых деревоперерабатывающих производств, а также и условие развития лесозаготовительных производств (10.11) региона, в модель задачи следует ввести дополнительное ограничение по наличию собственных (*Д*) и возможному привлечению со стороны (U) денежных средств на эти цели

$$\upsilon_1 Z_1+\sum_{r=1}^{\varepsilon}\upsilon_r Z_r+\sum_{r'=1}^{\varepsilon'}\upsilon_{r'}Z_{r'}-u=Д, \tag{10.28}$$

здесь: υ - удельные нормы капиталовложений на расширение действующих и строительство новых производств, в рубл. (или усл.ден.)на ед. мощности;

u - искомая неизвестная характеризующая величину привлекаемых со стороны денежных средств; на ее величину может быть наложено ограничение верхнего предела привлекаемых средств:

$$U \le Д'. \qquad (10.29)$$

При решение этой важнейшей и довольно сложной проблемы в Э.-м. модель могут быть включены и некоторые другие ограничения, например, по условиям потребности обеспечения энергетическими и трудовыми ресурсами при решении вопроса развития производств, особенно по регионам с ограниченными энергетическими и трудовыми ресурсами.

Потребность в дополнительных W ресурсах вида m может быть выражена уравнениями

$$\omega_1 Z_1 + \sum_{k=1}^{\varepsilon} \omega_r Z_r + \sum_{k'=1}^{\varepsilon'} \omega_{r'} Z_{r'} - W_m = 0. \qquad (10.30)$$

Однако, здесь следует заметить, что увлекаться расширением учета ограничительных условий не следует, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, это усложняет и без того сложную э.-м.м и размер задачи. Во-вторых, какое-нибудь второстепенное не определяющее условие "уведет" от оптимального решения проблемы.

Таким образом, нами сформулирована экономико-математическая модель решения проблемы оптимизации структуры и размеров производств в лесопромышленном комплексе лесоизбыточного региона. В основу постановки проблемы, как видно из изложенного материала, заложены основные - определяющие факторы формирования ЛПК: наличие лесосырьевых ресурсов в регионе, их качественная характеристика, сортиментные таблицы, наличие производственных мощностей лесозаготовительного и деревоперерабатывающих производств, возможности и целесообразность их развития.

В то же время, решение проблемы рассматривается без детализации по некоторым признакам: без учета фактора внутритерриториального размещения производств, а следовательно без учета транспортных связей; без детализации выпуска продукции по ассортименту в деревоперерабатывающих производствах. Безусловно, математика и современные ЭВМ позволяют учесть и эти факторы при решении единой комплексной задачи. Однако, в этом случае размер задачи увеличивается в несколько раз, делает ее сложно решаемой, особенно в части подготовки и обработки исходной информации. В то же время, решение этих дополнительных вопросов (ассортиментный состав продукции деревоперерабатывающих производств, транспортные связи в ЛПК) успешно может быть достигнуто посредством решения оптимизационных региональных задач второго низшего уровня.

10.3. Оптимизация реструктуризации производств ЛПК лесодефицитного региона

За годы общего спада экономики страны по причинам так называемых экономических реформ резко упали объемы заготовки и переработки древесины по всем регионам страны.

Расчетная лесосека используется менее чем на одну треть.

Такая ситуация характерна как для многолесных, так и лесодефицитных регионов.

Имеют место значительные возможности развития ЛПК по многолесным регионам, а также резервы развития ЛПК лесодефицитных регионов (в пределах расчетной лесосеки).

В условиях возрождения лесной и лесоперерабатывающей отраслей промышленности особое значение приобретает решение проблемы оптимизации структуры и размеров производств ЛПК лесоизбыточных регионов, реструктуризации ЛПК лесодефицитных регионов страны и разработки устойчивых интеграционных связей между ними.

Как для лесодефицитных, так и многолесных регионов страны большое значение имеет установление, развитие и дальнейшая стабилизация взаимовыгодных интеграционных связей по поставкам сырьевых и товарных круглых лесоматериалов и готовой продукции лесопереработки. Решение этой проблемы неотделимо от установления планов развития ЛПК-ов регионов, - они взаимосвязаны и взаимообусловлены. Исходя из этих позиций должна рассматриваться проблема реструктуризации и развития ЛПК региона.

Принципиальная содержательная постановка и структура экономико-математической модели решения проблемы реструктуризации производств ДПК лесодефицитного региона в условиях имеющихся резервов возможного развития производств, остаются такими же, как изложена выше в (10.2).

В условиях дефицита лесосырьевых ресурсов для полного обеспечения собственным производством потребностей региона в круглых лесоматериалах и сырья для ДОП и ДПП и готовой продукции из древесины, экономико-математическая модель решения проблемы должна в полной мере учитывать и эти условия.

