МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Сыктывкарский лесной институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С.М.Кирова»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Посвящается 60-летию
высшего профессионального лесного образования
в Республике Коми

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебное пособие

Утверждено учебно-методическим советом Сыктывкарского лесного института в качестве учебного пособия по дисциплине «Математика» для студентов всех направлений бакалавриата, специальностей, форм обучения

Сыктывкар
СЛИ
2012

УДК 510.6
ББК 22.12
М34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Сыктывкарского лесного института

Составители:
Д. Б. Ефимов, кандидат физико-математических наук, доцент
С. М. Полещиков, доктор физико-математических наук, профессор (отв. редактор)

Рецензенты:
кафедра математического анализа
(Коми государственный педагогический институт);
В. Л. Никитенков, доктор технических наук, профессор
(Сыктывкарский государственный университет)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ :
М34 учебное пособие / сост. Д. Б. Ефимов, С. М. Полещиков ; Сыкт. лесн. ин-т. — Сыктывкар : СЛИ, 2012. – 100 с.
ISBN 978-5-9239-0352-2

Пособие содержит теоретический материал и упражнения по некоторым основным темам курса математической логики и теории алгоритмов. В каждом разделе изложены базовые понятия, подробно рассмотрены разнообразные типовые примеры. В конце каждого раздела приведены задачи для самостоятельного решения.

Издание предназначено для студентов всех направлений бакалавриата, специальностей и форм обучения в помощь при изучении дисциплины «Математика».

УДК 510.6
ББК 22.12

Темплан 2012 г. Изд. № 41.

ISBN 978-5-9239-0352-2

Оглавление

Введение

Математическая логика зародилась в XVII веке как наука, изучающая предмет традиционной логики, т. е. свойства процессов умозаключения, рассуждения и логического вывода, с помощью математических методов. Постепенно сфера интересов математической логики расширялась. В частности, она стала применяться для изучения оснований математики, структуры и свойств математических доказательств и самих математических теорий.

Теория алгоритмов изучает общие свойства и закономерности алгоритмов. Становление этой науки в начале XX века началось с выработки математически строгого определения алгоритма.

Особое значение математическая логика и тесно связанная с ней теория алгоритмов приобрели в XX веке в связи с развитием электронно-вычислительной техники. Методы этих теорий используются как при физическом создании и конструировании компьютеров и других вычислительных и обрабатывающих информацию устройств, так и при разработке и создании языков программирования.

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельного освоения студентами основ математической логики и теории алгоритмов. Составители старались представить материал достаточно подробно, придавая особое значение простоте и ясности изложения. В тексте приведено и разобрано большое количество примеров, иллюстрирующих вводимые понятия и методы. В конце каждого раздела приведен довольно обширный список заданий для самостоятельного решения. Часть рассмотренных задач заимствована из учебников, приведенных в библиографическом списке. Некоторые из них переработаны. Всего рассмотрено 130 задач. Работа над ними позволит лучше освоить и закрепить пройденный материал. Для самоконтроля большинство задач снабжены ответами, а часть из них и решениями.

Пособие состоит из двух глав. Первая посвящена математической логике, вторая — теории алгоритмов. Пособие не претендует на полноту изложения. В него не вошли такие представляющие интерес темы, как языки и грамматики, многозначные логики, конечные автоматы, сложность алгоритмов. Заметим также, что некоторые утверждения и теоремы, встречающиеся в тексте, приводятся без доказательств. С этими и другими вопросами можно подробно ознакомиться с помощью литературы, указанной в конце пособия в библиографическом списке.

Последний раздел 1.13 первой главы носит вспомогательный характер. В нем приведено несколько занимательных логических задач. Они вносят некоторое разнообразие в достаточно строгий стиль изложения материала, позволяют взглянуть на изучаемый предмет с «живой» стороны. Решать эти задачи можно основываясь только на внутренне присущей нашему мышлению логике. Но все-таки рекомендуется, для лучшего освоения материала, применять для их решения рассмотренный ранее аппарат математической логики.

В пособии приняты следующие сокращения: ЛВ — логика высказываний; ЛП — логика предикатов.

Составители будут признательны за пожелания и замечания, которые можно направлять по адресу: 167982, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 39, Сыктывкарский лесной институт, кафедра высшей математики; электронный адрес: defimov@dm.komisc.ru.

Глава 1

Математическая логика

1.1. Высказывания. Логические операции

Под ***высказыванием*** понимается такое утверждение (предложение), которое однозначно является либо истинным, либо ложным. Конкретные высказывания обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$ или теми же буквами с индексом внизу.

Пример 1.1 (высказываний).

A_1: Земля — самая близкая планета к Солнцу;

A_2: Сыктывкар основан в 1780 году;

A_3: Крокодил — млекопитающее;

A_4: Площадь круга радиуса r равна πr^2;

A_5: $\ln 1 = 10$;

A_6: По данным переписи 2010 г., в Республике Коми проживает 950 тыс. человек;

A_7: А. П. Чехов — автор романа «Война и мир».

Пример 1.2 (утверждений, не являющихся высказываниями).

1) «В Лесном институте учиться тяжело» — не высказывание, т. к. нельзя сказать точно истинно оно или ложно (ответ субъективен).

2) «$\sin x = 1$» — не высказывание, т. к. не ясно о каком x идет речь.

В литературе имеются следующие обозначения: для значения «истинно» — 1, И, t (от англ. true — истинный), и для значения «ложно» — 0, Л, f (от англ. false — ложный). Эти значения называются ***значениями истинности***. В данном пособии мы будем пользоваться обозначениями 1 и 0. Если высказывание A является истинным (ложным), то кратко это будем обозначать как $A = 1$ ($A = 0$).

Из одних высказываний с помощью ***логических операций (логических связок)*** можно строить другие высказывания. Существуют 5 основных логических операций. Все они призваны отразить основные обороты естественного языка, используемые человеком в рассуждении, умозаключении. ***Отрицанием*** высказывания A называется новое высказывание $\neg A$ (или $\bar{A}$), которое истинно, если высказывание A ложно, и ложно, если A истинно. Эта операция является эквивалентом союза «не» или фразы «не верно, что». ***Конъюнкцией*** двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое через $A \wedge B$ или $A \& B$, которое истинно лишь в случае, когда истинны оба исходных высказывания A и B, и ложно во всех остальных случаях. Эта операция с точки зрения логики хорошо отражает смысл союза «и», поэтому высказывания $A \wedge B$, $A \& B$ читаются как «A и B». ***Дизъюнкцией*** двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое через $A \vee B$, которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания A и B ложны. Эта операция по смыслу соответствует союзу «или», поэтому высказывание $A \vee B$ читается как «A или B». ***Импликацией*** двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое через $A \to B$, которое ложно в единственном случае, когда высказывание A истинно, а B ложно, а во всех остальных случаях истинно. Это связка призвана отразить смысл таких оборотов естественного языка, как «из A следует B», «A влечет B» или «если A, то B». ***Эквивалентностью*** двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое через $A \leftrightarrow B$, которое истинно в том и только том случае, когда одновременно оба высказывания A и B либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях ложно. Эта связка призвана отразить смысл следующих оборотов естественного языка: «A эквивалентно B», «A необходимо и достаточно для B» или «A тогда и только тогда, когда B». Действие логических операций удобно записать в виде следующей ***таблицы истинности***:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Как и в алгебре, порядок выполнения операций задается с помощью скобок (сначала выполняются операции в скобках). Например, $(A_1 \wedge A_2) \vee A_4$ и $A_1 \wedge (A_2 \vee A_4)$ — два различных высказывания, первое из них истинно, а второе ложно.

Пример 1.3. $\neg A_3$: «Не верно, что крокодил — млекопитающее» или, более привычно, $\neg A_3$: «Крокодил — не млекопитающее». $A_2 \wedge A_7$: «Сыктывкар основан в 1780 году и А. П. Чехов — автор романа «Война и мир»». $A_4 \vee A_5$: «Площадь круга радиуса r равна πr^2 или $\ln 1 = 10$».

Пример 1.4. Даны высказывания: «Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник и не ромб» и «Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда у него все углы прямые». Разбейте их на более простые составляющие и, вводя для них буквенные обозначения, с помощью логических операций запишите данные высказывания в символьном виде.

Решение. Разобъем исходное высказывание на следующие простейшие: A: «В параллелограмме все углы прямые», B: «В параллелограмме все стороны равны между собой», C: «Этот параллелограмм — прямоугольник», D: «Этот параллелограмм — ромб». Тогда данные высказывания можно записать в виде: $(\neg A \vee \neg B) \to (\neg C \wedge \neg D)$ и $C \leftrightarrow A$.

Пример 1.5. Из трех данных высказываний A, B, C с помощью логических операций постройте такое составное высказывание, которое было бы ложно только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны.

Решение. Искомое высказывание можно представить в виде $M \wedge N$, где высказывание M ложно только в случае, когда A, B и C ложны, а N ложно только в случае, когда все три исходных высказывания истинны. В качестве M можно взять $A \vee B \vee C$, а в качестве N — $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$. Таким образом, искомое высказывание имеет вид: $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$.

Пример 1.6. Известно, что высказывания $(A \vee B) \to A$ и $A \to B$ истинны. Определить отсюда логическое значения высказывания $\neg A \leftrightarrow \neg B$.

Решение. Из того, что $((A \vee B) \to A) = 1$ заключаем, что невозможна ситуация, когда $A = 0$, а $B = 1$. Из того, что $(A \to B) = 1$, следует, что невозможна ситуация, когда $A = 1$, а $B = 0$. Значит, A и B одновременно или истинны, или ложны. Следовательно, $(\neg A \leftrightarrow \neg B) = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

а) Эверест — самая высокая гора на Земле;

б) Депутат Государственной Думы;

в) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ для любых чисел a и b;

г) Земля — самая большая планета Солнечной системы;

д) $\sin 7 + \cos 3$;

е) Лучшее время года — лето;

ж) Париж — самый романтичный город;

з) В молекулу воды входят атомы углерода;

и) Книги Хэмингуэя очень увлекательны;

к) Число 15543548657 является простым.

2. Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет:

а) «$7 < 3$», «$3 < 7$»;

б) «$5 < 9$», «$5 \geq 9$»;

в) «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC остроугольный»;

г) «Натуральное число n четно», «Натуральное число n нечетно»;

д) «Функция f возрастающая», «Функция f убывающая».

3. Следующие составные высказывания разбейте на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:

а) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6.

б) Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них равно нулю.

в) Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.

г) Если какие-либо два из трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ коллинеарны, то их смешанное произведение равно нулю $[\overline{a} \times \overline{b}] \cdot \overline{c} = 0$.

д) Логарифм положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1.

е) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.

ж) Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.

4. Из трех данных высказываний A, B, C постройте такое составное высказывание, которое:

а) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;

б) ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;

в) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;

г) ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;

д) истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;

е) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;

ж) ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C.

5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $(A \to B) = 1$, $(A \leftrightarrow B) = 0$, $(B \to A) =?$;

б) $(A \wedge B) = 0$, $(A \to B) = 1$, $(B \to \neg A) =?$;

в) $(A \leftrightarrow B) = 0$, $(A \to B) = 1$, $((\neg A \to B) \leftrightarrow A) =?$;

г) $(A \vee B) = 1$, $(A \to B) = 1$, $(\neg B \to A) =?$;

д) $(A \wedge B) = 0$, $(A \vee B) = 1$, $(A \to B) = 1$, $(B \to A) =?$;

е) $((A \vee B) \to A) = 1$, $(A \to B) = 1$, $(\neg A \leftrightarrow \neg B) =?$;

ж) $(A \wedge B) = 0$, $(A \leftrightarrow B) = 0$, $(A \to B) = 1$, $A =?$;

з) $(A \to (B \leftrightarrow A)) = 0$, $(A \to B) =?$.

1.2. Формулы логики высказываний. Тавтологии

Пропозиционными переменныминазываются переменные, вместо которых можно подставлять различные конкретные высказывания. Пропозиционные переменные обозначаются обычно последними большими буквами латинского алфавита P, Q, R, S, X, Y, Z или такими же буквами с индексом внизу. Из пропозиционных переменных, знаков логических операций и скобок можно составлять различные выражения, некоторые из которых называются ***формулами***. А именно имеет место следущее индуктивное определение.

1) Каждая отдельно взятая пропозиционная переменная является формулой логики высказываний;

2) Если F_1 и F_2 — формулы логики высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами логики высказываний;

3) Никаких других формул логики высказываний, кроме указанных в п. 1, 2, нет.

Далее формулы логики высказываний будем называть просто формулами.

Пример 1.7 (формул). $(\neg P \wedge Q)$, $((X \to Z) \wedge (Y \vee Z))$, $((X \to Y) \to Y)$.

Пример 1.8 (не формул). $((XY) \to Z)$ — между переменными X и Y нет логической связки; $(P \wedge Q \vee R)$ — не хватает пары скобок.

Формулы, образованные из пропозиционных переменных $X_1, \ldots, X_n$, обозначаются через $F(X_1, \ldots, X_n)$ или для краткости просто через $F(X)$. Если в формуле $F(X)$ вместо пропозиционных переменных $X_1, \ldots, X_n$ подставить конкретные высказывания $A_1, \ldots A_n$, то получается некоторое составное высказывание, которое обозначается через $F(A_1, \ldots, A_n)$ или просто через $F(A)$. Для формул, так же как для логических операций, можно составлять таблицы истинности.

Пример 1.9. Составить таблицу истинности для формулы $(X \to Y) \vee (Y \to X)$ (для удобства внешние скобки убираем).

Решение. Искомая таблица истинности имеет вид:

X	Y	$X \to Y$	$Y \to X$	$(X \to Y) \vee (Y \to X)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

В столбцы X, Y записываем всевозможные комбинации логических значений пропозиционных переменных X и Y. В столбцах $X \to Y$, $Y \to X$, пользуясь таблицей истинности для импликации, записываем соответствующие логические значения данных подформул. В последнем столбце, пользуясь определением дизъюнкции, записываем окончательное логическое значение для всей формулы.

Пример 1.10. Составить таблицу истинности формулы $(P \wedge Q) \to (P \to \neg R)$.

Решение. В этой формуле 3 пропозиционных переменных. Поэтому таблица истинности будет содержать $2^3 = 8$ строк:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg R$	$P \leftrightarrow \neg R$	$(P \wedge Q) \to (P \leftrightarrow \neg R)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Особое место среди формул занимают ***тавтологии***, т. е. формулы, которые при любых значениях входящих в них переменных являются истинными высказываниями. На языке таблиц истинности это означает, что в последнем итоговом столбце таблицы такой формулы стоят одни единицы. Если формула F является тавтологией, то кратко это обозначается как $\vDash F$.

Пример 1.11 (тавтологий). 1) $P \vee \neg P$; 2) $\neg(P \wedge \neg P)$; 3) $\neg\neg P \leftrightarrow P$.

Для того, чтобы доказать, что формула является тавтологией, достаточно построить ее таблицу истинности. Но в данном примере доказательства вполне очевидны и без таблиц. Например, в первой формуле выражения P и $\neg P$ имеют различные значения истинности, следовательно, одно из них истинно, значит, истинной будет и их дизъюнкция. Далее, P или $\neg P$ ложно, следовательно, $P \wedge \neg P$ ложно, а отрицание $\neg(P \wedge \neg P)$ истинно. В третьей формуле $\neg\neg P$ и P либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, значит, $\neg\neg P \leftrightarrow P$ всегда истинна, т. е. является тавтологией.

Задачи для самостоятельного решения

6. Составьте таблицы истинности для следующих формул:

а) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

б) $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$;

в) $P \leftrightarrow (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$;

г) $((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \leftrightarrow (P \to Q)$;

д) $(((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R)) \vee \neg R) \vee Q$;

е) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \vee R)$;

ж) $\neg((\neg R \to \neg(P \to \neg(Q \to R))) \to \neg(P \to \neg Q))$;

з) $((P \to Q) \wedge (R \to \neg Q) \wedge (P \vee R)) \to R$.

7. С помощью таблиц истинности проверьте, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$; б) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$;

в) $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$; г) $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$;

д) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$;

е) $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

ж) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$; з) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$;

и) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$;

к) $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$; л) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$;

м) $(P \wedge P) \leftrightarrow P$; н) $(P \vee P) \leftrightarrow P$.

8. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями, не используя таблиц истинности:

а) $(\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P$;

б) $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P$;

в) $((P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)) \to (P \to Q)$;

г) $((P \to Q) \wedge (R \to S)) \to ((P \wedge R) \to (Q \wedge S))$;

д) $((P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge \neg(Q \vee S)) \to \neg(P \vee R)$;

е) $(P_1 \to (P_2 \to \ldots \to (P_m \to G)\ldots)) \leftrightarrow ((P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m) \to G)$.

9. Пусть F, G, H — формулы. Докажите, что:

а) если $\vDash F \wedge G$, $\vDash F \leftrightarrow H$, то $\vDash G \to H$;

б) если $\vDash \neg G \wedge \neg H$, $\vDash F \vee G$, то $\vDash \neg F \to H$;

в) если $\vDash F$, $\vDash F \leftrightarrow G$, $\vDash F \leftrightarrow H$, то $\vDash G \wedge H$;

г) если $\vDash F \leftrightarrow G$, $\vDash G \leftrightarrow H$, то $\vDash F \leftrightarrow H$;

д) если $\vDash F \wedge G$, $\vDash G \to \neg H$, то $\vDash F \wedge \neg H$;

е) если $\vDash G \to F$, $\vDash (\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$, $\vDash H$, то $\vDash \neg G \wedge H$.

1.3. Равносильность формул

Формулы F_1 и F_2 называются ***равносильными***, если их логические значения при любых значениях пропозиционных переменных совпадают. При этом используется обозначение $F_1 \cong F_2$. Вполне очевидно, что две формулы F_1 и F_2 являются равносильными тогда и только тогда, когда $F_1 \leftrightarrow F_2$ является тавтологией:

$$F_1 \cong F_2 \Leftrightarrow\ \models (F_1 \leftrightarrow F_2). \tag{1.1}$$

С точки зрения логики высказываний, равносильные формулы не различимы, т. е. выражают одно и то же. Приведем далее наиболее важные равносильности (большинство из них получены с помощью формулы (1.1) и тавтологий предыдущего параграфа):

1. $(P \vee \neg P) \cong 1$ (закон исключенного третьего);
2. $(P \wedge \neg P) \cong 0$ (закон отрицания противоречия);
3. $\neg\neg P \cong P$ (закон двойного отрицания);
4. $(P \wedge P) \cong P$ (идемпотентность конъюнкции);
5. $(P \vee P) \cong P$ (идемпотентность дизъюнкции);
6. $(P \wedge Q) \cong (Q \wedge P)$ (коммутативность конъюнкции);
7. $(P \vee Q) \cong (Q \vee P)$ (коммутативность дизъюнкции);
8. $((P \wedge Q) \wedge R) \cong (P \wedge (Q \wedge R))$ (ассоциативность конъюнкции);
9. $((P \vee Q) \vee R) \cong (P \vee (Q \vee R))$ (ассоциативность дизъюнкции);
10. $((P \vee Q) \wedge R) \cong ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$ (1-й закон дистрибутивности);
11. $((P \wedge Q) \vee R) \cong ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$ (2-й закон дистрибутивности);
12. $\neg(P \wedge Q) \cong (\neg P \vee \neg Q)$ (1-й закон де Моргана[1]);
13. $\neg(P \vee Q) \cong (\neg P \wedge \neg Q)$ (2-й закон де Моргана);
14. $(P \leftrightarrow Q) \cong ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ (выражение эквивалентности через конъюнкцию и импликацию);
15. $(P \to Q) \cong (\neg Q \to \neg P)$ (закон контрапозиции);
16. $(P \to Q) \cong (\neg P \vee Q)$ (выражение импликации через отрицание и дизъюнкцию);

[1] Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

17. $(P \to Q) \cong \neg(P \wedge \neg Q)$ (выражение импликации через отрицание и конъюнкцию);

18. $(P \vee 1) \cong 1$ (дизъюнкция с истиной);

19. $(P \wedge 1) \cong P$ (конъюнкция с истиной);

20. $(P \vee 0) \cong P$ (дизъюнкция с ложью);

21. $(P \wedge 0) \cong 0$ (конъюнкция с ложью).

Пример 1.12. Рассмотрим математическое утверждение: «Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$». Если ввести простейшие высказывания P: «ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится» и Q: «$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$», то данное утверждение запишется как $P \to Q$. В силу закона контрапозиции 15) оно равносильно $\neg Q \to \neg P$, т. е. утверждению: «Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — расходится». Утверждение и его контрапозиция или оба одновременно истинны, или оба ложны. Но часто бывает, что доказать или опровергнуть контрапозицию проще, чем доказать или опровергнуть само утверждение. Метод доказательства утверждений с помощью контрапозиции называется ***методом от противного***.

Пример 1.13. Часто, особенно в математике, встречаются утверждения, в которых присутствуют фразы «необходимо и достаточно» или «тогда и только тогда». Рассмотрим, например, следующую теорему: «Для того, чтобы три вектора лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю». Выделим простейшие высказывания: P: «Три вектора лежат в одной плоскости» и Q: «Смешанное произведение векторов равно нулю». Тогда на языке логики данное утверждение запишется как $P \leftrightarrow Q$. В силу 14) оно равносильно утверждению $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$. Это означает, что для того, чтобы доказать теорему, надо доказать, что из P следует Q (необходимость) и, наоборот, что из Q следует P (достаточность).

Если в формуле некоторую ее подформулу заменить на равносильную, то полученная формула будет равносильна исходной. Это используется в первую очередь для упрощения формул.

Пример 1.14. Упростить формулу $\neg(P \to \neg Q) \wedge \neg(Q \to \neg P)$.

Решение. Здесь и далее цифрами над знаком $\cong$ будем обозначать номер равносильности из приведенного выше списка, которая применяется при соответствующем преобразовании. Итак, $\neg(P \to \neg Q) \wedge \neg(Q \to \neg P) \overset{16}{\cong}$

$\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P) \overset{13}{\cong} (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) \wedge (\neg\neg Q \wedge \neg\neg P) \overset{3}{\cong} (P \wedge Q) \wedge (Q \wedge P) \overset{6}{\cong}$ $(P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q) \overset{4}{\cong} (P \wedge Q)$. Сначала мы выразили импликацию через дизъюнкцию и отрицание. Затем применили 2-й закон де Моргана. Затем сократили двойные отрицания. Далее во второй скобке переставили слагаемые с помощью закона коммутативности. И, наконец, сократили одну из скобок по закону идемпотентности. Следущее вполне очевидное предложение можно использовать для проверки того, что формула является тавтологией. Если F_1 — тавтология и $F_1 \cong F_2$, то F_2 тоже тавтология.

Пример 1.15. Доказать, что формула $(\neg P \to (Q \wedge \neg P)) \to P$ является тавтологией.

Решение. Для этого приведем данную формулу с помощью равносильных преобразований к очевидной тавтологии: $(\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P \cong (\neg P \to 0) \to P \cong \neg(\neg P \to 0) \vee P \cong \neg(\neg\neg P \vee 0) \vee P \cong \neg(P \vee 0) \vee P \cong \neg P \vee P \cong 1$.

Задачи для самостоятельного решения

10. Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к возможно более простой форме:

а) $\neg(\neg P \vee Q) \to ((P \vee Q) \to P)$;

б) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \to Q) \wedge P)$;

в) $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge (P \vee Q)$;

г) $(P \to Q) \wedge (Q \to \neg P) \wedge (R \to P)$;

д) $(P \wedge R) \vee (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$;

е) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

ж) $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$;

з) $(P \leftrightarrow Q) \to (\neg P \to Q)$;

и) $(P \to \neg Q) \wedge ((P \to Q) \vee (R \to P))$;

к) $\neg((P \to Q) \wedge P) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$;

л) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$.

11. Формула, которая при любых значениях входящих в нее переменных принимает ложное значение, называется *тождественно ложной.* Очевидно, что если F — тождественно ложная, то $\neg F$ — тавтология и наоборот. С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тождественно ложными:

а) $((P \to Q) \to P) \wedge \neg P$;

б) $\neg(((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z))$;

в) $((X \to \neg Y) \to \neg(X \to Z)) \wedge \neg(Z \to Y)$;

г) $(Z \to \neg(X \wedge \neg Z)) \to (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y)$;

д) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \to \neg Q))$;

е) $(P \to (Q \to R)) \wedge (P \to Q) \wedge P \wedge \neg R$.

12. С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$;

б) $(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$;

в) $(P \to (P \leftrightarrow Q)) \leftrightarrow (P \to Q)$;

г) $P \to (Q \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q)))$;

д) $((P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge \neg(Q \vee S)) \to \neg(P \vee R)$.

13. Для каждого из следующих утверждений сформулируйте равносильное ему с помощью закона контрапозиции:

а) Если последовательность сходится, то она ограничена;

б) Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны;

в) Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны;

г) В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;

д) Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел;

е) Если целое число делится на 6, то оно делится на 3 и 2.

14. Пользуясь законом контрапозиции, докажите теоремы:

а) Если $m \cdot n$ — нечетное число, то m и n нечетны (m, n — целые числа);

б) Если значение выражения $2t/(t^2+1)$ — иррациональное число, то t иррационально;

в) Если $a^2 + b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$;

г) Если скалярное произведение двух векторов равно 0, то эти векторы перпендикулярны.

