ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Издательство
С.-Петербургского
университета

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

III. РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Учебное пособие

Под общей редакцией В. А. Волкова

Издательство С.-Петербургского университета
1997

УДК 517.2:(075.8)
ББК 22.16
З15

Авторы: Т. Н. Андрианова, В. А. Волков, Т. А. Ефимова, З. Д. Коломойцева, М. В. Павлова, А. А. Райнес, В. Г. Халин

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, проф. М. И. Башмаков (С.-Петербург. электротехн. ун-т), каф. мат. анализа Рос. гос. пед. ун-та (зав. каф. д-р физ.-мат.наук, проф. В. П. Одинец

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского университета

Задачник-практикум по высшей математике. Ч.III:
З15 **Ряды. Теория функций комплексного переменного. Ряды и интеграл Фурье**: Учеб. пособие / Т. Н. Андрианова, В. А. Волков, Т. А. Ефимова и др.; Под ред. В. А. Волкова — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1997. — 268 с.
ISBN 5-288-01560-0 (Ч. III)
ISBN 5-288-01414-0

Пособие является продолжением изданных ранее Издательством С.-Петербургского университета "Задачников-практикумов по высшей математике". Оно включает в себя задачи с решениями по теории рядов и теории функций комплексного переменного. Каждому параграфу предшествуют основные теоретические положения и методические указания для решения типовых задач. Задачи для самостоятельного решения снабжены ответами и необходимыми указаниями.

Книга предназначена для студентов вечерних и заочных отделений университетов, а также технических и педагогических вузов.

Библиогр. 21 назв. Ил. 41.

Тем.план 1996, № 73 ББК 22.16

ISBN 5-288-01560-0 (Ч. III)
ISBN 5-288-01414-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

При определении содержания "Задачника-практикума" за основу были приняты программы по высшей математике для химического факультета и специальности "Геофизика" геологического факультета Санкт-Петербургского университета как наиболее насыщенные.

Пособие состоит из трех разделов. Раздел I посвящен теории рядов. В первой главе рассматриваются решения задач, связанные с числовыми рядами, во второй — с функциональными. Здесь же впервые в отечественной литературе приведен ряд программ для ЭВМ по решению некоторых классов задач по суммированию рядов на языках Бейсик, Алгол-68 и Паскаль.

В разделе II, содержащем три главы, представлена теория функций комплексного переменного. Первая глава включает в себя задачи, связанные с понятием комплексного числа, функции комплексного переменного, ее производной, регулярностью и конформностью. Рассмотрены элементарные преобразования, степенные и показательные функции, ветви логарифма и $\sqrt[n]{z}$, функция Жуковского и тригонометрическая функция $w = \sin z$. Вторая глава посвящена интегралам и рядам, третья — вычетам и их приложениям.

Раздел III содержит две главы. В первой главе представлено разложение в тригонометрический ряд периодических и непериодических функций, во второй изучается интеграл Фурье и его использование для вычисления некоторых видов несобственных интегралов.

В начале каждого параграфа помещены основные определения, теоремы, формулы, краткие сведения из теории и методические рекомендации по решению задач. Далее приводятся подробные решения типовых задач с краткими пояснениями. В конце каждого параграфа содержатся задачи для самостоятельного решения со сквозной нумерацией для каждого раздела. Нумерация формул — сквозная в каждой главе. Ответы к задачам снабжены краткими указаниями к их решению.

"Задачник-практикум" составлен на основе опыта проведения практических занятий преподавателями кафедр высшей математики и математического анализа Санкт-Петербургского университета. Отличие его от подобных задачников состоит в том, что он содержит обширные методические рекомендации и варианты решения типовых задач. По разделу III "Теория функций комплексного переменного" этот задачник не имеет аналогов в учебных пособиях такого типа.

Настоящий "Задачник-практикум" предназначен для студентов нематематических факультетов университетов, технических и педагогических институтов и является пособием для самостоятельного овладения навыками и умениями решения задач математического анализа по указанным в нем темам в объеме действующих программ курсов высшей математики.

РАЗДЕЛ I. РЯДЫ

Глава 1. Числовые ряды

§1. Понятие числового ряда

Если $\{a_n\}$ — числовая последовательность, то символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

или, что то же самое, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *числовым рядом*.

Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются *членами ряда* и a_n — *общим членом ряда*.

Ряд (1) считается заданным, если известен его общий член a_n.

Сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

первых n членов ряда называется его *частичной суммой*.

Последовательность $\{S_n\}$ называется *последовательностью частичных сумм ряда* (1).

Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1) имеет конечный предел S, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — его *суммой*; в противном случае, т.е. когда этот предел не существует или бесконечен, ряд (1) называется *расходящимся*.

Ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

полученный из ряда (1) отбрасыванием n первых его членов, называется *остатком ряда* (1).

Необходимое и достаточное условие сходимости числового ряда (1) (*критерий Коши*) формулируется следующим образом:

для сходимости числового ряда (1) *необходимо и достаточно, чтобы для произвольного числа* $\varepsilon>0$ *неравенство* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$ *выполнялось, начиная с некоторого значения* n, *для любого натурального* m.

Из критерия Коши при $m = 1$ вытекает необходимый признак (но не достаточный) сходимости числового ряда (1):

если числовой ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Основная задача теории числовых рядов — установление сходимости или расходимости ряда — иногда может быть решена непосредственным отысканием $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или с помощью необходимого и достаточного признака сходимости (критерия Коши).

Пример 1. Используя определение (вычислением $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$), исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$, где α — заданное вещественное число; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$,

рассматривая пределы их частичных сумм.

Решение. 1) Для преобразования частичных сумм используем тождество $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$. Ряд сходится.

2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots$
$\ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) =$
$= +\infty$, следовательно, ряд расходится.

3) Отметим, что при $|q| \geq 1$ нарушается необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \cos n\alpha$ не существует, если $|q| \geq 1$.

Считая $|q| < 1$, составим частичную сумму S_n данного ряда:

$$S_n = q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + q^3\cos 3\alpha + \ldots + q^n\cos n\alpha$$

и умножим ее на $2\cos\alpha$. Тогда, принимая во внимание, что

$$2\cos k\alpha\cos\alpha = \cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha,$$

получаем уравнение относительно S_n:

$$\begin{aligned}
2S_n\cos\alpha &= q(\cos 2\alpha + 1) + q^2(\cos 3\alpha + \cos\alpha) + q^3(\cos 4\alpha + \\
&+ \cos 2\alpha) + \ldots + q^n\bigl(\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha\bigr) = \\
&= \bigl(q\cos 2\alpha + q^2\cos 3\alpha + q^3\cos 4\alpha + \ldots + q^n\cos(n+1)\alpha\bigr) + \\
&+ \bigl(q + q^2\cos\alpha + q^3\cos 2\alpha + \ldots + q^n\cos(n-1)\alpha\bigr) = \\
&= \frac{1}{q}\bigl(q^2\cos 2\alpha + q^3\cos 3\alpha + \ldots + q^{n+1}\cos(n+1)\alpha\bigr) + \\
&+ q\bigl(1 + q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^{n-1}\cos(n-1)\alpha\bigr) = \\
&= \frac{1}{q}\bigl(S_n - q\cos\alpha + q^{n+1}\cos(n+1)\alpha\bigr) + q(1 + S_n - q^n\cos n\alpha),
\end{aligned}$$

из которого следует, что

$$S_n = \frac{q\bigl(q^{n+1}\cos n\alpha - q^n\cos(n+1)\alpha - q + \cos\alpha\bigr)}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{q(\cos\alpha - q)}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^k\cos k\alpha = 0$ как произведение ограниченной функции на бесконечно малую, то ряд сходится.

Таким образом, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

4) Очевидно, что $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. Используя формулу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, имеем $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Полученные два результата позволяют предположить, что $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

Критерием истинности этого соотношения является соблюдение тождества для всех $n \geq 2$: $S_n - S_{n-1} = a_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &= \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} = \\
&= \operatorname{arctg}\frac{\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}}{1 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

в соответствии с формулой $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

Итак, формула $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ верна для всех n.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$, то ряд сходится.

Пример 2. Установить сходимость или расходимость рядов с помощью необходимого и достаточного критерия Коши или с помощью необходимого признака сходимости: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$.

Решение. 1) Составим сумму $\sigma_n^{(m)} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k$ для данного ряда:

$$\sigma_n^{(m)} = \sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k.$$

Очевидно, что $\left|\sigma_n^{(m)}\right|=\sigma_n^{(m)}$. Поскольку $\frac{k}{2k+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)<\frac{1}{2}$, то

$$\left|\sigma_n^{(m)}\right| < \sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right).$$

Используя формулу m членов суммы геометрической прогрессии

$$1+q+q^2+\ldots+q^{m-1} = \frac{1-q^m}{1-q},$$

получаем

$$\left|\sigma_n^{(m)}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

На основании определения предела числовой последовательности можно утверждать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N (зависящее лишь от ε!), что для всех $n > N$ выполняется неравенство $(1/2)^n < \varepsilon$. Для этих значений n получаем условие $\left|\sigma_n^{(m)}\right| < \varepsilon$ при любом натуральном m. Следовательно, ряд сходится.

2) Для данного ряда условие $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ не выполнено, ибо $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Значит, ряд расходится.

При исследовании сходимости рядов непосредственное отыскание предела частичных сумм или использование необходимого и достаточного признака сходимости (критерия Коши) часто связано с большими трудностями. Поэтому обычно используют тот или иной признак сходимости, дающий достаточные условия сходимости или расходимости ряда, которые изложены в следующем параграфе. Отметим, кроме того, следующие свойства рядов, которые могут оказаться полезными при исследовании их на сходимость:

1. Ряд и любой его остаток с точки зрения сходимости ведут себя одинаково.

2. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, где $\lambda = \text{const} \neq 0$, с точки зрения сходимости ведут себя одинаково, и суммы сходящихся рядов связаны равенством $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

• Исследовать на сходимость следующие ряды, отыскивая пределы их частичных сумм или пользуясь необходимым признаком сходимости:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, m — натуральное число. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$, $q = \text{const}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+2(-1)^n\right)$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$, q и α — постоянные. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}\,\sqrt{n^2+1}}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a+(n-1)d)q^{n-1}$, a, d, q — постоянные (арифметико-геометрическая прогрессия).
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ $(n \geq 3)$.

§2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Теоремы, перечисленные в этом параграфе, относятся к рядам (1), все члены которых неотрицательные.

Признак Д'Аламбера. Если начиная с некоторого номера n для членов ряда (1) выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, где q — постоянная величина, не зависящая от n, то ряд (1) сходится; если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то он расходится.

Предельная формулировка признака Д'Аламбера: если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то ряд (1) с неотрицательными членами сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши. Если начиная с некоторого номера n для членов ряда (1) выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, где q не зависит от n, то ряд (1) сходится; если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Предельная формулировка признака Коши: если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то ряд (1) с неотрицательными членами сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Раабе. Если начиная с некоторого номера n для членов ряда (1) выполняется неравенство $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$, где q не зависит от n, то ряд (1) сходится; если $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, то ряд расходится.

Предельная формулировка признака Раабе: если

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q,$$

то ряд (1) с неотрицательными членами сходится при $q > 1$ и расходится при $q < 1$; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак сравнения. Если для двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами начиная с некоторого номера n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то ряд с меньшими членами сходится, если сходится ряд с большими членами; если ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Предельная формулировка признака сравнения: если для двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q,$$

то при $q \neq 0$ оба ряда ведут себя одинаково, т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся; если $q = 0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Интегральный признак. Если члены ряда (1) удовлетворяют условиям $a_{n+1} \leq a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а непрерывная убывающая неотрицательная функция $f(x)$ такова, что при $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ ее значения равны соответствующим членам ряда (1) и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то ряд (1) и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Когда приходится исследовать на сходимость конкретный ряд, то естественно встает вопрос о том, каким из перечисленных признаков (а они не исчерпывают все известные признаки) воспользоваться. Полезно прежде всего проверить выполнение необходимого условия сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если оно нарушено, то ряд расходится. Если же оно выполнено, то для исследования сходимости следует обратиться к наиболее простым признакам — Д'Аламбера или Коши (выбор одного из них часто легко определяется видом общего члена a_n) в их наиболее простой форме — предельной, а затем, если это необходимо, в их общей форме (т.е. обратиться к установлению или проверке соответствующих неравенств). Отметим, что когда признак Д'Аламбера в предельной форме "не действует" (т.е. при $q = 1$), часто оказывается полезным обратиться к признаку Раабе (в предельной форме или нет). Если же признаки Д'Аламбера, Коши и Раабе не помогают, то полезно обратиться к признаку сравнения. Этим признаком удобно пользоваться, когда исследуемый ряд сравнивается с другим рядом, поведение которого с точки зрения сходимости известно либо который легче поддается исследованию. Интегральный признак позволяет получить набор стандартных рядов достаточно простого вида, удобных для исследования на сходимость ряда с помощью признака сравнения (см. пример 3).

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} \qquad (\lambda > 0). \tag{3}$$

Решение. Данный ряд удобно исследовать на сходимость с помощью интегрального признака. Действительно, общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, причем это стремление монотонно относительно n. В качестве функции $f(x)$ выберем функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$, которая удовлетворяет всем условиям, наложенным на нее в формулировке интегрального признака (она определена при $x \geq 1$, непрерывна, неотрицательна, монотонно убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$). Остается выяснить, сходится ли интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$.

Поскольку первообразная имеет вид

$$\int \frac{dx}{x^{\lambda}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}} & \text{при } \lambda \neq 1, \\ \ln x & \text{при } \lambda = 1, \end{cases}$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda-1} & \text{при } \lambda > 1, \\ +\infty & \text{при } \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Итак, ряд (3) сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leq 1$.

При исследовании числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость с помощью признака сравнения вид общего члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (ряда, с которым сравнивается данный ряд) иногда подсказывается структурой общего члена a_n исследуемого ряда.

Другой прием, позволяющий воспользоваться признаком сравнения, заключается в отыскании бесконечно малой α_n достаточно простого вида, эквивалентной a_n при $n \to \infty$. В силу признака сравнения соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1$ означает, что оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ либо сходятся, либо расходятся. Может оказаться, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ легче исследовать на сходимость, чем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В том частном случае, когда $\alpha_n = c/n^{\lambda}$, где $c = \text{const} \neq 0$, на основании примера 3 можно сразу заключить, что исследуемый ряд сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$.

Что касается интегрального признака сходимости, то его имеет смысл использовать тогда, когда вопрос о сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ решается просто путем отыскания первообразной, ибо в остальных случаях установить сходимость или расходимость интеграла есть задача, равносильная установлению сходимости или расходимости ряда, связанного с этим интегралом, поскольку теоремы, гарантирующие сходимость или расходимость интегралов, аналогичны соответствующим теоремам для рядов.

Пример 4. Исследовать на сходимость следующие ряды:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$; 2) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{5^2\cdot 7} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \frac{1}{5^3\cdot 7^2} + \ldots + \frac{1}{5^n\cdot 7^{n-1}} + {}$ $+ \frac{1}{5^n\cdot 7^n} + \frac{1}{5^{n+1}\cdot 7^n} + \ldots$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}$ $(\lambda > 0)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+\sqrt{n^2+1}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}$; 9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\lambda} n}$ $(\lambda > 0)$; 10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\lambda}}$ $(\lambda>0)$.

Решение. 1) По признаку Д'Аламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(2n+1)!!}{(2n+3)!!n!} = \frac{n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится

2) Отметим, что $a_{2k-1} = \frac{1}{5^k 7^{k-1}}$ и $a_{2k} = \frac{1}{5^k 7^k}$. Рассмотрим два способа решения.

Первый способ основан на применении признака Д'Аламбера.

Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/7, & \text{если } n \text{ — нечетное число } (n = 2k-1), \\ 1/5, & \text{если } n \text{ — четное число } (n = 2k). \end{cases}$$

Итак, при всех значениях n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{5} < 1$. Ряд сходится.

Второй способ основан на использовании признака Коши.

Поскольку

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{5^{\frac{k}{2k-1}} 7^{\frac{k-1}{2k-1}}}, & \text{если } n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{35}}, & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

то при любом n $\sqrt[n]{a_n} < 1/\sqrt{35} < 1$. Ряд сходится.

Замечание. Так как в данном случае предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то признак Д'Аламбера в предельной форме не применим. Признак Коши применим и в предельной форме, так как легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{35}}$.

3) Форма общего члена данного ряда наводит на мысль об использовании признака Коши.

Действительно,

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}} = e^{-1} < 1.$$

Ряд сходится. Решение возможно и с помощью признака Д'Аламбера, но в этом случае его использование было бы нерациональным.

4) Составив отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)(\lambda+n+1)n!} = \frac{n+1}{\lambda+n+1},$$

убеждаемся, что признак Д'Аламбера в данном случае не применим, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Обратимся к признаку Раабе:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\lambda + n + 1}{n+1} - 1\right) = \frac{n\lambda}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda.$$

Следовательно, при $\lambda > 1$ ряд сходится, а при $\lambda \le 1$ — расходится. (Если $\lambda = 1$, то $a_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, а ряд с таким общим членом расходится (см. пример 3).)

5) Продемонстрируем два способа решения.

П е р в ы й   с п о с о б. Для данного ряда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

следовательно, признак Д'Аламбера неэффективен.

Обратимся к признаку Раабе. Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2n+1}$, то $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$, так что ряд расходится.

В т о р о й   с п о с о б. Составив легко проверяемые неравенства

$$3^2 > 2\cdot 4, \quad 5^2 > 4\cdot 6, \ldots, (2n-1)^2 > (2n-2)2n,$$

перемножим их почленно:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2 > (2\cdot 4)(4\cdot 6)\ldots(2n-2)2n.$$

Полученное неравенство можно записать иначе:

$$((2n-1)!!)^2 > ((2n)!!)^2 \cdot \frac{1}{4n},$$

или

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ряд с общим членом $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ведет себя так же, как ряд с общим членом $\frac{1}{\sqrt{n}}$, т.е. расходится (см. пример 3). А тогда по признаку сравнения расходится и данный ряд.

6) Из оценки $\frac{1}{3^n+\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{3^n}$ и признака сравнения следует сходимость данного ряда, ибо $1/3^n$ есть общий член сходящейся геометрической прогрессии со знаменателем $1/3 < 1$.

7) Преобразование общего члена ряда $\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}} = \frac{1}{n^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}$ показывает, что он эквивалентен $\frac{1}{n^{5/2}}$ при $n \to \infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ сходится (см. пример 3). А тогда по признаку сравнения (в предельной форме) сходится и данный ряд.

8) Так как

$$\ln \frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1} = \ln\left(1+\frac{n^2-2n}{n^3+2n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2-2n}{n^3+2n+1} =$$

$$= \frac{1-\frac{2}{n}}{n\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

то общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{4/3}}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ (см. пример 3) и признака сравнения следует сходимость данного ряда.

9) Способ 1. Сравним общий член данного ряда с общим членом расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (см. пример 3). Для этого вначале рассмотрим функцию $f(x) = x^k - \ln x$ $(k > 0)$ и убедимся, что она остается положительной для достаточно больших значений x. Действительно, функция непрерывна при $x > 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^k\left(1 - \frac{\ln x}{x^k}\right) = +\infty$, ибо по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{kx^k} = 0$.

Итак, при достаточно больших значениях x функция $f(x)>0$, т.е. $x^k > \ln x$. Положив в этом неравенстве $k = 1/\lambda$, получим неравенство $x^{1/\lambda} > \ln x$. Мы вправе считать, что $x > 1$. Тогда, возведя обе части последнего неравенства в степень λ, найдем, что $x > \ln^\lambda x$, или $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln^\lambda x}$.

Таким образом, для достаточно больших значений n (например, для $n > N$, где N — некоторое число, зависящее от λ) справедливо неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln^\lambda n}$. Ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\ln^\lambda n}$, являющийся остатком данного ряда, расходится по признаку сравнения, следовательно, расходится и данный ряд.

Способ 2. Сравним общий член данного ряда с общим членом расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (см. пример 3). Для этого рассмотрим функции $f(x)=(\ln x)^{\lambda}$ и $g(x)=x$ и найдем предел их отношения при $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{\lambda}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\lambda(\ln x)^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda(\ln x)^{\lambda-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda(\lambda-1)(\ln x)^{\lambda-2}}{x}=\ldots=0$$

(при нахождении предела было использовано правило Лопиталя). Значит, для достаточно больших x отношение $\frac{f(x)}{x}<1$ или $1/f(x)>1/x$, т.е. $1/(\ln x)^{\lambda}>1/x$. А тогда для достаточно больших значений n $(n>N)$ и $1/(\ln n)^{\lambda}>1/n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}1/(\ln n)^{\lambda}$ расходится по признаку сравнения. Ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}1/(\ln n)^{\lambda}$ — остаток данного ряда, следовательно, расходится и данный ряд.

10) В этом случае удобно применить интегральный признак сходимости, положив $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$. Условия, допускающие его применение, выполнены, ибо функция $f(x)$ непрерывна при $x\geq 2$, положительна при этих значениях x, монотонно убывает с ростом x и притом $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; выполнение условия $f(n)=a_n$ очевидно.

Интеграл $\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$ легко исследовать на сходимость непосредственным отысканием первообразной:

$$\int\limits_2^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\int\limits_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=$$
$$=-\frac{1}{2\ln^2 x}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Итак, интеграл, а вместе с ним и ряд сходятся.

11) Способ 1. Если $n \geq 3$, то $(\ln n)/n^\lambda > 1/n^\lambda$, что указывает на расходимость ряда при $\lambda \leq 1$ по признаку сравнения (см. также пример 3).

При $\lambda>1$ к исследованию ряда можно применить интегральный признак. Рассмотрим функцию $f(x)=(\ln x)/x^\lambda$, удовлетворяющую условию $f(n)=a_n$. Ее производная $f'(x)=\frac{1-\lambda\ln x}{x^{\lambda+1}}$ при $x > e^{1/\lambda}$ отрицательна. Следовательно, при $x > e$ (при том, что $\lambda > 1$) функция $f(x)$ монотонно убывает, оставаясь непрерывной и положительной. Кроме того, с помощью правила Лопиталя нетрудно установить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Из свойств функции $f(x)$ следует, что члены ряда монотонно убывают с возрастанием номера n (начиная с $n = 3$) и что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\lambda} = 0$. Таким образом, применение интегрального признака допустимо.

Все дальнейшее исследование связано с изучением сходимости интеграла $\int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\lambda}\,dx$. Первообразная для подынтегральной функции находится интегрированием по частям, и она равна

$$-\frac{\ln x}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}-\frac{1}{(\lambda-1)^2x^{\lambda-1}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\lambda}\,dx = \frac{\ln 3}{(\lambda-1)3^{\lambda-1}}+\frac{1}{(\lambda-1)^2 3^{\lambda-1}}-$$
$$-\frac{1}{\lambda-1}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\lambda-1}}+\frac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}\right)=\frac{(\lambda-1)\ln 3+1}{3^{\lambda-1}(\lambda-1)^2},$$

так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\lambda-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{(\lambda-1)x^{\lambda-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\lambda-1)x^{\lambda-1}}=0.$$

Следовательно, ряд сходится.

Способ 2. Если $n \geq 3$, то $(\ln n)/n^\lambda > 1/n^\lambda$, что указывает на расходимость ряда при $\lambda \leq 1$ по признаку сравнения (см. также пример 3).

Если $\lambda > 1$, то выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda - \varepsilon > 1$. Тогда $\frac{\ln n}{n^\lambda} = \frac{\ln n}{n^\varepsilon\, n^{\lambda-\varepsilon}}$.

Легко убедиться, что для достаточно больших значений n справедливо неравенство $\frac{\ln n}{n^\varepsilon} < 1$. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\varepsilon} = 0.$$

Значит, для достаточно больших x выполняется неравенство $\frac{\ln x}{x^\varepsilon} < 1$, а тогда и для достаточно больших n имеем $\frac{\ln n}{n^\varepsilon} < 1$. Так как

$$\frac{\ln n}{n^\lambda} = \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}} \le \frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}$ сходится, поскольку $\lambda - \varepsilon > 1$, то сходится и исходный ряд согласно признаку сравнения.

Итак, ряд расходится при $\lambda \le 1$ и сходится при $\lambda > 1$.

• Применить признак Д'Аламбера при исследовании сходимости рядов:

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n}$. **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\sin(\pi/2)\sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\cdots\sin(\pi/n)}$.

26. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n\cdot 3^{n-1}} + \frac{1}{2^n\cdot 3^n} + \ldots$ **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n5^n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+\sqrt{1+1^2})(2+\sqrt{1+2^2})\cdots(n+\sqrt{1+n^2})}$. **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$. **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - n}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{5\cdot 17\cdot 37\cdots(4n^2+1)}}$. **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1,5 - \sqrt{2})(1,5 - \sqrt[3]{2})\cdots(1,5 - \sqrt[n]{2})$. **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}{(1+b)(1+2b)\cdots(1+nb)}$, $a>0$, $b>0$.

35. $0,4 + 0,4\cdot 0,34 + 0,4\cdot 0,34\cdot 0,334 + 0,4\cdot 0,34\cdot 0,334\cdot 0,3334 + \ldots$

• Применить признак Коши при исследовании сходимости рядов:

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n$. **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^n$. **38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5n+1}{4n^2-6n+3}\right)^n$. **39.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{4+7+10+\ldots+(3n+1)}\right)^n$. **42.** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} +$

$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots$ **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(5n+1)^n}$. **44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{n^2/4}$. **46.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)^2+n\sqrt{n^2+5n+6}}{3n^2+n+9}\right)^n$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)^n$. **48.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^{n/2}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+1/n\right)^n}$. **50.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4^n+n^2}}$.

• Применить признак Раабе для исследования сходимости рядов:

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. **52.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. **53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. **54.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\lambda}$, $\lambda>0$. **56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$. **57.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{3}}\ldots\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$. **59.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. **60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}$, $\alpha>0$, $\beta>0$. **61.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$, $\lambda>0$, $\lambda\neq1$.

• Исследовать на сходимость ряды с помощью признака сравнения:

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$. **64.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+1)}$. **65.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **66.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1}$. **68.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$. **69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}$. **70.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$. **72.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$. **73.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$. **74.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n^4+1}}$.

75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-1\right)$. **76.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$. **77.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}\right)$. **78.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. **79.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+9}-n}{n}$. **81.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$. **82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$. **83.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$. **84.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

• Изучить поведение рядов, применяя интегральный признак сходимости:

85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. **86.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. **87.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+5)}$. **88.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$. 90. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$. 91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right)$.

92. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\lambda}}$, $\lambda > 0$. 93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(n+\sqrt{1+n^2}\right)}{n^2}$. 94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\,\mathrm{arctg}\, n}$.

• Исследовать на сходимость ряды, используя подходящие признаки сходимости:

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{1\cdot 6\cdot 11\ldots(5n-4)}$. 97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $k > 0$, $a > 1$. 98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. 100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)^n}$. 101. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln\left(\ln(\ln n)\right)}$. 102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n!)^2}$.

103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!!}$. 104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!n^{\lambda}}$, $\lambda>0$. 105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{n!n^2}$.

106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$, $a>0$. 107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{1!3!5!\ldots(2n-1)!}$. 108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3!!5!!\ldots(2n-1)!!}{2!!4!!\ldots(2n)!!}$.

109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. 110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3}$. 111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^3}$. 112. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(n \ln \frac{n+1}{n-1} - 2\right)$.

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$. 114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+e^n)}{n\sqrt{n}}$. 115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$.

116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\ln \frac{n+1}{n}\right)^{3/2}$. 117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}\left(1 - \frac{a \ln n}{n}\right)^n$, λ, a — постоянные. 118. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$. 119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\lambda}$, $\lambda>0$.

120. Доказать, что из расходимости знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ и 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Что можно сказать о ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если один из рядов 1) или 2) сходится?

121. Доказать, что из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ следует расходимость ряда 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ и сходимость ряда 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

122. Доказать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ $(k > 1)$.

§3. Сходимость знакопеременных рядов

1. Абсолютная и условная сходимость ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из его расходимости, установленной с помощью признаков Д'Аламбера или Коши, — расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряды: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n\sqrt{n^2+1}}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2n)!!}{n!}$.

Решение. 1) Из неравенства $|\sin n\alpha| \leq 1$ следует, что $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (см. пример 3). Следовательно, данный ряд сходится и притом абсолютно.

2) Поскольку

$$\left|\frac{n+(-1)^n\sqrt{n^2+1}}{n^3}\right| \leq \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^2},$$

то данный ряд по признаку сравнения сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ (см. пример 3).

3) Применим признак Коши к ряду с общим членом $a_n = \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$. Очевидно, что $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n+1}{2n+1} > 1$. Значит, данный ряд расходится.

4) Заменим члены ряда их абсолютными величинами и для исследования полученного ряда применим признак Д'Аламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!!\,n!}{(n+1)!\,(2n)!!} = \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1.$$

Следовательно, как полученный ряд, так и исходный расходятся.

2. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится, иначе говоря, если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ удовлетворяют условиям: 1) $a_n \geq 0$, 2) $a_{n+1} \leq a_n$, 3) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряды: 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+15}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^{\lambda}$, $\lambda > 0$.

Решение. 1) Данный ряд удовлетворяет всем требованиям признака Лейбница, поэтому он сходится.

Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ расходится (см. пример 4, 9)). Следовательно, данный ряд сходится условно. (Последнее утверждение несет в себе больше информации, чем простая констатация сходимости ряда.)

2) Проверим, убывают ли члены ряда по абсолютной величине с возрастанием n (другим требованиям признака Лейбница члены ряда очевидно удовлетворяют). Введем функцию $f(x) = \frac{x+1}{x^2+15}$. Ее производная $f'(x) = \frac{(x+5)(3-x)}{(x^2+15)^2}$ остается отрицательной при $x > 3$. Следовательно, при таких x функция $f(x)$ монотонно убывает. Поскольку при целых x значения функции

совпадают с членами ряда, взятыми по абсолютной величине, то ясно, что для $n \geq 3$ члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают.

Ряд, полученный отбрасыванием первых двух членов данного ряда, сходится согласно признаку Лейбница. Тогда сходится и данный ряд. Сходимость условная, ибо $\frac{n+1}{n^2+15} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (см. пример 3), поэтому ряд из абсолютных величин расходится.

3) Преобразуем общий член ряда, пользуясь тождеством $\sin x = (-1)^n \sin(x - \pi n)$. Заменив x на $\pi\sqrt{n^2+1}$, получим

$$\sin\pi\sqrt{n^2+1} = (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Ряд с общим членом $(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ формально удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Умножение на множитель -1 переводит этот ряд в данный. Следовательно, и данный ряд сходится (см. §1, свойство 2). Сходимость эта условная, так как $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ (см. пример 3).

4) Величина $\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ не превосходит $\frac{\pi}{2}$, убывает с возрастанием n и стремится к нулю при $n \to \infty$. По монотонности функция $\left(\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^\lambda$ при $\lambda > 0$ убывает с возрастанием n и стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда сразу следует, что данный ряд сходится по признаку Лейбница при $\lambda > 0$.

Выясним поведение ряда, составленного из абсолютных величин его членов. Так как $\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$, то

$$\left(\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^\lambda \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\lambda \cdot \frac{1}{n^{\lambda/2}}.$$

Ряд с таким общим членом сходится при $\lambda/2 > 1$ (т.е. при $\lambda > 2$) и расходится при $\lambda/2 \leq 1$ (т.е. при $\lambda \leq 2$) (см. пример 3).

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно при $\lambda > 2$ и сходится условно при $0 < \lambda \leq 2$.

3. Замена знакопеременного ряда знакочередующимся

Теорема. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — знакопеременный ряд. Заменив в нем каждую группу идущих подряд членов одного знака их суммой, получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Если этот ряд сходится, то сходится и данный; если он расходится, то расходится и данный.

П р и м е р 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{n}$.

Р е ш е н и е. В более подробной записи данный ряд выглядит так:

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+$$
$$\ldots+\frac{1}{26}-\frac{1}{27}-\frac{1}{28}-\frac{1}{29}-\ldots-\frac{1}{63}+\ldots,$$

т.е. вначале идут 7 отрицательных членов, затем 19 положительных, далее — 37 отрицательных членов и т.д., причем в начале каждой группы членов одного знака стоит член ряда, номер которого является кубом целого числа.

Заменив каждую группу членов одного знака их суммой, получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$, где

$$b_k=\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3+1}+\frac{1}{k^3+2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^3-1}.$$

Проверим, будет ли этот ряд лейбницевского типа (т.е. будет ли он удовлетворять признаку Лейбница). Для этого в выражении для b_k из $(k+1)^3-k^3=k^2+k(k+1)+(k+1)^2$ слагаемых выделим три группы слагаемых, состоящих соответственно из k^2, $k(k+1)$ и $(k+1)^2$ членов ряда. Заключим каждую из таких групп для наглядности в скобки. Тогда

$$b_k=\overbrace{\left(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3+1}+\frac{1}{k^3+2}+\ldots+\frac{1}{k^3+k^2-1}\right)}^{k^2\text{ слагаемых}}+$$
$$+\overbrace{\left(\frac{1}{k^3+k^2}+\frac{1}{k^3+k^2+1}+\frac{1}{k^3+k^2+2}+\ldots+\frac{1}{k^3+2k^2+k-1}\right)}^{k(k+1)\text{ слагаемых}}+$$
$$+\overbrace{\left(\frac{1}{k^3+2k^2+k}+\frac{1}{k^3+2k^2+k+1}+\frac{1}{k^3+2k^2+k+2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^3-1}\right)}^{(k+1)^3\text{ слагаемых}}.$$

Поскольку слагаемые внутри каждой скобки меньше того слагаемого, которое стоит на первом месте, то

$$b_k<k^2\frac{1}{k^3}+(k+1)k\frac{1}{k^3+k^2}+(k+1)^2\frac{1}{k^3+2k^2+k}=\frac{3}{k}.$$

Вместе с тем каждое слагаемое из первой скобки больше $\frac{1}{k^3+k^2}$, из второй — больше $\frac{1}{k^3+2k^2+k}$, из третьей — больше $\frac{1}{(k+1)^3}$. Следовательно,

$$b_k > k^2\frac{1}{k^3+k^2}+(k+1)k\frac{1}{k^3+2k^2+k}+(k+1)^2\frac{1}{(k+1)^3}=\frac{3}{k+1}.$$

Итак, $\frac{3}{k+1} < b_k < \frac{3}{k}$. Значит, $b_{k+1} < b_k$ (поскольку значения b_k и b_{k+1} принадлежат непересекающимся интервалам $\left(\frac{3}{k+1}, \frac{3}{k}\right)$ и $\left(\frac{3}{k+2}, \frac{3}{k+1}\right)$ соответственно).

Наконец, из того, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{3}{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{3}{k} = 0$, следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сходится по признаку Лейбница, а потому сходится и данный ряд. В силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (см. пример 3) данный ряд сходится условно.

4. Признаки Дирихле и Абеля. *Признак Дирихле*: если последовательность $\{a_n\}$ монотонно сходится к нулю, а суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Абеля: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена и монотонна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряды: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n}$.

Решение. 1) К данному ряду признак Лейбница непосредственно не применим, ибо ряд не является знакочередующимся.

Поведение этого ряда достаточно просто исследовать с помощью признака Дирихле, положив $a_n = 1/n$ и $b_n = \sin n\alpha$. Последовательность $\{1/n\}$ сходится к нулю, монотонно убывая. Покажем, что последовательность $\{\sigma_n\}$, где $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, ограничена. Умножим обе части этого равенства на $2\cos\alpha$. Учитывая, что $2\cos\alpha\sin k\alpha = \sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha$, получим

$$2\sigma_n \cos\alpha = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sin(k+1)\alpha + \sum_{k=1}^{n} \sin(k-1)\alpha.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k+1)\alpha = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha - \sin\alpha + \sin(n+1)\alpha = \sigma_n - \sin\alpha + \sin(n+1)\alpha$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k-1)\alpha = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha - \sin n\alpha = \sigma_n - \sin n\alpha,$$

то

$$2\sigma_n \cos\alpha = 2\sigma_n + \sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha - \sin\alpha.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\sigma_n = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha - \sin\alpha}{2(\cos\alpha - 1)},$$

$\alpha \neq 2\pi m$, m — целое. Преобразуем числитель:

$$\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}\right] = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha.$$

Знаменатель равен $-4\sin^2(\alpha/2)$. Следовательно,

$$\sigma_n = \frac{(\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$\alpha \neq 2\pi m$, m — целое.

Из последнего равенства получается оценка $|\sigma_n| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$, доказывающая ограниченность последовательности $\{\sigma_n\}$ при

$\alpha \neq 2\pi m$ (при $\alpha = 2\pi m$ исходный ряд состоит из одних нулей и, конечно, сходится). Тогда по признаку Дирихле ряд сходится.

Выясним, будет ли эта сходимость абсолютной или условной. Заметим, что

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n\alpha}{n} = \frac{1-\cos 2n\alpha}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n\alpha}{2n}.$$

Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{k}$ и преобразуем ее следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\cos 2k\alpha}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 2k\alpha}{2k} = S'_n - S''_n.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$ (см. пример 3), т.е. S'_n — частичные суммы расходящегося ряда.

Суммы S''_n — частичные суммы сходящегося ряда, что нетрудно доказать с помощью признака Дирихле, полагая $a_n = 1/n$ и $b_n = \cos 2n\alpha$. Но тогда согласно определению сходящегося ряда ряд с общим членом $\frac{\sin^2 n\alpha}{n}$ не может быть сходящимся (предел его частичных сумм не существует). Следовательно, он расходится, а потому расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n}\right|$ (по признаку сравнения). Это означает, что данный ряд сходится условно.

2) Рассмотрим два способа исследования на сходимость данного ряда.

Первый способ. Учитывая, что ряд знакочередующийся, естественно проверить, не будет ли он лейбницевским. Полагая $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$, сразу получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Остается проверить выполнение условия $a_{n+1} \leq a_n$. Для этого введем функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Легко найти

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}.$$

Заметим, что числитель дроби обращается в нуль при $x = 0$, а его производная, равная $-2x \operatorname{arctg} x$, отрицательна при $x > 0$. Значит, числитель, а следовательно, и производная $f'(x)$ отрицательны при $x > 0$. Таким образом, функция $f(x)$, при целых положительных x совпадающая с членами ряда, монотонно убывает. Отсюда, в частности, следует, что при всех n выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$.

Итак, по признаку Лейбница данный ряд сходится, причем сходимость условная, ибо $\frac{\operatorname{arctg} n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ (см. пример 3).

Второй способ. Применим признак Абеля, считая $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ и $b_n = \operatorname{arctg} n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница; $\operatorname{arctg} n$ растет с увеличением номера n, причем $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2}$, т.е. последовательность $\{\operatorname{arctg} n\}$ монотонна и ограничена. А тогда по признаку Абеля данный ряд сходится.

• Исследовать на сходимость ряды, выясняя в случае их сходимости, является ли она абсолютной или условной:

123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n\sqrt{n}}$, $\alpha = \text{const}$. **124.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(n^2+n+1)}{n\sqrt{n}}$. **125.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\sin \frac{\pi(n^2+n+1)}{3n^2+5n+6}\right)^n$. **126.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\ln \frac{3n^2+n+1}{2n^2+n+1}\right)^n$. **127.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(2n)!}$.

128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]} n!}{3^{n^2}}$. **129.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^3+1}$. **130.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n^2-n+1}{n^2+3n+2}\right)^n$.

131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{4}]} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$. **132.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \sin \frac{\pi}{n}$. **133.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(a^{\frac{1}{n}}-1)}{\sqrt{n}}$, $a = \text{const}$. **134.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$. **135.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(2n)!!}$.

136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a^n}{n!}$, $a = \text{const}$, $a > 0$. **137.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{(n!)^2}$.

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+1}$. **139.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi n}{2n+1}$. **140.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$.

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!!}{(2n-1)!!(2n+1)}$. **142.** $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n-n^2}$. **143.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$.

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$. **145.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+100)}{n^2+1}$. **146.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n+\ln n}$.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \arcsin \frac{n}{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$. **148.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+(-1)^{n-1}}}$. **149.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sin \frac{\pi n}{6}}$.

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n}$. **151.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. **152.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\ln n}$.

153. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots$ **154.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$.

155. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\ln n}$. **156.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{n}$. **157.** $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$

$+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots$ **158.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}}$. **159.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}$.

160. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{5}}{n+\sin\frac{\pi n}{5}}$. **161.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin n\alpha}{n}$. **162.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\alpha}{2n-1}$.

163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\cos n^2\alpha}{\sqrt{n}}$. **164.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\cos n\beta}{n}$. **165.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}(5n^2+1)}{n(3n^2+4)}$.

166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{\pi(n^2+1)}{3n^2+1}}{n}$. **167.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n\ln n}\cos n\alpha$.

168. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n}$. **169.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\alpha}{\sqrt{n^2+1}}\sin n\alpha}{n}$.

170. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(7n^2+n+1)-\ln(4n^2+2n+5)}{\ln n}\cos\frac{\pi n}{3}$.

Глава II. Функциональные ряды

§1. Понятие функционального ряда. Признаки сходимости функциональных рядов

Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на конечном или бесконечном промежутке $\langle a, b\rangle$ числовой оси, то символ $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ или, что то же самое,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется *функциональным рядом*.

Определения членов ряда, общего члена ряда, частичной суммы ряда соответствуют аналогичным определениям из §1 в главе I с той лишь разницей, что в случае функционального ряда все эти объекты есть функции, а не числа.

Если рассматривать значения членов ряда (1) в какой-либо точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то получается числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0). \tag{2}$$

Если этот ряд сходится, то его сумма обозначается $S(x_0)$, и в этом случае говорят, что функциональный ряд (1) сходится в точке x_0.

Если ряд (1) сходится в любой точке x множества P, $x \in P \subset \subset \langle a, b\rangle$, и расходится во всех точках $x \overline{\in} P$, то тем самым на множестве P определена функция $S(x)$, которая является суммой ряда (1) для любого $x \in P$. Эта функция $S(x)$ называется суммой функционального ряда (1), а множество P — его областью сходимости.

Критерий сходимости Коши и необходимое условие сходимости функционального ряда (1) формулируются аналогично соответствующим теоремам для числовых рядов (см. главу I, §1).

Основная задача теории функциональных рядов — нахождение области сходимости данного ряда. Поскольку при любом фиксированном $x \in \langle a, b\rangle$ ряд (1) становится числовым, для его исследования можно применять все признаки сходимости числовых рядов, изложенные в главе I.

Пример 1. Найти области сходимости функциональных рядов, пользуясь определением области сходимости: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$.

Решение. 1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ является геометрической прогрессией. Его частичная сумма $S_n(x)$ вычисляется по формуле

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{при } x \neq 1.$$

По определению суммы ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{при } |x| < 1, \\ \text{не существует} & \text{при } x \leq -1, \\ \infty & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, областью сходимости этого ряда является интервал $(-1, 1)$.

2) Преобразуем частичную сумму $S_n(x)$ данного ряда, используя равенство

$$\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}.$$

(Действительно, так как $1-x^{2^n} = 1-(x^{2^{n-1}})^2 = (1-x^{2^{n-1}})(1+x^{2^{n-1}})$, то

$$\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} = \frac{1+x^{2^{n-1}}-1}{1-x^{2^n}} = \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}.\Bigg)$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}.$$

(Здесь использовано то обстоятельство, что все слагаемые в двух суммах одинаковы, кроме первого слагаемого в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}}$ и n-го слагаемого в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^k}}$.)

Таким образом,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

При $x = \pm 1$ члены функционального ряда не определены.

Итак, областью сходимости данного функционального ряда является объединение интервалов $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Пример 2. Найти области абсолютной сходимости функциональных рядов, пользуясь признаками Д'Аламбера, Коши и Раабе:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

Решение. 1) В данном случае удобно применить признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд ряд из абсолютных величин сходится для любого вещественного значения x.

2) Здесь удобно применить признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{|x|^n}{|x|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n+1}{n} = |x|.$$

Значит, ряд из абсолютных величин сходится при $|x| < 1$, расходится при $|x| > 1$. При $|x| = 1$ имеем числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$, которые расходятся, так как общие члены этих рядов не стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости данного ряда является интервал $(-1, 1)$.

3) По признаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,n^n\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\,|x| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot|x| = e\cdot|x|.$$

При $|x| < 1/e$ ряд сходится, так как $e\,|x| < 1$, при $|x| > 1/e$ — расходится, так как при этом $e\,|x| > 1$. При $|x| = 1/e$ признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда ($e\cdot(1/e) = 1$). При $|x| = 1/e$ получаем следующий числовой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n\,n!}$. Используем признак Раабе (признак Д'Аламбера ответа не дает):

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^n e^{n+1}(n+1)!}{e^n n!\,(n+1)^{n+1}} - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e(n+1)}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right] = 0 < 1.$$

Таким образом, при $|x| = 1/e$ ряд расходится, и областью абсолютной сходимости ряда является интервал $(-1/e,\ 1/e)$.

4) Признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{x+n+1} = 1\right)$, признак Коши не удобен, потому применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n!\,(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)(n+1)!} - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{n!\,(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1) - (x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)(n+1)!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)(n+1)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)\,n!\,(x+n+1-n-1)}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\,x = x.$$

Значит, при $x < 1$ ряд расходится, при $x > 1$ сходится. При $x = 1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Следовательно, $(1, +\infty)$ — область абсолютной сходимости данного ряда.

Пример 3. Найти области абсолютной сходимости функциональных рядов, пользуясь признаками сравнения: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ $(x>0)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$ $(0<x<\pi)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $(x>0)$.

Решение. 1) При $x \leq 1$ нарушается необходимое условие сходимости ряда (общий член ряда не стремится к нулю по мере возрастания его номера). При $x > 1$ имеем следующую оценку:

$$\frac{1}{1+x^n} < \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ сходится при $|x| > 1$ (см. пример 1), следовательно, сходится и данный ряд. Область его сходимости $(1, +\infty)$.

2) Применим признак сравнения в предельной форме:

$$\frac{\sin(x/n)}{1/n} = \frac{x\,\sin(x/n)}{x/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

(здесь выделен первый замечательный предел).

Итак, данный ряд расходится как и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ при любом $x > 0$.

3) Применим признак сравнения в предельной форме:

$$\frac{\ln(1+x/n)}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

(здесь использован второй замечательный предел).

Следовательно, данный ряд, как и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится при любом $x > 0$.

• Найти области сходимости указанных функциональных рядов, пользуясь определением области сходимости:

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$. **172.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$. **173.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$. **174.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$.

• Найти области сходимости указанных функциональных рядов, пользуясь признаками Д'Аламбера, Коши, Раабе и Лейбница:

175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. 176. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$. 177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

178. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,n^{-x}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2+n)}$. 179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n\sqrt{(x+2)^n}}$. 180. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\; e^{-nx}$.

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{-nx^2}$. 182. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-n}{1-2x}\right)^n$.

• Найти области сходимости указанных функциональных рядов, пользуясь признаками сравнения:

183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}$. 184. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 185. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

186. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n}$ $(x \geq 0)$.

§2. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{3}$$

где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел, x_0 — постоянное вещественное число.

Ряд (3) есть частный случай ряда (1), где $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$.

1. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Теорема 1 (*Абель*). *Для любого степенного ряда* (3), *если только он не является всюду расходящимся, существует вещественное положительное число R, такое, что внутри интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд* (3) *сходится абсолютно, а вне этого интервала расходится.*

Промежуток $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости*, а число R $(0 < R \leq +\infty)$ — *радиусом сходимости степенного ряда*.

Отметим, что в теореме ничего не говорится о поведении ряда на концах интервала сходимости, т.е. при $x = x_0 \pm R$. Сходимость ряда в этих точках исследуется непосредственно подстановкой значения $x = x_0 \pm R$ в ряд (3).

Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{4}$$

или

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5}$$

если эти пределы существуют.

Пример 4. Найти радиус и интервал сходимости степенных рядов и исследовать их поведение на границах интервала сходимости: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n(n+2)}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n\,4^n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)\,6^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$.

Решение. 1) Для отыскания радиуса сходимости воспользуемся формулой (4):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}} = 1.$$

Таким образом, в промежутке $(-1, 1)$ ряд сходится абсолютно, а вне его расходится.

Выясним поведение ряда на границах интервала сходимости, т.е. в точках $x = 1$ и $x = -1$. Подставим значение $x = 1$ в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n(n+2)}}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$. Для исследования сходимости этого ряда сравним его с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+2)}} = 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ ведет себя так же, как и гармонический ряд, т.е. расходится. При $x = -1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$, который является *рядом Лейбница*.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$, сходится условно при $x = -1$ и расходится при $x \geq 1$ и $x < -1$.

2) Найдем радиус сходимости по формуле (4):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n+1)!}{n!\,(-1)^n\, n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n} = \infty.$$

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно на всей числовой оси, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

3) Применить к этому ряду формулу (4) для нахождения радиуса сходимости невозможно, так как ряд содержит только четные степени. Поэтому рассмотрим другой степенной ряд, полученный из данного заменой переменной $y = (x-2)^2$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{n \cdot 4^n}$.

Обозначим R_1 радиус сходимости данного ряда и найдем его по формуле (4):

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(n+1)\,4^{n+1}}{n\,4^n(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,4}{n} = 4.$$

Таким образом, при $-4 < y < 4$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{n \cdot 4^n}$ сходится абсолютно.

Вернемся к старой переменной. Поскольку $y = (x-2)^2$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{n\, 4^n}$ сходится абсолютно при $(x-2)^2 < 4$, или $-2 < x-2 < 2$, т.е. при $0 < x < 4$.

Теперь исследуем поведение данного ряда на границах интервала сходимости, т.е. при $x = 0$ и $x = 4$. При этих значениях x имеем один числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится условно.

Итак, на интервале $(0, 4)$ данный ряд сходится абсолютно , на его концах сходится условно, при остальных значениях x расходится.

4) Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле (4):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\,(2(n+1))!}{(2n)!\,\left((n+1)!\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4.$$

При $x=-4$ и $x=4$ (т.е. на границах интервала сходимости) получим два числовых ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n,$$

для которых не выполняется необходимое условие сходимости. Действительно,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^2\,4}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2(n+1)}{2n+1}>1,$$

т.е. члены обоих рядов монотонно возрастают по абсолютной величине, а, значит, $|a_n|$ не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно на интервале $(-4,4)$ и расходится вне его.

5) Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле (5):

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)\,6^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)\,6^n}=6.$$

При $x=8$ и $x=-4$ (т.е. на границах интервала сходимости) получим два числовых ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

первый из которых сходится условно по признаку Лейбница, а второй является гармоническим рядом, т.е. расходящимся.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно на интервале $(-4,8)$, условно сходится при $x=8$ и расходится вне интервала $(-4,8]$.

6) Сделаем замену переменной по формуле $y=\frac{1}{x+2}$. Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}y^n$. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (5):

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}=2.$$

На границах интервала сходимости, т.е. при $y=2$ и $y=-2$, имеем два числовых ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

которые сходятся абсолютно.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} y^n$ сходится абсолютно при $y \in [-2, 2]$ и расходится вне этого интервала.

Исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \cdot \frac{1}{(x+2)^n}$ ряд сходится абсолютно при $\frac{1}{|x+2|} \leq 2$, т.е. при $x \geq -3/2$ и $x \leq -5/2$ и расходится при остальных значениях x.

2. Разложение функций в ряд Тейлора или в ряд Маклорена. Говорят, что функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд в ε-окрестности точки x_0, $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, если для любой точки x из этой окрестности значение функции $f(x)$ есть сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Этот факт записывают так:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд (3), то коэффициенты a_n при соответствующих степенях $(x - x_0)^n$ вычисляются по формуле*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где $f^{(n)}(x_0)$ — значение n-й производной функции $f(x)$ в точку x_0 ($f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ — значение функции $f(x)$ в точке x_0).

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{7}$$

называется *рядом Тейлора.*

Теорема 2 может быть сформулирована следующим образом: если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд (3), то этот ряд есть *ряд Тейлора.*

В частном случае, если $x_0 = 0$, ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{8}$$

и называется *рядом Маклорена.*

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций и области их сходимости известны и имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad -\infty<x<+\infty,\\
\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \qquad -\infty<x<+\infty,\\
\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad -\infty<x<+\infty,\\
(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\ldots, \qquad |x|<1,\\
\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad |x|<1.
\end{gathered} \tag{9}$$

Этими пятью разложениями в дальнейшем будем пользоваться для нахождения разложений в ряд Маклорена и других функций.

Пример 5. Разложить указанные функции в ряд Тейлора в окрестности данной точки: 1) $y = 2^x$ в окрестности точки $x_0 = 1$; 2) $y = \sin x$ в окрестности точки $x_0 = \pi$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (6) для нахождения коэффициентов ряда Тейлора:

$$a_n = \frac{y^{(n)}(1)}{n!}$$

и вычислим значения функции 2^x и ее производных в точке $x_0 = 1$:

$$\begin{cases}
y(x) = 2^x, & y(1) = 2,\\
y'(x) = 2^x \ln 2, & y'(1) = 2\ln 2,\\
\vdots & \vdots\\
y^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, & y^{(n)}(1) = 2\ln^n 2
\end{cases}$$

и т. д. Таким образом, $a_n = \frac{2\ln^n 2}{n!}$, и разложение (7) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\ln^n 2}{n!}(x-1)^n.$$

Найдем область сходимости этого ряда. По формуле (4)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln^n 2 \cdot (n+1)!}{n!\, 2\ln^{n+1} 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\ln 2} = +\infty.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$.

Итак,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\ln^n 2}{n!}(x-1)^n.$$

Это разложение верно для всех вещественных значений x.

2) Как и в предыдущем примере, найдем значения коэффициентов по формуле (6):

$$\begin{cases} y(x) = \sin x, & y(\pi) = 0, \\ y'(x) = \cos x, & y'(\pi) = -1, \\ y''(x) = -\sin(x), & y''(\pi) = 0, \\ y'''(x) = -\cos x, & y'''(\pi) = 1, \\ y^{IV}(x) = \sin x, & y^{IV}(\pi) = 0 \end{cases}$$

и т. д.

Видно, что $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = (-1)^{n+1}$. Следовательно, разложение (7) примет вид

$$-(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \ldots$$

Найдем область сходимости полученного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)+1]!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+3) = +\infty.$$

Таким образом, этот ряд сходится при $-\infty < x < +\infty$.

Окончательно имеем разложение

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \ldots,$$

и оно верно для всех вещественных значений x.

Пример 6. Разложить в ряд Маклорена указанные функции:
1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$; 3) $y = \sqrt[3]{8-x^3}$;
4) $y = \ln(10+x)$.

Решение.

1) Понизим степень данной функции, используя известную формулу $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, и разложим функцию $\cos 2x$ в ряд Маклорена, рассматривая $2x$ в качестве ее аргумента, для чего воспользуемся формулами (9):

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Окончательно имеем

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) = \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

и это разложение верно для всех вещественных значений x.

2) Воспользуемся формулами (9) для разложения функции $\sin x$ в ряд Маклорена, а затем почленно разделим на x:

$$y = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение имеет место для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $-\infty < x < +\infty$.

3) Преобразуем данную функцию вынесением за знак корня коэффициента 2:

$$y = 2\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3}.$$

Функцию $f(x) = \sqrt[3]{1-(x/2)^3}$ разложим в ряд Маклорена по степеням переменной $-x/2$, воспользовавшись формулами (9):

$$\sqrt[3]{1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^3} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{(-x/2)^6}{2!} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\frac{(x/2)^9}{3!} + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{3} - n + 1\right)\frac{(-x/2)^{3n}}{n!} + \ldots = 1 - \frac{1}{3\cdot 2^3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{x^6}{2^6\cdot 2!} -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{x^9}{2^9\cdot 3!} - \ldots - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{x^{3n}}{2^{3n}\cdot n!} - \ldots$$

Этот ряд сходится абсолютно при $\left|\left(\frac{-x}{2}\right)^3\right| < 1$, т. е. при $|x| < 2$.

Окончательно имеем разложение

$$\sqrt[3]{8 - x^3} = 2 - \frac{1}{3\cdot 2^2}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{x^6}{2^5\cdot 2!} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{x^9}{2^8\cdot 3!} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{x^{3n}}{2^{3n-1}\cdot n!} - \ldots$$

4) Преобразуем данную функцию:

$$\ln(10 + x) = \ln\left[10\cdot\left(1 + \frac{x}{10}\right)\right] = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right)$$

и к функции $\ln(1 + x/10)$ применим одну из формул (9), рассматривая в качестве аргумента $x/10$:

$$\ln\left(1 + \frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{10^2\cdot 2} + \frac{x^3}{10^3\cdot 3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{10^n\cdot n} + \ldots$$

Этот ряд сходится абсолютно при $|x/10| < 1$, т. е. при $|x| < 10$.

Окончательно имеем ряд Маклорена

$$\ln(10+x)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{10^2\cdot 2}+\frac{x^3}{10^3\cdot 3}-(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{10^n\cdot n}+\dots,$$

который также сходится абсолютно при $|x|<10$.

• Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение ряда на границе интервала сходимости:

187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$. **188.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)\,5^n}$. **189.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2\,2^n}$.

190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$. **191.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,9^n(x-1)^{2n}}$. **192.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n}$.

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}(x-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$. **194.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\,x^n}{3n-2}$.

195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1}2^n(x-1)^n$. **196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+1}}{3^n\,(2n+1)}$. **197.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^{n+1}\,n\,\ln^3 n}$.

198. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n!\,n^n}$. **199.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n^2+1)\,7^n}$. **200.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x-1)^{2n}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

• Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности указанной точки и определить область сходимости полученного ряда:

201. $f(x)=x^3-2x^2-5x-2$, $x_0=-4$. **202.** $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x_0=2$.
203. $f(x)=e^{x^2-4x+1}$, $x_0=2$. **204.** $f(x)=\ln(x^2+6x+12)$, $x_0=-3$.
205. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$. **206.** $f(x)=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x_0=0$.
207. $f(x)=2^x$, $x_0=1$.

• Разложить в ряд Маклорена указанные функции и указать область сходимости полученного ряда:

208. $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$. **209.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$. **210.** $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$.
211. $f(x)=\sin^2 x$. **212.** $f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$. **213.** $f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$.
214. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

§3. Равномерная сходимость функциональных рядов

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ *сходится равномерно на промежутке* $[a,b]$, *если последовательность* $\left\{S_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *его частичных сумм сходится равномерно на этом промежутке к функции* $S(x)$.

Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует значение N, зависящее только от ε и не зависящее от x, такое, что для всех натуральных n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, выполняется неравенство $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$ каково бы ни было $x \in [a,b]$.

Критерий равномерной сходимости ряда (**критерий Коши**):

Для того чтобы ряд (1) равномерно сходился на промежутке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое не зависящее от x значение N, что при любом $n > N$ и любом натуральном m неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} f_k(x)\right| < \varepsilon$ было бы справедливо для всех $x \in [a,b]$.

Для установления на практике равномерной сходимости рядов пользоваться определением или критерием Коши часто бывает затруднительно. Поэтому используются более простые достаточные признаки.

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда (1) на промежутке $[a,b]$ удовлетворяют неравенствам $\left|f_n(x)\right| \leq$ $\leq c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ — члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, то ряд (1) сходится на промежутке $[a,b]$ равномерно.

В тех случаях, когда не удается применить признак Вейерштрасса, используются более тонкие признаки равномерной сходимости рядов, например признаки Дирихле и Абеля (напомним, что аналогичные признаки для числовых рядов сформулированы в главе I, §3, п.4).

Признак Дирихле. Если частичные суммы $B_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности, т.е. $\left|B_n(x)\right| < M$ для любых натуральных n и $x \in [a,b]$, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно на промежутке $[a,b]$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на этом промежутке.

Признак Абеля. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности — при любых

n и x — ограничены, т.е. $|a_n(x)| \le K$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a, b]$.

Пример 7. Исследовать ряды на равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 < x < +\infty$.

Решение.

1) Сравним данный ряд с числовым сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\infty<x<+\infty$, выполняется неравенство $\frac{1}{x^2+n^2} < \frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд равномерно сходится при $-\infty < x < +\infty$.

2) Способ 1. Известно, что $(1 - n^2x)^2 \ge 0$, откуда $1+n^4x^2 \ge 2n^2x$ и

$$\frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{x}{2n^2x} = \frac{1}{2n^2} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ сходится (см. пример 3). Тогда согласно признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно при $x > 0$.

Способ 2. Найдем $\max\limits_{x>0} |a_n(x)|$:

$$\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)' = \frac{1(1+n^4x^2) - x\cdot 2xn^4}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}.$$

Точки, подозрительные на экстремум, $x = 1/n^2$ $(x > 0)$. Имеем

$$\max_{x>0} |a_n(x)| = a_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2(1+n^4/n^4)} = \frac{1}{2n^2}.$$

Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно при $x > 0$.

Пример 8. Исследовать ряды на равномерную сходимость с помощью признаков Дирихле или Абеля: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$, $0<x<1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}$, $0<x<1$.

Решение.

1) Исследуем данный ряд на равномерную сходимость, применяя признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница (это знакочередующийся ряд и последовательность $\frac{1}{n}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$). Функции $x^n/(1+x^n)$ ограничены в совокупности, так как $x^n/(1+x^n)<1$. Кроме того, для любого натурального n имеет место неравенство

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} < \frac{x^n}{1+x^n},$$

т.е. эти функции монотонно убывают при каждом x. Тогда согласно признаку Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ сходится равномерно при $0 < x < 1$.

2) Преобразуем общий член данного ряда

$$(-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{2n-1}}$$

и, применяя признак Дирихле, исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{2n-1}}$.

Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ ограничены в совокупности, так как $\left| \sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \right| \le 1$. Последовательность функций $\dfrac{x^n}{1+x+\ldots+x^{2n-1}}$ при $0 < x < 1$ монотонно и равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, ибо

$$\frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{n\,x^n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В таком случае по признаку Дирихле и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}$ сходится равномерно при $0 < x < 1$.

• Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

215. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \le x < +\infty$. **216.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $-1 \le x \le 1$.

217. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n - x^{-n})$, $\frac{1}{2} \le x \le 2$. **218.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$.

219. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$. **220.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. **221.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $-\infty < x < +\infty$. **222.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

• Исследовать ряды на равномерную сходимость, пользуясь признаками Абеля и Дирихле:

223. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $0 \le x \le 2\pi$. **224.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, $|x| \le 10$.

225. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $-\infty < x < +\infty$. **226.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $0 \le x < +\infty$.

§4. Функциональные свойства суммы ряда

Во многих задачах необходимо установить свойства суммы функционального ряда, если известны соответствующие свойства его членов. Ответом на эти вопросы могут служить следующие теоремы.

Теорема 3. *Если функции $f_n(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на этом промежутке к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ также непрерывна на промежутке $[a,b]$.*

Теорема 4. *Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a,b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ во всех точках этого промежутка и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на промежутке $[a,b]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$ для всех $x \in [a,b]$.*

Теорема 5. *Если функции $f_n(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на этом промежутке, то для любого промежутка $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ выполнимо равенство*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\,dx.$$

Для степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно в любом замкнутом промежутке, целиком лежащем в интервале сходимости.*

Учитывая теорему 6 и теоремы 3—5, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7. *Степенной ряд* (5) *внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать (многократно) и почленно интегрировать. Сумма степенного ряда* (5) *внутри интервала сходимости есть непрерывная и бесконечно дифференцируемая функция.*

Пример 9. Вычислить суммы указанных степенных рядов при $-1<x<1$: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$.

Решение.

1) Поскольку данный ряд является степенным, то по теореме 7 внутри интервала сходимости его можно почленно дифференцировать.

Найдем радиус сходимости этого ряда (см. формулу (4)):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1.$$

Значит, при $-1<x<1$ данный ряд сходится.

Преобразуем общий член ряда:

$$\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Тогда сумму данного ряда в интервале сходимости можно представить разностью сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Отметим, что $x^n/n = \int_0^x x^{n-1}\,dx$. Согласно теореме 7 внутри интервала сходимости выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1}\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) dx.$$

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x $(|x| < 1)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. В этом случае

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^n\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) dx =$$
$$= \int_0^x \frac{x}{1-x}\,dx = -x - \ln(1-x).$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$
$$= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

и это верно для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < 1$.

2) По формуле (4) найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, внутри интервала $(-1, 1)$ данный ряд сходится.

Отметим, что $n\,x^{n-1} = (x^n)'$ для всех натуральных n. Тогда к ряду можно применить теорему 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $-1<x<1$.

Пример 10. Найти разложения в ряд Маклорена указанных функций: 1) $y = \operatorname{arctg} x$; 2) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение.

1) Отметим, что $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

Разложим функцию $f(x) = 1/(1+x^2)$ в ряд Маклорена, воспользовавшись формулами (9):

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (-1)(-2)\frac{x^4}{2!} + \ldots + (-1)(-2) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (-1-n+1)\,\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

Интервалом сходимости этого ряда является промежуток $(-1, 1)$, поэтому для любого значения x, по модулю меньшего 1, т.е. при $|x| < 1$, этот ряд можно почленно проинтегрировать в интервале $(0, x)$:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

2) Так как $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, то, рассуждая аналогично разобранному выше случаю, имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^4}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{x^4}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

В результате почленного интегрирования окончательно получаем

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{x^5}{2!\cdot 5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)} + \ldots$$

Это разложение имеет место для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < 1$.

227. Исходя из равенства

$$1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots = \frac{1}{1-x^3} \quad (|x| < 1),$$

найти сумму ряда $3x^2 + 6x^5 + \ldots + 3n\,x^{3n-1} + \ldots$.

228. Показать, что ряд $x^2 + x^6 + \ldots + x^{4n-2} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $-q \le x \le q$, где q — любое положительное число меньше единицы. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$$

• Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы рядов:

229. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \ldots$ **230.** $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$
231. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ **232.** $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

• Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:
233. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 x^n + \ldots$
234. $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \ldots$

• Разложить указанные функции в ряд Маклорена:
235. $f(x) = \arcsin x^3$. **236.** $f(x) = \ln(1-2x\cos\alpha + x^2)$. **237.** $f(x) = \arccos(1-2x^2)$. **238.** $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$. **239.** $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$.
240. $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **241.** $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.
242. $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

§5. Некоторые приложения рядов Тейлора. Использование ЭВМ для вычисления суммы ряда

Пример 11. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $0,0001$.

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

который сходится при $|x| < 1$.

Представим данный корень в виде

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{1/3}.$$

Для функции $(1+x)^{1/3}$ запишем следующее разложение:

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 - \ldots$$

Подставив в это разложение $x = 1/25$, получим числовой ряд

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3\cdot 5^2} - \frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4} + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6} - \ldots,$$

который является знакочередующимся и удовлетворяет признаку Лейбница. Поэтому если взять в качестве приближенного значения суммы ряда сумму n его членов, то абсолютная погрешность окажется меньше первого отброшенного члена. Поскольку необходимо провести вычисления с точностью до $0,0001$, достаточно взять первые три члена ряда, так как уже четвертый член, умноженный на 5, будет меньше требуемой величины:

$$\frac{5\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6} = \frac{2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4} = \frac{1}{81\cdot 625} < 0,0001.$$

Окончательно, произведя вычисления, имеем

$$\sqrt[3]{130} \approx 5,00000 + 0,06667 - 0,00089 = 5,06578 \approx 5,0658.$$

Пример 12. Вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$, взяв три члена разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенную при этом погрешность.

Решение. Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд (см. формулы (9)), получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Значит,

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{1/4}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right]_0^{1/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{4^7\cdot 3!\cdot 7} + \ldots$$

Так как этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то абсолютная погрешность при отбрасывании членов ряда, начиная с четвертого, будет меньше первого отброшенного члена, т.е. меньше

$$\frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} < 0,0001.$$

Поэтому, произведя вычисления с точностью до 0,00001, имеем

$$0,250000 - 0,005208 + 0,000098 = 0,244890.$$

Таким образом,

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx \approx 0,24489 \qquad \text{с точностью до } 0,00001.$$

Пример 13. Вычислить $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^x\, dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя для функции e^x известное разложение (9):

$$\sqrt{x}\, e^x = \sqrt{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots$$

Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$\frac{x^n\sqrt{x}}{n!} \le \frac{1}{n} \quad \text{при } 0 \le x \le 1.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{x}}{n!}$ сходится на промежутке $[0, 1]$ равномерно, а, значит, по теореме 5 его можно почленно интегрировать:

$$\int_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^x\, dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \ldots + \frac{2x^{n-1}\sqrt{x}}{n!\,(2n+3)} + \ldots\right]_0^{1/9} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{2! \cdot 7 \cdot 3^7} + \ldots + \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} + \ldots$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до $0,001$. Для этого оценим остаточный член:

$$R_n = \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!\,(2n+5)\,3^{2n+5}} + \ldots <$$

$$< \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} \left[1 + \frac{1}{n \cdot 3^2} + \frac{1}{n^2 \cdot 3^4} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n \cdot 3^2}} = \frac{2}{(n-1)!\,(2n+3)\,3^{2n+1}(3^2 n - 1)}.$$

Очевидно, что для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно взять два члена полученного числового ряда. В самом деле,

$$R_2 < \frac{2}{7 \cdot 3^5 \cdot 17} < 6 \cdot 10^{-5}.$$

Произведя вычисления с точностью до $0,0001$, получим

$$0,0242 + 0,0016 = 0,0258.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^x\, dx \approx 0,026 \qquad \text{с точностью до } 0,001.$$

243. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.

244. Вычислить число e с точностью до $0,000001$.

245. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

246. Вычислить приближенно $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, взяв два члена разложения в ряд.

247. Вычислить приближенно $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$, взяв два члена разложения в ряд.

248. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx$ с точностью до 0,001.

249. Вычислить $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ с точностью до 0,001.

250. Вычислить $\int\limits_2^4 e^{1/x}\,dx$ с точностью до 0,001.

251. Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

Как показывают приведенные примеры, вычисление сумм числовых рядов даже с небольшой степенью точности требует, как правило, трудоемких вычислений. Поэтому при решении задач такого типа целесообразно использование ЭВМ. При нахождении сумм различных рядов с помощью ЭВМ необходимо, во-первых, определить, когда закончить суммирование (поскольку вычислить бесконечную сумму невозможно), во-вторых, найти формулу, задающую общий член ряда (если он неизвестен), а затем написать программу, содержащую цикл, выполняющий необходимое число шагов. На каждом шаге вычисляется значение очередного члена ряда, и он добавляется к предыдущей сумме. При этом самым сложным является решение вопроса о том, на каком шаге прекратить процесс суммирования. Возможны три похода: а) суммирование прекращается после того, как найдена сумма первых N членов ряда (N должно быть задано в начале программы); б) суммирование продолжается, пока члены ряда достаточно велики, и прекращается после того, как очередной член ряда станет по модулю меньше, чем какое-то наперед заданное малое положительное число (в программах оно обычно обозначается идентификатором epsilon); в) из оценки остаточного члена ряда по какой-либо формуле определяется необходимое число слагаемых.

Рассмотрим несколько конкретных примеров, записывая программы на языках Бейсик, Паскаль и Алгол 68.

П р и м е р 14. Рассмотрим числовой ряд (ряд Грегори), который можно использовать для вычисления числа π. Написать программу, которая получит и напечатает число π, просуммировав N членов ряда

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

На языке Бейсик:

```
BASIC SUM1
10   REM ввод начальных данных и начальные присваивания
20   INPUT N%
30   S=0: Z%=1%
40   REM вычисление суммы
50   FOR I%=1% TO N%
60   S=S+Z% / (2% * I%-1%)
70   Z%=-Z%
80   NEXT I%
90   REM вычисление и печать результата
100  S=4*S
110  PRINT "число пи равно ";S
120  END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM1;
VAR N,i,z: integer;
    S: real;
BEGIN read(N);  S:=0; z:=1;
    FOR i:=1 TO N DO
        BEGIN S:=S + z/(2*i-1);
              z:=-z
        END;
    writeln('Число пи = ',S)
END.
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN   INT N,z:=1; read(N);
        REAL S:=0;
        FOR i TO N DO S+:=z/(2*i-1);
                      z*:=-1
                   OD;
        print(("Число пи =",S))
END
```

Пример 15. Вычислить

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

для заданного x, прекратив вычисления, когда модуль очередного члена $x^k/k!$ станет меньше, чем заданное число epsilon.

Здесь член ряда с номером k может быть выражен через предыдущий домножением его на x/k, если первый член, равный единице, сразу взять за начальное значение суммы.

На языке Бейсик программа может быть написана так:

```
BASIC SUM2
10   REM ввод начальных данных и начальные присваивания
20   INPUT epsilon,x
30   S=0 : p=1 : i%=0%
40   REM вычисление суммы
50   S=S+p
60   i%=i%+1%
70   p=p*x/i%
80   IF ABS(p) > epsilon THEN GOTO 50
90   REM печать результатов
100  PRINT "при x= "; x , " epsilon= " ; epsilon
110  PRINT "значение экспоненты равно "; S
120  END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM2;
VAR i: integer;
     S,x,p,epsilon:real;
BEGIN read(epsilon,x);
       writeln('epsilon= ',epsilon, ' x= ',x);
       S:=0; p:=1; i:=0;
       REPEAT S:=S+p;
                 i:=i+1;
                p:=p*x/i
       UNTIL ABS(p) < epsilon;
                writeln ('значение экспоненты равно ',S)
END.
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN   REAL x,epsilon, p:=1, S:=0; read ((x,epsilon));
        print(("при x= ",x," epsilon= ",epsilon,newline));
        FOR i WHILE p*:=x/i; ABS p>epsilon
        DO S+:=p
        OD;
        print(("значение экспоненты равно ",S ))
END
```

Суммирование рядов широко используется в программировании. Например, чтобы "научить" машину "понимать", что такое синус, косинус, арктангенс и т.п., следует написать подпрограммы (процедуры), которые вычисляют значения этих функций, используя их разложение в ряд. Затем эти подпрограммы включаются в состав системы программирования. При обращении к ним из программы пользователя происходит суммирование соответствующего ряда, и получается значение требуемой функции.

Пример 16. Написать программу, которая вычисляет и печатает значение косинуса для заданного x, суммируя N членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

В данном случае следует учесть, что при получении очередного слагаемого (с номером k) предыдущее слагаемое необходимо домножить на $-\frac{x^2}{2k(2k-1)}$, где x^2 — величина постоянная, поэтому нет необходимости пересчитывать ее в цикле. Достаточно один раз вычислить $y=x^2$, а затем использовать это значение.

На языке Бейсик получаем программу:

```
BASIC SUM3
10    INPUT N%,X
20    Y=X*X : S=1 : p=1
30    FOR I%=1% TO N%-1%
40      p=p*(-Y)/(2% * I% * (2% * I%-1%))
50      S=S+p
60    NEXT I%
70    PRINT "при X= ";X,"сумма ";N;" слагаемых "
80    PRINT "дает: cos X=";S
90    END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM3;
VAR N,i:integer;
    X,S,P,Y:real;
BEGIN read(N,X);
      S:=1; P:=1; Y:=X*X;
      FOR i:=1 TO N-1
      DO BEGIN P:=P*(-Y)/(2*i*(2*i-1));
               S:=S+P
         END;
      WRITELN('при X= ',X,' просуммировав ', N,'слагаемых ');
      WRITELN('получим cos X=',S)
END.
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN  INT N; REAL X; read((N,X));
       REAL S:=1, P:=1, Y:=X*X;
       FOR i TO N-1
       DO INT K=2*i; P*:=(-Y)/(K*(K-1));
          S+:=P
       OD;
       print(("при X= ",X," просуммировав ",N," слагаемых ",
             newline," получим cos X= ",S))
END
```

Пример 17. Вычислить для заданного x

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

прекратив вычисления после того, как модуль очередного слагаемого станет меньше, чем заданное число epsilon.

На языке Бейсик это можно сделать так:

```
BASIC SUM4
10   INPUT X,epsilon
20   PRINT " при X= ";X," epsilon= ";epsilon
30   Y=-X*X : S=0 : i% =1% : P=X : r=X
40   REM начало цикла
50     S=S+r
```

```
60     i%=i%+1%
70     P=P*Y
80     r=P/(2%*i%-1%)
90     IF ABS(r) > epsilon THEN GOTO 50
100  REM цикл закончен
110  PRINT "ARCTG X = "; S
120  END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM4;
VAR X,epsilon,S,P,r,Y:real;
    i:integer;
BEGIN read(X,epsilon);
      writeln('при X= ',X,'epsilon= ',epsilon);
      Y:=-X*X; S:=0; i:=1; P:=X; r:=X;
      REPEAT S:=S+r; i:=i+1; P:=P*Y;
             r:=P/(2*i-1)
      UNTIL ABS(r) < epsilon;
      writeln(' arctg X = ',S)
END.
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN  REAL X,epsilon; read((X,epsilon));
       print(("при X= ",X," epsilon= ",epsilon));
       REAL S:=X, Y:=-X*X, P:=X;
       FOR i WHILE P*:=Y;
                   REAL r:=P/(2*i+1);
                   ABS r > epsilon
       DO S+:=r
       OD;
       print((newline,"arctg X = " , S))
END
```

Пример 18. Составить программу для получения корня степени k из заданного числа t с заданной точностью epsilon.

Записав $t = 1 + x$, воспользуемся формулой разложения

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд сходится, если $|x| < 1$. Следовательно, должно выполняться условие $0 < t < 2$.

Получаем, что

$$\sqrt[k]{t} = \sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{x}{k} + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{n!}x^n + \ldots = 1 + \frac{1}{k}x +$$
$$+ \frac{1}{k^2}\frac{(1-k)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{k^n}\frac{(1-k)\cdots(1-nk+k)}{n!}x^n + \ldots$$

После несложных преобразований видно, что для вычисления слагаемого с номером i предыдущее слагаемое следует умножить на $(1/k - i + 1)(x/i)$. Поскольку $1/k + 1$ величина постоянная, то обозначив $L = 1 + 1/k$, получим множитель перехода $r = (L/i - 1)x$. Составим программы.

На языке Бейсик:

```
BASIC SUM5
10   INPUT K%,T,epsilon
20   PRINT "Корень степени K = ";K%," из числа T= ";T
30   PRINT "с точностью eps= "; epsilon
40   L=1+1/K% : S=0 : P=1 : X=T-1 : i% =1%
50   REM начало цикла
60     S=S+P
70     i%=i%+1%
80     R=(L/i% - 1%)*X
90     P=P*R
100    IF ABS(P) > epsilon THEN GOTO 60
110  REM цикл закончен
120  PRINT "равен S= ";S
130  END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM5;
VAR i,K:integer;
    T,epsilon,L,S,P,X:real;
BEGIN read(K,T,epsilon);
      writeln('Корень степени K= ',K, 'из числа T= ',T,',');
      writeln('вычисленный с точностью ',epsilon);
      L:=1+1/K; S:=0; P:=1; X:=T-1; i:=1;
```

```
        REPEAT S:=S+P;
                i:=i+1; R:=(L/i-1)*X;
                P:=P*R
        UNTIL ABS(P) < epsilon;
        writeln('равен S= ',S)
END.
```

В этих двух программах мы не учитывали, что возможно некорректное задание начальных данных. В частности, что можно задать такое t, которое не удовлетворяет условию $0 < t < 2$.

Напишем программу на языке Алгол 68, в которой устранен этот недостаток.

```
BEGIN  INT K; REAL T,epsilon;
        read((K,T,epsilon));
        print(("Корень степени K= ",K," из числа T= ",T,",",
            newline,"вычисленный с точностью ",
            epsilon,newline));
        IF T<=0 OR T>=2
        THEN print("найти нельзя: ряд расходится ")
        ELSE REAL L:=1+1/K, S:=1, P:=1, X:=T-1;
            FOR i WHILE REAL R:=(L/i-1)*X;
                P*:=R; ABS P > epsilon
            DO S+:=P
            OD;
        print(("равен ",S))
        FI
END.
```

Пример 19. Составим программу, с помощью которой для заданного натурального N просуммируем числовой ряд:

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{N^3} + \ldots$$

и оценим погрешность через остаточный член. Нетрудно видеть, что для N-го остатка $R_N = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ имеем оценку

$$R_N \leq \int\limits_N^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2N^2}.$$

На языке Бейсик:

```
BASIC SUM6;
10   REM ввод начальных данных и подсчет погрешности
20   INPUT N%
30   R= 0.5/SQR(N%)
40   S=0
50   REM вычисление суммы
60   FOR i% =1% TO N%
70     S=S+1/(i%*SQR(i%))
80   NEXT i%
90   REM вывод результатов
100  PRINT "при N= ";N%
110  PRINT "частичная сумма= ";S
120  PRINT "погрешность не превосходит ";R
130  END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM6
VAR N,i:integer;
     S,R:real;
BEGIN read(N); R:=0.5/(N*N); S:=0;
        FOR i:=1 TO N
        DO S:=S+1/(i*i*i);
        writeln('при N= ',N,' сумма ряда= ',S);
        write('погрешность не превосходит ',R)
END
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN   INT N; read(N);
        REAL R=0.5/(N*N); REAL S:=0;
        FOR i TO N DO S+:=1/i**3 OD;
        print(("при N=",N,"сумма ряда = ",S,
                newline,"погрешность не превосходит ",R))
END
```

Пример 20. Выяснить, сколько членов ряда

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{N^3} + \ldots$$

необходимо взять, чтобы найти его частичную сумму с заданной точностью ε. Найти эту сумму, просуммировав требуемое число членов.

Используя приведенную в предыдущем примере оценку $R_N \le \frac{1}{2N^2}$, решая неравенство $\frac{1}{2N^2} \le \varepsilon$, получаем, что $N \ge \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Наименьшее значение N, вычисляемое из этого неравенства содержится в программах.

На языке Бейсик:

```
BASIC SUM7
10  REM ввод начальных данных, начальные присваивания
20  REM и вычисление числа членов ряда
30  INPUT epsilon
40  N% = 1/SQRT(2*epsilon)
50  S=0
60  REM вычисление суммы
70  FOR i%=1% TO N%
80    S=S+1/(i%*SQR(i%))
90  NEXT i%
100 REM вывод результатов
110 PRINT "чтобы получить сумму ряда с точностью ",epsilon
120 PRINT "необходимо просуммировать ";N%; " членов ряда "
130 PRINT "сумма равна ";S
140 END;
```

На языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM7;
VAR N,i:integer;
    epsilon,S:real;
BEGIN read(epsilon); N:=1/SQRT(2*epsilon);
  S:=0;
  FOR i:=1 TO N DO S:=S+1/(i*i*i);
  writeln('чтобы получить сумму ряда с точностью ',epsilon);
  writeln('необходимо просуммировать ', N,' членов ряда ');
  write('сумма равна ',S)
END.
```

На языке Алгол 68:

```
BEGIN REAL epsilon; read(epsilon);
 INT N=1/SQRT(2*epsilon); REAL S:=0;
```

```
FOR i TO N DO S+:=1/i**3OD;
print(("чтобы получить сумму ряда с точностью",epsilon,
  newline, "необходимо просуммировать", N, "членов ряда",
  newline, "сумма равна"S))
END.
```

Пример 21. Найти общий член и написать программу для суммирования N членов числового ряда

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots$$

Пусть t — слагаемое, i — номер слагаемого. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
i &= 1, \qquad t = \frac{1}{1 \cdot 2}, \\
i &= 2, \qquad t = \frac{1}{2 \cdot 3}, \\
i &= 3, \qquad t = \frac{1}{3 \cdot 4}, \\
&\vdots \\
i &= k, \qquad t = \frac{1}{k(k+1)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, множитель перехода

$$r = \frac{1-k}{1+k}.$$

В данном случае приемы программирования ничем не отличаются от рассмотренных ранее, поэтому написание соответствующих программ предоставляем читателю в качестве упражнения. Отметим лишь, что при $N = 10$ получим сумму $S = 3.8217893218\,e-01$, при $N = 50$ сумму $S = 3.8610216429\,e-01$, а при $N = 100$ сумму $S = 3.8624534872\,e-01$.

Пример 22. Найти сумму, просуммировав N членов ряда

$$S = \frac{1!}{1} + \frac{2!}{1+\frac{1}{2}} + \frac{3!}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + \ldots + \frac{N!}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}} + \ldots$$

Примечание. Этот ряд не является сходящимся, однако просуммировать некоторое число его членов вполне допустимо.

Нетрудно заметить, что в знаменателе накапливается сумма гармонического ряда, поэтому общий член данного ряда с номером i можно записать так:

$$a_i = \frac{f}{r} = \frac{i!}{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k}}.$$

Для вычисления следующего слагаемого в числителе производится умножение на очередное i, а к знаменателю добавляется слагаемое $1/i$.

Напишем соответствующую программу, например на языке Паскаль:

```
PROGRAM SUM9;
VAR N,i,f:integer;
    S,S1:real;
BEGIN read(N); S:=0; S1:=0;
      FOR i:=1 TO N DO
        BEGIN f:=f*i; S1:=S1+1/i;
              S:=f/S1
        END;
      writeln('при N= ',N,'сумма равна= ',S)
END.
```

В этой задаче необходимо помнить, что при вычислении факториала, который возрастает очень быстро, можно получить бессмысленный результат из-за переполнения. Так, при $N = 5$ имеем $S = 6.9680805132\,e + 01$. При $N = 15$ выводимый результат $S = -2.1879608765\,e + 03$ не является правильным значением суммы.

252. Написать программы для суммирования N членов для следующих рядов: 1) $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{128^2} + \ldots$ 2) $S = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^i}{i!!} + \ldots$, где $i!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots i, & \text{если } i \text{ — четно;} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots i, & \text{если } i \text{ — нечетно.} \end{cases}$

3) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2} - \ldots + \frac{(-1)^{i-1}}{(2i)!!} + \ldots$ 4) $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i x^{i-1}}{i!}$.

5) $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+1)!!} x^i$. 6) $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i+x}{i!}$. 7) $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i^2 \, x \cdot \sin(i-x)}{(n+i)!}$.

8) $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i^2+x^2}}{i!(i!!)}$. 9) $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x|+2i}{(i^2)!!}$. 10) $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} + \ldots$ 11) $\arcsin z = z + \frac{z^3}{2\cdot3} + \frac{1\cdot3\cdot z^5}{2\cdot4\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot z^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7} + \ldots$

12) $\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right]$. 13) $\ln z = 2\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right]$.

253. Написать программы для суммирования N членов следующих рядов и вычислить значения сумм для заданных n и x: 1) $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2\cdot x\cdot\sin(i-x)}{(n+i)!}$. 2) $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i^2+x^2}}{i!(i!!)}$. 3) $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x|+2i}{(i^2)!!}$.

254. Написать программы для суммирования следующих рядов до тех пор, пока модуль очередного слагаемого не окажется меньше, чем заданное ε, и вычислить суммы для заданных ε и x: 1) $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{128^2} + \ldots$ 2) $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{i-1}}{i!}$.
3) $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} x^i}{(2i+1)!!}$.

255. Написать программы, с помощью которых для заданного n можно просуммировать следующие ряды и оценить погрешность через остаточный член соответствующего ряда:

1) $S = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot1} + \frac{1}{4\cdot2} - \ldots + \frac{(-1)^i}{i!!} + \ldots$

2) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot2} + \frac{1}{6\cdot4\cdot2} - \ldots + \frac{(-1)^{i-1}}{(2i)!!} + \ldots$

256. Написать программы, с помощью которых выясняют, сколько членов необходимо просуммировать, чтобы найти частичные суммы следующих рядов с заданной точностью ε. Найти соответствующие суммы при заданных x и ε: 1) $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+x}{i!}$.
2) $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} + \ldots$ $(|z| \geq 1)$.

257. Написать программы, с помощью которых можно найти суммы следующих рядов с точностью ε и определить абсолютную погрешность, используя точные значения сумм.

Указание. Для вычисления точного значения суммы использовать стандартную функцию, стоящую в левой части равенства.

1) $\arcsin z = z + \frac{z^3}{2\cdot3} + \frac{1\cdot3\cdot z^5}{2\cdot4\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot z^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7} + \ldots$

2) $\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2z^2}{3(1+z^2)} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right]$.

3) $\ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right]$.

Раздел II. Теория функций комплексного переменного

Глава I. Комплексные числа. Функции комплексного переменного. Регулярные функции. Конформные отображения. Ветви

§1. Основные понятия о комплексных числах

1. Формы записи комплексного числа. Комплексные числа можно представить в следующих формах:

1) *алгебраическая* $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел), i — *мнимая единица*. Представление комплексного числа z в виде $a + bi$ единственно, т.е. $a + bi = a_1 + b_1 i$ тогда и только тогда, когда $a = a_1$, $b = b_1$. Вещественные числа a и b, однозначно определяемые данным комплексным числом z, называются *вещественной* и *мнимой частями числа* z соответственно (обычные обозначения $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$). Если $\operatorname{Im} z = 0$, то $z \in \mathbf{R}$; если $\operatorname{Re} z = 0$, то $z \neq 0$ называют *мнимым* (или *чисто мнимым*) числом. Комплексное число $a - bi$ называется *сопряженным* числу $a + bi$ и обозначается $\bar{z} = a - bi$. Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|z|$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отметим, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

2) *тригонометрическая* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа z, φ — какое-либо значение его аргумента. Величина φ находится из условий $\sin\varphi = b/r$, $\cos\varphi = a/r$. Множество значений аргумента φ комплексного числа z есть $\{\varphi + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$, где $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Среди всех значений аргумента комплексного числа z выделяется то, которое находится в промежутке $(-\pi, \pi]$. Оно называется *главным значением* и обозначается $\arg z$, произвольное значение аргумента обозначается $\operatorname{Arg} z$. Существует целое число k, такое, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$. Отметим, что аргумент числа нуль не определен;

3) *показательная* $z = r e^{i\varphi}$. Напомним, что согласно формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Число, сопряженное комплексному числу $z = r e^{i\varphi}$, записывается следующим образом: $\bar{z} = r e^{-i\varphi}$ (рис.1).

Если на плоскости выбрать прямоугольную декартову систему координат (рис.1), то можно установить взаимно однозначное соответствие между комплексными числами $z = a + bi$

и точками (a, b) плоскости. Плоскость при этом называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс — *вещественной осью*, ось ординат — *мнимой осью*.

Рис. 1.

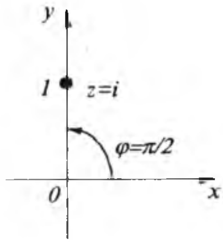


Рис. 2.

Если на плоскости наряду с декартовой имеется согласованная с ней полярная система координат OP (рис.1), то каждая точка плоскости, а значит, и каждое комплексное число, определяется полярными координатами. При этом полярный радиус точки — это модуль $r = |z|$ соответствующего числа z, а φ (аргумент комплексного числа) — полярный угол.

Пример 1. Найти модуль, главное значение аргумента и множество значений аргумента комплексного числа $z = i$.

Решение. Так как $z{=}i{=}0 + 1 \cdot i$, то $r{=}|z|{=}|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Точка $z = i$ находится на мнимой оси на расстоянии, равном 1 от начала системы координат (рис.2). Следовательно, $\arg i{=}\pi/2$, а множество значений аргумента есть $\{\pi/2 + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$.

Пример 2. Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в показательной форме.

Решение. Вычислим $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$. Число $z = -3 - 3i$ находится в третьей четверти координатной плоскости, и одно из значений его аргумента равно $5\pi/4$ (так как

$\sin\varphi = -1/\sqrt{2}$, $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$). Множество всех значений аргумента есть $\{5\pi/4 + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$. Среди этих значений выберем то, которое находится в пределах от $-\pi$ до π. Очевидно, что оно равно $-3\pi/4$ и отвечает значению $k = -1$.

Теперь, зная r и главное значение аргумента φ, данное число запишем в показательной форме: $-3 - 3i = 3\sqrt{2}\, e^{-i\,3\pi/4}$.

Можно было не находить главное значение аргумента $\varphi = -3\pi/4$ и записать данное комплексное число в виде $-3 - 3i = 3\sqrt{2}\, e^{i\,5\pi/4}$, но приведенная ранее запись предпочтительнее.

Пример 3. Число $z = \frac{1+i}{1-i}$ записать в тригонометрической форме.

Решение. Вычислим

$$r = |z| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1.$$

Так как

$$\varphi_1 = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad (\sin\varphi_1 = 1/\sqrt{1^2+1^2} = 1/\sqrt{2},\ \cos\varphi_1 = 1/\sqrt{2}),$$

$$\varphi_2 = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} \quad (\sin\varphi_2 = -1/\sqrt{2},\ \cos\varphi_2 = 1/\sqrt{2}),$$

то

$$\varphi = \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

и

$$\frac{1+i}{1-i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

(При решении использованы следующие свойства комплексных чисел: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ и $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$, где $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ — некоторое значение аргумента, а $\arg z_1$ и $\arg z_2$ — главные значения аргументов чисел z_1 и z_2.)

Пример 4. Вычислить $z = (1+i)^8(1 - i\sqrt{3})^{-6}$.

Решение. Сначала вычислим

$$r = |z| = \left|(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}\right| = |1+i|^8\,|1-i\sqrt{3}|^{-6} =$$
$$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^8 \left(\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\right)^{-6} = 2^4 \cdot 2^{-6} = \frac{1}{4}$$

и найдем какое-либо значение аргумента φ данного числа, воспользовавшись тем, что оно есть произведение двух степеней комплексных чисел $1+i$ и $1-i\sqrt{3}$:

$$\varphi = \arg\left[(1+i)^8(1-i\sqrt{3}\,)^{-6}\right] = 8\arg(1+i) - 6\arg(1-i\sqrt{3}\,) = \\ = 8\cdot\frac{\pi}{4} - 6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\pi.$$

Тогда $z = \frac{1}{4}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$, или в алгебраической форме $z = \frac{1}{4}(1+i\cdot 0) = \frac{1}{4}$.

(При решении использованы следующие свойства комплексных чисел: $|z^n| = |z|^n$ и $\operatorname{Arg} z^n = n\arg z$, где $\operatorname{Arg} z^n$ — некоторое значение аргумента числа z^n, а $\arg z$ — главное значение аргумента числа z.)

2. Множества точек комплексной плоскости.

1) Множество $E = \{z: |z-a| = R\}$, где $R > 0$, a — фиксированное число, есть *множество точек плоскости, расстояния от которых до фиксированной точки a постоянно и равно R*. Очевидно, что это *окружность с центром в точке a и радиусом R*. Уравнение окружности можно найти, если представить $z = x+iy$, $a = b+ic$, где x, y, b, c — вещественные числа. Тогда $|x+iy-b-ic| = R$, отсюда $\left|(x-b)+i(y-c)\right| = R$, или $\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2} = R$. Возводя в квадрат обе части равенства, получаем $(x-b)^2+(y-c)^2 = R^2$ — каноническое уравнение окружности с центром в точке a и радиусом R.

2) Множество $E = \{z: |z-a| < \varepsilon\}$, где a — комплексное число, $\varepsilon > 0$, — открытый круг с центром в точке a и радиусом ε, который иногда называют *ε-окрестностью точки a*.

3) Множество $E = \{z: |z| > R\}$, где $R > 0$, — внешность круга с центром в точке 0 и радиусом R. Это множество иногда называют *окрестностью бесконечности*.

Комплексная плоскость, дополненная бесконечностью, называется *расширенной комплексной плоскостью* или *полной плоскостью*.

В дальнейшем, говоря о точке $z = a$ комплексной плоскости, будем иметь в виду конечную точку (о бесконечно удаленной точке будет оговорено каждый раз особо).

4) Множество $E = \{z: 0 < |z| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, — круг с центром в точке 0 и радиусом ε с выключенной точкой $z = 0$. Иногда

это множество называют *проколотой окрестностью точки* 0, а в теории функций комплексного переменного чаще всего его называют *"вырожденным" кольцом.*

5) Множество $E = \{z : |z-a|+|z-b| = c\}$ — точки комплексной плоскости, такие, что *сумма расстояний от точки z до точек a и b равна c.* Геометрическое место таких точек есть *эллипс с фокусами в точках a и b* (по определению эллипса).

Пример 5. 1) Изобразить на плоскости множество точек z, для которых выполняются неравенства $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$; 2) Изобразить на плоскости множество точек z, для которых выполняются неравенства $|z| > 3$, $\pi/2 < \arg z < \pi$.

Решение.

1) Если комплексное число $z = x + iy$, где x, y — вещественные числа, то данную систему неравенств можно записать следующим образом: $y > 0$, $x < 0$, т.е. получим множество точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам $x < 0$, $y > 0$. Этим множеством будет вторая четверть координатной плоскости (рис.3).

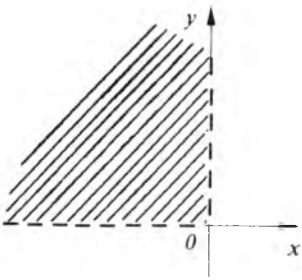


Рис. 3.

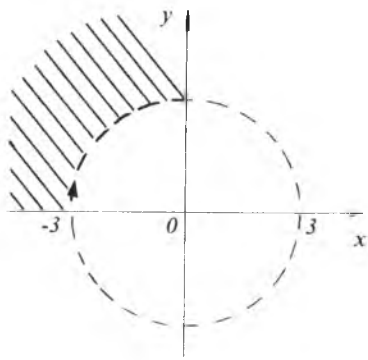


Рис. 4.

2) Множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z| > 3$, — есть внешность круга с центром в точке 0 и радиусом 3. Из второго неравенства вытекает, что $\arg z$ может изменяться только от $\pi/2$ до π. Следовательно, рассматривается та часть внешности круга $|z| > 3$, которая расположена во второй четверти координатной плоскости (рис.4).

Пример 6. Доказать, что уравнение $a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ является уравнением окружности, если a, c — вещественные, а b — комплексная постоянные, причем $ac < |b|^2$.

Решение. Если $z = x + iy$, $b = \alpha + i\beta$, то данное уравнение можно записать так:

$$a(x^2 + y^2) + 2\,\mathrm{Re}\left[(\alpha - i\beta)(x + iy)\right] + c = 0$$

или

$$a(x^2 + y^2) + 2\alpha x + 2\beta x + c = 0,$$

а это и есть уравнение окружности при сделанных предположениях о коэффициентах a, b, c.

• **1.** Найти модуль и множество значений аргумента (при этом выделить главное значение) следующих комплексных чисел: 1) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 2) а) $z=6i$, б) $z=5$; 3) $z= -1+2i$; 4) $z= -1 + i\sqrt{3}$; 5) $z = -1 - i$; 6) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$; 7) $z = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$; 8) $z=\frac{3-4i}{2i}$; 9) $z=\frac{(1-i)^2}{(i+\sqrt{3})^{12}}$; 10) $z= -2\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$.

В заданиях 1), 3), 6) записать комплексное число в показательной форме, в заданиях 4), 5) — в тригонометрической форме.

2. Изобразить на плоскости множество точек z, удовлетворяющих соотношениям: 1) $\mathrm{Re}\,z > 0$; 2) $\mathrm{Im}\,z < -2$; 3) $|\mathrm{Re}\,z| < 3$; 4) $|\mathrm{Im}\,z| < \pi$; 5) $|z| < 2$; 6) $|z + i| > 2$; 7) $2 < |z - 1 + i| < 3$; 8) $0 < |z + 1 - 2i| < 2$; 9) $\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z < 1$; 10) $\mathrm{Re}\,z > 0$, $\mathrm{Im}\,z>0$; 11) $0 < \arg z < \pi/2$; 12) $1 < |z| < 2$, $\pi/6< \arg z<\pi/4$; 13) $\mathrm{Re}\left(z(1 - i)\right) < \sqrt{2}$; 14) $|z - a| = |z - b|$, где a, b — фиксированные точки; 15) $\mathrm{Re}\,(1/z) = 1/2$.

§2. Функция комплексного переменного. Производная. Регулярные функции. Условия Коши–Римана

Рассмотрим множество E точек в плоскости z $(z = x + iy)$ и множество G точек в плоскости w $(w = u + iv)$. Если каждому числу $z \in E$ по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное число $w \in G$, то говорят, что на множестве E задана функция комплексного переменного $w = f(z)$.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z \in E$, где $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ (вещественная часть функции $f(z)$), а $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ (ее мнимая часть). Функцию комплексного переменного можно рассматривать как отображение множества $\mathbf{R}^2$ в множество $\mathbf{R}^2$.

Определение предела и производной функции комплексного переменного аналогичны соответствующим определениям для функций действительного переменного, но только имеется в виду, что точка z может стремиться к точке a по любому направлению на плоскости.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a),$$

то он называется *производной функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке a*, где a — внутренняя точка множества G.

Оказывается, что большой произвол в способе стремления точки z к точке a приводит к тому, что даже очень простые функции комплексного переменного могут не иметь производной.

Определение. Функция $f(z)$, определенная на множестве E, называется *регулярной в точке $a \in E$*, если она имеет производную в каждой точке некоторой окрестности точки a.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ была регулярной в некоторой точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функции u и v была дифференцируемы как функции двух переменных и выполнялись условия Коши–Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a). \tag{1}$$

При этом производная функции вычисляется по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Для функций комплексного переменного имеют место теоремы, аналогичные теоремам для функций действительного переменного, а именно теоремы о регулярности суммы, произведения, частного (если знаменатель отличен от нуля) двух регулярных функций.

Если функция $f(z)$ регулярна в области G, то производная $f^{(k)}(z)$ любого порядка функции $f(z)$ также будет регулярной функцией в области G.

Определение. Функция $u(x, y)$, заданная в некоторой области G на плоскости, называется *гармонической*, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Вещественная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части регулярной функции в области G являются гармоническими. Это следует из условий Коши–Римана.

Не всегда можно получить регулярную функцию $f = u + iv$ в области G, выбирая гармонические в этой области функции u и v независимо друг от друга. Например, если $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = xy$, то функция $f(z) = (x + y) + i\,xy$ не является регулярной. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$ и не выполняются условия Коши–Римана. Чтобы из двух гармонических функций u и v, заданных в области G, можно было построить регулярную функцию $f = u + iv$ в области G, функции u и v должны быть связаны в области G условиями Коши–Римана. Такие функции u и v называются сопряженными. Оказывается, что для любой данной гармонической функции u, заданной в односвязной области G, можно найти сопряженную с ней гармоническую в той же области функцию v (таких функций, зависящих от одной произвольной постоянной, может быть целое семейство) и тем самым построить регулярную функцию $f = u + iv$ (или семейство регулярных функций).

Пример 7. Найти вещественную и мнимую части функции $f(z) = 1/z$ (преобразование инверсии).

Решение. Областью определения данной функции является вся плоскость с выброшенной точкой $z = 0$.

Если $z = x + iy$, то $f(z) = 1/(x + iy)$. Умножим числитель и знаменатель на $\bar{z} = x - iy$:

$$f(z)=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{|x+iy|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Пример 8. Доказать, что функция $f(z) = \bar{z}$ не имеет производной.

Решение. Для доказательства возьмем произвольную точку $z = a$ и рассмотрим

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}.$$

Пусть $z - a = h$, тогда

$$\lim_{z\to a}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} = \lim_{z\to a}\frac{\overline{(z-a)}}{z-a} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}.$$

Рассмотрим стремление h к нулю по вещественной и мнимой осям:

1) Если $h = x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\bar{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$,

2) Если $h = iy$, то $\lim\limits_{y\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1$.

В пределе получили два разных значения. Следовательно, $\lim\limits_{z\to a}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}$ не существует, и функция $f(z) = \bar{z}$ производной не имеет ни в одной точке области ее существования.

Пример 9. Доказать регулярность функции $f(z) = z^2$.

Решение. Выделим вещественную и мнимую части данной функции:

$$f(z) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy,$$

значит, $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Вычислим частные производные функции u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Отсюда видно, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Следовательно, функция $f(z) = z^2$ регулярна в любой точке плоскости.

В частности, производная функции $f(z)$ может быть вычислена с помощью условий Коши–Римана, если использовать одну из формул (2):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i\,(2y) = 2(x + iy) = 2z.$$

Последний результат легко получить, исходя и из определения производной.

Пример 10. Доказать регулярность функции $f(z) = e^z$.

Решение. По определению показательной функции $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$. Выделим ее вещественную и мнимую части $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ и вычислим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Условия Коши–Римана выполняются. Следовательно, функция регулярна в любой точке плоскости, причем $(e^z)' = e^z$.

Пример 11. Доказать регулярность функций $\sin z$ и $\cos z$.

Решение. Из определения тригонометрических функций $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, что и свидетельствует о регулярности функций $\sin z$ и $\cos z$ как суммы двух регулярных функций.

Пример 12. Построить в полуплоскости регулярную функцию $f = u + iv$ (или семейство функций) по известной вещественной части:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad z = x + iy, \quad x > 0.$$

Решение. Искомая функция должна быть регулярной. Поэтому для нее должны выполняться условия (1) Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В данном случае все равно, какое из условий Коши–Римана использовать сначала (ибо не возникает больших трудностей при вычислении интегралов), поэтому возьмем первое условие $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, откуда

$$v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dy = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + g(x)$$

(добавляется функция, которая может зависеть от x).

Для нахождения неизвестной функции $g(x)$ используем второе условие Коши–Римана:

$$\frac{2}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g'(x) = -\frac{2y}{x^2+y^2},$$

откуда $g'(x) = 0$ и $g(x) = C$ (постоянная).

В результате $v(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y/x) + C$. Тогда $f(z) = \ln(x^2 + {}$ $+y^2) + 2i\operatorname{arctg}(y/x) + iC$, где $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Замечание. Если в предыдущей задаче потребуется построить регулярную функцию f, которая в заданной точке принимает заданное значение, например чтобы $f(1+i)$ было равно $\ln 2$, то это можно сделать при надлежащем выборе постоянной C, т. е. достаточно потребовать выполнимость следующего равенства:

$$f(1+i) = \ln 2 = \left(\ln(\sqrt{1^2+1^2}\,)^2 + 2i\,\frac{\pi}{4}\right) + iC.$$

В этом случае $\ln 2 = \ln 2 + i\pi/2 + iC$ и $C = -\pi/2$.

В итоге в правой полуплоскости построена регулярная функция $f(z) = 2\big(\ln(x^2+y^2) + 2i\operatorname{arctg}(y/x)\big) - i\pi/2$ по заданной вещественной части $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ и значению функции $f(z)$ в точке $1+i$.

• **3.** Выделить вещественную и мнимую части функций:
1) $f(z) = \frac{z-2}{z}$; 2) $f(z) = z^2$.

4. Используя определение, выяснить, существуют ли производные функций: 1) $f(z) = z$; 2) $f(z) = 5z + 2\bar{z}$.

5. Используя условия Коши–Римана, доказать регулярность функций: 1) $f(z) = az + b$; 2) $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$; 3) $f(z) = z^3$.

6. Построить регулярные функции $f = u + iv$ по следующим условиям: 1) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$; 2) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$; 3) $u(x, y) = 2e^x \sin y$; 4) $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$; 5) $v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f(2) = 0$.

7. Записать условия Коши–Римана в полярной системе координат. Применить их к решению задачи 6,5).

§3. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного. Понятие о конформных отображениях

Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке a и $f'(a) \neq 0$. Тогда $|f'(a)|$ равен коэффициенту растяжения (или сжатия) в точке a при отображении $w = f(z)$ плоскости z в плоскость w. Аргумент производной в точке a ($\arg f'(a)$) равен углу, на который следует повернуть касательную в точке a к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку a, чтобы получить направление касательной в точке $b = f(a)$ к образу этой кривой на плоскости w при данном отображении $w = f(z)$. При этом если $\varphi = \arg f'(a) > 0$, то поворот происходит в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$, то в отрицательном.

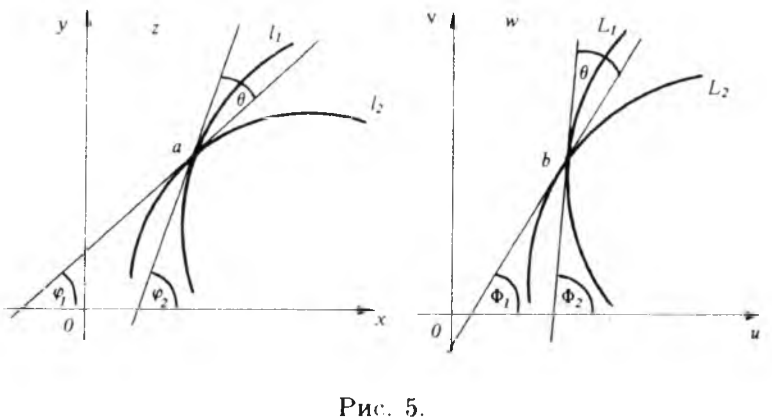


Рис. 5.

Две гладкие кривые l_1 и l_2, пересекающиеся в точке a под углом θ (рис.5) (это значит, что θ — ориентированный угол между касательными к этим кривым в точке a, $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$), имеют образами тоже гладкие кривые L_1 и L_2, проходящие через точку $b = f(a)$.

Так как $\Phi_1 = \varphi_1 + \arg f'(a)$, $\Phi_2 = \varphi_2 + \arg f'(a)$, то $\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, и поскольку $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta$, то $\Phi_1 - \Phi_2 = \theta$, а это есть угол между кривыми L_1 и L_2. Отображение, совершаемое регулярной функцией, сохраняет как по величине, так и по направлению углы во всех точках, где производная отлична от нуля.

Отображения, при которых сохраняются углы между кривыми, проходящими через данную точку, называются *конформными*.

Отображение, осуществляемое регулярной функцией $f(z)$, конформно везде, где $f'(z) \neq 0$.

Пример 13. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $a = 1 + i$.

Решение. Так как $w'(z) = 2z$, то $w'(1+i) = 2 + 2i$. Следовательно, $|w'(1+i)| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. Отсюда коэффициент растяжения равен $2\sqrt{2}$.

Найдем $\arg w'(1+i) = \arg(2+2i) = \pi/4$. Значит, угол поворота равен $\pi/4$.

Итак, гладкие кривые, проходящие через точку $1+i$ при данном отображении $w = z^2$, получат одно и то же растяжение $2\sqrt{2}$, и образы их в точке $b = (1+i)^2 = 2i$ поворачиваются на один и тот же угол $\pi/4$.

Пример 14. Найти точки, в которых у функции $w = z^2 - 2z$ нарушается конформность. Найти коэффициент подобия и угол поворота в точках 1) $a = 5$; 2) $a = 1 + i$; 3) $a = -i$.

Решение. Найдем производную данной функции: $w'(z) = 2z - 2 = 2(z-1)$. Так как $w'(z) = 0$ при $z = 1$, то в точке $z = 1$ нарушается конформность.

1) Если $a = 5$, то $w'(5) = 8$ и $|w'(5)| = 8$, $\arg f'(5) = 0$. Следовательно, образы всех гладких кривых, проходящие через точку $b = 5^2 - 2\cdot 5 = 15$, не поворачиваются, но растягиваются в 8 раз.

2) Если $a = 1 + i$, то $w'(1+i) = 2i$, откуда $|w(1+i)| = |2i| = 2$, а $\arg w'(1+i) = \pi/2$. Следовательно, гладкие кривые, проходящие через точку $1+i$, при данном отображении поворачиваются на угол $\pi/2$ и растягиваются в два раза.

3) Если $a = -i$, то $w'(-i) = 2(-1-i)$, откуда $|w(-i)| = 2\sqrt{2}$, и $\arg w'(-i) = -3\pi/4$. Следовательно, гладкие кривые, проходящие через точку $-i$, при данном отображении поворачиваются в отрицательном направлении на угол $3\pi/4$ и имеют коэффициент растяжения $2\sqrt{2}$.

• **8.** Найти угол поворота и коэффициент растяжения (сжатия) в указанных точках при следующих отображениях:
1) $w = 2+3iz$, $a=2-i$; 2) $w = z^2$: а) $a=2$, б) $a=1-i$, в) $a=1+i\sqrt{3}$; 3) $w = z^3-3z$, $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 4) $w = \frac{1}{z}$: а) $a=-i$, б) $a=1+3i$; 5) $w = \frac{z+2}{z-i}$, $a=2i$; 6) $w = e^z$, $a=i$; 7) $w = z^2 - z$, $a=1-i$.

9. Найти множества всех точек a, в которых коэффициент растяжения при следующих отображениях равен единице: 1) $w = -z^3$; 2) $w = z^2 - iz$; 3) $w = \frac{1+iz}{1-iz}$.

10. Найти множества всех точек a, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю: 1) $w=iz^4$; 2) $w=z^3$; 3) $w=z^2-2z$; 4) $w=\frac{i}{z}$.

§4. Элементарные преобразования. Линейная функция. Дробно-линейная функция

1. Элементарные преобразования. К элементарным преобразованиям относятся:

1) параллельный перенос $w = z + c$, где z — комплексная переменная, c — комплексная постоянная;

2) $w = z\,e^{i\alpha}$ — поворот вокруг начала координат (α — вещественное число) в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\alpha > 0$, и в отрицательном, если $\alpha < 0$;

3) $w = rz$ — подобие, где $r > 0$; при $r < 1$ — сжатие, при $r > 1$ — растяжение;

4) $w = 1/z$ — инверсия.

Определение. Говорят, что две кривые l_1 и l_2 в бесконечности образуют угол, равный θ, если образы этих кривых L_1 и L_2 при преобразовании инверсии $w = 1/z$ образуют в начале координат угол, равный θ.

Условимся в дальнейшем при выяснении поведения функции в окрестности бесконечности применять преобразование инверсии $w = 1/z$ с тем, чтобы бесконечность переводить в начало координат.

Пример 15. Найти образ множества E (рис.6,*а*)

$$E = \{z: |z| < 1,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$$

при следующих отображениях: а) $w = z + 2i$; б) $w = z\,e^{i\pi/4}$; в) $w = 2z$.

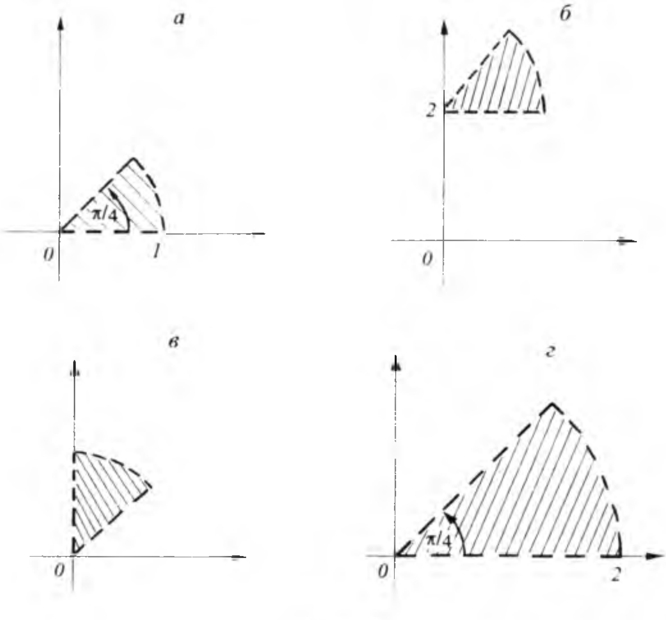


Рис. 6.

Решение. а) Параллельный перенос на $2i$, т.е. параллельный перенос на две единицы вверх по оси OY (рис.6,*б*).

б) Поворот вокруг начала координат в положительном направлении на угол $\pi/4$ (рис.6,*в*).

в) Преобразование подобия — растяжение в 2 раза (рис. 6,*г*).

Пример 16. Найти образ окружности $a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ ($ac < |b|^2$, a, c — вещественные, b — комплексная постоянные) в "широком смысле слова" (т.е. и прямой) при преобразовании инверсии $w = 1/z$.

Решение. Подставляя $z = 1/w$ в данное уравнение, имеем

$$a \cdot \frac{1}{|w|^2} + \bar{b} \cdot \frac{1}{w} + b \cdot \frac{1}{\bar{w}} + c = 0,$$

откуда $a + \bar{b}\bar{w} + bw + c|w|^2 = 0$, т.е. получили уравнение окружности в "широком смысле слова".

Пример 17. Найти образ множества $E = \{z : \ \operatorname{Im} z = 0\}$ при отображении $w = 1/z$.

Решение. Очевидно, что множество E совпадает с вещественной осью. Выразим z из соотношения $w = 1/z$, $z = 1/w$ и подставим его в соотношение $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Im}(1/w) = 0$. Отметим, что $w \cdot \bar{w} = |w|^2$, поэтому

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{w}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{w}}{w \cdot \bar{w}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right) = \frac{1}{|w|^2} \cdot \operatorname{Im} \bar{w}.$$

Отсюда $\operatorname{Im} \bar{w} = 0$ или $\operatorname{Im} w = 0$, т. е. образом вещественной оси при данном отображении снова является вещественная ось.

2. Линейная функция. Функция $w = az + b$, где $a, b, z \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, называется линейной функцией комплексного переменного z. Эта функция регулярна во всей конечной плоскости ($w'(z) = a \neq 0$), поэтому ее отображение конформно во всех точках конечной плоскости.

Если линейную функцию записать следующим образом:

$$w = |a|\, e^{i \arg a} \cdot z + b,$$

то это отображение можно разбить на цепочку элементарных преобразований:

1) $w_1 = e^{i \arg a} \cdot z$ — поворот на угол $\arg a$;

2) $w_2 = w_1 \cdot |a|$ — преобразование подобия с коэффициентом подобия, равным $|a|$;

3) $w_3 = w = w_2 + b$ — параллельный перенос.

Пример 18. Найти образ множества $E = \{z: |z-1| < 1\}$ при отображении $w = 1 - 2i\,z$.

Решение. Линейную функцию $w = 1 - 2i\,z$ разложим на элементарные:

$$w_1 = e^{-i\pi/2} \cdot z, \quad (-i = e^{-i\pi/2}); \quad w_2 = 2w_1; \quad w_3 = w_2 + 1.$$

Учитывая, что множество E — внутренние точки круга радиусом 1 с центром в точке $z = 1$, отображение можно представить так, как изображено на рис.7, а результат записать следующим образом: $w(E) = \{w : |w - 1 + 2i| < 2\}$.

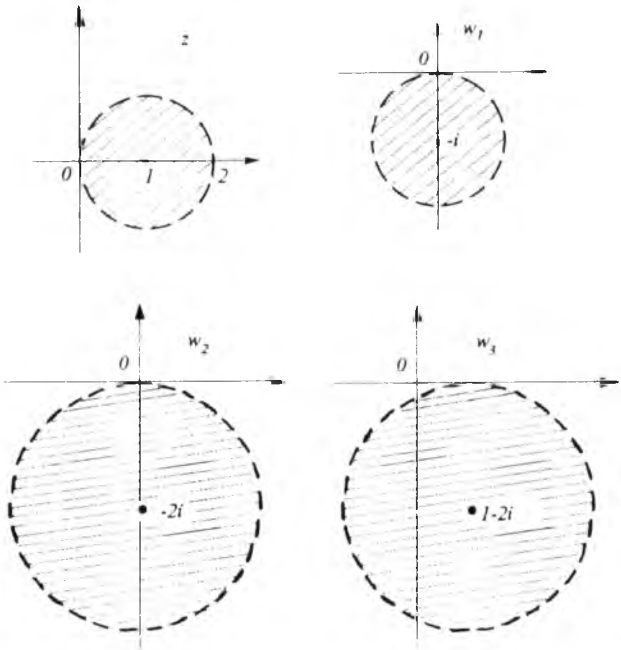


Рис. 7.

Пример 19. Найти образ множества $E = \{z : \ \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении $w = (1+i)z + 1$.

Решение. Линейную функцию $w = (1+i)z + 1$ разложим на элементарные:

$$w_1 = e^{i\pi/4} \cdot z; \qquad w_2 = \sqrt{2}\, w_1;$$
$$w_3 = w_2 + 1 \qquad \left(1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right).$$

В результате последовательно проведенных преобразований (рис.8) получим множество $w(E) = \{w: \ \mathrm{Re}\, w + \mathrm{Im}\, w < 3\}$.

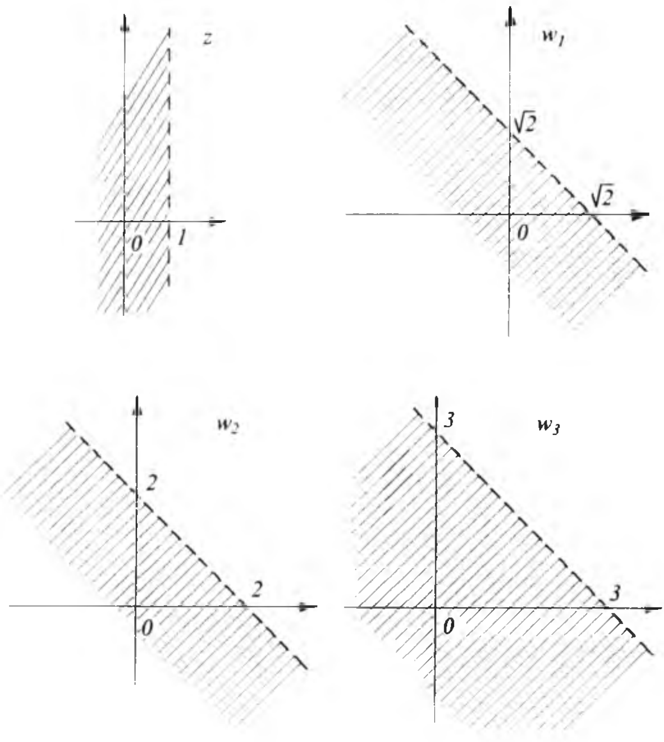


Рис. 8.

Пример 20. Пусть E — треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0, \ z_2 = -1 + i, \ z_3 = 1 + 2i$. Найти образ этого множества при отображении $w = (4 + 3i)z + 3 - 2i$.

Решение. Прежде всего отметим, что данное отображение конформно в любой точке плоскости z. Следовательно, углы между сторонами данного треугольника и углы между их образами одинаковы. Значит, искомый образ есть треугольник, а так как $w = (4+3i)z + 3 - 2i = 5e^{i \operatorname{arctg} 3/4} z + (3 - 2i)$, то он получается из данного поворотом на угол, равный $\operatorname{arctg} 3/4$, растяжением его сторон в пять раз и параллельным переносом на $3 - 2i$. Координаты вершин этого треугольника вычислить нетрудно: $w(z_1) = 3 - 2i$, $w(z_2) = -4 - i$, $w(z_3) = 1 + 9i$.

3. Дробно-линейная функция. Под дробно линейной функцией понимается отношение двух линейных функций $w = \frac{az+b}{cz+d}$, причем $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. В случае $ad - bc = 0$ получается функция, тождественно равная постоянной, а в случае $c = 0$, $d \neq 0$ — линейная функция, свойства которой рассмотрены ранее.

Дробно-линейное преобразование взаимно-однозначно (однолистно) и конформно отображает полную плоскость на себя. Его удобно представлять в следующем виде:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(az+b)} = \alpha + \frac{\beta}{z+\gamma}.$$

Дробно-линейное преобразование складывается из следующих элементарных преобразований:

1) $w_1 = z + \gamma$ — параллельный перенос;

2) $w_2 = 1/w_1$ — инверсия;

3) $w_3 = |\beta|\, w_2$ — подобие;

4) $w_4 = e^{i \arg \beta} \cdot w_3$ — поворот;

5) $w = w_4 + \alpha$ — параллельный перенос.

При дробно-линейном преобразовании *окружности "в широком смысле" отображаются на окружности "в широком смысле" (круговое свойство).*

Дробно-линейное отображение преобразует точки, симметричные относительно данной окружности, в точки, симметричные относительно преобразованной окружности. (Две точки называются симметричными относительно окружности, если пучок окружностей, проходящий через эти две точки, состоит из окружностей, ортогональных к данной.)

Существует единственное дробно-линейное отображение, переводящее три заданные различные точки a, b, c полной плоско-

сти z в три заданные различные точки A, B, C полной плоскости w:

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{C-A}{C-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Замечание. Если среди эти точек есть бесконечность (например, $c=\infty$), то предыдущая формула справедлива, но при этом отношение $\frac{c-a}{c-b}$ принимается равным единице.

Пример 21. Записать общий вид дробно-линейного отображения, переводящего верхнюю полуплоскость на единичный круг с центром в начале координат.

Решение. Запишем дробно-линейное отображение в следующем виде: $w = k\,\frac{z-a}{z-b}$, где k, a, b — неизвестные комплексные числа.

При отображении некоторая точка верхней полуплоскости перейдет в центр круга (пусть это будет точка α, $w(\alpha)=0$). Тогда симметричная ей относительно вещественной оси точка $\bar\alpha$ перейдет в бесконечность, $w(\bar\alpha)=\infty$. Значит, $a=\alpha$, $b=\bar\alpha$, откуда $w = k\,\frac{z-\alpha}{z-\bar\alpha}$.

По теоремам о регулярных функциях, удовлетворяющих некоторым условиям, внутренние точки должны переходить во внутренние, граничные — в граничные. Таким образом, точки вещественной оси, т. е. точки $z=x$, должны отображаться на точки единичной окружности $|w|=1$. Отсюда

$$|w| = \left|k\,\frac{x-\alpha}{x-\bar\alpha}\right| = 1$$

или

$$1 = |k|\,\frac{|x-\alpha|}{|x-\bar\alpha|} = |k|\,\frac{|x-\alpha|}{\left|\left(\overline{x-\alpha}\,\right)\right|}.$$

Отметим, что $|x-\alpha| = \left|\left(\overline{x-\alpha}\,\right)\right|$ (как модули комплексно-сопряженных чисел). Следовательно, $|k|=1$, или $k=e^{i\theta}$, где θ — вещественное число.

Итак, общий вид дробно-линейного преобразования, отображающего верхнюю полуплоскость на единичный круг с центром в начале координат, следующий:

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z-\bar\alpha}, \qquad (3)$$

где $\operatorname{Im}\alpha > 0$, θ — вещественное число.

Замечание. Из теоремы Римана о существовании конформного отображения при наличии двух начальных условий вытекает существование единственного отображения.

Пример 22. Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(2i) = 0$ и $\arg w'(2i) = 0$.

Решение. Так как $w(2i) = 0$, то (см. формулу (3)) $\alpha = 2i$, $\bar{\alpha} = -2i$ и $w = e^{i\theta} \frac{z-2i}{z+2i}$.

Вычислим производную функции w в точке $2i$:

$$w'(z) = e^{i\theta} \frac{4i}{(z+2i)^2}, \quad w'(2i) = e^{i\theta} \frac{4i}{(4i)^2} = e^{i\theta} \frac{-i}{4}.$$

Запишем комплексное число $e^{i\theta} \frac{-i}{4}$ в показательной форме:

$$e^{i\theta} \frac{-i}{4} = e^{i(\theta - \pi/2)}.$$

По условию задачи $\arg w'(2i) = 0$. Вместе с тем $\arg w'(2i) = \theta - \pi/2$. Следовательно, $\theta - \pi/2 = 0$ и $\theta = \pi/2$.

Итак, отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ при условии $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$ можно с помощью единственной функции

$$w = e^{i\pi/2} \frac{z-2i}{z+2i} = i \frac{z-2i}{z+2i} = \frac{iz+2}{z+2i}.$$

Пример 23. Найти образ множества $E = \{z: |z-1| < 2\}$ при отображении w: 1) $w = \frac{2iz}{z+3}$; 2) $w = \frac{z+1}{z-2}$; 3) $w = \frac{z-1}{2z-6}$.

Решение. Множество E — внутренность круга с центром в точке $z = 1$ радиусом 2 (рис.9,a).

1) Возьмем три точки на окружности $|z-1| = 2$: $z = -1$, $z = 3$ и $z = 1 + 2i$. Поскольку ни одна из точек окружности при данном отображении не переходит в бесконечность (так как $w = \infty$ при $z = -3$, а точка $z = -3$ не лежит на окружности), то образом данной окружности служит окружность, проходящая через образы точек -1, $1+2i$, 3:

$$w(-1) = -i, \quad w(1+2i) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i, \quad w(3) = i.$$

Теперь выясним, что является образом данного круга. Это можно сделать двумя способами: взять любую внутреннюю точку данного круга, например $z = 0$. Образом ее должна быть внутренняя точка множества $w(0) = 0$. Следовательно, $w(E) = \{w: |w| < 1\}$ (рис.9,б). Определить образ можно и по обходу границы области. При обходе контура, т.е. окружности $|z - 1| = 2$, в положительном направлении — от точки 3 через точку $1 + 2i$ к точке -1 — область остается слева. При обходе их образов, т.е. от точки i через точку $-3/5 + 4/5\,i$ к точке $-i$, область тоже должна быть слева — получается внутренность круга.

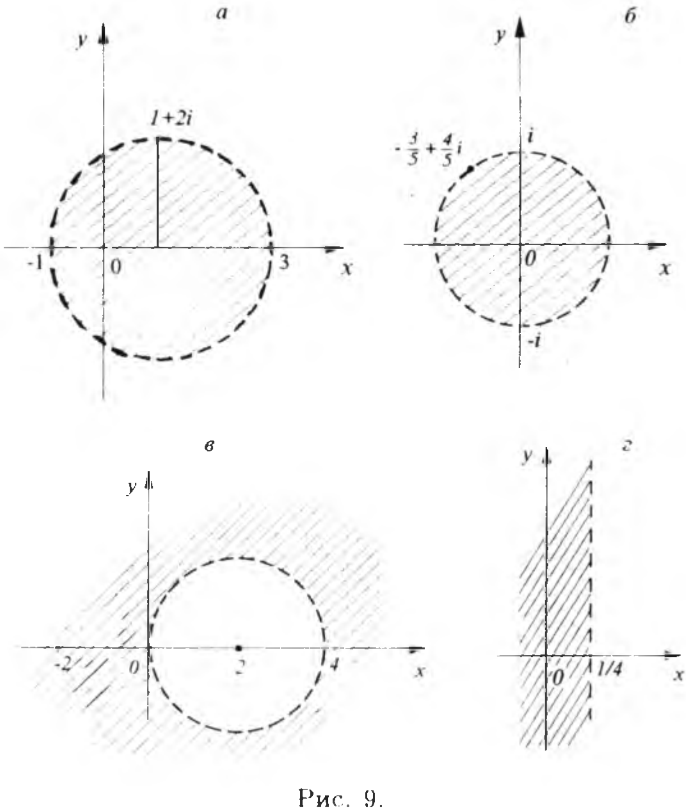


Рис. 9.

2) Так же как и в предыдущем случае, окружность $|z - 1| = 2$ отобразится на окружность. Отметим, что при отображении

$w = \frac{z+1}{z-2}$ вещественная ось отображается на вещественную ось. Угол между данной окружностью и вещественной осью в точках $z = 3$ и $z = -1$ равен $\pi/2$. Следовательно, в точках $w(3) = 4$ и $w(-1) = 0$ угол между образами данных кривых также $\pi/2$ (по конформности). Это означает, что отрезок $[0, 4]$ является диаметром окружности. Таким образом, окружность $|z - 1| = 2$ отобразится на окружность $|w - 2| = 2$, а так как $w(1) = -2$, то образом заданного круга будет внешность круга $|w - 2| > 2$ (рис.9,*в*).

3) Так как точка $z = 3$ переходит в бесконечность, то окружность данного круга отобразится на прямую. Поскольку вещественная ось отображается на вещественную ось и угол между окружностью $|z - 1| = 2$ и вещественной осью в точке -1 равен $\pi/2$, то и в точке $w(-1) = 1/4$ угол между их образами (между прямой и вещественной осью) также $\pi/2$. Значит, образом окружности $|z - 1| = 2$ служит прямая $\operatorname{Re} w = 1/4$. Остается выяснить положение полуплоскости. Возьмем внутреннюю точку $z = 1$ данного множества и найдем ее образ $w(1) = 0$. Эта точка должна быть внутренней точкой искомого множества. Следовательно, $w(E) = \{w\colon \operatorname{Re} w < 1/4\}$ (рис.9,*г*).

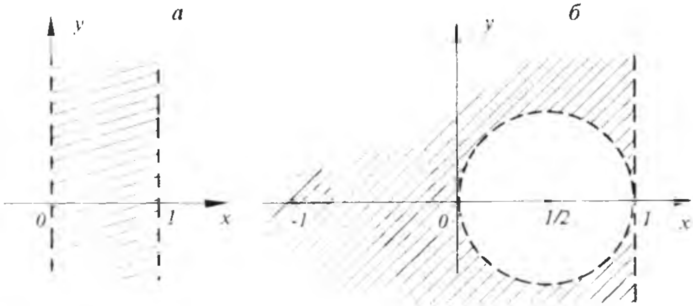
Пример 24. Найти образ множества $E = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении: 1) $w = \frac{z-1}{z}$; 2) $w = \frac{z-1}{z-2}$.

Решение. Множество E представляет собой вертикальную полосу шириной, равной 1 (рис. 10*а*).

1) Прежде всего вещественная ось при данном отображении отобразится на вещественную ось. Прямая $\operatorname{Re} z = 0$ отобразится на прямую, так как точка 0 переходит в ∞ и $w(\infty) = 1$. Тогда по конформности отображения в бесконечности найдем, что образом прямой $\operatorname{Re} z = 0$ служит прямая $\operatorname{Re} w = 1$. Данная прямая $\operatorname{Re} z = 1$ отобразится на окружность, проходящую через точки 0 и 1. Использовав конформность в точках 1 и ∞, получим окружность $|w - 1/2| = 1/2$ (рис.10,*б*). Внутренняя точка $1/2$ данной области переходит в точку -1, поэтому образом множества E при данном отображении является множество $w(E) = \left\{w :\ \operatorname{Re} w < 1,\ |w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\right\}$.

2) При данном отображении прямые $\operatorname{Re} z{=}0$ и $\operatorname{Re} z{=}1$ переходят в окружности, соприкасающиеся в точке $w{=}1$, веществен-

ная ось отображается на вещественную ось, точка $z = 0$ в точку $w=1/2$.



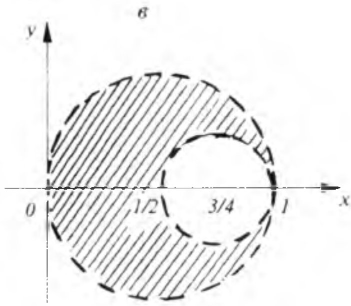


Рис. 10.

На основании конформности в точках 0 и ∞, в точках $w=1/2$ и $w=1$ можно заключить, что угол между окружностью и вещественной осью составит $\pi/2$, откуда получим окружность $|w - 3/4| = 1/4$. Аналогично определим, что прямая $\operatorname{Re} z = 1$ отображается на окружность $|w - 1/2| = 1/2$. И наконец, так как внутренняя точка $\frac{1}{2}$ данной области переходит в точку $\frac{1}{3}$, то образом множества E служит множество $w(E) = \{w: |w - 3/4| > 1/4, |w - 1/2| < 1/2\}$ (рис. 10,*в*).

• **11.** Найти образ множества E при данном отображении w:
1) $E = \{z: \operatorname{Im} z = 1\}$, $w=\frac{1}{z-i}$; 2) $E = \{z: \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 1\}$, $w=\frac{1}{z}$; 3) $E = \{z: |z - 1| = 1\}$, $w=\frac{1}{z}$.

12. Найти образ множества E при данном отображении w:
1) $E = \{z: \operatorname{Im} z < 1\}$, $w=(1 + i)z - i$; 2) $E = \{z: |z - i| < 1\}$, $w=3z + i$; 3) E — треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$; $w = (-1 - i)z + 1 + i$.

13. Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы 1) $w(i)=0$, $\arg w'(i)= -\frac{\pi}{2}$; 2) $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

14. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, отображающего единичный круг с центром в начале координат на себя.

15. Отобразить единичный круг на себя так, чтобы 1) $w(1/2)=0$, $\arg w'(1/2)=0$; 2) $w\left(\frac{1+2i}{4}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{1+2i}{4}\right)=\pi/2$.

16. Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям: 1) точки i, 1, $1+i$ переходят в точки 0, ∞, 1 соответственно; 2) точки -1, ∞, i переходят в точки ∞, i, 1 соответственно.

17. Найти образ множества E при заданном отображении w: 1) $E=\{z: |z-1|<1\}$, $w=\frac{2z}{z+2}$; 2) $E=\{z: |z|>2\}$, $w=\frac{z+2i}{z-2i}$; 3) $E=\{z: |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\frac{i-iz}{1+z}$; 4) $E=\{z: |z-1|>1,\ |z-2|<2\}$, $w=\frac{z+2}{z}$; 5) $E=\{z: 1<|z|<2\}$, $w=\frac{z+1}{z+2}$.

§5. Степенная функция. Ветви $\sqrt[n]{z}$

Степенная функция $w=z^n$ (n — натуральное число и $n\neq 1$) регулярна на всей плоскости, конформность нарушается только в точке $z=0$ ($w'(z)=n\,z^{n-1}\neq 0$ при $z\neq 0$).

Если положить $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\theta}$, то $\rho e^{i\theta}=r^n e^{in\varphi}$, и, приравнивая два комплексных числа, получаем $\rho=r^n$, $\theta=n\varphi$ с точностью до слагаемого, равного $2\pi k$. Из последних соотношений видно, что при отображении, осуществляемом степенной функцией, лучи, исходящие из начала координат, отображаются на лучи, тоже исходящие из начала координат, но угол между положительным направлением вещественной оси и лучом изменяется в n раз. Отсюда взаимно однозначным отображение будет только тогда, когда угол не превышает величины $2\pi/n$. Например, множество $E=\{z: -\pi/n<\arg z<\pi/n\}$ функция $w=z^n$ взаимно однозначно отобразит на всю плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Окружность с центром в начале координат степенной функцией $w=z^n$ отобразится тоже на окружность с центром в начале координат, но n раз обходимую, т.е. нарушается взаимная однозначность.

Определение. Если для любого $z\in E$ существует непрерывная функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая соотношению $[\varphi(z)]^n=z$, то функция $\varphi(z)$ называется *ветвью корня n-й степени из z* ($\varphi(z)=\sqrt[n]{z}$).

Ветви $\sqrt[n]{z}$ находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2\pi k}{n}},\quad k=0,1,2,\dots,n-1, \tag{4}$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z.

В любой односвязной области, не содержащей нуля, существуют ветви $\sqrt[n]{z}$. В частности, если рассмотреть плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси, то в этой области существует n ветвей $\sqrt[n]{z}$, каждая из которых является регулярной функцией.

Значение $\sqrt[n]{z}$, равное $\sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\arg z)/n}$ (т.е. при $k = 0$), называется *главным значением* $\sqrt[n]{z}$ и обозначается w_0:

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\,(\arg z)/n}. \tag{5}$$

Пример 25. Найти все значения w и выделить среди них главное w_0: 1) $w = \sqrt[5]{1}$; 2) $w = \sqrt[3]{i}$; 3) $w = \sqrt{2-2i}$.

Решение. 1) $w = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{|1|}\, e^{i\,\frac{\arg 1 + 2\pi k}{5}} = e^{i\,\frac{2\pi k}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Главное значение $w_0 = 1$ (при $k = 0$).

2) $w \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{|i|}\, e^{i\,\frac{\arg i + 2\pi k}{3}} = e^{i\,\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Главное значение

$$w_0 = e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

3) $w = \sqrt{2-2i} = \sqrt{|2-2i|}\; e^{i\,\frac{\arg(2-2i)+2\pi k}{2}}$, $k = 0, 1$. Так как $|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\arg(2-2i) = -\pi/4$, то

$$w = 2\sqrt{2}\; e^{i\,\frac{\pi/4+2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1,$$

и

$$w_0 = 2\sqrt{2}\; e^{-i\,\pi/8} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Пример 26. Найти образ множества E при отображении регулярной ветвью, выделяемой ее значением в указанной точке:

$$E = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad \sqrt{z}\Big|_{z=i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Найдем все значения $\sqrt{z}$ в точке $z = i$:

$$\sqrt{i} = \sqrt{|i|}\; e^{i\,\frac{\arg i + 2\pi k}{2}} = e^{i\,\frac{\pi/2+2\pi k}{2}} = e^{i(\pi/4+\pi k)}, \quad k = 0, 1.$$

Отсюда

$$\sqrt{i} = \left[\begin{array}{l} e^{i\,\pi/4} \\ e^{i\,5\pi/4} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{при } k = 0, \\ -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{при } k = 1. \end{array}\right.$$

Следовательно, в данной задаче рассматривается ветвь корня, полученная при $k = 0$, т.е. $w = \sqrt{|z|}\, e^{i(\arg z)/2}$. Поскольку $\operatorname{Im} z > 0$, т.е. задана верхняя полуплоскость, то $|z|$ изменяется от 0 до $+\infty$, а $\arg z$ — от 0 до π. Для главного значения корня имеем $|w| = \sqrt{|z|}$, откуда $0 < |w| < +\infty$, а $\arg w = (\arg z)/2$, поэтому $0 < \arg w < \pi/2$. Следовательно, $w(E) = \{w : 0 < \arg w < \pi/2\}$, т. е. первая четверть координатной плоскости.

Отметим, что если бы в условии задачи рассматривалась вторая ветвь корня, то в ответе бы получили не первую, а третью четверть.

П р и м е р 27. Отобразить конформно и однолистно множество $E = \{z: z\overline{\in}[i, 7i]\}$ на верхнюю полуплоскость.

Р е ш е н и е. Множество E представляет собой плоскость с разрезом по отрезку $[i, 7i]$ (рис. 11, *а*). Сначала отобразим множество E на плоскость с разрезом по лучу, исходящему из начала координат, с помощью какой-либо дробно-линейной функции w_1, отобразив один конец отрезка $[i, 7i]$ в начало координат, другой — в бесконечность: $w_1 = (z - i)/(z - 7i)$. Теперь найдем образ множества E при этом отображении: $w_1(i) = 0$, $w_1(7i) = \infty$ и возьмем какую-нибудь точку внутри

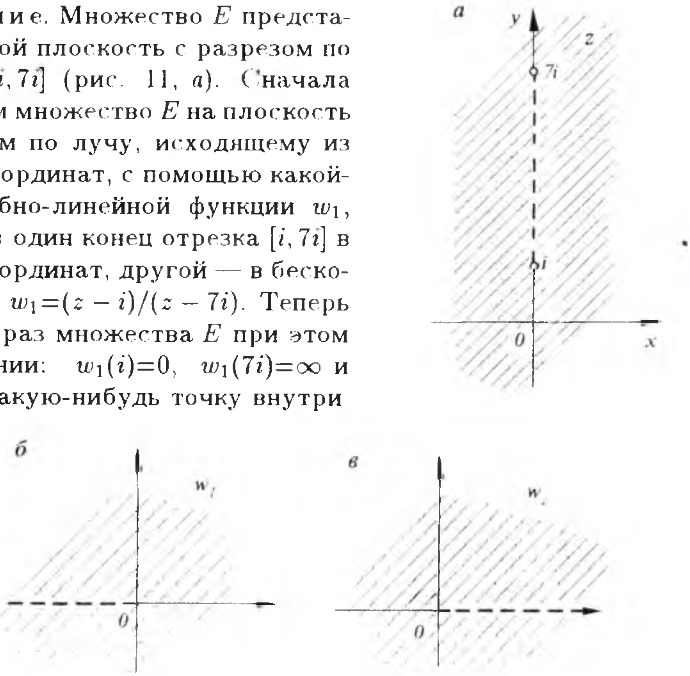


Рис. 11.

отрезка $[i, 7i]$, например $z = 6i$. Ее образ $w_1(6i) = -5$. Следовательно, образом множества E при отображении w_1 является плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси (рис.11,*б*). Далее перейдем к плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси, для чего совершим поворот на угол π в отрицательном направлении: $w_2 = w_1 e^{-i\pi}$ (рис.11,*в*). И наконец, рассмотрев главное значение корня $w_3 = \sqrt{w_2}$, получим верхнюю полуплоскость.

Пример 28. Отобразить конформно и однолистно множество $E = \left\{z : |z| < 1,\ |z - i| > 1\right\}$ на верхнюю полуплоскость.

Решение. Множество E представляет собой луночку (на рис.12,*а* заштрихована).

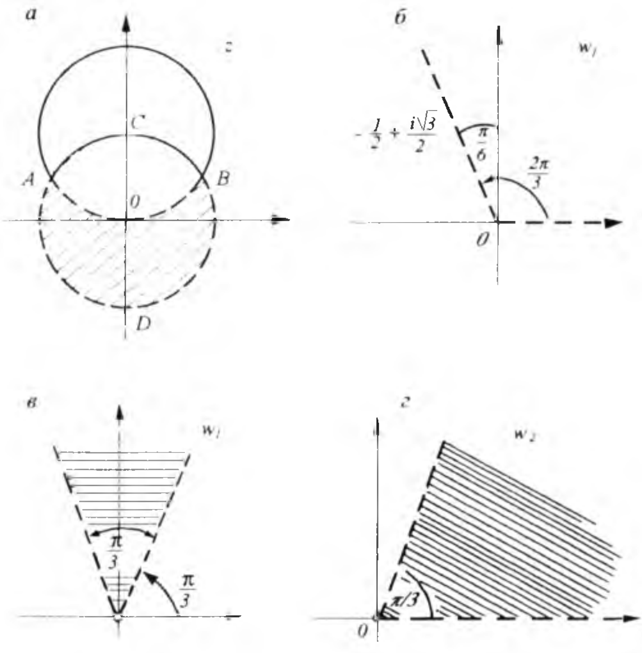


Рис. 12.

Говорят, что множество E представляет собой луночку, если оно заключено между двумя пересекающимися окружностями. Эта область довольно неудобная, однако с помощью дробно-линейного преобразования ее можно отобразить на угол так, что одна общая точка a окружностей отправляется в начало координат, другая b — в бесконечность: $w = (z - a)/(z - b)$.

Найдем точки пересечения окружностей $|z| = 1$ и $|z - i| = 1$:

$$\begin{cases} |z| = 1, \\ |z - i| = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \\ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-1)^2 = 1, \end{cases} \quad A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Угол между окружностями в точке B (точке A) равен $\pi/3$ (поскольку $\Delta\, OBC$ — равносторонний, а угол между окружностями равен углу между касательными, а последний — углу (CBO).

Запишем какое-либо дробно-линейное преобразование w_1, отображающее данную луночку на угол с вершиной в начале координат: $w_1 = (z - A)/(z - B)$. Так как $w_1(A) = 0$, $w_1(B) = \infty$ и $w_1(0) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, то дуга AOB отобразится на луч $\varphi = 2\pi/3$ (рис.12,*б*). Дуга ADB по той же причине тоже отобразится на луч, исходящий из начала координат, причем этот луч образует с первым лучом угол $\pi/3$, так как угол между окружностями равен $\pi/3$ (дробно-линейное преобразование конформно). При обходе контура AOB область остается справа. Следовательно, при обходе луча $\varphi = 2\pi/3$ от точки 0 через точку $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ к ∞ область также должна быть справа. При этом обходе дуга ADB находится справа от дуги AOB. Следовательно, луч, на который отобразится дуга ADB, должен быть справа от луча $\varphi = 2\pi/3$. Значит, луночка отобразится на внутренность угла, образованного лучами $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = \pi/3$ (рис. 12,*в*), т.е. $w_1(E) = \{w_1 : \pi/3 < \arg w_1 < 2\pi/3\}$.

Далее совершим поворот так, чтобы одна сторона угла совпала с положительным направлением вещественной оси: $w_2 = w_1 e^{-i\pi/3}$ (рис.12,*г*). Наконец, для получения верхней полуплоскости увеличим угол от $\pi/3$ до π, что можно осуществить с помощью степенной функции $w_3 = w_2^3$.

• **18.** Найти все значения w и выделить среди них главное значение w_0: 1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt{1+i}$; 3) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[5]{-1-i}$; 6) $\sqrt[3]{-2+3i}$.

19. Найти образ множества E при отображении регулярной ветвью, определенной значением ее в указанной точке:

1) $E = \{z : |z| < 9,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{z}\,\big|_{z=i/2} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

2) $E = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{z}\,\big|_{z=-1-i} = \frac{1-i}{\sqrt[6]{4}}$.

20. Отобразить конформно и однолистно множество E на верхнюю полуплоскость: 1) $E=\{z:\ -\pi/4<\arg z<\pi/4\}$; 2) $E = \{z\colon |z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\}$; 3) $E=\{z\colon |z|>1,\ \operatorname{Im} z<0\}$; 4) $E=\{z\colon |z|>1,\ |z-i|<1\}$; 5) $E=\{z\colon z\overline{\in}[0,1+i]\}$ (z не принадлежит отрезку, соединяющему точки 0 и $1+i$); 6) $E=\{z\colon z\overline{\in}[-\infty,-2]\cup[2,+\infty]\}$; 7) $E=\{z\colon \operatorname{Im} z>0,\ z\overline{\in}[0,3i]\}$; 8) $E=\{z\colon \operatorname{Im} z>0$ и z не принадлежит дуге окружности $|z|=1$ от точки $z=1$ до точки $z=e^{i\pi/4}\}$.

§6. Показательная функция. Ветви $\operatorname{Ln} z$

Показательная функция $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ однолистна (взаимно однозначна) в любой полосе, параллельной вещественной оси, шириной 2π или меньше. Очевидно, что $|w| = e^x$, $\operatorname{Arg} w = y + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и в силу периодичности $e^{z+2\pi k i} = e^z$, $k \in \mathbf{Z}$.

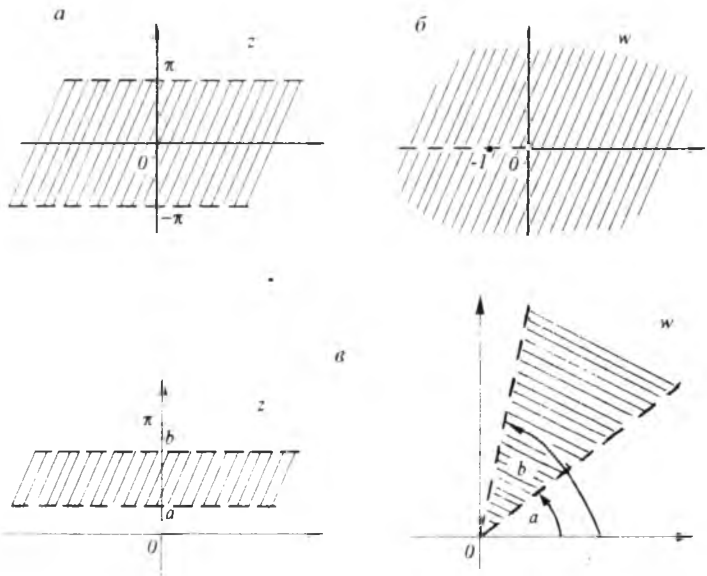


Рис. 13.

Стандартную полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ (рис.13,a) показательная функция отображает на плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси (рис.13,*б*), поскольку $x \in (-\infty, +\infty)$, $|w| = e^x \in (0, +\infty)$, а $\operatorname{Arg} w = y \in (-\pi, \pi)$.

Если рассматривать горизонтальную полосу шириной меньше 2π, $a < \operatorname{Im} z < b$, $b - a < 2\pi$, то показательная функция отображает ее на угол $(b - a)$ (рис.13,*в*).

Прямые, параллельные вещественной оси, показательная функция отображает на лучи, исходящие из начала координат, а прямые, параллельные мнимой оси, — на окружности с центром в начале координат. При этом однолистность нарушается, если ширина горизонтальной полосы больше 2π.

Определение. Если для любого $z \in E$ существует непрерывная функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая соотношению $e^{\varphi(z)} = z$, то она называется *ветвью логарифма*.

Множество значений ветвей логарифма ($\operatorname{Ln} z$) записывается так:

$$\{\ln|z| + i\theta, \text{ где } \theta = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\}, \tag{6}$$

Главное значение $\ln z$ — это та ветвь $\operatorname{Ln} z$, которая соответствует главному значению аргумента z:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi. \tag{7}$$

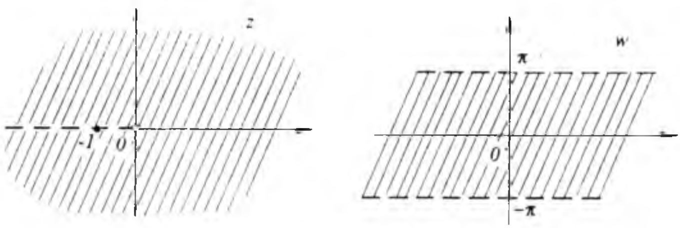


Рис. 14.

В любой односвязной области, не содержащей нуля, существуют ветви логарифма, например, в плоскости с разрезом по лучу, исходящему из начала координат. При этом главное значение $\operatorname{Ln} z$ отображает плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси на горизонтальную полосу (рис.14).

Любая ветвь $\operatorname{Ln} z$ отображает плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси на горизонтальную полосу, полученную сдвигом стандартной полосы $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ на $2\pi k\, i$, и такое отображение однолистно.

В плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси определим

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k))}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \alpha \in \mathbf{C}. \tag{8}$$

В общем случае степенная функция может иметь бесконечно много ветвей.

Пример 29. Найти все значения выражений, выделить среди них главное: 1) $\operatorname{Ln} 1$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$; 3) $\operatorname{Ln}\left[(1+i)/\sqrt{2}\right]$; 4) $\operatorname{Ln}(2+5i)$; 5) i^i; 6) $1^{\sqrt{2}}$; 7) $(1-i)^{1+i}$.

Решение.

1) $\operatorname{Ln} 1 = \ln|1| + i \arg 1 + 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $\operatorname{Ln} 1 = 0 + i \cdot 0 + 2\pi k i = 2\pi k i$. Главное значение $\ln 1 = 0$;

2) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) + 2\pi k i = 0 + i\pi + 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$. $\ln(-1) = i\pi$;

3) $\operatorname{Ln} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \ln\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| + i \arg \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} + 2\pi k i = i\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$. $\ln \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = i\dfrac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{Ln}(2+5i) = \ln\sqrt{4+25} + i \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2} + 2\pi k i = \ln\sqrt{29} + i \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2} + 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$. $\ln(2+5i) = \ln\sqrt{29} + i \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$;

5) $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(i\pi/2 + 2\pi k i)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$. Главное значение $i^i = e^{-\pi/2}$;

6) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2}\, 2\pi k i}$, $k \in \mathbf{Z}$. Главное значение $1^{\sqrt{2}} = 1$;

7) $(1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Ln}(1-i)} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} - i\pi/4 + 2\pi k i)}$, $k \in \mathbf{Z}$. Главное значение $(1-i)^{1+i} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} - i\pi/4)} = \sqrt{2}\, e^{\pi/4} \cdot e^{i(\ln\sqrt{2} - \pi/4)}$.

Пример 30. Пусть точка z движется по окружности $|z| = 2$ в положительном направлении, и для каждого из последующих выражений в точке $z = 2$ выбрано то значение, для которого $\operatorname{Im} f(z) = 0$. Считая, что в процессе движения $f(z)$ непрерывно зависит от z, выяснить каково значение $\operatorname{Im} f(z)$ после полного обхода окружности, если 1) $f(z) = 2 \operatorname{Ln} z$; 2) $f(z) = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln}(z+1)$.

Р е ш е н и е.

1) По формуле (6) найдем множество значений $2\ \mathrm{Ln}\, z$:

$$2\ \mathrm{Ln}\, z = 2(\ln|z| + i \arg z + 2\pi k i), \quad k \in \mathbf{Z},$$

и множество значений $\mathrm{Im}\, 2\ \mathrm{Ln}\, 2$:

$$\mathrm{Im}\, 2\ \mathrm{Ln}\, 2 = 2(\arg 2 + 2\pi k) = 4\pi k.$$

Так как $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ при $k = 0$, то выбирается главное значение логарифма (см. формулу (7)) $f(z) = 2(\ln|z| + i \arg z)$.

После обхода окружности $|z| = 2$ в положительном направлении $\arg z$ получает приращение, равное 2π. Следовательно, $\mathrm{Im}\, f(z)$ после полного обхода окружности изменится на 4π.

2) Сначала выделим ветви логарифма (см. формулу (6)):

$$\mathrm{Ln}\, z - \mathrm{Ln}\,(z+1) = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i -$$
$$- \left(\ln|z+1| + i \arg(z+1) + i2\pi l\right); \quad k, l \in \mathbf{Z},$$

и их мнимые части в точке $z = 2$:

$$\arg 2 + 2\pi k - \arg 3 - 2\pi l = 2\pi(k - l).$$

Очевидно, что мнимая часть в точке $z = 2$ равна нулю при $k = l$, т.е. рассматривается следующая ветвь:

$$f(z) = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i - \ln|z + i| - i \arg(z+1) - 2\pi k i =$$
$$= \ln\frac{|z|}{|z+1|} + i\left(\arg z - \arg(z+1)\right).$$

Поскольку после обхода окружности в положительном направлении $\arg z$ получает приращение 2π (обходится точка $z = 0$) и $\arg(z+1)$ — такое же приращение 2π (обходится точка $z = -1$), то в результате разность $\arg z - \arg(z+1)$ получает приращение, равное нулю, и значение $\mathrm{Im}\, f(z)$ после полного обхода окружности равно нулю.

П р и м е р 31. Найти образ множества E при отображении регулярной ветвью, определяемой ее значением в указанной точке, если

1) $E=\{z: z\overline{\in}[-\infty,0]\}$, $w=\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1}=0$;

2) $E=\{z: \overline{\in}[-\infty,0\}$, $w=\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1}=2\pi i$;

3) $E=\{z: \operatorname{Re} z>0\}$, $w=\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1+i}=\ln\sqrt{2}+i\,\pi/4$;

4) $E=\{z: \operatorname{Re} z>0\}$, $w=\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1+i}=\ln 2+i\,\pi/4-4\pi i$.

Решение.

1) Множество E есть плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

По формуле (6) найдем множество значений логарифма z:

$$\operatorname{Ln} z\big|_{z=1} = \operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i, \quad k\in\mathbf{Z}$$

(см.пример 29,1)). Рассматривается та ветвь логарифма, для которой $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1}=0$, т.е. ветвь при $k=0$:

$$w=\ln|z|+i\arg z=\ln z.$$

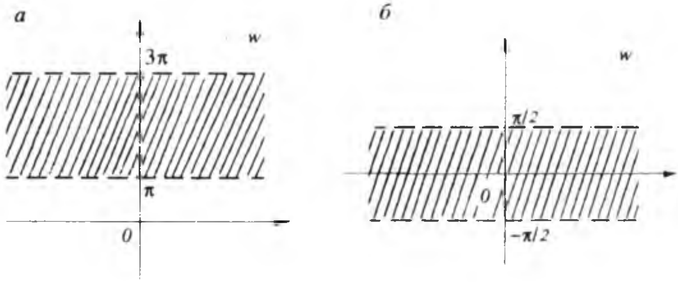
Пусть $w=u+iv$. Тогда $u=\ln|z|$, $v=\arg z$. Так как $0<|z|<+\infty$ и $-\pi<\arg z<\pi$, то $-\infty<u<+\infty$ и $-\pi<v<\pi$. Следовательно, $\ln z$ отобразит плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси на горизонтальную полосу $-\pi<\operatorname{Im} w<\pi$.

2) По формуле (6) найдем множество значений логарифма: $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1}=2\pi k i$, $k\in\mathbf{Z}$ (см. пример 29,1)). Выбирается та его ветвь, т.е. то значение k, при котором $2\pi k i$ равно $2\pi i$ $(k=1)$ и видно, что $w=\ln|z|+i\arg z+2\pi i=\ln z+2\pi i$. В данном случае функция w представима в виде суммы главного значения логарифма и слагаемого $2\pi i$, поэтому образом множества E является горизонтальная полоса, полученная сдвигом стандартной полосы на $2\pi i$, т.е. $w(E)=\{w: \pi<\operatorname{Im} w<3\pi\}$ (рис.15,*а*).

3) По формуле (6) имеем

$$\operatorname{Ln} z\big|_{z=1+i}=\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2\pi k i=$$
$$=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi k i, \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Очевидно, что выбирается главное значение логарифма (при $k=0$): $w=\ln|z|+i\arg z$. Так как $u=\ln|z|$, а $|z|\in(0,+\infty)$, то u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку $\arg z\in(-\pi/2,\pi/2)$ и $v=\arg z$, то $v\in(-\pi/2,\pi/2)$, т.е. получается горизонтальная полоса $w(E)=\{w: -\pi/2<\operatorname{Im} w<\pi/2\}$ (рис.15,*б*).



4) Рассматривается ветвь логарифма при $k=-2$, так как $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1+i} = \ln\sqrt{2} + i\,\pi/4 - 2\cdot$ $\cdot 2\pi i$, т.е. $w = \ln z - 4\pi i$. Образом множества E при данном отображении служит полоса, полученная сдвигом полосы $-\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2$ на $-4\pi i$ (рис.15,*в*).

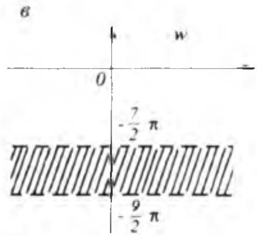


Рис. 15.

Пример 32. Отобразить множество E на верхнюю полуплоскость, если 1) $E=\{z: 2 < \operatorname{Im} z < 5\}$; 2) $E=\{z: \operatorname{Im} z > -3,\ -2 < \operatorname{Re} z < 4\}$; 3) $E=\{z: |z-i| > 1,\ |z-3i| > 1\}$.

Решение.

1) Предварительно отобразим данную полосу (рис.16,*а*) на стандартную горизонтальную полосу шириной π, для чего совершим следующие преобразования: $w_1 = z - 2i$ (параллельный перенос) (рис.16,*б*), $w_2 = w_1 \cdot \pi/3$ (подобие) (рис.16,*в*).

Рассмотрим преобразование $w_3 = e^{w_2}$. Если $w_2 = u + iv$, то $|w_3| = e^u$, $\arg w_3 = v$. Так как $u \in (-\infty, +\infty)$, то $e^u \in (0, +\infty)$. Следовательно, $|w_3|$ принимает значения от 0 до $+\infty$. Далее, поскольку v изменяется от 0 до π, то $\arg w_3$ также изменяется от 0 до π. В результате последнего преобразования получается верхняя полуплоскость (рис.16,*г*).

2) Отобразим данную полуполосу (рис.17,*а*) на горизонтальную полуполосу шириной π, для чего совершим следующие преобразования: $w_1 = z + 2 + 3i$ (параллельный перенос) (рис.17,*б*).

$w_2 = w_1 \cdot e^{i\pi/2}$ (поворот в положительном направлении на угол $\pi/2$) (рис.17,*в*), $w_3 = w_2 \cdot \pi/6$ (подобие) (рис.17,*г*) и, наконец, применение показательной функции $w_4 = e^{w_3}$.

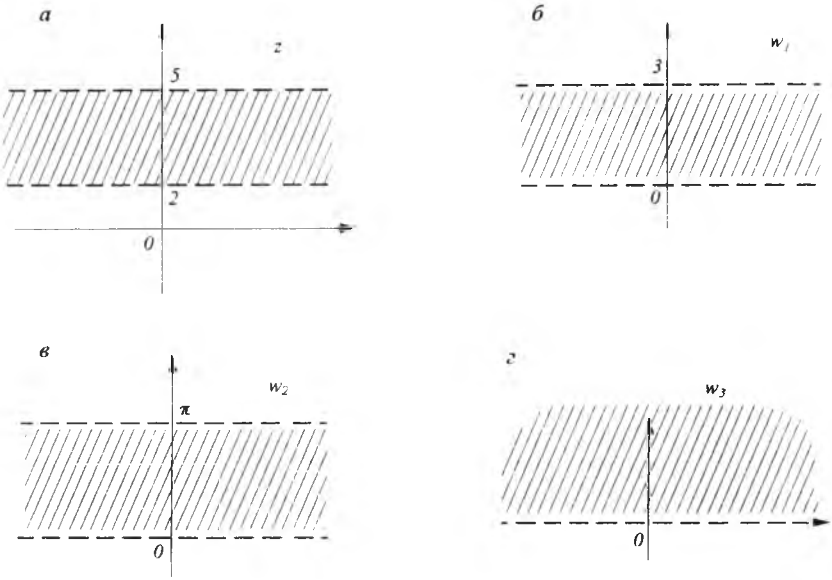


Рис. 16.

Пусть $w_3 = u + iv$. Так как $u \in (-\infty, 0)$, то $|w_4| = e^u \in (0, 1)$, откуда $\arg w_4 \in (0, \pi)$. Поэтому образом данной полуполосы при отображении e^{w_3} является множество $\{0<|w_4|<1, 0<\arg w_4<\pi\}$, т.е. верхний полукруг с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис.17,*д*). Далее от этой луночки перейдем к углу с вершиной в начале координат с помощью дробно-линейного преобразования $w_5 = (w_4 + 1)/(w_4 - 1)$. Сначала найдем образ отрезка $[-1, 1]$. Для этого возьмем на нем три точки $-1, 0, 1$, которые перейдут в точки $0, -1, \infty$ соответственно, т.е. образом отрезка $[-1, 1]$ служит отрицательная часть вещественной оси. Отметим, что угол между полуокружностью и отрезком $[-1, 1]$ в точке $z = -1$ равен $\pi/2$, а дробно-линейное преобразование конформно в любой точке, поэтому угол между образами этих кривых (т.е. между лучами) должен быть $\pi/2$.

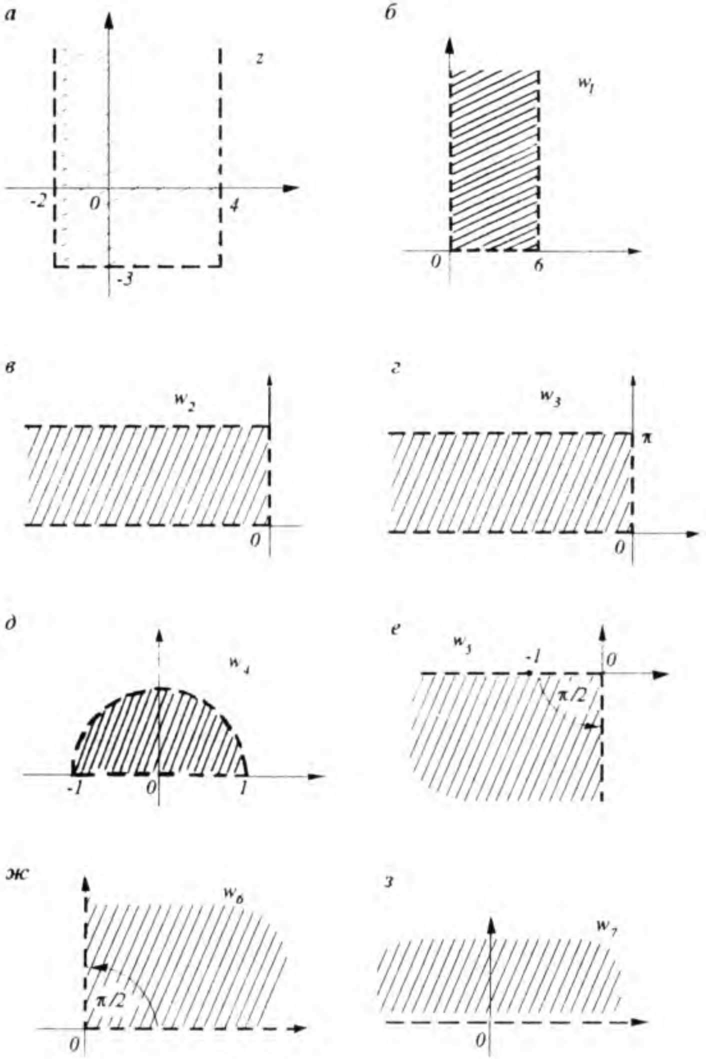


Рис. 17

Установим, в какую сторону от отрицательной части вещественной оси следует отложить угол раствора $\pi/2$. Поскольку при обходе границы полукруга от точки -1 через точку 0 к точке 1 область остается слева, то при отображении w_5 при переходе от точки 0 через точку -1 к точке ∞ область также должна оставаться слева, т.е. третья четверть (рис.17,*е*). Далее проведем преобразование "поворот" $w_6 = e^{i\pi} w_5$ и получим первую четверть (рис.17,*ж*). Используя степенную функцию $w_7 = w_6^2$, построим верхнюю полуплоскость (рис.17,*з*).

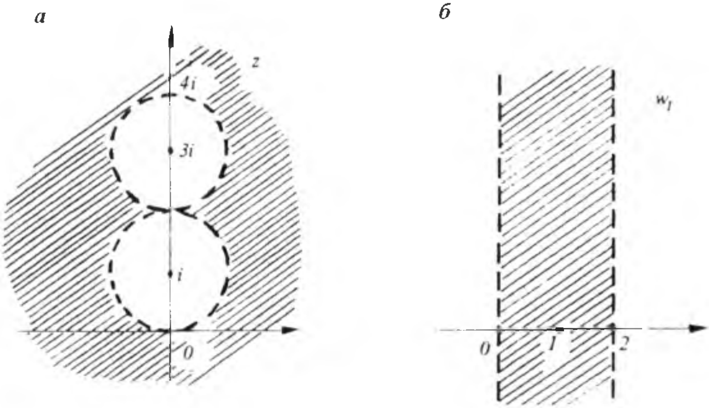


Рис. 18.

3) Множество E представляет собой всю плоскость с выброшенными двумя кругами (рис.18,*а*). Отметим, что окружности $|z - i| = 1$ и $|z - 3i| = 1$ соприкасаются в точке $z = 2i$. Отобразим их на прямые. Это можно сделать с помощью дробно-линейного преобразования, если общую точку $z = 2i$ окружностей отобразить в бесконечность: $w_1 = z/(z - 2i)$. Обратим внимание, что при этом преобразовании мнимая ось отобразится на вещественную. Так как окружности пересекаются с мнимой осью под углом $\pi/2$, следовательно, обе прямые (образы окружностей) пересекаются с вещественной осью (образом мнимой оси) тоже под углом $\pi/2$. Так как $w_1(0) = 0$, то одна прямая совпадет с мнимой осью, а поскольку $w_1(4i) = 2$, то вторая прямая проходит через точку $w_1 = 2$ перпендикулярно вещественной оси (рис.18,*б*). Теперь достаточно взять какую-либо внутреннюю точку области, например $z = \infty$. Образом ее должна быть тоже внутренняя точка $w_1(\infty) = 1$. Поэтому $w_1(E) = \{w_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < 2\}$.

Далее из вертикальной полосы поворотом и преобразованием подобия $w_2 = w_1 \cdot (\pi/2)\, e^{i\,\pi/2}$ построим горизонтальную полосу шириной π, и, наконец, преобразованием $w_3 = e^{w_2}$ получим верхнюю полуплоскость.

• **21.** Найти все значения выражений и выделить среди них главное: 1) $\mathrm{Ln}\,(1+i)$; 2) $\mathrm{Ln}\,(-10)$; 3) $\mathrm{Ln}\,3$; 4) $\mathrm{Ln}\,(-1+i\sqrt{3}\,)$; 5) $\mathrm{Ln}\,(-1-2i\sqrt{3}\,)$; 6) $\mathrm{Ln}\,\frac{i}{2-i}$; 7) $(1+i)^i$; 8) 5^i; 9) 1^i.

22. Пусть точка z движется по окружности $|z| = 2$ в положительном направлении, и для каждого из последующих выражений в точке $z = 2$ выбрано то значение, для которого $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$. Считая, что в процессе движения $f(z)$ непрерывно зависит от z, выяснить, каково значение $\mathrm{Im}\, f(z)$ после полного обхода окружности, если: 1) $f(z) = \mathrm{Ln}\,(1/z)$; 2) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\,(z+1)$.

23. Найти образ множества E при отображении регулярной ветвью $\mathrm{Ln}\, z$, определенной ее значением в указанной точке:

1) $E=\{z\colon z\overline{\in}[-\infty, 0]\}$, $\mathrm{Ln}\, z\big|_{z=2i} = \ln 2 + i\,\pi/2$;

2) $E=\{z\colon z\overline{\in}[-\infty, 0]\}$, $\mathrm{Ln}\, z\big|_{z=2i} = \ln 2 - 3i\,\pi/2$;

3) $E=\{z\colon \mathrm{Im}\, z < 0\}$, $\mathrm{Ln}\, z\big|_{z=-1-i\sqrt{3}} = \ln 2 - 2\pi\, i/3$;

4) $E=\{z\colon \mathrm{Im}\, z < 0\}$, $\mathrm{Ln}\, z\big|_{z=-1-i\sqrt{3}} = \ln 2 + 4\pi\, i/3$;

5) $E=\{z\colon |z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\mathrm{Ln}\, z\big|_{z=i/2} = -\ln 2 + i\,\pi/2$.

24. Найти образ множества E при данном отображении $w = e^z$: 1) $E=\{z\colon |\,\mathrm{Im}\, z|<\pi\}$; 2) $E=\{z\colon -\pi<\mathrm{Im}\, z<0\}$; 3) $E=\{z\colon 0<\mathrm{Im}\, z<\pi,\ \mathrm{Re}\, z>0\}$; 4) $E=\{z\colon -2<\mathrm{Im}\, z<1,\ \mathrm{Re}\, z<2\}$; 5) $E=\{z\colon \pi/4<\mathrm{Im}\, z<\pi/2\}$.

25. Отобразить множество E на верхнюю полуплоскость: 1) $E = \{z\colon \mathrm{Im}\, z < 5,\ -1 < \mathrm{Re}\, z < 2\}$; 2) $E = \{z\colon -5 < \mathrm{Re}\, z < -2\}$; 3) $E=\{z\colon |z-1| > 1,\ |z|<2\}$; 4) $E=\{z\colon |z-1|>1,\ |z+1|>1,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$.

§7. Функция Жуковского. Тригонометрическая функция $w = \sin z$

1. Функция Жуковского. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ регулярна во всех точках плоскости, кроме $z = 0$, конформна везде за исключением точек $z = \pm 1$, однолистна в тех областях, которые не содержат точек, удовлетворяющих соотношению $z_1 \cdot z_2 = 1$. Такими областями являются как внутренность единичного круга, так и его внешность, которые она отображает на плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$.

Если $z = re^{i\varphi}$ и $w = u + iv$, то зависимость между координатами при отображении при помощи функции Жуковского выглядит следующим образом:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin\varphi. \tag{9}$$

Из соотношений (9) следует, что функция Жуковского отображает окружность с центром в начале координат на эллипс

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\right]^2} = 1,$$

а луч, исходящий из начала координат, — на часть гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

В частности, окружность $|z| = 1$ отображается на дважды обходимый отрезок $[-1, 1]$, а отрезок $[0, 1]$ — на луч, идущий из точки 1 по положительной части вещественной оси.

Пример 33. Найти образ множества $E=\{z : |z|<1, \ \mathrm{Im}\, z<0\}$ при отображении функцией Жуковского.

Решение. Множество E есть полукруг с центром в точке $z = 0$ и радиусом 1, лежащий в нижней полуплоскости (рис.19,*а*).

При заданном отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отрезок $[0, 1]$ отобразится на луч $[1, +\infty]$. Действительно, из формул перехода (9) следует, что $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $v = 0$, так как $\varphi = 0$, $r \in (0, 1]$. Аналогично, отрезок $[-1, 0]$ отобразится на луч $[-\infty, -1]$. Нижняя полуокружность $r = 1$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ отобразится взаимнооднозначно на отрезок $[-1, 1]$, что следует из формул перехода (9): $u = \cos\varphi$, $v = 0$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$.

Итак, граница множества E отобразится на вещественную ось.

Остается выяснить, какая полуплоскость получится в результате отображения. Для этого возьмем какую-нибудь внутреннюю точку множества E, например $z = -i/2$, и найдем ее образ

$w(-i/2) = 3i/4$. Значит, образом множества E является верхняя полуплоскость (рис.19,*б*).

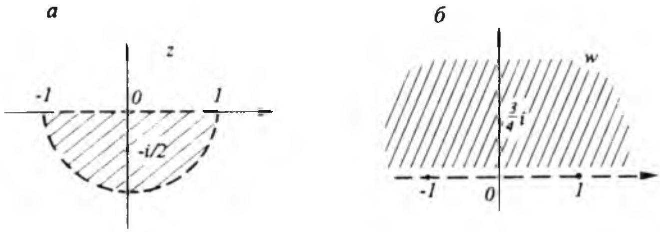


Рис. 19.

Пример 34. Отобразить множество $E=\{z\ :\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0,\ z\overline{\in}[i/2, i]\}$ на множество $G = \{w : |w| < 1\}$.

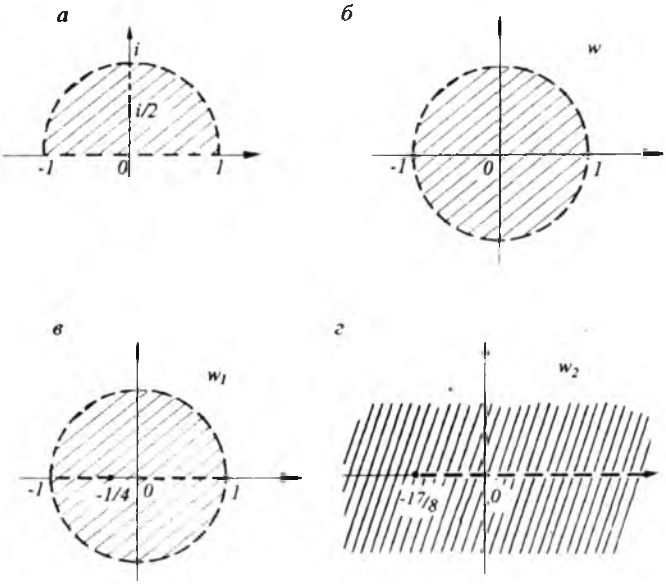


Рис. 20.

Решение. Множество E представляет собой полукруг радиусом 1 с центром в точке $z = 0$ и разрезом по отрезку $[i/2, i]$, лежащий в верхней полуплоскости (рис.20,*а*). Множество G — круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом, равным 1 (рис.20,*б*).

Преобразованием $w_1 = z^2$ отобразим отрезок $[-1, 1]$ на отрезок $[0, 1]$, отрезок $[i/2, i]$ — на отрезок $[-1, -1/4]$, данную полуокружность — на окружность $|z| = 1$. В результате получим единичный круг с разрезами по отрезкам $[-1, -1/4]$ и $[0, 1]$ (рис.20,*в*).

Далее применим функцию Жуковского $w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$, которая полученное множество отобразит на плоскость с разрезом по лучу (рис.20,*г*), исходящему из точки $-17/8$ $(w_2(-1/4) = -17/8)$. Затем совершим параллельный перенос на $17/8$: $w_3 = w_2 + 17/8$ — получим плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси. Возьмем главное значение корня $w_4 = \sqrt{w_3}$ (получим верхнюю полуплоскость) и применим дробно-линейное преобразование $w_5 = (w_4 - i)/(w_4 + i)$, которое и переведет верхнюю полуплоскость на единичный круг.

2. Функция $w = \sin z$. По определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{10}$$

Так как

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}\left[(-i\,e^{iz}) + \frac{1}{(-i\,e^{iz})}\right],$$

то отображение $w = \sin z$ можно разложить на цепочку отображений:

$w_1 = iz = e^{i\pi/2} \cdot z$ — поворот в положительном направлении на угол $\pi/2$;

$w_2 = e^{w_1}$ — показательная функция;

$w_3 = e^{-i\pi/2} \cdot w_2$ — поворот в отрицательном направлении на угол $\pi/2$;

$w_4 = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$ — функция Жуковского, где $w_3 = -i\,e^{iz}$.

Отображение $w = \sin z$ регулярно, конформно везде, где производная отлична от нуля, однолистно, если область не содержит точек, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = 2\pi k, & k \neq 0, \\ z_1 + z_2 = (2k+1)\pi, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Пример 35. Найти образ множества $E = \{z\colon -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \sin z$.

Решение. Множество E представляет собой вертикальную полуполосу шириной 2π, лежащую в верхней полуплоскости (рис.21,*а*).

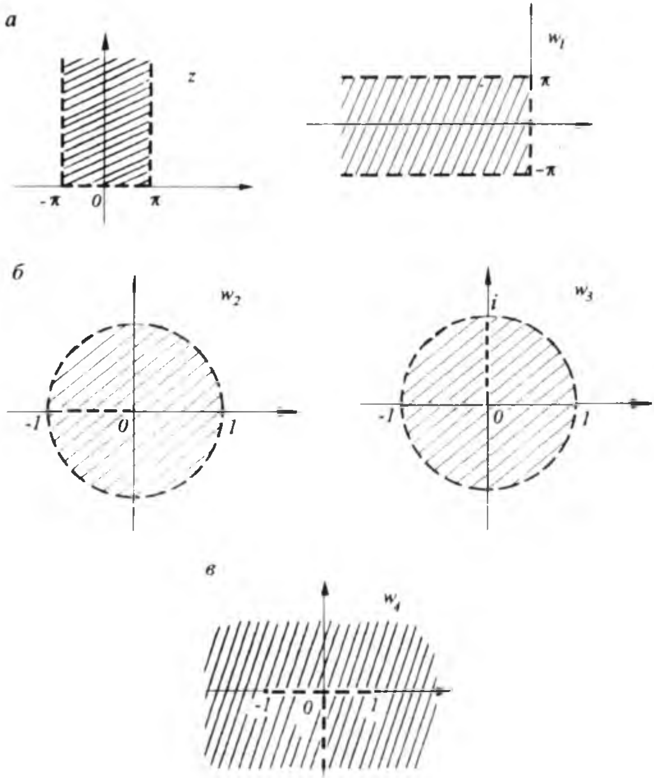


Рис. 21.

Проведя указанную выше цепочку преобразований (рис.21,*б*), получим плоскость с T-образным разрезом (рис.21,*в*).

• **26.** Найти образ множества E при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:
1) $E=\{z : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$;
2) $E=\{z : |z| < 1, \ z\notin[1/2, 1]\}$;
3) $E=\{z : |z| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$;
4) $E=\{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$.

27. Отобразить множество E на верхнюю полуплоскость:

1) $E=\{z\colon |z| < 1,\ z\overline{\in}[-1,0],\ z\overline{\in}[1/2,1]\}$;

2) $E=\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0,\ z\overline{\in}[i/2,i]\}$;

3) $E=\{z\colon |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0,\ z\overline{\in}[0,i]\}$.

28. Найти образ множества E при заданном отображении w:

1) $E=\{z\colon -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w=\sin z$;

2) $E=\{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $w=\cos z$.

29. Отобразить множество E на верхнюю полуплоскость:

1) $E=\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ -1 < \operatorname{Re} z < 1,\ z\overline{\in}[i, i\infty]\}$;

2) $E=\{z\colon |z-1| > 1,\ |z+1| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Глава II. Интеграл от функции комплексного переменного. Ряды

§1. Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши

Под контурным интегралом от функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$ $(z = x + iy,$ *u и v — вещественная и мнимая части функции* $f(z)$ *соответственно) понимается сумма двух криволинейных интегралов от вещественных функций:*

$$\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_l u\,dx - v\,dy + i\int\limits_l v\,dx + u\,dy,$$

где l — ориентированная гладкая кривая, лежащая в области G, в которой функция $f(z)$ определена и непрерывна.

Если

$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

— параметризация кривой l, то контурный интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\lambda(t)\big)\,\lambda'(t)\,dt. \tag{1}$$

Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области G, содержащей точки a и b, то справедлива формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(z)\,dz = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2}$$

где $\Phi(z)$ — первообразная функции $f(z)$.

Интегральная теорема Коши. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в односвязной области* G, *то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру* γ, *лежащему в области* G, *равен нулю:*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — кусочно-гладкие замкнутые кривые, образующие границу области G, ориентированы так, что при их обходе прилегающая часть области остается слева. Такой набор будем называть *ориентированной границей* G и обозначать ∂G.

Интегральная теорема Коши для многосвязной области. *Если функция $f(z)$ регулярна в многосвязной области $\overline{G}$, то*

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0. \tag{4}$$

Ориентированная граница (∂G) состоит из n замкнутых кусочно-гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, причем γ_1 — внешний контур, а $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ содержатся в области G (рис.22) *и каждая кривая γ_k лежит во внешности любой другой кривой γ_m $(k, m = 2, \ldots, n;\ m \neq k)$.*

Тогда

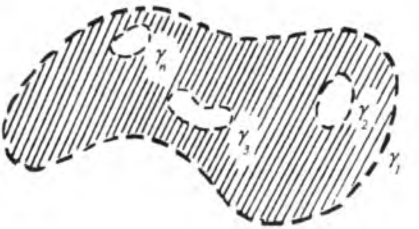


Рис. 22.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sum_{k=2}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz. \tag{4'}$$

Другими словами, интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам, если контуры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ $\ldots, \gamma_n$ обходятся в одном и том же направлении.

В дальнейшем, говоря об интеграле по ∂G, где G — круг, имеем в виду интеграл по окружности $|z - a| = r$ в соответствии с параметризацией $z = a + re^{it}$, где $t \in [0, 2\pi]$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_l |z|\,dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $3 + 4i$.

Решение. Параметризацию отрезка, соединяющего точки a и b, удобно задать следующим образом: $\lambda(t) = a(1 - t) + bt$, где $t \in [0, 1]$.

В данном примере $a = 0$, $b = 3 + 4i$. Значит,

$$\lambda(t) = 0 \cdot (1 - t) + (3 + 4i)t = (3 + 4i)t,$$

где $t \in [0, 1]$. Поэтому по формуле (1) имеем

$$\int_l |z|\, dz = \int_0^1 \left|(3 + 4i)t\right| \cdot \left[(3 + 4i)t\right]' dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 16} \cdot t\,(3 + 4i)\, dt =$$

$$= 5(3 + 4i) \int_0^1 t\, dt = 5(3 + 4i)\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{15}{2} + 10\, i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_l \bar{z}\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки i и $1 - 2i$.

Решение. Параметризация отрезка l

$$\lambda(t) = i(1 - t) + (1 - 2i)t = t + i(1 - 3t),$$

где $t \in [0, 1]$, поэтому по формуле (1) имеем

$$\int_l \bar{z}\, dz = \int_0^1 \left[t - i(1 - 3t)\right](1 - 3i)\, dt =$$

$$(1 - 3i) \left[\frac{1 + 3i}{2} t^2 - it\right] \bigg|_0^1 = 2 - i.$$

Пример 3. Вычислить $J = \int_l \frac{dz}{(z - a)^m}$, где l — окружность $|z - a| = r$, m — целое число.

Решение. Введем параметризацию окружности с центром в точке a и радиусом r: $\lambda(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда по формуле (1)

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{r\, i\, e^{it}}{(a + re^{it} - a)^m}\, dt = ir^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t} dt.$$

Рассмотрим два случая:

а) если $m = 1$, то $J = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i$;

б) если $m \neq 1$, то

$$J = ir^{1-m}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt = \frac{ir^{1-m}}{i(1-m)}\, e^{i(1-m)t}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{r^{1-m}}{1-m}\left(e^{(1-m)2\pi i} - 1\right) = 0,$$

так как $e^{(1-m)2\pi i} = 1$, ибо $(1-m)$ — целое число.

Итак,

$$J = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } m = 1, \\ 0, & \text{если } m \neq 1, \ m \text{ — целое число.} \end{cases}$$

Пример 4. Вычислить следующие интегралы по границе (∂G) области G:

1) $\int\limits_{\partial G} z^4 dz$, где $G=\{z\colon |z|<2\}$; 2) $\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z^2+4}$, где $G=\{z\colon |z|<1\}$;

3) $\int\limits_{\partial G} e^{z^2} dz$, где $G=\{z\colon |z+i|<1\}$; 4) $\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z}$, где $G=\{z\colon 1<|z|<2\}$.

Решение.

1) Функция $f(z) = z^4$ регулярна в замкнутом круге $|z| \le 2$, поэтому она регулярна в более широкой области, содержащей этот круг, и по интегральной теореме Коши интеграл по окружности $|z| = 2$ от этой функции будет равен нулю.

2) Хотя функция $f(z) = 1/(z^2+4)$ имеет "плохие" точки — те, где знаменатель z^2+4 равен нулю, т.е. точки $\pm 2i$, но поскольку они не принадлежат $\overline{G}$, то согласно формуле (3) интеграл равен 0.

3) Функция $f(z) = e^{z^2}$ регулярна на всей комплексной плоскости, поэтому интеграл по окружности $|z+i| = 1$ от данной функции равен 0.

4) Функция $f(z)=1/z$ регулярна в замкнутом кольце $1\le|z|\le 2$. Но кольцо не является односвязной областью, поэтому для вычисления этого интеграла применим формулы (4) и (4′):

$$\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z} = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

где окружности $|z| = 2$ и $|z| = 1$ обходятся, например, в положительном направлении. Последний интеграл вычислен ранее (см. пример 3), и он равен $2\pi i$. Значит, и данный интеграл также равен $2\pi i$.

• **30**. Вычислить:

1) $\int\limits_{l} |z|\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $1 + 2i$;

2) $\int\limits_{l} |z|\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки i и $2i$;

3) $\int\limits_{l} \bar{z}\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки 1 и i;

4) $\int\limits_{l} \bar{z}\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки i и $2 + 2i$;

5) $\int\limits_{l} (\operatorname{Im} z)\, dz$, где l — ломаная линия с вершинами в точках 0, $1 + i$, $2 + i$;

6) $\int\limits_{l} z^2 dz$, где l — ломаная линия с вершинами в точках 0, $1 + i$, $2 + i$;

7) $\displaystyle\int\limits_l \frac{dz}{z-i}$, где l — полуокружность $|z-i|=1$, расположенная в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$);

8) $\displaystyle\int\limits_l \bar{z}\, dz$, где l — дуга окружности $|z|=1$, расположенная в первой четверти ($\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$);

9) $\displaystyle\int\limits_l e^{\bar{z}}\, dz$, где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $1+i$;

10) $\displaystyle\int\limits_l \frac{\bar{z}}{z}\, dz$, где l — полуокружность $|z|=2$, расположенная в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} z < 0$), обходимая от точки 2 к точке -2.

• **31**. Вычислить интегралы по границе (∂G) области G:

1) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z^2+10}$, где $G=\{z\colon |z+i|<1\}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \cos(z^2)\, dz$, где $G=\{z\colon |z|<3\}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z^3+4z}$, где $G=\{z\colon |z-2|<1\}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z-i}$, где $G=\{z\colon |z-i|<1\}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z-i}$, где $G=\{z\colon 1<|z-i|<2\}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z-i}$, где $G=\{z\colon 1<|z-2|<2\}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{z^2}\, dz$, где $G=\{z\colon |z+2i|<1\}$.

§2. Интегральная формула Коши

Теорема. *Если функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области G, непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, то ее значение в любой внутренней точке z этой области выражается через значение функции на границе области с помощью интеграла Коши:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \tag{5}$$

где граница области G обходится в положительном направлении (т.е. при обходе границы область остается слева).

Функция, регулярная в области G, бесконечно дифференцируема, т.е. имеет в этой области производные любого порядка, которые находятся по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \tag{6}$$

где K — замкнутый круг с центром в точке z, $K \subset G$, ∂K — граница круга. Если f непрерывна в $\overline{G}$, то интегрировать можно и по границе области G.

П р и м е р 5. Вычислить $J = \int_{\partial G} \dfrac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi$, если:
1) $G=\{z\colon |z+2| < 1\}$; 2) $G=\{z\colon |z+2| < 3\}$; 3) $G=\{z\colon |z| < 1\}$;
4) $G=\{z\colon |z| < 3\}$; 5) $G=\{z\colon |z+2| < 6\}$.

Р е ш е н и е.

1) Подынтегральная функция имеет две "плохие" точки: $z = 0$ и $z = -7$ (в этих точках знаменатель обращается в нуль). Область G представляет собой круг с центром в точке -2 и радиусом 1, причем в этом замкнутом круге функция регулярна, поэтому согласно формуле (3) интеграл $J = 0$.

2) Здесь области G принадлежит точка $z = 0$, в которой подынтегральная функция не регулярна.

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi} = \frac{e^{\xi}/(\xi + 7)}{\xi} = \frac{f(\xi)}{\xi - 0},$$

где данная функция уже будет регулярной в области G. Поэтому, применяя формулу Коши (5), получаем

$$J = \int\limits_{|\xi+2|=3} \frac{f(\xi)}{\xi - 0}\, d\xi = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{7} = \frac{2\pi i}{7}.$$

3) В этом случае, так же как и в примере 2, точка $z = 0$ принадлежит области G, поэтому

$$\int\limits_{|\xi|=1} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi = \int\limits_{|\xi+2|=3} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi = \frac{2\pi i}{7}.$$

4) Заметим, что интеграл не изменяет своего значения, если в области G не попадает новая особая точка. Поэтому здесь, как и в примере 3), снова получается то же значение интеграла, т.е. $J = \frac{2\pi i}{7}$.

5) В данном случае обе точки $z = 0$ и $z = -7$ лежат внутри области G. Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z = 0$ и $z = -7$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в области G (рис.23).

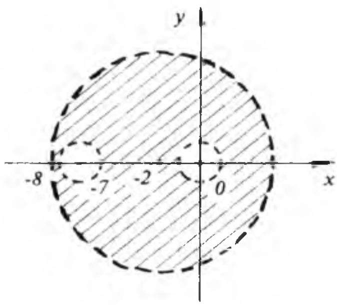


Рис. 23.

В многосвязной области, ограниченной окружностями $|z + 2| = 6$, γ_1 и γ_2, функция регулярна. Поэтому по интегральной теореме Коши для многосвязной области (формула (4′)) имеем

$$\int\limits_{|\xi+2|=6} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi,$$

где все окружности обходятся в положительном направлении.

К каждому интегралу, стоящему в правой части, можно применить интегральную формулу Коши (5):

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{\xi}}{\xi^2 + 7\xi}\, d\xi = \frac{2\pi i}{7}$$

(см. пример 1, 2)–4)). Если преобразовать первый интеграл:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{\xi}}{\xi^2+7\xi}\,d\xi = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{e^{\xi}}{\xi}\right)}{\xi+7}\,d\xi,$$

то функция $f(z) = e^z/z$ будет регулярной внутри области γ_1, поэтому по формуле (5)

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{e^{\xi}}{\xi}\right)}{\xi-(-7)}\,d\xi = f(-7)\cdot 2\pi i = \frac{e^{-7}\,2\pi i}{-7} = -\frac{2\pi i}{7}e^{-7}.$$

В результате получим

$$J = \frac{2\pi i}{7} - \frac{2\pi i}{7}e^{-7} = \frac{2\pi i(1-e^{-7})}{7}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{e^{\xi}}{(\xi-i)^3}\,d\xi,$$

где $G=\{z\colon |z|<3\}$.

Решение. Так как функция $f(z)=e^z$ регулярна в замкнутой области G, то, применяя формулу (6) при $n=2$, имеем

$$J = \frac{f''(i)}{2!} = \frac{e^i}{2}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{\partial G} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-1)}\,dz,$$

где $G=\{z\colon |z|<2\}$.

Решение. Две особые точки подынтегральной функции $z=-1$ и $z=1$ лежат внутри области G, поэтому построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в указанных точках достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в области G. Тогда по интегральной теореме Коши для многосвязной области (формула (4′)) имеем

$$J = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-1)}\, dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-1)}\, dz,$$

где границы γ_1 и γ_2 обходятся в положительном направлении.

Первый интеграл вычислим по формуле (6) для функции $f(z) = \frac{e^{2z}}{z-1}$ при $n = 1$:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{2z}/(z-1)}{(z+1)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!}\, f'(-1) =$$
$$= 2\pi i \left[\frac{2e^{2z}(z-1) - e^{2z}}{(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=-1} = -\frac{5}{2}\, e^{-2}\pi i.$$

Второй интеграл найдем по интегральной формуле Коши (5) для функции $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$:

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\left(e^{2z}/(z+1)^2\right)}{z-1}\, dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, \frac{e^2}{4} = \frac{e^2\pi i}{2}.$$

В результате

$$J = -\frac{5}{2}\, e^{-2}\pi i + \frac{e^2\pi i}{2} = \frac{\pi i}{2}\,(e^2 - 5e^{-2}).$$

• Вычислить следующие интегралы по границе (∂G) области G:

32. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{\sin z}{z^2+4}\, dz$, где: 1) $G = \{z\colon |z| < 1\}$; 2) $G = \{z\colon |z-2i| < 2\}$; 3) $G = \{z\colon |z+2i| < 2\}$; 4) $G = \{z\colon |z| < 3\}$.

33. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{z^2-2z}\, dz$, где: 1) $G = \{z\colon |z-2| < 1\}$; 2) $G = \{z\colon |z| < 1\}$; 3) $G = \{z\colon |z+1| < 4\}$; 4) $G = \{z\colon |z+2| < 1\}$.

34. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{ze^z}{(z+i)^3}\, dz$, где $G = \{z\colon |z-i| < 3\}$.

35. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, где: 1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 вне контура G; 2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура G; 3) точки 0 и 1 лежат внутри контура G.

36. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{z}{(z^2-1)(z-1)}\,dz$, где: 1) $G = \{z\colon |z+1| < 1\}$; 2) $G = \{z\colon |z-1| < 1\}$; 3) $G = \{z\colon |z-i| < 3\}$.

37. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{\cos z}{(z-i)^2}\,dz$, где $G = \{z\colon |z-1-i| < 2\}$.

38. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{\cos z}{z^3(z^2+1)}\,dz$, где $G = \{z\colon |z+i| < \frac{3}{2}\}$.

§3. Степенные ряды. Формула Коши–Адамара

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где a, c_n — комплексные числа, z — комплексная переменная.

Областью сходимости этого степенного ряда является круг с центром в точке a и радиусом R $(0 < R < +\infty)$, который определяется по формуле Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (7)$$

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в одной точке $z = a$; если $R = +\infty$, то областью сходимости степенного ряда является вся плоскость.

Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z-a| < R$, то она в этом круге единственным образом разлагается в степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и этот ряд есть ряд Тейлора для функции $f(z)$, т. е.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \quad n = 0, 1, \ldots. \qquad (8)$$

где γ — окружность с центром в точке a, лежащая внутри данного круга.

Основные свойства степенных рядов в вещественном анализе справедливы и в комплексном анализе.

Пример 8. Функцию $f(z) = 1/(z+2)$ разложить в степенной ряд в окрестности точки: 1) $a = 0$; 2) $a = 1 - i$.

Решение.

1) Найдем производную n-го порядка данной функции:

$$f^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{z+2}\right)^{(n)} = \left[(z+2)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(z+2)^{-n-1}$$

и вычислим значения производных в точке $z = 0$: $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!\, 2^{-n-1}$. Тогда $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n\, 2^{-n-1}$, и функция разлагается в окрестности точки $a = 0$ в следующий ряд Тейлора:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\, z^n.$$

Найдем радиус сходимости этого ряда (формула (7)):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|(-1)^n 2^{-n-1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{2^{-n-1}}} =$$

$$= \frac{1}{2^{-1}\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{2^{-1}}} = 2.$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 0$ имеет место в круге $|z| < 2$.

Отметим, что разложить функцию в ряд Тейлора можно и другим способом, используя известные разложения элементарных функций в степенные ряды. В нашем случае воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n, \quad \text{если } |\xi| < 1. \tag{9}$$

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

Используем разложение (9), полагая $\xi = -z/2$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,z^n,$$

причем разложение имеет место, если $|-z/2| < 1$, т.е. при $|z| < 2$.

2) При решении воспользуемся разложением (9), для чего преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-1+i)-(i-3)} = -\frac{1}{i-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1+i}{i-3}} =$$
$$= -\frac{1}{i-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1+i}{i-3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3-i)^{n+1}}\,(z-1+i)^n.$$

(Здесь положено $\xi = \frac{z-1+i}{i-3}$.)

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{z-1+i}{i-3}\right| < 1$, $|z-1+i| < |i-3|$ или $|z-1+i| < \sqrt{10}$, т.е. радиус сходимости $R = \sqrt{10}$.

Пример 9. Функцию $f(z) = e^z$ разложить в степенной ряд в окрестности точки $a = 1+i$.

Решение. Воспользуемся известным разложением элементарной функции e^{ξ} в окрестности точки $a = 0$:

$$e^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}. \qquad (10)$$

Напомним, что $R = +\infty$, т.е. ряд сходится на всей плоскости: $|\xi| < +\infty$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(z) = e^z = e^{(z-1-i)+(1+i)} = e^{z-1-i}\cdot e^{1+i}.$$

Если положить $\xi = z-1-i$, то по формуле (10) придем к следующему разложению данной функции в степенной ряд:

$$f(z) = e^z = e^{1+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n!},$$

причем $R = +\infty$, т.е. ряд сходится для всех z.

Пример 10. Функцию $f(z) = \sin z$ разложить в степенной ряд в окрестности точки $a = i$.

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(z) = \sin z = \sin\left[(z-i)+i\right] =$$
$$= \cos i \cdot \sin(z-i) + \sin i \cdot \cos(z-i)$$

и воспользуемся известными разложениями элементарных функций в степенные ряды в окрестности точки $a = 0$:

$$\sin\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\xi^{2n+1}, \quad |\xi| < +\infty, \tag{11}$$

$$\cos\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\xi^{2n}, \quad |\xi| < +\infty. \tag{12}$$

Приняв в формулах (11) и (12) $\xi = z - i$, получим

$$f(z) = \sin z = \cos i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(z-i)^{2n+1} +$$
$$+ \sin i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(z-i)^{2n},$$

причем радиус сходимости $R = +\infty$.

Пример 11. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $a = 0$ ветвь корня $\sqrt{z+i}$, определяемую значением в указанной точке:

$$\sqrt{z+i}\,\Big|_{z=0} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Известно, что у корня квадратного могут существовать две ветви (см. главу I, §5, формула (4)). С помощью начального условия определим, какая ветвь рассматривается. Для этого сначала найдем все значения $\sqrt{z+i}$ при $z = 0$:

$$\sqrt{z+i}\,\Big|_{z=0} = \sqrt{i} = \sqrt{|i|}\,e^{i\,\frac{\arg i + 2\pi k}{2}} = e^{i\,\frac{\pi/2+2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

Следовательно,

$$\sqrt{i}=\begin{cases} e^{i\,\pi/4}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} & \text{если } k=0,\\ e^{i\,5\pi/4}=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} & \text{если } k=1,\end{cases}$$

и надо рассматривать главное значение корня (см. главу I, §5, формула (5)), т. е. ветвь корня при $k=0$.

Разложим данную ветвь в степенной ряд, Для этого проще всего использовать разложение ветвей $\sqrt[n]{1+\xi}$ в окрестности точки $\xi=0$:

$$\sqrt[n]{1+\xi}=(\sqrt[n]{1})\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-k+1\right)}{k!}\right)\xi^k, \quad (13)$$

где $|\xi|<1$, а $\sqrt[n]{1}=e^{i\,\frac{2\pi k}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. При каждом фиксированном k получится разложение определенной ветви корня в степенной ряд.

Проведем следующие преобразования: $\sqrt{z+i}=\sqrt{i}\cdot\sqrt{1+z/i}$, где $\sqrt{i}=(1+i)/\sqrt{2}$. Использовав формулу (13) при $\xi=z/i$, $n=2$, получим разложение регулярной ветви корня в степенной ряд

$$\sqrt{z+i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\left(\frac{z}{i}\right)^k\right)=$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\,1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2^k\cdot k!\,(i)^k}\,z^k\right)=$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{i^k}\,\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,z^k\right),$$

который сходится для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z/i|<1$, или $|z|<|i|$, или $|z|<1$.

Пример 12. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $a=1$ ветвь логарифма, определяемую значением в указанной точке: $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1}=-4\pi i$.

Решение. Отметим, что множество значений ветвей ($\operatorname{Ln} z$) логарифма z (см. главу I, §6, формула (6)) записывается так:

$$\{\ln|z|+i\arg z+2\pi k i:\ k\in\mathbf{Z}\},$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента z (см. главу I, §6, формула (7)).

Найдем все значения $\operatorname{Ln} 1$: $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$ (см. главу I, §6, пример 1).

В нашем примере рассматривается та ветвь логарифма, для которой значение $\operatorname{Ln} z\big|_{z=1} = -4\pi i$, т.е. $2\pi k i = -4\pi i$, откуда $k = -2$. Следовательно, в степенной ряд в окрестности точки $a = 1$ надо разложить функцию $f(z) = \operatorname{Ln}|z| + i\arg z - 4\pi i = \ln z - 4\pi i$, где $\ln z$ — главное значение логарифма z.

При решении проще всего использовать разложение в окрестности точки $a = 0$ главного значения $\ln(1+\xi)$:

$$\ln(1+\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\xi^n}{n}, \quad |\xi| < 1. \tag{14}$$

Для этого проведем преобразования

$$f(z) = \ln z - 4\pi i = \ln\left[1 + (z-1)\right] - 4\pi i$$

и применим формулу (14), полагая $\xi = z - 1$:

$$f(z) = -4\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n},$$

где $|z - 1| < 1$.

Пример 13. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $a = 0$ ветвь $\operatorname{Ln}(z^2 - 3z + 2)$, определяемую значением $\operatorname{Ln}(z^2 - 3z + 2)\big|_{z=0} = \ln 2 - 2\pi i$.

Решение. Прежде всего найдем все значения $\operatorname{Ln} 2$:

$$\operatorname{Ln}(z^2 - 3z + 2)\big|_{z=0} = \operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + i\arg 2 + 2\pi k i = \\ = \ln 2 + 2\pi k i, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

По условию задачи последнее выражение должно равняться $\ln 2 - 2\pi i$, т.е. $\ln 2 + 2\pi k i = \ln 2 - 2\pi i$, где k — целое число. Это возможно только при $k = -1$. Следовательно, в данном примере рассматривается ветвь логарифма $f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2) - 2\pi i$, где $\ln(z^2 - 3z + 2)$ — главное значение $\operatorname{Ln}(z^2 - 3z + 2)$.

Проведем преобразование

$$f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2) - 2\pi i = \ln(z-2)(z-1) - 2\pi i =$$
$$= \ln(z-2) + \ln(z-1) - 2\pi i,$$

где под $\ln(z-2)$ и $\ln(z-1)$ понимаются главные значения логарифмов $(z-2)$ и $(z-1)$.

К каждому из этих логарифмов, предварительно их преобразовав, применим формулу (14):

$$\ln(z-2) = \ln(-2)\left(1 - \frac{z}{2}\right) = \ln(-2) + \ln\left(1 - \frac{z}{2}\right) =$$
$$= \ln(-2) + \ln\left[1 + \left(-\frac{z}{2}\right)\right] = \ln(-2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(-\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n} =$$
$$= \ln(-2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{z^n}{n \cdot 2^n} = \ln(-2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n \cdot 2^n},$$

$|z| < 2;$

$$\ln(z-1) = \ln(-1)(1-z) = \ln(-1) + \ln(1-z) = \ln(-1) +$$
$$+ \ln\left[1 + (-z)\right] = \ln(-1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-z)^n}{n} = \ln(-1) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

$|z| < 1.$

Искомое разложение есть сумма полученных разложений. Следовательно,

$$f(z) = \ln(-2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n \cdot 2^n} + \ln(-1) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} - 2\pi i =$$
$$= \ln(-2)(-1) - 2\pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{n}\right)z^n =$$
$$= \ln 2 - 2\pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot 2^n}\right)z^n,$$