Рассмотрим некоторые особенности в построении экономико-математической модели решения проблемы оптимизации реструктуризации ЛПК для тех регионов, в которых лесосырьевые ресурсы истощены.

Обозначения исходной информации и искомых переменных оставим такими же, которые приняты ранее в (10.2).

Обозначения дополнительных групп искомых переменных

x_{j_2k} - объем ввоза в регион *j*-го сортимента круглых лесоматериалов из других регионов страны;

x_{r_2kl}; $x_{r_2'kl'}$ - годовые объемы ввоза в регион сырьевых сортиментов и последующей их переработки в «собственных» ДОП и ДПП на выпуск готовой продукции l и l';

x_{rl}; $x_{r'l'}$ - объемы ввоза в регион готовой продукции (l и l') из других регионов.

Уравнение целевой функции, по соответствующему критерию оптимальности, будет характеризовать суммарный экономический результат производственной деятельности лесозаготовительных и лесоперерабатывающих производств ЛПК региона, с учетом интеграционных связей с ЛПК других регионов и экспортом:

$$F(x) = \sum_{j,k}^{n,\xi} C_{j_1k} x_{j_1k} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} C_{r_1kl} x_{r_1kl} + \sum_{k,l''}^{\xi,L''} C_{d_1kl''} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} C_{d_2k} x_{d_2k} + \sum_{r',k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} C_{r'_1kl'} x_{r'_1kl'} +$$
$$+ \sum_{r',k',l'}^{\varepsilon',\xi',L'} C_{r'_1k'l'} x_{r'_1k'l'} + \sum_{r,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} C_{r_2kl} x_{r_2kl} + \sum_{r',k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} C_{r'_2kl'} x_{r'_2kl'} + \sum_{k'=1}^{\xi'} C_{k'} x_{k'} + \sum_{k''=1}^{\xi''} C_{k''} x_{k''} + \qquad (10.31)$$
$$+ \sum_{j_3,k}^{n_3,\xi} C_{j_3k} x_{j_3k} + \sum_{r_3,k}^{\varepsilon_3,\xi} C_{r_3k} x_{r_3k} \to \max, \text{ при} \geq 0.$$

Здесь в отличие от целевой функции (10.8) седьмой и восьмой слагаемые, характеризуют экономический эффект от переработки ввозимого сырья.

Ограничение по возможным общим объемам заготовки древесины в регионе в пределах расчетной лесосеки (Q)

$$\sum_{j_1k}^{n_1\xi} x_{j_1k} + \sum_{r_1kl}^{\varepsilon_1,\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{r'_1kl'}^{\varepsilon'_1,\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k_1l''}^{\xi,L''} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2k} + \sum_{j_3,k}^{n_3,\xi} x_{j_3k} + \sum_{r_3k}^{\varepsilon_3\xi} x_{r_3k} \le Q. \tag{10.32}$$

Ограничение, характеризующее развитие или сокращение собственного (внутрирегионального) объема ЛЗ производства

$$\sum_{j_1k}^{n_1\xi} x_{j_1k} + \sum_{r_1kl}^{\varepsilon_1,\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{r'_1kl'}^{\varepsilon'_1,\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k_1l''}^{\xi,L''} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2k} + \sum_{j_3,k}^{n_3,\xi} x_{j_3k} + \sum_{r_3k}^{\varepsilon_3\xi} x_{r_3k} \pm Z_1 = Q^0, \tag{10.33}$$

здесь Z_1 - годовой объем развития (-Z) лесозаготовительного производства на конец расчетного перспективного периода; при дефицитных условиях +Z_1 будет характеризовать сокращение лесозаготовительного (ЛЗ) производства.

Здесь Q – допустимый годовой объем заготовки древесины в лесосырьевой базе региона, исходя из расчетной лесосеки;

Q^0 – достигнутый годовой объем заготовки древесины в регионе.

Ограничения по условию использования внутрирегиональных запасов лесосырьевой базы в разрезе их качественных характеристик, - по ПРК группам примет вид:

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} x_{j_1k} + \sum_{r_1l}^{\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{r_1'l'}^{\varepsilon'_1,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{l''=1}^{L''} x_{d_1kl''} + x_{d_2k} + \sum_{j_3=1}^{n_3} x_{j_3k} + \sum_{r_3=1}^{\varepsilon_3} x_{r_3k} \le q_k, k = \overline{1,\xi}. \tag{10.34}$$