15. Определите, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

а) Наличие аттестата зрелости достаточно для поступления в университет;

б) Наличие аттестата зрелости необходимо для поступления в университет;

в) Периодичность — достаточное условие всякой тригонометрической функции;

г) Периодичность — необходимое условие всякой тригонометрической функции;

д) Непрерывность — необходимое и достаточное условие всякой тригонометрической функции;

е) Для того, чтобы натуральное число p было простым, необходимо и достаточно, чтобы число $p+1$ было четным;

ж) Для того, чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны.

16. Существует теорема геометрии о трех перпендикулярах: «Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна к самой наклонной». Эквивалентны ли этой теореме следующие утверждения (У1): «Прямая, проведенная на плоскости не перпендикулярно к наклонной, не перпендикулярна к ее проекции» и (У2): «Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна к ее проекции»?

1.4. Нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция выражений, каждое из которых является конъюнкцией переменных или их отрицаний. ***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** называется конъюнкция выражений, каждое из которых является дизъюнкцией переменных или их отрицаний.

Пример 1.16. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Z)$ — ДНФ от 3-х переменных. $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$ — КНФ от 3-х переменных.

Каждую формулу исчисления высказываний с помощью равносильных преобразований можно привести к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме. Для этого надо выразить импликацию и эквивалентность через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, а затем с помощью законов де Моргана, двойного отрицания и дистрибутивности раскрыть скобки.

Пример 1.17. $\neg((P \wedge \neg Q) \vee \neg(Q \to R)) \overset{16}{\cong} \neg((P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg Q \vee R)) \overset{13}{\cong} \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg(\neg Q \vee R) \overset{3}{\cong} (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$ (КНФ) $\overset{10}{\cong} (\neg P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (Q \wedge (\neg Q \vee R)) \overset{10}{\cong} (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$ (ДНФ) $\overset{2,20}{\cong} (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ (ДНФ).

У каждой формулы может быть несколько конъюнктивных и дизъюнктивных нормальных форм (как видно из примера). Но среди них выделяются две, которые в общем случае являются уникальными для данной формулы. Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется ***совершенной***, если в каждую конъюнкцию (дизъюнкцию) входит ровно по одному представителю от каждой пары $X_i, \neg X_i$, $i = 1, \ldots n$. Кратко обозначается СДНФ (СКНФ). Каждая не тождественно ложная формула исчисления высказываний имеет единственную СДНФ. Каждая формула логики высказываний, не являющаяся тавтологией, имеет единственную СКНФ.

Пример 1.18. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge \neg Z)$ — дизъюнктивная нормальная форма от 3-х переменных, но не совершенная! В первой конъюнкции нет представителя от пары $Z, \neg Z$, а во второй от пары $X, \neg X$.

$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$ — СДНФ от 3-х переменных.

$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$ — СКНФ от 2-х переменных.

Пример 1.19. Привести формулу $\neg(Y \to (\neg X \wedge Z))$ к СДНФ и СКНФ.

1) $\neg(Y \to (\neg X \wedge Z)) \cong \neg(\neg Y \vee (\neg X \wedge Z)) \cong Y \wedge \neg(\neg X \wedge Z) \cong Y \wedge (X \vee \neg Z) \cong (Y \wedge X) \vee (Y \wedge \neg Z) \overset{19}{\cong} ((Y \wedge X) \wedge 1) \vee (1 \wedge (Y \wedge \neg Z)) \overset{1}{\cong} ((Y \wedge X) \wedge (Z \vee \neg Z)) \vee ((X \vee \neg X) \wedge (Y \wedge \neg Z)) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \overset{5}{\cong} (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$ (СДНФ).

2) $\neg(Y \to (\neg X \wedge Z)) \cong Y \wedge (X \vee \neg Z) \overset{2,20}{\cong} (Y \vee (Z \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee \neg Z) \cong (Y \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Z) \cong ((X \wedge \neg X) \vee (Y \vee Z)) \wedge ((X \wedge \neg X) \vee (Y \vee \neg Z)) \wedge ((X \vee \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Y)) \cong (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \overset{4}{\cong} (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z)$ (СКНФ).

Существует также способ приведения формул к совершенным нормальным формам с помощью таблиц истинности. Допустим, например, что некоторая формула F от трех переменных имеет следующую таблицу истинности:

P	Q	R	$F(P,Q,R)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Вычислим для этой формулы СДНФ. Для этого выделим те наборы значений переменных, на которых формула принимает значение 1. В нашем случае это $(0;0;0)$, $(0;1;1)$ и $(1;0;1)$. Теперь каждому из этих наборов сопоставим конъюнкцию переменных и их отрицаний по следующему правилу: если переменная в наборе имеет значение 1, то в конъюнкцию она входит сама, а если значение 0, то в конъюнкцию входит ее отрицание. Так, набору $(0;0;0)$ соответствует конъюнкция $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$, а наборам $(0;1;1)$ и $(1;0;1)$ конъюнкции $(\neg P \wedge Q \wedge R)$ и $(P \wedge \neg Q \wedge R)$. Теперь рассмотрим дизъюнкцию этих конъюнкций, которую кратко обозначим через F_1:

$$F_1 = (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R).$$

Это и есть искомая СДНФ. Действительно, по определению дизъюнкции, F_1 истинна в случае, когда хотя бы одна из скобок равна 1. Но первая скобка равна 1 только на наборе $(0;0;0)$, вторая — только на наборе $(0;1;1)$, третья — только на наборе $(1;0;1)$. Таким образом, F_1 истинна только на этих трех наборах, что и соответствует заданной таблице истинности. Построим теперь соответствующую СКНФ. Для этого выделим те наборы, на которых формула принимает значение 0. Это наборы $(0;0;1)$, $(0;1;0)$, $(1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(1;1;1)$. Теперь сопоставим этим наборам дизъюнкции переменных и их отрицаний по правилу: если переменная в наборе имеет значение 0, то в дизъюнкцию входит она сама, если значение 1, то ее отрицание. Получаем следующие соответствия: $(0;0;1) \sim (P \vee Q \vee \neg R)$, $(0;1;0) \sim (P \vee \neg Q \vee R)$, $(1;0;0) \sim (\neg P \vee Q \vee R)$, $(1;1;0) \sim (\neg P \vee \neg Q \vee R)$, $(1;1;1) \sim (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$. Теперь рассмотрим конъюнкцию этих дизъюнкций: $F_2 = (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что это и есть СКНФ для данной формулы.

Существует простой способ перехода от СДНФ к СКНФ и наоборот. Допустим, что формула F записана в СДНФ. Тогда, применяя законы де Моргана и двойного отрицания, легко получить запись формулы $\neg F$ в СКНФ.

Для этого просто в записи F надо поменять все конъюнкции на дизъюнкции, и наоборот, дизъюнкции на конъюнкции, поставить отрицания перед теми переменными, перед которыми их не было, и наоборот, убрать перед теми, перед которыми они стояли. Теперь, чтобы получить СКНФ для F надо взять те дизъюнкции переменных и их отрицаний, которые не входят в СКНФ для $\neg F$, и затем объединить их конъюнкцией. При переходе от СКНФ к СДНФ действуем аналогично с очевидными изменениями.

Пример 1.20. Найти СКНФ для $F = (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$.

Решение. Формула F записана в СДНФ. Рассмотрим $\neg F = (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$. В выражение $\neg F$ не входят следующие комбинации дизъюнкций переменных и их отрицаний: $(X \vee Y \vee Z)$, $(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$, $(X \vee \neg Y \vee \neg Z)$, $(X \vee \neg Y \vee Z)$, $(\neg X \vee \neg Y \vee Z)$, $(\neg X \vee Y \vee Z)$. Объединяя их конъюнкцией, получаем СКНФ для F.

Задачи для самостоятельного решения

17. Применяя равносильные преобразования, найдите СДНФ и СКНФ для следующих формул:

а) $(X \to Y) \to Z$;

б) $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \leftrightarrow Z)$;

в) $((X \to Y) \to (Z \to \neg X)) \to (Y \to \neg Z)$;

г) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$;

д) $(X \leftrightarrow Y) \to ((\neg X \to Z) \to \neg Y)$;

е) $(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z)$.

18. Используя СДНФ или СКНФ, найдите формулу, принимающую значение 1 на следующих наборах значений переменных, и только на них:

а) $F(0,0) = F(1,1) = 1$;

б) $F(1,0) = F(0,1) = F(1,1) = 1$;

в) $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

г) $F(0,1,1) = F(1,1,0) = F(0,1,0) = F(1,0,1) = 1$;

д) $F(0,1,1) = F(1,0,0) = F(0,0,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$.

19. Для каждой из следующих формул найдите СДНФ и СКНФ с помощью ее таблицы истинности:

а) $X \leftrightarrow Y$;

б) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge \neg Y)$;

в) $(X \wedge Y) \vee Z$;

г) $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \to (Y \wedge Z))$;

д) $((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X) \wedge Z)$;

е) $\neg(((X \vee Y) \to \neg(X \vee Y)) \wedge \neg Z)$.

20. Не используя таблиц истинности и равносильных преобразований, перейдите от СДНФ к СКНФ для данной формулы:

а) $F = (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$;

б) $F = X \wedge Y$;

в) $F = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$;

г) $F = (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$.

21. Не используя таблиц истинности и равносильных преобразований, перейдите от СКНФ к СДНФ для данной формулы:

а) $F = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$;

б) $F = X \vee \neg Y$;

в) $F = (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$;

г) $F = (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)$.

1.5. Логическое следование

Формула H называется ***логическим следованием*** формул $F_1, \ldots, F_m$, если H превращается в истинное высказывание при всех тех значениях переменных, при которых в истинное высказывание превращаются все формулы $F_1, \ldots, F_m$. При этом пишут $F_1, \ldots, F_m \vDash H$. Формулы $F_1, \ldots, F_m$ называются посылками для логического следствия H.

Пример 1.21. Формула $H = \neg(X \wedge Y)$ является логическим следствием формул $F_1 = ((X \wedge Y) \to \neg Z)$ и $F_2 = (X \to Z)$. Это видно из соответствующей таблицы истинности:

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to \neg Z$	$X \to Z$	$\neg(X \wedge Y)$
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
0	0	1	0	**1**	**1**	**1**
0	1	0	0	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

Имеется 5 строк, в которых формулы F_1 и F_2 принимают одновременно значение 1. При этом формула H также принимает значение 1.

Нетрудно доказать, что формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \to H$ является тавтологией:

$$F \vDash H \Leftrightarrow \ \vDash (F \to H)\ . \tag{1.2}$$

Пример 1.22. Показать, что $(P \wedge Q) \vDash (P \vee Q)$.

Решение. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q) \cong \neg(P \wedge Q) \vee P \vee Q \cong \neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q \cong 1 \vee 1 \cong 1$. Отсюда следует, что формула $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$ является тавтологией. Следовательно, в силу свойства (1.2), выполняется логическое следование $(P \wedge Q) \vDash (P \vee Q)$.

Можно доказать и более общий признак. А именно, для любых формул $F_1, F_2, \ldots, F_m, H$ следующие утверждения равносильны:

а) $F_1, F_2, \ldots, F_m \vDash H$ (т.е. H логически следует из $F_1, F_2, \ldots, F_m$);

б) $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m \vDash H$ (H логически следует из конъюнкции формул $F_1,\ F_2, \ldots,\ F_m$);

в) $\vDash ((F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \to H)$ (импликация является тавтологией).

Пример 1.23. Доказать, что $(P \to Q), (P \to \neg Q) \vDash \neg P$.

Решение. $((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P \cong ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \to \neg P \cong \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg P \cong (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee \neg P \cong (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee \neg P \cong P \vee \neg P \cong 1$. Отсюда следует, что формула $((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P$ является тавтологией. А это, в силу вышеприведенного признака, означает, что логическое следование $(P \to Q), (P \to \neg Q) \vDash \neg P$ выполняется.

Пример 1.24. Одним из наиболее часто используемых в рассуждениях правил является так называемое ***правило modus ponens (модус поненс)***:

$$F,\ F \to H \vDash H, \tag{1.3}$$

т. е., если истинно утверждение F и истинно то, что из F следует H, то истинным будет и утверждение H. Например, данное правило мы используем в следующем естественном рассуждении: «Треугольник ABC — равносторонний (утверждение F). Если треугольник ABC — равносторонний, то каждый из его углов равен 60 градусов ($F \to H$). Следовательно, каждый из углов треугольника ABC равен 60 градусов (H)».

Пример 1.25. Вполне естественным является также ***правило цепного заключения***:

$$F \to G, G \to H \vDash F \to H \tag{1.4}$$

(если из F следует G, а из G следует H, то, значит, из F следует H). Например, на этом правиле основано следующее правильное рассуждение: «Если число делится на 8, то оно делится и на 4. Если число делится на 4, то оно делится и на 2. Следовательно, если число делится на 8, то оно делится и на 2».

Пример 1.26. Андрей или очень переутомился (A), или болен (B). Если он переутомился, то он раздражается (C). Он не раздражается. Следовательно, он не болен. Правильно ли с точки зрения логики это рассуждение?

Решение. Надо проверить верно или нет, что $(A \vee B), (A \to C), \neg C \vDash \neg B$. В силу приведенного выше признака для этого достаточно проверить, будет ли тавтологией формула $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge \neg C) \to \neg B$. Сделаем это с помощью равносильных преобразований: $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge \neg C) \to \neg B \cong \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee C) \vee C \vee \neg B \cong (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee C \vee \neg B \cong (\neg A \wedge \neg B) \vee ((A \vee C) \wedge (\neg C \vee C)) \vee \neg B \cong (\neg A \wedge \neg B) \vee A \vee C \vee \neg B \cong ((\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A)) \vee C \vee \neg B \cong \neg B \vee A \vee C \vee \neg B \cong A \vee \neg B \vee C$ — не тавтология. Следовательно, рассуждение логически не верно. Зададимся теперь вопросом: как найти все формулы, являющиеся логическим следствием данных формул? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение. Формула H, не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$, когда все дизъюнкции из разложения H в СКНФ входят в СКНФ формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m$.

Пример 1.27. Найти все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы от переменных X и Y, которые являются логическим следствием формул $F_1 = (X \leftrightarrow Y)$ и $F_2 = \neg X$.

Решение. Приведем формулу $F_1 \wedge F_2$ к СКНФ: $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg X \cong (X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge \neg X \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge \neg X \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg X \vee (Y \wedge \neg Y)) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$.

Логическим следствием формул F_1, F_2 кроме $F_1 \wedge F_2$ будут дизъюнкции, входящие в СКНФ, а также их всевозможные конъюнкции по 2: $G_1 = (\neg X \vee Y) \cong X \to Y$, $G_2 = (\neg Y \vee X) \cong Y \to X$, $G_3 = (\neg X \vee \neg Y) \cong X \to \neg Y$, $G_4 = ((\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)) \cong X \leftrightarrow Y$, $G_5 = ((\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \cong \neg X \vee (Y \wedge \neg Y) \cong \neg X \vee 0 \cong \neg X$, $G_6 = ((\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \cong \neg Y \vee (X \wedge \neg X) \cong \neg Y$.

Возникает и обратная задача: нахождение всех формул, их которых данная формула логически следует. Чтобы найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет данная формула F, зависящая от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, нужно действовать по следующему алгоритму: найти СКНФ для формулы F; выявить все дизъюнкции от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и их отрицаний, которые в нее не входят; составить всевозможные конъюнкции формулы F с недостающими дизъюнкциями. Полученная совокупность формул будет искомой.

Пример 1.28. Найти все не равносильные между собой формулы от двух переменных X и Y для которых формула $F = ((X \vee Y) \to \neg X)$ является логическим следствием.

Решение. Приведем F к СКНФ: $(X \vee Y) \to \neg X \cong \neg(X \vee Y) \vee \neg X \cong (\neg X \wedge \neg Y) \vee \neg X \cong (\neg X \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee \neg X) \cong \neg X \wedge (\neg X \vee \neg Y) \cong (\neg X \vee (Y \wedge \neg Y)) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$.

Недостающими дизъюнкциями являются $(X \vee Y)$ и $(X \vee \neg Y)$. Поэтому искомыми посылками для данной формулы будут:

1) $F \wedge (X \vee Y) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y) \cong \neg X \wedge (X \vee Y) \cong \neg X \vee Y$;

2) $F \wedge (X \vee \neg Y) \cong \neg X \wedge (X \vee \neg Y) \cong \neg X \wedge \neg Y$;

3) $F \wedge (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \cong \neg X \wedge (X \vee (Y \wedge \neg Y)) \cong \neg X \wedge X \cong 0$ — тождественно ложная формула.

Задачи для самостоятельного решения

22. Пользуясь определением, выясните, справедливы ли следущие логические следования:

а) $P \leftrightarrow \neg Q \vDash P \vee Q$;

б) $P \to Q,\ P \to \neg Q \vDash \neg P$;

в) $(P \to Q) \to Q,\ \neg P, Q \vDash \neg Q$;

г) $(P \vee \neg R) \to Q \vDash (P \to Q) \wedge R$;

д) $(P \vee Q) \to R \vDash (P \to Q) \vee (P \leftrightarrow R)$;

е) $(P \to Q) \to R \vDash P \vee Q \vee R$;

ж) $P \to Q,\ P \vee R \vDash (P \vee R) \to (P \wedge Q)$;

з) $(P \wedge Q) \to R,\ \neg Q \vDash \neg R$.

23. Докажите, что $F \vDash G$ тогда и только тогда, когда $\vDash (F \to G)$.

24. Докажите, что если $F \vDash G \wedge H$, то $F \vDash G \vee H$ и $F \vDash G \to H$.

25. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы, являющиеся логическими следствиями следующих формул:

а) $X \to Y$ и X;

б) $X \to Y$ и $\neg Y$;

в) $(X \wedge Y) \to Z$ и $X \vee Y$;

г) $(X \wedge Y) \to Z$ и $Y \to X$.

26. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы, зависящие от переменных X и Y, для которых следующая формула является логическим следствием (за исключением самой данной формулы):

а) $\neg X \vee \neg Y$;

б) $X \to Y$;

в) $\neg(X \vee Y)$;

г) $(X \vee Y) \to (X \wedge Y)$;

д) $\neg X \to (X \wedge Y)$.

27. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы, зависящие от переменных X, Y, Z, из которых логически следует формула:

а) $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg Y$;

б) $X \wedge Y$;

в) $Y \wedge \neg Z$;

г) $\neg X \wedge \neg Y$.

28. Пусть справедлива теорема: «Дифференцируемая на отрезке функция является непрерывной и ограниченной на этом отрезке». Нуждаются ли в доказательствах следующие утверждения: «Если функция не дифференцируема на отрезке, то она не ограничена на этом отрезке» и «Если функция не непрерывна на отрезке, то она не дифференцируема на этом отрезке»?

29. Выясните, какие из приведенных ниже высказываний следуют из высказывания «Если целое число n делится на 6, то n также делится на 3»:

а) Чтобы n делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6;

б) Чтобы n делилось на 6, достаточно, чтобы оно делилось на 3;

в) Чтобы n не делилось на 3, необходимо, чтобы n не делилось на 6;

г) Число n делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3;

д) Число n делится на 3 тогда и только тогда, когда оно делится на 6.

30. Выясните, являются ли следующие рассуждения логически правильными; для этого представьте каждое предложение в виде формулы исчисления высказываний и проверьте, является ли заключение логическим следствием конъюнкции посылок.

а) Если число x делится на 4, то оно — четное. Число x — четное. Следовательно, x делится на 4;

б) Если верно, что дифференцируемая функция непрерывна, то невозможно, чтобы функция была дифференцируема и разрывна;

в) Если верно, что невырожденная матрица имеет обратную, то также справедливо, что матрица либо вырождена, либо имеет обратную;

г) Если справедливо, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень, то также верно, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, не имеющее действительного корня, имеет четную степнь;

д) Если Антон ляжет спать поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет бесполезно. Следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно;

е) Или Анна и Антон одного возраста, или Анна старше Антона. Если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста. Если Анна старше Антона, то Антон старше Николая. Следовательно, либо Наташа и Антон не одного возраста, либо Антон старше Николая;

ж) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей;

з) Если капиталовложения останутся постоянными, то увеличатся правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

1.6. Булевы функции[2]

Рассмотрим переменные $x_1, \ldots, x_n$, каждая из которых принимает только два значения: 0 и 1 (булевы переменные). ***Булевой функцией*** от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется функция, которая каждому конкретному значению этих переменных (т. е. упорядоченному набору длины n из 0 и 1) ставит в соответствие число 0 или 1. Так как имеется лишь конечное число наборов длины n из 0 и 1 (точнее, их число равно 2^n), то булеву функцию можно задать, построив таблицу ее значений. Так как каждому из 2^n наборов можно сопоставить 2 значения функции, 0 или 1, то число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Пример 1.29. Общее число булевых функций от одной переменной равно $2^{2^1} = 4$. Все они приведены в следующей таблице:

x	0	x	$\neg x$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

В первой строке, начиная со 2-го столбца, даны условные обозначения этих функций. Первая называется ***тождественным нулем***, вторая — ***тождественной функцией***, третья — это не что иное, как уже встречавшееся нам отрицание, четвертая — ***тождественная единица***.

Пример 1.30. Следующая таблица задает 7 различных булевых функций от двух переменных:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x \downarrow y$	$x \mid y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

[2]Названы в честь Джорджа Буля (1815–1864) — английского логика и математика, одного из основателей математической логики.

Первые четыре функции нам уже знакомы — это конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность. Функция $x+y$ называется ***сложением по модулю два***. Заметим, что она является отрицанием эквивалентности: $x + y = \neg(x \leftrightarrow y)$. Функция $x \downarrow y$ называется ***стрелкой Пирса***[3]. Она является отрицанием дизъюнкции: $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$. Функция $x|y$ носит название ***штрих Шеффера***[4]. Она является отрицанием конъюнкции: $x|y = \neg(x \wedge y)$. Общее число булевых функций от двух переменных равно $2^{2^2} = 16$.

Аналогом понятия равносильности для формул является понятие равенства булевых функций. Две булевых функции называются ***равными***, если они принимают одинаковые значения при одинаковых значениях переменных. При этом вместо знака $\cong$ пишут знак равенства $=$. Например, $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ — 1-й закон де Моргана. Вообще, все свойства и законы справедливые для логических связок справедливы и для соответствующих булевых функций. В частности, для булевых функций, как и для формул логики высказываний, вводятся понятия нормальных и совершенных нормальных форм. Справедлива теорема о единственности представления булевых функций в виде СДНФ и СКНФ. Но можно привести и правила, аналогов которых не было в логике высказываний. Например, сложение по модулю 2 удовлетворяет следующим свойствам:

1. $x + y = y + x$ (коммутативность);
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);
3. $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$ (дистрибутивность);
4. $x + x = 0$ (идемпотентность);
5. $x + 0 = x$.

Из второго свойства следует, что в выражениях типа $x + y + z$ скобки можно расставлять произвольным образом. Результат от этого не меняется. На практике, для удобства, скобки просто опускают. Опять же для того, чтобы избежать лишних скобок, считают, что операция конъюнкции имеет приоритет перед сложением по модулю два. Это учтено, например, в правой части третьего свойства.

Полиномом Жегалкина[5] называется булева функция, представляющая собой сумму по модулю два конъюнкций переменных. Например,

[3] Чарльз Пирс (1839–1914) — американский философ, логик, математик.

[4] Генри Шеффер (1882–1964) — американский логик.

[5] И. И. Жегалкин (1869–1947) — российский и советский математик и логик.

$1+x+x\wedge y$ — полином Жегалкина от двух переменных, $x\wedge z+x\wedge y+x\wedge y\wedge z$ — полином Жегалкина от трех переменных. Число различных полиномов Жегалкина от n переменных равно 2^{2^n}. Любая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом.

Пример 1.31. Представить в виде полинома Жегалкина функции $\vee, \rightarrow$.

Решение. Нетрудно видеть, что $\neg x = 1 + x$. Отсюда $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg((1+x)\wedge(1+y)) = \neg(1+x+y+x\wedge y) = 1+1+x+y+x\wedge y = x+y+x\wedge y$. Аналогично $x \rightarrow y = \neg x \vee y = \neg x+y+\neg x\wedge y = 1+x+y+(1+x)\wedge y = 1+x+y+y+x\wedge y = 1+x+x\wedge y$.

Система булевых функций называется ***полной***, если всякая другая булева функция выражается через функции (является суперпозицией функций) данной системы. В качестве примера можно привести следующие полные системы булевых функций: $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\downarrow\}$, $\{|\}$. Действительно, в параграфе, посвященном совершенным нормальным формам, мы рассмотрели, как по данной таблице истинности построить СКНФ и СДНФ, которые содержат только связки $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Аналогично можно поступить и в случае булевых функций. Далее, по 1-му закону де Моргана $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)$. В силу предыдущего предложения любая функция выражается через $\neg$, $\wedge$ и $\vee$. Заменив в этом выражении дизъюнкцию на отрицание и конъюнкцию по вышеприведенному правилу, получим выражение функции через конъюнкцию и отрицание. Аналогично с помощью равенств $x_1 \wedge x_2 = \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2)$, $x_1 \vee x_2 = \neg x_1 \rightarrow x_2$, $x_1 \wedge x_2 = \neg(x_1 \rightarrow \neg x_2)$ доказывается, что полными системами являются $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \rightarrow\}$. Нетрудно проверить, что отрицание и конъюнкция выражаются через стрелку Пирса следующим образом: $\neg x = x \downarrow x$, $x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$. Так как $\{\neg, \wedge\}$ — полная система, то отсюда следует, что и $\{\downarrow\}$ — полная система. Аналогичным образом через штрих Шеффера можно выразить отрицание и дизъюнкцию: $\neg x = x|x$, $x \vee y = (x|x)|(y|y)$. Так как $\neg$ и $\vee$ образуют полную систему, то и $\{|\}$ является полной системой булевых функций.

