Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры.

А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин

Казань, 2013

УДК 519.6, 517.97
ББК

Печатается по решению методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научный редактор
к.ф.-м.н., доцент **Сурай Л.А.**

Рецензенты
к.т.-н., доцент КГАСУ **Горская Т.Ю.** и к.ф.-м.н., доцент **Тазюков Б.Ф.**

Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г.

Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры: методическое пособие / А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 40 с.

Данные методические указания предназначены для студентов 3, 4 курсов по специальностям/направлениям "математика", "математика и компьютерные науки", "механика", "механика и математическое моделирование" при изучении дисциплин "Вариационное исчисление и методы оптимизации", "Теория оптимизации", "Экстремальные задачи".

УДК 519.6, 517.97
ББК
© Казанский университет, 2013
© Ожегова А.В., Насибуллин Р.Г., 2013

Оглавление

Введение

Данное методическое пособие посвящено задачам классического вариационного исчисления и является дополнением к курсу лекций "Вариационные исчисление и методы оптимизации", "Теория оптимизации" и "Экстремальные задачи", читаемым в Институте математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Изложение материла ведется по методологии, основанной на общем принципе исследования экстремальных задач — принципе Лагранжа. За базу взяты учебники [1] – [3], написанные преподавателями, читавшими курс оптимизации на механико-математическом факультете МГУ.

В каждом пункте настоящего пособия излагается постановка определенной задачи, приводятся основные определения, указывается алгоритм решения на основе имеющихся необходимых и достаточных условий экстремума с дальнейшей демонстрацией на конкретном примере.

1. Простейшая задача вариационного исчисления

1.1 Постановка задачи

Простейшей задачей классического вариационного исчисления (ПЗВИ) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \mathrm{extr}, \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{1.2}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция трех переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (1.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих ***краевым условиям*** (1.2). Такие функции называют ***допустимыми*** и говорят, что задача (1.1) — (1.2) дана в слабой постановке.

Введем норму в пространстве $C^1([t_0, t_1])$

$$\|x\|_1 = \|x\|_{C^1([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\right\},$$

где

$$\|x\|_C := \max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|.$$

Определение 1. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (1.1) – (1.2) ($\widehat{x} \in wlocmin$), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, *для которой*

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta.$$

Определение 2. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый абсолютный (слабый глобальный) минимум*** *в задаче* (1.1) – (1.2) ($\widehat{x} \in wabsmin$), *если*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

В качестве множества допустимых функций можно выбрать пространство кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, t_1]$ ($x \in KC^1[t_0, t_1]$) с нормой

$$\|x\|_0 = \|x\|_C,$$

удовлетворяющих краевым условиям (1.2). В этом случае говорят о сильной постановке задачи.

Определение 3. *Говорим, что допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***сильный локальный минимум*** *в задаче* $(1.1)-(1.2)$ ($\widehat{x} \in strlocmin$), *если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, для которой

$$\|x - \widehat{x}\|_0 < \delta.$$

Определение 4. *Говорим, что допустимая функция $\widehat{x}$ доставляет* ***сильный абсолютный (сильный глобальный) минимум*** *в задаче* $(1.1)-(1.2)$, *если*

$$J(x(\cdot)) \geq J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Часто в вариационном исчислении функции $x(t)$, доставляющие минимум (максимум) функционалу, называют точками минимума (максимума) или точками экстремума.

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t) + \widehat{f}_x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

называют ***уравнением Эйлера***. Здесь

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t) := \frac{d}{d\dot{x}} f(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t) \\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}, \quad \widehat{f}_x(t) := \frac{d}{dx} f(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\widehat{x}(t) \\ \dot{x}=\dot{\widehat{x}}}}.$$

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (1.2), называются ***допустимыми экстремалями*** в ПЗВИ (1.1)–(1.2).

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0, \quad \forall\, t \in [t_0, t_1],$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} > 0, \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{xx}(t)h(t) = 0$$

называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи на экстремали $\widehat{x}$.

Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если для решения уравнения Якоби $h(t)$ с начальными условиями

$$h(t_0) = 0,\ \dot{h}(t_0) = 1,$$

имеет место равенство

$$h(\tau) = 0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Функция

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) - f(t, x, \dot{x}) - f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$$

называется ***функцией Вейерштрасса*** интегранта f.

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Вейерштрасса***, если

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = f(t, \widehat{x}, u) - f(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}) - \widehat{f}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

1.2 Алгоритм решения

Для определенности будем исследовать ПЗВИ на минимум.

1. Найти допустимые экстремали. С этой целью выписать *необходимое условие экстремума первого порядка для ПЗВИ — уравнение Эйлера*:

   $$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}}(t) + \widehat{f}_x(t) = 0.$$

   Найти решения уравнения Эйлера $\widehat{x}$, удовлетворяющие заданным условиям на концах ("допустимые экстремали")

2. Для каждой допустимой экстремали проверить *необходимые и достаточные условия локального минимума второго порядка.*

   2.1. Проверить выполнение *условия Лежандра*:

      а) Если условие Лежандра не выполнено, т.е функция $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}$ знакопеременна на отрезке $[t_0, t_1]$, то не выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума.

      б) Если выполнено условие Лежандра:

      $$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0,\ \forall t \in [t_0, t_1],$$

      то $\widehat{x}$ можно подозревать на точку слабого (сильного) локального минимума.

      в) Если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке *условия Якоби.*

   2.2. Записать уравнение Якоби на экстремали $\widehat{x}$:

   $$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{xx}(t)h(t) = 0$$

   и решить его с начальными данными

   $$h(t_0) = 0,\ \dot{h}(t_0) = 1.$$

   2.3. Найти сопряженные с t_0 точки τ, т.е. нули найденного решения $h(t)$ уравнения Якоби при $t > t_0$ и проверить выполнение условия Якоби.

   Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие, следовательно, $\widehat{x}$ — не доставляет локального минимума.

   Если при выполнении усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то выполнено достаточное условие слабого минимума, и $\widehat{x} \in wlocmin$.

   2.4. Проверка *на сильный минимум.*

а) Если интегрант f *является выпуклым* по $\dot{x}$ при всех фиксированных t и x, рассматриваемых в качестве параметра, то $\widehat{x}$ доставляет сильный минимум в задаче.

б) Если интегрант f является ни выпуклым ни вогнутым, то следует проверить *выполнение необходимого условия сильного экстремума — условие Вейерштрасса*:

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Если не выполнено условие Вейерштрасса, то в этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет сильного минимума.

Замечание 2. При исследовании ПЗВИ на максимум необходимо следовать этому же алгоритму, учитывая, что условие Лежандра выполнено, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

и усиленное условие Лежандра, если

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Условие Вейерштрасса означает, что

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

а для сильного максимума функция f должна быть вогнутой по $\dot{x}$.

Замечание 3. Задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \sup,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1,$$

можно заменить эквивалентной ей задачей

$$-J(x(\cdot)) = -\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf,$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1.$$

Замечание 4. В ПЗВИ (1.1)–(1.2) в качестве $x(t)$ может выступать вектор функция $x(t) = (x_1(t), \ \dots \ , x_n(t))$. Тогда необходимым условием локального экстремума является система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{f}_{x_i}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \ i = \overline{1, n}.$$

Условие Лежандра $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$ означает неотрицательную определенность матрицы

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} f_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \dots & f_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}$$

на элементе $\widehat{x}$, а условие $\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ — ее положительную определенность.

Матричное уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{f}_{xx}(t)h(t) = 0$$

эквивалентно системе уравнений.

1.3 Пример

А) Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf,$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = 1.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}3\dot{x}^2 = 0 \Longleftrightarrow \dot{x} = \text{const}.$$

Общее решение уравнение Эйлера

$$x = x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий на концах находим, что

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0.$$

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\widehat{x} = \widehat{x}(t) = t.$$

2. Проверим на $\widehat{x} = t$ необходимые и достаточные условия экстремума.

   2.1. Усиленное условие Лежандра выполнено:

   $$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\widehat{x}}(t) = 6 > 0, \quad \forall\ t \in [0,1],$$

   Следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

   2.2. Выпишем уравнение Якоби

   $$-\frac{d}{dt}6\dot{h} = 0 \Leftrightarrow \ddot{h} = 0.$$

   Общее решение уравнения Якоби

   $$h(t) = C_1 t + C_2.$$

   Начальным условиям

   $$h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1,$$

   удовлетворяет функция

   $$h(t) = t.$$

   2.3. Функция $h(t) = t$ не имеет нулей в полуинтервале $(0,1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие слабого локального минимума, т.е. $\widehat{x} \in wlocmin$.

   2.4. Проверка на сильный экстремум.

      а) Поскольку функция $f = \dot{x}^3$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется.

б) Проверим необходимое условие сильного минимума — условие Вейерштрасса:

$$\varepsilon(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = f(t, \widehat{x}, u) - f(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) =$$

$$= u^3 - \dot{\widehat{x}}^3 - 3\dot{\widehat{x}}^2(u - \dot{\widehat{x}}) = u^3 - 1 - 3(u-1) = u^3 - 3u + 2.$$

Очевидно, что $\forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$ функция

$$\varepsilon(t, \widehat{x}, \dot{\widehat{x}}, u) = u^3 - 3u + 2$$

знакопеременна, следовательно, условие Вейерштрасса не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие, то функция $\widehat{x}$ не доставляет сильного локального минимума.

Ответ: $\widehat{x} = t \in wlocmin, J(\widehat{x}) = 1.$

В) Решить следующую экстремальную задачу

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_1^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2)dt \to \inf,$$

$$x_1(1) = 1,\ x_1(2) = 2,\ x_2(1) = 0,\ x_2(2) = 1.$$

Решение

1. Найдем допустимые экстремали. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}2\dot{x}_1 = 0, \\ -\frac{d}{dt}2\dot{x}_2 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$x_1(t) = C_1 t + C_2,\ x_2(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}.$$

Из граничных условий находим, что

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{e^2 - 1},\ C_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

Откуда

$$\begin{cases} \widehat{x}_1(t) = t, \\ \widehat{x}_2(t) = \frac{e^t - e^{-t+2}}{e^2 - 1}. \end{cases}$$

2. Проверим на полученных экстремалях необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.

2.1. Так как матрица
$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
положительно определена при любом $t \in [0,1]$, то выполнено усиленное условие Лежандра.

2.2. Для проверки условия Якоби запишем систему уравнений Якоби. Учитывая, что
$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{f}_{\dot{x}x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\widehat{f}_{x\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{f}_{xx}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
имеем
$$-\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0,$$
то есть
$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}2\dot{h}_1 = 0, \\ -\frac{d}{dt}2\dot{h}_2 + 2h_2 = 0. \end{cases}$$
Общее решение этой системы
$$h_1(t) = A_1 t + A_2,\ h_2(t) = A_3 e^t + A_4 e^{-t}.$$
Константы A_1, A_2, A_3, A_4 найдем из условий
$$h_1(0) = 0,\ \dot{h}(0) = 1,\ h_2(1) = 0,\ \dot{h}_2(1) = 1,$$
которые приводят к системе
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 = 1, \\ A_3 e + A_4 e^{-1} = 0, \\ A_3 - A_4 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

Откуда
$$A_1 = 1,\ A_2 = -1,\ A_3 = \frac{1}{2e},\ A_4 = \frac{e}{2}.$$
Следовательно, решение системы уравнений Якоби имеет вид
$$h_1(t) = t,\ h_2(t) = \frac{e^{t-1} + e^{1-t}}{2}.$$

2.3. Очевидно, что на $(1, 2]$ нет точек, сопряженных с точкой 1. Следовательно, выполнено усиленное условие Якоби. Так как усиленные условия Лежандра и Якоби являются достаточным условием слабого локального минимума, то $\widehat{x} \in wlocmin$.