Ограничения по условию образования в ЛЗ производстве отходов и использования их в качестве вторичного сырья для производства соответствующей продукции l'

$$\begin{gathered}\sum_{j_1k}^{n_1,\xi} \gamma_{k'k} x_{j_1k} + \sum_{r_1,k,l}^{\varepsilon_1,\xi,L} \gamma_{k'k} x_{r_1kl} + \sum_{r'_1,k,l'}^{\varepsilon',\xi,L'} \gamma_{k'k} x_{r'_1kl'} + \sum_{k,l''}^{\xi,L''} \gamma_{k'k} x_{d_1kl''} + \sum_{k=1}^{\xi} \gamma_{k'k} x_{d_2k} + \sum_{j_3,k}^{n_3,\xi} \gamma_{k'k} x_{j_3k} + \\ + \sum_{r_3,k}^{\varepsilon_3,\xi} \gamma_{k'k} x_{r_3k} - \sum_{r'_1,l'}^{\varepsilon'_1,L'} x_{r'_1k'l'} - x_{k'} = 0, \quad k' = \overline{1,\xi'},\end{gathered} \tag{10.35}$$

здесь: $\gamma_{k'k}$ - коэффициенты образования отходов k' при раскряжевке древесины k-й ПРК группы древесины;

$x_{r'_1k'l'}$ - объемы образования отходов и использования их в качестве вторичного сырья k' для производства продукции l';

$x_{k'}$ - объемы образования k' -х отходов, неиспользуемых в ДОП, направляемых в качестве топлива.

Ограничения по обеспечению сырьем ДОП производств (фанерного, лесопильного, шпалорезного, спичечного), перерабатывающих только первичное сырье

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_2kl} \le M_r,\ r = \overline{1,\varepsilon}, \tag{10.36}$$

здесь x_{r_2kl} - объем переработки r_2-го сырья, завозимого из других регионов. На эти переменные могут быть наложены ограничения по возможностям завоза сырья из других регионов

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_2kl} \le \overline{P}_{r_2},\ r = \overline{1,\varepsilon}. \tag{10.37}$$

Здесь $\overline{P}_{r_2}$ - max возможный объем ввоза сырья (r_2) из других регионов.

Ограничительные условия (10.36) могут входить в э.-м.модель решения проблемы в форме, позволяющей исследовать возможности и целесообразность расширения действующих и строительства новых или постепенного сокращения некоторых действующих ДП мощностей:

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_2kl} - M'_r\, y_r = 0,\; r = \overline{1,\varepsilon}, \tag{10.36'}$$

где: M'_r - min. типовая мощность цеха (агрегата, потока), выраженная годовым объемом переработки сырья;

y_r - искомая переменная, характеризующая коэффициент кратности; на которую налагается условие целочисленности решения: y=0,1,2,3,... - по новым производствам, y=1,(2),3,... - по действующим производствам.

Если по каким-то ДОП производствам в э.-м.м вошли ограничения типа (10.36'), в решении проблемы объемы развития (-Z_r) или частичного сокращения (+Z_r) этих производств определяются из условия:

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_1kl} + \sum_{k,l}^{\xi,L} x_{r_2kl} \pm Z_r = M_r^0,\; r = \overline{1,\varepsilon}, \tag{10.37'}$$

где: M_r^0 - достигнутая годовая мощность r-го ДОП производства по переработке сырья;

Z_r - объем развития (-) или сокращения (+) r-го ДОП производства.

Ограничения по условию образования k'-х отходов в r-х ДОП производствах и дальнейшему их использованию в соответствующих r'-х производствах представлены следующими уравнениями:

$$\sum_{r_1,k,l}^{\varepsilon,\xi,L} \gamma_{k'r} x_{r_1kl} + \sum_{r_2,k,l}^{\varepsilon_2,\xi,L} \gamma_{k'r} x_{r_2kl} - \sum_{r',l'}^{\varepsilon',L'} x_{r'_1k'l'} - x_{k''} = 0,\quad k' = \overline{1,\xi'}, \tag{10.38}$$

где: $\gamma_{k'r}$ - коэффициенты, характеризующие образование k'-х отходов в фанерном, лесопильном и шпалорезном ДОП производствах;

$x_{r'_1k'l'}$ - объемы образования отходов и дальнейшего использования их в качестве вторичного сырья в r'_1-х ДОП производствах;

$x_{k''}$ - объемы образования k''-х отходов, направляемых для дальнейшего использования в качестве топлива.

Ограничения по условиям обеспечения сырьем (первичным собственным и привозным, и вторичным) r'_1-х ДОП производств (ЦБ,ДСП,ДВП, тары и др.) представлены следующими неравенствами

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_2kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1k'l'} \le M_{r'},\; r' = \overline{1,\varepsilon'}; \tag{10.39}$$

здесь $\varphi_{k'k}$ - коэффициенты взаимозаменяемости первичного k-го сырья k'-м вторичным, $\varphi_{k'k} \ge 1$.