Пример 1.32. Покажем, как выразить через функции $\neg$, $\wedge$, $\vee$ функцию сложения по модулю 2. Последняя задается таблицей:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Выделим наборы значений переменных $(0;1)$ и $(1;0)$, которым соответствует значение функции 1. Заменяем в этих наборах 1 соответствующими переменными, а 0 — их отрицаниями и связываем их конъюнкцией:

$(\neg x \wedge y)$ и $(x \wedge \neg y)$. Затем соединяем полученные конъюнкции дизъюнкцией. В результате получаем СДНФ, которая является искомым выражением: $x + y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$.

Пример 1.33. Выразить $\downarrow$ через $|$ и наоборот.

Решение. $x \downarrow y = \neg(x \vee y) = \neg((x|x)|(y|y)) = [(x|x)|(y|y)]|[(x|x)|(y|y)]$;

$x|y = \neg(x \wedge y) = \neg((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) = [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)] \downarrow [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)]$.

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ ***сохраняет ноль***, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Множество всех таких функций обозначим через P_0. Примером булевых функций, сохраняющих ноль, очевидно являются дизъюнкция и конъюнкция. Отрицание, импликация не сохраняют ноль.

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***сохраняет единицу***, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Множество всех таких функций обозначим через P_1. Примером булевых функций, сохраняющих единицу, являются дизъюнкция, конъюнкция, импликация. Отрицание не сохраняет единицу.

Двойственной к булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется булева функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$. Булева функция называется ***самодвойственной***, если она двойственна сама себе, т. е. если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$. Через S обозначим множество всех самодвойственных булевых функций.

Пример 1.34. Проверить на самодвойственность следующие функции: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Решение. Рассмотрим двойственную функцию к конъюнкции: $\neg(\neg x \wedge \neg y) = x \vee y$. Она равна дизъюнкции, а не конъюнкции, следовательно, конъюнкция не самодвойственна. Аналогично, не будет самодвойственной и дизъюнкция. Рассмотрим импликацию и найдем для нее СДНФ: $x \rightarrow y = \neg x \vee y = (\neg x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (y \wedge (x \vee \neg x)) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$. Найдем теперь СДНФ для двойственной функции к импликации: $\neg(\neg x \rightarrow \neg y) = \neg(x \vee \neg y) = \neg x \wedge y$. Так как СДНФ не совпадают, то и сами функции не равны и, следовательно, импликация не самодвойственна. Рассмотрим функцию, двойственную к последней функции: $\neg[(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) = [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \vee z) = [x \wedge (y \vee z)] \vee [(y \wedge z) \wedge (y \vee z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y) \vee (y \wedge z \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Получили исходную функцию, следовательно, она самодвойственна.

Введем на множестве наборов n нулей и единиц отношение порядка. Будем считать, что $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_i \leq y_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. Например, если $n = 2$, то $(0, 0) \leq (0, 1) \leq (1, 1)$, а наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравниваются. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых двоичных наборов $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ следует, что $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$. Множество всех монотонных булевых функций обозначим через M.

Пример 1.35. Проверить на монотонность функции $\wedge, \vee, \to$.

Решение. Построим таблицу значений данных функций:

x	y	$\wedge$	$\vee$	$\to$
0	0	0	0	**1**
0	1	0	1	1
1	0	0	1	**0**
1	1	1	1	1

Заметим, что наборы значений переменных x и y идут сверху вниз в возрастающем порядке, т. е. те, которые расположены ниже, больше или не сравниваются с теми, которые расположены выше. Отметим теперь полужирным шрифтом те значения функций, в которых нарушается монотонность. У функций $\wedge$ и $\vee$ таких нарушений нет, их значения не убывают, если идти сверху вниз. У функции $\to$ монотонность нарушается, например, в первой и третьей строке. Таким образом, конъюнкция и дизъюнкция являются монотонными функциями, а импликация нет.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***линейной***, если ее можно представить в виде полинома Жегалкина степени не выше первой:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 \wedge x_1 + \cdots + a_n \wedge x_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные, равные 0 или 1. Множество всех линейных булевых функций обозначим через L. Из примера 1.31 следует, что отрицание является линейной функцией, а конъюнкция, дизъюнкция и импликация — нет.

Следующая теорема была доказана американским математиком польского происхождения Эмилем Постом в 1921 г. Система булевых функций является полной тогда и только тогда, когда в этой системе имеется функция, не принадлежащая множеству P_0, имеется функция, не принадлежащая множеству P_1, имеется функция, не принадлежащая множеству S, имеется функция, не принадлежащая множеству M, имеется функция, не принадлежащая множеству L.

Пример 1.36. Проверить, является система булевых функций $\{\wedge, \vee, \to\}$ полной или нет.

Решение. Для решения удобно составить так называемую таблицу Поста для данной системы функций:

	P_0	P_1	S	L	M
$\wedge$	+	+	−	−	+
$\vee$	+	+	−	−	+
$\to$	−	+	−	−	−

В первом столбце приведены булевы функции, в первой строке классы функций. Знаком «+» отмечена принадлежность соответствующей булевой функции соответствующему классу. Знак «−» означает, что функция классу не принадлежит. Для того, чтобы система функций была полной, по теореме Поста необходимо, чтобы в каждом столбце присутствовал хотя бы один минус. Как видно из таблицы, в столбце P_1 минусов нет. Поэтому данная система функций не является полной.

Задачи для самостоятельного решения

31. Докажите следующие равенства для булевых функций:

а) $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$; б) $(x + y) + z = x + (y + z)$

в) $x \to y = x|(y|y)$; г) $x|y = 1 + x \wedge y$;

д) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x + y + z$; е) $x + y = (x|(y|y))|(y|(x|x))$.

32. Выразите через отрицание и импликацию следующие булевы функции: а) дизъюнкцию; б) конъюнкцию; в) эквивалентность; г) сумму по модулю два; д) штрих Шеффера; е) стрелку Пирса.

33. Для следующих булевых функций найдите представляющий их полином Жегалкина; укажите линейные функции:

а) $x \leftrightarrow y$; б) $x \downarrow y$; в) $\neg x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))$;

г) $(x \to (y \to \neg z)) \wedge ((y \wedge \neg z) \to x)$; д) $((x + 1) \wedge (y + 1) \wedge \neg z) \vee (y \wedge z)$;

е) $(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg z)$; ж) $\neg x \vee y \vee \neg z$;

з) $(x \wedge y) \vee (z \to x)$; и) $(x \wedge z) \vee ((x + z) \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg z)$;

к) $(x \vee y) + (\neg x \vee \neg y) + \neg z$; л) $x \leftrightarrow y + \neg(y \leftrightarrow z)$.

34. Выясните, какие из следующих функций самодвойственны:

а) $(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z)$; б) $x \wedge y + x \wedge z + y \wedge z$;

в) $(((x \to y) + 1) \wedge (z + 1)) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$; г) $(x \wedge (z \to y)) \vee \neg(y \to z)$;

д) $x \wedge z + ((x + z) \wedge (y + 1))$; е) $(z \to \neg x) \wedge (x \downarrow y)$.

35. Докажите, что линейная функция $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ является самодвойственной тогда и только тогда, когда n нечетно.

36. Выясните, какие из следующих булевых функций монотонны:

а) $x \wedge y \wedge z$; б) $(x + y) \wedge z + \neg(x + z)$;

в) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$; г) $x \wedge y \wedge z + x \wedge z$;

д) $x \wedge y \wedge (z+1) + z$; е) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$;

ж) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z + x \wedge y)$; з) $(x \downarrow y) \leftrightarrow (y|z)$.

37. Докажите, что: а) все монотонные булевы функции, за исключением тождественно равной 1, сохраняют 0; б) все монотонные булевы функции, за исключением тождественно равной 0, сохраняют 1.

38. Докажите, что если булева функция линейна и монотонна, то она либо не сохраняет 0, либо не сохраняет 1, либо самодвойственна.

39. Исследуйте на полноту следующие системы булевых функций:

а) $\{+, \vee, 1\}$; б) $\{\leftrightarrow, \wedge, 0\}$; в) $\{+, \leftrightarrow\}$, г) $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;

д) $\{(x \wedge y) \vee (\neg y \wedge z), 0, 1\}$; е) $\{(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \neg x, 1\}$;

ж) $\{x + y + z, x \wedge y, \neg x\}$; з) $\{(x \wedge y) + z, (x \leftrightarrow y) + z, 1\}$;

и) $\{(x \wedge y) + (x \wedge z) + (y \wedge z), 0, 1\}$; к) $\{x + y, 0, 1\}$; л) $\{x \wedge y, 0, 1\}$;

м) $x \wedge y \wedge z + 1$.

40. Докажите, что система $f(x_1, \ldots, x_n)$, состоящая из одной функции, полна тогда и только тогда, когда эта функция не сохраняет 0, не сохраняет 1 и не является самодвойственной.

1.7. Применение булевых функций

Рассмотрим некоторое устройство, внутреннее содержание которого нас не интерсует, а известно лишь, что оно имеет n упорядоченных «входов» и один «выход». Схематически оно изображено на рис. 1.1.

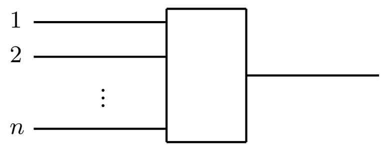

Рис. 1.1. Схематическое изображение функционального элемента

Допустим также, что на каждый вход может подаваться два вида сигналов (например, низкое и высокое напряжение), и каждому набору входных сигналов однозначно соответствует сигнал на выходе таких же двух видов. Такие устройства будем называть ***функциональными элементами***. Название объясняется тем, что если сигналу с высоким напряжением сопоставить 1, а сигналу с низким напряжением 0, то данному устройству будет однозначно соответствовать некоторая булева функция от n переменных. Например, устройству с двумя входами, которое имеет на выходе 1 только тогда, когда на оба входа поступает сигнал 1, соответствует конъюнкция двух переменных. Такое устройство изображено на рис. 1.2.

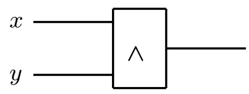

Рис. 1.2. Функциональный элемент, соответствующий конъюнкции 2-х переменных

Аналогично определяются и обозначаются другие функциональные элементы, соответствующие определенным булевым функциям (см. рис. 1.3).

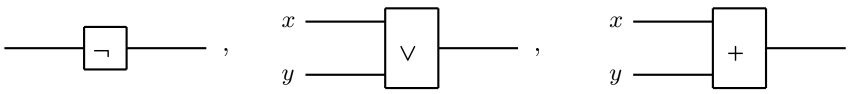

Рис. 1.3. Функциональные элементы, соответствующие булевым функциям $\neg$, $\vee$ и $+$

Функциональные элементы можно соединять друг с другом. Для этого надо выход одного элемента направить на вход другого. При этом получаются функциональные схемы. Они соответствуют комбинациям (суперпозициям) булевых функций. Например, булевой функции $x \wedge y + (x \vee \neg y)$ соответствует схема, изображенная на рис. 1.4. Черные точки означают место разветвления сигнала. Рассмотрим несколько примеров построения функциональных схем с заданными условиями.

Пример 1.37. Каждый из 3-х судей, засчитывая балл спортсмену, нажимает на кнопку. Балл начисляется только в том случае, когда загорается сигнальная лампочка. Построить по возможности более простую функциональную схему из элементов $\neg, \wedge, \vee$, через которую проходил бы ток и включал сигнальную лампочку тогда и только тогда, когда не менее 2-х судей нажали на кнопку.

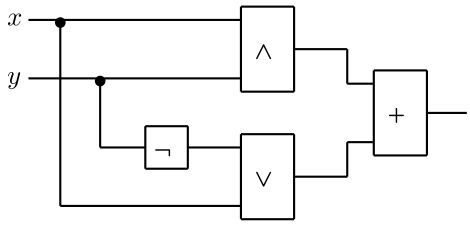

Рис. 1.4. Схема, соответствующая булевой функции $x \wedge y + (x \vee \neg y)$

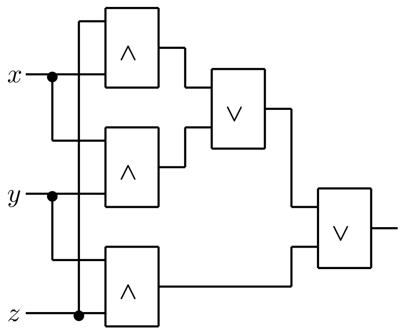

Рис. 1.5. Функциональная схема к примеру 1.37

Решение. Булева функция f такой схемы зависит от 3-х переменных x, y, z (кнопки). Считаем, что если кнопка нажата, то соответствующая переменная имеет значение 1, если не нажата, то 0. Данная булева функция должна принимать значение 1 только на следующих наборах переменных $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ и $(1,1,1)$. Составляя для нее СДНФ и упрощая ее, получаем: $f = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge y) \wedge (z \vee \neg z)) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (y \wedge ((\neg x \wedge z) \vee x)) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (y \wedge ((\neg x \vee x) \wedge (z \vee x)) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (y \wedge (z \vee x)) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge x) = (z \wedge ((x \wedge \neg y) \vee y)) \vee (y \wedge x) = (z \wedge ((x \vee y)) \vee (y \wedge x) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \vee (y \wedge x)$. По полученной функции строим искомую схему (рис. 1.5). Когда кнопки нажимают не менее двух судей, на выходе схемы получается напряжение и лампочка загорается.

Помимо всего прочего функциональные схемы нашли самое широкое применение в вычислительной технике. Ни одно современное вычислительное устройство не обходится без схем, реализующих различные булевы функции.

Пример 1.38 (двоичный полусумматор). Числа в компьютере хранятся в двоичной системе в ячейках памяти поразрядно. Сложение чисел выполняются по следующему правилу: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$. Сложение происходит по каждому разряду двух ячеек, в которых хранятся складываемые числа. Если разряд переполняется (что происходит только при $1+1$), то единица переносится в следующий разряд. Таким образом, процесс сложения в первом (младшем) разряде может быть охарактеризован двумя булевыми функциями $S(x,y)$ и $P(x,y)$, зависящими от складываемых чисел x и y: $S(x,y)$ — значение суммы, записываемое в тот же разряд, в котором происходит сложение; $P(x,y)$ — функция переноса, дает значение числа, переносимого в следующий, более старший разряд при переполнении разряда, в котором происходит сложение. Значения этих функций представлены в следующей таблице:

x	y	$S(x,y)$	$P(x,y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Выписывая для функций СДНФ, получаем: $S(x,y)=(\neg x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y)$, $P(x,y)=x\wedge y$. Соответствующие схемы изображены на рис. 1.6.

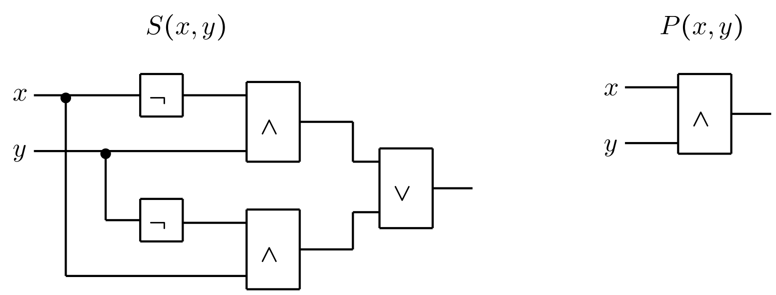

Рис. 1.6. Схемы, реализующие функции двоичного полусумматора

Пример 1.39 (одноразрядный двоичный сумматор). Рассмотренные в предыдущем примере действия совершаются лишь в первом разряде. Во всех остальных разрядах, начиная со второго, при сложении участвуют уже не два слагаемых x и y, но еще и число p, переносимое из предыдущего разряда. Таким образом, функции суммы S и переноса P в k-м разряде при $k > 1$ зависят уже не от 2-х, а от 3-х переменных. Таблица значений этих функций имеет вид:

x	y	p	$S(x,y,p)$	$P(x,y,p)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Для данных функций строим и упрощаем СДНФ: $S(x,y,p) = (\neg x \wedge \neg y \wedge p) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg p) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg p) \vee (x \wedge y \wedge p) = [((\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)) \wedge p] \vee [((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)) \wedge \neg p]$; $P(x,y,p) = (\neg x \wedge y \wedge p) \vee (x \wedge \neg y \wedge p) \vee (x \wedge y \wedge \neg p) \vee (x \wedge y \wedge p) = [(\neg x \wedge y \wedge p) \vee (x \wedge y \wedge p)] \vee [(x \wedge \neg y \wedge p) \vee (x \wedge y \wedge p)] \vee [(x \wedge y \wedge \neg p) \vee (x \wedge y \wedge p)] = [(\neg x \vee x) \wedge (y \wedge p)] \vee [(\neg y \vee y) \wedge (x \wedge p)] \vee [(\neg p \vee p) \wedge (x \wedge y)] = (y \wedge p) \vee (x \wedge p) \vee (x \wedge y)$. Схема для $P(x,y,p)$ совпадает со схемой к примеру 1.37, изображенной на рис. 1.5, а схема для $S(x,y,p)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.7.

Задачи для самостоятельного решения

41. По данным булевым функциям постройте соответствующие схемы, состоящие только из элементов $\wedge$, $\vee$ и $\neg$:

а) $x \leftrightarrow y$; б) $x + y$; в) $x|y$; г) $x \downarrow y$;

д) $((x \wedge y) \vee \neg z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee y)$; е) $(\neg x \vee y) \wedge ((y \wedge z) \vee x) \vee (u \wedge z)$;

ж) $((x \wedge y) \to (\neg x \wedge y)) \wedge (x \vee (z \wedge y))$; з) $(x \to y) \to (\neg x \wedge (y \vee z))$;

и) $(x \wedge y + z) \to (\neg x \wedge z)$; к) $(\neg x + \neg y) \wedge (x \leftrightarrow y)$.

42. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы включать и выключать лампочку независимо от положения другого выключателя.

43. Спроектируйте схему, которая бы позволяла включать и выключать лампочку с помощью трех независимых переключателей.

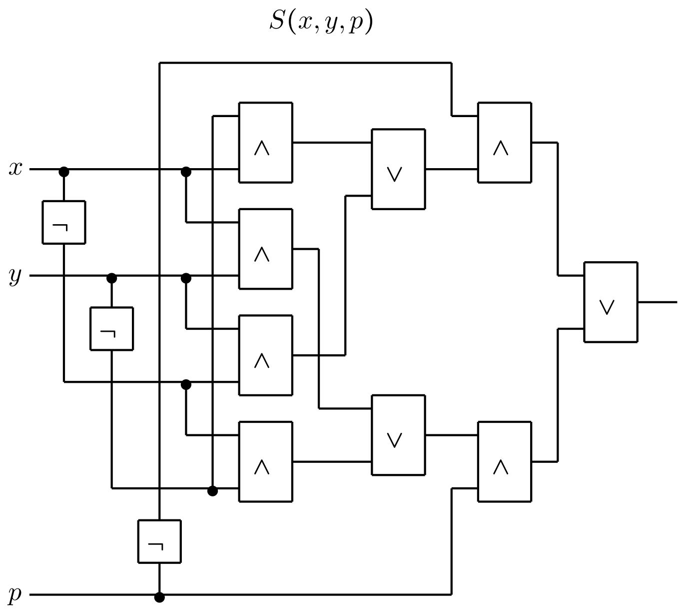

Рис. 1.7. Схема, реализующая функцию суммы двоичного сумматора

44. Постройте схему с тремя входами, которая имеет на выходе 1 тогда и только тогда, когда 1 поступает ровно на один или ровно на два входа.

45. Постройте схему контроля четности в восьмиразрядном двоичном слове (байте). Схема имеет 8 входов и один выход, на котором появляется единичный сигнал в случае нечетного числа единиц во входном слове.

46. Построить функциональную схему дешифратора «2 на 4». Он имеет два входа, на которые поступает двузначное двоичное число и 4 выхода, пронумерованные числами от 0 до 3. На каждом их выходов должна появляться 1 только в том случае, когда его номер является десятичной записью двоичного числа, поступающего на вход.

47. Аналогично предыдущей задаче, построить схему дешифратора «3 на 8», который бы любое трехзначное двоичное число приводил к десятичному виду. Для удобства записи можно построить схемы отдельно для каждого из выходов 0–7.

48. Построить функциональную схему для вычисления произведения 2-х двузначных двоичных чисел.

1.8. Формализованное исчисление высказываний

Чтобы придать какой-либо теории наибольшую математическую строгость, ее формализуют. Формальная теория считается определенной, если выполнены следующие условия: 1) задан ***алфавит*** теории, представляющий собой некоторое множество символов; 2) из всего множества выражений, составленных из символов алфавита выделено подмножество ***формул***; 3) из всего множества формул выделено подмножество формул, называемых ***аксиомами***; 4) определены ***правила вывода***, с помощью которых от одних формул переходят к другим.

Формализованное исчисление высказываний (ФИВ) — это следующая формальная теория:

1) Алфавит. Пропозиционные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, логические связки $\neg$, $\rightarrow$, вспомогательные знаки (,);

2) Формулы.

а) каждая пропозиционная переменная есть формула;

б) если F_1 и F_2 формулы, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \rightarrow F_2)$ также являются формулами;

в) никаких других формул, кроме получающихся в пунктах а), б), нет;

3) Аксиомы.

$A1$: $(F \rightarrow (G \rightarrow F))$;

$A2$: $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$;

$A3$: $((\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G))$;

где F, G, H — формулы;

4) Правила вывода.

MP (modus ponens): F, $F \rightarrow G \vdash G$ (из F и $F \rightarrow G$ следует G).

Таким образом, данная формальная теория основывается на трех группах аксиом и одном правиле вывода.

Пусть Γ — множество формул (гипотез). Говорят, что формула F выводится из множества гипотез Γ, если существует конечная последовательность формул F_1, F_2, $\ldots$, F_n, где каждая формула F_i является либо аксиомой, либо гипотезой, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода MP и F_n — это формула F. Цепочка формул, приводящих к F, называется ***доказательством*** формулы F, исходя из множества гипотез Г. При этом пишут $\Gamma \vdash F$. Если множество гипотез пусто ($\Gamma = \varnothing$), т. е. F доказывается только исходя из аксиом, то цепочка формул, приводящая к F, называется просто доказательством формулы F, а сама формула F называется при этом ***теоремой***. При этом пишут $\vdash F$.

Приведем пример формального доказательства теоремы.

Пример 1.40. Доказать, что $\vdash F \to F$.

Решение. Формальное доказательство — это просто цепочка голых формул, записанная в алфавите формальной теории. Чтобы было понятно, как строятся эти цепочки, будем давать комментарии:

N	Формулы	Комментарии
1	$(F \to ((F \to F) \to F)) \to$ $\to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$	в аксиоме $A2$ вместо F и H берем F, а вместо G — $F \to F$
2	$F \to ((F \to F) \to F)$	в аксиоме $A1$ вместо F берем F, а вместо G — $F \to F$
3	$(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$	получена из пунктов 1, 2 по правилу вывода MP
4	$F \to (F \to F)$	в $A1$ вместо F и G взяли F
5	$F \to F$	получена из 3, 4 по правилу MP

Таким образом $\vdash F \to F$, т. е. $F \to F$ является теоремой.

Пример 1.41. Доказать, что $\neg G \to \neg F, F \vdash G$.

Решение.

1	$\neg G \to \neg F$	гипотеза
2	F	гипотеза
3	$(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$	аксиома $A3$
4	$(\neg G \to F) \to G$	получена из 1, 3 по правилу MP
5	$F \to (\neg G \to F)$	аксиома $A1$
6	$\neg G \to F$	получена из 2, 5 по правилу MP
7	G	получена из 4, 6 по правилу MP

Таким образом, G выводится из гипотез $\neg G \to \neg F$ и F.

Можно выявить правила и закономерности, которые в некоторой степени облегчают процесс построения доказательств. Например, справедлива так называемая ***теорема о дедукции***. Если Г — множество формул, A и B — формулы и $\Gamma, A \vdash B$ (т. е. B выводимо из A и Г), то $\Gamma \vdash A \to B$.

Пример 1.42. Покажем, что формула $\neg F \to (F \to G)$ является теоремой в ФИВ.

Решение.

1	$\neg F$	гипотеза
2	F	гипотеза
3	$F \to (\neg G \to F)$	аксиома $A1$
4	$\neg F \to (\neg G \to \neg F)$	аксиома $A1$
5	$\neg G \to F$	MP: (2), (3)
6	$\neg G \to \neg F$	MP: (1), (4)
7	$(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$	аксиома $A3$
8	$(\neg G \to F) \to G$	MP: (6), (7)
9	G	MP: (5), (8)

Таким образом, $\neg F, F \vdash G$. Отсюда по теореме о дедукции $\neg F \vdash F \to G$. Применяя ее еще раз, получаем $\vdash \neg F \to (F \to G)$.

Связь между формальным исчислением высказываний и логикой высказываний, которую мы рассматривали в предыдущих разделах, устанавливается с помощью следующей ***теоремы о полноте***. Формула тогда и только тогда доказуема в ФИВ (является его теоремой), когда она является тавтологией логики высказываний: $\vdash F \Leftrightarrow \models F$.

Пример 1.43. Доказать в ФИВ тавтологию $(F \wedge G) \to G$.

Решение. В ФИВ используются только связки $\to$ и $\neg$. Поэтому предварительно $F \wedge G$ надо заменить на $\neg(F \to \neg G)$. Таким образом, нужно доказать тавтологию $\neg(F \to \neg G) \to G$.