2.4. Поскольку интегрант является выпуклым по $\dot{x}$, то $\widehat{x}(t) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ является и сильным локальным минимумом.

3. Так как интегрант $f(t) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2$ является к тому же квадратичным, то $\widehat{x}(t) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x} = t \in wabsmin, J(\widehat{x}) = \frac{2e^2}{e^2-1}$.

C) Найти решение следующей экстремальной задачи
$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_0^\pi (2x_1x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)dt \to \inf,$$
$$x_1(0) = 0,\ x_1(\pi) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi) = 1.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие 1-го порядка — систему уравнений Эйлера
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_1 = 0. \end{cases}$$
Преобразуя, получим
$$\begin{cases} x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1, \\ x_1^{(4)} + 2\ddot{x}_1 + x_1 = 0; \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1, \\ x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(C_3 \cos t + C_4 \sin t). \end{cases}$$

В силу граничных условий $x_1(0) = 0, \ x_1(\pi) = 1$, имеем

$$C_1 = 0, C_3 = -\frac{1}{\pi},$$

т.е.

$$x_1 = C_2 \sin t + t\left(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t\right)$$

и

$$x_2 = (C_2 \sin t + t(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t))'' + 2(C_2 \sin t + t(-\frac{1}{\pi}\cos t + C_4 \sin t)) =$$

$$= C_2 \sin t + C_4(2\cos t + t\sin t) + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t).$$

Неизвестные C_2 и C_4 найдем условий на концах $x_2(0) = 0, \ x_2(\pi) = 1$. Легко получить, что $C_4 = 0$, а C_2 — произвольная константа.

Тогда

$$x_2(t) = C_2 \sin t + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t).$$

В итоге имеем семейство допустимых экстремалей

$$\begin{cases} \widehat{x}_1 = C_2 \sin t - \frac{t}{\pi}\cos t, \\ \widehat{x}_2(t) = C_2 \sin t + \frac{1}{\pi}(2\sin t - t\cos t), \end{cases}$$

где C_2 — любая константа.

2. Далее перейдем к проверке условия Лежандра. Матрица

$$\widehat{f}_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

— знаконеопределена, т.е. не выполнено необходимое условие экстремума 2-го порядка $\Longrightarrow$ экстремума нет.

Ответ: экстремума нет.

2. Задача Больца

2.1 Постановка задачи

Задачей Больца (ЗБ) называется следующая экстремальная задача:

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \tag{2.1}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция трех переменных, а $\psi = \psi(x_0, x_1)$ — данная функция двух переменных. Функцию f называют ***интегрантом***, функцию ψ — ***терминантом***, функционал $\mathcal{B}$ — ***функционалом Больца***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Задачу Больца рассматриваем в слабой постановке, т.е. экстремум функционала (2.1) ищем среди непрерывно дифференцируемых функций, которые в данной задаче будут ***допустимыми***.

Определение 5. *Функция $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* (2.1) ($\widehat{x} \in wlocmin$ (2.1))*, если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$, для которой

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение 6. *Функция $\widehat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче (2.1)* ($\widehat{x} \in wlocmin$ (2.1))*, если существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \geq \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой функции $x \in C^1[t_0, t_1]$.

2.2 Алгоритм решения

1. Выписать *необходимые условия экстремума первого порядка*:

   а) *уравнение Эйлера*

   $$-\frac{d}{dt}\widehat{f}_{\dot{x}} + \widehat{f}_x = 0;$$

   б) *условия трансверсальности*

   $$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_0) = \widehat{\psi}_{x(t_0)},$$

   $$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x(t_1)}.$$

   Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие условиям трансверсальности.

2. Показать используя определение, что решением является одна из допустимых экстремалей или, что решения нет.

Замечание. В векторном случае $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, *необходимыми условиями* являются:

а) *система уравнений Эйлера*

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}_i} + f_{x_i} = 0,\ i = \overline{1, n};$$

б) *условия трансверсальности*

$$\widehat{f}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{\psi}_{x_i(t_0)},\ i = \overline{1, n},$$

$$\widehat{f}_{\dot{x}}(t_1) = -\widehat{\psi}_{x_i(t_1)},\ i = \overline{1, n}.$$

2.3 Пример

А) Найти решения следующей экстремальной задачи

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \inf.$$

Отметим, что в нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x,\ \psi(x(0), x(1)) = x^2(1).$$

Решение

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Longleftrightarrow 2\ddot{x}^2 + 1 = 0;$$

   б) условия трансверсальности

$$f_{\dot{x}}(0) = \psi_{x(0)} \Longleftrightarrow \dot{x}(0) = 0,$$

$$f_{\dot{x}}(1) = -\psi_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\dot{x}(1) = -2x(1) \Longleftrightarrow \dot{x}(1) + x(1) = 0.$$

Общее решение уравнение Эйлера

$$x(t) = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

Из условий трансверсальности находим, что $C_1 = 0, C_2 = 3/4$. Таким образом имеется единственная допустимая экстремаль $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$.