Ограничения (10.39) могут быть включены в э.-м.м иными неравенствами, если мы хотим исследовать возможности и целесообразность расширения или постепенного сокращения соответствующих мощностей:

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1kl'} + \sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_2kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1k'l'} - M'_{r'}\, y_{r'} \le 0,\qquad r' = \overline{1,\varepsilon'}. \tag{10.39'}$$

В левую часть ограничений (10.39) и (10.39') могут быть введены дополнительные слагаемые $\sum_{k,l'}^{\xi,L'} \varphi_{dk} x_{d_1kl'}$, характеризующие объемы переработки низкосортной древесины (технологических дров), если в производстве l'-й продукции r'-х ДОП производств это допустимо по технологии производства.

Если в э.-м.м по каким-то r'_1 -м ДОП и ДПП производствам включены ограничения (10.39'), исследующие возможности и целесообразность расширения действующих и нового строительства мощностей с одной стороны или постепенного сокращения некоторых производств с другой стороны; в модель войдут ограничения, характеризующие объемы развития ($-Z_{r'}$) или сокращения ($+Z_{r'}$) соответствующих мощностей:

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_1 kl'} + \sum_{k,l'}^{\xi,L'} x_{r'_2 kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \varphi_{k'k} x_{r'_1 k'l'} \pm Z_{r'} = M^0_{r'},\ r' = \overline{1,\varepsilon'}; \qquad (10.40)$$

где: $M^0_{r'}$ - достигнутая годовая мощность r'-го ДОП производства по переработке сырья.

Следующий блок ограничений характеризует условия обеспечения товарными несырьевыми сортиментами круглых лесоматериалов внутрирегиональных потребителей, в соответствии с их потребностями, за счет собственных лесозаготовок и ввоза из других регионов, примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{j_1 k} + \sum_{k=1}^{\xi} x_{j_2 k} - \sum_{k=1}^{\xi} x_{j_3 k} = P_j, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (10.41)$$

здесь: $x_{j_2 k}$ - объем ввоза j-го сортимента из других регионов;

$x_{j_3 k}$: - объем возможной поставки на экспорт.

Ограничение по условию обеспечения внутрирегиональных потребителей топливной древесиной представлено уравнением

$$\sum_{k=1}^{\xi} x_{d_2 k} + \sum_{k'=1}^{\xi'} x_{k'} + \sum_{k''=1}^{\xi''} x_{k''} = P_{d_2}. \qquad (10.42)$$

Следующий блок ограничений характеризует условия обеспечения внутрирегиональных потребителей готовой продукции - l (фанерн.,лесопильн., шпалорезной) и - l' (ЦБП, ДСП, ДВП, тарн.,лесохим.) за счет собственного производства и завоза из других регионов:

$$\sum_{k,l}^{\xi,L} \eta_{r_1 kl} x_{r_1 kl} + \sum_{k,l}^{\xi,L} \eta_{r_2 kl} x_{r_2 kl} + x_{rl_2} - x_{rl_3} = P_{rl}, \qquad r = \overline{1,\varepsilon}; \qquad l = \overline{1,L}; \qquad (10.43)$$

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} \eta_{r'_1 kl'} x_{r'_1 kl'} + \sum_{k,l'}^{\xi,L'} \eta_{r'_2 kl'} x_{r'_2 kl'} + \sum_{k',l'}^{\xi',L'} \eta_{r'_1 k'l'} x_{r'_1 k'l'} + x_{r'l'_2} - x_{r'l'_3} = P_{r'l'}, \qquad \begin{cases} r' = \overline{1,\varepsilon'}, \\ l' = \overline{1,L'}, \end{cases} \qquad (10.44)$$

здесь: η - коэффициенты, характеризующие полезный выход продукции из единицы сырья;

$x_{rl_2}, x_{r'l'_2}$ - переменные, характеризующие завоз готовой продукции из других регионов;

$x_{rl_3}, x_{r'l'_3}$ - переменные, характеризующие возможные поставки готовой продукции l и l' из региона на экспорт.

В ограничительные условия (10.44) по некоторым ДОП и ДПП производствам в левую часть уравнений вводится слагаемый

$$\sum_{k,l'}^{\xi,L'} \eta_{d_1 kl'} x_{d_1 kl'},$$

характеризующий выход готовой продукции из переработанной низкосортной древесины (технологических дров).