где $|z| < 1$. (Поскольку оба ряда сходятся в круге $|z| < 1$, а вне круга один ряд сходится, а другой расходится, то область сходимости $|z| < 1$.)

• **39.** Определить радиусы сходимости рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{3^n(1+ni)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^3(1+i)^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n(n+1)}(z-i)^n$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[3+(-1)^n\right]^n z^n$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot (z-i)^n$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin in \cdot z^n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+a^n)(z+2i)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n+1}{i^n} z^n$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2i}{5}\right)^n (z-1)^n$;

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n (n+1)(n+2)(z+1)^n$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; 13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{2ni}(z-3i)^n$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n\left(\frac{i}{n}\right) z^n$; 15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (5i)^n z^{3n}$; 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, z^{n!}$.

40. Следующие функции разложить в степенной ряд в окрестности указанных точек и найти радиус сходимости ряда:

1) $\frac{1}{z+2}$, $a=-3$; 2) $\frac{1}{5-z}$, $a=2$; 3) $\frac{1}{z^2-3z+2}$, $a=0$; 4) $\frac{z}{z^2-4z+13}$, $a=0$;
5) $\sin 2z - 2\sin z$, $a=0$; 6) $\sin(2z-z^2)$, $a=1$; 7) e^z, $a=2i$;

8) $\sqrt{z}$, $a=1+i$, если рассматривается ветвь корня, удовлетворяющая условию $\sqrt{z}\big|_{z=1+i} = \frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}$;

9) $\sqrt[3]{z}$, $a=1$, если рассматривается ветвь корня, удовлетворяющая условию $\sqrt[3]{1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

10) $\operatorname{Ln} z$, $a=i$, если рассматривается ветвь логарифма, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ln} z\big|_{z=i} = i\frac{\pi}{2}$;

11) $\operatorname{Ln} z$, $a=2$, если рассматривается ветвь логарифма, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ln} z\big|_{z=2} = \ln 2 + 2\pi i$;

12) $\operatorname{Ln}(z^2+9)$, $a=4$, если рассматривается ветвь логарифма, удовлетворяющая условию $\operatorname{Ln}(z^2+9)\big|_{z=4} = \ln 25 - 2\pi i$.

§4. Ряд Лорана

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad (15)$$

где a, c_n — комплексные числа, z — комплексная переменная, называется *рядом Лорана*.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ называется *главной частью ряда Лорана*, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ — *правильной частью ряда Лорана.*

Областью сходимости ряда Лорана является концентрическое круговое кольцо с центром в точке a: $\rho < |z-a| < R$.

Теорема . *Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $\rho < |z-a| < R$, то она раскладывается в этом кольце единственным образом в ряд Лорана, коэффициенты c_n которого находятся по формуле*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{16}$$

где γ — произвольная окружность с центром в точке a, лежащая внутри данного кольца.

На практике при нахождении коэффициентов c_n стараются избегать применения формулы (16), так как она часто приводит к громоздким вычислениям. Обычно, если это возможно, используются разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Если функция $f(z)$ регулярна в окрестности бесконечности, т.е. в области $\{z : R < |z| < \infty\}$, то она единственным образом раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{17}$$

причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ называется *главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечности*, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ — его *правильной частью.*

Для разложения функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности обычно рассматривают преобразование инверсии $\xi = 1/z$ (чтобы бесконечность перевести в начало координат), раскладывают полученную функцию в окрестности нуля и производят обратную замену.

Пример 14. Функцию $f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z-3)}$ разложить в ряд Лорана в следующих областях: 1) в кольце $1<|z|<3$; 2) в окрестности точки $a=i$; 3) в окрестности точки $a=3$; 4) в окрестности бесконечности.

Решение.

1) Данная функция регулярна в кольце $1 < |z| < 3$ ("плохие" точки i, $-i$, 3 не принадлежат кольцу), поэтому она единственным образом раскладывается в ряд Лорана.

Для нахождения разложения данную дробь разложим на простейшие:
$$\frac{z+1}{(z^2+1)(z-3)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-3},$$
при этом $A = 2/3$, $B = 2/3$, $C = -1/3$.

При разложении в ряд каждой дроби используем разложение элементарной функции $1/(1-\xi)$ в степенной ряд (см. §3, формулу (9)).

Разложим первое слагаемое, полагая $\xi = i/z$:
$$\frac{A}{z-i} = \frac{A}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}.$$
Этот ряд сходится там, где $|\xi| = |i/z| < 1$, т. е. где $|z| > 1$.

Аналогично поступим со вторым слагаемым:
$$\frac{B}{z+i} = \frac{B}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{B}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{z}\right)^n = B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{z^{n+1}},$$
где $|z| > 1$.

При разложении третьей дроби, поскольку $|z| < 3$, в знаменателе за скобку вынесем не z, а 3, т.е. число, большее по модулю:
$$\frac{C}{z-3} = \frac{C}{3}\frac{1}{\frac{z}{3}-1} = -\frac{C}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},$$
где $|z| < 3$.

В результате приходим к следующему разложению данной функции в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$:
$$f(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{z^{n+1}} - C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} =$$
$$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[i^n + (-i)^n\right] z^{-n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\, z^n.$$

2) Отметим, что хотя в данном случае функция регулярна в "вырожденном" кольце $0 < |z-i| < 2$ (т.е. в некоторой окрестности точки i, исключая точку i), по теореме о разложении функции в ряд Лорана она раскладывается в этом кольце в ряд Лорана единственным образом.

Аналогично случаю 1) рассмотрим отдельно каждую дробь, на которые раскладывается данная функция.

Дробь $A/(z-i)$ представляет собой ряд Лорана по степеням $z-i$, но содержит всего одно слагаемое. Очевидно, что это разложение имеет место там, где $z \neq i$, т.е. $|z-i| \neq 0$.

Вторую дробь разложим по степеням $z-i$, предварительно проведя некоторые преобразования:

$$\frac{B}{z+i} = \frac{B}{(z-i)+2i} = \frac{B}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} =$$

$$= \frac{B}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\,(z-i)^n,$$

где $|z-i| < 2$.

Аналогично поступим с третьей дробью, заметив, что функция регулярна в окрестности точки $a = i$:

$$\frac{C}{z-3} = \frac{C}{(z-i)+(i-3)} = \frac{C}{i-3}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{i-3}} =$$

$$= -\frac{C}{3-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i-3}\right)^n = -C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3-i)^{n+1}}\,(z-i)^n,$$

где $|z-i| < |3-i|$, или $|z-i| < \sqrt{10}$.

В результате придем к следующему разложению данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = i$:

$$f(z) = \frac{A}{z-i} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}\,(z-i)^n - C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3-i)^{n+1}}\,(z-i)^n =$$

$$= \frac{2/3}{z-i} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(3-i)^{n+1}} =$$

$$= \frac{2/3}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{3(2i)^{n+1}} + \frac{1}{3(3-i)^{n+1}}\right](z-i)^n,$$

где $0 < |z-i| < 2$, т. е. областью сходимости ряда является пересечение областей сходимости трех рядов.

Отметим, что главная часть ряда Лорана (та часть ряда, которая содержит только отрицательные степени $(z-i)$) состоит из одного слагаемого. Правильная же часть ряда содержит бесконечное число положительных степеней $(z-i)$.

3) Данная функция регулярна в "вырожденном" кольце $0 < |z-3| < \sqrt{10}$, поскольку особые точки i и $-i$ лежат на окружности $|z-3| = \sqrt{10}$.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое из разложения данной функции на простейшие дроби. Дробь $A/(z-i)$ регулярна в окрестности точки 3, поэтому раскладывается в окрестности этой точки в степенной ряд:

$$\frac{A}{z-i} = \frac{A}{(z-3)+(3-i)} = \frac{A}{3-i}\,\frac{1}{1+\frac{z-3}{3-i}} = \frac{A}{3-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-3}{i-3}} =$$
$$= \frac{A}{3-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{i-3}\right)^n = -A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{(i-3)^{n+1}},$$

где $\left|\frac{z-3}{i-3}\right| < 1$, или $|z-3| < |i-3|$, или $|z-3| < \sqrt{10}$, т.е. ряд сходится в круге с центром в точке 3 и радиусом $\sqrt{10}$.

Аналогично поступаем со вторым слагаемым:

$$\frac{B}{z+i} = \frac{B}{(z-3)+(3+i)} = \frac{B}{3+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-3}{3+i}} = \frac{B}{3+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{3+i}\right)^n =$$
$$= B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+i)^{n+1}}\,(z-3)^n,$$

где $\left|\frac{z-3}{3+i}\right| < 1$, или $|z-3| < \sqrt{10}$.

Последнее слагаемое $C/(z-3)$ представляет собой ряд Лорана, состоящий из одного слагаемого, сходящийся в любой точке z, кроме $z = 3$, т.е. он сходится во всех точках z, таких, что $|z-3| \neq 0$.

В результате приходим к разложению данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = 3$:

$$f(z) = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{(i-3)^{n+1}} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+i)^{n+1}}(z-3)^n - \frac{1/3}{z-3} =$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(3-i)^{n+1}}(z-3)^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+i)^{n+1}}(z-3)^n - \frac{1/3}{z-3} =$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[(3+i)^{n+1}+(3-i)^{n+1}]}{10^{n+1}}(z-3)^n - \frac{1}{3(z-3)},$$

где $0 < |z-3| < \sqrt{10}$.

4) Для выяснения поведения функции в окрестности бесконечности применим преобразование инверсии $\xi = 1/z$ для того, чтобы бесконечность перевести в начало координат. Для этого определим функцию $g(\xi)$ следующим образом:

$$g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{A}{1/\xi - i} + \frac{B}{1/\xi + i} + \frac{C}{1/\xi - 3} =$$

$$= \frac{A\xi}{1-i\xi} + \frac{B\xi}{1+\xi i} + \frac{C\xi}{1-3\xi},$$

где $A = B = 2/3$, $C = -1/3$, $\xi \neq 0$.

Разложим функцию $g(\xi)$ в ряд в окрестности точки $a = 0$, затем сделаем обратную замену $\xi = 1/z$ и получим разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечности. Для этого каждое слагаемое из разложения функции $g(\xi)$ на простейшие дроби разложим в ряд в окрестности точки $a = 0$:

$$\frac{A\xi}{1-i\xi} = A\xi\sum_{n=0}^{\infty}(i\xi)^n = A\sum_{n=0}^{\infty}(i)^n\xi^{n+1},$$

где $|i\xi| < 1$;

$$\frac{B\xi}{1+i\xi} = B\xi\sum_{n=0}^{\infty}(-i\xi)^n = B\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\xi^{n+1},$$

где $|-i\xi| < 1$, или $|\xi| < 1$;

$$\frac{C\xi}{1-3\xi} = C\xi\sum_{n=0}^{\infty}(3\xi)^n = C\sum_{n=0}^{\infty}3^n\xi^{n+1},$$

где $|3\xi| < 1$, или $|\xi| < 1/3$.

В результате получим следующее разложение функции $g(\xi)$ в ряд в окрестности точки $a = 0$:

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{3}(i)^n + \frac{2}{3}(-i)^n - 3^{n-1}\right] \xi^{n+1},$$

и учитывая, что $\xi \neq 0$, получаем $0 < |\xi| < 1/3$ — область сходимости трех рядов — вырожденное кольцо с центром в точке 0 и радиусом 1/3.

Переходя в последнем разложении к переменной z, $\xi = 1/z$ ($z \neq \infty$), получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{3}(i)^n + \frac{2}{3}(-i)^n - 3^{n-1}\right] \frac{1}{z^{n+1}}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

Пример 15. Функцию $f(z) = (z^2 + 2z + 3)\sin\frac{1}{z-i}$ разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z - i| < \infty$.

Решение. Множитель, стоящий в скобках, есть многочлен второй степени, который является регулярной функцией на всей плоскости, поэтому он раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $a = i$.

Найдем значения многочлена и его производных в точке i:

$$\begin{aligned}
&(z^2 + 2z + 3)\big|_{z=i} = 2 + 2i,\\
&(z^2 + 2z + 3)'\big|_{z=i} = (2z + 2)\big|_{z=i} = 2 + 2i,\\
&(z^2 + 2z + 3)''\big|_{z=i} = 2,\\
&(z^2 + 2z + 3)^{(k)}\big|_{z=i} = 0 \quad \text{для} \ \ k = 3, 4, \ldots,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z + 3 &= (2 + 2i) + \frac{2 + 2i}{1!}(z - i) + \frac{2}{2!}(z - i)^2 = \\
&= (2 + 2i) + (2 + 2i)(z - i) + (z - i)^2.
\end{aligned}$$

Далее, используя разложение элементарной функции $\sin\xi$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 0$ (см. §3, формулу (11)) и полагая $\xi = 1/(z - i)$, имеем

$$\sin\frac{1}{z - i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z - i)^{2n+1}}, \quad 0 < |z - i| < \infty.$$

В результате получаем следующее разложение данной функции в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ в кольце $0<|z-i|<\infty$:

$$f(z)=\left[(2+2i)+(2+2i)(z-i)+(z-i)^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2n+1}}=$$

$$=(2+2i)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2n+1}}+(2+2i)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-i)^{2n-1}}\right].$$

Пример 16. Разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечности главное значение логарифма $f(z)=\ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\ln\left(\frac{1/\xi-i}{1/\xi+i}\right)=\ln\left(\frac{1-i\xi}{1+i\xi}\right),\quad \xi\neq 0,$$

и разложим ее в ряд в окрестности точки $\xi=0$, используя формулу (14):

$$g(\xi)=\ln(1-i\xi)-\ln(1+i\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-i\xi)^n-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(i\xi)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n i^n-(-1)^{n-1}i^n}{n}\xi^n=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n\left(1+(-1)^{n-1}\right)}{n}\xi^n=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k-1}}{2k-1}\xi^{2k-1},$$

$0<|\xi|<1$.

Возвратившись к старой переменной z, $\xi=1/z$, окончательно получим разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечности:

$$f(z)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k-1}}{2k-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k-1},\quad 1<|z|<\infty.$$

• Данную функцию разложить в ряд Лорана в указанной области либо в окрестности указанной точки. В последнем случае определить область, в которой разложение имеет место:

41. $\frac{1}{z^2-z-6}$, $2<|z|<3$.

42. $\frac{1}{z(z-1)}$, $1<|z+1|<2$.

43. $\frac{z+1}{z^2+z-2}$, $1<|z|<2$.

44. $\frac{1}{z(z+i)(z-3)}$, $1<|z|<3$.

45. $\frac{z}{z^2+2z-8}$, $a=-4$.

46. $\frac{1}{z^2+3z+2}$, 1) $a=-2$, 2) $a=\infty$.

47. $\frac{1}{(z-2i)(z-i)}$, 1) $a=2i$, 2) $a=\infty$.

48. $\frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$, $a=-1$.

49. $\frac{1}{z^2+9}$, 1) $a=-3i$, 2) $a=\infty$.

50. $e^{\frac{1}{z+2}}$, $a=-2$.

51. $\sin\frac{z}{z+1}$, $a=-1$.

52. $e^{\frac{z+3}{z}}$, $a=0$.

53. $\cos\frac{z^2-6z}{(z-3)^2}$, $a=3$.

54. $(z^2+5)\,e^{\frac{1}{1-z}}$, $a=1$.

55. $(z^2-3z+2)\cos\frac{1}{z+i}$, $a=-i$.

56. Главное значение логарифма $f(z)=\ln\frac{z+2}{z-1}$, $a=\infty$.

Глава III. Вычеты и их приложения

§1. Изолированные особые точки функции

Точка a называется *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки a, но не регулярна в самой точке a, т. е. если функция регулярна в вырожденном кольце $0 < |z-a| < \varepsilon$.

Изолированная особая точка a называется *устранимой особой точкой функции* $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ при $z \to a$.

Изолированная особая точка a называется *полюсом функции* $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Изолированная особая точка a называется *существенно особой точкой*, если эта точка и не устранимая, и не полюс.

Теорема 1. *Для того чтобы точка a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки коэффициенты c_n равнялись нулю для любого $n < 0$, т.е. чтобы разложение функции в ряд Лорана не содержало отрицательных степеней $(z-a)$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{1}$$

Теорема 2. *Для того чтобы точка a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции в ряд Лорана содержала лишь конечное число ненулевых слагаемых:*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-k} \neq 0,\ k > 0. \tag{2}$$

В этом случае точка a называется *полюсом порядка k функции* $f(z)$.

В случае $k = 1$ полюс называется *простым*.

Если точка a является для функции $f(z)$ полюсом порядка k, то функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}, \tag{3}$$

где $g(z)$ — функция, регулярная в точке a и $g(a) \neq 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы точка a была существенно особой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности этой точки содержала бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-a)$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a) n. \tag{4}$$

Если бесконечность является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и $\xi = 1/z$ — преобразование инверсии, то бесконечность для функции $f(z)$ называется устранимой, полюсом или существенно особой точкой тогда и только тогда, когда точка $\xi = 0$ является соответственно такой же для функции $g(\xi) = f(1/\xi)$.

Теорема 4. *Для того чтобы изолированная особая точка-бесконечность была устранима для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности не содержало положительных степеней z:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n. \tag{5}$$

Теорема 5. *Для того чтобы изолированная особая точка-бесконечность была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана в окрестности ∞ содержало конечное число положительных степеней z:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n z^n, \quad k > 0,\ c_k \neq 0. \tag{6}$$

Теорема 6. *Для того чтобы изолированная особая точка-бесконечность была существенно особой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности содержало бесконечное число положительных степеней z:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{7}$$

т. е. для любого $n > 0$ существует такое $m > n$, что $c_m \neq 0$.

Пример 1. Найти особые точки функции, выяснить их характер и исследовать поведение функции в окрестности бесконечности: 1) $\frac{2z^3+3}{z^5+1}$; 2) $\frac{1}{(z^2+4)^3}$; 3) $\frac{\sin 3z}{z}$; 4) $e^{1/z}$; 5) e^{1/z^2}; 6) $(2z^3+3i)\,e^{1/(z+i)}$; 7) $z^2 \sin \frac{z}{z+1}$; 8) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$; 9) $z^2 + \sin \frac{1}{z}$; 10) $z\,e^{-z}$.

Решение.

1) Особыми точками функции являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль, а числитель не равен нулю.

Найдем корни знаменателя (см. главу I, §5, формула (4)):

$$z^5 + 1 = 0, \quad z^5 = -1, \quad z_k = \sqrt[5]{|-1|}\, e^{i\,\frac{\arg(-1)+2\pi k}{5}},$$

$$z_0 = e^{i\,\pi/5}, \quad z_1 = e^{i\,3\pi/5}, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{i\,7\pi/5}, \quad z_4 = e^{i\,9\pi/5}.$$

Так как $\lim\limits_{z \to z_k} \frac{2z^3+3}{z^5+1} = \infty$, то каждая из точек z_k является полюсом. Порядок полюса определяется кратностью нуля знаменателя. Поскольку каждая из точек z_k является нулем первой кратности знаменателя (производная знаменателя в точках z_k не равна нулю: $(z^5+1)'\big|_{z=z_k} = 5z_k^4 \neq 0$, то $z_0, z_1, \ldots, z_4$ — полюсы первого порядка (см. формулу (3)).

Теперь выясним поведение функции в окрестности бесконечности. Положим $z = 1/\xi$ и рассмотрим функцию

$$g(\xi) = \frac{2\left(\frac{1}{\xi}\right)^3 + 3}{\left(\frac{1}{\xi}\right)^5 + 1} = \frac{(2+3\xi^3)\,\xi^2}{1+\xi^5}.$$

Так как $\lim\limits_{\xi \to 0} g(\xi) = 0$, то $\xi = 0$ — устранимая особая точка функции $g(\xi)$. Значит, бесконечность — устранимая особая точка данной функции.

2) Особые точки данной функции $2i$, $-2i$, ∞. Поскольку $\lim\limits_{z \to \pm 2i} \frac{1}{(z^2+4)^3} = \infty$, то точки $2i$ и $-2i$ являются полюсами, а так как они являются нулями третьей кратности знаменателя, то это полюсы третьего порядка данной функции.

Выясним поведение функции в окрестности бесконечности. Для этого сделаем преобразование инверсии $z = 1/\xi$:

$$g(\xi) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\xi^2} + 4\right)^3} = \frac{\xi^6}{(1+4\xi^2)^3},$$

и точка $\xi = 0$ для функции $g(\xi)$ является устранимой особой точкой. Следовательно, бесконечность для данной функции так же является устранимой особой точкой.

3) Особые точки данной функции 0 и ∞. Так как $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin 3z}{z} = 3$, то $z = 0$ — устранимая особая точка.

Выясним поведение функции в окрестности бесконечности. Пусть $z = 1/\xi$, тогда

$$g(\xi) = \frac{\sin(3/\xi)}{1/\xi} = \xi \sin\frac{3}{\xi}.$$

Разложим функцию $g(\xi)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$ (см. главу II, §3, формула (11)):

$$g(\xi)=\xi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{3}{\xi}\right)^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{1}{\xi^{2n-2}},\quad 0<|\xi|<\infty.$$

Из разложения видно, что ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней ξ. Следовательно, по теореме 3 (см. формулу (4)) точка $\xi = 0$ является существенно особой точкой функции $g(\xi)$. Значит, бесконечность является существенной особой точкой для данной функции.

4) Особые точки данной функции 0 и ∞.

Выясним поведение функции в окрестности точки $z = 0$. Укажем два способа этого исследования:

а) Разложим функцию $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n},\quad 0 < |z| < \infty.$$

Ряд содержит бесконечное число отрицательных степеней z. Следовательно (см. формулу (4)), точка $z = 0$ является существенно особой для данной функции;

б) Покажем, что не существует предела данной функции при $z \to 0$. Рассмотрим два случая: $z = x > 0$ и $z = -x$, $x > 0$. В первом случае $e^{1/z} = e^{1/x} \underset{x\to+0}{\longrightarrow} +\infty$, а во втором — $e^{1/z} = e^{-1/x} \underset{x\to+0}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, найдены два направления, по которым функция $e^{1/z}$ стремится к разным пределам. Значит, не существует предела $e^{1/z}$ при $z \to 0$, и точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $e^{1/z}$.

Теперь выясним поведение функции в окрестности бесконечности. Пусть $\xi = 1/z$, тогда $g(\xi) = e^{1/(1/\xi)} = e^{\xi}$. Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$ (см. главу II, §3, формула (10)):

$$g(\xi) = e^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}, \quad 0 < |\xi| < \infty.$$

Из разложения видно, что ряд Лорана не содержит отрицательных степеней ξ (см. формулу (1)), поэтому точка $\xi = 0$ является устранимой особой точкой функции $g(\xi)$. Следовательно, бесконечность является также устранимой особой точкой функции $e^{1/z}$.

5) Особые точки функции 0 и ∞.

Покажем, что не существует предела функции при $z \to 0$. Будем двигаться к началу координат по двум направлениям: $z = x$, $x > 0$ и $z = iy$, $y > 0$. Тогда в первом случае $e^{1/z^2} = e^{1/x^2} \underset{x \to +0}{\longrightarrow} +\infty$, во втором — $e^{1/z^2} = e^{1/(iy)^2} = e^{-1/y^2} \underset{y \to +0}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, предела не существует, и точка $z = 0$ является существенно особой точкой данной функции.

Теперь выясним поведение функции в бесконечности. Полагая $z = 1/\xi$, функцию $g(\xi) = e^{1/(1/\xi)^2} = e^{\xi^2}$ разложим в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$:

$$g(\xi) = e^{\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{n!}, \quad 0 < |\xi| < \infty.$$

Так как разложение не содержит отрицательных степеней ξ, то точка $\xi = 0$ для функции $g(\xi)$ является устранимой особой точкой (теорема 1), отсюда, бесконечность является устранимой особой точкой для данной функции.

6) Особые точки функции $-i$ и ∞. (Для функции $e^{\varphi(z)}$ особыми являются все точки, в которых $\varphi(z) = \infty$.)

Запишем разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = -i$. Для этого многочлен $2z^3 + 3i$ разложим по степеням $(z+i)$ (см. главу II, §3, формула (8)). Найдем значения многочлена и его производных в точке $-i$:

$$(2z^3+3i)\big|_{z=-i} = 5i, \quad (2z^3+3i)'\big|_{z=-i} = 6z^2\big|_{z=-i} = -6,$$
$$(2z^3+3i)''\big|_{z=-i} = 12z\big|_{z=-i} = -12i, \quad (2z^3+3i)'''\big|_{z=-i} = 12.$$

Тогда

$$2z^3+3i = 5i + \frac{-6}{1!}(z+i) + \frac{-12i}{2!}(z+i)^2 + \frac{12}{3!}(z+i)^3 =$$
$$= 5i - 6(z+i) - 6i(z+i)^2 + 2(z+i)^3.$$

Второй множитель $e^{1/(z+i)}$ разложим в ряд Лорана по формуле (10) (глава II, §3) в окрестности точки $z=-i$:

$$e^{1/(z+i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+i)^n}, \quad 0 < |z+i| < \infty.$$

В результате перемножения получим разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=-i$:

$$(2z^3+3i)\,e^{1/(z+i)} = \left[5i - 6(z+i) - 6i(z+i)^2 + 2(z+i)^3\right]\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z+i)^n} = 5i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z+i)^n} - 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z+i)^{n-1}} -$$
$$- 6i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z+i)^{n-2}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z+i)^{n-3}}.$$

Видно, что полученный ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $(z+i)$, поэтому (теорема 3, формула (4)) точка $z=-i$ является существенно особой точкой данной функции.

Исследуем поведение функции в окрестности бесконечности. Очевидно, что $\lim\limits_{z\to\infty}(2z^3+3i)e^{1/(z+i)} = \infty$. Следовательно, бесконечность — это полюс. Для выяснения его порядка рассмотрим функцию $g(\xi)$, где $\xi = 1/z$:

$$g(\xi) = \left(2\left(\frac{1}{\xi}\right)^3 + 2i\right) e^{\frac{\xi}{1+i\xi}} = \frac{2+3i\xi^3}{\xi^3}\, e^{\frac{\xi}{1+i\xi}}.$$

Точка $\xi = 0$ для функции $g(\xi)$ является полюсом 3-го порядка (порядок определяется по кратности нуля знаменателя). Поэтому бесконечность — это полюс 3-го порядка для данной функции.

7) Особые точки функции -1 и ∞.

Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = -1$:

первый множитель $z^2 = 1 - 2(z+1) + (z+1)^2$,

второй множитель

$$\sin\frac{z}{z+1} = \sin\frac{(z+1)-1}{z+1} = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$
$$= \sin 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1} =$$
$$= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n}} - \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-1}},$$

$0 < |z+1| < \infty$. В результате перемножения получится следующее разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = -1$:

$$z^2 \sin\frac{z}{z+1} = \sin 1\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n-1}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n-2}}\right) - \cos 1\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-1}} - \right.$$
$$\left. - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-2}} + \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-3}}\right).$$

Разложение содержит бесконечное число отрицательных степеней $(z+1)$. Следовательно, точка $z = -1$ является существенно особой для данной функции.

Выясним поведение функции в окрестности бесконечности. Для этого рассмотрим функцию $g(\xi)$, где $\xi = 1/z$:

$$g(\xi) = \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 \sin\frac{1/\xi}{1/\xi + 1} = \frac{1}{\xi^2}\sin\frac{1}{\xi+1}.$$

Очевидно, что точка $\xi = 0$ для функции $g(\xi)$ — полюс 2-го порядка, поэтому бесконечность для данной функции также является полюсом 2-го порядка.

8) Особыми точками данной функции являются ∞ и те, в которых знаменатель обращается в нуль. Найдем такие точки: $e^z - 1 = 0$, $e^z = 1$, $z_k = 2\pi k i$, где k — целое число. Итак, $z_k = 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$, и ∞ — особые точки функции.

Рассмотрим точку $z = 0$ и найдем предел

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+o(z^2)\right)+1}{z\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+o(z^2)\right)-1} = \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{z^2}{2}}{z^2} = -\frac{1}{2}.$$

При вычислении предела была использована формула Тейлора

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+o(z^2), \quad \text{где} \quad \lim_{z\to 0}\frac{o(z^2)}{z^2} = 0.$$

Таким образом, существует конечный предел при $z \to 0$, поэтому точка $z = 0$ — устранимая особая точка функции.

Рассмотрим точки $z_k = 2\pi k i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Отметим, что дробь $1/z$ не имеет особенностей в точках z_k, т.е. достаточно рассмотреть только первую дробь $1/(e^z - 1)$. Поскольку каждая точка z_k является нулем первой кратности знаменателя (так как $(e^z - 1)'\big|_{z=z_k} = e^{z_k} \neq 0$), то каждая из них есть полюс первого порядка данной функции.

Осталось выяснить поведение функции в окрестности бесконечности. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$, то бесконечность является предельной точкой полюсов функции, а тогда бесконечность — неизолированная особая точка данной функции.

9) Особые точки функции 0 и ∞.

Запишем разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$z^2 + \sin\frac{1}{z} = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,z^{2n-1}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Ряд содержит бесконечное число отрицательных степеней z, поэтому точка $z = 0$ — существенно особая точка данной функции (формула(4)).

Для выяснения поведения функции в окрестности бесконечности введем преобразование инверсии $\xi = 1/z$ и функцию $g(\xi) = 1/\xi^2 + \sin\xi$ разложим в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$ (см. главу II, §3, формула (11)):

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}\,\xi^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad 0 < |\xi| < \infty.$$

Наибольшая отрицательная степень ξ, которую содержит ряд — вторая, следовательно (теорема 2, формула (2)), $\xi = 0$ является полюсом 2-го порядка для функции $g(\xi)$, значит, бесконечность для данной функции есть полюс 2-го порядка.

10) Особая точка ∞. Введем преобразование инверсии $\xi=1/z$ и функцию $g(\xi) = \frac{1}{\xi}\,e^{-1/\xi}$ разложим в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$:

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{\xi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\xi^{n+1}}, \quad 0 < |\xi| < \infty.$$

Видно, что ряд содержит бесконечное число отрицательных степеней ξ, поэтому точка $\xi = 0$ является существенной особой точкой функции $g(\xi)$. Следовательно, бесконечность — существенная особая точка данной функции.

• **Найти особые точки функции, выяснить их характер и исследовать поведение функции в бесконечности:**

57. $\frac{z^4+16}{z^3+1}$. **58.** $\frac{1}{z^3(z^2+5)^2}$. **59.** $\frac{1}{(z^2+9)^4}$. **60.** $\frac{\sin 2z}{z}$. **61.** $\frac{\sin z}{z^3}$.
62. $\frac{1-\cos z}{z^2}$. **63.** $e^{1/(z-1)}$. **64.** $(z^2+1)\,e^{1/z}$. **65.** $e^{1/(z-i)^2}$.
66. $\sin\frac{1}{1-z}$. **67.** $\frac{z\pm 1}{\sin z}$. **68.** $(z^2+i)\cos\frac{z}{z-2}$. **69.** $\cos z + e^{1/z}$.
70. $\frac{1-e^z}{1+e^z}$. **71.** $\frac{e^{1/z}}{e^{z-1}-1}$. **72.** $\frac{\sin z}{z^2+4} + \frac{e^z}{z+2i}$.

§2. Определение вычета. Приемы вычисления вычетов

Если точка $z = a$ (отличная от бесконечности) является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

Вычетом функции $f(z)$ относительно точки a ($\text{res}_a f(z)$) называется коэффициент при первой отрицательной степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности этой точки:

$$\text{res}_a f(z) = c_{-1}, \tag{8}$$

или

$$\text{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{8$'$}$$

где γ — окружность, обходимая в положительном направлении, с центром в точке a радиусом меньше r, не содержащая внутри других особых точек функции $f(z)$.

Если бесконечность — изолированная особая точка функции $f(z)$, то в некоторой окрестности бесконечности функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \rho < |z| < \infty.$$

Вычетом функции $f(z)$ *относительно бесконечности* ($\text{res}_\infty f(z)$) называется коэффициент при первой отрицательной степени z в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности бесконечности, взятый с противоположным знаком:

$$\text{res}_\infty f(z) = -c_{-1}, \tag{9}$$

или

$$\text{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz, \tag{9$'$}$$

где Γ — окружность, обходимая в положительном направлении, с центром в точке нуль радиусом больше ρ.

Если $z = a$ (a отлично от бесконечности) — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\text{res}_a f(z) = 0. \tag{10}$$

Если ∞ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\text{res}_\infty f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\big[f(z) - c_0\big], \tag{11}$$

где $c_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Если точка $z = a$ (a отлична от бесконечности) — полюс порядка n для функции $f(z)$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_a f(z) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Если точка $z = a$ — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{13}$$

Если функция $f(z)$ представима в виде отношения двух функций $P(z)$, $Q(z)$ регулярных в окрестности точки a: $f(z) = P(z)/Q(z)$, причем $Q(a) = 0$, $Q'(a) \neq 0$ и $P(a) \neq 0$ (случай полюса первого порядка для функции $f(z)$), то

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{14}$$

В случае существенно особой точки функции $f(z)$ вычет функции относительно этой точки находится из разложения функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = 1/z$ относительно бесконечности.

Решение. Бесконечность для функции $1/z$ является устранимой особой точкой, однако $\operatorname{res}_\infty f(z) \neq 0$.

Действительно, так как дробь $1/z$ уже представляет собой разложение функции $f(z) = 1/z$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности, в которой присутствует только одно слагаемое, и $c_{-1} = 1$, то

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -1.$$

Пример 3. Найти вычеты функции $f(z)$ относительно указанных изолированных особых точек: 1) $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$, $a=2i$, $a=\infty$; 2) $f(z) = \frac{\sin 3z}{(z-1)^3}$, $a=1$; 3) $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$, $a=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $a=\infty$; 4) $f(z) = z^2 e^{1/(z-2i)}$, $a=2i$; 5) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$, $a=-1$, $a=\infty$; 6) $f(z) = \frac{1}{z+1} + e^z$, $a=-1$, $a=\infty$; 7) $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$, $a=4\pi i$.

Решение.

1) Изолированная особая точка $a = 2i$ является для данной функции простым полюсом, следовательно, по формуле (13) имеем

$$\operatorname{res}_{2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\,f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)z}{z^2+4} =$$
$$= \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)z}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{2i}{4i} = \frac{1}{2}.$$

Изолированная особая точка-бесконечность для данной функции является устранимой особой точкой, поэтому, применяя формулу (11), получаем

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{z^2+4} - 0\right) = -\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{z^2+4} = -1,$$

так как $c_0 = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+4} = 0$.

2) Изолированная особая точка 1 для данной функции является полюсом 3-го порядка. Тогда по формуле (12)

$$\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^3\frac{\sin 3z}{(z-1)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[3(-3)\sin 3z\right] = -\frac{9}{2}\sin 3.$$

3) Изолированная особая точка $a = e^{i\pi/4}$ для данной функции является полюсом 1-го порядка. В этом случае удобно применить формулу (14) $\operatorname{res}_a f(z) = 1/(4a^3)$. Для упрощения вычислений домножим числитель и знаменатель на a и, учитывая, что $a^4 = -1$ (так как $a = e^{i\pi/4}$ является корнем $\sqrt[4]{-1}$), получим

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1\cdot a}{4a^3\cdot a} = \frac{a}{4a^4} = \frac{a}{4\cdot(-1)} = -\frac{a}{4} = -\frac{1}{4}e^{i\pi/4}.$$

Вычет функции относительно бесконечности находится по формуле (11), так как бесконечность для данной функции — устранимая особая точка:

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\left[\frac{1}{z^4-1} - 0\right] = 0 \quad (c_0 = 0).$$

4) Изолированная особая точка $a = 2i$ для данной функции является существенно особой точкой, поэтому функцию $f(z)$

следует разложить в ряд Лорана в окрестности точки $a = 2i$. Сначала разложим функцию z^2 по степеням $z - 2i$ (см. главу II, §3, формула (8)):

$$z^2 = -4 + 4i(z - 2i) + (z - 2i)^2,$$

затем — функцию $e^{1/(z-2i)}$ (см. главу II, §3, формула (10)):

$$e^{1/(z-2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z-2i)^n}, \quad 0 < |z - 2i| < \infty.$$

Тогда

$$f(z) = \left[-4 + 4i(z - 2i) + (z - 2i)^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z-2i)^n}, \quad 0 < |z - 2i| < \infty.$$

Записывая коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени $(z - 2i)$:

$$c_{-1} = -4 + \frac{4i}{2!} + \frac{1}{3!} = -4 + 2i + \frac{1}{6} = -\frac{23}{6} + 2i,$$

получаем $\operatorname{res}_{2i} f(z) = -23/6 + 2i$.

5) Изолированная особая точка $a = -1$ — существенно особая точка данной функции, поэтому разложим ее в ряд Лорана в окрестности точки $a = -1$:

$$f(z) = \sin\frac{z}{z+1} = \sin\frac{(z+1)-1}{z+1} = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \sin 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1} = \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+1)^{2n}} -$$

$$- \cos 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(z+1)^{2n-1}}, \qquad 0 < |z + 1| < \infty.$$

Заметим, что у первого ряда присутствуют только четные степени $z + 1$, поэтому коэффициент при первой отрицательной степени $(z + 1)$ у него равен нулю. У второго ряда $c_{-1} = -\cos 1 \cdot 1/1! = -\cos 1$. Следовательно, $\operatorname{res}_1 f(z) = -\cos 1$.

Изолированная особая точка-бесконечность для данной функции является устранимой особой точкой, поэтому по формуле (11) имеем

$$c_0 = \lim_{z\to\infty} \sin\frac{z}{z+1} = \sin 1,$$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\left[\sin\frac{z}{z+1} - \sin 1\right] =$$

$$= -\lim_{z\to\infty} z\cdot 2\sin\frac{z/(z+1)-1}{2}\cos\frac{z/(z+1)+1}{2} =$$

$$= -2\lim_{z\to\infty} z\cdot\sin\frac{-1}{2(z+1)}\cos\frac{2z+1}{2(z+1)} =$$

$$= -2\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{-1}{2(z+1)}\cos\frac{2z+1}{2(z+1)} = \cos 1.$$

6) Изолированная особая точка $a = -1$ — полюс 1-го порядка данной функции.

Первое слагаемое можно рассматривать как разложение в ряд Лорана функции $1/(z+1)$ в окрестности точки $a = -1$, второе слагаемое e^z — регулярная функция в окрестности точки $a = -1$, поэтому она раскладывается в ряд только по положительным степеням $z+1$. Тогда в разложении функции $1/(z+1)+e^z$ в ряд $c_{-1} = 1$. Следовательно, и $\operatorname{res}_{-1} f(z) = 1$.

Изолированная особая точка-бесконечность является для функции $1/(z+1) + e^z$ существенно особой точкой. Для разложения функции в ряд Лорана рассмотрим преобразование инверсии $\xi = 1/z$ и функцию

$$g(\xi) = f(1/\xi) = \frac{1}{1/\xi+1} + e^{1/\xi} = \frac{\xi}{1+\xi} + e^{1/\xi} = \xi\sum_{n=0}^{\infty}(-\xi)^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\xi^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\xi^n}, \quad 0 < |\xi| < 1.$$

В результате получим разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

Коэффициент при первой отрицательной степени z $c_{-1}=1$ (при $n=0$), следовательно, $\operatorname{res}_{\infty} f(z)=-1$.

7) Изолированная особая точка $a=4\pi i$ — полюс 1-го порядка функции $1/(e^z-1)$. Для вычисления вычета здесь удобнее воспользоваться формулой (14), полагая $P(z)=1$, $Q(z)=e^z-1$. Тогда

$$\operatorname{res}_{4\pi i} f(z)=\frac{P(4\pi i)}{Q'(4\pi i)}=\frac{1}{e^{4\pi i}}=1.$$

Пример 4. Найти вычеты для каждой ветви, регулярной в некоторой окрестности точки a: 1) $f(z)=\frac{z}{2+\sqrt{5-z}}$, $a=1$;
2) $f(z)=\frac{3+z}{4\pi i-\operatorname{Ln}(1+z)}$, $a=0$.

Решение.

1) Найдем все значения (см. главу I, §5, формула (4)) $\sqrt{5-z}$:

$$\sqrt{5-z}\,\Big|_{z=1}=\sqrt{4}=\sqrt{|4|}\,e^{i\,\frac{\arg 4+2\pi k}{2}},\quad k=0,1,$$

откуда

$$\sqrt{5-z}\,\Big|_{z=1}=\begin{cases}2, & \text{если } k=0,\\ -2, & \text{если } k=1.\end{cases}$$

Рассмотрим ветвь корня при $k=0$. Поскольку $\sqrt{5-z}\,\Big|_{z=1}=2$, то знаменатель в нуль не обращается и функция регулярна в окрестности точки $a=1$. Следовательно, $\operatorname{res}_1 f(z)=0$.

Для второй ветви ($k=1$) знаменатель обращается в нуль в точке $a=1$, а производная знаменателя в данной точке не равна нулю, поэтому точка $a=1$ для данной функции является полюсом 1-го порядка. Применяя формулу (14) полагая в ней $P(z)=z$, $Q(z)=2+\sqrt{5-z}$, где $\sqrt{5-z}\,\Big|_{z=1}=-2$, получаем

$$\operatorname{res}_1 f(z)=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{5-z}}\cdot(-1)}\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{\frac{1}{2\cdot(-2)}\cdot(-1)}=4.$$

2) Найдем все значения $\operatorname{Ln}(1+z)$ (см. главу I, §6, формула (6)):

$$\operatorname{Ln}(1+z)\big|_{z=0}=\operatorname{Ln}1=\ln|1|+i\arg 1+2\pi ki=$$
$$=0+i\cdot 0+2\pi ki,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Отметим, что в точке 0 знаменатель обращается в нуль, когда выбирается та ветвь логарифма, при которой $\operatorname{Ln}(1+z)\big|_{z=0}=4\pi i$, т. е. при $k=2$. Отсюда для всех ветвей логарифма, кроме полученной при $k=2$, точка $a=0$ является устранимой особой, и поэтому при $k \neq 2$ $\quad \operatorname{res}_0 f(z)=0$.

Рассмотрим ветвь логарифма при $k=2$:

$$f(z)=\frac{3+z}{4\pi i-[\ln(1+z)+4\pi i]}=\frac{3+z}{-\ln(1+z)},$$

где $\ln(1+z)$ — главная ветвь логарифма (см. главу I, §6, формула (7)). Используя формулу (14), получаем

$$\operatorname{res}_0 f(z)=\frac{3+0}{-1/(1+z)\big|_{z=0}}=-3.$$

• Найти вычеты функции $f(z)$ относительно указанных изолированных особых точек:

73. $\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$, $a=i$. **74.** $\frac{1}{z^3(z+2)^2}$, $a=0$. **75.** $\frac{5z^4-i}{z^5+1}$, $a=\infty$. **76.** $\frac{z}{z^4-1}$, $a=-i$. **77.** $\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^3}$, $a=-i$. **78.** $z^2\cos\frac{1}{z+2i}$, $a=-2i$. **79.** $\frac{5z^4+2z-4}{z^4(z-2)}$, 1) $a=0$, 2) $a=2$, 3) $a=\infty$. **80.** $\frac{1-\cos z}{z^2}$, $a=0$. **81.** $\frac{z^3+1}{z}\sin\frac{3}{z}$, $a=0$. **82.** $\sin\frac{z}{z-i}$, 1) $a=i$, 2) $a=\infty$. **83.** $2+3z+\frac{4}{z+2}+e^{2z}$, 1) $a=-2$, 2) $a=\infty$. **84.** $\frac{1}{e^{2z}+1}$, $a=i\frac{\pi}{2}$. **85.** $\frac{z}{\sin z}$, 1) $a=0$, 2) $a=4\pi$. **86.** $\sin\frac{3z+2i}{z+2i}$, $a=-2i$. **87.** $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$, 1) $a=0$, 2) $a=\infty$. **88.** $\frac{e^z}{z+3}$, $a=\infty$. **89.** Главное значение логарифма $\ln\frac{z+2}{z-1}$, $a=\infty$. **90.** Регулярная ветвь $\frac{2z+3}{\sqrt{z-1}+i}$, определенная условием $\sqrt{z-1}\,\big|_{z=0}=-i$, $a=0$. **91.** Регулярная ветвь $\frac{1}{\operatorname{Ln}(z-2)+\pi i}$, определенная условием $\operatorname{Ln}(z-2)\big|_{z=1}=-\pi i$, $a=1$. **92.** $(2z^2+z+3)\ln\frac{z+2}{z-1}$, где под логарифмом дроби понимается главное значение логарифма, $a=\infty$.

§3. Основная теорема о вычетах. Вычисление контурных интегралов

Основная теорема о вычетах. *Если функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области G и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек*

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, лежащих внутри области G, то интеграл от этой функции по границе ∂G области G, обходимой в положительном направлении (т.е. оставляющем область слева), равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{a_k} f(z). \tag{15}$$

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ регулярна в области G, содержащей бесконечность внутри, и непрерывна в области $\overline{G}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, лежащих внутри области G, то интеграл от этой функции по границе ∂G области G, обходимой в положительном направлении, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, включая и вычет функции относительно бесконечности:*

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{a_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z)\right). \tag{16}$$

Следствие 2. *Если функция $f(z)$ регулярна на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то сумма вычетов функции относительно этих особых точек, включая и вычет функции относительно бесконечности, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{a_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0. \tag{17}$$

Основная теорема о вычетах и ее следствия часто применяются для вычисления интегралов от функции комплексного переменного, взятого по замкнутому контуру.

Пример 5. Вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении:

1) $J = \displaystyle\int_{\partial G} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где $G = \{z\colon |z-1-i|<2\}$;

2) $J=\int\limits_{\partial G} \dfrac{5z^6-2z^2+1}{z^4(3+z^3)}\,dz$, где $G=\{z\colon |z|<3\}$;

3) $J=\int\limits_{\partial G} \dfrac{z^3}{1+z}\,e^{1/z}\,dz$, где $G=\{z\colon |z+i|<2\}$;

4) $J=\int\limits_{\partial G} (3z^2+z+1)(e^{1/z}+e^{1/(z+1)})\,dz$, где $G=\{z\colon |z-i|<3\}$.

Решение.

1) Способ 1. Подынтегральная функция имеет особые точки $\pm i$, 1, ∞. Внутри области G лежат точки 1 (полюс второго порядка) и i (простой полюс), поэтому по основной теореме о вычетах (формула (15)) имеем

$$J=2\pi i\big(\operatorname{res}_i f(z)+\operatorname{res}_1 f(z)\big).$$

Вычет функции относительно точки i найдем по формуле (13):

$$\operatorname{res}_i f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\,\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{1}{4},$$

вычет функции относительно точки 1 вычислим по формуле (12), где $n=2$:

$$\operatorname{res}_1 f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\,\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]'=$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

В результате получим

$$J=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{i\pi}{2}.$$

Способ 2. Для вычисления интеграла используем следствие 2 основной теоремы о вычетах и формулу (17):

$$\operatorname{res}_i f(z)+\operatorname{res}_1 f(z)+\operatorname{res}_{-i} f(z)+\operatorname{res}_\infty f(z)=0,$$

отсюда

$$\operatorname{res}_i f(z) + \operatorname{res}_1 f(z) = -\left(\operatorname{res}_{-i} f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z)\right).$$

Поэтому исходный интеграл можно вычислить, используя не только особые точки, лежащие внутри контура, но и особые точки, лежащие вне контура:

$$J = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{-i} f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z)\right).$$

Вычет функции относительно точки $-i$ найдем по формуле (13):

$$\operatorname{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\,\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} =$$
$$= \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-1)^2(z-1)} = \frac{1}{4}.$$

Для подынтегральной функции бесконечность является устранимой особой точкой, поэтому по формуле (11)

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} - 0\right] = 0, \quad (c_0 = 0).$$

И тогда

$$J = -2\pi i\left(\frac{1}{4} + 0\right) = -i\,\frac{\pi}{2}.$$

2) Подынтегральная функция внутри контура имеет четыре особые точки: $z = 0$ — полюс 4-го порядка и три простых полюса, лежащих на окружности $|z| = \sqrt[3]{3}$, а вне контура — только бесконечность, которая является устранимой особой точкой для данной функции.

Конечно, интеграл проще вычислить, используя особые точки, лежащие вне контура, поэтому

$$J = -2\pi i \operatorname{res}_\infty f(z).$$

Найдем этот вычет по формуле (11):

$$c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z^6\left(5 - \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^6}\right)}{z^7\left(\frac{3}{z^3} + 1\right)} = 0,$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\left[\frac{5z^6-2z^2+1}{z^4(3+z^3)} - 0\right] =$$
$$= -\lim_{z\to\infty} \frac{z^7\left(5-\frac{2}{z^4}+\frac{1}{z^6}\right)}{z^7\left(\frac{3}{z^3}+1\right)} = -5,$$

поэтому

$$J = -2\pi i\,(-5) = 10\pi i.$$

3) Подынтегральная функция имеет три особые точки: -1 — полюс 1-го порядка, 0 — существенно особая точка и бесконечность — полюс 2-го порядка, причем вне контура лежит одна бесконечность, поэтому вычислим интеграл, используя вычет функции относительно бесконечности:

$$J = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Для вычисления вычета функции относительно бесконечности разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечности, для чего проведем следующие преобразования:

$$f(z) = \frac{z^3}{1+z}\,e^{1/z} = \frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}e^{1/z} = z^2\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\,e^{1/z} =$$
$$= z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n},$$

где $1<|z|<\infty$ (использованы разложения элементарных функция (9) и (10)) из главы II, §3, где $\xi = 1/z$).

Итак,

$$f(z)=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\,z^2+\frac{1}{3!}\,z^3+\dots\right).$$

Поскольку перед скобками стоит множитель z^2, то в произведении скобок следует взять коэффициент при $1/z^3$. Тогда получим c_{-1}, т.е. коэффициент при z^{-1}:

$$c_{-1} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + 1 - 1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда
$$\mathrm{res}_\infty f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{3},$$
и
$$J = -2\pi i \,\mathrm{res}_\infty f(z) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

4) Подынтегральная функция имеет две особые точки 0 и -1, которые являются существенно особыми точками функции. Бесконечность для этой функции — полюс 2-го порядка, но раскладывать в ряд Лорана в окрестности бесконечности в данном случае сложнее, чем в окрестности 0 и -1.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых:
$$f(z) = (3z^2 + z + 1)e^{1/z} + (3z^2 + z + 1)e^{1/(z+1)}$$
и найдем вычет функции относительно точки $z = 0$. Второе слагаемое представляет собой функцию, регулярную в окрестности точки $z = 0$, поэтому она раскладывается в степенной ряд и не содержит отрицательных степеней z. Разложим первое слагаемое в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:
$$(3z^2+z+1)e^{\frac{1}{z}} = (3z^2+z+1)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\,z^2+\frac{1}{3!}\,z^3+\ldots+\frac{1}{n!}\,z^n+\ldots\right).$$
Найдем коэффициент c_{-1}:
$$c_{-1} = 3\cdot\frac{1}{3!} + 1\cdot\frac{1}{2!} + 1 = 2,$$
откуда $\mathrm{res}_0 f(z) = 2$.

Теперь найдем вычет функции относительно точки $z = -1$. Здесь первое слагаемое представляет собой функцию, регулярную в окрестности точки $z = -1$, поэтому при разложении в ряд по степеням $(z+1)$ она отрицательных степеней не имеет. Остается разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = -1$ только второе слагаемое, для чего разложим по степеням $(z+1)$ первый множитель:
$$3z^2 + z + 1 = (3 - 1 + 1) + (6z + 1)\big|_{z=-1}(z + 1) +$$
$$+\frac{6}{2!}(z+1)^2 + 0 = 3 - 5(z+1) + 3(z+1)^2.$$

Тогда

$$3(z^2+z+1)e^{1/(z+1)} = \left[3-5(z+1)+3(z+1)^2\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!\,(z+1)^2}+\frac{1}{3!\,(z+1)^3}+\ldots\right],$$

$0<|z+1|<\infty$. Найдем коэффициент при первой отрицательной степени $(z+1)$:

$$c_{-1}=\frac{3}{3!}-\frac{5}{2!}+3=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+3=1,$$

откуда $\operatorname{res}_{-1} f(z)=1$.

Итак, $J=2\pi i(2+1)=6\pi i$.

Пример 6. Для каждой из ветвей $\operatorname{Ln}(z-2)$, регулярной в замкнутой области $G=\{z\colon |z-1|<1/2\}$, вычислить

$$\int\limits_{\partial G}\frac{dz}{\operatorname{Ln}(z-2)+\pi i}.$$

Решение. Определим все множество значений $\operatorname{Ln}(z-2)$ (см. главу I, §6, формула (6)):

$$\operatorname{Ln}(z-2)=\ln|z-2|+i\arg(z-2)+2\pi k i,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Найдем точку z и целое число k, такие, что

$$\ln|z-2|+i\arg(z-2)+2\pi k i=-\pi i.$$

Приравняв вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{cases}\ln|z-2|=0,\\ \arg(z-2)+2\pi k=-\pi,\quad k\in\mathbf{Z},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}|z-2|=1,\\ \arg(z-2)=-\pi(1+2k),\quad k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Поскольку $\arg(z-2)$ равен числу, кратному π, то точка $z-2$ должна лежать на вещественной оси и в то же время на окружности $|z-2|=1$. Это возможно, если $z=1$, поэтому

$\arg(z-2)\big|_{z=1} = \arg(-1) = i\pi$. Найдем k, при котором знаменатель в точке $z = 1$ обращается в нуль: $\pi = -\pi(1+2k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $k = -1$.

Итак, для любой ветви логарифма $\operatorname{Ln}(z-2)$, кроме $k = -1$, интеграл равен нулю.

Рассмотрим ветвь логарифма, полученную при $k = -1$:

$$\ln|z-2| + i\arg(z-2) - 2\pi i = \ln(z-2) - 2\pi i$$

и вычислим интеграл

$$\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{[\ln(z-2) - 2\pi i] + \pi i} = \int\limits_{\partial G} \frac{dz}{\ln(z-2) - \pi i} = 2\pi i \operatorname{res}_1 f(z).$$

Найдем вычет подынтегральной функции относительно точки $z = 1$ по формуле (14), так как $z = 1$ — полюс 1-го порядка:

$$\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{(\ln(z-2) - \pi i)'\big|_{z=1}} = \frac{1}{\left(1/(z-2)\right)\big|_{z=1}} = -1.$$

Таким образом, для одной ветви (при $k = -1$) искомый интеграл равен $-2\pi i$.

Пример 7. Вычислить

$$\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}\,)\sin z},$$

где $G = \{z\colon |z| < 1/2\}$. Исследуется та ветвь корня, для которой $\sqrt{z-1}\,\big|_{z=0} = i$.

Решение. Найдем множество ветвей $\sqrt{z-1}\,\big|_{z=0}$ (см. главу I, §5, формула (4)):

$$\sqrt{z-1}\,\big|_{z=0} = \sqrt{-1} = \sqrt{|-1|}\, e^{i\,\frac{\arg(-1) + 2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1,$$

откуда

$$\sqrt{z-1}\,\big|_{z=0} = \begin{cases} e^{i\pi/2} = i, & \text{если } k = 0, \\ e^{i\,3\pi/2} = -i, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Следовательно, рассматривается главное значение корня.

Так как точка $z = 0$ является полюсом 1-го порядка для подынтегральной функции, то

$$\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(2+\sqrt{z-1}\,)\sin z} = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z).$$

Найдем $\operatorname{res}_0 f(z)$ по формуле (14), полагая

$$P(z) = \frac{1}{2+\sqrt{z-1}}, \quad Q(z) = \sin z :$$

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1/(2+i)}{1} = \frac{1}{2+i}.$$

В этом случае искомый интеграл равен

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2+i} = 2\pi \frac{i(2-i)}{2^2-i^2} = \frac{2}{5}\pi(2i+1).$$

Замечание. Если бы вычисляли интеграл от второй ветви корня, то получили бы, что интеграл равен

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2-i} = 2\pi \frac{i(2+i)}{2^2-i^2} = \frac{2}{5}\pi(2i-1).$$

• Вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении:

93. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(z^2+1)(z-3)}, \quad G = \{z\colon |z-2-i| < 5/2\}.$

94. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} (z^2+1)e^{1/(z+i)}\,dz, \quad G = \{z\colon |z-i| < 3\}.$

95. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{3z^7+2z+1}{(z-1)^2(z^2+4)^3}\,dz, \quad G = \{z\colon |z-2i| < 5\}.$

96. $\displaystyle\int\limits_{\partial G} \frac{2+z}{1+e^z}\,dz, \quad G = \{z\colon |z-1| < 5\}.$

97. $\displaystyle\int_{\partial G} z^4 \sin\frac{1}{z}\,dz,\quad G=\{z: |z+1|<2\}.$

98. $\displaystyle\int_{\partial G} z^4 \cos\frac{2}{z}\,dz,\quad G=\{z: |z|<2\}.$

99. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{\sin z}{(z-1)(z+i)^2}\,dz,\quad G=\{z: |z+1+i|<2\}.$

100. $\displaystyle\int_{\partial G} z^2 \cos\frac{1}{z-2i}\,dz,\quad G=\{z: |z|<3\}.$

101. $\displaystyle\int_{\partial G} (z^2+5z+4)(e^{1/z}+e^{1/(z+1)})\,dz,\quad G=\{z: |z|<3\}.$

102. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{z^4}{1+z^2}\sin\frac{1}{z}\,dz,\quad G=\{z: |z|<2\}.$

103. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{dz}{\operatorname{Ln} z-3\pi i},\quad G=\{z: |z+2|<3/2\}$ и рассматривается та ветвь логарифма, для которой $\operatorname{Ln} z\big|_{z=-e}=1+3\pi i$.

104. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{dz}{\operatorname{Ln}(z-3)+3\pi i},\quad G=\{z: |z-2|<1/2\}$ и рассматривается любая ветвь $\operatorname{Ln}(z-3)$.

105. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{dz}{z(1+\sqrt{z-3})},\quad G=\{z: |z|<2\}$ и рассматривается та ветвь корня, для которой $\sqrt{z-3}\,\big|_{z=-1}=-2i$.

106. $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{e^z}{\sin(1+\sqrt{z})}\,dz,\quad G=\{z: |z-1|<1/2\}$ и рассматривается та ветвь корня, для которой $\sqrt{z}\,\big|_{z=1}=-1$.

§4. Вычисление интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$

Вычисление интегралов от рациональных функций $R(\sin x, \cos x)$ сводится к вычислению контурного интеграла, взятого по окружности $|z| = 1$, с помощью следующей подстановки:

$$z = e^{ix}, \quad \text{где } x \in [0, 2\pi]. \tag{18}$$

Тогда поскольку

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2},$$

то

$$J = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz} =$$

$$= \int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|a_k|<1} \operatorname{res}_{a_k} f(z). \tag{19}$$

Последний интеграл можно вычислить и по особым точкам, лежащим вне круга с единичным радиусом и центром в начале координат:

$$\int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{|a_k|>1} \operatorname{res}_{a_k} f(z). \tag{20}$$

Пример 8. Вычислить

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{1 - 2a \cos x + a^2}\, dx,$$

где $|a| < 1$.

Решение. По формуле (18) введем новую переменную z. В этом случае

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 2x = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2},$$

откуда

$$J = \int\limits_{|z|=1} \frac{z^4+1}{2z^2\left[1-2a\,\frac{z^2+1}{2z}+a^2\right]}\,\frac{dz}{iz} =$$

$$= -\frac{1}{2ia}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2\left[z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right]}\,dz.$$

Корнями квадратного трехчлена в знаменателе являются точки a и $1/a$, поэтому

$$J = -\frac{1}{2ia}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}\,dz.$$

Отметим, что подынтегральная функция имеет особые точки 0, a, $1/a$, ∞, при этом $z=0$ — полюс 2-го порядка, a и $1/a$ — полюсы 1-го порядка, ∞ — устранимая особая точка.

Интеграл можно вычислять, учитывая особые точки, лежащие внутри контура, — это точки 0 и a, а также лежащие вне контура — точки $1/a$ и ∞. Оба варианта приводят к длительным выкладкам. Можно поступить проще: разбить подынтегральную функцию на сумму двух функций:

$$\frac{z^4+1}{z^2(z-a)(z-1/a)} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1/a)} + \frac{1}{z^2(z-a)(z-1/a)}$$

и вычислить интеграл J как сумму двух интегралов:

$$J = -\frac{1}{2ia}\left[\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{(z-a)(z-1/a)}\,dz + \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z-a)(z-1/a)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2ia}\left[\int\limits_{|z|=1} f_1(z)\,dz + \int\limits_{|z|=1} f_2(z)\,dz\right] = -\frac{1}{2ia}\,(J_1+J_2).$$

Найдем интеграл J_1 (внутри контура лежит одна особая точка $z=a$ — полюс 1-го порядка):

$$J_1 = 2\pi i\,\mathrm{res}_a\, f_1(z) = \frac{2\pi i\,a^2}{a-1/a} = \frac{2\pi i\,a^3}{a^2-1}.$$

Интеграл J_2 лучше вычислять по особым точкам, лежащим вне контура, поскольку очевидно, что $\operatorname{res}_\infty f_2(z) = 0$ $\left(f_2(z) \underset{z\to\infty}{\sim} 1/z^4\right.$, т.е. коэффициент $c_{-1} = 0)$:

$$J_2 = -2\pi i\left(\operatorname{res}_{1/a} f_2(z) + \operatorname{res}_\infty f_2(z)\right).$$

Поэтому

$$J_2 = -2\pi i \frac{1}{(1/a)^2(1/a - a)} = -\frac{2\pi i\, a^3}{1-a^2} = \frac{2\pi i a^3}{a^2-1}.$$

В результате имеем

$$J = -\frac{1}{2ia}\left(\frac{2\pi i\, a^3}{a^2-1} + \frac{2\pi i\, a^3}{a^2-1}\right) = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}, \quad |a| < 1.$$

• Вычислить следующие интегралы:

107. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{7+3\cos x}$. **108.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{7+\sin x}$.

109. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x + a^2}, \quad |a| > 1.$

110. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx, \quad |a| < 1.$

111. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{a^2 - 2a\sin x + 1}\,dx, \quad a > 1.$

§5. Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Если функция $f(z)$, где z — комплексная переменная, регулярна в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, непрерывна на вещественной оси и удовлетворяет условию $\lim\limits_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$, то

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{a_k} f(z). \tag{21}$$

Пример 9. Вычислить:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$, где $a > 0$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25}\,dx$.

Решение.

1) Первый интеграл хорошо известен. Вычислим его, применяя теорию вычетов.

Введем функцию $f(z) = 1/(z^2+a^2)$. Эта функция в точках вещественной оси совпадает с данной подынтегральной функцией, она регулярна в верхней полуплоскости за исключением точки ia, которая является для нее полюсом 1-го порядка. Кроме того, она непрерывна на вещественной оси и выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+a^2} = 0,$$

поэтому

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{ai} f(z) = 2\pi i\,\frac{1}{2ai} = \frac{\pi}{a}$$

(при вычислении вычета использована формула (14)).

2) Так как подынтегральная функция четная, то исходный интеграл равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25}\,dx.$$

Введем функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+6z^2+25},$$

которая в точках вещественной оси совпадает с данной подынтегральной функцией. Найдем ее особые точки, для чего вычислим корни знаменателя z_1, z_2, z_3, z_4: $z^4+6z^2+25 = 0$. Если $z^2 = t$, то $t^2+6t+25 = 0$, откуда $t_{1,2} = -3 \pm 4i$.

Пусть $z^2 = -3+4i$. Чтобы найти корни последнего уравнения, проще всего представить z в алгебраической форме $z = a + bi$ и из равенства $(a + bi)^2 = -3 + 4i$ определить a и b. Для этого возведем в квадрат левую часть равенства и приравняем вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3, \\ 2ab = 4. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим корни знаменателя $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$. Рассуждая аналогично относительно $t_2 = -3 - 4i$ и решая систему уравнений $a^2 - b^2 = -3$, $2ab = -4$, получим еще два корня знаменателя: $z_3 = 1 - 2i$, $z_4 = -1 + 2i$.

Следовательно, функция $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости за исключением точек z_1 и z_4, непрерывна на вещественной оси и выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^4 + 6z^2 + 25} = 0.$$

Поэтому

$$J = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \big(\operatorname{res}_{z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z_4} f(z) \big).$$

Найдем вычеты функции $f(z)$ относительно точек z_1 и z_4, используя формулу (14):

$$\operatorname{res}_{z_k} f(z) = \frac{z_k^2}{4z_k^3 + 12z_k} = \frac{z_k}{4(z_k^2 + 3)},$$

где $k = 1, 4$. Отсюда определим

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \frac{z_1}{4(z_1^2 + 3)} = \frac{1 + 2i}{4 \cdot 4i} = \frac{1 + 2i}{16i}$$

и

$$\operatorname{res}_{z_4} f(z) = \frac{z_4}{4(z_4^2 + 3)} = \frac{-1 + 2i}{4 \cdot (-4i)} = \frac{1 - 2i}{16i}.$$

Окончательно получим

$$J = \pi i \left(\frac{1 + 2i}{16i} + \frac{1 - 2i}{16i} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

• Вычислить следующие интегралы:

112. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a>0$, $b>0$.

113. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}$, $a>0$. **114.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

115. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$. **116.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

§6. Лемма Жордана. Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx$

Лемма Жордана. Если функция $\Phi(z)$ непрерывна в замкнутой области $G=\{z\colon |z|\geq R_0,\ \operatorname{Im} z\geq 0,\ R_0>0\}$ и $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi(z)=0$, то

$$J_R=\int\limits_{\gamma_R} e^{iaz}\Phi(z)\,dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{22}$$

где $a>0$ и γ_R — полуокружность $\gamma_R=\{z\colon z=Re^{i\varphi},\ \varphi\in[0,\pi],\ R>R_0\}$.

С помощью леммы Жордана вычисляются интегралы вида $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx$. Если функция комплексного переменного $f(z)$, совпадающая в точках вещественной оси с данной функцией $f(x)$, регулярна в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, непрерывна на вещественной оси и удовлетворяет условию $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, то при $a>0$

$$J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}_{a_k}\left[f(z)\,e^{iaz}\right]. \tag{23}$$

Замечание 1. Используя формулу (23), можно получить формулы для вычисления следующих интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}_{a_k}\left[f(z)\,e^{iaz}\right]\right), \qquad (24)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}_{a_k}\left[f(z)\,e^{iaz}\right]\right). \qquad (25)$$

Замечание 2. Если требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ibx}\,dx, \qquad b < 0,$$

то следует рассматривать особые точки функции $f(z)$, лежащие в нижней полуплоскости.

Пример 10. Вычислить следующие интегралы:

1) $J = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 3x}{x^2+4x+20}\,dx;$ 2) $J = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+10x^2+9}\,dx;$

3) $J = \displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2}\,dx.$

Решение.

1) Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z+20}$$

Найдем ее особые точки: $z^2+4z+20 = 0$, $z_{1,2} = -2 \pm 4i$. В верхней полуплоскости лежит одна особая точка $z_1 = -2+4i$, которая является полюсом 1-го порядка для данной функции. Кроме того, функция $f(z)$ непрерывна на вещественной оси и $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z+1}{z^2+4z+20} = 0$, поэтому для вычисления исходного интеграла J можно воспользоваться формулой (25) при $a = 3$:

$$J = \operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{res}_{z_1}\left(f(z)e^{3iz}\right)\right).$$

Найдем вычет функции $f(z)e^{3iz}$ относительно точки z_1, используя формулу (14):

$$\operatorname{res}_{z_1}\left[f(z)e^{3iz}\right] = \operatorname{res}_{-2+4i} \frac{z+1}{(z^2+4z+20)'}\, e^{3iz} =$$

$$= \frac{(-2+4i+1)e^{3i(-2+4i)}}{2(-2+4i)+4} = \frac{(-1+4i)e^{-6i-12}}{8i},$$

откуда

$$J = \operatorname{Im}\left(2\pi i\, \frac{(-1+4i)e^{-6i-12}}{8i}\right) = \frac{\pi}{4}\, e^{-12} \operatorname{Im}\left((-1+4i)e^{-6i}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\, e^{-12} \operatorname{Im}\left[(-1+4i)(\cos 6 - i\sin 6)\right] = \frac{\pi}{4}\, e^{-12} \operatorname{Im}(-\cos 6 +$$

$$+ 4i\cos 6 + i\sin 6 + 4\sin 6) = \frac{\pi}{4}\, e^{-12}(4\cos 6 + \sin 6).$$

2) Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 10z^2 + 9}$$

и найдем ее особые точки, лежащие в верхней полуплоскости: $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$, или $(z^2+9)(z^2+1) = 0$. Тогда $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, и в верхней полуплоскости лежат точки $3i$ и i.

Так как функция $f(z)$ непрерывна на вещественной оси и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z^4+10z^2+9} = 0$, то можно применить формулу (24) при $a = 1$:

$$J = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res}_{3i}\left(f(z)e^{iz}\right) + \operatorname{res}_{i}\left(f(z)e^{iz}\right)\right]\right\}.$$

Вычеты функции $f(z)e^{iz}$ относительно точек $z_1{=}3i$ и $z_3{=}i$, которые являются простыми полюсами, найдем, используя формулу (14):

$$\operatorname{res}_{z_k}\left[f(z)e^{iz}\right] = \frac{e^{iz_k}}{4z_k^3 + 20z_k} = \frac{e^{iz_k}}{4z_k(z_k^2+5)},$$

где $k = 1, 3$. В результате

$$\operatorname{res}_{3i}\left[f(z)e^{iz}\right] = \frac{e^{-3}}{4\cdot 3i(-9+5)} = -\frac{e^{-3}}{48i}$$

и

$$\operatorname{res}_i \left[f(z)e^{iz}\right] = \frac{e^{-1}}{4i(-1+5)} = \frac{e^{-1}}{16i},$$

поэтому

$$J = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\left(-\frac{e^{-3}}{48i} + \frac{e^{-1}}{16i}\right)\right\} = \frac{\pi}{24}\left(3e^{-1} - e^{-3}\right).$$

3) Подынтегральная функция четная, поэтому с использованием формулы (24) можно записать

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname{res}_{2i} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}\right].$$

(Функция комплексного переменного $f(z) = 1/(z^2+4)^2$ в верхней полуплоскости имеет одну особую точку $2i$ — полюс 2-го порядка. Кроме того, она непрерывна на вещественной оси и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.)

Найдем вычет функции $f(z)e^{3iz}$ относительно точки $2i$ по формуле (12) при $n = 2$:

$$\operatorname{res}_{2i}\left[f(z)e^{iz}\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}(z-i)^2\right]' =$$

$$\lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{3iz}}{(z+2i)^2}\right]' = e^{-6}\lim_{z\to 2i}\frac{3i(z+2i)-2}{(z+2i)^3} = \frac{7e^{-6}}{32i}.$$

Окончательно получим

$$J = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\,\frac{7e^{-6}}{32i}\right) = \frac{7\pi e^{-6}}{32}.$$

• Вычислить следующие интегралы:

117. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2+4x+20}\,dx.$ **118.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}\,dx.$

119. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx.$ **120.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx.$

121. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+7x^2+12}\,dx.$ **122.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+1}\,dx.$

123. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$ **124.** $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin 2x}{(x^2+4)^2}\,dx.$

§7. Вычисление интегралов других типов

В предыдущих параграфах вычислялись интегралы с помощью функций комплексного переменного, непрерывных на вещественной оси. Рассмотрим некоторые интегралы, для вычисления которых предыдущие приемы не применимы.

Интегралы типа $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin^n x\,dx$ и $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos^n x\,dx$ вычисляются при помощи выражения тригонометрических функций через экспоненциальные. При этом следует помнить, что функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены ни в какой полуплоскости.

Интегралы вида $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{\alpha x}\,dx$, где α — некоторое комплексное число, вычисляются с помощью интегрирования в полуплоскости, в которой $|e^{\alpha z}| \le 1$.

Пример 11. Вычислить:

1) $\displaystyle J=\int\limits_0^\infty \frac{\sin 3x}{x(x^2+4)}\,dx;$ 2) $\displaystyle J=\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+1)}\,dx.$

Решение.

1) Вычисление интеграла разобьем на этапы:

а) Введем вспомогательную функцию $f(x)=\frac{e^{i3x}}{x(x^2+4)}$. Нетрудно заметить, что значение мнимой части этой функции совпадает с подынтегральной функцией. Особыми точками функции $f(z)$ (z — комплексная переменная) являются точки 0, $\pm 2i$ — простые полюсы, причем в точке $z=0$, лежащей на вещественной оси, нарушается непрерывность функции $f(z)$.

б) Введем вспомогательный контур интегрирования (рис.24), такой, чтобы он включал отрезок вещественной оси, содержащий точку $z = 0$, и в результате предельного перехода получился бы исходный интеграл. Особую точку $z = 0$ необходимо обойти, поэтому в верхней полуплоскости введем полуокружность γ_ε с центром в точке 0 достаточно малого радиуса ε и полуокржуность γ_R с центром в точке 0 достаточно большого радиуса R, чтобы все особые точки функции $f(z)$ лежали внутри полукруга $\{z: |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, т.е. в данном случае $R > |2i|$.

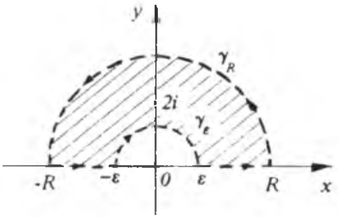


Рис. 24.

в) Таким образом, будем рассматривать контурный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz, \quad (*)$$

который по основной теореме о вычетах (формула (15)) определяется как

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i) =$$

$$= 2\pi i\,\frac{e^{-6}}{2i\cdot 4i} = -\frac{i\pi e^{-6}}{4}.$$

Тогда равенство $(*)$ можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz = -\frac{i\pi}{4}e^{-6} \quad (**)$$

и в нем перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$.

г) Прежде чем осуществить предельный переход, сведем каждый контурный интеграл к интегралу по промежутку, используя формулу (1) из главы 2, §1.

Первое слагаемое: введем параметризацию отрезка $[\varepsilon, R]$: $z = t,\ t \in [\varepsilon, R]$, поэтому

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(t)\,dt.$$

Третье слагаемое: введем параметризацию отрезка $[-R,-\varepsilon]$: $z=-t,\ t\in[R,\varepsilon]$, поэтому

$$\int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz = \int\limits_R^{\varepsilon} f(-t)(-1)\,dt = -\int\limits_R^{\varepsilon} f(-t)\,dt = \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(-t)\,dt.$$

Суммируя первый и третий интегралы, получаем

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(t)\,dt + \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(-t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{R}\left[\frac{e^{i3t}}{t(t^2+4)} + \frac{e^{-i3t}}{-t(t^2+4)}\right]dt = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{t(t^2+4)}\,dt =$$

$$= 2i\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin 3t}{t(t^2+4)}\,dt \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}{\longrightarrow} 2i\,J, \qquad \left(\frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2i} = \sin 3t\right)$$

Второе слагаемое

$$\int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_R^+} \frac{e^{i3z}}{z(z^2+4)}\,dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

согласно лемме Жордана (см. формулу (22)).

Четвертое слагаемое: введем параметризацию полуокружности γ_ε^-: $z=\varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi\in[\pi,0]$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz = \int\limits_{\pi}^{0} f(\varepsilon e^{i\varphi})\,\varepsilon i e^{i\varphi}d\varphi = -\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon e^{i\varphi}(\varepsilon^2 e^{2i\varphi}+4)}\,\varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -i\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}+4}\,d\varphi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\frac{i\pi}{4}.$$

д) Докажем, что осуществленный предельный переход при $\varepsilon\to 0$ под знаком интеграла по полуокружности γ_ε^- возможен. Очевидно, что для этого достаточно показать, что

$$\left|-i\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}+4}\,d\varphi - \left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Проведем преобразования последнего выражения, учитывая, что $-\dfrac{i\pi}{4}=\displaystyle\int\limits_0^\pi\left(-\frac{i}{4}\right)d\varphi$:

$$\left|-i\int\limits_0^\pi\frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2e^{2i\varphi}+4}\,d\varphi-\int\limits_0^\pi\left(-\frac{i}{4}\right)d\varphi\right|\underset{(1)}{=}\left|-i\int\limits_0^\pi\left(\frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2e^{2i\varphi}+4}-\frac{1}{4}\right)d\varphi\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^\pi\frac{4e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}-4-\varepsilon^2e^{2i\varphi}}{4(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+4)}\,d\varphi\right|\underset{(1)}{\leq}\int\limits_0^\pi\frac{|4(e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}-1)-\varepsilon^2e^{2i\varphi}|}{4|\varepsilon^2e^{2i\varphi}+4|}\,d\varphi\underset{(2),(3)}{\leq}$$

$$\underset{(2),(3)}{\leq}\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi\frac{4|e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}-1|+|\varepsilon^2e^{2i\varphi}|}{4-|\varepsilon^2e^{2i\varphi}|}\,d\varphi\underset{(4)}{\leq}\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi\frac{4(e^{|i3\varepsilon e^{i\varphi}|}-1)+\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4(4-\varepsilon^2)}\int\limits_0^\pi\left[4(e^{3\varepsilon}-1)+\varepsilon^2\right]d\varphi=\frac{4(e^{3\varepsilon}-1)+\varepsilon^2}{4(4-\varepsilon^2)}\,\pi\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0.$$

При преобразованиях было использовано следующее: (1) — свойства интегралов, (2) — модуль числителя оценен сверху суммой модулей, причем числитель разбит на сумму двух слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $\varepsilon\to0$, (3) — знаменатель оценен снизу: модуль разности не меньше модуля разности модулей, (4) — использовано неравенство $|e^A-1|\leq\leq e^{|A|}-1$.

е) Итак, равенство (**) можно записать как

$$2i\int\limits_\varepsilon^R\frac{\sin3t}{t(t^2+4)}\,dt+\int\limits_{\gamma_R^+}\frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz-$$
$$-i\int\limits_0^\pi\frac{e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2e^{2i\varphi}+4}\,d\varphi=-\frac{i\pi}{4}\,e^{-6}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon\to0$ и $R\to\infty$ и учитывая результаты, полученные на этапе г), имеем

$$2i\,J+0-\frac{i\pi}{4}=-\frac{i\pi}{4}\,e^{-6},$$

откуда $J=\frac{\pi}{8}\,(1-e^{-6})$.

2) Так как $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, то

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\,K.$$

Решение разобьем на этапы.

а) Введем вспомогательную функцию $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+1)}$. Значение вещественной части данной функции совпадает с подынтегральной функцией. Особыми точками функции $f(z)$, z — комплексная переменная, являются точки 0, $\pm i$ — простые полюсы, причем точка $z=0$ лежит на вещественной оси, поэтому поступим так же, как и в предыдущей задаче (см. рис.24), только здесь $R > |i|$, т. е. $R > 1$. Тогда

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \operatorname{res}_i f(z) = 2\pi i\,\frac{1-\varepsilon^{-2}}{(i)^2\cdot 2i} = -\pi(1-e^{-2}).$$

б) Вводя параметризацию аналогично задаче 1), получаем

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz = \int\limits_\varepsilon^R \frac{1-e^{2it}}{t^2(t^2+1)}\,dt + \int\limits_\varepsilon^R \frac{1-e^{-2it}}{t^2(t^2+1)}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_\varepsilon^R \frac{1-\cos 2t}{t^2(t^2+1)}\,dt \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}{\longrightarrow} 2K$$

(так как $\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} = \cos 2t$).

в) Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\gamma_R^+} \frac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+1)}\,dz = A - B,$$

где

$$A = \int\limits_{\gamma_R^+} \frac{dz}{z^2(z^2+1)}, \quad B = \int\limits_{\gamma_R^+} \frac{e^{2iz}}{z^2(z^2+1)}\,dz.$$

Докажем, что $A \to 0$ при $R \to \infty$. Введем параметризацию полуокружности γ_R^+: $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ и по формуле (1) из главы 2, §1, имеем

$$A = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}(R^2e^{2i\varphi}+1)}\,d\varphi = \frac{i}{R}\int_0^\pi \frac{e^{-i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}+1}\,d\varphi.$$

Оценим интеграл A по модулю:

$$|A| = \left|\frac{i}{R}\int_0^\pi \frac{e^{-i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}+1}\,d\varphi\right| \le \frac{1}{R}\int_0^\pi \frac{|e^{-i\varphi}|}{|R^2e^{2i\varphi}+1|}\,d\varphi.$$

Так как $|e^{-i\varphi}| = 1$, а $|R^2e^{2i\varphi}+1| \ge |R^2e^{2i\varphi}| - 1 = R^2 - 1$ (поскольку $|a+b| \ge \big||a| - |b|\big|$), то

$$|A| \le \frac{1}{R}\int_0^\pi \frac{1}{R^2-1}\,d\varphi = \frac{1}{R(R^2-1)}\,\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Второй интеграл B стремится к нулю при $R \to \infty$ по лемме Жордана.

г) Рассмотрим интеграл по полуокружности γ_ε^-. Вводя параметризацию этой окружности: $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\pi, 0]$, находим (см. формулу (1), глава 2, §1):

$$\int_\pi^0 \frac{1 - e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2e^{2i\varphi}(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1)}\,\varepsilon ie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^\pi \frac{e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}} - 1}{\varepsilon e^{i\varphi}(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1)}\,d\varphi.$$

Докажем, что последний интеграл стремится к -2π при $\varepsilon \to 0$. Для этого представим $-2\pi = -\int_0^\pi 2\,d\varphi$ и рассмотрим разность интегралов по модулю:

$$\left|i\int\limits_0^\pi \frac{e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}-1}{\varepsilon e^{i\varphi}(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1)}\,d\varphi-\int\limits_0^\pi(-2)\,d\varphi\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^\pi \frac{i(e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}-1)+2\varepsilon e^{i\varphi}+2\varepsilon^3e^{3i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1)}\,d\varphi\right|\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\left|\int\limits_0^\pi \frac{i(e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}-1-2i\varepsilon e^{i\varphi})+2\varepsilon^3e^{3i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}(\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1)}\,d\varphi\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^\pi \frac{|i(e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}-1-2i\varepsilon e^{i\varphi})|+|2\varepsilon^3e^{3i\varphi}|}{|\varepsilon e^{i\varphi}|\cdot|\varepsilon^2e^{2i\varphi}+1|}\,d\varphi\overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le}\int\limits_0^\pi \frac{(e^{2\varepsilon}-1-2\varepsilon)+2\varepsilon^3}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\,d\varphi=\frac{(e^{2\varepsilon}-1-2\varepsilon)+2\varepsilon^3}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0.$$

При преобразованиях было использовано следующее: (1) — числитель разбили на сумму двух слагаемых так, чтобы каждое слагаемое имело порядок малости относительно ε, больший или равный двум, (2) — использовали неравенство

$$|e^{2i\varepsilon e^{i\varphi}}-1-2i\varepsilon e^{i\varphi}|\le e^{2\varepsilon}-1-2\varepsilon$$

и неравенство

$$|\varepsilon^2e^{2i\varepsilon}+1|\ge\big||\varepsilon^2e^{2i\varepsilon}|-1\big|=1-\varepsilon^2.$$

д) Итак, в результате предельного перехода при $\varepsilon\to+0$ и $R\to+\infty$ имеем $2K-2\pi=-\pi(1-e^{-2})$. Отсюда

$$K=\frac{\pi}{2}(e^{-2}-1)\quad\text{и}\quad J=\frac{1}{2}K=\frac{\pi(e^{-2}+1)}{4}.$$

Пример 12. Вычислить 1) $\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+4}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

Решение.

1) В подынтегральной функции формально вместо x подставим z и получим следующее выражение: $\frac{\operatorname{Ln} z}{z^2+4}$. Отметим, что $\operatorname{Ln} z$ — "многозначная функция". У нее существует бесчисленное множество регулярных ветвей (см. главу 1, §6, формула (6))).

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\ln z}{z^2+4}$, где под $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ понимается та ветвь логарифма, для которой $\operatorname{Arg} z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Отметим, что в верхней полуплоскости эта ветвь совпадает с главным значением логарифма. Поскольку точка $z = 0$ для функции $f(z)$ является особой точкой (точкой ветвления), то при выборе контура интегрирования ее следует обойти, при этом включить в контур интегрирования отрезок вещественной оси и полуокружность с центром в начале координат достаточно большого радиуса R, чтобы особые точки функции $f(z)$ лежали внутри полукруга $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$. т.е. $R > 2$ (контур интегрирования см. на рис. 24).

Рассмотрим контурный интеграл, который, с одной стороны, вычисляется по теореме о вычетах, а с другой, — раскладывается на сумму интегралов:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{2i} f(z) =$$

$$= \int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz.$$

Точка $z = 2i$ для функции $f(z)$ — простой полюс, поэтому

$$\operatorname{res}_{2i} f(z) = \frac{\ln(2i)}{2\cdot 2i} = \frac{\ln 2 + i \arg 2i}{4i} = \frac{\ln 2 + i\frac{\pi}{2}}{4i}$$

и

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{\ln 2 + i\frac{\pi}{2}}{4i}\cdot 2\pi i = \frac{\pi}{2}\ln 2 + i\,\frac{\pi^2}{4}. \qquad (*)$$

Прежде чем в этом равенстве перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$, сведем контурные интегралы, стоящие в левой части, к интегралам по промежутку. Для первого интеграла введем параметризацию отрезка $[\varepsilon, R]$: $z = t$, $t \in [\varepsilon, R]$, поэтому

$$\int\limits_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t}{t^2+4}\,dt.$$

Для третьего интеграла $\int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz$ введем параметризацию отрезка $[-R, -\varepsilon]$: $z = -t$, $t \in [R, \varepsilon]$, поэтому

$$\int\limits_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{\ln(-t)}{t^2+4}\,d(-t) = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t + i\pi}{t^2+4}\,dt.$$

Суммируя первый и третий интегралы, имеем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t}{t^2+4}\,dt + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t + i\pi}{t^2+4}\,dt = 2\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln t}{t^2+4}]\,dt + i\pi \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{t^2+4}\,. \qquad (**)$$

Теперь докажем, что второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$. Рассмотрим $\int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz$, введем параметризацию полуокружности γ_R: $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(Re^{i\varphi})}{(Re^{i\varphi})^2+4}\,Rie^{i\varphi}d\varphi\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln R + i\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+4}\,Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \overset{(1)}{\le} \int\limits_0^{\pi} \left|\frac{\ln R + i\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+4}\,Rie^{i\varphi}\right| d\varphi \overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le} \int\limits_0^{\pi} \frac{|\ln R| + |i\varphi|}{|R^2e^{2i\varphi}| - 4}\,|Rie^{i\varphi}|\,d\varphi \overset{(3)}{\le} \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln R + \pi}{R^2-4}\,R\,d\varphi \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{(\ln R + \pi)R}{R^2-4}\,\pi \underset{R\to+\infty}{\sim} \frac{\ln R}{R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (***)$$

Здесь при переходе (1) использовано свойство интегралов, при переходе (2) проведена оценка числителя сверху ($|a+b| \le |a| + |b|$), а оценка знаменателя — снизу ($|a+b| \ge \big||a| - |b|\big|$), при переходе (3)) имеется в виду, что числитель будет наибольшим при $\varphi = \pi$, при переходе (4) вычислен интеграл и при предельном переходе при $R \to +\infty$ использован предел $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\ln R}{R^\alpha} = 0$ при $\alpha > 0$.

Наконец, рассмотрим $\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz$. Поступая аналогично предыдущему, имеем $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\pi, 0]$, и

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_\pi^0 \frac{\ln \varepsilon e^{i\varphi}}{(\varepsilon e^{i\varphi})^2 + 4}\,\varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi\right| \overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le} \int\limits_0^\pi \frac{|\ln\varepsilon| + |i\varphi|}{\big||\varepsilon^2 e^{2i\varphi}| - 4\big|}\,\varepsilon\,d\varphi \overset{(2)}{\le} \int\limits_0^\pi \frac{(|\ln\varepsilon| + \pi)\varepsilon}{4 - \varepsilon^2}\,d\varphi \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{(|\ln\varepsilon| + \pi)\varepsilon}{4 - \varepsilon^2} \int\limits_0^\pi d\varphi \overset{(4)}{=} \frac{(|\ln\varepsilon| + \pi)\varepsilon}{4 - \varepsilon^2}\,\pi \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0. \qquad (****)$$

При переходе (1) использовано свойство интегралов, при переходе (2) проведена оценка числителя сверху ($|a+b| \le |a| + |b|$), а оценка знаменателя — снизу ($|a+b| \ge \big||a| - |b|\big|$), при переходе (3) имеется в виду, что числитель будет наибольшим при $\varphi = \pi$, при переходе (4) вычислен интеграл и при предельном переходе при $\varepsilon \to +0$ использован предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^\alpha \ln\varepsilon = 0$ при $\alpha > 0$.

Окончательно при переходе в равенстве (*) к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$, учитывая соотношения (**), (***), (****), имеем

$$2\int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+4}\,dt + i\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2+4} = \frac{\pi}{2}\ln 2 + i\frac{\pi^2}{4}.$$

Приравнивая в последнем равенстве вещественные части, получаем

$$2\int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+4}\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

откуда исходный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+4}\,dt = \frac{\pi \ln 2}{4}.$$

Если приравнять мнимые части, то получим известный интеграл

$$\pi \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+4} = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) Покажем два способа вычисления данного интеграла.

Способ 1. Рассматривая ветвь $\sqrt{z}$, определенную в плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси, которая в верхней полуплоскости совпадает с главным значением корня. Проинтегрируем теперь функцию $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)}$ по замкнутому контуру Γ, определенному следующим образом: начиная от точки $\varepsilon > 0$ на вещественной оси путь идет по вещественной оси в направлении возрастания до точки $R > 0$; затем он обходит в положительном направлении окружность γ_R радиусом R с центром в начале координат; далее проходит по вещественной оси от R до ε и, наконец, обходит в отрицательном направлении окружность γ_ε радиусом ε с центром в начале координат (рис.25).

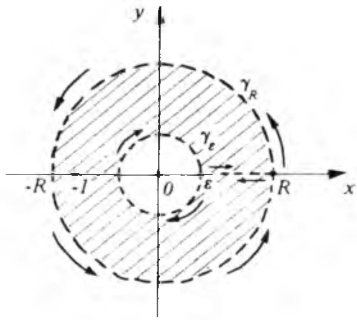


Рис. 25.

Интеграл

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{-1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi \qquad (*)$$

(с учетом выбранной ветви $\sqrt{-1} = i$, см. главу 1, §5).

Вместе с тем

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{[R,\varepsilon]} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz. \quad (**)$$

При интегрировании по отрезку $[\varepsilon, R]$ (параметризация $z = t$, $t \in [\varepsilon, R]$) получаем главное значение корня $\sqrt{z} = \sqrt{t}$, поэтому

$$\int\limits_{[\varepsilon, R]} f(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,dt.$$

При интегрировании по отрезку $[R, \varepsilon]$ (параметризация $z{=}t$, $t \in [R, \varepsilon]$) $\sqrt{z} = -\sqrt{t}$, так как точку $z = 0$ мы обошли в положительном направлении один раз, и поэтому аргумент z получил приращение, равное 2π:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\; e^{i\,\frac{\arg z + 2\pi}{2}} = \sqrt{t}\,e^{i\pi} = -\sqrt{t}.$$

Тогда

$$\int\limits_{[R,\varepsilon]} f(z)\,dz = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{dt}{-\sqrt{t}\,(t+1)} = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)}.$$

Объединяя интегралы по отрезкам $[\varepsilon, R]$ и $[R, \varepsilon]$, находим

$$2\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)}. \qquad (***)$$

Теперь докажем, что интегралы по контурам γ_R и γ_ε^- стремятся к нулю при $R \to +\infty$, $\varepsilon \to +0$. Введем параметризацию окружности: $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{\sqrt{R}\,e^{i\varphi/2}(Re^{i\varphi}+1)}\,d\varphi\right| \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{|Rie^{i\varphi}|}{|\sqrt{R}\,e^{i\varphi/2}(Re^{i\varphi}+1)|}\,d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R}\,|Re^{i\varphi}+1|}\,d\varphi \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R}(R-1)}\,d\varphi = \frac{R}{\sqrt{R}(R-1)} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi R}{\sqrt{R}(R-1)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$(****)$$

Аналогично, рассматривая интеграл по контуру γ_ε^-, получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz = \right|\int\limits_{2\pi}^{0} \frac{\varepsilon i e^{i\varphi}}{\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\varphi/2}(\varepsilon e^{i\varphi}+1)}\,d\varphi\Bigg| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\,d\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\,2\pi \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0. \qquad \left({}^{**}_{***}\right)$$

Переходя в равенстве (**) к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$ и учитывая соотношения (*), (* * *), (* * **), $\left({}^{**}_{***}\right)$, окончательно находим

$$2\pi = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)} + 0 + 0,$$

откуда

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)} = \pi.$$

Способ 2. Сначала в несобственном интеграле сделаем замену переменной $x = e^y$:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^y\,dy}{\sqrt{e^y}\,(e^y+1)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{y/2}}{e^y+1}\,dy$$

и введем функцию комплексного переменного $f(z) = \frac{e^{z/2}}{e^z+1}$, имеющую бесчисленное множество простых полюсов z_k, которые находятся из уравнения $e^z+1=0$, $e^z=-1$, т.е. $z_k = i\pi + 2\pi k i = i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Здесь контур интегрирования, введенный в предыдущих задачах, не подходит, так как с возрастанием R внутрь области будут попадать новые особые точки, поэтому введем новый контур интегрирования (рис.26): одна особая точка $z = i\pi$ лежит внутри контура, а точка $z = 2i\pi$ — на отрезке $[DC]$,

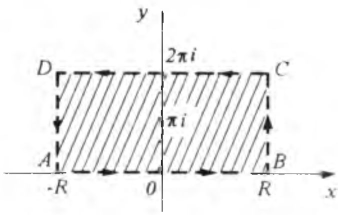


Рис. 26.

так что знаменатель подынтегральной функции $e^z + 1$ не изменяется, когда точка z пробегает отрезок $[DC]$.

Интеграл от функции $f(z)$ по этому контуру

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{i\pi} f(z) = 2\pi i\,\frac{e^{\pi i/2}}{e^{\pi i}} = 2\pi. \tag{$*$}$$

В то же время

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{[AB]} f(z)\,dz + \int\limits_{[BC]} f(z)\,dz +$$
$$+ \int\limits_{[CD]} f(z)\,dz + \int\limits_{[DA]} f(z)\,dz. \tag{$**$}$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно. Введем параметризацию отрезка $[AB]$: $z = t$, $t \in [-R, R]$. Имеем

$$\int\limits_{[AB]} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{t/2}}{e^t + 1}\,dt. \tag{$***$}$$

Параметризация отрезка $[CD]$: $z = t + 2\pi i$, $t \in [R, -R]$, тогда

$$\int\limits_{[CD]} f(z)\,dz = \int\limits_{R}^{-R} \frac{e^{\frac{t+2\pi i}{2}}}{e^{t+2\pi i} + 1}\,dt = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{t/2}}{e^t + 1}\,dt; \tag{$****$}$$

Параметризация отрезка $[BC]$: $z = R + it$, $t \in [0, 2\pi]$. В этом случае

$$\int\limits_{[BC]} f(z)\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{\frac{R+it}{2}}}{e^{R+it} + 1}\,i\,dt = i\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{R/2}\,e^{it/2}}{e^R\,e^{it} + 1}\,dt. \tag{$\substack{**\\***}$}$$

Параметризация отрезка $[DA]$: $z = -R + it$, $t \in [2\pi, 0]$. Получаем

$$\int\limits_{[DA]} f(z)\,dz = \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{e^{\frac{-R+it}{2}}}{e^{-R+it} + 1}\,i\,dt = -\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{-R/2}\,e^{it/2}}{e^{-R}\,e^{it} + 1}\,dt; \tag{$\substack{***\\***}$}$$

Докажем, что интегралы $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{**}{***}\right)$ и $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{***}{***}\right)$ стремятся к нулю при $R \to +\infty$. Для этого оценим их по модулю и перейдем к пределу при $R \to +\infty$:

$$\left| \int\limits_{[BC]} f(z)\,dz \right| = \left| i \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{R/2}\, e^{it/2}}{e^R\, e^{it} + 1}\, dt \right| \leq \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{e^{R/2}\, e^{it/2}}{e^R\, e^{it} + 1} \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{R/2}}{e^R - 1}\, dt = \frac{e^{R/2}}{e^R - 1}\, 2\pi \underset{R \to +\infty}{\sim} \frac{2\pi}{e^{R/2}} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$$\left| \int\limits_{[DA]} f(z)\,dz \right| = \left| -i \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-R/2}\, e^{it/2}}{e^{-R}\, e^{it} + 1}\, dt \right| \leq \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-R/2}\, e^{it/2}}{e^{-R}\, e^{it} + 1} \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}\, dt = \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}\, 2\pi \underset{R \to +\infty}{\sim} 2\pi e^{-R/2} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

И наконец, переходя к пределу в равенстве $(**)$ и учитывая соотношения $(*)$, $(***)$, $(****)$ и стремление к нулю интегралов $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{**}{***}\right)$ и $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{***}{***}\right)$, находим

$$2\pi = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t/2}}{e^t + 1}\, dt,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t/2}}{e^t + 1}\, dt = \pi.$$

• Вычислить следующие интегралы:

125. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. **126.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+1)}\, dx$. **127.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}\, dx$.

128. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$. **129.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\, \frac{\sin ax}{x}\, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

130. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx,\ a>0.$ **131.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+4}\,dx.$ **132.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}.$

133. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/4}}{e^x+1}\,dx.$ **134.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx.$

135. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1+x)},\ 0<p<1.$ **136.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)^2}\,dx.$

Раздел III. Ряды и интеграл Фурье

Глава I. Ряды Фурье

§1. Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом 2π

Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на промежутке $[-\pi, \pi]$, называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{2}$$

Если ряд (1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то употребляется следующая запись:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3}$$

что означает, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье.

Замечание 1. Не для всякой функции можно построить ряд Фурье(невозможно, например, написать ряд Фурье функции, для которой интегралы в формулах (2) не существуют).

Замечание 2. Не всякая функция является суммой ее ряда Фурье, даже если он сходится.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной в промежутке $[a, b]$, если этот промежуток разбивается на конечное число промежутков $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_n, b]$, в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна. Кусочно-монотонная функция может иметь в промежутке $[a, b]$ разрывы лишь первого рода.

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-монотонна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем не более чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4}$$

в каждой точке непрерывности и к сумме

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \tag{5}$$

в каждой точке разрыва.

Высказанные условия называются *условиями Дирихле.*

Если функция рассматривается на открытом промежутке $(-\pi, \pi)$, то

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\big[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big]. \tag{5'}$$

Если $f(x)$ — четная функция (т.е. $f(-x) = f(x)$), то

$$\begin{gathered} b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \end{gathered} \tag{6}$$

и ряд Фурье для четной функции записывается так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \tag{7}$$

Если $f(x)$ — нечетная функция (т. е. $f(-x) = -f(x)$), то

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

и ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{9}$$

В случае разложения в ряд Фурье функции $f(x)$, удовлетворяющей тем же условиям, но заданной в произвольном промежутке $[a, a+2\pi]$ длиной 2π, в формулах (2) пределы интегрирования заменяются соответственно на a и $a + 2\pi$. Например, если $a = 0$, то промежуток $[a, a + 2\pi]$ имеет вид $[0, 2\pi]$, и коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ можно записать в комплексной форме. Так, если в ряде Фурье (1) функции $f(x)$ заменить $\cos kx$ и $\sin kx$ их выражениями через экспоненциальные функции по известным формулами Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