1	$\neg(F \to \neg G)$	гипотеза
2	$\neg(F \to \neg G) \to (\neg G \to \neg(F \to \neg G))$	аксиома $A1$
3	$\neg G \to \neg(F \to \neg G)$	MP: (1), (2)
4	$(\neg G \to \neg(F \to \neg G)) \to ((\neg G \to (F \to \neg G)) \to G)$	аксиома $A3$
5	$(\neg G \to (F \to \neg G)) \to G$	MP: (3), (4)
6	$\neg G \to (F \to \neg G)$	аксиома $A1$
7	G	MP: (5), (6)

Таким образом, $\neg(F \to \neg G) \vdash G$. Отсюда по теореме о дедукции $\vdash \neg(F \to \neg G) \to G$.

Задачи для самостоятельного решения

49. Среди следующих формул укажите те, которые являются аксиомами $A1$, $A2$ или $A3$:

а) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$;

б) $F \to ((\neg F \to G) \to F)$;

в) $(G \to H) \to (F \to (G \to H))$;

г) $(\neg F \to G) \to (\neg G \to \neg\neg F)$;

д) $(\neg F \to \neg\neg G) \to ((\neg F \to \neg G) \to F)$;

е) $\neg F \to (F \to \neg F)$;

ж) $(G \to F) \to ((G \to \neg F) \to \neg G)$;

з) $(F \to G) \to (H \to (G \to F))$;

и) $(G \to (\neg F \to F)) \to ((G \to \neg F) \to (G \to F))$.

50. Укажите недостающую формулу W так, чтобы третья из данных формул получалась из первой и второй формул по правилу вывода МР:

а) $F \to (H \to F)$, $(F \to (H \to F)) \to (F \to (G \to (H \to F)))$, W;

б) $F \to (G \to H)$, W, $(F \to G) \to (F \to H)$;

в) W, $(\neg G \to \neg G) \to ((\neg G \to G) \to G)$, $(\neg G \to G) \to G$;

г) $F \to G$, W, $H \to (F \to G)$;

д) G, $G \to (F \to G)$, W;

е) W, $(\neg F \to \neg G) \to ((\neg F \to G) \to F)$, $(\neg F \to G) \to F$;

ж) $G \to F$, W, $(G \to \neg F) \to (G \to F)$;

з) W, $(G \to (\neg F \to F)) \to ((G \to \neg F) \to (G \to F))$, $(G \to \neg F) \to (G \to F)$;

и) $\neg G \to (F \to \neg G)$, $(\neg G \to (F \to \neg G)) \to G$, W.

51. Выясните, является ли данная последовательность формул выводом из аксиом. Если является, то обоснуйте каждый шаг построения этой последовательности.

а) (1) $G \to (F \to G)$,

(2) $(G \to (F \to G)) \to (G \to (G \to (F \to G)))$,

(3) $G \to (G \to (F \to G))$.

б) (1) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,

(2) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$,

(3) $\neg F \to ((\neg G \to F) \to G)$.

в) (1) $F \to (G \to F)$,

(2) $(F \to (G \to F)) \to ((F \to G) \to (F \to F))$,

(3) $(F \to G) \to (F \to F)$.

г) (1) $(F \to F) \to (G \to (F \to F))$,

(2) $F \to F$,

(3) $G \to (F \to F)$.

д) (1) $(H \to F) \to (G \to (H \to F))$,

(2) $((H \to F) \to (G \to (H \to F))) \to (F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F))))$,

(3) $F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F)))$,

(4) $(F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F)))) \to ((F \to (H \to F)) \to (F \to (G \to (H \to F))))$,

(5) $(F \to (H \to F)) \to (F \to (G \to (H \to F)))$,

(6) $F \to (H \to F)$,

(7) $F \to (G \to (H \to F))$.

е) (1) $\neg G \to \neg G$,

(2) $(\neg G \to \neg G) \to ((\neg G \to G) \to G)$,

(3) $(\neg G \to G) \to G$.

52. Докажите, что следующие формулы являются теоремами ФИВ, построив последовательности формул, являющиеся выводами данных формул из аксиом:

а) $G \to (F \to F)$; б) $G \to (G \to (F \to G))$;

в) $(\neg G \to G) \to G$; г) $(F \to G) \to (F \to F)$;

д) $F \to (G \to (H \to F))$.

53. Выясните, является ли данная последовательность выводом из гипотез. Если да, то укажите, из каких.

а) (1) $G \to H$,

(2) G,

(3) H,

(4) $H \to (F \to H)$,

(5) $F \to H$.

б) (1) $F \to G$,

(2) $F \to \neg G$,

(3) $(F \to G) \to ((F \to \neg G) \to \neg F)$,

(4) $((F \to \neg G) \to \neg F)$,

(5) $\neg G$.

в) (1) $(F \to (F \to G)) \to ((F \to F) \to (F \to G))$,

(2) $F \to (F \to G)$,

(3) $(F \to F) \to (F \to G)$,

(4) $F \to F$,

(5) $F \to G$.

г) (1) $F \to (G \to H)$,

(2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$,

(3) $(F \to G) \to (F \to H)$,

(4) $G \to (F \to G)$,

(5) G,

(6) $F \to G$,

(7) $F \to H$.

д) (1) $\neg G \to \neg F$,

(2) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,

(3) $(\neg G \to F) \to G$,

(4) $F \to (\neg G \to F)$,

(5) F,

(6) $\neg G \to F$,

(7) G.

54. Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез:

а) $G \vdash F \to G$; б) $G \vdash H \to (F \to G)$;

в) $G, G \to H \vdash F \to H$; г) $F \to G, F \to (G \to H), F \vdash H$;

д) $F \to G, F \to (G \to H) \vdash F \to H$; е) $F \to G, G \to H \vdash F \to H$;

ж) $F \to (G \to H), G \vdash F \to H$; з) $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$;

и) $F \to (F \to G) \vdash F \to G$; к) $F, \neg F \vdash G$;

л) $\neg G \to F, \neg G \to \neg F \vdash G$;   м) $F \vdash (G \to \neg F) \to (G \to F)$;

н) $F \vdash H \to (\neg G \to F)$;   о) $\neg G \to \neg F \vdash F \to G$;

п) $\neg F, \neg G \to F \vdash G$;   р) $\neg\neg F \vdash F$.

55. Используя теорему о дедукции и результаты предыдущих упражнений, докажите, что следующие формулы являются теоремами ФИВ:

а) $(\neg\neg G \to \neg\neg F) \to (\neg F \to \neg G)$;   б) $F \to (F \vee \neg G)$;

в) $\neg\neg F \to F$;   г) $(F \leftrightarrow G) \to (F \to G)$;

д) $(F \vee F) \to (G \to F)$;   е) $F \to ((F \to G) \to G)$.

1.9. Предикаты. Кванторы. Формулы логики предикатов

Логика предикатов (ЛП) является обобщением логики высказываний. Она представляет собой более совершенный, тонкий инструмент для изучения процессов умозаключения и логического следования.

Одноместным предикатом $P(x)$, заданным на множестве M, называется предложение, зависящее от переменной x и превращающееся в высказывание (истинное или ложное) при подстановке вместо x любого элемента из M.

Пример 1.44. «Компания x занимается производством процессоров» — одноместный предикат, заданный на множестве всех компаний. Если вместо переменной x подставить слово «Intel», то получим истинное высказывание, если же вместо x подставить «Microsoft», то получим ложное высказывание.

Аналогично определяются двухместный $P(x, y)$ (зависящий от 2-х переменных, которые в общем случае принимают значения из двух различных множеств M_1 и M_2), трехместный $P(x, y, z)$ (зависящий от 3-х переменных) и т. д. предикаты. Обычные высказывания удобно считать 0-местными предикатами.

Пример 1.45. «$x^y = 1024$» — двухместный предикат, заданный на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ (x, y берутся из $\mathbb{R}$). Пара чисел $(2, 10)$ превращает этот предикат в истинное высказывание «$2^{10} = 1024$», а пара чисел $(10, 2)$ в ложное «$10^2 = 1024$».

К предикатам можно применять такие же логические операции, как и к высказываниям, а именно $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$. Например, отрицанием предиката $P(x)$, заданного на множестве M, будет предикат $\neg P(x)$, заданный на этом же множестве, который превращается в ложное высказывание на всех и только тех значениях переменной x, на которых $P(x)$ превращается в истинное высказывание. Но в отличие от ЛВ в ЛП добавляются еще две новых, так называемых кванторных операции. ***Квантор всеобщности*** — это операция, которая каждому предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляет высказывание $(\forall x)(P(x))$ (читается: «для всех x верно, что $P(x)$» или просто «для любого x $P(x)$»), которое истинно только в том случае, когда для всех $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно. ***Квантором существования*** называется операция, которая каждому предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляет высказывание $(\exists x)(P(x))$ (читается: «существует x, такое что $P(x)$»), которое истинно, когда хотя бы для одного $a \in M$ высказывание $P(a)$ истинно и ложно в противном случае. Если кванторы применяются к одноместному предикату, то, по определению, получается высказывание (0-местный предикат). Кванторы можно применять и к n-местному предикату ($n > 1$), при этом получаем $(n-1)$-местный предикат.

Пример 1.46. Рассмотрим «$y \leq x$» — двухместный предикат, заданный на $\mathbb{N}$ (x, y — натуральные числа). Применим к нему квантор $(\forall x)$. Получим одноместный предикат $(\forall x)(y \leq x)$, зависящий только от y. При $y = 1$ он превращается в истинное высказывание $(\forall x)(1 \leq x)$ «Любое натуральное число больше или равно 1», при $y \neq 1$ в ложное высказывание.

Пример 1.47. Рассмотрим два одноместных предиката, заданных на $\mathbb{N}$: «$x = x + 1$», «x делится на 30». Применяя к ним квантор $(\exists x)$, получаем $(\exists x)(x = x + 1)$ «Существует натуральное число, равное числу на единицу большему» — ложное высказывание и $(\exists x)$(x делится на 30) «Существует натуральное число, которое делится на 30» — истинное высказывание.

Пример 1.48. Рассмотрим $(y \leq x)$ — двухместный предикат на $\mathbb{R}$. Тогда $(\exists x)(y \leq x)$ — одноместный предикат, зависящий от y, $(\exists y)(\exists x)(y \leq x)$ «Существуют два действительных числа, одно из которых меньше или равно другому» — 0-местный предикат (истинное высказывание).

Как видно из примеров, в выражениях $(\forall x)(P(x))$ и $(\exists x)(P(x))$ переменная x уже перестает быть переменной в обычном смысле слова, т. е. вместо нее мы не подставляем какие-то конкретные значения. Такая переменная, находящаяся под действием квантора, называется ***связанной***, в противном случае переменная называется ***свободной***. Связанную переменную можно менять на любую другую букву. От этого сущность выражения не изменится.

В ЛП, как и в ЛВ, используются формулы. Отличие в том, что переменные, входящие в формулы, делятся на три вида: ***предикатные***, вместо которых подставляются предикаты и высказывания (как 0-местные предикаты), ***функциональные***, вместо которых подставляются функции, отображающие наборы элементов множеств в элементы множеств, и ***предметные***, от которых зависят предикатные и функциональные переменные и вместо которых подставляются элементы множеств, на которых определены предикаты и функции. И кроме пяти логических связок логики высказываний допускается использование двух кванторных операций. Могут быть выделены отдельные элементы множеств — предметные константы (они обозначаются обычно первыми маленькими буквами латинского алфавита).

Пример 1.49. Дана формула $(\exists y)(\forall z)(Q(x, f(y,z)) \wedge R(g(x), y, a))$. Здесь $Q(\cdot,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\cdot)$ — это соответственно двухместная и трехместная предикатные переменные, $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot)$ — двухместная и одноместная функциональные переменные, x, y и z — предметные переменные, a — предметная константа.

Под ***интерпретацией*** формулы ЛП понимается указание некоторого непустого множества M, называемого ***областью интерпретации***, и подстановка вместо ее предикатных и функциональных переменных конкретных предикатов и функций, заданных на этом множестве, а вместо предметных констант — конкретных элементов из этого множества.

Пример 1.50. Рассмотрим формулу $(\exists x)(\forall y)P(f(x,y), a)$, где $P(\cdot,\cdot)$ — двухместная предикатная переменная, $f(\cdot,\cdot)$ — двухместная функциональная переменная, x, y — предметные переменные, a — предметная константа. Дадим некоторую интерпретацию этой формулы. Пусть $P(z_1, z_2)$ — это двухместный предикат «$z_1 > z_2$», заданный на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $f(x,y) = x + y$ — функция сложения и $a = 4$. После интерпретации получаем следующий 0-местный предикат (ложное высказывание): «Существует натуральное число x, такое что для любого натурального числа y выполняется $x + y > 4$».

Пример 1.51. Рассмотрим формулу $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$. Дадим интерпретацию данной формулы, подставив вместо $P(x,y)$ конкретный двухместный предикат.

1) Пусть M — множество всех людей, а $P(x,y)$ — заданный на M предикат «x является родным братом для y». Получаем: $(\forall x)(\exists y)$(x является родным братом для y), т. е. «У каждого человека есть родной брат» — ложное высказывание.

2) Пусть M — множество натуральных чисел и вместо $P(x,y)$ возьмем «$x < y$». Получаем: $(\forall x)(\exists y)(x < y)$, т.е. «Для каждого натурального числа существует большее по сравнению с ним натуральное число» — истинное высказывание.

Пример 1.52. Дадим интерпретацию формулы $(\exists x)P(x,y)$, в которой есть одна свободная переменная y. Пусть M — множество всех гор на Земле и в качестве $P(x, y)$ возьмем двухместный предикат «Гора x выше горы y». В результате интерпретации получим одноместный предикат: «Существует гора, которая выше горы y». Если теперь в качестве y взять, например, «Эверест», то получим ложное высказывание: «Существует гора, которая выше Эвереста». Если же взять в качестве y любую другую гору, кроме Эвереста, то получим истинное высказывание.

Из примеров видно, что в зависимости от интерпретации формулы и выбора значений, входящих в нее предметных переменных, можем получить как ложное, так и истинное высказывание. Формула F называется ***выполнимой*** в данной интерпретации, если она представляет собой истинное высказывание хотя бы при некотором выборе значений входящих в нее предметных переменных. Формула F называется ***истинной (ложной)*** в данной интерпретации, если она есть истинное (ложное) высказывание при любых значениях входящих в нее предметных переменных. Формула ЛП называется ***общезначимой*** или ***тавтологией*** (***тождественно ложной*** или ***противоречием***), если она истинна (ложна) в любой интерпретации. Так, формула из примера 1.51 истинна во второй интерпретации, а формула из примера 1.52 выполнима в приведенной интерпретации. Если формула F ЛП является тавтологией, то, как и в ЛВ, принято писать $\models F$. Всякая формула, получающаяся из тавтологии ЛВ заменой входящих в нее пропозиционных переменных на предикатные, является тавтологией ЛП.

Пример 1.53. Приведем некоторые тавтологии ЛП, которые не сводятся к тавтологиям ЛВ (все они содержат кванторы существования или всеобщности):

1. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)))$ (действие $\forall$ на $\wedge$);
2. $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \rightarrow Q)$ (действие $\forall$ на $\rightarrow$; Q обозначает любой предикат, не зависящий от x, в частности высказывание);
3. $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$ (перестановочность $\forall$);
4. $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$ (перестановочность $\exists$).

В ЛП нет такого общего метода доказательства тавтологий, как построение таблиц истинности в ЛВ. Здесь значение предиката зависит от выбора значений его предметных переменных, а этот выбор в общем случае можно сделать бесконечным числом способов. Тем не менее в каждом отдельном случае, анализируя структуру формулы, можно определить, является она тавтологией или нет.

Докажем, например, первую из вышеприведенных тавтологий. Подставим вместо предикатных переменных $P(x)$ и $Q(x)$ конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, заданные на некотором множестве M. Тогда получим высказывание

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow ((\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x))). \tag{1.5}$$

Покажем, что оно истинно. Высказывание $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ истинно тогда и только тогда, когда для любого $x \in M$ $(A(x) \wedge B(x))$ истинно, что возможно тогда и только тогда, когда для любого $x \in M$ $A(x)$ истинно и $B(x)$ истинно. Но это равносильно тому, что истинными будут высказывания $(\forall x)(A(x))$ и $(\forall x)(B(x))$, а это равносильно тому, что истинна их конъюнкция $(\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x))$. Таким образом, левая и правая часть эквивалентности (1.5) истинны или ложны одновременно. Следовательно, (1.5) истинна, и, значит, в силу произвольности выбора $A(x)$ и $B(x)$, рассматриваемая формула является общезначимой.

Доказательство второй тавтологии проведем методом от противного. Предположим, что данная формула не является тавтологией. В этом случае найдутся конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определенные на множествах M и N, такие, что предикат от y

$$(\forall x)(A(x) \to B(y)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(y))$$

обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного элемента $b \in N$, т. е.

$$((\forall x)(A(x) \to B(b)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(b))) = 0.$$

Здесь имеются две возможности:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } (\forall x)(A(x) \to B(b)) = 1,\ ((\exists x)(A(x)) \to B(b)) = 0;\\
&\text{б) } (\forall x)(A(x) \to B(b)) = 0,\ ((\exists x)(A(x)) \to B(b)) = 1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первую возможность. Из второго равенства в пункте а) следует, что $B(b) = 0$ и $(\exists x)(A(x)) = 1$. Последнее означает, что найдется элемент $a \in M$ такой, что $A(a) = 1$. Следовательно, $(A(a) \to B(b)) = (1 \to 0) = 0$. Но это противоречит первому равенству в пункте а). Пришли к противоречию. Аналогично можно придти к противоречию в случае б). Следовательно, первоначальное предположение не верно и формула является тавтологией.

Остальные, наиболее часто встречающиеся тавтологии ЛП приводятся в упражнениях.

Задачи для самостоятельного решения

56. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

а) $(\forall x)(\exists y)(x - y = 5)$;

б) $(\exists y)(\forall x)(x - y = 5)$;

в) $(\exists x)(\exists y)(x - y = 5)$;

г) $(\forall x)(\forall y)(x - y = 5)$;

д) $[(\forall x)(\forall y)(x + y = 3)] \to (3 = 4)$;

е) $(\forall x)[(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$;

ж) $(\forall a)\{[(\exists x)(ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;

з) $(\forall b)(\exists a)(\forall x)(x^2 + ax + b > 0)$;

и) $(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$;

к) $(\exists a)(\forall b)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$;

л) $(\forall x)[((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$.

57. Придумайте такие конкретные двухместные предикаты $A(x, y)$, чтобы высказывания $(\forall x)(\exists y)(A(x, y))$ и $(\exists y)(\forall x)(A(x, y))$: а) были оба истинны; б) были оба ложны; в) первое было бы ложным, а второе — истинным; г) первое было бы истинным, а второе — ложным.

58. Придумайте такие конкретные двухместные предикаты $A(x, y)$, чтобы высказывания $(\forall x)(\exists y)(A(x, y))$ и $(\exists x)(\forall y)(A(x, y))$: а) были оба истинны; б) были оба ложны; в) первое было бы ложным, а второе — истинным; г) первое было бы истинным, а второе — ложным.

59. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями ЛП (Q обозначает любой предикат, не зависящий от x, в частности высказывание):

а) $(\forall x)(P(x)) \to P(y)$ (удаление квантора общности);

б) $P(y) \to (\exists x)(P(x))$ (введение квантора существования);

в) $(\exists y)(\forall x)P(x, y) \to (\forall x)(\exists y)P(x, y)$ (перестановочность кванторов);

законы де Моргана для кванторов:

г) $\neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$;

д) $\neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$;

законы действия кванторов на конъюнкцию и дизъюнкцию:

е) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x)))$;

ж) $(\forall x)(P(x) \vee Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \vee Q)$;

з) $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \wedge Q)$;

законы действия кванторов на импликацию:

и) $(\exists x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to Q)$;

к) $(\forall x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\forall x)(P(x)))$;

л) $(\exists x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\exists x)(P(x)))$.

60. Найдите какую-нибудь интерпретацию тавтологии в) из предыдущего упражнения, которая бы демонстрировала, почему в данной тавтологии стоит лишь импликация, но не эквивалентность.

61. Запишите следующие высказывания и их отрицания на языке логики предикатов:

а) Существует не более одного x такого, что $P(x)$;

б) Существует точно один x такой, что $P(x)$;

в) Существует по меньшей мере два различных x таких, что $P(x)$.

62. Введите одноместные или многоместные предикаты на соответствующих областях и запишите с их помощью следующие высказывания и их отрицания:

а) Всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6;

б) Жители Швейцарии обязательно владеют или французским, или итальянским, или немецким языком;

в) Некоторые змеи ядовиты;

г) Все собаки обладают хорошим обонянием;

д) Ни один параллелограмм не является ромбом;

е) Некоторые ромбы не являются параллелограммами;

ж) Каждый студент решил по крайней мере одну задачу;

з) По крайней мере один студент решил все задачи;

и) Каждое четное число, не меньшее четырех, является суммой двух простых чисел (гипотеза Гольдбаха[6]).

[6] Кристиан Гольдбах (1690–1764) — немецкий математик.

63. Придайте следующим формулам указанные интерпретации, заданные на множестве натуральных чисел, и определите истинностные значения получающихся высказываний:

а) $(\exists x)(P(x) \vee Q(6, x))$, $P(x)$: «x — четное число», $Q(x, y)$: «y делится на x»;

б) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$, $P(x)$: «$x < 5$», $Q(x)$: «$x > 6$»;

в) $(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))$, $P(x)$: «$x < 5$», $Q(x)$: «$x > 6$»;

г) $\neg(\exists x)(P(x))$, $P(x)$: «$x < 2$»;

д) $(\forall x)(\neg P(1, x) \to (\exists y)(Q(y) \wedge R(y, x)))$, $P(x, y)$: «x равно y», $Q(x)$: «x — простое число», $R(x, y)$: «y делится на x»;

е) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[G(x, y, z) \to I(z, x) \wedge I(z, y) \wedge (\forall t)((I(t, x) \wedge I(t, y)) \to I(t, z))]$, $I(x, y)$: «y делится на x», $G(x, y, z)$: «z — наибольший общий делитель x и y».

1.10. Равносильные преобразования и логическое следование для предикатов

Две формулы F и H логики предикатов называются ***равносильными***, если в любой интерпретации при любом выборе предметных переменных они принимают одинаковые логические значения. При этом пишут $F \cong H$. Как и в ЛВ, формулы ЛП F и H равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow H$ является тавтологией. Используя это свойство и тавтологии из предыдущего параграфа и из упражнения **59**, можно получить следующие основные равносильности ЛП (Q обозначает любой предикат, не зависящий от x, в частности высказывание):

1. $\neg(\forall x)(P(x)) \cong (\exists x)(\neg P(x))$ (1-й закон де Моргана);
2. $\neg(\exists x)(P(x)) \cong (\forall x)(\neg P(x))$ (2-й закон де Моргана);
3. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \cong ((\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x)))$ (действие $\exists$ на $\vee$);
4. $(\forall x)(P(x) \vee Q) \cong ((\forall x)(P(x)) \vee Q)$ (действие $\forall$ на $\vee$);
5. $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \cong ((\exists x)(P(x)) \wedge Q)$ (действие $\exists$ на $\wedge$);
6. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \cong ((\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)))$ (действие $\forall$ на $\wedge$);
7. $(\forall x)(P(x) \to Q) \cong ((\exists x)(P(x)) \to Q)$ (действие $\forall$ на $\to$, вариант 1);

8. $(\forall x)(Q \to P(x)) \cong (Q \to (\forall x)(P(x)))$ (действие $\forall$ на $\to$, вариант 2);

9. $(\exists x)(P(x) \to Q) \cong ((\forall x)(P(x)) \to Q)$ (действие $\exists$ на $\to$, вариант 1);

10. $(\exists x)(Q \to P(x)) \cong (Q \to (\exists x)(P(x)))$ (действие $\exists$ на $\to$, вариант 2);

11. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \cong (\forall y)(\forall x)P(x,y)$ (перестановочность $\forall$);

12. $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \cong (\exists y)(\exists x)P(x,y)$ (перестановочность $\exists$).

Как и в ЛВ, можно заменить одну равносильную формулу на другую. Равносильные преобразования позволяют приводить формулу к тому или иному более удобному виду.

Приведенной формой для формулы ЛП называется такая равносильная ей формула, в которой из операций ЛВ имеются только $\neg, \wedge, \vee$, причем отрицания стоят только перед предикатными переменными и высказываниями. Для каждой формулы ЛП существует приведенная форма.

Пример 1.54. Запишем формулу $\neg(\exists y)(P(y) \leftrightarrow (\forall x)(Q(x)))$ в приведенной форме:

$$
\begin{aligned}
&\neg(\exists y)(P(y) \leftrightarrow (\forall x)(Q(x))) \cong \\
&\quad \cong \neg(\exists y)((P(y) \to (\forall x)(Q(x))) \wedge ((\forall x)(Q(x)) \to P(y))) \cong \\
&\quad \cong \neg(\exists y)((\neg P(y) \vee (\forall x)(Q(x))) \wedge (\neg(\forall x)(Q(x)) \vee P(y))) \cong \\
&\quad \cong (\forall y)\neg((\neg P(y) \vee (\forall x)(Q(x))) \wedge ((\exists x)(\neg Q(x)) \vee P(y))) \cong \\
&\quad \cong (\forall y)((P(y) \wedge \neg(\forall x)(Q(x))) \vee (\neg(\exists x)(\neg Q(x)) \wedge \neg P(y))) \cong \\
&\quad \cong (\forall y)((P(y) \wedge (\exists x)(\neg Q(x))) \vee ((\forall x)(Q(x)) \wedge \neg P(y))).
\end{aligned}
$$

Сначала мы выразили эквивалентность через импликацию и конъюнкцию. Затем выразили импликацию через отрицание и дизъюнкцию. Далее несколько раз применили обычные законы де Моргана и законы де Моргана для кванторов, а также закон двойного отрицания.