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$, то $\widehat{x}(t) + h(t)$ — произвольная допустимая точка в ЗБ и

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t)+h(t))-\mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int\limits_0^1 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt - \int\limits_0^1 h dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\widehat{x} = (3 - t^2)/4$ получим

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2\ddot{\widehat{x}} + 1)h dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\widehat{x}(1)h(1) + h^2(1) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2 dt + h^2(1) \geq 0.$$

В итоге имеем, что

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t) + h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) \geq 0$$

при любом выборе функции h, т.е. $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный минимум.

Ответ: $\widehat{x} = (3 - t^2)/4 \in absmin$.

В) Найти решения следующей экстремальной задачи

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \inf.$$

В нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t,$$

а

$$\psi(x(0), x(1)) = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi).$$

Решение

1. Необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}2\dot{x}+2x-4\sin t=0 \Longleftrightarrow 2\ddot{x}^2-x=-2\sin t;$$

   б) условия трансверсальности

$$\begin{cases} 2\dot{x}(0)=4x(0), \\ 2\dot{x}(\pi)=-2+2x(\pi), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(0)=2x(0), \\ \dot{x}(\pi)=x(\pi)-1. \end{cases}$$

   Получим допустимую экстремаль

$$\widehat{x}(t)=e^t+\sin t.$$

2. Пусть $h(t)\in C^1[t_0,t_1]$. Тогда

$$B(\widehat{x}(t)+h(t))-B(\widehat{x}(t))=$$

$$=\int\limits_0^\pi(\dot{\widehat{x}}+\dot{h})^2+(\widehat{x}+h)^2-4(\widehat{x}+h)\sin t dt+\int\limits_0^\pi\dot{\widehat{x}}^2+\widehat{x}^2-4\widehat{x}\sin t dt+$$

$$+2(\widehat{x}(0)+h(0))^2+2(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))-(\widehat{x}(\pi)+h(\pi))^2-2\widehat{x}(0)^2-2\widehat{x}(\pi)+\widehat{x}(\pi)^2=$$

$$=\int\limits_0^\pi 2\dot{\widehat{x}}\dot{h}dt+\int\limits_0^\pi\dot{h}^2dt+2\int\limits_0^\pi\widehat{x}hdt+\int\limits_0^\pi h^2dt-4\int\limits_0^\pi h\sin t dt+$$

$$+4\widehat{x}(0)h(0)+2h^2(0)+2h(\pi)-2\widehat{x}(\pi)h(\pi)+h^2(\pi)=$$

$$=2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^\pi-2\int\limits_0^\pi\ddot{\widehat{x}}hdt+\int\limits_0^\pi\dot{h}^2+2\int\limits_0^\pi\widehat{x}hdt+\int\limits_0^\pi h^2dt-$$

$$-4\int\limits_0^\pi h\sin t dt+4\widehat{x}(0)h(0)+2h^2(0)+2h(\pi)-2\widehat{x}(\pi)h(\pi)+h^2(\pi).$$

   Учитывая, что

$$\dot{\widehat{x}}=e^t+\cos t,\ \ddot{\widehat{x}}=e^t-\sin t,$$

имеем

$$-2\int\limits_0^\pi \ddot{\widehat{x}}hdt + 2\int\limits_0^\pi \widehat{x}hdt - 4\int\limits_0^\pi h\sin tdt = 0$$

и

$$2\dot{\widehat{x}}(\pi)h(\pi) - \dot{\widehat{x}}(0)h(0) = -4\widehat{x}(0)h(0) - 2h(\pi) + 2\widehat{x}(\pi)h(\pi).$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}(\widehat{x}(t)+h(t)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(t)) = \int\limits_0^\pi \dot{h}^2dt + \int\limits_0^\pi h^2 + 2h^2(0) + h^2(\pi) \geq 0$$

для любых допустимых функций $\widehat{x}+h \in C^1[0,\pi]$. Следовательно,

$$\widehat{x}(t) = e^t + \sin t$$

доставляет слабый абсолютный минимум в задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = e^t + \sin t \in absmin.$

3. Изопериметрическая задача

3.1 Постановка задачи

Изопериметрической задачей (ИЗ) называется следующая экстремальная задача:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \mathrm{extr}, \tag{3.1}$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \gamma_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{3.3}$$

где $f_i = f_i(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данные функции трех переменных. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (3.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих ***изопериметрическим*** условиям (3.2) и ***условиям на концах*** (3.3), такие функции называются ***допустимыми*** в ИЗ.

Определение 7. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче (3.1)* $- -$*(3.3)* $(\widehat{x} \in wlocmin$ (3.1)), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x*, для которой*

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_1 < \delta.$$

Определение 8. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче (3.1)-(3.3)* $(\widehat{x} \in wlocmin$ (3.1)), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x*.*

Лагранжианом задачи называется функция

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}).$$

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0, \ \forall t \ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0, \ \forall \ t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i = 0,$$

где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ называют ***уравнением Якоби*** для исходной задачи (3.1) на экстремали $\widehat{x}$.

Пусть на экстремали $\widehat{x}$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h решение неоднородного уравнения Якоби, для которого

$$\int_0^{\tau} g_i(t)h(t)dt = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ h(t_0) = h(\tau) = 0.$$

Говорят, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Если функции

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t),\ i = \overline{1, m}$$

линейно независимы, то говорят, что выполнено условие ***регулярности***.