Поскольку в э.-м.м содержатся ограничительные условия (10.36' и 10.37), (10.39' и 10.40) исследующие возможности и экономическую целесообразность развития или частичного сокращения ДОП и ДПП производств, а также условие (10.33) развития ЛЗ производств, в модель задачи следует ввести ограничение по наличию собственных денежных (Д) и привлекаемых средств на эти цели

$$\upsilon_1 Z_1 + \sum_{r=1}^{\varepsilon} \upsilon_r Z_r + \sum_{r'=1}^{\varepsilon'} \upsilon_{r'} Z_{r'} - U = D\,, \qquad (10.45)$$

здесь: υ - удельные нормы капиталовложений на развитие (или свертывание) производств;

U - искомая неизвестная, характеризующая величину привлекаемых средств; на ее величину может быть наложено ограничение верхнего предела: $U \le D'$.

При решении этой значимой и довольно сложной проблемы в э.-м.м, при необходимости, могут быть включены и некоторые дополнительные ограничения, например, по условию потребности обеспечения дополнительными энергоресурсами (трудовыми и др.), особенно по ресурсодефицитным регионам.

Потребность в дополнительных ресурсах V вида m может быть выражена уравнениями:

$$\omega_1 Z_1 + \sum_{r=1}^{\varepsilon} \omega_r Z_r + \sum_{r'=1}^{\varepsilon} \omega_{r'} Z_{r'} - V_m = 0 \qquad (10.46)$$

Далее расширять ограничительные условия следует с особой осторожностью. Здесь они в полной мере нашли свое отражение. Структура и размеры производств ЛПК определяются исходя из: наличия лесосырьевых ресурсов региона, их качественной (по ПРК группам) характеристики, возможностей развития или сокращения лесозаготовок, сортиментных таблиц, наличия и показателей работы мощностей производств, учета интеграционных связей.

В э.-м.м не нашли прямого отражения условия развития мебельного производства. Однако, в соответствующих показателях исходной информации (P_{rl} и $P_{r'l'}$) учитываются его потребности (в динамике развития) в пилопродукции, фанере, ДСП, ДВП и др.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ П.Н.КОРОБОВА

В данный список включены лишь те научные труды автора, которые имеют прямое отношение к научному направлению - математическое программирование и моделирование экономических процессов.

1. Экономико-математические методы планирования в лесной промышленности Монография. М.: Лесн. пром-ть, 1969 (11, 5 п.л.).
2. Математические методы планирования и управления. Л.: ЛТА, 1969. (3,63 п.л.).
3. Применение экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники за рубежом. М.: ВНИПИЭИлеспром, 1971. (2,25 п.л.).
4. Применение экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники. М.: ВНИПИЭИлеспром, 1972. (7,5 п.л.).
5. Оптимизация раскроя листовых материалов на деревообрабатывающих предприятиях //Ж. Деревообрабатывающая пром-ть, М., 1972. № 10. С.13-14. (0,75 п.л.).
6. Некоторые вопросы методологии моделирования задачи развития и размещения производства // Экономические проблемы лесной, деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства: Межвуз.сб. научн. тр. / ЛТА. Л., 1973. С. 53-68. (1,5 п.л.)
7. Справочник экономиста деревообрабатывающего предприятия. М.: Лесн. пром-ть, 1974. С. 31-38. (35 п.л. - собств. авт. 1,0 п.л.).
8. Оптимизация предметной специализации мебельных предприятий // Ж. Деревообрабатывающая пром-ть, М., 1974. (0,75 п.л.).
9. Математические методы планирования и управления в лесной и лесоперерабатывающей промышленности: Учебник для вузов. Изд-во «Лесн. пром-ть», М., 1974. (19,5 п.л.).
10. Оптимизация специализации мебельных предприятий // Экономика и управление: Сб. научн. тр./ ВНИПИЭИлеспром. М., 1975. С.7-8.
11. Вопросы методологии оптимизации мебельных предприятий //Экономические проблемы лесной, деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства: Межвуз. сб.тр. /ЛТА. Л., 1975. (1,3 п.л.).
12. Моделирование задачи оптимального раскроя пиломатериалов // Экономические проблемы лесной, деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства: Межвуз. сб. научн. тр. /ЛТА. Л., 1977. (0,5 п.л.).
13. Оптимизация использования лесосырьевых ресурсов лесозаготовительных предприятий //Экономические проблемы лесной,деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства: Межвуз.сб. научн. тр.// Ин-т информатики. М., 1980. (0,3 п.л.).
14. Оптимизация состава и размера производств комплексного лесозаготовительного предприятия (лесопромышленного комплекса) //Экономические проблемы лесной, деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства: Межвуз. сб.тр. /ЛТА. Л., 1981. (0,5 п.л.).
15. Методика определения оптимального сортиментного плана в лесосырьевых базах с использованием ЭВМ/ГСПИ МВД СССР. Л., 1978. (84 с).
16. Методика определения оптимального профиля и мощности деревообрабатывающих цехов в зависимости от показателей сырьевой базы ЛЗП./ГСПИ МВД СССР. Л.,1980. 96 с.