Предваренной нормальной формой для формулы ЛП называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы стоят в начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. это формула вида

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\ldots(\forall x_n)(F(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это какая-то формула от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не содержащая кванторов. Для каждой формулы ЛП существует предваренная нормальная форма.

Пример 1.55. Приведем формулу $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists t)(P(t)) \to (\exists y)(Q(y)))$ к предваренной нормальной форме:

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists t)(P(t)) \to (\exists y)(Q(y))) \cong \\
&\qquad \cong (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to (\forall t)(\exists y)(P(t) \to Q(y)) \cong \\
&\qquad \cong (\exists x)(\forall t)(\exists y)((P(x) \to Q(x)) \to (P(t) \to Q(y)) \cong \\
&\qquad \cong (\exists x)(\forall t)(\exists y)(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \neg P(t) \vee Q(y)) \cong \\
&\qquad\qquad \cong (\exists x)(\forall t)(\exists y)((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(t) \vee Q(y)).
\end{aligned}$$

Сначала мы несколько раз применили законы 7–10 действия кванторов на импликацию из приведенного выше списка равносильностей. Затем выразили импликацию через отрицание и дизъюнкцию. Далее несколько раз применили законы де Моргана.

В математике часто встречаются выражения вида: «Всякий объект, обладающий свойством P, обладает также и свойством Q» и «Среди объектов, обладающих свойством P, существует объект, обладающий также и свойством Q». Если ввести сооствествующие предикаты, то эти выражения можно записать в виде:

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), \quad (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)).$$

Часто для краткости вместо этой записи используют запись с так называемыми ***ограниченными кванторами***:

$$(\forall P(x))(Q(x)), \quad (\exists P(x))(Q(x)).$$

Название объясняется тем, что эти кванторы относятся не ко всему множеству, на котором задана переменная, а ограничены на некоторое подмножество, выделяемое дополнительным условием $P(x)$.

Пример 1.56. Очень часто в математике встречаются выражения с ограниченными кванторам вида: $(\forall x \in X)(Q(x))$ и $(\exists x \in X)(Q(x))$. Первое из них означает, что «для любого x, принадлежащего множеству X, справедливо $Q(x)$», второе, что «существует x из множества X, для которого справедливо $Q(x)$».

Пример 1.57. Фразы «Для всякого $x > 1$ справедливо $\ln x > 0$» и «Существует действительное число, квадрат которого равен -1» на языке логики предикатов можно записать следующим образом:

$$(\forall x)((x > 1) \to (\ln x > 0)), \quad (\exists x)((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = -1)).$$

С использованием ограниченных кванторов эти фразы можно записать более кратко:

$$(\forall x > 1)(\ln x > 0), \quad (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1).$$

Нетрудно проверить, что для ограниченных кванторов выполняются следующие законы де Моргана:

$$\neg(\forall P(x))(Q(x)) \cong (\exists P(x))(\neg Q(x)),$$
$$\neg(\exists P(x))(Q(x)) \cong (\forall P(x))(\neg Q(x)).$$

Пример 1.58. На множестве всех людей введем одноместные предикаты $P(x)$:«x — рисковый человек» и $Ш(x)$:«x — пьет шампанское». Тогда известная фраза «Кто не рискует, тот не пьет шампанского» на языке предикатов с помощью ограниченного квантора запишется как:

$$(\forall\neg P(x))(\neg Ш(x)).$$

По 2-му закону де Моргана ее можно переписать в виде $\neg(\exists\neg P(x))(Ш(x))$, т. е. «Не существует не рискующего человека, который пьет шампанское».

Пример 1.59. Определение предела последовательности «Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_0, что для всякого натурального n, большего n_0, $|a_n - a| < \varepsilon$» на языке логики предикатов с использованием ограниченных кванторов запишется так:

$$a = \lim a_n \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon).$$

Используя это выражение и законы де Моргана, легко получить обратное определение, т. е. определение того, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$:

$$\begin{aligned} a \neq \lim a_n \Leftrightarrow \neg(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon) &\cong \\ (\exists\varepsilon > 0)\neg(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon) &\cong \\ (\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})\neg(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon) &\cong \\ (\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)\neg(|a_n - a| < \varepsilon) &\cong \\ (\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)(|a_n - a| \geq \varepsilon)&, \end{aligned}$$

т. е. «Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натуральное числа n_0 найдется число $n > n_0$ такое, что $|a_n - a| \geq \varepsilon$».

Формула G логики предикатов является ***логическим следованием*** формулы F, если при всякой интерпретации такой, что F принимает истинное значение, истинной будет и формула G. При этом пишут $F \vDash G$. Как и в ЛВ, формула G ЛП является логическим следованием формулы F тогда и только тогда, когда $F \to G$ является тавтологией.

Пример 1.60. Из тавтологий, приведенных в упражнении **59**, получаем следующие логические следования: $(\forall x)(P(x)) \vDash P(y)$; $P(y) \vDash (\exists x)(P(x))$; $(\exists y)(\forall x)(P(x,y)) \vDash (\forall x)(\exists y)(P(x,y))$.

Пример 1.61. Правильно ли с точки зрения логики предикатов следующее рассуждение: «Некоторые четные функции — периодические. Ни одна монотонная функция не является четной. Следовательно, ни одна периодическая функция — не монотонна»?

Решение. Рассмотрим следующие предикаты, заданные на множестве всех функций: $F(x)$: «x — четная функция», $G(x)$: «x — периодическая функция», $H(x)$: «x — монотонная функция». Тогда данное рассуждение имеет следующую схему:

$$(\exists x)(F(x) \wedge G(x)), (\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x)) \vDash (\forall x)(\neg G(x) \vee \neg H(x)). \quad (1.6)$$

Отвлечемся теперь от конкретных значений предикатов $F(x), G(x)$ и $H(x)$. Предположим, что это какие-то произвольные предикаты, заданные на некотором множестве M. Проверим правильность схемы (1.6). Предположим, что $(\exists x)(F(x) \wedge G(x)) = 1$ и $(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x)) = 1$. Из первого равенства следует, что $F(a) = 1$ и $G(a) = 1$ для некоторого $a \in M$, из второго, что $F(b) = 0$ или $H(b) = 0$ для любого $b \in M$. Допустим, что $G(b) = 1$ и $H(b) = 1$, тогда $\neg G(b) \vee \neg H(b) = 0$ и, значит, $(\forall x)(\neg G(x) \vee \neg H(x)) = 0$. Такая ситуация получается, например, когда $F(x)$: «x — четное», $G(x)$: «x делится на 3», $H(x)$: «x — нечетное» — предикаты, заданные на $\mathbb{N}$, $a = 6$, $b = 9$. Таким образом, нашли интерпретацию, при которой формулы, стоящие слева от $\vDash$, равны 1, а формула, стоящая справа от $\vDash$, равна 0. Следовательно, логическое следование не выполняется.

Пример 1.62. Верно ли с точки зрения логики предикатов следующее рассуждение: «Всякий металл является твердым веществом. Ртуть — не твердое вещество. Следовательно, ртуть — не металл»?

Решение. Рассмотрим следующие предикаты, заданные на множестве M всех веществ: $S(x)$: «x — металл», $P(x)$: «x — твердое вещество». И пусть a — ртуть ($a \in M$). Тогда данное рассуждение имеет следующую схему:

$$(\forall x)(S(x) \to P(x)), \neg P(a) \vDash \neg S(a).$$

Ее правильность равносильна тому, что следующая формула является тавтологией:

$$((\forall x)(S(x) \to P(x)) \wedge \neg P(a)) \to \neg S(a). \quad (1.7)$$

Проверим, так ли это. Если левая часть формулы (1.7) ложна, то по определению импликации вся формула истинна. Пусть левая часть (1.7) истинна.

Следовательно, $(\forall x)(S(x) \to P(x)) = 1$ и $\neg P(a) = 1$. Отсюда $P(a) = 0$. Отсюда $S(a) = 0$ (иначе бы $(S(a) \to P(a)) = 0$). Следовательно, $\neg S(a) = 1$ и вся формула истинна. Таким образом, это тавтология и рассуждение верно.

Задачи для самостоятельного решения

64. Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:

а) $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x))$;

б) $(\forall y)(Q(y,z) \to (\exists x)(R(x,t,z)))$;

в) $(\forall y)(Q(x,y)) \to R(x,x)$;

г) $P(y) \to \neg((\forall x)(Q(x,y)) \to P(y))$;

д) $(\exists x)(R(x,y,z)) \to \neg(\forall x)(Q(x,y))$;

е) $((\exists x)(P(x)) \vee (\forall x)(Q(x))) \wedge (S(y) \to (\forall x)(R(x)))$;

ж) $(P(y) \wedge Q(x)) \to \neg(\forall y)(R(y,z))$;

з) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y)) \to (\exists z)(\forall x)(Q(x,z))$.

65. Запишите пословицу «Волков бояться — в лес не ходить» на языке предикатов в нескольких вариантах.

66. Один из афоризмов Козьмы Пруткова звучит так: «Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиной еще большая; нет вещи столь малой, в которую не вместилась бы еще меньшая». Запишите этот афоризм с помощью предиката $P(x,y)$: «x больше y».

67. Используя ограниченные кванторы, запишите на языке логики предикатов определения:

а) четной функции;

б) переодической функции;

в) возрастающей функции;

г) ограниченной последовательности;

д) предела функции в точке.

68. Используя результаты предыдущего упражнения и законы де Моргана для ограниченных кванторов, запишите на языке логики предикатов определения:

а) функции, не являющейся четной;

б) не переодической функции;

в) не возрастающей функции;

г) не ограниченной последовательности;

д) числа, не являющегося пределом функции в точке.

69. Проанализируйте следующие рассуждения на предмет их правильности. Для этого выявите логические схемы, на которых они основаны, и выясните, справедливы ли они.

а) Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен;

б) Все рациональные числа — действительные. Все целые числа — рациональные. Следовательно, все целые числа — действительные;

в) Во всех городах за Полярным кругом бывают белые ночи. Сыктывкар не находится за Полярным кругом. Следовательно, в Сыктывкаре не бывает белых ночей;

г) Некоторые люди были на Северном полюсе. Артур Чилингаров — человек. Следовательно, Артур Чилингаров был на Северном полюсе;

д) Все целые числа — рациональные. Некоторые вещественные числа — целые. Следовательно, некоторые вещественные числа — целые;

е) Все квадраты — правильные многоугольники. Ни одна трапеция не есть правильный многоугольник. Следовательно, ни одна трапеция не есть квадрат;

ж) Некоторые студенты СЛИ — жители Республики Коми. Некоторые жители Республики Коми говорят на коми языке. Следовательно, некоторые студенты СЛИ говорят на коми языке;

з) (Задача Шрёдера[7]) Соли, которые не окрашены, суть соли, которые не являются органическими телами, или суть органические тела, которые не окрашены;

и) Все металлы — кристаллические вещества, т. к. ни одно кристаллическое вещество не является пластичным и ни один металл не пластичен.

[7] Э. Шрёдер (1841–1902) — известный немецкий логик и математик.

1.11. Метод резолюций

С развитием вычислительной техники возникла идея сделать процесс доказательства теорем в формализованных логических исчислениях автоматическим, т. е. сделать так, чтобы машина, руководствуясь определенными правилами, сама находила цепочку формул, которая приводила бы к нужной формуле. Настоящий прогресс в деле автоматического доказательства теорем произошел в 1965 г., когда американский математик Джон Робинсон разработал так называемый ***метод резолюций***.

Дизъюнктом назовем дизъюнкцию конечного числа переменных или их отрицаний. ***Резольвентой*** двух дизъюнктов вида $F_1 \vee G$ и $F_2 \vee \neg G$ называется дизъюнкт $F_1 \vee F_2$. В частности, если F_1 и F_2 отсутствуют (пустые дизъюнкты), то говорят, что резольветной G и $\neg G$ является ***пустая резольвента***, которая обозначается через $\square$. Нетрудно видеть, что резольвента является логическим следствием, порождающих ее дизъюнктов:

$$F_1 \vee G,\, F_2 \vee \neg G \vDash F_1 \vee F_2. \tag{1.8}$$

Данный логический вывод называется ***правилом резолюции***. Правило modus ponens является его частным случаем, когда F_1 — тождественно ложная формула. Действительно, тогда правило (1.8) принимает вид:

$$G,\, F_2 \vee \neg G \vDash F_2 \quad \text{или} \quad G,\, G \to F_2 \vDash F_2. \tag{1.9}$$

Заметим также, что (1.8) можно переписать в виде:

$$\neg F_1 \to G,\, G \to F_2 \vDash \neg F_1 \to F_2. \tag{1.10}$$

В таком виде правило резолюции совпадает с правилом цепного заключения (1.4).

Сначала разберем, как действует метод резолюции в логике высказываний. Допустим, требуется проверить, что $F_1, \ldots, F_m \vDash G$. Для этого надо выполнить следующую последовательность шагов (***алгоритм метода резолюций в ЛВ***):

1. Привести формулу $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ к конъюнктивной нормальной форме (КНФ): $F_1 \wedge \cdots \wedge F_m \wedge \neg G \cong D_1 \wedge \cdots \wedge D_p$;

2. Выписать множество дизъюнктов, входящих в КНФ:

$$M = \{D_1, \ldots, D_p\};$$

3. Если существуют дизъюнкты $D_i = D_i' \vee X$ и $D_j = D_j' \vee \neg X$, содержащие противоположные литералы X и $\neg X$, то сформировать из них новый дизъюнкт — резольвенту $D_i' \vee D_j'$;

4. Если будет получена пустая резольвента $\square$, то результат достигнут (логическое следование выполняется), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов M и перейти к шагу 3.

Пример 1.63. Даны формулы $F_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R$, $F_2 = P$, $F_3 = Q$, $G = R$. Следует ли логически G из F_1, F_2 и F_3?

Решение. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \neg G$. Ее КНФ имеет вид:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge P \wedge Q \wedge \neg R. \tag{1.11}$$

В данном случае для получения КНФ никаких дополнительных преобразований делать не понадобилось. Удобно составить вспомогательную таблицу:

№	Дизъюнкты	Комментарии
1	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1-й дизъюнкт
2	P	2-й дизъюнкт
3	Q	3-й дизъюнкт
4	$\neg R$	4-й дизъюнкт
5	$\neg Q \vee R$	резольвента (1) и (2)
6	R	резольвента (3) и (5)
7	$\square$	резольвента (4) и (6)

Во втором столбце, в первых четырех строках выписываем дизъюнкты из (1.11). В следующих строках выписываем, получаемые на очередном шаге резольвенты. На последнем шаге получили пустую резольвенту $\square$, следовательно, $F_1, F_2, F_3 \vDash G$.

Дадим обоснование данного метода. Справедлива следующая цепочка равносильных утверждений:

$$F_1, \ldots, F_m \vDash G \Leftrightarrow \vDash (F_1 \wedge \cdots \wedge F_m) \to G \Leftrightarrow \vDash \neg(F_1 \wedge \cdots \wedge F_m) \vee G \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \neg[\neg(F_1 \wedge \cdots \wedge F_m) \vee G] \cong 0 \Leftrightarrow \ F_1 \wedge \cdots \wedge F_m \wedge \neg G \cong 0.$$

Таким образом, доказательство логического следования G из $F_1, \ldots, F_m$ сводится к доказательству тождественной ложности формулы $F_1 \wedge \cdots \wedge F_m \wedge \neg G$. Далее, т. к. резольвента R, полученная из дизъюнктов D_i и D_j, является их логическим следствием $(D_i, D_j \vDash R)$, то $D_i \wedge D_j \cong D_i \wedge D_j \wedge R$. Следовательно, если в результате применения метода резолюций получены два противоположных литерала P и $\neg P$ (необходимое условие получения пустой резольвенты $\square$), то

$$F_1 \wedge \dots \wedge F_m \wedge \neg G \cong D_1 \wedge \dots \wedge D_n \cong D_1 \wedge \dots \wedge D_k \wedge \dots \wedge P \wedge \neg P \cong 0,$$

где $k \le n$. Отсюда, в силу вышесказанного, $F_1, \dots, F_m \vDash G$. Можно доказать и обратное: если $F_1, \dots, F_m \vDash G$, то применяя к этим формулам метод резолюций за конечное число шагов можно получить пустую резольвенту. В качестве следствия получаем, что если на каком-то шаге нет ни одной пары резольвируемых дизъюнктов, то логическое следование не выполняется.

Перебор всех резольвент можно организовать по-разному, и разные стратегии будут (в среднем) иметь различную эффективность (число шагов до получения положительного или отрицательного ответа). Одной из наиболее эффективных стратегий является стратегия движения «от цели» — получение на каждом шаге резольвент из двух дизъюнктов, один из которых — это цель доказательства (формула G) или резольвента-потомок этой цели.

Пример 1.64. Верно ли, что $(F \to G) \to H,\ F,\ G \vDash H$?

Решение. Приводим формулу $[(F \to G) \to H] \wedge F \wedge G \wedge \neg H$ к КНФ:

$$[(F \to G) \to H] \wedge F \wedge G \wedge \neg H \cong [\neg(\neg F \vee G) \vee H] \wedge F \wedge G \wedge \neg H \cong$$
$$\cong (F \vee H) \wedge (\neg G \vee H) \wedge F \wedge G \wedge \neg H.$$

Применяем метод резолюций к совокупности дизъюнктов $\{(F \vee H), (\neg G \vee H), F, G, \neg H\}$:

№	Дизъюнкты	Комментарии
1	$F \vee H$	1-й дизъюнкт
2	$\neg G \vee H$	2-й дизъюнкт
3	F	3-й дизъюнкт
4	G	4-й дизъюнкт
5	$\neg H$	5-й дизъюнкт
6	H	резольвента (2) и (4)
7	$\square$	резольвента (5) и (6)

На последнем шаге получаем пустую резольвенту, значит, логическое следование выполняется.

Метод резолюций в логике предикатов несколько более сложная процедура, чем метод резолюций в логике высказываний. Мы опишем ее схематично, отсылая за более подробными разъяснениями к специальной литературе, приведенной в конце пособия (см. [1], [2], [4] в списке основной литературы и [4] — в списке дополнительной).

Для доказательства логического следования $F_1, \dots, F_n \vDash G$ по методу резолюций каждая из формул $F_1, \dots, F_2, \neg G$ логики предикатов должна быть представлена в специальном стандартном виде. Первый шаг — это приведение формулы к предваренной нормальной форме, бескванторная часть которой приведена к конъюнктивной нормальной форме:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\dots(\forall x_n)(D_1 \wedge \dots \wedge D_m),$$

где $D_1, \dots, D_m$ — дизъюнкции предикатных переменных или их отрицаний. Как было сказано выше, такая форма существует для любой формулы логики предикатов.

Далее проводится так называемая ***сколемизация***[8] полученной формулы, целью которой является удаление всех кванторов существования. Эта процедура заключается в следующем. Если на первом месте в формуле стоит квантор существования, то стоящая под ним предметная переменная всюду в данной формуле заменяется конкретным элементом множества (предметом), а сам квантор существования убирается. Например, из формулы $(\exists x)(\forall y)(P(x,y))$ получаем $(\forall y)P(a,y)$. Далее заметим, что пару кванторов $(\forall x)(\exists y)$ можно рассматривать как функцию $y = f(x)$. Соответственно, если в формуле перед квантором существования $(\exists y)$ стоят кванторы общности $(\forall x_1), \dots, (\forall x_n)$, то всюду в формуле переменная y заменяется на функцию n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, а квантор $(\exists y)$ убирается.

Пример 1.65. Провести сколемизацию формулы

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)F(x,y,z,u,v).$$

Решение. Переменные x, y заменяем на конкретные элементы a и b соответственно. Переменные z, u оставляем, а вместо v вводим функцию $f(z,u)$. Получаем формулу

$$(\forall z)(\forall u)F(a,b,z,u,f(z,u)).$$

Получаемая после сколемизации формула называется ***сколемовской нормальной формой***. В силу вышесказанного, она имеет вид:

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_k)(D_1 \wedge \dots \wedge D_m),$$

где $D_1, \dots, D_m$ — это дизъюнкции предикатных переменных или их отрицаний. Такие дизъюнкты, собранные из сколемовских нормальных форм

[8]Туральф Сколем (1887–1963) — норвежский математик и логик.

всех формул $F_1, \dots F_n, \neg G$, затем участвуют в процедуре поиска пустой резольвенты, аналогично тому, как это делается в логике высказываний. При этом дополнительно применяется процедура ***унификации*** предметных переменных. Ее суть состоит в замене некоторых переменных на конкретные элементы, чтобы для формул, к которым нельзя было применить правило резолюции, теперь это стало возможным. Например, если формулы $P(a) \vee \neg Q(a, b)$ и $Q(x, y) \vee \neg R(x, y)$ не резольвируют, то после замены во второй формуле x на a и y на b получаем формулы, к которым это правило применимо, и оно дает резольвенту $P(a) \vee \neg R(a, b)$. Указанную выше замену принято кратко обозначать как $\{x/a, y/b\}$.

Пример 1.66. Докажите с помощью метода резолюций справедливость следующего рассуждения: «Некоторые пациенты любят докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Следовательно, никакой доктор не является знахарем».

Решение. На множестве людей введем предикаты $P(x)$:«x — пациент», $D(x)$:«x — доктор», $Z(x)$:«x — знахарь», $L(x, y)$:«x любит y». Тогда на языке логики предикатов рассуждение запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi1 &: (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x, y))), && \text{(1-е предложение)} \\ \Pi2 &: (\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Z(y) \to \neg L(x, y))), && \text{(2-е предложение)} \\ \text{В} &: (\forall x)(D(x) \to \neg Z(x)). && \text{(вывод)} \end{aligned}$$

Требуется доказать, что $\Pi1, \Pi2 \vDash \text{В}$. С помощью равносильных преобразований перепишем формулы в предваренной нормальной конъюктивной форме:

$$\begin{aligned} &\Pi1 : (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge (\neg D(y) \vee L(x, y))), \\ &\Pi2 : (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Z(y) \vee \neg L(x, y))), \\ &\neg\text{В} : \neg(\forall x)(\neg D(x) \vee \neg Z(x)) \cong (\exists x)(D(x) \wedge Z(x)). \end{aligned}$$

Перепишем полученные выражения в сколемовской нормальной форме, заменив при этом во втором предложении переменную y на t, чтобы не было пересечения с первым предложением:

$$\begin{aligned} &\Pi1 : (\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a, y))), \\ &\Pi2 : (\forall x)(\forall t)(\neg P(x) \vee \neg Z(t) \vee \neg L(x, t))), \\ &\neg\text{В} : D(b) \wedge Z(b). \end{aligned}$$

Выписываем множество дизъюнктов, входящих в данные формулы, для проведения доказательства методом резолюций: 1) $P(a)$; 2) $\neg D(y) \vee L(a, y)$;

3) $\neg P(x) \vee \neg Z(t) \vee \neg L(x,t)$; 4) $D(b)$; 5) $Z(b)$. На первом шаге попытаемся найти резолюцию, в которой бы участвовал дизъюнкт, входящий в отрицание цели, например, $D(b)$. Чтобы унифицировать его со вторым дизъюнктом, выполняем подстановку $\{y/b\}$. Тогда после унификации и применения правила резолюции (1.8), получаем резольвенту 6) $L(a,b)$. Теперь унифицируем 3-й и 6-й дизъюнкты. Для этого делаем подстановку $\{x/a, z/b\}$. В результате получаем резольвенту 7) $\neg P(a) \vee \neg Z(b)$. После резолюции этой резольвенты с 5-м дизъюнктом получаем резольвенту 8) $\neg P(a)$. И, наконец, после резолюции 1-го и 8-го дизъюнкта получаем пустую резольвенту 9) $\square$. Таким образом, логическое следование выполняется и рассуждение верно.

Задачи для самостоятельного решения

70. С помощью метода резолюций проверить, верно ли, что:

а) $P, Q, R \wedge P \to \neg Q \vDash \neg R$; б) $(B \wedge C) \to \neg D \vDash \neg B$.

71. Проверить с помощью метода резолюций, верно ли рассуждение: «Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала. А не спроси она его, он и не сказал бы ей. Но она узнала. Следовательно, она спросила».

72. Проверить правильность следующего рассуждения: «В хоккей играют настоящие мужчины. Трус не играет в хоккей. Я в хоккей не играю. Значит, я трус».

73. Привести следующую формулу к сколемовской нормальной форме: $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)P(x,y,z,v)$.

74. Провести сколемизацию формулы: $(\exists y)(\forall x)(\forall z)Q(x,y,z)$.

75. Докажите при помощи метода резолюций следующие логические следования:

а) $P(a) \vee \neg Q(a,b)$, $Q(x,y) \vee \neg R(x,y)$, $S(b)$, $R(a,b) \vDash P(a)$ (a, b — константы);

б) $(\forall x)(A(x) \to (B(x) \wedge C(x)))$, $(\exists x)(A(x) \wedge D(x)) \vDash (\exists x)(D(x) \wedge C(x))$.

76. Доказать методом резолюций, что если Кащей бессмертен, то он не человек.