3.2 Алгоритм решения

1. Выписать *необходимое условие экстремума первого порядка* — *уравнение Эйлера*
$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \qquad (3.4)$$
для *лагранжиана* задачи
$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}),$$
где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ — вектор, так называемых, множителей Лагранжа, *одновременно не обращающихся в ноль.*

   Найти решение $\widehat{x}(t)$ уравнения (3.4), удовлетворяющие условиям (3.2) и (3.3), т.е. допустимые экстремали в данной задаче. При этом необходимо рассмотреть случаи
$$\lambda_0 = 0 \text{ и } \lambda_0 \neq 0.$$
Во втором случае λ_0 выбирается произвольно.

2. Для каждой допустимой экстремали проверить *необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.*

   2.1 Проверить выполнение *условия Лежандра*:

   а) если условие Лежандра не выполнено, не выполнено необходимое условие слабого экстремума, т.е. $\widehat{x}$ не доставляет локального экстремума задачи;

   б) если выполнено усиленное условие Лежандра, то переходим к проверке условия Якоби.

2.2 Проверка *условия Якоби.*

Дадим аналитическое средство нахождения сопряженных точек для случая, когда функции g_i, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы на отрезках $[\tau_0, \tau_1]$, $t_0 \le \tau_0 < \tau_1 \le t_1$. Пусть h_0 — решение однородного уравнения Якоби ($\mu_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$) с краевыми условиями

$$h_0(t_0) = 0, \dot{h}_0(t_0) = 1;$$

h_j — решение неоднородного уравнения Якоби ($\mu_i = 0$, $i \neq j$), и краевыми условиями

$$h_j(t_0) = 0, \dot{h}_j(t_0) = 0, \ j = 1, \ldots, m.$$

Точка τ является сопряженной тогда и только тогда, когда матрица

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} h_0(\tau) & \ldots & h_m(\tau) \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_1 dt & \ldots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_1 dt \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_{t_0}^{\tau} h_0 g_m dt & \ldots & \int\limits_{t_0}^{\tau} h_m g_m dt \end{pmatrix}$$

является вырожденной.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие экстремума, следовательно, $\widehat{x}$ — не доставляет локального экстремума.

Если при выполнение усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то проверяем условие регулярности.

2.3 Проверка *условия регулярности.*

Если условие регулярности выполнено, то на $\widehat{x}$ выполнены достаточное условие слабого минимума.

3. Если проверка достаточных и необходимых условий второго порядка затруднена, то допустимую экстремаль можно исследовать на экстремум с помощью его определения.

4. Если в задаче (3.1) функционал J_0 квадратичен

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(A_0\dot{x}^2 + B_0x^2\right) dt,$$

функционалы J_i линейны

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (a_i\dot{x} + b_ix)dt = \gamma_i,\ i = \overline{1,m},$$

причем функции $A_0, a_1, \ldots, a_m$ непрерывно дифференцируемы, функции $B_0, b_1, \ldots, b_m$ непрерывны и выполнено условие Лежандра и условие регулярности. Тогда, если не выполнено условие Якоби, то нижняя грань в задаче равна $-\infty$. Если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

3.3 Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J_0(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt \to \inf,$$

$$J_1(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 xe^{-t}dt = \frac{1-3e^{-2}}{4}, \tag{3.2'}$$

$$x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{e}. \tag{3.3'}$$

Решение

1. Для лагранжиана задачи

$$L = \lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) + \lambda_1 xe^{-t}$$

выпишем необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + 2\lambda_0 x + \lambda_1 e^{-t} = 0. \tag{3.5}$$

Найдем решение дифференциального уравнение (3.5), удовлетворяющего условиям $(3.2'), (3.3')$.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из (3.5) мы получим, что $\lambda_1 = 0$, т.е. все множители Лагранжа одновременно обращаются в ноль. Значит необходимое условие экстремума не выполнено.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Имеем

$$\ddot{x} - x = \lambda_1 e^{-t}.$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 t e^{-t}.$$

Константы C_1, C_2, λ_1 найдем из имеющих условий.

Получим, что имеется допустимая экстремаль

$$\widehat{x}(t) = te^{-t}.$$

2. Проверим необходимые и достаточные условия второго порядка.

   2.1 Проверим выполнение условия Лежандра

   $$L_{\dot{x}\dot{x}}(\widehat{x}) = 2 > 0.$$

   Выполнено усиленное условие Лежандра и значит, переходим к проверке условий Якоби.

   2.2 Уравнение Якоби

   $$-\frac{d}{dt}\left(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i = 0,$$

   где $g_i(t) = -\frac{d}{dt}\widehat{f}_{i\dot{x}}(t) + \widehat{f}_{ix}(t)$ в нашем случае примет вид

   $$\ddot{h} + h + \mu_1 = 0.$$

   Найдем решение h_0 однородного уравнения Якоби

   $$\ddot{h} + h = 0$$

   с условиями $h_0(0) = 0, \dot{h}_0(0) = 1$. Имеем

   $$h_0 = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Найдем решение h_1 неоднородного уравнения Якоби

$$\ddot{h} + h + 1 = 0$$

с условиями $h_1(0) = 0, \dot{h}_1(0) = 0$. Получим

$$h_1(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}.$$

Матрица H имеет вид

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} \\ \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\tau}\right) d\tau & \int\limits_0^t \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2\tau} - \frac{1}{4}\tau e^{-2\tau}\right) d\tau \end{pmatrix}.$$

Сопряженные точки — это решения уравнения

$$\det H(\tau) = 0.$$

Легко получить, что

$$\tau = 0.$$

Следовательно, точек сопряженных к 0 в полуинтервале $(0, 1]$ нет, а значит усиленное Якоби выполнено.

2.3 Очевидно, что условие регулярности выполнено, т.к. в нашем случае $m = 1$ и $g_1 = 1$.

Таким образом, $\widehat{x}(t) \in wlocmin$

4. Поскольку функционал J_0 квадратичен, а J_1 — линеен, то $\widehat{x}(t)$ доставляет абсолютный экстремум.