17. Оптимизация комплексной производственной программы ЛПХ промышленного объединения.// Лесной журнал. 1983 №4. С.107-112. (0,7 п.л.).
18. Оптимизация последовательности отвода лесосек в рубку //Экономические проблемы лесной, деревообрабатывающей промышленности и лесного хозяйства/ ЛТА. Л., 1984. С. 79-83. (0,4 п.л.).
19. Типовая методика оптимального планирования производственной программы промышленной деятельности ЛЗП объединений/ГСПИ МВД СССР. Л., 1984. 52 с. (3,0 п.л.).
20. Критерий оптимальности в решении задачи оптимизации последовательности освоения лесосырьевой базы /Научно-технический прогресс в отраслях лесного комплекса: Межвуз.сб.статей. Л., 1985. С.29-32.
21. Некоторые вопросы теории и практики оптимального планирования производственной программы //Проблемы повышения эффективности производства в лесной, целлюлозно-бумажной и деревообрабатывающей промышленности / ВНИПИЭИлеспром, М.,1983. С.16-25.
22. Оптимизация проекта производственной программы предприятий объединения //Лесной журнал. 1987. №4 С.103-108. (0,5 п.л.)
23. Оптимальное планирование производственной программы предприятиям лесосплавного объединения//Проблемы повышения эффективности производства и качества продукции лесопромышленных комплексов/ ВНИПИЭИлеспром, М., 1987. С. 27-37. (0,8 п.л.).
24. Оптимальное планирование развития и размещения производств внутрирайонного лесопромышленного комплекса// Лесной журнал. 1987. №5. С. 100-107. (0,8 п.л.).
25. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении: Учебное пособие для вузов. Л.: ЛТА, 1987. (5,25 п.л.).
26. Экономическая эффективность оптимального планирования производственной программы предприятий лесосплавного объединения//Лесной журнал. 1988. №5. С.96-99.
27. Оптимальное планирование комплексной производственной программы промышленной деятельности лесозаготовительных предприятий объединения//Экономика и управление в лесной, целлюлозно-бумажной и деревообрабатывающей промышленности/ ВНИПИЭИлеспром, М., 1988. (3,0 п.л.).
28. Формирование оптимальной производственной программы лесопромышленным предприятиям ассоциации на основе согласования их интересов//Лесной журнал. 1992. №6.
29. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. Изд-во РИО.ЛТА, Л., 1987. ч.1. (3,5 п.л.).
30. Объективная необходимость и значение применения математических методов в планировании. Ж. "Пшемысл джевны", ПНР. 1989. (0,6 п.л.).
31. Оптимизация развития и размещения производств ВЛПК. Ж. "Пшемысл джевны", ПНР. 1990. (0,8 п.л.).
32. Оптимальное планирование объемов, структуры, развития и размещения производства в ЛПК (на регионально-производственном уровне). РИО ЛТА. Л., 1989. (2 п.л.).
33. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. Учебное пособие для вузов, ч.2. Изд-во РИО ЛТА. СПб. 1993. (3,5 п.л.).
34. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. Учебное пособие для вузов, ч.3. Изд-во РИО ЛТА СПб. 1993. (3,5 п.л.)

35. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении, Руководство к практическим и лабораторным занятиям. РИО ЛТА СПб. 1993. (2,5 п.л.).
36. Оптимизация использования производственных ресурсов в отраслях ЛПК в новых экономических условиях. "Лесной журнал". 1994. (0,5 п.л.)
37. Оптимизация производственной программы для ассоциации в многокритериальной постановке. Межвуз.сб.научн.тр. "Проблемы повышения эффективности пр-ва и качества продукции ЛПК". 1994. (0,5 п.л.)
38. Формирование оптимальной производственной программы ЛПП в рыночных условиях. Межвуз.сб.научн.тр. "Экономические проблемы лесной пр-ти и л/х". Л., 1993. (0,5 п.л.).
39. Критерий оптимальности в планировании производственной программы в новых экономических условиях. Сб.научн.тр. (юбилейный). ЛТА СПб. 1993. (0,4 п.л.).
40. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении (руководство к практическим и лабораторным занятиям). Изд-во РИО ЛТА СПб. 1994. (5,0 п.л.).
41. Оптимизация производственной программы ЛПП с учетом согласования их интересов. Межвуз.сб.научн.тр. Новые экономические отношения на предприятиях лесного комплекса. СПб. 1994. (0,7 п.л.).
42. Совместное предпринимательство с зарубежными партнерами в лесопромышленном комплексе России (Российский зарубежный опыт) учебное пособие для вузов, СПб ЛТА., Санкт-Петербург., 1995. (17,75 п.л.).
43. Оптимизация производственной программы лесопромышленных предприятий объединения в многокритериальной постановке. Сб. "Пробл.эк.реформир. в регионе" вып.2. Вологод. НКЦ ЦЭМИ РАН. 1998. (0,8 п.л.).
44. Оптимизация программы выпуска продукции в лесопильном производстве. Сб. "Пробл.эк.реформир. в регионе" вып.2. Вологод. НКЦ ЦЭМИ РАН. 1998. (0,8 п.л.).
45. Формирование оптимальной производственной программы лесопромышленным предприятием в рыночных условиях. Сб. Известия СПб ГЛТА. 1998. (0,8 п.л.).
46. Оптимизация структуры и размеров производств ЛПК региона. Сб.научн. тр. вып.1. Вологод.НКЦ ЦЭМИ РАН. 1999. (1,0 п.л.).
47. Определение оптимальной программы лесопром. предприятий в новых экономич. условиях. Лесной экономич. вестник, 2,98. ОАО НИПИЭИлеспром. (1,0 п.л.).
48. Оптимизация инвестиций в технич. перевооружение лесопром. предприятий. Сб.научн.тр. вып.1 Вологод.НКЦ ЦЭМИ РАН. 1999. (0,6 п.л.)
49. Оптимизация структуры и размеров производств ЛПК лесодефицитного региона. Сб. Известия СПб ГЛТА. 1999. (1,0 п.л.).
50. Оптимизация реструктуризации и размеров производств лесопромышленного комплекса лесоизбыточного региона. Труды Спб ГЛТА. 2000. (1 п.л.).

Приложение 1

Промежуточная матрица исходной информации и наименование искомых переменных

По лесосырьевой базе____________________________ (на основе обработки ГОСТ)

№	Порода сосна, ель		Объем, тыс.куб.м	Сырьевые лесоматериалы для переработки на:											Балансы:		Товарные лесоматериалы для использования в круглом виде:					
				Резонансные п/м	П/м для судостроения	Палубные и шлюпочные п/м	П/м общего назначения	Клепку залив.бочек	Клепку сухотарных бочек	Шпалы ж/д широкой колеи	Переводные брусья ж/д широкой колеи	Лущеный шпон	Производство технологической щепы		На хим.. переработку	Для сульфатной целлюлозы	Для матчт судов, радио.свай	Для линий связи и опор ЛЭП	Стройлес	Подтоварник	Рудничное долготье	Топливные дрова
	Степень крупности	Сорт											Для ДСП, ДВП	Для ЦБП								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	Крупная	1		c_1 x_1		c_2 x_2	c_3 x_3	c_4 x_4				c_5 x_5										
2		2			c_6 x_6		c_7 x_7	c_8 x_8		c_9 x_9	c_{10} x_{10}	c_{11} x_{11}					c_{12} x_{12}					
3		3			c_{13} x_{13}		c_{14} x_{14}		c_{15} x_{15}	c_{16} x_{16}	c_{17} x_{17}						c_{18} x_{18}					
4		4					c_{19} x_{19}		c_{20} x_{20}	c_{21} x_{21}												
5	Средняя	1					c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}				c_{24} x_{24}			c_{25} x_{25}							
6		2			c_{26} x_{26}		c_{27} x_{27}	c_{28} x_{28}				c_{29} x_{29}			c_{30} x_{30}	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}		c_{35} x_{35}	
7		3			c_{36}		c_{37}		c_{38}							c_{39}	c_{40}	c_{41}	c_{42}		c_{43}	

					x_{36}		x_{37}		x_{38}							x_{39}	x_{40}	x_{41}	x_{42}		x_{43}	
8		4					c_{44} x_{44}		c_{45} x_{45}							c_{46} x_{46}						

Продолжение приложения 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
9	Мел-кая	2													c_{47} x_{47}	c_{48} x_{48}				c_{49} x_{49}	c_{50} x_{50}	
10		3														c_{51} x_{51}				c_{52} x_{52}	c_{53} x_{53}	
11	Дрова техно-логи-ческие								c_{54} x_{54}				c_{55} x_{55}	c_{56} x_{56}	c_{57} x_{57}	c_{58} x_{58}						
12	Топ-ливные												c_{59} x_{59}	c_{60} x_{60}								c_{61} x_{61}

Приложение 2

Промежуточная матрица исходной информации и наименование искомых переменных

По лесосырьевой базе___________________________ (на основе обработки ГОСТ)