то получим

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k\,\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)$$

или, группируя члены, содержащие e^{ikx} и e^{-ikx},

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right), \tag{11}$$

где

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Комплексный ряд (11) можно записать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{12}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{13}$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную так:

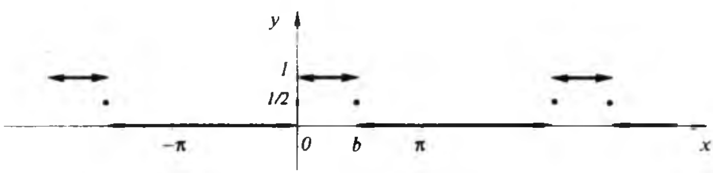


Рис. 27.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < b, \\ 0 & \text{при } b < x \le \pi, \\ 1/2 & \text{при } x = 0,\ x = b. \end{cases}$$

(График такой функции сначала строится на промежутке $[-\pi, \pi]$, затем периодически продолжается на всю ось (рис.27).)

Р е ш е н и е. Из определения данной функции следует, что она удовлетворяет всем условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье.

Вычисление коэффициентов Фурье по формулам (2) дает значение

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\,dx+\int\limits_{0}^{b} 1\,dx+\int\limits_{b}^{\pi} 0\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{b} 1\,dx=\frac{b}{\pi}.$$

Аналогично

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{b} 1\cdot\cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{\pi k}\Bigg|_0^b=\frac{\sin kb}{\pi k},$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{b} 1\cdot\sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{\pi k}\Bigg|_0^b=\frac{1-\cos \pi b}{\pi k}.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{b}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kb\cos kx+(1-\cos\pi b)\sin kx}{k}\right]$$

в точках непрерывности.

В точках разрыва по формулам (5) имеем

$$S(0)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$S(b)=\frac{f(b-0)+f(b+0)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

(Если требуется найти значение суммы ряда Фурье, например в точке 10, то поступают обычно таким образом: поскольку функция $S(x)$ 2π-периодическая, то $S(10)=S(10+2\pi k)$ и k подбирают таким образом, чтобы точка $10+2\pi k$ попала в основной промежуток $[-\pi,\pi]$. В данном случае, при $k=-2$ $S(10)=S(10-2\cdot 2\pi)=f(10-4\pi)=0$.)

П р и м е р 2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством $f(x)=e^{ax}$ $(a\neq 0,\ a$ — const), $-\pi<$ $<x<\pi$.

Решение. График данной функции изображен на рис.28.

Так как рассматриваемая функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, то ее можно разложить в ряд Фурье.

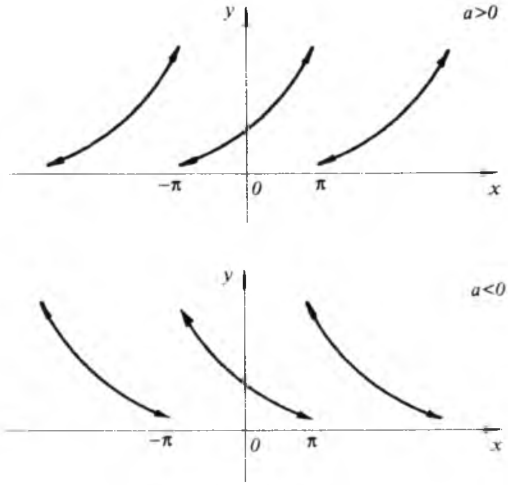


Рис. 28.

По формулам (2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{ax}}{a}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi a}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) = \frac{2}{a\pi}\,\frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{a\pi};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a\cos kx + k\sin kx}{a^2+k^2}\,e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^k\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+k^2}\,\mathrm{sh}\,a\pi,$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$ Вычисление интеграла $\int e^{ax}\cos kx\,dx$ удобно провести методом сведения к интегралу того же вида путем применения интегрирования по частям дважды:

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{ax}, \\ dv &= \cos kx\,dx \end{aligned}\;\right|\; \begin{aligned} du &= a\,e^{ax}dx, \\ v &= \frac{1}{k}\sin kx. \end{aligned}$$

$$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{1}{k}e^{ax}\sin kx - \frac{a}{k}\int e^{ax}\sin kx\,dx.$$

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{ax}, \\ dv &= \sin kx\,dx \end{aligned}\;\right|\; \begin{aligned} du &= a\,e^{ax}dx, \\ v &= -\frac{1}{k}\cos kx. \end{aligned}$$

$$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{1}{k}e^{ax}\sin kx + \frac{a}{k^2}e^{ax}\cos kx - \frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\cos kx\,dx.$$

Из последнего равенства и находим искомый интеграл:

$$\frac{k^2+a^2}{k^2}\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{a\cos kx + k\sin kx}{k^2}e^{ax},$$

$$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{a\cos kx + k\sin kx}{a^2+k^2}e^{ax}.$$

Аналогично

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{a\sin kx - k\cos kx}{a^2+k^2}e^{ax}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^k\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2k}{a^2+k^2}\,\mathrm{sh}\,a\pi,$$

$k=1,2,\ldots$ Следовательно, при $-\pi < x < \pi$ имеем

$$e^{ax} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx - k\sin kx)\right].$$

В точках разрыва

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{e^{-a\pi}+e^{a\pi}}{2}.$$

В частных случаях при $a = 1$ и $a = -1$ получаем соответственно

$$e^{ax} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx - k\sin kx)\right],$$

$$e^{-ax} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx + k\sin kx)\right].$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x) = x + |x|$ (рис.29,a), заданную на интервале $(-\pi, \pi]$.

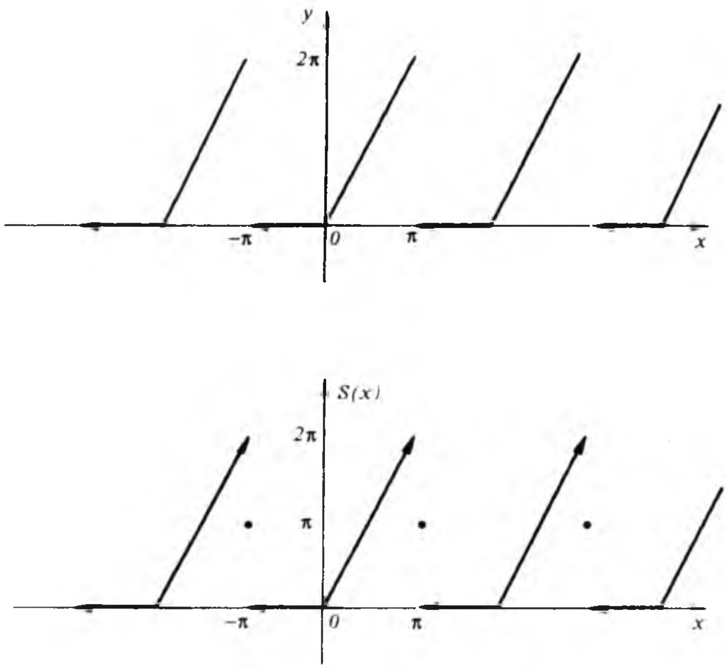


Рис. 29.

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости функции в ряд Фурье. При этом ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится при всех x и значения его суммы $S(x)$

совпадают со значениями функции $f(x)$ во всех точках, кроме точек ее разрыва $x = \pm(2k-1)\pi$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Значения функции $S(x)$ при $x = \pm\pi$ определяются формулой (5). В данном случае $f(-\pi+0)=0$, $f(\pi-0)=2\pi$. Поэтому $S(\pm\pi)=\pi$. Так как функция $S(x)$ 2π-периодична, то $S\big(\pm(2k-1)\pi\big)=\pi$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

График функции $S(x)$ — суммы ряда Фурье для данной функции $f(x)$ — изображен на рис.29,*б*.

Теперь построим ряд Фурье для рассматриваемой функции $f(x)$.

Вычисляя коэффициенты Фурье для функции $f(x)$ по формулам (2) и принимая во внимание, что

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} 2x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\,2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi.$$

Далее,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k^2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos k\pi - 1\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Для вычисления интеграла использована формула интегрирования по частям.)

Аналогично находим b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{2}{k}\,(-1)^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).\right.$$

Подставляя найденные значения a_0, a_k и b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ в ряд Фурье (1), получаем

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi k^2}\,[(-1)^k - 1]\cos kx + \frac{2}{k}\,(-1)^{k+1}\sin kx\right\}.$$

Этот ряд сходится при всех x. А так как $S(x) = f(x)$, то для всех x из интервала $(-\pi, \pi]$ имеет место разложение

$$x + |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi k^2}\,[(-1)^k - 1]\cos kx + \frac{2}{k}\,(-1)^{k+1}\sin kx\right\}.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством $f(x) = x^2$ при $-\pi \le x \le \pi$ (рис.30). При помощи полученного разложения вычислить суммы рядов

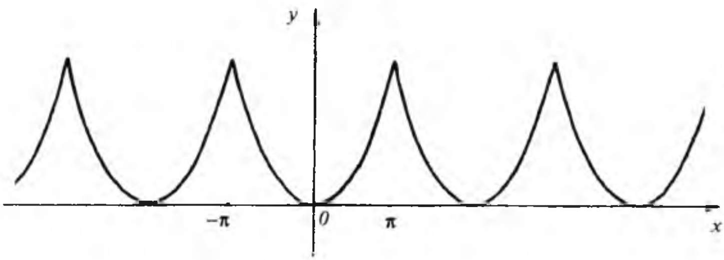


Рис. 30.

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots,$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \ldots$$

Р е ш е н и е. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости и, следовательно, разлагается в ряд Фурье. Функция $f(x) = x^2$ — четная, потому по формулам (6) имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\,\pi^2,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,x^2\,\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{4}{\pi k}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{4}{\pi k}\int_0^\pi x\,d\left(\frac{\cos kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi k}\,x\,\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos kx\,dx = \frac{4}{\pi k^2}\,\pi\cos k\pi - \frac{4}{\pi k^2}\,\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{4}{k^2}(-1)^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \qquad b_k = 0\ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому, при $-\pi \le x \le \pi$ получаем разложение

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\,\frac{\cos kx}{k^2}.$$

При $x = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{3} = -4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Аналогично при $x = \pi$ находим

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

П р и м е р 5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{при } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{при } x = \pi \end{cases}$$

с периодом 2π (рис.31).

Р е ш е н и е. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье.

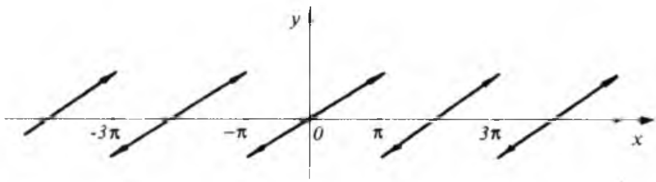


Рис. 31.

Так как данная функция нечетная, то по формулам (8) имеем

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{2}\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi k}\int_0^\pi \cos kx\,dx = -\frac{\cos k\pi}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Значит, в точках непрерывности

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

и в точках разрыва

$$f(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

П р и м е р 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2x$ при $0 < x < 2\pi$ с периодом 2π (рис.32).

Решение. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как интервал ее задания $0 < x < 2\pi$ не симметричен относительно начала системы координат, а так как она удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, то ее можно разложить в ряд Фурье.

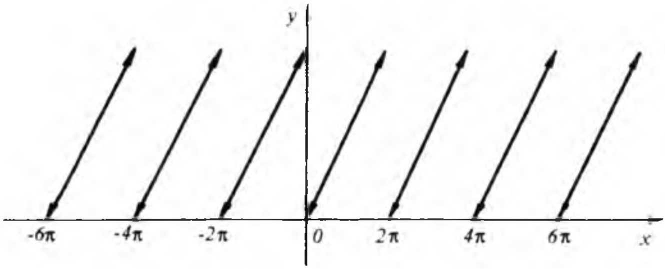


Рис. 32.

По формулам (10)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\,2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2x\,\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right] = -\frac{2}{\pi k}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\,\cos kx\Big|_0^{\pi} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2x\,\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \frac{2}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[-2\pi\cos 2\pi k + \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}\right] = -\frac{4}{k}.$$

В итоге получаем ряд Фурье

$$2x = 2\pi - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

при $0 < x < 2\pi$, и

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{0 + 4\pi}{2} = 2\pi.$$

Сумму ряда Фурье в других точках можно найти, используя периодичность функции. Например, $S(15) = S(15 - 2\cdot 2\pi) = f(15 - 4\pi) = 2(15 - 4\pi)$.

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, с периодом 2π (рис.33).

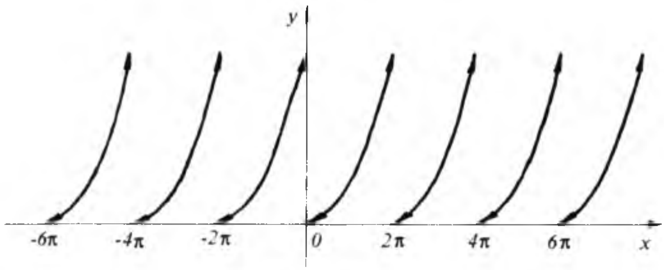


Рис. 33.

Решение. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, так как область ее задания не симметрична относительно нуля.

Коэффициенты Фурье определим по формулам (10):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\,\frac{\sin kx}{k}\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx\right) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\,d\left(\frac{\cos kx}{k}\right)=\frac{2}{\pi k}\left[x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[\frac{2\pi}{k}-\frac{\sin kx}{k^2}\Big|_0^{2\pi}\right]=\frac{4}{k^2}\quad (k=1,2,3,\ldots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}+2\int_0^{2\pi} x\,\frac{\cos kx}{k}dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k^2}x\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{k^2}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k^3}\cos kx\Big|_0^{2\pi}\right]=-\frac{4\pi}{k}\quad (k=1,2,3,\ldots).$$

Получим ряд Фурье

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}-4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=$$
$$=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0<x<2\pi, \\ 2\pi^2 & \text{при } x=0,\ x=2\pi. \end{cases}$$

При $x=0$ и $x=2\pi$ сумма ряда определяется по формуле (5):

$$S(0)=S(2\pi)=\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(2\pi-0)\right]=\frac{1}{2}\left[0+(2\pi)^2\right]=2\pi^2.$$

Пример 8. Записать в комплексной форме ряд Фурье для функции из примера 2.

Решение. Вычислим коэффициенты ряда по формуле (13):

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-ik)x}dx=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(a-ik)} \left[e^{a\pi} e^{-ik\pi} - e^{-a\pi} e^{ik\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(a-ik)} \left[e^{a\pi}(\cos k\pi - i \sin k\pi) - e^{-a\pi}(\cos k\pi + i \sin k\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(a-ik)} \left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) (-1)^k.$$

Ряд Фурье для данной функции запишется так:

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{ikx}}{a-ik} = \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{ikx}}{a-ik}$$

при $-\pi < x < \pi$. В точках $x = \pm\pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{e^{-a\pi} + e^{a\pi}}{2}.$$

• Разложить в ряд Фурье функции с периодом 2π:

1. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } 0 \le x < \pi, \\ bx & \text{при } -\pi < x < 0, \end{cases}$ где a и b — числа.

а) Построить график исходной функции при $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$ и найти ее разложение;

б) Рассмотреть случаи $a = b = 1$ и $a = 1$, $b = -1$. Построить графики этих функций и, используя их разложения в тригонометрические ряды Фурье, найти суммы числовых рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$$

3. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

С помощью полученного разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$$

4. $f(x) = x(\pi - x)$ при $-\pi < x < \pi$.

5. $f(x) = \pi + x$ при $-\pi \le x \le \pi$.

6. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ -1 & \text{при} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x) = x^3$ при $-\pi < x < \pi$.

9. $f(x) = \cos ax$ при $-\pi \le x \le \pi$, $a \ne k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

10. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x \le \pi$.

11. $f(x) = |\sin x|$.

12. $f(x) = x \cos x$ при $-\pi < x < \pi$.

13. $f(x) = x \sin x$ при $-\pi < x < \pi$.

14. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$. Построить график суммы ряда $S(x)$

15. $f(x) = e^x - 1$ при $0 < x < 2\pi$.

16. Записать ряд Фурье 2π-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{при} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

в комплексной форме.

§2. Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом $2l$

Если функция $f(x)$ с периодом $2l$ кусочно-монотонна в промежутке $[-l, l]$ и имеет в нем не более конечного числа точек разрыва, то во всех точках непрерывности справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{14}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а в точках разрыва

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{16}$$

Если функция $f(x)$ рассматривается на открытом промежутке $(-l, l)$, то

$$S(l) = S(-l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}. \tag{16'}$$

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a, a+2l]$ длиной $2l$ пределы интегрирования в формулах (15) заменяются на a и $a + 2l$ соответственно.

З а м е ч а н и е. Ряд (1) является частным случаем ряда в формуле (14). Он получается из последнего при $l = \pi$. Формулы (2) выводятся соответственно из формул (15) при $l = \pi$.

Аналогично, если $f(x)$ — четная функция, то ее ряд имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \tag{17}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{18}$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее ряд определяется выражением

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{19}$$

где

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{20}$$

Пример 9. В промежутке $(-l, l)$ разложить в ряд Фурье $2l$-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -l \le x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x < l. \end{cases}$$

Решение. График данной функции представлен на рис.34.

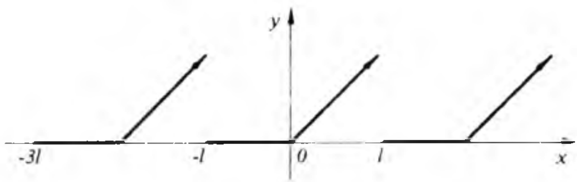


Рис. 34.

Найдем коэффициенты Фурье по формулам (15):

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} 0\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{1}{l}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^l = \frac{1}{l}\cdot\frac{l^2}{2} = \frac{l}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} 0\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\,d\left(\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{\frac{k\pi}{l}}\right) = \frac{1}{l}\left[x\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \right.$$

$$\left.-\frac{l}{k\pi}\int\limits_{0}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right] = -\frac{1}{k\pi}\int\limits_{0}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{1}{k\pi}\left(-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_0^l =$$

$$= \frac{l}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) = -\frac{l}{k^2\pi^2}(1-\cos k\pi) = -\frac{l}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2m, \\ -\dfrac{2l}{(2m-1)^2\pi^2} & \text{при } k=2m-1,\ (k=1,2,3,\ldots), \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} 0\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\,d\left(-\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{\frac{k\pi}{l}}\right) = \frac{1}{l}\left[-x\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \right.$$

$$\left.+\frac{l}{k\pi}\int\limits_{0}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\right] = \frac{1}{l}\left[-\frac{l^2}{k\pi}\cos k\pi + \frac{l}{k\pi}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{l}{k\pi}(-1)^k \quad (k=1,2,3,\ldots).$$

Полагая $k = m$ $(k = m = 1,2,3,\ldots)$ для записи ряда Фурье, окончательно получаем в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi(2m-1)^2}\cos\frac{2m-1}{l}\pi x + \frac{(-1)^m}{2m}\sin\frac{m\pi x}{l}\right]$$

и в точках разрыва

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} = \frac{0+l}{2} = \frac{l}{2}.$$

П р и м е р 10. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -2 < x \le -1, \\ x+1 & \text{при} \quad -1 < x < 0, \\ 1-x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

с периодом $2l = 4$.

Р е ш е н и е. Построим график функции $f(x)$ (рис.35).

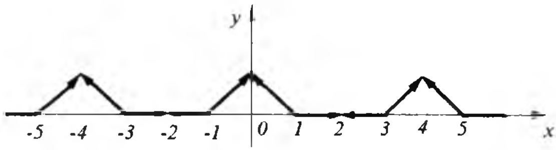


Рис. 35.

График функции симметричен относительно оси OY. Следовательно, данная функция четная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по косинусам. Используя формулы (18), получаем

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 0\,dx = -\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 0\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = (1-x)\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\,\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{k^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi^2} & \text{при} \quad k = 2m-1, \\ \frac{8}{k^2\pi^2} & \text{при} \quad k = 2(2m-1), \\ 0 & \text{при} \quad k = 4m, \quad m = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

При вычислении интеграла $\int\limits_0^1 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx$ использовано интегрирование по частям:

$$u = 1 - x, \qquad du = -dx,$$
$$dv = \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx, \quad v = \int \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

Вычислим несколько значений a_k:

$$m = 1: \quad a_1 = \frac{4}{\pi^2}, \quad a_2 = \frac{8}{4\pi^2}, \quad a_4 = 0;$$
$$m = 2: \quad a_3 = \frac{4}{3^2\pi^2}, \quad a_6 = \frac{8}{6^2\pi^2}, \quad a_8 = 0;$$
$$m = 3: \quad a_5 = \frac{4}{5^2\pi^2}, \quad a_{10} = \frac{8}{10^2\pi^2}, \quad a_{12} = 0;$$
$$\vdots$$

Тогда ряд Фурье для данной функции можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{2} + \ldots\right),$$

и это разложение справедливо при всех значениях x, так как функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

Пример 11. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^3$ с периодом $2l = 2$ в промежутке $(-1, 1)$.

Решение. Данная функция является нечетной, поэтому разложение (14) содержит только члены с синусами, $a_k = 0$. Коэффициенты b_k в этом случае можно определить по формуле (20):

$$b_k = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 x^3 \sin k\pi x\,dx = 2\int\limits_0^1 x^3\,d\left(-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right) = -2x^3\cos\frac{k\pi x}{k\pi}\Bigg|_0^1 +$$

$$+\frac{6}{k\pi}\int\limits_0^l x^2\cos k\pi x dx=-\frac{2}{k\pi}(1\cos k\pi-0\cos 0)+\frac{6}{k\pi}\int\limits_0^1 x^2 d\left(\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right)=$$

$$=-2\,\frac{(-1)^k}{k\pi}+\frac{6}{k^2\pi^2}\,x^2\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{12}{k^2\pi^2}\int\limits_0^1 x\sin k\pi x\,dx=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}+\frac{6}{k^2\pi^2}(1\sin k\pi-0\sin 0)+\frac{12}{k^2\pi^2}\int\limits_0^1 x\,d\left(\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right)=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}+\frac{12}{k^3\pi^3}\,x\cos k\pi x\Big|_0^1-\frac{12}{k^2\pi^2}\int\limits_0^1\frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}+\frac{12}{k^3\pi^3}(1\cdot\cos k\pi-0\cdot\cos 0)-\frac{12}{k^3\pi^3}\,\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}+(-1)^k\frac{12}{k^3\pi^3}=(-1)^k\frac{2}{k\pi}\left(-1+\frac{6}{k^2\pi^2}\right)$$

$(k=1,2,3,\ldots)$. Вычисление интегралов проведено интегрированием по частям.

Итак, в точках непрерывности, т.е. при $-1<x<1$,

$$x^3=2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}+\frac{(-1)^k 6}{k^3\pi^3}\right]\sin k\pi x=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k}+(-1)^k\frac{6}{k^3\pi^2}\right]\sin k\pi x,$$

а в точках разрыва, т.е. при $x=\pm1$, имеем

$$S(-1)=S(1)=\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{(-1)^3+(1)^3}{2}=0.$$

• Следующие функции разложить в ряд Фурье в указанных промежутках:

17. $f(x)=1-x^2$, $-1<x<1$, $l=1$, где $2l$ — период функции.

18. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \end{cases}$ если $f(x) = f(x+2)$.

19. $f(x) = x - 2$, $-1<x<1$, $2l=2$, $2l$ — период функции.

20. $f(x) = e^x$, $-l<x<l$.

21. $f(x) = 3|x| - 2x$, $-1/2<x<1/2$, если $f(x) = f(x+1)$.

§3. Разложение в тригонометрический ряд Фурье непериодической функции

В предыдущих параграфах мы исходили из предположения, что заданная функция определена для всех вещественных значений переменной и притом имеет период 2π (или $2l$). Между тем чаще всего приходится иметь дело с непериодической функцией, заданной только на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Чтобы иметь право применить к такой функции изложенное ранее, вместо нее вводится вспомогательная функция $f^*(x)$, определенная следующим образом. В промежутке $(-\pi, \pi]$ функция $f^*(x)$ отождествляется с функцией $f(x)$:

$$f^*(x) = f(x) \quad (-\pi < x \le \pi), \tag{21}$$

затем полагается

$$f^*(-\pi) = f^*(\pi),$$

а на остальные значения x распространяется функция $f^*(x)$ по закону периодичности $f^*(x+2\pi) = f^*(x)$.

К построенной таким образом функции $f^*(x)$ с периодом 2π можно применить теорему о разложении. В точках непрерывности функция $f^*(x)$ разлагается в ряд (1). Значения аргумента ограничиваются интервалом $(-\pi, \pi)$, и в точках непрерывности функция $f(x)$ раскладывается по формулам (2):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos kx\,dx\right)\cos kx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin kx\,dx\right)\sin kx\right], \quad -\pi < x < \pi, \tag{22}$$

в точках разрыва внутри промежутка $(-\pi, \pi)$ — по формуле

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}; \tag{23}$$

на концах промежутка — по формуле

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \tag{24}$$

Замечание 1. Отметим, что вместо промежутка $[-\pi, \pi]$ можно брать любой промежуток $[a, a+2\pi]$ длиной 2π. Аналогично вместо промежутка $[-l, l]$ — промежуток $[a, a+2l]$ длиной $2l$.

Замечание 2. Если тригонометрический ряд (1) сходится в промежутке $(-\pi, \pi)$ к функции $f(x)$, то поскольку его члены имеют период 2π, он сходится всюду и сумма его $S(x)$ — также периодическая функция с периодом 2π.

Как известно, функцию $f(x)$, заданную в промежутке $[-\pi, \pi]$, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье по косинусам, если она четная, и по синусам, если она нечетная.

Если же функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $[0, \pi]$, то для разложения ее в ряд Фурье (1) задание этой функции произвольно дополняется в промежутке $[-\pi, 0)$, что дает возможность воспользоваться теоремой о разложении.

Можно произвольно задать функцию в промежутке $[-\pi, 0)$ так, чтобы получить для этой функции разложение только по косинусам или только по синусам. Для этого в промежутке $[-\pi, \pi]$ задают функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ f(x) & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

т. е. осуществляют четное продолжение данной функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi, 0)$. Затем используют формулы (6) и для точек непрерывности записывают разложение по косинусам:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx\right)\cos kx \quad (0<x<\pi). \tag{25}$$

Аналогично, полагая

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{при } -\pi < x < 0, \\ f(x) & \text{при } 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

осуществляют нечетное продолжение заданной функции $f(x)$ на промежутке $(-\pi, 0)$. Затем используют формулы (8) и для точек непрерывности функции записывают разложение по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) \sin kx \quad (0 < x < \pi). \tag{26}$$

Аналогично для промежутка $[0, l)$, $l > 0$, имеем

$$f(x) = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \right) \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (0<x<l), \tag{25'}$$

при разложении по косинусам и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (0 < x < l) \tag{26'}$$

при разложении по синусам.

В точках разрыва функции $f(x)$ суммы рядов (25′) и (26′) равны полусуммам односторонних пределов функции.

Вопрос о значении суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ в точках $x = 0$ и $x = \pi$ требует специального рассмотрения.

При разложении функции $f(x)$ по косинусам значение $S(x)$ в точке $x = 0$ зависит от того, является ли функция $f^*(x)$ непрерывной в этой точке. Ввиду четности продолжения функция $f^*(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Следовательно, $S(0) = f^*(0)$ или $S(0) = f(0)$.

Значение $S(x)$ в точке $x = \pi$ определяется по формулам

$$S(\pi) = \frac{f^*(-\pi) + f^*(\pi)}{2},$$

а так как в данном случае $f^*(-\pi) = f^*(\pi) = f(\pi)$, то $S(\pi) = f(\pi)$.

Таким образом, при сделанных предположениях разложение (25) справедливо во всем интервале $[0, \pi]$.

При разложении функции $f(x)$ по синусам $S(x)$ при $x = 0$ определяется выражением

$$S(0) = \frac{f^*(-0) + f^*(+0)}{2} = 0.$$

Оно совпадает с $f(0)$ только в случае, когда $f(0) = 0$.

Аналогично в точке $x = \pi$ имеем $S(\pi) = 0$. Если же $f(\pi) = 0$, то $S(\pi) = f(\pi)$.

Таким образом, разложение (26) имеет место лишь в интервале $(0, \pi)$.

Пример 12. Функцию $f(x) = |x|$, заданную в промежутке $[-2, 2]$, разложить в ряд Фурье.

Решение. Введем в рассмотрение новую функцию $f^*(x) = f(x) = |x|$ при $-2 < x \le 2$, $f^*(-2) = f^*(2) = 2$, $f^*(x) = f^*(x+4)$ (рис.36).

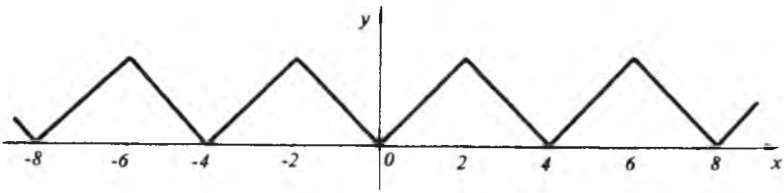


Рис. 36.

Для функции $f(x)$ ввиду ее четности справедливо разложение (17). Вычисляя коэффициенты по формулам (18):

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x\,d\left(\frac{\sin\frac{k\pi x}{2}}{\frac{k\pi}{2}}\right) =$$

$$= x\,\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{k\pi}\,\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2m, \\ -\dfrac{8}{k^2\pi^2} & \text{при } k = 2m-1, \quad m = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

(при вычислении интегралов использовано интегрирование по частям), получаем искомое разложение

$$|x| = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)x}{2} \quad (-2 \le x \le 2).$$

Пример 13. Разложить функцию $f(x) = x$ $(0 \le x \le \pi)$ в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Доопределим данную функцию $f(x)$ на промежутке $[-\pi, 0)$ четным образом, а затем периодически с периодом 2π на всю ось и воспользуемся разложением (25):

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \frac{2}{\pi}\Bigg[x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = 2\,\frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi} \quad (k > 0)$$

(при вычислении интеграла использовано интегрирование по частям), т. е. $a_{2m} = 0$, $a_{2m-1} = -\frac{4}{(2m-1)^2\pi}$ $(m = 1,2,3,\ldots)$.

Искомое разложение имеет вид

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} \quad (0 \le x \le \pi).$$

График суммы ряда изображен на рис. 37.

П р и м е р 14. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$, заданную на полупериоде в промежутке $[0,2]$.

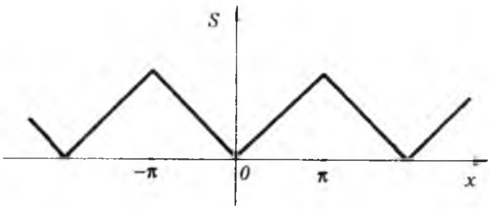


Рис. 37.

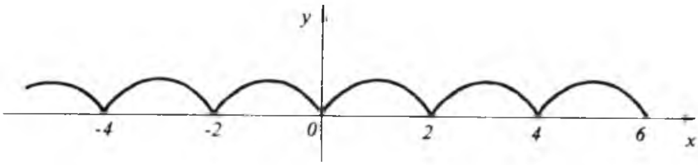


Рис. 38.

Р е ш е н и е. Приведем два наиболее важных варианта разложения.

1) Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-2,0]$ четным образом (рис. 38).

Тогда $l=2$, $b_k=0$ и по формулам (18)

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{2}-\frac{8}{6}=\frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{k\pi x}{2}dx.$$

Интегрируем по частям:

$$u = x - \frac{x^2}{2}, \quad dv = \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx;$$
$$du = (1-x)\,dx, \quad v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2};$$

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 (1-x)\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$
$$= -\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 (1-x)\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx.$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$u = 1 - x, \quad dv = \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx;$$
$$du = -dx, \quad v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2};$$

$$a_k = \frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}(1-x)\bigg|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int\limits_0^2 \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$
$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{4}{k^2\pi^2} + \frac{4}{k^2\pi^2}\,\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 =$$
$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{4}{k^2\pi^2} = -\frac{4}{k^2\pi^2}\left[1 + (-1)^k\right] =$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{8}{(2m)^2\pi^2} & \text{при } k = 2m, \\ 0 & \text{при } k = 2m-1 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Окончательно согласно формуле (25′) получаем

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\pi x}{(2m)^2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 2\pi x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6^2}\cos 3\pi x + \ldots\right) \qquad (0 \le x \le 2).$$

2) Доопределим функцию $f(x)$ на сегменте $[-2, 0]$ нечетным образом (рис. 39). Тогда $l = 2$, $a_k = 0$ и по формуле (20) имеем

$$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = \int\limits_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx,$$

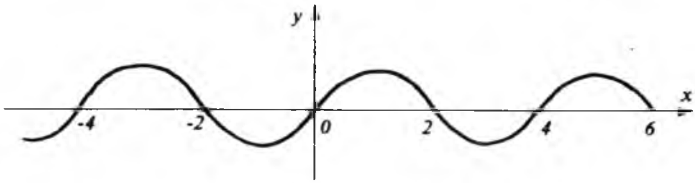


Рис. 39.

$$u = x - \frac{1}{2}x^2, \quad dv = \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx,$$
$$du = (1-x)\,dx, \quad v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\,;$$

$$b_k = -\frac{2}{k\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx =$$
$$= \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx.$$

$$u = 1 - x, \quad dv = \cos\frac{k\pi x}{2}\,dx\,,$$
$$du = -dx, \quad v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\,;$$

$$b_k = \frac{2\cdot}{k^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int\limits_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}\,dx = -\frac{8}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 =$$
$$= -\frac{8}{k^3\pi^3}\cos k\pi + \frac{8}{k^3\pi^3} = \frac{8}{k^3\pi^3}\left[1 - (-1)^k\right] =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2m, \\ \dfrac{16}{(2m-1)^3\pi^3} & \text{при } k = 2m-1 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Окончательно согласно формуле (26′) получаем

$$f(x)=\frac{16}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}}{(2m-1)^3}=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)\qquad (0\le x\le 2).$$

Значение суммы ряда Фурье для данной функции в любой другой точке можно найти, используя свойства суммы ряда — периодичность и нечетное продолжение. Например, $S(11)=$ $=S(11-\underbrace{3\cdot 4}_{\text{Период}})=S(-1)\underset{\substack{\text{Нечетное}\\ \text{продолжение}}}{=}-S(1)=-f(1)=-\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

• **22.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\cos 2x$, заданную в промежутке $[0,\pi]$.

23. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x$ в промежутке $[0,1]$.

24. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при}\ \ 0<x\le 1,\\ 2-x & \text{при}\ \ 1<x\le 2,\end{cases}$$

заданную на промежутке $(0,2]$.

25. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=1$, заданную в промежутке $(0,1)$.

26. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при}\ \ 0<x<1,\\ x-1 & \text{при}\ \ 1<x<2,\end{cases}$$

заданную в промежутке $(0,2)$.

27. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функцию $f(x)=x(\pi-x)$, заданную в промежутке $[0,\pi]$.

28. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=$ $=|\cos x|$, заданную в промежутке $(0,\pi)$.

29. Разложить в ряд Фурье по косинусам и по синусам функцию $f(x)=e^{ax}$, заданную в промежутке от 0 до π.

Глава II. Интеграл Фурье

§1. Представление функций интегралом Фурье

Если функция $f(x)$:

1) задана на всей оси OX;

2) кусочно-монотонна и имеет конечное число точек разрыва на любом конечном промежутке;

3) абсолютно интегрируема на всей оси OX, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится,

то при всех значениях x функция $f(x)$ представима интегралом Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt, \tag{1}$$

причем во всех точках непрерывности функции значения интеграла Фурье равны соответствующим значениям функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt, \tag{2}$$

а в точках x_0 разрыва функции значение интеграла равно полусумме односторонних пределов функции в этих точках, т. е.

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x_0)\,dt. \tag{3}$$

Интеграл Фурье может быть записан в форме, аналогичной ряду Фурье:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[a(\alpha)\cos\alpha x + b(\alpha)\sin\alpha x\right] d\alpha, \tag{4}$$

где

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt,$$
$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt. \tag{5}$$

В точках непрерывности функции $f(x)$ левая часть в этих соотношениях заменяется на $f(x)$.

Для четной функции интеграл Фурье может быть представлен в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt, \tag{6}$$

а для нечетной — в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin \alpha x \, d\alpha \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt. \tag{7}$$

Если функция $f(x)$ задана лишь в интервале $[0, +\infty)$, то, продолжая ее четным или нечетным образом в интервал $(-\infty, 0]$, получим представление функции $f(x)$ в любой точке непрерывности интервала $(0, +\infty)$ в виде (6)) или (7) соответственно. Представление (6) имеет место и в точке $x = 0$, представление же (7) справедливо в точке $x = 0$ только в том случае, когда $f(0) = 0$.

Интеграл Фурье может быть записан в комплексной форме в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\alpha(t-x)} dt, \tag{8}$$

или в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha. \tag{9}$$

Формулу (9) можно представить как суперпозицию двух формул:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\alpha t} dt, \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, e^{-ix\alpha} d\alpha. \tag{11}$$

Функция $F(\alpha)$ в формуле (10) называется *преобразованием Фурье для функции* $f(x)$. В свою очередь, функция $f(x)$ в формуле (11) называется *обратным преобразованием Фурье для функции* $F(\alpha)$.

Если в формуле (10) считать функцию $F(\alpha)$ заданной, а функцию $f(x)$ неизвестной, то равенство (10) представляет собой интегральное уравнение, а формула (11) — его решение.

Пример 1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \ 0 < x < 1, \\ 1/2 & \text{при } \ x = 0, \ x = 1, \\ 0 & \text{при } \ x < 0, \ x > 1. \end{cases}$$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, кусочно-монотонна и имеет конечное число точек разрыва, абсолютно интегрируема, так как интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int\limits_{0}^{1} 1\, dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

сходится. Следовательно, эта функция представима интегралом Фурье (1).

Вычислим сначала внутренний интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\alpha(t-x)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ \cos\alpha(t-x)\, dt +$$

$$+\int_0^1 1\cdot\cos\alpha(t-x)\,dt+\int_1^{+\infty} 0\cdot\cos\alpha(t-x)\,dt=$$

$$=\int_0^1\cos\alpha(t-x)\,dt=\frac{\sin\alpha(t-x)}{\alpha}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\sin(1-x)+\sin\alpha x}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}$$

и подставим его значение в формулу (1):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}\,d\alpha.$$

Последний интеграл равен функции $f(x)$ в точках непрерывности.

В точках $x=0$ и $x=1$, где данная функция терпит разрыв, полученное представление сохраняется, так как в этих точках

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x).$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}\,d\alpha.$$

Пример 2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{при } 0\le x<2,\\ x+2 & \text{при } -2<x<0,\\ 0 & \text{при } |x|\ge 2.\end{cases}$$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, кусочно-монотонна, имеет конечное число точек разрыва и абсолютно интегрируема, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-2}^{0}(x+2)\,dx + \int_{0}^{2}(2-x)\,dx =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 2+2=4$$

сходится. Значит, она представима интегралом Фурье.

Данная функция четная, и интеграл Фурье определяется формулой (6).

Вычисляя внутренний интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt = \int_{0}^{2}(-t+2)\,\cos\alpha t\,dt + \int_{2}^{+\infty} 0\cdot\cos\alpha t\,dt =$$

$$= \int_{0}^{2}(2-t)\cos\alpha t\,dt = \int_{0}^{2}(2-t)\,d\left(\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\right) = (2-t)\,\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\Big|_{0}^{2} +$$

$$+ \int_{0}^{2}\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\,dt = -\frac{\cos\alpha t}{\alpha^2}\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{\alpha^2}(\cos 2\alpha - 1) = \frac{2\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

и подставляя полученное выражение в формулу (6), имеем

$$\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} -x+2 & \text{при } 0 \le x < 2, \\ x+2 & \text{при } -2 < x < 0, \\ 0 & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -e^{x} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

график которой представлен на рис. 40.

Решение. Данную функцию можно представить интегралом Фурье, так как она определена на всей числовой оси, кусочно-монотонна, имеет единственный разрыв первого рода и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx =$$

$$= e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = (1-0) - (0-1) = 2$$

сходится.

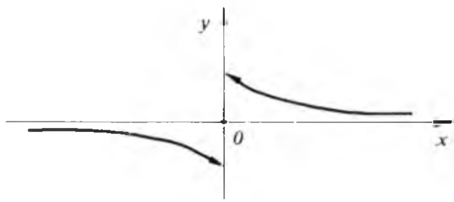


Рис. 40.

Здесь можно воспользоваться формулой (7)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin\alpha x \, dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin\alpha t \, dt,$$

ибо данная функция нечетная.

Внутренний интеграл вычислим, дважды интегрируя по частям:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin\alpha t \, dt = -e^{t} \sin\alpha t\Big|_{0}^{+\infty} + \alpha \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cos\alpha t \, dt =$$

$$= \alpha \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cos\alpha t \, dt = -\alpha e^{-t} \cos\alpha t\Big|_{0}^{+\infty} -$$

$$- \alpha^{2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin\alpha t \, dt = \alpha - \alpha^{2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin\alpha t \, dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sin\alpha t\,dt = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

В итоге

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Пример 4. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-\beta x}$ $(\beta > 0,\ x > 0)$.

Решение. Для представления данной функции интегралом Фурье продолжим ее для значений $x < 0$ нечетным образом, т.е.

$$f^*(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & \text{при } x \geq 0, \\ -e^{-\beta x} & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Введенная функция $f^*(x)$ удовлетворяет всем условиям представимости интегралом Фурье, а именно: 1) она определена на всей числовой оси; 2) кусочно-монотонна и имеет разрыв первого рода в точке $x = 0$; 3) абсолютно интегрируема, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}dx = -\frac{e^{-\beta x}}{\beta}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta},$$

и представима интегралом Фурье по формуле (7).

Запишем интеграл Фурье для данной функции:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt = e^{-\beta x} \quad \text{при} \quad x > 0. \qquad (*)$$

Вычисляя внутренний интеграл (интегрируя два раза по частям, см. главу I, §1, пример 2)

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt = -e^{-\beta t}\,\frac{\alpha\cos\alpha t + \beta\sin\alpha t}{\alpha^2+\beta^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

и подставляя полученное значение в соотношение (*), получаем

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2}\, d\alpha, \quad x > 0.$$

Пример 5. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при} \ -1 \le x \le -1/2, \\ 1 & \text{при} \ |x| < 1/2, \\ -x + 1 & \text{при} \ 1/2 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при} \ |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. По формуле преобразования Фурье

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\alpha t} dt.$$

Используя вид функции $f(x)$, находим

$$\sqrt{2\pi}\, F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{i\alpha t} dt + \int\limits_{-1}^{-1/2} (t+1) e^{i\alpha t} dt +$$

$$+ \int\limits_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{i\alpha t} dt + \int\limits_{1/2}^{1} (-t+1) e^{i\alpha t} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} 0 \cdot e^{i\alpha t} dt.$$

Первый и последний интегралы очевидно равны нулю. Обозначим остальные интегралы соответственно J_1, J_2, J_3 и вычислим их:

$$J_1 = \int\limits_{-1}^{-1/2} (t+1) e^{i\alpha t} dt = \left[\frac{1}{\alpha i} (t+1) e^{i\alpha t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i^2 \alpha^2} e^{i\alpha t} \right] \Bigg|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{\alpha i} \cdot \frac{1}{2} e^{-i\alpha/2} - \frac{1}{i^2 \alpha^2} e^{-i\alpha/2} +$$

$$+ \frac{1}{i^2 \alpha^2} e^{-i\alpha} = \frac{1}{2\alpha i} e^{-\alpha i/2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha i/2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha i};$$

$$J_2 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{i\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha i}\, e^{i\alpha t}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\alpha i}\,\left(e^{\alpha i/2} - e^{-\alpha i/2}\right) = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2};$$

$$J_3 = \int\limits_{1/2}^{1} (-t+1)e^{i\alpha t}dt = \left[\frac{1}{\alpha i}(-t+1)e^{i\alpha t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i^2\alpha^2}\, e^{i\alpha t}\right]\Big|_{1/2}^{1} = -\frac{1}{\alpha^2}\, e^{\alpha i} - \frac{1}{2\alpha i}\, e^{\alpha i/2} + \frac{1}{\alpha^2}\, e^{\alpha i/2}.$$

Тогда

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2\alpha i}\, e^{-\alpha i/2} + \frac{1}{\alpha^2}\, e^{-\alpha i/2} - \frac{1}{\alpha^2}\, e^{-\alpha i} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\, e^{\alpha i} - \frac{1}{2\alpha i}\, e^{\alpha i/2} + \frac{1}{\alpha^2}\, e^{\alpha i/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2\cos\alpha}{z^2} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} + \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}\right).$$

• **30.** Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad 0 < x < 2, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0,\ x = 2, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0,\ x > 2. \end{cases}$$

31. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на промежутке} \quad (-1, 1), \\ 0 & \text{вне промежутка} \quad (-1, 1), \\ 1/2 & \text{при} \quad x = \pm 1. \end{cases}$$

32. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{на промежутке} \quad [0, \pi], \\ 0 & \text{вне промежутка} \quad [0, \pi]. \end{cases}$$

33. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \le x < 3, \\ 1 & \text{при } x = 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Продолжить функцию в интервал $(-\infty, 0)$ четным и нечетным образом.

34. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

35. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

36. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & \text{если } -1 \le x < 0, \\ e^{-x}, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

§2. Использование интеграла Фурье для вычисления некоторых видов несобственных интегралов

Продемонстрируем вычисление несобственных интегралов некоторых видов, для которых первообразная не выражается в элементарных функциях.

Пример 6. Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Решение. Если использовать результат, полученный в примере 15 из предыдущего параграфа, то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}\,d\alpha$$

является представлением интеграла Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<x<1,\\ 1/2 & \text{при } x=0,\ x=1,\\ 0 & \text{при } x<0,\ x>1.\end{cases}$$

Этот интеграл равен $f(x)$ в точках непрерывности. В точках $x=0$ и $x=1$, где функция претерпевает разрыв, полученное представление сохраняется, так как в этих точках

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x).$$

В частности, при $x=0$

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

что равносильно равенству

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 7. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Решение. Если использовать результат примера 2 из предыдущего параграфа

$$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha=\begin{cases}-x+2 & \text{при } 0\le x<2,\\ x+2 & \text{при } -2<x<0,\\ 0 & \text{при } |x|\ge 2\end{cases}$$

и положить в нем $x = 0$, то

$$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha = 2,$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

• **37.** Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha^2}\,d\alpha;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha\ (x>0);$

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha;$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\,d\alpha.$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

РАЗДЕЛ I

Глава I

§1

1. $S = 3/4$. Указание. См. пример 1,1).

2. $S = 1$. Указание. См. пример 1,1).

3. $S=1/4$. Указание. $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)\right)$.

4. Расходится. Указание. $S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

5. $S = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$. Указание. $\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \right.$ $\left. - \frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=k}^{k+m-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$.

6. Сходится при $|q| < 1$, $S = 1/(1-q)^2$; расходится при $|q| \geq 1$. Указание. Составить выражение $S_n(1 - q)$.

7. Расходится.

8. Расходится.

9. Сходится при $|q| < 1$, $S = \frac{q \sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; расходится при $|q| \geq 1$. Указание. См. пример 1, 3).

10. Расходится. Указание. См. пример 2, 2).

11. $S = \pi/3$. Указание. См. пример 1, 4).

12. $S = \pi/2$. Указание. См. пример 1,4.

13. $S = \pi/2$. Указание. $S_n = \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

14. Сходится при $|q| < 1$, $S = \frac{a}{1-q} + \frac{dq}{(1-q)^2}$; расходится при $|q| \geq 1$. Указание. $S_n=a\sigma_n + dq\omega_{n-1}$, где $\sigma_n=1+q+q^2+\ldots$ $\ldots + q^{n-1}$, $\omega_n = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}$; отсюда выводится (см. задачу 6), что $S_n = \frac{a-(a+d(n-1))q^n}{1-q} + \frac{(1-q^{n-1})dq}{(1-q)^2}$.

15. Расходится. Указание. Из равенства $a_{n+1} - a_{n-1} =$ $= \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-3})$ следует, что a_{2n} возрастает с увеличением номера n.

§2

16. Расходится. **17.** Сходится. **18.** Сходится. **19.** Сходится. **20.** Сходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится. **23.** Сходится. **24.** Сходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится. Указание. См. пример 4, 2). **27.** Сходится.