77. Проверить с помощью метода резолюций правильность рассуждения: «Никакой торговец сепульками сам их не покупает. Некоторые люди, покупающие сепульки, глупы. Следовательно, некоторые глупые люди не торгуют сепульками».

1.12. Логическое программирование. ПРОЛОГ

Все языки программирования условно можно разделить на два вида: ***императивные (процедурные)*** и ***декларативные***. Программа, написанная на процедурном языке, состоит из последовательности команд, которые четко определяют каждый шаг на пути к поставленной цели. Здесь программа — это четкая инструкция, в соответствии с которой должен действовать компьютер, не отступая от нее ни на шаг. К языкам этого типа относятся большинство известных языков: Бейсик, Паскаль, Си и т. д.

В декларативных языках дело обстоит иначе. Здесь программа — это лишь набор некоторых фактов и правил, по которым эти факты соотносятся друг с другом (пользователь декларирует факты и правила). В конце программы ставится некоторый вопрос относительно этих фактов. И компьютер самостоятельно, основываясь на встроенных внутренних процедурах языка, обрабатывает полученную информацию и ищет пути для решения поставленной задачи. В некотором смысле при работе с декларативными языками роль программиста берет на себя сам язык.

Одним из самых известных декларативных языков является PROLOG (ПРОЛОГ). Он был создан в 1975 г. сотрудниками Марсельского университета во главе с Аланом Кольмероэ. Название происходит от сокращенного PROgramming in LOGic (ПРОграммирование с помощью ЛОГики). Основой этого языка яавляется логика предикатов и метод резолюций Робинсона. В 1977 г. Уоррен и Перейра из Эдинбургского университета (Шотландия) создали очень эффективный компилятор ПРОЛОГа. Этот (эдинбургский) вариант стал как бы его негласным стандартом. В процессе развития появилось много разновидностей и вариантов языка. В Интернете в открытом доступе можно найти как многие варианты самого ПРОЛОГа, так и всевозможные книги и другие учебные пособия.

ПРОЛОГ имеет ряд преимуществ по сравнению с процедурными языками. Во-первых, его синтаксис наиболее близок к человеческому языку. Поэтому писать программы на ПРОЛОГе проще. Они имеют более прозрачную структуру, их проще понимать и отлаживать. Все языки делятся, как известно, на языки низкого и высокого уровня. К языкам низкого уровня относятся те, синтаксис которых близок к машинным кодам, например, Ассемблер. К языкам высокого уровня относятся те, синтаксис которых ближе к человеческой речи: Паскаль, Си и т. д. В этом смысле ПРОЛОГ можно назвать языком сверхвысокого уровня. Структура его программ наиболее близка к нашей речи.

Во-вторых, многие алгоритмы на ПРОЛОГе описываются гораздо короче, чем на императивных языках. По статистике, одна строка текста на

ПРОЛОГе равна 14 строкам текста на императивном языке. Все это приводит к увеличению скорости разработки многих видов программ. ПРОЛОГ наилучшим образом показал себя в следующих областях:

- автоматический перевод с одного языка на другой;
- создание естественно-языковых интерфейсов;
- символьные вычисления для решения уравнений, дифференцирования и интегрирования;
- проектирование динамических реляционных баз данных;
- экспертные системы и оболочки экспертных систем;
- автоматизированное управление производственными процессами;
- автоматическое доказательство теорем;
- полуавтоматическое составление расписаний;
- системы автоматизированного проектирования;
- базирующееся на знаниях программное обеспечение;
- организация сервера данных или, точнее, сервера знаний, к которому может обращаться клиентское приложение, написанное на каком-либо языке программирования.

Тем не менее ПРОЛОГ не является «панацеей от всех бед». Есть задачи, для которых он хуже приспособлен, чем процедурные языки: большой объем арифметических вычислений (обработка аудио, видео и т. д.); написание драйверов.

В последнее время часто используется системный подход, когда при решении задачи одновременно используются языки разных типов, например, ПРОЛОГ и Си. Каждый из них применяется в той части, для которой он лучше подходит. Затем все части объединяются в единый комплекс.

Программа на ПРОЛОГе состоит из предложений. Это не команды в привычном смысле слова, т. к. они не указывают на конкретные действия. Запись предложений происходит на языке логики предикатов. Все предложения (команды) разбиваются на три вида: факты, правила и вопросы.

1) ***Факты*** — это истинные высказывания, с помощью которых задаются исходные данные задачи. Факты определяются с помощью предикатов

от одной или нескольких переменных. Вместо всех или некоторых переменных могут быть подставлены конкретные значения. Остальные переменные связаны кванторами всеобщности (которые подразумеваются, но не пишутся).

Пример 1.67. а) Для того, чтобы указать, что «Миша является студентом» в ПРОЛОГе можно ввести одноместный предикат `student(X)` и записать следующий факт: `student(Миша)`.

б) Для указания того, что «Наташа является мамой Маши» в ПРОЛОГе вводится предикат от двух переменных `mama(X,Y)` (`X` является мамой `Y`) и записывается факт: `mama(Наташа,Маша)`.

в) Чтобы указать, что «Россия — самое большое по площади государство», можно ввести предикат `pl(X,Y)` (`X` больше по площади `Y`) и записать: `pl(Россия,X)`. Подразумевается, что перед `pl` стоит квантор (∀`X`) и `X` пробегает множество всех стран.

2) ***Правила*** позволяют на основе предикатов, используемых для задания фактов, строить новые предикаты и, следовательно, получать новые факты. Они записываются в следующем виде:

$$Q :\!-\ Q_1, \ldots, Q_m, \qquad (1.12)$$

где $Q, Q_1, \ldots, Q_m$ — предикаты. Правило (1.12) означает, что Q выполняется, если выполняются условия $Q_1, \ldots, Q_m$, т. е. на языке логики предикатов его можно переписать в виде импликации или дизъюнкта:

$$(Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_m) \to Q \cong \neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_m \vee Q.$$

Подразумевается, что перед правилами стоят кванторы ∀ по всем переменным, которые встречаются в этом правиле.

Пример 1.68. Рассмотрим двухместный предикат `papa(X,Y)` (X является отцом Y). Тогда на основе предикатов `mama` и `papa` в ПРОЛОГе можно определить предикат `roditel` с помощью следующих двух правил:

`roditel(X,Y):-mama(X,Y)` и `roditel(X,Y):-papa(X,Y)`.

Заметим, что эти два правила можно объединить в одно:

`roditel(X,Y):-mama(X,Y);papa(X,Y)` (; заменяет связку «или»)

(`X` является родителем `Y`, если `X` является мамой или папой `Y`). Теперь с помощью этого предиката можно определить предикат `babushka` по правилу:

`babushka(X,Y):-mama(X,Z),roditel(Z,Y)`

(`X` является бабушкой `Y`, если `X` является мамой `Z`, а `Z` является родителем `Y`).

3) ***Вопрос*** — это предикат или конъюнкция предикатов. Он ставится в конце программы и записывается в следующем виде:

$$? \, Q_1, \ldots, Q_m,$$

где $Q_1, \ldots, Q_m$ — предикаты, используемые при задании фактов и правил. В процессе работы ПРОЛОГ должен ответить на него. Точнее, если в предикатах нет свободных переменных (т. е. вопрос — это высказывание), то ПРОЛОГ должен проверить, истинным или ложным высказыванием является вопрос. Если есть свободные переменные, то ПРОЛОГ должен найти, при каких значениях переменных вопрос обращается в истинное высказывание, или определить, что таких значений нет.

Пример 1.69. Если задать вопрос `?babushka(Вера,Коля)` (является ли Вера бабушкой Коли?), то в зависимости от заданных фактов получим ответ «да» или «нет». Если же спросить `?babushka(Вера,X)`, то ПРОЛОГ в качестве ответов должен найти всех внуков бабушки Веры. Можно задать и составной вопрос, например `?babushka(Вера,Миша),student(Миша)` (верно ли, что Вера является бабушкой Миши и Миша — студент?). В качестве ответа опять получим «да» или «нет».

Переход от фактов и правил к ответу на вопрос осуществляется с помощью метода резолюций, встроенного в сам язык ПРОЛОГ. Вопрос — это фактически формула исчисления предикатов, а работа ПРОЛОГа заключается в том, чтобы доказать логическую выводимость этой формулы исходя из фактов и правил.

В процессе работы возникает проблема наиболее эффективного алгоритма перебора резольвент. В ПРОЛОГе следуют следующей стратегии: отрицание вопроса (как того требует метод резолюций) берут за «цель». Далее вычисляют резольвенты, порожденные целью (или ее следствием) и каким-либо фактом или правилом, которые просматриваются сверху вниз. Если пустая резольвента с помощью такой стратегии не найдена, то ответ на вопрос отрицателен.

Пример 1.70. Рассмотрим работу ПРОЛОГа на примере небольшой программы (номера здесь проставлены лишь для удобства отслеживания работы алгоритма):

(1) `рыба(X):-откладывает_икру(X),имеет_плавники(X).`
(2) `земноводное(X):-откладывает_икру(X),имеет_конечности(X).`
(3) `откладывает_икру(семга).`
(4) `откладывает_икру(лягушка).`
(5) `откладывает_икру(щука).`

(6) `имеет_конечности(лягушка).`

(7) `имеет_плавники(щука).`

(8) `имеет_плавники(семга).`

(9) `?рыба(щука).`

В первых двух строках приведены правила, которые характеризуют класс рыб и класс земноводных. Далее приводятся факты относительно конкретных живых организмов. ПРОЛОГ должен на основе фактов и правил ответить на вопрос, является ли щука рыбой. Следуя тактике движения от цели, он сначала ищет формулу, которая бы резольвировала с формулой $\neg$*рыба*(*щука*). В данном случае такой является только команда (1). На языке предикатов она записывается как *рыба*(X) $\vee$ $\neg$*откладывает_икру*(X) $\vee$ $\neg$*имеет_плавники*(X). После унификации с помощью подстановки $\{X/$*щука*$\}$ эти две формулы по правилу резолюции дают резольвенту:

(10) $\neg$*откладывает_икру*(*щука*) $\vee$ $\neg$*имеет_плавники*(*щука*).

Теперь данная формула является новой целью. Для нее ПРОЛОГ ищет сверху вниз формулу, которая бы с ней резольвировала. Такой формулой является команда (5). Унификация при этом не требуется. В результате получаем резольвенту:

(11) $\neg$*имеет_плавники*(*щука*).

Данная новая цель, в свою очередь, резольвирует с командой (7). В результате получается пустая резольвента $\square$. Получение пустой резольвенты означает успех вычисления, т. е. положителный ответ на вопрос (щука является рыбой).

В конце программы можно поставить и другой вопрос: ($9'$) `?рыба(X).`, что означает «Существует ли вообще какая-нибудь рыба?». В случае положительного ответа на вопрос ПРОЛОГ попутно находит все конкретные значения переменной X, удовлетворяющие этому вопросу, т. е. находит всех рыб. Разберем подробнее, как это происходит. Цель $\neg$*рыба*(X) резольвирует с (1)-й командой. В результате получается резольвента:

($10'$) $\neg$*откладывает_икру*(X) $\vee$ $\neg$*имеет_плавники*(X).

Она, в свою очередь, после подстановки $\{X/$*семга*$\}$ резольвирует с командой (3) и дает резольвенту:

($11'$) $\neg$*имеет_плавники*(*семга*).

А эта формула вместе с командой (8) дает пустую резольвенту □. Вычисление успешно завершается и ПРОЛОГ выдает ответ $X = семга$.

После этого происходит сброс значения переменной и «откат» назад к резольвенте (10′). ПРОЛОГ пытается унифицировать ее каким-то другим способом. Например, после подстановки $\{X/лягушка\}$ она унифицируется с формулой (4) и дает резольвенту:

$$\neg имеет\_плавники(лягушка).$$

Но эта формула не унифицируется ни с какой другой и пустой резольвенты не получается. Этот путь приводит к отрицательному решению. Поэтому опять происходит сброс значения переменной и откат. Продолжая подобным образом, ПРОЛОГ находит еще один ответ $X = щука$.

После того, как все варианты исчерпаны, происходит остановка работы программы.

Задачи для самостоятельного решения

78. Представьте в виде ПРОЛОГ-программы базу данных нескольких европейских стран вместе с их столицами. Сформируйте подходящие запросы, позволяющие определять столицу заданной страны или страну, имеющую столицей заданный город.

79. Проведите анализ вычислений заданной ПРОЛОГ-программы (здесь X и Y — это переменные, а a и b — какие-то конкретные элементы):

(1) `A(a,b).`

(2) `B(X):-C(X,Y).`

(3) `C(b,a):-A(a,b).`

(4) `C(X,Y):-A(X,Y).`

(5) `?B(X).`

80. Выполнить вручную программу на языке ПРОЛОГ:

(1) `дедушка(X,Y):-отец(X,V),отец(V,Y).`

(2) `отец(Чарльз,Вильям).`

(3) `отец(Джереми,Пол).`

(4) `отец(Вильям,Генри).`

(5) `отец(Чарльз,Смит).`

(6) `отец(Смит,Майк).`

(7) `отец(Смит,Джереми).`

(8) `?дедушка(Чарльз,Z).`,

которая должна найти всех внуков Чарльза. Ответом является каждая конкретизация переменной Z, полученная унификацией на пути построения пустой резольвенты.

81. Построить программу на языке ПРОЛОГ и провести ручную прокрутку ее для решения следующей проблемы: «Известно, что каждый предок любит своего потомка. A — дедушка B, а B и C — братья. Доказать, что A любит C».

1.13. Логические задачи

82. Мистер МакГрегор, владелец лавки из Лондона, сообщил в Скотланд-Ярд, что его ограбили. По обвинению владельца лавки были арестованы три подозрительные личности A, B и C. На основании показаний Мак-Грегора, данных им под присягой, было установлено, что:

1) Каждый из подозреваемых A, B и C в день ограбления был в лавке и никто туда больше не заходил.

Следующие факты были неопровержимо установлены следствием:

2) Если A виновен, то у него был ровно один сообщник;

3) Если B невиновен, то C тоже невиновен;

4) Если виновны ровно двое подозреваемых, то A — один из них;

5) Если C не виновен, то B тоже не виновен.

Против кого Скотланд-Ярд выдвинул обвинение?

83. Трое рецидивистов, A, B, и C, подозреваются в преступлении. Неопровержимо установлены следующие факты:

1) Если A виновен, а B невиновен, то в деле участвовал C;

2) C никогда не действовал в одиночку;

3) A никогда не ходит на дело вместе с C;

4) Никто, кроме A, B и C в преступлении не замешан, но по крайней мере один из этой тройки виновен.

Можно ли на основании этих фактов выдвинуть обвинение против A? Против B? Против C?

84. Подсудимых четверо: A, B, C и D. Установлено следующее:

1) Если A и B оба виновны, то C был соучастником;

2) Если A виновен, то по крайней мере один из обвиняемых B,C был соучастником;

3) C всегда «ходит на дело» вместе с D;

4) Если A не виновен, то D виновен.

Кто из четырех подсудимых виновен вне всякого сомнения и чья вина остается под сомнением?

85. (Четыре колпака в пещере). В темной пещере лежат четыре колпака — два белых и два черных. В пещеру входят 3 мудреца, они знают, сколько и каких колпаков находится в пещере, однако в темноте они не видят, какие колпаки на себя надевают. Надев колпаки, они по одному выходят из темноты пещеры на свет: первый идет, куда глаза глядят; второй идет за первым и видит, какого цвета на нем колпак; третий идет за вторым и видит, какого цвета колпаки на первом и втором. Найдется ли мудрец, который догадается, какого цвета на нем колпак и воскликнет «Я знаю!»?

86. (Рыцари и лжецы). На острове жили рыцари, которые всегда говорили правду, и лжецы, которые всегда лгали. Трое жителей острова (A, B и C) разговаривали между собой в саду. Проходивший мимо незнакомец спросил у A: «Сколько рыцарей среди вас?» На этот вопрос A ответил неразборчиво. Поэтому незнакомцу пришлось спросить у B: «Что сказал A?». B ответил: «A сказал, что среди нас один рыцарь». И тогда C закричал: «Не верьте B! Он лжет». Кто из двух персонажей B и C рыцарь и кто лжец?

87. В задаче два персонажа: A и B. A сказал: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто из A и B рыцарь и кто лжец?

88. A говорит: «Или я лжец, или B — рыцарь». Кто из двух персонажей A и B рыцарь и кто лжец?

89. Снова три островитянина: A, B, C. A говорит: «Мы все лжецы»; B возражает: «Один из нас рыцарь». Кто из трех рыцарь и кто лжец?

90. (Рыцари, лжецы и нормальные люди). На острове жили три типа людей: рыцари — они всегда говорят правду; лжецы — они всегда лгут; нормальные люди — они могут сказать правду, а могут солгать.

Перед нами трое людей A, B и C. Один из них рыцарь, другой лжец, третий — нормальный человек. A сказал: «Я нормальный человек». B подтвердил: «Это правда». C добавил: «Я не нормальный человек». Кто такие A, B и C?

91. **(Две дороги).** По острову рыцарей и лжецов идет путешественник. Он подходит к развилке дорог, из которых только одна ведет в столицу острова. Никаких знаков, указывающих куда ведет каждая дорога, у развилки нет. Но здесь стоит местный житель (неизвестно кто, рыцарь или лжец). Какой вопрос, предусматривающий ответ «да» или «нет», должен задать ему путешественник, чтобы определить, какая дорога ведет в столицу острова?

Глава 2

Теория алгоритмов

2.1. Понятие алгоритма

Понятие алгоритма формировалось с древнейших времен. Интуитивно под алгоритмом мы понимаем четкий набор инструкций о выполнении в определенном порядке некоторых действий для решения всех задач какого-то одного класса.

Само слово «алгоритм» происходит от имени выдающегося персидского математика IX века Мухаммеда аль-Хорезми (ок. 783 – ок. 850). Считается установленным, что его перу принадлежат 9 сочинений по математике, астрономии, истории, географии. Из этих книг до нас дошли только 7 — в виде текстов либо самого Аль-Хорезми, либо его арабских комментаторов, либо в переводах на латынь. Один из его главных трактатов посвящен арифметике. Оригинальный арабский вариант этого произведения не сохранился. Но его содержание известно нам благодаря переводу на латинский язык, сделанному в XII веке. Единственная рукопись этого перевода хранится сейчас в Кембридже. В переводе на латынь он назывался: «Algorizmi de numero Indozum» («Об индийском числе, сочинение Алгоризми»). Эта книга была одним из источников, по которому Западная Европа познакомилась с индийской десятичной позиционной системой счисления. Отсюда и пошло слово «алгоритм», как созвучное латинскому варианту имени Аль-Хорезми. Первоначально под этим словом понимали правила счета с помощью десятичной системы счисления, а со временем оно стало синонимом любого точного правила действий.

Но примеры алгоритмов были известны задолго до появления трактата Аль-Хорезми. Один из наиболее известных — это алгоритм Евклида —

процедура отыскания наибольшего общего делителя двух чисел ($\approx$ 300 гг. до н. э.).

Однако точное, математически строгое определение алгоритма, несмотря на тысячелетнюю историю развития этого понятия, было сформировано лишь в первой половине XX века. Вернее, было выработано несколько строгих определений алгоритма, которые впоследствии оказались равносильными между собой. Три таких равносильных определения связаны с понятиями вычислимой по Тьюрингу функции, частично рекурсивной функции и нормально вычислимой функции соответственно. Этим темам посвящены следующие разделы данного учебного пособия.

2.2. Машина Тьюринга[1]

Машина Тьюринга — это не реальная машина, а лишь воображаемая абстрактная модель, используемая для строгого формального изучения вопросов алгоритмической вычислимости. Она состоит из следующих «частей»:

1. Ленты, бесконечной в обе стороны, разбитой на ячейки; на каждом шаге работы считывающая головка (каретка) машины обозревает (считывает) в точности одну ячейку ленты;

2. Конечного набора знаков (символов, букв) $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $n \geq 1$, которые образуют так называемый ***алфавит машины***; в каждую из ячеек ленты записана одна и только одна буква из алфавита A; при этом считается, что в алфавите имеется так называемая «пустая буква» и именно она записана в пустые ячейки ленты; считается также, что имеется лишь конечное число непустых ячеек;

3. Конечного набора ***состояний*** $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$; на каждом шаге работы машина может находиться ровно в одном из состояний; среди состояний выделяются два — ***начальное*** q_1 и **заключительное** (или состояние остановки) q_0; находясь в состоянии q_1, машина начинает работать; попав в состояние q_0, машина останавливается.

Машина может совершать следующие ***элементарные действия***:

1. Изменить свое состояние и заменить букву обозреваемой ею ячейки на любую другую букву своего алфавита;

[1] Алан Тьюринг (1912–1954) — английский математик, логик, криптограф.

2. Изменить свое состояние, заменить букву в обозреваемой ячейке и передвинуться на одну ячейку вправо, т. е. начать обозревать ближайшую справа ячейку ленты;

3. Изменить свое состояние, заменить букву в обозреваемой ячейке и передвинуться на одну ячейку влево.

Работа машины заключается в последовательном выполнении элементарных действий, причем каждое такое действие однозначно определяется состоянием машины q_i в данный момент и буквой a_j, находящейся в обозреваемой ею ячейке ленты. Поэтому работа машины полностью описывается совокупностью приказов или ***команд***, которые для каждой пары $q_i a_j$ указывают, какое именно элементарное действие должна произвести машина, находящаяся в состоянии q_i и обозревающая букву a_j. Три возможных типа команд, соответствующих элементарным действиям 1), 2), 3), будем обозначать следующим образом:

$$1)\ q_i a_j \to q_l a_m; \quad 2)\ q_i a_j \to q_l a_m \text{П}; \quad 3)\ q_i a_j \to q_l a_m \text{Л}.$$

Например, $q_i a_j \to q_l a_m \text{П}$ означает, что находясь в состоянии q_i и обозревая ячейку с буквой a_j на следующем шаге машина должна перейти в состояние q_l, одновременно заменить в обозреваемой ячейке букву a_j на букву a_m и после этого сдвинуться на одну ячейку вправо. Если на очередном шаге содержимое обозреваемой ячейки или состояние машины не изменяется, то можно применить краткую запись команды, т. е. в правой от стрелки части команды опустить символ состояния или символ содержания ячейки. Например, можно писать вместо команды $q_i a_j \to q_i a_m \text{П}$ команду $q_i a_j \to a_m \text{П}$, вместо $q_i a_j \to q_l a_j \text{П}$ — команду $q_i a_j \to q_l \text{П}$, а вместо $q_i a_j \to q_i a_j \text{П}$ — просто $q_i a_j \to \text{П}$. Совокупность команд, определяющих работу машины, называется ***программой***.

Пример 2.1. Рассмотрим машину Тьюринга, имеющую два состояния $Q = \{q_0, q_1\}$ (только конечное и начальное) и алфавит $A = \{a_0, 1\}$ (a_0 — символ пустой клетки). Начальное положение (конфигурацию) машины изобразим, как показано на рис. 2.1.

		q_1				
	1	1	a_0	a_0	1	

Рис. 2.1. Начальная конфигурация машины Тьюринга из примера 2.1

Машина находится в начальном состоянии q_1 и обозревает ячейку ленты, которая находится непосредственно под символом состояния. В этой ячейке записана буква «1». Считаем, что все ячейки ленты, не изображенные на рисунке, являются пустыми, т. е. в них записан символ пустой клетки a_0. Рассмотрим следующую программу:

$$q_1 a_0 \to q_0 1, \quad q_1 1 \to \Pi.$$

Определим, к какой конфигурации машины приведет ее выполнение. Сначала нужно применить вторую команду, т. к. она начинается с комбинации $q_1 1$ (текущее состояние машины и символ в обозреваемой ячейке). В соответствии с ней машина должна сохранить свое состояние, не менять содержание обозреваемой ячейки и передвинуться на одну ячейку вправо. Получаем конфигурацию, изображенную на рис. 2.2.

			q_1			
	1	1	a_0	a_0	1	

Рис. 2.2. Конфигурация машины Тьюринга из примера 2.1 после первого шага работы

Теперь машина находится в состоянии q_1 и обозревает пустую ячейку. Поэтому надо применить первую команду. В соответствии с этой командой машина переходит в состояние q_0 и записывает в обозреваемую ячейку 1 (рис. 2.3).

			q_0			
	1	1	1	a_0	1	

Рис. 2.3. Конечная конфигурация машины Тьюринга из примера 2.1

Состояние q_0 — заключительное и машина останавливается.

Для краткости, чтобы не рисовать ленту, конфигурацию на рис. 2.1 можно записать так: $1q_1 1a_0a_0 1$, конфигурацию на рис. 2.2 — $11q_1a_0a_0 1$, заключительную конфигурацию — $11q_0 1a_0 1$. Т. е. выписываем подряд содержание всех ячеек, заключенных между двумя крайними непустыми ячейками, и перед буквой, над которой находится считывающая головка машины, пишем состояние, в котором на данном шаге находится машина. Тогда всю последовательность конфигураций можно записать следующим образом:

$$1q_1 1a_0a_0 1 \Rightarrow 11q_1a_0a_0 1 \Rightarrow 11q_0 1a_0 1.$$

Пример 2.2. Дана машина Тьюринга (обозначим ее через Z) с алфавитом $A = \{a_0, 0, 1\}$, набором состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ и программой, которую запишем в виде таблицы:

	q_1	q_2	q_3
a_0	$q_2 1$	0	1
1	q_2П	П	q_0
0	$q_2 a_0$Л	q_3П	q_0

Например, если машина находится в состоянии q_2 и обозревает ячейку, в которой стоит 0, то она должна выполнить команду, которая стоит на пересечении 3-й строки и 2-го столбца таблицы, т. е. перейти в состояние q_3 и сместиться на одну ячейку вправо. А если машина находится в состоянии q_3 и обозревает пустую ячейку (с символом a_0), то ей надо выполнить команду, стоящую на пересечении 1-й строки и 3-го столбца, т. е. не менять состояния, а в обозреваемую ячейку записать 1.