№	Порода береза		Объем, тыс.куб.м	Сырьевые лесоматериалы для переработки на:																Балансы		Товарные лесоматериалы для использования в круглом виде:	
	Степень Крупности	Сорт		Резонансные п/м	П/м общего назначения	лыжи	ложи	Колодочные сектора	Шпули	катушки	каблуки	челноки	Клепку заливн. бочек	Клепку сухотарных бочек	Шпалы ж/д широкой колеи	Переводные брусья ж/д широкой колеи	Лущеный шпон	Производство технологической щепы: Для ДСП, ДВП	Производство технологической щепы: Для ЦПБ	На хим. переработку	Для сульфатной целлюлозы	подтоварник	Топливные дрова
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	Крупная	1		c_{62} x_{62}	c_{63} x_{63}	c_{64} x_{64}	c_{65} x_{65}	c_{66} x_{66}				c_{67} x_{67}					c_{68} x_{68}						
2		2			c_{69} x_{69}	c_{70} x_{70}		c_{71} x_{71}	c_{72} x_{72}	c_{73} x_{73}		c_{74} x_{74}	c_{75} x_{75}				c_{76} x_{76}						
3		3			c_{77} x_{77}				c_{78} x_{78}	c_{79} x_{79}	c_{80} x_{80}		c_{81} x_{81}	c_{82} x_{82}	c_{83} x_{83}	c_{84} x_{84}	c_{85} x_{85}						
4		4			c_{86}					c_{87}	c_{88}			c_{89}	c_{90}	c_{91}							

					x_{86}					x_{87}	x_{88}			x_{89}	x_{90}	x_{91}							
5	Сред-няя	1			c_{92} x_{92}	c_{93} x_{93}	c_{94} x_{94}										c_{95} x_{95}			c_{96} x_{96}			

Продолжение приложения 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
6		2			c_{97} x_{97}	c_{98} x_{98}			c_{99} x_{99}	c_{100} x_{100}	c_{101} x_{101}		c_{102} x_{102}				c_{103} x_{103}			c_{104} x_{104}	c_{105} x_{105}	c_{106} x_{106}	
7		3			c_{107} x_{107}				c_{108} x_{108}	c_{109} x_{109}	c_{110} x_{110}		c_{111} x_{111}	c_{112} x_{112}			c_{113} x_{113}				c_{114} x_{114}	c_{115} x_{115}	
8		4			c_{116} x_{116}					c_{117} x_{117}				c_{118} x_{118}							c_{119} x_{119}		
9	Мел-кая	2																				c_{120} x_{120}	
10		3																				c_{121} x_{121}	
	Дрова																						
11	Техно-логич.																	c_{122} x_{122}	c_{123} x_{123}	c_{124} x_{124}	c_{125} x_{125}		
12	Топ-ливные																	c_{126} x_{126}	c_{127} x_{127}				c_{128} x_{128}

Приложение 3

Промежуточная матрица исходной информации и наименование искомых переменных

По лесосырьевой базе___________________________ (на основе обработки ГОСТ)

№	Порода осина		Объем, тыс.куб.м	Лесоматериалы для переработки на:							Балансы:		Лесоматериалы для использования в круглом виде	
	Степень Крупности	Сорт		П/м общего назначения	Клепку заливных бочек	Клепку сухотарных бочек	Лущеный шпон	спички	Производство технологической щепы: Для ДСП, ДВП	Производство технологической щепы: Для ЦБП	На хим. переработку	Для сульфатной целлюлозы	подтоварник	Топливные дрова
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Круп-ная	1		c_{129} x_{129}			c_{130} x_{130}	c_{131} x_{131}						
2		2		c_{132} x_{132}	c_{133} x_{133}		c_{134} x_{134}	c_{135} x_{135}						
3		3		c_{136} x_{136}	c_{137} x_{137}	c_{138} x_{138}	c_{139} x_{139}	c_{140} x_{140}						
4		4		c_{141} x_{141}		c_{142} x_{142}								

5	Сред-няя	1		c_{143} x_{143}			c_{144} x_{144}	c_{145} x_{145}			c_{146} x_{146}			

Продолжение приложения 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6		2		c_{147} x_{147}	c_{148} x_{148}		c_{149} x_{149}	c_{150} x_{150}			c_{151} x_{151}	c_{152} x_{152}	c_{153} x_{153}	
7		3		c_{154} x_{154}	c_{155} x_{155}	c_{156} x_{156}	c_{157} x_{157}	c_{158} x_{158}				c_{159} x_{159}	c_{160} x_{160}	
8		4		c_{161} x_{161}		c_{162} x_{162}						c_{163} x_{163}		
9	Мел-кая	2											c_{164} x_{164}	
10		3											c_{165} x_{165}	
11	Дрова техно-логи-ческие					c_{166} x_{166}			c_{167} x_{167}	c_{168} x_{168}	c_{169} x_{169}	c_{170} x_{170}		
12	Топ-ливные								c_{171} x_{171}	c_{172} x_{172}				c_{173} x_{173}