28. Сходится. **29.** Сходится. **30.** Сходится. **31.** Сходится. **32.** Сходится. **33.** Сходится. **34.** Сходится при $a < b$, расходится при $a \geq b$. **35.** Сходится. Указание. $a_n = (1 - 0,6)(1 - 0,66)\ldots(1 - 0,\underbrace{666\ldots6}_{n \text{ раз}})$. **36.** Сходится. **37.** Сходится. **38.** Сходится. **39.** Сходится. **40.** Сходится. **41.** Сходится. **42.** Сходится. Сумма двух геометрических прогрессий. **43.** Сходится. **44.** Сходится. Указание. См. пример 4, 3). **45.** Расходится. **46.** Сходится. **47.** Расходится. **48.** Сходится. **49.** Расходится. Указание. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{1/n^2}}{1+1/n^2} = e^{(1/n^2)\ln n - \ln(1+1/n^2)} > e^{(1/n^2)(\ln n - 1)} > 1$ при $n \geq 3$. **50.** Сходится. Указание. $\sqrt[n]{a_n} < 1/2$. **51.** Сходится. **52.** Сходится. **53.** Расходится. **54.** Расходится **55.** Сходится при $\lambda > 2$; расходится при $\lambda \leq 2$. **56.** Сходится. **57.** Расходится. **58.** Расходится. **59.** Расходится. **60.** Сходится при $\beta > \alpha + 1$; расходится при $\beta \leq \alpha + 1$. **61.** Сходится при $\gamma > \alpha + \beta$; расходится при $\gamma \leq \alpha + \beta$. Указание. При $\gamma = \alpha + \beta$ использовать непредельную форму признака Раабе. **62.** Сходится при $\lambda > 1$; расходится при $0 < \lambda < 1$. **63.** Расходится. Указание. См. пример 4, 7). **64.** Сходится. Указание. См. пример 4, 7). **65.** Расходится. Указание. См. пример 4, 7). **66.** Сходится. **67.** Расходится. **68.** Сходится. **69.** Сходится. **70.** Сходится. **71.** Сходится. **72.** Расходится. **73.** Сходится. **74.** Сходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **75.** Расходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **76.** Сходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **77.** Сходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **78.** Расходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **79.** Расходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **80.** Сходится. Указание. См. примеры 4,7) и 4,8). **81.** Сходится. Указание. См. пример 4,8). **82.** Расходится. Указание. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ при $n \geq 2$, см. пример 4,9). **83.** Сходится. Указание. $a_n \sim \pi/6n^3$ при $n \to \infty$. **84.** Расходится. Указание. $a_n \sim e/n$ при $n \to \infty$. **85.** Сходится. **86.** Сходится. **87.** Сходится. **88.** Расходится. Указание. См. пример 4, 10). **89.** Сходится. Указание. См. пример 4, 10). **90.** Расходится. Указание. См. пример 4, 10). **91.** Сходится. **92.** Сходится при $\lambda > 1$; расходится при $\lambda \leq 1$. Указание. См. пример 4, 11). **93.** Сходится. **94.** Сходится. **95.** Сходится. **96.** Сходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера. **97.** Сходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера или Коши. **98.** Сходится. Указание. $\sqrt[n]{a_n} < e/(n+1)$. **99.** Сходится. Указание. Так как $n! \le n^n$, то $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{n^2}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. **100.** Сходится. Указание. $a_n \le n^n/(2n+1)^n$. **101.** Расходится. Указание. $a_n > 1/(n\ln n)$. **102.** Сходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера. **103.** Сходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера. **104.** Сходится при $\lambda > 1/2$; расходится при $\lambda \le 1/2$. Указание. Использовать признак Раабе; при $\lambda = 1/2$ удобна оценка $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (см. пример 4, 5)). **105.** Сходится при $a < 2$; расходится при $a \ge 2$. Указание. Применить признак Раабе. **106.** Сходится при $a < 1$; расходится при $a \ge 1$. Указание. При $a < 1$ применить признак Раабе. **107.** Сходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера. **108.** Сходится. Указание. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. **109.** Расходится. Указание. $n! \le n^n$. **110.** Сходится. Указание. $\ln(n!) \le (n-1)\ln n$, см. пример 4, 11). **111.** Сходится. Указание. Сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ или использовать неравенство $3^n - n^3 > 2^n$ при $n \ge 4$. **112.** Сходится. Указание. $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2/(3n^2)$, см. примеры 4,7) и 4,8). **113.** Сходится. Указание. $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1/(2n^2)$, см. примеры 4,7) и 4,8). **114.** Расходится. Указание. $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1/\sqrt{n}$, см. примеры 4,7), 4,8) и 3. **115.** Сходится при $a < e^{-1}$; расходится при $a \ge e^{-1}$. Указание. $a^{\ln n} = n^{\ln a}$. **116.** Расходится. Указание. См. пример 4,8). **117.** Сходится при $a + \lambda > 1$; расходится при $a + \lambda \le 1$. Указание. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a\ln n + n\ln\left(1 - \frac{a\ln n}{n}\right)\right) = 0$. Откуда следует, что $\left(1 - \frac{a\ln n}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}$; см. также пример 3. **118.** Расходится. Указание. $a_n \ge \frac{1}{(n-1)\ln n}$. **119.** Сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$. Указание. $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$. **120.** Указание. Для ряда 1) использовать признак сравнения в предельной форме, для ряда 2) условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ не выполнимо, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; из сходимости рядов 1) или

2) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. **121.** Указание. Сравнить ряд (1) с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$; при исследовании ряда (2) полезно неравенство $\frac{a_n}{S_n^2} \le \frac{a_n}{S_{n-1}S_n} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$. **122.** Указание. Использовать признак сравнения и условие $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

§3

123. Сходится абсолютно. Указание. См. пример 5,1). **124.** Сходится абсолютно. Указание. См. пример 5,1). **125.** Сходится абсолютно. **126.** Сходится абсолютно. **127.** Сходится абсолютно. **128.** Сходится абсолютно. **129.** Расходится. Указание. См. пример 5,4). **130.** Расходится. Указание. См. пример 5,3). **131.** Расходится. **132.** Расходится. **133.** Сходится абсолютно. **134.** Расходится. Указание. $|a_n| \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$, где a_n — общий член данного ряда. **135.** Расходится. **136.** Сходится абсолютно. **137.** Сходится абсолютно. **138.** Сходится условно. Указание. См. пример 6,2). **139.** Сходится условно. **140.** Сходится условно. Указание. См. пример 6,2); при $n \ge 3$ условия признака Лейбница выполняются. **141.** Сходится условно. Указание. $(2n)!! \le 2\sqrt{n}\,(2n-1)!!$. **142.** Сходится абсолютно. **143.** Сходится условно. Указание. См. пример 6,3). **144.** Сходится условно. Указание. См. пример 6,1). **145.** Сходится условно. Указание. См. пример 6,2). **146.** Сходится условно. **147.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,2). **148.** Расходится. Указание. $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$. **149.** Сходится условно. Указание. $\frac{1}{n+\sin(\pi n/6)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. **150.** Сходится условно. Указание. См. пример 7. **151.** Сходится условно. Указание. См. пример 7. **152.** Сходится условно. Указание. См. пример 7. **153.** Расходится. Указание. Последовательность частичных сумм $S_1, S_3, S_6, S_{10}, \ldots, S_{n(n+1)/2}, \ldots$ не имеет предела. **154.** Расходится. Указание. $1+\sqrt{\frac{k}{k+1}} < a_k < 1+\sqrt{\frac{k+1}{k}}$, где $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2}} + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}}$; см. пример 7. **155.** Расходится. Указание. $a_k > \frac{2k+1}{2\ln(k+1)}$, где $a_k = \frac{1}{\ln k^2} + \frac{1}{\ln(k^2+1)} + \ldots + \frac{1}{\ln(k^2+2k)}$; см. пример 7. **156.** Сходится условно. Указание. В сумме

$a_k = \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^4-1}$ выделить группы по k^3, $k^2(k+1)$, $k(k+1)^2$, $(k+1)^3$ слагаемых; см. пример 7. **157.** Сходится условно. Указание. Записать данный ряд в виде знакочередующегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, где $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{(k(k-1)/2)+i}$, при этом $a_k \in \left(\frac{2}{k+1}, \ln\frac{k+1}{k-1}\right)$; для оценки a_k сверху использовать неравенство $a_k < \displaystyle\int_0^k f(x)\,dx$, где $f(x) = \frac{1}{\frac{k(k-1)}{2}+x}$; см. пример 7. **158.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1); $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **159.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1). **160.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1); $\left|\frac{\sin\frac{\pi n}{5}}{n+\sin\frac{\pi n}{5}}\right| > \frac{\sin^2\frac{\pi n}{5}}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\cos\frac{2\pi n}{5}}{2(n+1)}$. **161.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,2); $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin k\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+(-1)^{n-1}\sin(n+1/2)\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **162.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1); $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$. **163.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1); $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha\cos k^2\alpha = \frac{\sin n(n+1)\alpha}{2}$. **164.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1). **165.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,2), полагая $a_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n}$, $b_n = \frac{5n^2+1}{3n^2+4}$ или пример 8,1), полагая $a_n = \frac{5n^2+1}{n(3n^2+4)}$, $b_n = (-1)^{n(n+1)/2}$; см. также пример 7. **166.** Сходится условно. Указание. См. пример 8,1), 8,2) или 7. **167.** Сходится условно. Указание. Применить признак Абеля, положив $a_n = \frac{\cos n\alpha}{\ln n}$, $b_n = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$; ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Дирихле, ибо суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\alpha = \frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ ограничены. **168.** Сходится условно. Указание. Данный ряд есть сумма двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n\alpha}{2n}$; $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2k\alpha = \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n+1)\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}$. **169.** Сходится условно. Указание. Применить признак Абеля, полагая

$a_n = \frac{\sin n\alpha}{n}$, $b_n = \sin\frac{n\alpha}{\sqrt{n^2+1}}$; к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ применить признак Дирихле; если $\alpha = \pi k$ (k — целое число), то расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin\frac{n\alpha}{\sqrt{n^2+1}} \sin n\alpha}{n}\right|$ следует из оценки его общего члена a_n: $a_n > \frac{\delta(\alpha)\sin^2 n\alpha}{n} = \frac{\delta(\alpha)}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos 2n\alpha}{n}\right)$, где $\delta(\alpha)$ — некоторое положительное число, достаточно близкое к $|\sin\alpha|$. **170.** Сходится условно. Указание. Применить признак Абеля, положив $b_n = \ln(7n^2+n+1) - \ln(4n^2+2n+5) = \ln\frac{7n^2+n+1}{4n^2+2n+5}$ и $a_n = \frac{\cos(\pi n/3)}{\ln n}$; к ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ применить признак Дирихле.

Глава II

§1

171. Сходится абсолютно при $|x| < 1$, расходится при $|x| \geq 1$. Указание. См. пример 1.

172. Сходится абсолютно при $|x| > 1$, расходится при $|x| \leq 1$. Указание. См. пример 1.

173. Сходится абсолютно при $x \neq \pi/2 + \pi n$, где n — любое целое число, расходится при $x = \pi/2 + \pi n$. Указание. См. пример 1.

174. Сходится абсолютно при всех вещественных значениях x. Указание. См. пример 1.

175. Сходится абсолютно при $|x| > 1$, расходится при $|x| \leq 1$. Указание. Применить признак Д'Аламбера, см. пример 2.

176. Сходится абсолютно при $x > -1/3$ и при $x < -1$. Указание. Применить признак Коши, см. пример 2.

177. Сходится абсолютно при $|x| < 1$. Указание. Применить признак Д'Аламбера, см. пример 2.

178. Сходится абсолютно при $x > -1$. Указание. Применить признак Раабе, см. пример 2.

179. Сходится абсолютно при $x > -17/9$, при $x = -17/9$ сходится условно. Указание. При исследовании на абсолютную сходимость применить признак Коши, при $x = -17/9$ — признак Лейбница, см. пример 2.

180. Сходится абсолютно при всех $x > 0$, при $x \leq 0$ расходится. Указание. Применить признак Д'Аламбера, см. пример 2.

181. Сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$. Указание. Применить признак Д'Аламбера.

182. При $|x| > 1$ сходится абсолютно, при $|x| \leq 1$ расходится. Указание. Применить признак Коши, см. пример 2.

183. Сходится абсолютно при всех вещественных значениях x. Указание. См. пример 3.

184. Сходится абсолютно при всех вещественных значениях x. Указание. См. пример 3.

185. Сходится абсолютно при $x > 1$. Указание. См. пример 3.

186. Сходится абсолютно при $0 \leq x \leq 1$. Указание. См. пример 3.

§2

187. $R = 1$, интервал сходимости: $-1 < x + 3 < 1$, т.е. $-4 < x < -2$. При $x = -4$ и $x = -2$ ряд расходится. Указание. См. пример 4.

188. $R = 5$, интервал сходимости: $-2 < x < 8$. При $x = -2$ ряд расходится, при $x = 8$ ряд сходится условно. Указание. См. пример 4.

189. Сходится абсолютно при $|x - 1| \leq 2$. Указание. См. пример 4.

190. $R = 1$, интервал сходимости: $4 < x < 6$. При $x = 4$ и $x = 6$ ряд расходится. Указание. См. пример 4.

191. $R = 3$, интервал сходимости: $x > 4/3$ и $x < 2/3$. При $x = 4/3$ и $x = 2/3$ ряд расходится. Указание. Сделать замену переменной $y = 1/(x-1)^2$, см. пример 4.

192. Сходится абсолютно при $|x + 2| < 1$. Указание. См. пример 4.

193. Сходится абсолютно при $|x - 4| < 1/2$, в точке $x = 9/2$ сходится условно, в точке $x = 7/2$ расходится. Указание. См. пример 4.

194. Сходится абсолютно при $|x| < 1$, расходится при $|x| = 1$.

195. Сходится абсолютно при $|x - 1| < 8$, расходится при $x = -7$ и при $x = 9$. Указание. См. пример 4.

196. Сходится абсолютно при $|x - 3| < \sqrt{3}$, при $x = 3 + \sqrt{3}$ расходится, при $x = 3 - \sqrt{3}$ сходится условно. Указание. См. пример 5.

197. Сходится абсолютно при $|x| \le 2$. Указание. См. пример 4.

198. Сходится абсолютно при $|x| \le 1$. Указание. См. пример 4.

199. $R = 7$. Ряд сходится абсолютно при $|x+1| \le 7$, расходится вне этого интервала. Указание. См. пример 4,5).

200. Ряд сходится абсолютно при $|x-1| > 1$, расходится при $|x-1| \le 1$.

201. $f(x) = -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3$. Указание. См. пример 5.

202. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$, $|x-2|<1$. Указание. См. пример 5.

203. $e^{-3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n!}$, $-\infty<x<+\infty$. Указание. См. пример 5.

204. $\ln 4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^{2n}}{n\cdot 4n}$, $|x+3| < 2$. Указание. См. пример 5.

205. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$, $0 < x \le 2$. Указание. См. пример 5.

206. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty < x < +\infty$. Указание. См. пример 5.

207. $2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(x-1)^n \ln^n 2}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$. Указание. См. пример 5.

208. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|x| < 2$. Указание. См. пример 6.

209. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{18} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 18^2}x^4 + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)^{2n}}{n!\,18^n}x^{2n} + \ldots\right)$, $|x| < 3$. Указание. См. пример 6.

210. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n - 1}{n}x^n$, $|x| < 1/2$; при $x = 1/2$ сходится условно. Указание. См. пример 6.

211. $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Указание. См. пример 6.

212. $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$, $|x|<1$. Указание. См. пример 6.

213. $\sum\limits_{n=10}^{\infty}x^n$, $|x| < 1$. Указание. См. пример 3.

214. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$, $-1/2\le x<1/2$. Указание. См. пример 6.

§3

215. Указание. Сравнить со сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; см. пример 7.

216. Указание. Сравнить с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; см. пример 7.

217. Указание. Сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)$, который сходится (убедитесь в этом, применив признак Д'Аламбера); см. пример 7.

218. Указание. Сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n$, который является геометрическим при $0\le x<+\infty$; см. пример 7.

219. Указание. Сравнить с рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n-2}$, который сходится (убедитесь в этом, применив признак Д'Аламбера); см. пример 7.

220. Указание. Сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, который сходится (убедитесь в этом, применив интегральный признак Коши); см. пример 7.

221. Указание. Сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, см. пример 7.

222. Указание. Воспользоваться тем, что функция $y=\operatorname{arctg}x$ монотонно возрастает, а затем сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; см. пример 7.

223. Сходится равномерно. Указание. Представить общий член ряда в виде $\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sin x}{n}}$ и воспользоваться признаком Абеля; см. пример 8.

224. Сходится равномерно. Указание. Представить общий член ряда в виде $\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+e^x/n^2}}$ и воспользоваться признаком Абеля; см. пример 8.

225. Сходится равномерно. Указание. Воспользоваться признаком Дирихле, представив данный ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$. Можно заметить, что $\cos\frac{2\pi n}{3}$ принимает значения 1, $-1/2$; см. пример 8.

226. Сходится равномерно. Указание. Представить общий член ряда в виде $\frac{\sin x}{\sqrt{n+x}} \cdot \sin nx$ и воспользоваться признаком Дирихле; см. пример 8.

§4

227. $\frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$. Указание. См. пример 9.

228. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. Указание. См. пример 9.

229. $1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x| \le 1$. Указание. См. пример 9.

230. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$. Указание. См. пример 9.

231. $\operatorname{arctg} x$, $|x| \le 1$. Указание. См. пример 9.

232. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-\infty < x < +\infty$. Указание. См. пример 9.

233. $\frac{x(1-x)}{1+x)^3}$, $|x| < 1$. Указание. См. пример 9.

234. $\frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. Указание. См. пример 9.

235. $x^3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{6n+3}}{2n+1}$, $|x| \le 1$. Указание. Применить почленное дифференцирование; см. пример 10.

236. $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{n} x^n$, $|x| \le 1$. Указание. Разложив предварительно производную в ряд, почленно проинтегрировать; см. пример 10.

237. $2|x|\left\{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}$ при $0 \le x \le 1$ и $-1 \le x \le 0$. Указание. Разложив предварительно производную в ряд, почленно проинтегрировать; см. пример 10.

238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $-\infty < x < +\infty$. Указание. Разложить подынтегральную функцию в ряд Маклорена; см. пример 10.

239. $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $-1 \le x \le 1$. Указание. См. пример 10.

240. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $-1 < x < 1$. Указание. См. пример 10.

241. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$, $-1\leq x\leq 1$. Указание. См. пример 10.

242. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $|x|\leq 1$. Указание. См. пример 10.

§5

243. 3,017. Указание. См. пример 11. **244.** 2,718282. Указание. См. пример 12. **245.** 0,1823. Указание. См. пример 12. **246.** 0,4971, $\Delta<0,0001$. Указание. См. пример 12. **247.** 0,012, $\Delta<0,001$. Указание. См. пример 12. **248.** 0,608. Указание. См. пример 13. **249.** 0,119. Указание. См. пример 13. **250.** 2,835. Указание. См. пример 13. **251.** 1,605. Указание. См. пример 13.

253.

1)

n	x	S
2	1	1.4245164131e-01
5	1	8.7181065115e-04
10	1	8.3508447162e-09
5	3	-5.6621425878e-03
10	3	-8.8904226982e-08
5	0.5	7.8445893179e-04
10	0.5	1.0560571094e-08
5	0.1	1.8552964983e-04
10	0.1	2.7726489021e-09

2)

n	x	S
3	1	2.1489126490e+00
5	1	2.1732199461e+00
10	1	2.1734098616e+00
5	12	1.5843263122e+01
10	12	1.5843678556e+01
5	0.1	1.6959895815e+00
5	0.5	1.8261749128e+00
10	0.5	1.8263629316e+00
5	5	6.8065304637e+00

3)

n	x	S	n	x	S
3	1	3.6324074074e+00	6	0.1	2.6189558112e+00
5	1	3.6324082793e+00	5	0.5	3.0693791304e+00
5	2	4.7184665773e+00	8	50	5.8809264878e+01
5	5	8.1366424711e+00	5	25	3.0657807430e+01

254.

1)

epsilon	S
0.1	2.5555555556e-01
0.001	3.3203125000e-01
0.0001	3.3325195313e-01

2)

epsilon	x	S
0.1	0	-1.0000000000e+00
0.01	1	-6.2500000000e-01
0.0001	0.5	-7.8697916667e-01
0.0001	0.1	-9.5166666667e-01
0.0001	2	-4.3231040564e-01

3)

epsilon	x	S
0.001	1	2.7513227513e-01
0.001	5	7.4428972778e-01
0.001	0.1	3.3333333333e-02
0.0001	0.1	3.2666666667e-02
0.0001	10	8.8426982159e-01
0.000001	10	8.8429523561e-01

255.

1)

n	S	r
6	-7.5416666667e-01	9.5238095238e-03
8	-7.6108630953e-01	1.0582010582e-03
10	-7.6188409392e-01	9.6200096200e-05
13	-7.6196599263e-01	1.5500992064e-06
15	-7.6196493587e-01	9.6881200397e-08
18	-7.6196486262e-01	1.5273493086e-09
20	-7.6196486388e-01	7.2730919456e-11
21	-7.6196486395e-01	1.2232474798e-11

2)

n	S	r
3	3.9583333333e-01	2.6041666667e-03
5	3.9348958333e-01	2.1701388889e-05
7	3.9346943204e-01	9.6881200397e-08
10	3.9346934028e-01	1.2232474798e-11
15	3.9346934029e-01	7.2929036444e-19

256.

1)

epsilon	x	S	n
0.01	0	2.7083333333e+00	6
0.001	0	2.7180555556e+00	8
0.01	0.5	3.5756944444e+00	7
0.01	1	4.4347222222e+00	7
0.001	1	4.4363095238e+00	8
0.0001	1	4.4365327381e+00	9
0.0001	3	7.8730902778e+00	9
0.0001	5	1.1309647817e+01	9
0.0001	10	1.9901041667e+01	9
0.000001	10	1.9901099537e+01	11
0.000001	-5	-5.8731274802e+00	11

2)

epsilon	x	S	n
0.001	2	1.1062129935e+00	4
0.00001	2	1.1071564402e+00	7
0.0000001	2	1.1071486359e+00	10
0.0001	4	1.3258093476e+00	4
0.000001	4	1.3258180669e+00	5
0.0001	10	1.4711296601e+00	3
0.000001	10	1.4711276601e+00	4
0.001	1	7.8639815940e-01	251
0.0001	1	7.8549816339e-01	2501
0.000001	11	8.3298210727e-01	47

РАЗДЕЛ II

Глава I

§1

1. 1) $|z| = 2$, $\arg z = -\pi/3$, $\{-\pi/3 + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$, $z = 2e^{-\pi/3}$. Указание. См. пример 2; 2) а) $|z| = 6$, $\arg z = \pi/2$; б) $|z| = 5$, $\arg z = 0$, $\{2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$; 3) $|z| = \sqrt{5}$, $\arg z = \pi - \operatorname{arctg} 2$, $z = \sqrt{5}\, e^{i(\pi - \operatorname{arctg} z)}$; 4) $|z| = 2$, $\arg z = 2\pi/3$, $z = 2(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$; 5) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -3\pi/4$, $z = \sqrt{2}\,(\cos 3\pi/4 - i \sin 3\pi/4)$; 6) $|z| = 1$, $\arg z = \pi$, $z = e^{i\pi}$; 7) $|z| = 1$, $\arg z = \pi/3$; 8) $|z| = 5/2$, $\arg z = -\pi/2 - \operatorname{arctg} 4/3$. Указание. См. пример 3; 9) $|z| = 2^{13}$, $\arg z = -\pi/2$. Указание. См. пример 4; 10) $|z| = 2$, $\arg z = -5\pi/8$.

2. 1) Полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси. Указание. См. пример 5; 2) Полуплоскость, расположенная ниже прямой $\operatorname{Im} z = -2$; 3) Полоса, состоящая из точек, расстояние от которых до мнимой оси меньше 3; 4) Полоса, состоящая из точек, расстояние которых до вещественной оси меньше π; 5) Круг радиусом 2 с центром в точке 0; 6) Вся плоскость, из которой удален замкнутый круг радиусом 2 с центром в точке $-i$. Указание. См. пример 5; 7) Круговое кольцо радиусами 2 и 3 с центром в точке $1 - i$; 8) Вырожденное кольцо радиусом 2 с центром в точке $-1 + 2i$; 9) Полуплоскость, расположенная ниже прямой $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 1$; 10) Первая четверть. Указание. См. пример 5; 11) Первая четверть. Указание. См. пример 5; 12) Часть кругового кольца радиусами 1 и 2 с центром в точке 0, расположенная между двумя лучами, исходящими из начала координат под углами $\pi/6$ и $\pi/4$ к положительному направлению вещественной оси; 13) Часть плоскости, расположенная ниже прямой $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \sqrt{2}$; 14) Прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки a и b, перпендикулярно к этому отрезку; 15) Окружность, построенная на отрезке $[0, 2]$ как на диаметре. Указание. См. пример 6.

§2

3. 1) $u(x, y) = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Указание. См. пример 7; 2) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.

4. 1) Да; 2) Нет. Указание. См. пример 8.

6. 1) $z^2 + 2z + ic$; 2) $(1 - i/2)z^2$; 3) $-2ie^z + ic$; 4) $(1/2)z + iz^2 + 3i + c$; 5) $-1/z + 1/2$. Указание. См. пример 12.

7. $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \varphi}$; $\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$. Указание. Функции $g(r,\varphi)$ и $h(r,\varphi)$ — сложные: $g(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$; $h(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

§3

8. 1) $\pi/2$, 3; 2) а) $0, 4$; б) $-\pi/4$, $2\sqrt{2}$; в) $\pi/2$, 4; 3) $3\pi/4$, $3\sqrt{2}$. Указание. См. пример 8. 4) а) $0, 1$; б) $\operatorname{arctg} 3/4; 0, 1$; 5) $\operatorname{arctg} 1/2$, $\sqrt{5}$; 6) $1, 1$; 7) $-\operatorname{arctg} 2$, $\sqrt{5}$.

9. 1) $|z| = 1/\sqrt{3}$; 2) $|z - i/2| = 1/2$; 3) $|z+i| = \sqrt{2}$.

10. 1) $\arg a = -\pi/6$; 2) $\arg a = 0$; 3) $1 < a < +\infty$; 4) $\arg a = -\pi/4$.

§4

11. 1) $\operatorname{Im} w = 0$. Указание. См. пример 17; 2) $|w - 1/2 + i/2| = 1/2$; 3) $\operatorname{Re} w = 1/2$.

12. 1) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$. Указание. См. пример 19; 2) $|w - 3 - i| < 3$. Указание. См. пример 18; 3) Треугольник с вершинами в точках $w_1 = 0$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 + i$. Указание. См. пример 20.

13. 1) $\frac{z-i}{z+i}$. Указание. См. пример 22; 2) $\frac{1+i-z}{z-1+i}$.

14. $e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, θ — вещественное число, $|\alpha| < 1$.

15. 1) $\frac{2z-1}{z-2}$; 2) $\frac{z-1-2i}{2z}$.

16. 1) $\frac{1+iz}{z-1}$; 2) $\frac{iz+2+i}{z+1}$. Указание. См. свойство 5 дробно-линейного преобразования.

17. 1) $|w - 1/2| < 1/2$. Указание. См. пример 23; 2) $\operatorname{Re} w < 0$; 3) $\operatorname{Im} w > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$. Указание. См. пример 24; 4) $3/2 < \operatorname{Re} w < 2$; 5) $|w - 1/3| > 1/3$, $\operatorname{Re} w < 3/4$. Указание. См. пример 24.

§5

18. 1) $w_0 = 1$, $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Указание. См. пример 25; 2) $w_0 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{9\pi i/8} = -\sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8} = -w_0$; 3) $w_0 = 1 + i$, $\sqrt{2}\,(-\cos\pi/12 + i\sin\pi/12)$; $\sqrt{2}\,(\sin\pi/12 - i\cos\pi/12)$. Указание. См. пример 25; 4) $w_0 = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $\sqrt{2}\,\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$, $\pm i\sqrt{2}$; 5) $w_0 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 3\pi/20 - i\sin 3\pi/20)$, $\sqrt[10]{2}\,e^{i(-3\pi/4+2\pi k)/5}$, $k=0,1,2,3,4$; 6) $w_0 = \sqrt[6]{13}\,e^{i(\pi-\operatorname{arctg} 3/2)/3}$, $\sqrt[6]{13}\,e^{i(\pi-\operatorname{arctg} 3/2+2\pi k)/3}$, $k = 0, 1, 2$.

19. 1) $|w| < 3$, $\operatorname{Im} w < 0$, $\operatorname{Re} w < 0$. Указание. См. пример 26; 2) $-\pi/3 < \arg z < 0$.

20. 1) iz^2; 2) $-\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^2$; 3) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. Указание. См. пример 28; 5) $\sqrt{\frac{1+i-z}{z}}$. Указание. См. пример 27; 6) $\sqrt{\frac{z+2}{z-2}}$; 7) $\sqrt{z^2+9}$; 8) $\sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+1}$.

§6

21. 1) $\ln\sqrt{2}+i(\pi/4+2\pi k)$, $\ln\sqrt{2}+i\pi/4$. Указание. См. пример 29,3); 2) $\ln 10+i(\pi+2\pi k)$, $\ln 10+i\pi$; 3) $\ln 3+2\pi ki$, $\ln 3$; 4) $\ln 2+2\pi i/3+2\pi ki$, $\ln 2+2\pi i/3$; 5) $\ln\sqrt{13}+i(-\pi+\operatorname{arctg}2\sqrt{3}+2\pi k)$, $\ln\sqrt{13}+i(-\pi+\operatorname{arctg}2\sqrt{3})$; 6) $-\ln\sqrt{5}+i(\pi-\operatorname{arctg}2+2\pi k)$, $-\ln\sqrt{5}+$ $+i(\pi-\operatorname{arctg}2)$; 7) $e^{-\pi/4-2\pi k}$, $e^{i\ln\sqrt{2}-\pi/4+i\ln\sqrt{2}}$. Указание. См. пример 29,5); 8) $e^{-2\pi k+i\ln 5}$, $e^{i\ln 5}$; 9) $e^{-2\pi k}$. Указание. См. пример 29,6).

22. 1) -2π; 2) 4π. Указание. См. пример 30.

23. 1) $-\pi<\operatorname{Im}w<\pi$; 2) $-3\pi<\operatorname{Im}w<-\pi$; 3) $-\pi<\operatorname{Im}w<0$. Указание. См. пример 31; 4) $\pi<\operatorname{Im}w<2\pi$; 5) $0<\operatorname{Im}w<\pi$, $\operatorname{Re}w<0$.

24. 1) $w\overline{\in}[-\infty,0]$; 2) $\operatorname{Im}w<0$; 3) $|w|>1$, $\operatorname{Im}w>0$; 4) $|w|<e^2$, $-2<\arg w<1$; 5) $\pi/4<\arg w<\pi/2$.

25. 1) $\left[\frac{e^w+1}{e^w-1}\right]^2$, где $w=\pi(2i-5-iz)/3$. Указание. См. пример 32; 2) $e^{i\pi(z+5)/3}$; 3) $e^{2\pi iz/(z-2)}$; 4) $\left(\frac{e^w+1}{e^w-1}\right)^2$, где $w=$ $=i\pi(z+2)/(2z)$.

§7

26. 1) $\operatorname{Im}w>0$. См. пример 33; 2) $w\overline{\in}[-1,5/4]$; 3) $\operatorname{Im}w>0$; 4) Область, лежащая между ветвями гиперболы $2u^2-2v^2=1$.

27. 1) $\sqrt{\frac{5/2-(z+1)/z}{2}}$. Указание. См. пример 34; 2) $\sqrt{\frac{17/4+z^2+1/z^2}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{w+17/8}{w+1}}$, где $w=z^2/8+2/z^2$.

28. 1) $\operatorname{Im}w>0$. Указание. См. пример 35; 2) Плоскость с разрезами по лучам $[-\infty,-1]$ и $[1,+\infty]$. Указание. $\cos z=$ $=(e^{iz}+e^{-iz})/2$.

29. 1) $\sqrt{\frac{w^2}{w^2+h^2}}$, где $h=(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})/2$, $w=\sin(\pi z/2)$; 2) $\sin(\pi/2z)$.

Глава II

§1

30. 1) $\sqrt{5}/2 + i\sqrt{5}$. Указание. См. пример 1; 2) $3i/2$. Указание. См. пример 2; 3) i; 4) $7/2 - 2i$; 5) $3/2 + i/2$; 6) $2/3 + 11i/3$; 7) $i\pi$. Указание. См. пример 3; 8) $i\pi/2$; 9) $i(e^{1-i} - 1)$; 10) 4.

31. 1) 0; 2) 0. Указание. См. пример 4,2); 3) 0; 4) $2\pi i$; 5) $2\pi i$. Указание. См. пример 4,4); 6) 0; 7) 0. Указание. См. пример 4,3);

§2

32. 1) 0. Указание. См. пример 5; 2) $\pi i(e^2 - e^{-2})/4$; 3) $\pi i(e^2 - e^{-2})/4$; 4) $\pi i(e^2 - e^{-2})/2$.

33. 1) $i\pi e^2$; 2) $-\pi i$; 3) $i\pi(e^2 - 1)$; 4) 0.

34. $\pi(\cos 1 + 2\sin 1 + 2i\cos 1 - i\sin 1)$. Указание. См. пример 6.

35. 1) $2\pi i$; 2) $-i\pi e$; 3) $\pi i(2 - e)$.

36. 1) $-i\pi/2$; 2) $i\pi/2$; 3) 0. Указание. См. пример 7.

37. $\pi(e - e^{-1})$.

38. $i\pi(e + e^{-1} - 6)/2$. Указание. См. примеры 5 и 7.

§3

39. 1) 5; 2) 3; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{e}$; 7) $\frac{1}{e}$; 8) 1, если $|a| \leq 1$; $1/|a|$, если $|a| > 1$; 9) 1; 10) $\sqrt{5}$; 11) 1; 12) ∞; 13) 1; 14) 1; 15) $1/\sqrt[3]{5}$; 16) 1.

40. 1) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+3)^n$, $R = 1$. Указание. См. пример 8; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$, $R = 3$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - 1/2^{n+1})z^n$, $R = 1$. Указание. Данную функцию разложить на простейшие дроби; 4) $\frac{i}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n}z^n$, $R = \sqrt{13}$. Указание. Данную функцию разложить на простейшие дроби; 5) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}-1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, $R = \infty$. Указание. См. пример 10; 6) $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{4n} - \cos 1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(z-1)^{4n-2}$, $R = \infty$; 7) $e^{2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n!}$, $R = \infty$. Указание. См. пример 9; 8) $\frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}\Big[1 + \frac{z-1+i}{2(i+1)} +$

$+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(1+i)^n(2n)!!}(z-1-i)^n\Big]$, $R=\sqrt{2}$. Указание. См. пример 11; 9) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1/3\,(1/3-1)\ldots(1/3-n+1)}{n!}(z-1)^n\right]$, $R=1$; 10) $\frac{i\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(i)^n}(z-i)^n$, $R=1$. Указание. См. пример 12; 11) $\ln 2+2\pi i+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}(z-2)^n$, $R=2$; 12) $\ln 25-2\pi i+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(4-3i)^n+(4+3i)^n}{25^n}(z-4)^n$, $R=5$. Указание. См. пример 13.

§4

41. $-\frac{1}{5}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{z^{n+1}}\right]$. Указание. См. пример 14.

42. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$.

43. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\frac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$.

44. $\frac{i-3}{30z}-\frac{1+3i}{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{z^{n+1}}-\frac{3-i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}$.

45. $\frac{2}{3(z+4)}-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{6^{n+1}}$, $0<|z+4|<6$. Указание. См. пример 14.

46. 1) $-\frac{1}{z+2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+2)^n$, $0<|z+2|<1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-2^n)}{z^{n+1}}$, $2<|z|<\infty$. Указание. См. пример 14.

47. 1) $-\frac{i}{z-2i}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(i)^n(z-2i)^n$, $0<|z-2i|<1$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^{n+1}(1-2^n)}{z^{n+1}}$, $2<|z|<\infty$.

48. $-\frac{2}{9(z+1)}+\frac{1}{3(z+1)^2}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+3}}$, $0<|z+1|<3$. Указание. См. пример 14.

49. 1) $-\frac{1}{6i(z+3i)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{(6i)^{n+2}}$, $0<|z+3i|<6$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n9^n}{z^{2n+2}}$, $3<|z|<\infty$.

50. $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n!(z+2)^n}$, $0<|z+2|<\infty$.

51. $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}}-\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}$, $0<|z+1|<\infty$.

52. $e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!\,z^n}$, $0<|z|<\infty$.

53. $\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^{2n}}{(2n)!\,(z-3)^{4n}}+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^{2n+1}}{(2n+1)!\,(z-3)^{4n+2}}$, $0<|z-3|<\infty$.

54. $6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z-1)^n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z-1)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z-1)^{n-2}}$, $0<|z-1|<\infty$. Указание. См. пример 15.

55. $(1+3i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+i)^{2n}}-(3+2i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+i)^{2n-1}}+$ $+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z+i)^{2n-2}}$, $0<|z+i|<\infty$. Указание. См. пример 15.

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}2^n}{n\,z^n}$, $2<|z|<\infty$. Указание. См. пример 16.

Глава III

§1

57. $z=-1$, $z=(1\pm i\sqrt{3})/2$, $z=\infty$ — простые полюсы. Указание. См. пример 1, 1).

58. $z=\pm\sqrt{5}\,i$ — полюсы второго порядка, $z=0$ — полюс третьего порядка, $z=\infty$ — устранимая особая точка. Указание. См. пример 1, 2).

59. $z=\pm 3i$ — полюсы четвертого порядка, $z=\infty$ — устранимая особая точка. Указание. См. пример 1, 2).

60. $z=0$ — устранимая особая точка, $z=\infty$ — существенно особая точка. Указание. См. пример 1, 3).

61. $z=0$ — полюс второго порядка, $z=\infty$ — существенно особая точка.

62. $z=0$ — устранимая особая точка, $z=\infty$ — существенно особая точка.

63. $z=1$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — устранимая особая точка. Указание. См. пример 1, 4).

64. $z=0$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — полюс второго порядка. Указание. См. пример 1, 6).

65. $z=i$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — устранимая особая точка. Указание. См. пример 1, 5).

66. $z=1$ — существенно особая точка, $z=\infty$ — устранимая особая точка.

67. $z = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — неизолированная особая точка, предельная точка полюсов.

68. $z = 2$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — полюс второго порядка. Указание. См. пример 1, 7).

69. $z = 0$, $z = \infty$ — существенно особые точки. Указание. См. пример 1, 9).

70. $z = (2k+1)\pi i$ $(k \in \mathbf{Z})$ — простые полюсы, $z = \infty$ — неизолированная особая точка. Указание. См. пример 1, 8).

71. $z = 0$ — существенно особая точка, $z = 1 + 2\pi k i$ $(k \in \mathbf{Z})$ — простые полюсы, $z = \infty$ — неизолированная особая точка. Указание. См. пример 1, 8).

72. $z = \pm 2i$ — простые полюсы, $z = \infty$ — существенно особая точка.

§2

73. $1/20 + 3i/20$. Указание. См. пример 3,1).
74. $3/16$. Указание. См. пример 3,2).
75. -5. Указание. См. пример 3,3).
76. $-1/4$.
77. $-\pi^2/2$. Указание. См. пример 3,2).
78. $2i$. Указание. См. пример 3,4).
79. 1) 0; 2) 5; 3) -5.
80. 0.
81. $-9/2$.
82. 1) $i\cos 1$. Указание. См. пример 3,5); 2) $-i\cos 1$.
83. 1) 4; 2) -4. Указание. См. пример 3,6).
84. $-1/2$. Указание. См. пример 3,7).
85. 1) 0; 2) 4π.
86. $-4i\cos 3$. Указание. См. пример 3,5).
87. 1) $1/9$; 2) $-1/9 - \frac{\sin 3}{27}$.
88. $-e^{-3}$.
89. -3. Указание. См. пример 4,2).
90. $-6i$. Указание. См. пример 4,1).
91. -1. Указание. См. пример 4,2).
92. $-27/2$. Указание. См. пример 4,2).

§3

93. $-(3+i)\pi/10$. Указание. См. пример 5,1).
94. $\pi(6+i)/3$. Указание. См. пример 5,3).
95. $6\pi i$. Указание. См. пример 5,2).

96. $-8\pi i$.

97. $i\pi/60$.

98. 0.

99. $-\pi e/2 - \pi(2i+1)/2e$.

100. $-4\pi i$.

101. $50\pi i/3$. Указание. См. пример 5,4).

102. $-7\pi i/3$. Указание. См. пример 5,3).

103. $-2\pi i$. Указание. См. пример 6.

104. 0, если $k \neq -2$; $4\pi i$, если $k = -2$. Указание. См. пример 6.

105. $2\pi(i-2)/5$. Указание. См. пример 7.

106. $-4\pi ie$. Указание. См. пример 7.

§4

107. $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$. **108.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **109.** $\frac{2\pi}{a^2-1}$. **110.** $\frac{2\pi a^3}{1-a^2}$.

111. $\frac{2\pi}{a^2(a^2-1)}$.

§5

112. $\frac{\pi}{(a+b)ab}$. Указание. См. пример 9,1). **113.** $\frac{\pi a^3}{16}$.

114. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Указание. См. пример 9,2). **115.** $\frac{-\pi}{27}$. **116.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

§6

117. $(\pi e^{-12}/4)(4\sin 6 - \cos 6)$.

118. πe^{-2}. Указание. См. пример 10,1).

119. $\pi(4e^{-2} - e^{-1})/3$.

120. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-3/\sqrt{2}} \left(\cos\frac{3}{\sqrt{2}} + \sin\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

121. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{e^{-2}}{2}\right)$. Указание. См. пример 10,2).

122. $\frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \sin\frac{1}{\sqrt{2}}$.

123. $3\pi e^{-2}/4$. Указание. См. пример 10,3).

124. $\pi e^{-2}/4$.

§7

125. $\frac{\pi}{2}$. Указание. См. пример 11,1).

126. $\pi(2 - 4/e^2)/4$.

127. π. Указание. См. пример 11,2).

128. $\frac{\pi}{2}$. Указание. См. пример 11,2).

129. $\pi(e^{-ab} - 1/2)$. Указание. См. пример 11,1).

130. $\frac{\pi}{2a}\ln a$. Указание. См. пример 12,1).

131. $\pi(\pi^2 + 4\ln^2 2)/16$.

132. $2\pi\sqrt{3}/3$. Указание. См. пример 12,2).

133. $\pi\sqrt{2}$. Указание. См. пример 12,2).

134. $-1/2$.

135. $\pi/\sin p\pi$. Указание. См. пример 12,2).

136. $2\pi(\pi - 3\sqrt{3})/9$. Указание. См. пример 12.

РАЗДЕЛ III

Глава I

§1

1. $$-\frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -3 & \text{при } -\pi<x<0, \\ 2 & \text{при } 0<x<\pi, \\ -1/2 & \text{при } x=0,\ x=\pm\pi. \end{cases}$$

Указание. Ввести функцию $g(x) = f(x) + 1/2$, использовать ее нечетность, разложить в ряд Фурье и получить ряд Фурье для данной функции из соотношения $f(x) = g(x) - 1/2$.

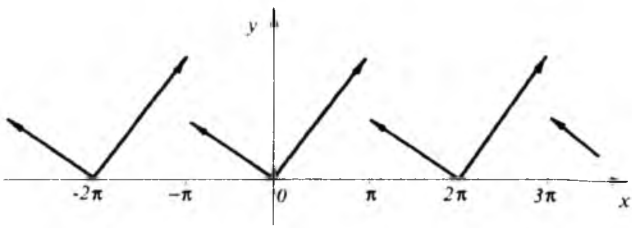


Рис. 41.

2. а) (рис. 41): $$\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(b-a)}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right] +$$
$$+(a+b)\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots\right] = \begin{cases} ax & \text{при } 0\le x<\pi, \\ bx & \text{при } -\pi<x<0, \\ (a-b)\pi/2 & \text{при } x=\pm\pi; \end{cases}$$

б) $a = b = 1$:

$$2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right] = \\ = \begin{cases} x & \text{при } -\pi<x<\pi, \\ 0 & \text{при } x = \pm\pi; \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

$a = 1,\ b = -1$:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right] = \\ = \begin{cases} |x| & \text{при } -\pi<x<\pi, \\ \pi & \text{при } x = \pm\pi; \end{cases}$$

$x = 0$:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Указание. В случае $a = b = 1$ использовать нечетность данной функции, в случае $a = 1,\ b = -1$ — четность. Кроме того, см. пример 4.

3. $$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi<x\leq 0, \\ 0 & \text{при } 0<x<\pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться формулами (1), (2); см. пример 4.

4. $$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{при } -\pi<x<\pi, \\ \pi^2 & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Указание. См. пример 4.

5. $\pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \begin{cases} \pi + x & \text{при} \quad -\pi<x<\pi, \\ \pi & \text{при} \quad x = \pm\pi. \end{cases}$

Указание. Ввести функцию $g(x) = f(x) - \pi$. Далее см. указание к задаче 1.

6. $\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) & \text{при} \quad 0<x<\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x=0,\ x = \pm\pi. \end{cases}$

Указание. Использовать нечетность данной функции.

7. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x=0,\ x = \pm\pi. \end{cases}$

Указание. Использовать нечетность данной функции.

8. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k}\right) \sin kx = \begin{cases} x^3 & \text{при} \quad -\pi<x<\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x = \pm\pi. \end{cases}$

Указание. Использовать нечетность данной функции.

9. $\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{a^2 - k^2} \quad (-\pi \le x \le \pi).$

Указание. Использовать четность данной функции.

10. $$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos(2k-1)x + \ldots\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \begin{cases} |x| & \text{при} \quad -\pi<x<\pi, \\ \pi & \text{при} \quad x = \pm\pi. \end{cases}$$

Указание. Использовать четность данной функции.

11. $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right].$

Указание. Использовать четность данной функции.

12. $-\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k^2-1} \sin kx.$

Указание. Использовать нечетность данной функции.

13. $1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2-1}.$

Указание. Использовать четность данной функции.

14. $$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (0<x<2\pi); \quad S(0) = S(2\pi) = 0.$$

Указание. Если сделать замену переменной $y = x - \pi$, то $f(y) = -y/2$, $-\pi<y<\pi$. На этом промежутке $f(y)$ — нечетная функция, что упрощает разложение. Замечание. Этот пример показывает, что два аналитических выражения могут совпадать на некотором промежутке, не совпадая при этом всюду.

15. $$e^x - 1 = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{1+k^2} - \frac{k \sin kx}{1+k^2} \right) \right] - 1$$

$$(0<x<2\pi); \quad S(0) = S(2\pi) = \frac{(1-1) - (e^{2\pi} - 1)}{2} = \frac{1 - e^{2\pi}}{2}.$$

Указание. Использовать формулу (10).

16. $$f(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{3 \cdot 2i} + \ldots + \frac{e^{(2k+1)ix} - e^{-(2k+1)ix}}{(2k+1)2i} + \ldots$$

Указание. Вычислить коэффициенты разложения по формулам (13) или, используя нечетность функции $f(x)$, разложить ее в ряд Фурье по синусам и применить формулу Эйлера $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

§2

17. $$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos k\pi x}{k^2}.$$

Указание. Использовать четность функции. См. формулы (17)–(18).

18. $$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1 & \text{при } -1<x<0, \\ 1 & \text{при } 0<x<1, \\ 0 & \text{при } x=0, \ x = \pm 1. \end{cases}$$

Указание. Использовать нечетность функции $f(x)$. См. формулы (19)–(20).

19. $$-2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi x = \begin{cases} x - 2 & \text{при } -1<x<1, \\ -2 & \text{при } x = \pm 1. \end{cases}$$

Указание. Ввести функцию $g(x) = f(x) + 2$ и использовать ее нечетность.

20. $\dfrac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l})\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{l^2 + k^2\pi^2}\cos\dfrac{k\pi x}{l} + \pi(e^l - e^{-l})\cdot$

$\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}k}{l^2 + k^2\pi^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\quad(-1<x<l);\quad S(-l) = S(l) = \frac{e^{-l}-e^l}{2}.$

Указание. Использовать формулы (14)–(15).

21. $\dfrac{3}{4} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{6}{\pi^2(2k-1)^2}\cos 2(2k-1)\pi x + \dfrac{2}{\pi k}(-1)^k\sin 2k\pi x\right).$

Указание. Использовать формулы (14)–(15).

§3

22. $\cos 2x = -\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{2^2 - 1} + \dfrac{3\sin 3x}{2^2 - 3^2} + \dfrac{5\sin 5x}{2^2 - 5^2} + \ldots\right]\quad(0<x<\pi).$

Указание. Воспользоваться формулой (26); см. пример 14, способ 2.

23. $x = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\sin k\pi x}{k}\quad(0\le x\le 1).$

Указание. Воспользоваться формулами, аналогичными формулам (26) для промежутка $[0, l]$; см. пример 14, способ 2.

24. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0<x\le 1, \\ 2-x & \text{при } 1<x\le 2, \end{cases} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}.$

Указание. Воспользоваться формулами, аналогичными формулам (25) для промежутка $[0, l]$; см. пример 14, способ 1.

25. $1 = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2m-1)\pi x}{2m-1}\quad(0<x<1).$

Указание. См. указание к задаче 23.

26. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } 0<x<1, \\ x-1 & \text{при } 1<x<2 \end{cases} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$

Указание. См. указание к задаче 24.

27. а) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}\quad(0\le x\le\pi);$ б) $x(\pi - x) =$
$= \dfrac{1}{6}\pi^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{k^2}\quad(0\le x\le\pi).$

Указание. Воспользоваться формулами (25), (26).

28. $\cos x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx \quad (0<x<\pi).$

Указание. Воспользоваться формулами (25).

29. $e^{ax} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{a\pi}-1}{a^2+k^2}\cos kx \ (0\le x\le\pi); \quad e^{ax} =$
$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-(-1)^k e^{a\pi}\right]\frac{k}{a^2+k^2}\sin kx \quad (0<x<\pi).$

Глава II

§1

30. $$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha(1-x)}{\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} 2 & \text{при } 0<x<2, \\ 0 & \text{при } x<0,\ x>2, \\ 1 & \text{при } x=0,\ x=2. \end{cases}$$

Указание. См. пример 1.

31. $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha.$$

Указание. Воспользоваться четностью функции. См. пример 2.

32. $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{(\pi-2x)\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Указание. Ввести вспомогательную функцию

$$g(y) = \begin{cases} f(x) = f(y+\pi/2) = \cos y & \text{при } -\pi/2<y<\pi/2, \\ 0 & \text{при всех остальных } y. \end{cases}$$

Тогда $g(y)$ — функция четная. См. пример 2.

33. $$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3\alpha}{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} 2 & \text{при } 0<x<3, \\ 1 & \text{при } x=3, \\ 0 & \text{при } x>3; \end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos 3\alpha}{\alpha}\sin\alpha x\,d\alpha=\begin{cases}2 & \text{при } 0<x<3,\\ 1 & \text{при } x=3,\\ 0 & \text{при } x>3,\ x=0.\end{cases}$$

Указание. Воспользоваться формулами (6) и (7). См. пример 4.

34. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha.$

Указание. Воспользоваться нечетностью данной функции. См. пример 3.

35. $F(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{4}{1-4\alpha^2}\cos\pi\alpha.$ Указание. См. пример 5.

36. $F(\alpha)=\dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\alpha e-\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{e(1+\alpha^2)}$ Указание. См. пример 5.

§2

37. 1) $\frac{\pi}{2\sqrt{e}}$. Указание. Использовать результат примера 3 из §1 главы II; 2) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Использовать результат примера 4 из §1 главы II; 3) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Преобразовать функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \pi x & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1,\end{cases}$$

см. пример 2; 4) 0. Указание. Использовать результаты решения задач 37, 2),3); см. указание к задаче 37,3).

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов С.А., Зима Е.В. Начало информатики. М.: Наука, 1989.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.
3. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 2. М.: Просвещение, 1971.
4. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.
5. Дмитриева М.В., Кубенский А.А. Элементы современного программирования. СПб: Изд-во С.Петербург. ун-та. 1991.
6. Йенсен Л., Вирт Н. Паскаль. Руководство пользователя. М.: Финансы и статистика, 1989.
7. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: Изд-во ИЛ, 1963.
8. Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
9. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы и ряды). М.: Наука, 1986.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2 т. Т.2. М.: Высшая школа, 1981.
11. Качура М.А., Ходош М.В., Цагельский В.И. Персональные ЭВМ единой системы. Бейсик. М.: Финансы и статистика, 1988.
12. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
13. Пейчан Ф. Практическое руководство по Алголу-68. М.: Мир. 1979.
14. Программирование на языке Алгол-68 для начинающих. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
15. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука. 1970.
16. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1976.

17. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5 т. Т.2. М.: Наука, 1974.
18. Уолш Б. Программирование на бейсике. М.: Радио и связь, 1988.
19. Фароков В.В. Основы Турбо Паскаля. М., МВТУ-ФЕСТО Дидектик, 1992.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969.
21. Шилов Г.И. Математический анализ (функции одного переменного). М.: Наука, 1970.

Учебное издание

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

III. РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Учебное пособие

Редактор *Т. Ф. Шпагина*
Компьютерный набор *И. И. Рыжаковой*
Обложка художника *Е. И. Егоровой*

Лицензия ЛР №040050 от 15.08.96 г.

Подписано в печать 16.12.97. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,58. Усл. кр.-отт. 15,75. Уч.-изд. л. 13,27. Тираж 1000 экз. Заказ 52

Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Центр оперативной полиграфии С.-Петербургского университета.
199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.