Посмотрим, к какой конфигурации в результате работы придет машина, исходя из начального положения $q_1 11$.

1) Судя по таблице, из этого положения машина должна перейти в состояние q_2 и сместиться на одну ячейку вправо, т. е. должна быть выполнена команда $q_1 1 \to q_2$П. Получаем следущую конфигурацию: $1 q_2 1$.

2) На 2-м шаге действует команда $q_2 1 \to$ П. Получаем: $11 q_2 a_0$.

3) На 3-м шаге должна быть выполнена команда $q_2 a_0 \to 0$. В результате получаем: $11 q_2 0$.

4) На 4-м шаге действует команда $q_2 0 \to q_3$П. Получаем конфигурацию: $110 q_3 a_0$.

5) На 5-м шаге действует команда $q_3 a_0 \to 1$. После этого будет иметь место конфигурация: $110 q_3 1$.

6) На 6-м шаге действует команда $q_3 1 \to q_0$. Получаем: $110 q_0 1$.

Это заключительная конфигурация, т. к., попав в состояние q_0, машина останавливается.

Рассмотрим функции от натуральных аргументов, принимающие значения во множестве натуральных чисел, т. е. функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n, y$ — натуральные числа или нули. Если x — натуральное число, то введем для удобства следующие обозначения:

$$1^x = \underbrace{1 \dots 1}_{x}, \quad 0^x = \underbrace{0 \dots 0}_{x}.$$

Тогда набор значений аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно записать на ленте машины Тьюринга с алфавитом $A = \{a_0, 1, 0\}$ в виде следующего слова:

$1^{x_1}01^{x_2}0\dots01^{x_n}$ (числу x_i сопоставляется слово 1^{x_i} и все они отделены друг от друга нулями). При этом считаем, что 1^0 и 0^0 — это пустые слова, т. е. слова, не занимающие ни одной ячейки. Говорят, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ ***вычислима по Тьюрингу***, если найдется машина T с алфавитом $A=\{a_0,1,0\}$, которая в процессе работы переходит от начальной конфигурации $q_1 1^{x_1}0\dots01^{x_n}$ к конечной $q_0 1^y$, где $y=f(x_1,\dots,x_n)$, и работает бесконечно, если $f(x_1,\dots,x_n)$ не определена.

Пример 2.3. Покажем, что функция $f(x)=x+1$ вычислима по Тьюрингу. Для этого построим машину (обозначим ее через S), которая работает по принципу: $q_1 1^x \Rightarrow q_0 1^{x+1}$. Она может быть реализована с помощью следующих команд: $q_1a_0\to q_4 1$, $q_4 1\to q_0$Л, $q_1 1\to q_2$, $q_2 1\to$ П, $q_2a_0\to q_3 1$, $q_3 1\to$ Л, $q_3 a_0\to q_0$П. Первые две команды нужны для случая, когда $x=0$. Вот как работает эта машина при $x=1$: $q_1 1\Rightarrow q_2 1\Rightarrow 1q_2a_0\Rightarrow 1q_3 1\Rightarrow a_0q_3 11\Rightarrow q_3a_0 11\Rightarrow q_0 11$. При $x=2$ ее работа будет выглядеть следующим образом: $q_1 11\Rightarrow q_2 11\Rightarrow 1q_2 1\Rightarrow 11q_2a_0\Rightarrow 11q_3 1\Rightarrow 1q_3 11\Rightarrow a_0q_3 111\Rightarrow q_3a_0 111\Rightarrow q_0 111$.

Пусть заданы машины Тьюринга T_1 и T_2, имеющие общий алфавит A и состояния $\{q_0,q_1,\dots,q_n\}$ и $\{q_0,q_1',\dots,q_t'\}$ соответственно. ***Композицией*** (***произведением***) машин T_1 и T_2 называется новая машина $T=T_2T_1$ с алфавитом A, набором состояний $\{q_0,\dots,q_n,q_1',\dots,q_t'\}$ и программой, получающейся объединением программ машин T_1 и T_2, причем во всех командах из T_1, содержащих символ остановки q_0, последний заменяется на q_1'. На практике машина $T=T_2T_1$ действует следующим образом: сначала она работает как T_1; после того, как наступает заключительное состояние q_0, это состояние заменяется на q_1' и дальше машина начинает действовать как T_2.

Пример 2.4. Рассмотрим машину $T=ZS$, являющуюся композицией машин из примеров 2.2, 2.3. Посмотрим, как она работает, исходя из начального положения $q_1 1$. Сначала она работает как S. В результате получаем конфигурацию $q_0 11$. Затем, заменив q_0 на q_1, применяем машину Z. В итоге приходим к конфигурации $110q_0 1$. Значит, работу машины T можно изобразить следующим образом: $q_1 1\Rightarrow 110q_0 1$.

Задачи для самостоятельного решения

92. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A\{a_0,1\}$, набором состояний $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7\}$ и следующей программой:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	q_4П	q_6П	q_6П	$q_0 1$	q_4П	q_0	q_6П
1	q_2Л	q_3Л	q_1Л	q_5a_0	a_0	q_7a_0	a_0

Определите, при какой конфигурации машина завершит свою работу, исходя из следующих начальных конфигураций: а) $1111q_1 1$; б) $11111q_1 1$; в) $111q_1 1$; г) $11q_1 1$; д) $1a_0 111a_0 a_0 111q_1 1$; е) $11a_0 a_0 11111q_1 1$; ж) $11a_0 11q_1 1$.

93. Машина Тьюринга задается следующей программой:

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1$П	q_1Л
1	$q_2 a_0$Л	Л	П
$*$	$q_0 a_0$	Л	П

Определите, в какой конфигурации машина завершит свою работу, исходя из следующих начальных конфигураций: а) $111 * 11q_1 1$; б) $1111 * 1q_1 1$; в) $111 * q_1 1$; г) $1 * 1q_1 1$; д) $11 * 11q_1 1$; е) $11111q_1 *$; ж) $*111q_1 1$. Найдите общую закономерность в работе машины.

94. Машина Тьюринга определяется следующей программой:

	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	q_0	q_3П	q_0	q_1Л
1	$q_2 a_0$Л	Л	$q_4 a_0$П	П
$*$	$q_0 a_0$	Л	q_0	П

Определите, в какой конфигурации машина завершит свою работу, исходя из следующих начальных конфигураций: а) $111 * 1q_1 1$; б) $11 * 1q_1 1$; в) $1111 * q_1 1$; г) $11111 * 11q_1 1$; д) $11111 * 111q_1 1$. Выявите общую закономерность в работе машины.

95. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, которая работала бы следующим образом: $q_1 1^x \Rightarrow q_0 a_0$.

96. На ленте машины Тьюринга записаны два набора единиц 1. Они разделены звездочкой $*$. Составьте программу машины так, чтобы она, обозревая в начале работы крайнюю справа непустую ячейку, выбрала больший из этих наборов, а меньший стерла. Звездочка должна быть сохранена, чтобы было видно, какой из массивов выбран. Рассмотрите примеры работы этой машины применительно к комбинациям: а) $1 * 11$; б) $11 * 1$; в) $11 * 111$; г) $111 * 11$.

97. Постройте машину Тьюринга, которая бы к натуральному числу в десятичной системе счисления прибавляла единицу.

98. По аналогии с предыдущей задачей постройте машину Тьюринга, которая бы от натурального числа в десятичной системе счисления отнимала единицу.

99. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{1, 0\}$, которая от начальной конфигурации $q_1 001^x 0$ переходит к заключительной конфигурации $q_0 01^x 00$. Заметим, что в данной задаче требуется обойтись без символа пустой клетки. Т. е. машина в процессе работы не должна выходить за пределы первоначального непустого слова.

100. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{1, 0\}$, которая совершает следующую работу: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 00^x 0$.

101. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{1, 0\}$, которая от начальной конфигурации $01^x q_1 0$ переходит к заключительной конфигурации $q_0 01^x 0$ (эта машина называется *«левый сдвиг»* и обозначается Б$^-$). Здесь, как и в предыдущих двух задачах, в алфавите машины нет символа пустой клетки. Это дополнительное требование понадобиться в дальнейшем при композиции данной машины с другими машинами.

102. Аналогично предыдущему заданию постройте машину Тьюринга Б$^+$ (*«правый сдвиг»*), которая выполняет переход: $q_1 01^x 0 \Rightarrow 01^x q_0 0$.

103. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{0, 1\}$, которая от конфигурации $01^x q_1 01^y 0$ переходит к конфигурации $01^y q_0 01^x 0$ (эта машина называется *«транспозиция»* и обозначается через В).

104. Постройте машину Тьюринга с алфавитом $A = \{0, 1\}$, которая работает следующим образом: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 01^x 0$ (эта машина называется *«удвоение»* и обозначается через Г).

105. Используя композицию ранее построенных машин, постройте машину Тьюринга, которая от начальной конфигурации $01^x 01^y q_1 01^z 0$ переходит к заключительной конфигурации $01^z q_0 01^x 01^y 0$ (эта машина называется *«циклический сдвиг»* и обозначается Ц).

106. Используя ранее построенные машины, постройте машину Тьюринга К$_2$ (*«копирование»*), которая совершает следующее преобразование: $q_1 01^x 01^y 0 \Rightarrow 01^x 01^y q_0 01^x 01^y 0$.

107. Докажите, что функция $O(x) = 0$ вычислима по Тьюрингу.

108. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции: а) $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$; б) $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$; в) $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$.

109. Докажите вычислимость по Тьюрингу следующих функций, построив машины Тьюринга, вычисляющие их:

а) $f(x+y) = x + y$; б) $f(x) = 2x + 1$;

в) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0; \end{cases}$ г) $sg(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0; \end{cases}$

д) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x = 0; \end{cases}$ е) $f(x) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ если } x > y, \\ 0, \text{ если } x \le y. \end{cases}$

2.3. Рекурсивные функции

Все функции, которые рассматриваются в этом параграфе, задаются и принимают значения на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, включая нуль. При этом некоторые функции могут быть не всюду определены на этом множестве.

Следующие три вида всюду определенных функций называются ***простейшими***: 1) $S(x) = x + 1$ (функция следования); 2) $O(x) = 0$ (нуль-функция); 3) $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$ (функции-проекторы, $1 \le m \le n$).

Говорят, что функция φ получена из m-местной функции f и n-местных функций $g_1, \ldots, g_m$ с помощью ***оператора суперпозиции***, если справедливо тождество: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Говорят, что $(n+1)$-местная функция φ получена из n-местной функции f и $(n+2)$-местной функции g с помощью ***оператора примитивной рекурсии***, если для любых $x_1, \ldots, x_n, y$ справедливо:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_n, 0) &= f(x_1, \ldots, x_n); \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= g(x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пара равенств (2.1) называется ***схемой примитивной рекурсии***. При $n = 0$ в роли 0-местной функции f выступает произвольное натуральное число a и определение функции φ примет вид: $\varphi(0) = a$; $\varphi(y+1) = g(y, \varphi(y))$.

Функция называется ***примитивно рекурсивной***, если она получается из простейших функций O, S, I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Пример 2.5. Покажем, что функция сложения $s(x, y) = x + y$ является примитивно рекурсивной. Для этой функции справедливы следующие тождества: $x + 0 = x$, $x + (y + 1) = (x + y) + 1$. Их можно переписать в виде:

$$s(x, 0) = x = I_1^1(x), \quad s(x, y + 1) = s(x, y) + 1 = h(x, y, s(x, y)),$$

где $h(x, y, z) = z+1 = S(I_3^3(x, y, z))$. Таким образом, функция $s(x, y)$ получается из функций $I_1^1(x)$ и $S(I_3^3(x, y, z))$ с помощью оператора примитивной рекурсии. Первая функция по определению является простейшей, а вторая получена из простейших с помощью однократного применения оператора суперпозиции. Следовательно, по определению, функция $s(x, y)$ является примитивно рекурсивной.

Говорят, что n-местная функция φ получается из $(n+1)$-местных функций f_1 и f_2 с помощью ***оператора минимизации***, или ***μ-оператора***, если величина $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ равна наименьшему значению аргумента y, при котором выполняется равенство $f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y)$. При этом используют обозначение:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Оператор минимизации является удобным средством для построения обратных функций, т. к. $f^{-1}(x) = \mu y[f(y) = x]$ («наименьший y такой, что $f(y) = x$»).

Функция называется ***частично рекурсивной***, если она может быть получена из простейших функций O, S, I_m^n с помощью конечного числа применений суперпозиции, примитивной рекурсии и μ-оператора. Частично рекурсивная функция, в отличие от примитивно рекурсивной, может быть уже не всюду определена. Если функция всюду определена и частично рекурсивна, то она называется ***общерекурсивной***.

Пример 2.6. Обратной к функции $x + 1$ является частично рекурсивная функция $x - 1 = \mu y[I_2^2(x, y) + 1 = I_1^2(x, y)]$. Она не примитивно рекурсивная, т. к. не определена при $x = 0$. С помощью μ-оператора можно построить и аналог этой функции, который уже будет везде определен, т. е. это будет уже общерекурсивная функция: $[x - 1] = \mu y[y + 1 \geq x] = \mu y[y + 2 > x]$.

Задачи для самостоятельного решения

110. Докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны, записав схему примитивной рекурсии для каждой из них: а) $\varphi(x) = n$; б) $\varphi(x) = x + n$; в) $\varphi(x, y) = xy$.

111. Докажите, что функция, полученная суперпозицией примитивно рекурсивных функций, сама примитивно рекурсивна.

112. Докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны, руководствуясь определением примитивно рекурсивной функции и теоремой, установленной в предыдущей задаче:

а) $\varphi(x) = x!$; б) $\varphi(x,y) = x^y$;

в) $sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0, \end{cases}$ г) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases}$

д) $x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ е) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ если } x > y, \\ 0, \text{ если } x \le y. \end{cases}$

113. Докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны, для чего представьте их в виде суперпозиции сложения и усеченной разности: а) $|x - y|$; б) $\min(x,y)$; в) $\max(x,y)$.

114. Докажите, что следующие булевы функции примитивно рекурсивны, выражая их через числовые функции, которые на числовом двухэлементном множестве $\{0,1\}$ ведут себя как указанные булевы функции: а) отрицание $\neg x$; б) конъюнкция $x \wedge y$; в) дизъюнкция $x \vee y$; г) все булевы функции.

115. Докажите, что следующие функции являются частично рекурсивными, но не общерекурсивными: а) $x - y = \mu z[y + z = x]$;

б) $x/y = \mu z[y \cdot z = x]$; в) $\sqrt{x} = \mu y[y^2 = x]$; г) $\log_a x = \mu y[a^y = x]$.

116. Постройте с помощью оператора минимизации аналоги функций из предыдущей задачи, которые являются уже общерекурсивными.

2.4. Нормальные алгоритмы Маркова[2]

Прежде всего введем несколько необходимых нам понятий. ***Алфавит*** — любое непустое множество символов. ***Буквы*** — элементы алфавита. ***Слова*** — любые последовательности букв алфавита. ***Пустое слово*** — слово, не имеющее в своем составе ни одной буквы. Обозначается через Λ. Слова будем обозначать греческими буквами. Если слово α входит в слово β, то α называется ***подсловом*** слова β.

Пример 2.7. Подсловами слова «параграф» будут слова «пара», «граф», «ра» и т. д.

Подстановкой называется выражение вида $\alpha \to \beta$, где α, β — слова данного алфавита, а знак «$\to$» не входят в алфавит. Если слово α входит в

[2] А. А. Марков (младший) (1903–1979) — советский математик.

слово γ, т. е. $\gamma = \alpha_1\alpha\alpha_2$, где α_1, α_2 — некоторые слова (может быть, пустые), причем α_1 не содержит α, то результатом применения подстановки $\alpha \to \beta$ к слову γ будет слово, которое получается из γ заменой первого вхождения в него α на слово β:

$$\alpha_1\alpha\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1\beta\alpha_2.$$

Если α не входит в γ, то говорят, что подстановка ***не применима*** к γ (Подстановка $\Lambda \to \beta$ применима к любым словам.)

Пример 2.8. В следующей таблице приведены примеры подстановок:

Начальное слово	Подстановка	Результат
138578926	$85789 \to 00$	130026
тарарам	ара $\to \Lambda$	трам
корт	ор $\to$ ро	крот
стук	$\Lambda \to$ гал	галстук
книга	$\Lambda \to \Lambda$	книга
поляна	пор $\to$ т	неприменима

Схемой нормального алгоритма $\mathbb{A}$ в алфавите A называется упорядоченная последовательность подстановок:

$$\alpha_1 \to \beta_1, \quad \alpha_2 \to \beta_2, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \alpha_n \to \beta_n, \tag{2.2}$$

где все α_i, β_i — слова в алфавите A. Среди подстановок схемы могут присутствовать так называемые ***заключительные*** подстановки. Чтобы отличить от обычных подстановок, их обозначают $\alpha \to .\beta$, причем предполагается, что символ «.» не входит в алфавит A.

Процесс применения нормального алгоритма $\mathbb{A}$ к слову γ заключается в следующем:

1) В схеме алгоритма (2.2) ищем первую подстановку, применимую к γ, и применяем ее — получаем слово γ_1;

2) Если подстановка была при этом заключительной, то процесс на этом заканчивается и считается, что алгоритм $\mathbb{A}$ перерабатывает слово γ в слово γ_1: $\mathbb{A}(\gamma) = \gamma_1$;

3) Если ни одна из подстановок неприменима, то процесс также заканчивается и считается, что алгоритм $\mathbb{A}$ перерабытывает слово γ в само себя: $\mathbb{A}(\gamma) = \gamma$;

4) Если же на первом шаге применялась обычная подстановка, то ищем в схеме первую подстановку, применимую к γ_1, и применяем ее — получаем слово γ_2 и т. д.

В результате возможны два случая:

1) процесс на n-м шаге оборвется, тогда считается, что алгоритм перерабатывает слово γ в слово γ_n ($\mathbb{A}(\gamma) = \gamma_n$);

2) процесс никогда не оборвется, тогда считаем, что алгоритм не действует на слово γ.

Пример 2.9. Пусть в алфавите $\{0,1,2\}$ нормальный алгоритм $\mathbb{A}$ задается схемой:

$$20 \to 02, \quad 21 \to 12, \quad 2 \to .110 \quad \Lambda \to 2.$$

Посмотрим, в какое слово перерабатывает алгоритм $\mathbb{A}$ слово $\alpha = 1010$:

$$1010 \Rightarrow 21010 \Rightarrow 12010 \Rightarrow 10210 \Rightarrow 10120 \Rightarrow 10102 \Rightarrow 1010110,$$

т. е. $\mathbb{A}(1010) = 1010110 = \alpha 110$. Вообще нетрудно видеть, что для любого слова α в алфавите $\{0,1\}$ данный алгоритм действует следующим образом: $\alpha \Rightarrow 2\alpha \Rightarrow \alpha 2 \Rightarrow \alpha 110$.

Функция f, заданная на некотором множестве слов алфавита A, называется ***нормально вычислимой***, если найдется такой нормальный алгоритм $\mathbb{A}$, что для каждого слова α из области определения f выполняется условие $\mathbb{A}(\alpha) = f(\alpha)$.

Пример 2.10. Пусть, например, функция f задана в алфавите $\{0,1\}$ и каждому слову α этого алфавита ставит в соответствие слово $\alpha 110$. Тогда f — нормально вычислима. Соответствующий нормальный алгоритм приведен в примере 2.9.

Пример 2.11. Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{N}$. Эта функция прибавляет к каждому натуральному числу единицу. Если перейти к унарной системе счисления (системе, в которой для записи чисел используются только единицы), то данную функцию можно рассматривать как функцию слов

$$f(\underbrace{11\ldots1}_{x}) = \underbrace{11\ldots1}_{x+1}$$

в алфавите $A = \{1\}$. Эта функция является нормально вычислимой. Соответствующий нормальный алгоритм имеет вид: $\Lambda \to .1$ (к каждому слову вида $11\ldots1$ он добавляет слева 1).

Задачи для самостоятельного решения

117. Нормальный алгоритм в алфавите $A = \{a, b, 1\}$ задается схемой: $a \to 1$, $b \to 1$, $11 \to \Lambda$. Примените его к слову: а) $ababaa$; б) $bababbaa$; в) aaa; г) $aabbb11$; д) $11aab$; е) $111aab1$.

118. Нормальный алгоритм в алфавите $A = \{a, b\}$ задается схемой: $ba \to ab$, $ab \to \Lambda$. Примените его к слову: а) $babaaa$; б) $aabbaab$; в) $abaabb$; г) $bbbb$; д) $aabbbaa$; е) $aabaa$. Выявите закономерность в работе алгоритма.

119. Нормальный алгоритм в алфавите $A = \{a, b\}$ задается схемой: $ab \to a$, $b \to .\Lambda$, $a \to b$. Примените его к словам: а) $bbaab$; б) $aabbbaa$; в) $bababab$; г) $aaaa$; д) $bbbbb$; е) $aabaabb$.

120. Примените к словам из задачи **119** нормальный алгоритм в алфавите $A = \{a, b\}$ со схемой: $ba \to a$, $bb \to b$, $ab \to \Lambda$, $\Lambda \to .b$.

121. Нормальный алгоритм в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$ задается схемой: $ad \to .dc$, $ba \to \Lambda$, $a \to bc$, $bc \to bba$, $\Lambda \to a$. Примените его к следующим словам: а) dcb; б) dbc; в) bcd; г) cdb; д) $dacb$; е) $dabc$.

122. Построить нормальный алгоритм Маркова, который в любом слове в алфавите $A = \{a, b\}$ переносит все буквы a в начало слова.

123. Построить нормальный алгоритм Маркова для вычисления функции $f(x) = x - 1$ в унарной системе счисления.

124. Построить нормальный алгоритм Маркова для вычисления функции $f(x) = x - 1$ в десятичной системе счисления.

125. Построить нормальный алгоритм для вычисления функции $f(x) = 2x$ в унарной системе счисления.

126. Построить нормальный алгоритм Маркова для вычисления функции, определяющей, делится натуральное число на 3 или нет:

$$\phi_3(\underbrace{11\ldots1}_{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ делится на 3;} \\ \Lambda, & \text{если } x \text{ не делится на 3.} \end{cases}$$

127. Построить нормальный алгоритм для проверки четности числа, записанного в унарной системе счисления.

128. Построить нормальный алгоритм для проверки четности числа, записанного в десятичной системе счисления. Он должен возвращать 1, если число нечетное, и 0, если четное.

129. Построить нормальный алгоритм Маркова для перевода числа из двоичной системы в восьмеричную.

130. Построить нормальный алгоритм Маркова для перевода числа из восьмеричной системы в двоичную.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Высказывания: а), в), г), з), к).

2. Отрицания друг друга: б), г).

3. г) Рассмотрим простейшие высказывания A: «$\overline{a}$ коллинеарен с $\overline{b}$», B: «$\overline{a}$ коллинеарен с $\overline{c}$», C: «$\overline{b}$ коллинеарен с $\overline{c}$», D: «смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ равно 0». Тогда данное высказывание запишется в виде: $(A \vee B \vee C) \to D$.

4. а) $A \wedge B \wedge C$; б) $A \vee B \vee C$; в) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$; г) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$; д) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$; е) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$; ж) $\neg A \vee \neg B \vee C$.

5. Истинное: б), г), е).

8. е) Правая часть эквивалентности ложна только в случае, когда все P_i истинны, а G ложна. Но тогда ложной будет формула $P_m \to G$. Следовательно, ложной будет формула $P_{m-1} \to (P_m \to G)$. Продолжая подобным образом, получаем, что ложной будет вся левая часть эквивалентности. В обратную сторону, предположим, что ложной является левая часть эквивалентности. Это возможно только в случае, когда P_1 истинна, а $P_2 \to (\ldots(P_m \to G))$ ложна. Последнее означает, что P_2 истинна, а $P_3 \to (\ldots(P_m \to G))$ ложна. Продолжая подобным образом, получаем, что все P_i истинны, а G ложна. Это означает, что правая часть эквивалентности тоже ложна. Таким образом, формулы по обе стороны эквивалентности всегда имеют одинаковые логические значения. Следовательно, эквивалентность является тавтологией.

9. а) Если $\vDash F \wedge G$, то по определению конъюнкции это означает, что $\vDash F$ и $\vDash G$. Так как F всегда истинна и по условию $F \leftrightarrow H$ всегда истинна, то, следовательно, H всегда истинна, т. е. $\vDash H$. Так как G и H всегда истинны, то $\vDash G \to H$.

10. а) 1; б) $P \vee Q$; в) $P \wedge Q$; г) $\neg P \wedge \neg R$; д) $P \vee (Q \wedge R)$; е) 1; ж) $P \wedge Q \wedge \neg R$; з) $P \vee Q$; и) $\neg P \vee \neg Q$; к) $\neg P \vee \neg Q$; л) $P \wedge Q$.

13. а) Если последовательность не ограничена, то она не сходится; е) Если целое число не делится на 3 или не делится на 2, то оно не делится на 6.