Ответ: $\widehat{x}(t) = te^{-t} \in absmin.$

4. Задача со старшими производными

4.1 Постановка задачи

Задачей со старшими производными (ЗССП) называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))dt \to \text{extr}, \tag{4.1}$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_j^k, k = 0, 1, \ldots, n-1, j = 0, 1. \tag{4.2}$$

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ — данная функция $n+1$ переменных, называемая ***интегрантом***. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум функционала (4.1) ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих условиям (4.2) на концах отрезка $[t_0, t_1]$. Такие функции называют ***допустимыми***.

Введем норму в пространстве $C^n([t_0, t_1])$:

$$\|x\|_n = \|x\|_{C^n([t_0,t_1])} := \max\left\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C, \ldots, \|x^{(n)}\|_C\right\},$$

где

$$\|x\|_C := \max_{t_0 \le t \le t_1} \{|x(t)|\}.$$

Определение 9. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый локальный минимум*** *в задаче* $(4.1), (4.2)$ $(\widehat{x} \in wlocmin\ (4.1))$, *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x, *для которой*

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_n < \delta.$$

Определение 10. *Допустимая функция* $\widehat{x}$ *доставляет* ***слабый абсолютный минимум*** *в задаче (4.1), (4.2)* $(\widehat{x} \in wlocmin\ (4.1))$, *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$J(x(\cdot)) \ge J(\widehat{x}(\cdot))$$

для любой допустимой функции x.

Если в качестве множества допустимых функций выбрать множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, t_1]$ $(x \in KC^1[t_0, t_1])$, удовлетворяющих краевым условиям (4.2), то ЗССП (4.1)–(4.2) исследуют на сильный экстремум с нормой $\|x\|_{n-1}$.

Уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \widehat{f}_{x^{(k)}}(t) = 0$$

называют ***уравнением Эйлера-Пуассона***.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера-Пуассона называются ***экстремалями***. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (1.2), называются ***допустимыми экстремалями*** в ЗССП (4.1)–(4.2).

Скажем, что на $\widehat{x}$ выполнено ***условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0,\ \forall t\ \in [t_0, t_1]$$

и ***усиленное условие Лежандра***, если

$$\widehat{f}_{x^{(n)}x^{(n)}} > 0,\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=0}^{n} A_{ij} x^{(i)} x^{(j)} dt,\ A_{ij}(t) = \widehat{f}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t)$$

называют ***уравнением Якоби*** для задачи (4.1) на экстремали $x(\cdot)$.

Для квадратичного функционала, имеющую "диагональную" форму

$$K(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

уравнение Якоби примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(A_k x^{(k)}\right) = 0.$$

Пусть на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено усиленное условие Лежандра. Точка τ называется ***сопряженной с точкой*** t_0, если существует нетривиальное решение h уравнения Якоби, для которого

$$h^{(i)}(t_0) = h^{(i)}(\tau) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Говорят, что на $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено ***условие Якоби***, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и ***усиленное условие Якоби***, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — это линейное уравнение $2n$-го порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно старшее производной. Пусть $h_1(\cdot), \ldots, h_n(\cdot)$ — решение уравнения Якоби, для которых $H(t_0) = \mathbf{O}$, а $H^{(n)}(t_0)$ — невырожденная матрица, где

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & \ldots & h_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(n-1)}(t) & \ldots & h_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$H^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(n)}(t) & \ldots & h_n^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(2n-1)}(t) & \ldots & h_n^{(2n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Точка τ является сопряженной к t_0 тогда и только тогда, когда матрица $H(\tau)$ является вырожденной.

4.2 Алгоритм решения

1. Записать *необходимое условие экстремума первого порядка — уравнение Эйлера-Пуассона*:

   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k f_{x^{(k)}} = 0.$$

   Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера-Пуассона, удовлетворяющие краевым условиям на концах.

2. Проверить на допустимых экстремалях *необходимые и достаточные условия высших порядков.*

   а) Проверить выполнение условия *Лежандра.*

   Если не выполнено условия Лежандра, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

   Если выполнено усиленное условие Лежандра, то перейти к проверке условия Якоби.

   б) Проверка *условия Якоби.*

   Если не выполнено условия Якоби, то не выполнено необходимое условие экстремума, т.е. найденная допустимая экстремаль не доставляет экстремума.

Если выполнено усиленное условие Якоби и при этом интегрант f квазирегулярен, то найденная допустимая экстремаль доставляет сильный минимум в задаче (4.1)–(4.2).

Если не выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то нижняя грань равна $-\infty$.

Если выполнено условия Якоби и функционал (4.1) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} A_k (x^{(k)})^2 dt,$$

то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум.

3. Если проверка необходимых и достаточных условий 2-го порядка затруднена, то можно провести исследование при помощи определения экстремума.

4.3 Пример

Решить следующую экстремальную задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{T_0} \left(\ddot{x}^2 - \dot{x}^2\right) dt \to \min,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0.$$

Решение

1. Запишем необходимое условие — уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\ddddot{x} + \ddot{x} = 0.$$

2. Общее решение уравнение Эйлера-Пуассона:

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 t + C_4.$$

Среди допустимых экстремалей всегда имеется допустимая экстремаль $\widehat{x} = 0$.