14. а) Сформулируем контрапозицию: «Если m или n четные числа, то их произведение $m \cdot n$ четно». Ее истинность очевидна. Поэтому истинным будет и исходное утверждение; б) Докажем контрапозицию: «Если t — рациональное число, то $2t/(t^2+1)$ — рационально». Если t — рационально (т. е. его можно представить в виде дроби $t = \frac{m}{n}$, где m, n — целые), то $2t = \frac{m}{n}$ и $t^2 + 1 = \frac{m^2}{n^2} + 1 = \frac{m^2+n^2}{n^2}$ тоже рациональные. Следовательно, их отношение $\frac{2t}{(t^2+1)} = \frac{mn}{m^2+n^2}$— это тоже дробь, т. е рациональное число. Контрапозиция доказана, значит, и исходное утверждение верно.

15. Истинны: б), г), ж).

16. Первое — да, второе — нет. *Указание.* Составить логическую структуру теоремы и утверждений, разбив их на более простые высказывания. Проверить логические структуры теоремы и утверждений на эквивалентность.

17. а) СДНФ: $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$; б) СКНФ: $(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z)$; в) СКНФ: $X \vee \neg Y \vee \neg Z$; г) СКНФ: $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$; д) СКНФ: $(\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$; е) СДНФ: $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$.

19. а) СДНФ: $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y)$; б) СДНФ: $(\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$; в) СКНФ: $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)$; г) СДНФ: $X \wedge Y \wedge Z$; д) СДНФ: $(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$; е) СКНФ: $X \vee Y \vee Z$.

22. Справедливы: а), б), д), е).

25. а) $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \to Y$, $Y \to X$, $X \leftrightarrow Y$, X, Y; б) $\neg X \wedge \neg Y$, $Y \to X$, $X \to Y$, $\neg X \vee \neg Y$, $\neg X$, $\neg Y$, $X \leftrightarrow Y$; в) $X \vee Y \vee Z$, $X \vee Y \vee \neg Z$, $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, $X \vee Y$, $(\neg X \leftrightarrow Y) \vee Z$, $(X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$, $((X \wedge Y) \to Z) \wedge (X \vee Y)$, г) $X \vee \neg Y \vee Z$, $X \vee \neg Y \vee \neg Z$, $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, $Y \to X$, $Y \to Z$, $\neg Y \vee (X \leftrightarrow Z)$, $((X \wedge Y) \to Z) \wedge (Y \to X)$.

26. а) $\neg X$, $\neg Y$, $\neg X \leftrightarrow Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$; б) $\neg X$, Y, $X \leftrightarrow Y$, $X \wedge Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$; в) таких нет; г) $X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$; д) $X \wedge \neg Y$, $X \wedge Y$.

27. а) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$, $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$; б) $X \wedge Y \wedge Z$, $X \wedge Y \wedge \neg Z$; в) $X \wedge Y \wedge \neg Z$, $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$; г) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$, $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$.

28. Первое — да, второе — нет. *Указание.* Составить логическую структуру теоремы и утверждений, разбив их на более простые высказывания. Проверить, являются ли утверждения логическими следованиями теоремы.

29. а), в).

30. Правильные: б), в), г), д), е).

32. а) $\neg x \to \neg y$; б) $\neg(x \to \neg y)$; в) $\neg((x \to y) \to \neg(y \to x))$; г) $(x \to y) \to \neg(y \to x)$; д) $x \to \neg y$; е) $\neg(\neg x \to y)$.

33. а) $1 + x + y$; б) $1 + x + y + x \wedge y$; в) $y + z + x \wedge y + x \wedge z$; г) $1 + x + y + y \wedge z$; д) $1 + x + y + z + x \wedge y + x \wedge z + x \wedge y \wedge z$; е) $x + z + y \wedge z + x \wedge y \wedge z$; ж) $1 + x \wedge z + x \wedge y \wedge z$; з) $1 + z + x \wedge y + x \wedge z$; и) $1 + x + x \wedge y + y \wedge z$; к) $x + y + z$; л) $1 + x + z$.

34. Самодвойственны: а), б), г), д).

36. Монотонные: а), в), д), е), ж).

39. Полные системы: а), б), д), е), ж), з), м).

42. Булева функция: $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ (x, y — выключатели).

43. Булева функция: $[\neg x \wedge ((\neg y \wedge z) \vee (y \wedge \neg z))] \vee [x \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee (y \wedge z))]$.

44. Булева функция: $(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z)$.

45. Рассмотрите сначала аналогичную задачу для двух входов.

48. У этой схемы будет четыре входа, которые можно обозначить, как mn, где m — номер двоичного числа (1 или 2), а n — номер разряда в числе (тоже 1 или 2). При произведении двух двузначных чисел может, максимум, получиться четырехзначное число. Поэтому надо рассмотреть четыре выхода. Для удобства можно построить схему для каждого выхода отдельно.

49. а) Аксиома $A2$, если в качестве F взять саму F, в качестве G взять $F \to F$, а в качестве H взять F; б) $A1$; в) $A3$; д) $A3$; е) $A1$; ж) $A3$; з) $A1$; и) $A2$.

50. а) $W = F \to (G \to (H \to F))$; б) $W = (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$; в) $W = \neg G \to \neg G$; г) $W = (F \to G) \to (H \to (F \to G))$; д) $W = F \to G$; е) $W = \neg F \to \neg G$; ж) $W = (G \to F) \to ((G \to \neg F) \to (G \to F))$; з) $W = G \to (\neg F \to F)$; и) $W = G$.

51. Выводы из аксиом: а), в), г), д), е).

52. а) Используйте доказанную в примерах теорему $F \to F$; б) Воспользуйтесь аксиомой $A1$; в) Воспользуйтесь аксиомой $A3$; д) Несколько раз воспользоваться аксиомами $A1$ и $A2$.

53. а) Вывод из гипотез $G \to H$ и G; б) Вывод из формул (1), (2) и (3); в) Вывод из гипотез $F \to (F \to G)$ и $F \to F$; г) Вывод из гипотез $F \to (G \to H)$ и G; д) Вывод из гипотез $\neg G \to \neg F$ и F.

56. Истинные: а), в), д), е), ж), и), л).

60. Например, $P(x, y)$: «Город y является столицей страны x». Тогда формула $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$ «Существует город, который является столицей любой страны» — ложное высказывание, а $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ «У любой страны есть город, который является ее столицей» — истинное высказывание. Если логические значения формул $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$ и $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ хотя бы в одной интерпретации разные, то эквивалентности между ними быть не может.

61. а) Высказывание: $(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y)) \to x = y)$; в) высказывание: $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y))$.

62. в) На множестве животных введем предикаты $Z(x)$: «x — змея» и $Y(x)$: «x — ядовито». Тогда высказывание можно записать в виде: $(\exists x)(Z(x) \wedge Y(x))$; и) Введем на множестве натуральных чисел предикаты $A(x)$: «x — четное число», $B(x)$: «x — простое число», $C(x)$: «$x \geq 4$», $D(x, y)$: «x=y» и функцию $f(x, y) = x + y$. Тогда гипотезу Гольдбаха можно записать в виде: $(\forall x)((A(x) \wedge C(x)) \to ((\exists y)(\exists z)(B(y) \wedge B(z) \wedge D(x, f(y, z)))))$.

63. а) «Существует число, которое четно или которое делится на 6» — истинное высказывание; б) «Существует число, которое меньше 5 и больше 6» — ложное высказывание.

64. а) $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)) \cong (\forall x)(P(x)) \to (\forall y)(Q(y)) \cong (\exists x)(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \cong (\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \vee Q(y))$. Так как переменные связанные, то их обозначение можно менять на любое другое. В предикате

Q мы заменили переменную x на y, чтобы не было повторения с предикатом P. Далее применили законы действия кванторов на импликацию. В конце выразили импликацию через отрицание и дизъюнкцию; г) $P(y) \to \neg((\forall x)(Q(x,y)) \to P(y)) \cong P(y) \to \neg(\exists x)((Q(x,y)) \to P(y)) \cong P(y) \to (\forall x)\neg((Q(x,y)) \to P(y)) \cong (\forall x)(P(y) \to \neg((Q(x,y)) \to P(y))) \cong (\forall x)(P(y) \to ((Q(x,y)) \wedge \neg P(y))) \cong (\forall x)(\neg P(y) \vee ((Q(x,y)) \wedge \neg P(y)))$.

65. Введем на множестве людей одноместные предикаты $B(x)$:«x боится волков» и $Л(x)$:«x ходит в лес». Тогда пословицу можно записать в виде $(\forall x)(B(x) \to \neg Л(x))$, т. е. «Для любого человека верно, что если он боится волков, то не ходит в лес». С помощью ограниченных кванторов пословицу можно записать в виде $(\forall B(x))(\neg Л(x))$ «Любой человек, боящийся волков, не ходит в лес». С помощью закона де Моргана можно записать еще один вариант: $\neg(\exists B(x))(Л(x))$ «Не существует человека, боящегося волков, который ходит в лес».

66. Первую часть афоризма формально можно записать как $\neg(\exists x)(\neg(\exists y)(P(y,x)))$ или, применяя равносильные преобразования, в виде: $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$ «Для любой вещи найдется вещь, которая больше ее». Вторая часть формально записывается как: $\neg(\exists x)(\neg(\exists y)P(x,y))$ или после равносильных преобразований в виде: $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ «Для любой вещи найдется вещь такая, что первая больше второй».

67. а) Функция $f(x)$, заданная на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, называется *четной*, если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$. На языке логики предикатов это запишется следующим образом: $(\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = f(x))$; б) Функция $f(x)$ называется переодической, если существует число положительное число T такое, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(x+T) = f(x)$. Через предикаты это запишется следующим образом: $(\exists T > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+T) = f(x))$; в) Функция $f(x)$ называется возрастающей, если для любых x_1, x_2 выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. на языке предикатов $(\forall x_1, x_2)(f(x_1) < f(x_2)$; г) Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует положительное число $M > 0$ такое, что $|a_n| \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. На языке предикатов это запишеться так: $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq M)$; д) Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ ($a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется $|f(x) - a| < \varepsilon$. Через предикаты это запишется так: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta) \to |f(x) - a| < \varepsilon)$.

68. а) $\neg(\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = f(x)) \cong (\exists x \in \mathbb{R})\neg(f(-x) = f(x)) \cong (\exists x \in \mathbb{R})(f(-x) \neq f(x))$, т. е. функция не является четной, если найдется такой $x \in \mathbb{R}$, что $f(-x) \neq f(x)$; б) $\neg(\exists T > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+T) = f(x)) \cong (\forall T > 0)\neg(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+T) = f(x)) \cong (\forall T > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\neg(f(x+T) = f(x)) \cong (\forall T > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(f(x+T) \neq f(x))$, т. е. для любого числа $T > 0$ найдется $x \in \mathbb{R}$ такой, что $f(x+T) \neq f(x)$; в) $\neg(\forall x_1, x_2)(f(x_1) < f(x_2) \cong (\exists x_1, x_2)\neg(f(x_1) < f(x_2) \cong (\exists x_1, x_2)(f(x_1) \geq f(x_2)$, т. е. найдутся x_1, x_2 такие, что $f(x_1) \geq f(x_2)$; г) $\neg(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq M) \cong (\forall M > 0)\neg(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq M) \cong (\forall M > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\neg(|a_n| \leq M) \cong (\forall M > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(|a_n| > M)$, т. е. для любого положительного числа $M > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|a_n| > M$; д) $\neg(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)((|x-x_0| < \delta) \to (|f(x)-a| < \varepsilon)) \cong (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\neg((|x-x_0| < \delta) \to (|f(x)-a| < \varepsilon)) \cong (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\neg(\neg(|x-x_0| < \delta) \vee (|f(x)-a| < \varepsilon)) \cong (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)((|x-x_0| < \delta) \wedge (|f(x)-a| \geq \varepsilon))$, т. е. существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого числа $\delta > 0$ найдется x такое, что $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - a| \geq \varepsilon$.

69. Правильными рассуждениями являются: а), б) (силлогизм Barbara), д) (силлогизм Darii), е) (силлогизм Camestres), з).

70. а) Да; б) Нет.

71. Рассуждение логически верно. *Указание.* Рассмотрим высказывания: A — «она узнала», B — «она спросила», C — «он сказал ей». Тогда схема рассуждения будет иметь вид: $\neg C \to \neg A$, $\neg B \to \neg C$, $A \vDash B$.

72. Вывод не является логически верным. *Указание.* Рассмотрим высказывания: A — «я трус (т. е. не настоящий мужчина)», B — «я играю в хоккей». Схема рассуждения имеет вид: $B \to \neg A$, $A \to \neg B$, $\neg B \vDash A$.

73. $(\forall x)(\forall z)P(x, f(x), z, g(x, z))$.

74. $(\forall x)(\forall z)Q(x, c, z)$, где c — некоторая константа.

76. *Указание.* Рассмотреть на множестве S всех существ предикаты $P(x)$: «x — человек» и $Q(x)$: «x — смертен». Кащей — конкретный элемент из S.

77. *Указание.* Рассмотрим предикаты $\mathrm{T}(x)$: «x торгует сепульками», $\Pi(x)$: «x покупает сепульки», $\Gamma(x)$: «x — глупый человек». Тогда схема рассуждения имеет вид: $\neg(\exists x)(\mathrm{T}(x) \wedge \Pi(x))$, $(\exists x)(\Pi(x) \wedge \Gamma(x)) \vDash (\exists x)(\Gamma(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x))$.

78. Факты: `столица(Москва,Россия)`, `столица(Рим,Италия)` и т. д. Вопросы: `?столица(X,Германия)`, `?столица(Хельсинки,X)`.

79. Запрос `?B(X)` на языке предикатов запишется как $\neg B(X)$. Он резольвирует со (2)-й командой, которая в переводе на язык предикатов представляет собой дизъюнкт $\neg C(X,Y) \vee B(X)$. В результате получаем резольвенту $\neg C(X,Y)$. Она, в свою очередь, после подстановки $\{X/b, Y/a\}$ резольвирует с командой (3). Получаем резольвенту $\neg A(a,b)$, которая вместе с командой (1) дает пустую резольвенту $\square$. Вычисление успешно завершается и ПРОЛОГ выдает ответ $X = b$. После этого ПРОЛОГ освобождает переменные X и Y от ранее полученных значений, совершает «откат» назад, пытаясь прорезольвировать подцель $\neg C(X,Y)$ другим способом. Она резольвирует также с формулой (4), которая на языке предикатов запишется как $\neg A(X,Y) \vee C(X,Y)$. В результате получаем резольвенту $\neg A(X,Y)$. После подстановки $\{X/a, Y/b\}$ она унифицируется с (1)-й формулой и дает пустую резольвенту $\square$. ПРОЛОГ выдает еще один ответ $X = a$.

81. Программа: (1) `potomok(X,Y):-dedushka(X,Y).` (2) `lubit(X,Y):-potomok(X,Y).` (3) `deduska(X,Z):-dedushka(X,Y),brat(Y,Z).` (4) `brat(B,C).` (5) `dedushka(A,B).` Вопрос: (6) `?lubit(A,C).` Прокрутка: $\neg lubit(A,C)$ с помощью подстановки $\{X/A, Y/C\}$ унифицируется с (2). В результате получаем резольвенту $\neg potomok(A,C)$. Она с помощью аналогичной подстановки $\{X/A, Y/C\}$ унифицируется с (1). Получаем резольвенту $\neg dedushka(A,C)$. После подстановки $\{X/A, Z/C\}$ она унифицируется с (3) и дает резольвенту $\neg dedushka$ $(A,Y) \vee \neg brat(Y,C)$. Последняя формула после подстановки Y/B унифицируется с (4) и дает резольвенту $\neg dedushka(A,B)$. А эта формула вместе с (5) дают пустую резольвенту $\square$, что означает положительный ответ на вопрос.

82. Против мистера МакГрегора, т. к. его показания противоречивы.

83. Только против B.

84. Точно виновен D.

85. 3-й, если на первых двух колпаки одного цвета, и всегда 2-й.

86. B — лжец, а C — рыцарь.

87. A — рыцарь, B — лжец.

88. А и В — рыцари.

89. А и С — лжецы, а В — рыцарь.

90. А — лжец, В — нормальный человек, С — рыцарь.

91. Он может, например, спросить: «Верно ли, что Вы — рыцарь и дорога, идущая налево, ведет в столицу или Вы — лжец и дорога, идущая направо, ведет в столицу?»

92. а) Пустая лента; б) $q_0 1$; ж) $11a_0a_0a_0a_0q_0 1$.

93. а) $111111q_0a_0$.

94. а) $1q_0a_0$; б) пустая лента; в) $111q_0a_0$.

96. *Указание.* Можно поочередно справа и слева от звездочки заменять единицы на некоторый символ α до тех пор пока с одной стороны не останется единиц. Затем с той стороны, с которой единицы остались, произвести обратную замену α на 1.

97. *Указание.* В качестве алфавита возмите цифры десятичной системы и пустой символ: $A = \{a_0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.

105. Ц=ВБ$^-$В.

106. К$_2$ = Б$^-$ВБ$^+$Б$^+$ГВГБ$^+$.

107. *Указание.* Надо построить машину с алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, которая работает следующим образом: $q_1 1^x \Rightarrow q_0 a_0$.

108. б) *Указание.* Машина должна выполнить работу: $q_1 1^{x_1} 0 1^{x_2} 0 1^{x_3} \Rightarrow q_0 1^{x_2}$.

109. а) *Указание.* $q_1 1^x 0 1^y \Rightarrow q_0 1^{x+y}$; е) *Указание.* См. задачу **94**.

110. а) $\phi(0) = n$, $\phi(x+1) = n = h(x, \phi(x))$, $h(x,y) = \underbrace{S(\ldots S(}_{n} O(I_1^2(x,y)))\ldots)$; б) $\phi(0) = n$, $\phi(x+1) = x + n + 1 = \underbrace{S(\ldots S(}_{n+1} I_1^2(x, \phi(x)))\ldots)$; в) $x \cdot 0 = 0 = O(x)$, $x(y+1) = xy + x = h(x, y, xy)$, где $h(x,y,z) = I_1^3(x,y,z) + I_3^3(x,y,z)$.

112. а) $0! = 1$, $(x+1)! = x!(x+1) = h(x, x!)$, где $h(x,y) = S(I_1^2(x,y)) \cdot I_2^2(x,y)$; б) $x^0 = 1 = S(O(x))$, $x^{y+1} = x^y \cdot x = h(x,y,x^y)$, где $h(x,y,z) = I_1^3(x,y,z) \cdot I_3^3(x,y,z)$; в) $sg(0) = 0$, $sg(x+1) = 1 = h(x, sg(x))$, где $h(x,y) = S(O(I_1^2(x,y)))$; г) $\overline{sg}(0) = 1$, $\overline{sg}(x+1) = 0 = O(I_1^2(x, \overline{sg}(x)))$; д) $0 \dot{-} 1 = 0$, $(x+1) \dot{-} 1 = x = I_1^2(x, x \dot{-} 1)$; е) $x \dot{-} 0 = x = I_1^1(x)$, $x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = I_3^3(x, y, x \dot{-} y) \dot{-} 1$.

113. а) $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$; б) $\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$; в) $\max(x,y) = y + (x \dot{-} y)$.

114. а) $\neg x = 1 \dot{-} x$; б) $x \wedge y = \min(x,y)$; в) $x \vee y = \max(x,y)$; г) система булевых функций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ является полной и все остальные булевы функции выражаются через их суперпозицию.

115. Надо воспользоваться определением частично рекурсивной функции и указать значения аргументов, при которых функция не определена: а) $x - y = \mu z[I_2^3(x,y,z) + I_3^3(x,y,z) = I_1^3(x,y,z)]$, функция не определена при $y > x$.

116. а) $[x - y] = \mu z[y + z \geq x] = \mu z[y + z + 1 > x]$.

117. а) 111111; г) 1.

118. а) aa; е) aaa.

119. а) baa; б) aaa; в) aaa; г) aaa; д) $bbbb$; е) aaa.

120. а) ba; б) $baaaa$; в) baa; г) $baaaa$; д) bb; е) $baaa$.

121. а) $dccb$; б) dcb; в) $bbdc$; г) $bbdcb$.

122. $ba \to ab$, $a \to .a$, $b \to .b$.

123. $1 \to .\Lambda$.

124. Алгоритм с алфавитом $A = \{0, 1, \ldots, 9, a, b\}$ имеет вид: $a1 \to 1a$, …, $a9 \to 9a$, $a0 \to 0a$, $1a \to .0$, …, $9a \to .8$, $0a \to b9$, $1b \to .0$, …, $9b \to .8$, $0b \to b9$, $\Lambda \to a$. Вот его работа на примере числа 110: $110 \Rightarrow a110 \Rightarrow 1a10 \Rightarrow 11a0 \Rightarrow 110a \Rightarrow 11b9 \Rightarrow 109$.

125. Алгоритм должен от слова $\underbrace{1\ldots1}_{x}$ перейти к слову $\underbrace{1\ldots1}_{2x}$. Его схема в алфавите $A = \{1, a\}$ имеет вид: $1a1 \to 111a$, $a1 \to 1a$, $1a \to .11$, $\Lambda \to a$.

126. Схема алгоритма имеет вид: $111 \to \Lambda$, $11 \to .\Lambda$, $1 \to .\Lambda$, $\Lambda \to .1$. Он работает по такому принципу: пока число букв 1 в слове не меньше 3, он использует первую подстановку и «стирает» последовательно по 3 единицы; если число букв меньше 3, но больше 0, то заключительно с помощью 2-й и 3-й подстановок стираются оставшиеся единицы; в случае если слово пусто, оно заключительно переводится в слово 1: $11111 \Rightarrow 11 \Rightarrow \Lambda$; $111111 \Rightarrow 111 \Rightarrow \Lambda \Rightarrow 1$.

128. Схема алгоритма имеет вид: $a0 \to 0a$, $a1 \to 1a$, $\ldots$, $a9 \to 9a$, $0a \to b0$, $2a \to b0$, $4a \to b0$, $6a \to b0$, $8a \to b0$, $1a \to b1$, $3a \to b1$, $5a \to b1$, $7a \to b1$, $9a \to b1$, $0b \to b$, $1b \to b$, $\ldots$, $9b \to b$, $b \to .\Lambda$, $\Lambda \to a$. Вот его работа на примере числа 18: $18 \Rightarrow a18 \Rightarrow 1a8 \Rightarrow 18a \Rightarrow 1b0 \Rightarrow b0 \Rightarrow 0$.

129. При переводе двоичного числа в восьмеричную систему надо разбить его запись на тройки, начиная с конца, затем каждую тройку, рассматриваемую как двоичное число, заменить ее десятичной записью. Соответствующий нормальный алгоритм с алфавитом $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b\}$ имеет вид: $a1 \to 1a$, $a0 \to 0a$, $a \to b$, $000b \to b0$, $001b \to b1$, $010b \to b2$, $011b \to b3$, $100b \to b4$, $101b \to b5$, $110b \to b6$, $111b \to b7$, $10b \to .2$, $11b \to .3$, $1b \to .1$, $b \to .\Lambda$, $\Lambda \to a$. Например, при переводе числа 1001_2 алгоритм работает следующим образом: $1001_2 \Rightarrow a1001 \Rightarrow 1a001 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 1001a \Rightarrow 1001b \Rightarrow 1b1 \Rightarrow 11_8$.

Библиографический список

Основная литература

1. **Гуц, А. К.** Математическая логика и теория алгоритмов [Текст] / А. К. Гуц. — М. : Либроком, 2009.
2. **Игошин, В. И.** Математическая логика и теория алгоритмов [Текст] / В. И. Игошин. — М. : ACADEMIA, 2004.
3. **Игошин, В. И.** Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов [Текст] / В. И. Игошин. — М. : ACADEMIA, 2005.
4. **Карпов, Ю. Г.** Теория автоматов [Текст] / Ю. Г. Карпов. — СПб. : Питер, 2003.
5. **Матрос, Д. Ш.** Теория алгоритмов [Текст] / Д. Ш. Матрос, Г. Б. Поднебесова. — М.: Бином, 2008.

Дополнительная литература

1. **Ашихмин, А. С.** Цифровая схемотехника. Современный подход [Текст] / А. С. Ашихмин. — М. : ТехБук, 2007.
2. **Зюльков, В. М.** Математическая логика и теория алгоритмов [Текст] / В. М. Зюльков, А. А. Шелупанов. — М. : Горячая линия - Телеком, 2007.
3. **Мендельсон, Э.** Введение в математическую логику [Текст] / Э. Мендельсон. — М. : Либроком, 2010.
4. **Метакидес, Г.** Принципы логики и логического программирования [Текст] / Г. Метакидес, А. Нероуд. — М. : Факториал, 1998.
5. **Никифоров, А. Л.** Книга по логике [Текст] / А. Л. Никифоров. — М. : Гнозис, 1995.
6. **Смаллиан, Р.** Как же называется эта книга? [Текст] / Р. Смаллиан. — М. : Мир, 1981.
7. **Смаллиан, Р.** Принцесса или тигр? [Текст] / Р. Смаллиан. — М. : Мир, 1985.
8. **Шапиро, С. И.** Решение логических и игровых задач [Текст] / С. И. Шапиро. — М. : Радио и связь, 1984.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Составители **Ефимов** Дмитрий Борисович, **Полещиков** Сергей Михайлович

Сан.-эпид. заключение № 11.РЦ.09.953.П.000015.01.09.
Подписано в печать 20.04.12. Формат 60×90 1/16. Уч.-изд. л. 4,6. Усл. печ. л. 6,3.
Тираж 40. Заказ №

Сыктывкарский лесной институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова» (СЛИ)
167982, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 39, institut@sfi.komi.com, www.sli.komi.com

---

Редакционно-издательский отдел СЛИ.
Отпечатано в СЛИ.