3. Проверяем достаточное условие:

   а) Усиленное условие Лежандра выполнено:
   $$\widehat{f}_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2 > 0, \ \forall t \in [0, T_0].$$

   б) Проверим выполнимость условия Якоби. Уравнение Якоби имеет вид
   $$h^{(4)} + h^{(2)} = 0.$$
   Положим, что
   $$h_1(t) = 1 - \cos t, h_2 = \sin t - t,$$
   $$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ \dot{h}_1(t) & \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \sin t - t \\ \sin t & \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$
   Тогда $H(0) = 0$,
   $$\det \ddot{H}(0) = \det \begin{pmatrix} \ddot{h}_1(0) & \ddot{h}_2(0) \\ \dddot{h}_1(0) & \dddot{h}_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$
   Найдем сопряженные точки, решая уравнение $\det H(\tau) = 0$. Имеем
   $$2(\cos\tau - 1) + \tau \sin\tau = 0 \Longleftrightarrow \sin\frac{\tau}{2} = 0, \frac{\tau}{2} = \mathrm{tg}\frac{\tau}{2}.$$
   Ближайшая к нулю точка: $\tau = 2\pi$.

Ответ: Если $T_0 < 2\pi$, то $\widehat{x}(t) = 0$ — единственная допустимая экстремаль, доставляющая абсолютный минимум, $J_{\min} = J(0) = 0$. Если $T_0 > 2\pi$, точная нижняя грань функционала равна $-\infty$. Можно показать, что при $T_0 = 2\pi$ допустимые экстремали имеют вид $\widehat{x}(t) = C(1 - \cos t)$ и все они доставляют абсолютный минимум.

5. Задача с подвижными концами

5.1 Постановка задачи

Задачей с подвижными концами называется следующая экстремальная задача:

$$J(\xi) = J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr \tag{5.1}$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0,\ i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $\triangle$ — заданный отрезок, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$.

Элемент $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ называется ***допустимым***, если $x \in C^1(\triangle)$, $t_0, t_1 \in \triangle, t_0 < t_1$, и выполняется условие (5.2) на концах.

Определение 11. *Допустимый элемент* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ *доставляет* ***слабый локальный минимум****, если существует* $\delta > 0$ *такой, что для любого допустимого элемента* $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$*, для которого*

$$\|x - \widehat{x}\|_1 < \delta,\ |t_0 - \widehat{t_0}| < \delta,\ |t_1 - \widehat{t_1}| < \delta$$

выполняется

$$J(\xi) \geq J(\widehat{\xi}).$$

5.2 Алгоритм решения

Выписать: ***интегрант задачи***

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}),$$

терминант **задачи**

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Записать необходимые условия:

   а) *условие стационарности по x — уравнение Эйлера для интегранта L*

   $$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i}(t) + L_{x_i}(t) = 0,\ \forall t \in \triangle;$$

   б) *условия трансверсальности* для l

   $$L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)},$$

   $$L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)};$$

   в) *условие стационарности по подвижным концам*

   $$\mathcal{L}_{t_0} = \mathcal{L}_{t_0}(t_0) = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 f(t_0) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

   $$\mathcal{L}_{t_1} = \mathcal{L}_{t_1}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 f(t_1) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0.$$

   Отметим, что это условие выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования.

   Найти допустимые экстремали. Рассмотреть два случая $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$ (за λ_0 можем брать любую константу, при исследовании задачи на минимум берем $\lambda_0>0$). И учитывать, что множители Лагранжа одновременно не могут обращаться в ноль.

2. Показать, что найденные в пункте 1 допустимые экстремали доставляют экстремум или нет.

5.3 Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T \dot{x}^2 - x + 1 dt \rightarrow extr,$$

$$x(0) = 0.$$

Решение

Имеем: интегрант задачи $L(t) = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$, терминант задачи $l(t) = \lambda_1 x(0)$, функция Лагранжа $\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)dt + \lambda_1 x(0)$.

1. Запишем необходимые условия:

   а) уравнение Эйлера для лагранжиана

   $$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

   б) трансверсальности по x для терминанта

   $$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1,$$

   $$L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(T) = 0;$$

   в) условие стационарности по подвижному концу T

   $$\mathcal{L}_T(T) = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

   Если $\lambda_0 = 0$, то из б) следует, что $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Значит в этом случае решения нет. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда условия а)-в) записываются следующим образом

   $$-2\ddot{x} - 1 = 0,\ \dot{x}(T) = 0, x(T) = 1.$$

   Общее решение уравнение Эйлера

   $$x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

   Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Неизвестные C_1, T находим из условий трансверсальности

   $$\begin{cases} -\frac{T}{2} + C_1 = 0, \\ -\frac{T^2}{4} + C_1 T = 1. \end{cases}$$

2. Отсюда $C_1 = 1$, $T = 2$. Таким образом, в задаче имеется единственный допустимый экстремальный элемент $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{T}) = (-\frac{t^2}{4} + t, 2)$.

3. Возьмем элемент $\widehat{\xi} = (-\frac{t^2}{4} + t, T)$. Тогда

$$J(\xi) = \int\limits_0^T \left(\left(-\frac{t}{2} + 1 \right)^2 - \left(-\frac{t^2}{4} + t \right) + 1 \right) dt = \int\limits_0^T \left(\frac{t}{2} - 1 \right)^2 dt,$$

$$J(\widehat{\xi}) = \int\limits_0^2 \left(\frac{t}{2} - 1 \right)^2 dt.$$

Очевидно, что $J(\xi) > J(\widehat{\xi})$ при $T > \widehat{T}$ и $J(\widehat{\xi}) < J(\xi)$ при $T < \widehat{T}$, поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная величина. Это означает, что в любой окрестности $\widehat{\xi}$ существует другой допустимый элемент, на котором значение функционала J как больше, так и меньше значения функционала J в точке $\widehat{\xi}$, т.е. $\widehat{\xi}$ не доставляет локального экстремума.

6. Задача Лагранжа

Пусть n — фиксированное натуральное число, $k, m \geq 0$ — целые, причем $k \leq n$, f_i, $i = \overline{0,m}$, ψ_i, $i = \overline{0,m}$, φ_i, $i = \overline{0,k}$ — известные функции своих аргументов, $\triangle$ — заданный отрезок числовой прямой,

$$t_0, t_1 \in \triangle^\circ, t_0 < t_1, x(\cdot) \equiv (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in C_n^1(\triangle),$$

$$\xi = (x(\cdot), t_0, t_1), ||\xi|| = \max\{||x||_1, |t_0|, |t_1|\}.$$

Зададим функционалы

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),\ i = \overline{0,m}.$$

6.1 Постановка задачи

Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме называется следующая экстремальная задача:

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \to \inf \tag{6.1}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) \leq 0, i = \overline{1, m'}, \tag{6.2}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = 0,\ i = \overline{m' + 1, m}, \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(t, x(t)),\ j = \overline{1, k}, \tag{6.4}$$

(6.4) — называется дифференциальной связью.

Определение 12. *Допустимая точка* $\widehat{\xi} = (\widehat{x}(\cdot), \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ *в задаче (6.1) – (6.4) доставляет* ***слабый локальный минимум (максимум)****, если существует* $\delta > 0$*, что для любой допустимой функции* $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ *для которой*

$$\|\xi - \widehat{\xi}\| < \delta$$

выполняется

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi}) \quad \left(\mathfrak{B}_0(\xi) \leq \mathfrak{B}_0(\widehat{\xi})\right).$$

6.2 Алгоритм решения

Выписать ***лагранжиан задачи***:

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=0}^{k} p_j(\cdot)(x_j - \varphi),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$ — вектор множителей; ***терминант*** задачи

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t, x, \dot{x});$$

функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt + l(t).$$

1. Выписать *необходимые условия*:

   а) *условие стационарности для лагранжиана задачи по* x

   $$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, i = \overline{1, m}; \tag{6.5}$$

   б) *условия трансверсальности*

   $$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \widehat{l}_{x_i(t_0)}, i = \overline{1, m},$$

   $$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\widehat{l}_{x_i(t_1)}, i = \overline{1, m};$$

в) *условие стационарности по подвижным концам*

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_0} = \mathcal{L}_{t_0}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow -f(t_0) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{t_1} = \mathcal{L}_{t_1}(\widehat{\xi}) = 0 \Longleftrightarrow f(t_1) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0;$$

Отметим, что условия выписывается только для подвижных концов.

г) *условие дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i \mathfrak{B}_i(\widehat{\xi}) = 0, i = \overline{1, m'};$$

д) *условие неотрицательности*

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m'}, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \neq 0.$$

Условия а)-д) дают множество допустимых экстремалей задачи (6.1)–(6.4) в слабой постановке.

2. Показать, что допустимые экстремали доставляют экстремум функционалу $\mathfrak{B}_0$ или решений нет.

6.3 Пример

Найти решение следующей экстремальной задачи

$$\mathfrak{B}_0(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr,$$

$$\mathfrak{B}_1(x(\cdot)) = \int_0^1 x dt = 0, \ x(1) = 1.$$

Решение

Записываем лагранжиан задачи

$$L(t) = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x;$$

терминант задачи

$$l(t) = \lambda_2 (x(1) - 1);$$

функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x dt + \lambda_2(x(1) - 1).$$

1. Выпишем необходимые условия:

   а) для лагранжиана уравнение Эйлера

   $$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0; \tag{6.6}$$

   б) трансверсальности по x для терминанта

   $$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0$$

   $$L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Longleftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(1) = -\lambda_2.$$

   Так как концы фиксированы и нет ограничений типа неравенств, то отсутствуют условия в), г) и д).

2. Если $\lambda_0 = 0$, то из а) $\lambda_1 = 0$, а из б) $\lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа равны нулю. Следовательно, решения нет. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда

   $$\ddot{x} = \lambda_1.$$

   Общее решение: $x = C_1 t^2 + C_2 + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условия трансверсальности и условий, входящих в постановку задачи. Имеем

   $$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_3 = 1, \\ \frac{C_1}{3} + C_3 = 0. \end{cases}$$

   Отсюда $C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = 0$, $C_3 = -1/2$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль

   $$\widehat{x} = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

3. Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\widehat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0,1])$ такую, чтобы $\widehat{x}+h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(1)=0$ и $\int\limits_0^1 hdt = 0$. Тогда

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x}+h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 (\dot{\widehat{x}}+\dot{h})^2 dt - \int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}^2 dt = 2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h}dt + \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2 dt.$$

Интегрируя первый интеграл по частям с учетом условия на h и условия трансверсальности $\dot{\widehat{x}}(0)=0$, получим

$$2\int\limits_0^1 \dot{\widehat{x}}\dot{h}dt = 2\dot{\widehat{x}}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \ddot{\widehat{x}}hdt = -6\int\limits_0^1 hdt = 0.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x}+h) - \mathfrak{B}_0(\widehat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{\widehat{h}}^2 dt \geq 0$$

или

$$\mathfrak{B}_0(\widehat{x}+h) \geq \mathfrak{B}_0(\widehat{x})$$

для любой допустимой точки $\widehat{x}+h$, т.е. $\widehat{x} = \frac{3t^2-1}{2}$ доставляет абсолютный минимум в данной задаче.

Ответ: $\widehat{x}(t) = \frac{3t^2-1}{2} \in absmin.$

Литература

[1] Галеев Э. М., Тихомиров В.М. **Оптимизация: теория, примеры, задачи.** – М.: Элиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[2] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с. ISBN 5-9221-0590-6.

[3] Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. **Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:** Учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.