22

В. Т. ПЕТРОВА

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

2

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС

В. Т. Петрова

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

В.Т.Петрова

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Часть 2

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведении

Москва

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

1999

ББК 22.151.5
П29

Петрова В. Т.

П29 Лекции по алгебре и геометрии: Учебник для вузов: В 2 ч.— М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999.— Ч. 2.— 344 с. ISBN 5-691-00077-2.
ISBN 5-691-00239-2 (II).

Во второй части учебника рассматриваются вопросы теории линейных (векторных) пространств, линейных операторов и их геометрических приложений в объеме программ первого курса педагогических и технических высших учебных заведений, рекомендованных Министерством общего и профессионального образования России.

Изложение учебного материала ведется на трех уровнях по глубине и сложности, позволяющих каждому студенту выбрать для его обучения любой из них в зависимости от подготовленности и желания. Первый уровень обеспечивает знание основ, необходимых для дальнейшего усвоения математических курсов. Построение и стиль написания учебника стимулируют активное усвоение студентами содержащегося в нем учебного материала и дают возможность перехода на более высокий уровень его усвоения. Книга содержит исторические сведения по излагаемым в ней вопросам.

Автор планирует подготовку аналогичных учебников для обеспечения остальных вопросов классических программ высшей алгебры и геометрии.

ББК 22.151.5

ISBN 5-691-00077-2
ISBN 5-691-00239-2 (II)

ОТ АВТОРА

Настоящая книга представляет собой вторую часть учебника «Лекции по алгебре и геометрии», который должен обеспечивать первый семестр обучения (72 часа). Она продолжает систематическое изложение программы курса, начатое в первой части.

Одной из важных особенностей этого учебника является использование в нем идей проблемно-аксиоматического метода и тетрадей с печатной основой. Это изменяет идеологию обучения: в центре его ставится проблема, новая информация является не самоцелью, а служит студенту средством познания и обучения, что заставляет читателя активно работать с изучаемым материалом и вместе с тем позволяет изменить технологию обучения по существу: не проработав текст, не заполнив его «пробелы», он просто не сможет двинуться дальше.

Во второй части учебника используются те же обозначения, что и в первой его части. Так читателю на необходимость продумать и дать самостоятельно ответ на какой-либо вопрос или обосновать заключение в тексте учебника указывают знаки: $\stackrel{?}{=}$, $\stackrel{?}{>}$, ? не ? или ♦. Последний означает, что требуется более продуманный и развернутый ответ. Знак ? не ? указывает читателю на необходимость сделать альтернативный выбор. Например, встретив его в утверждении: «Данная система векторов линейно ? не ? зависима», читатель должен сам решить, зависима она или нет, естественно, обосновав свой выбор. Обозначения типа $\stackrel{\text{л. 35.?}}{=}$ или $\stackrel{\text{л. 35.?}}{\Longrightarrow}$ подсказывают, что логическим обоснованием соответствующего равенства или следствия является одна из лемм § 35, которую читателю следует отыскать. Когда требуется подтвердить или опровергнуть то или иное отношение (равенство, включение, сравнение и т. п.), соответствующий символ сопровождается тоже знаком вопроса, например: $\stackrel{?}{=}$, $\stackrel{?}{\omega}$ и т. д.

Старания автора были направлены к тому, чтобы выделяя таким образом определенные и вполне посильные читателю моменты рассуждений, привлечь его внимание к важным фактам курса. Самостоятельная и тщательная проработка учебного материала, к которой, можно сказать, вынуждает сама «геометрия текста» книги, должна привести студента к более глубокому его пониманию. Для сокращения записей используются основные логические символы: $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$ и т. д., объяснения этих обозначений даются при первом появлении их в тексте. Окончание доказательства обычно обозначается знаком ■, однако, в тех случаях, если по каким-либо соображениям доказательство какого-то факта приводится не полностью или указывается только его идея или схема, на окончание рассуждений указывает знак □. Внимательный читатель может заметить в книге систему контроля и отслеживания возможных ошибок при недостаточно аккуратной работе с учебным материалом.

Для облегчения работы в основной теоретической части каждой лекции выделен (вертикальной линией на полях) информационный минимум, который при использовании книги в аудиторной работе может быть освоен за лекционное время при любой подготовленности студенческой аудитории, он является основой для самостоятельной работы студента и, как правило, базой для следующей темы. Так как в учебном курсе не только невозможно, но иногда бывает и нецелесообразно приводить доказательство всех его фактов, то в такой «скелет лекции» выделены определения, примеры, утверждения и доказательства, важные в идеологии и методологии курса. Им во многих случаях предшествуют задания эвристического характера, которые позволяют читателю выдвигать и обдумывать различные гипотезы и варианты доказательств даже глубоких фактов курса.

Задачи, включенные в лекции, имеют преимущественно теоретический характер, в них вынесены доказательства (или фрагменты доказательств) многих утверждений курса. Используя учебник, преподаватель сможет на практических занятиях обсуждать содержательные проблемы, отказавшись от натаскивания студентов на тривиальностях. Задачи имеют три уровня сложности, посильный из которых каждый студент выбирает себе сам. Это позволяет индивидуализировать процесс освоения учебного материала и по существу дает учебник с тремя уровнями глубины и сложности, причем они не изолированы один от другого и позволяют читателю пробовать свои силы на более приемлемом для него уровне. «Расстояния» между уровнями нарастают постепенно с приобретением читателем опыта работы и освоением учебного материала. В книге использованы идеи ротации: чтобы выполнить задачи и задания, читателю приходится обращаться к ее предыдущему тексту не раз, если он не был достаточно внимателен при первом знакомстве с лекцией.

Все главы-лекции книги делятся на параграфы, их нумерация продолжает нумерацию первой части учебника. Все теоремы, утверждения, леммы, основные формулы, примеры и задания нумеруются в пределах параграфа, например, ссылка на теорему 45.2 означает теорему 2 параграфа 45. Если на какую-либо формулу ссылка делается в пределах только одного параграфа, то ее нумерация может быть буквенной или символьной, например (37.*a*) или (35.*). Числовая нумерация формулы, например (47.1), как правило, означает, что она будет использована в других разделах книги. Задачи учебника имеют тройную нумерацию, в которой последнее число (1, **2** или **3**) указывает на номер ее уровня, так упоминание задачи 37.2.1 означает, что речь идет о задаче первого уровня сложности, второй из задач этого уровня в § 37. Звездочкой (*) отмечены более сложные темы, которые могут быть опущены или изучены в обзорном порядке без нарушения общей логики курса, знаком (°) отмечены темы, которые вполне могут быть освоены учащимся самостоятельно и иногда рекомендуются как подготовительные к лекции. Штрихом (′) отмечены темы, которые по мнению автора удобнее обсуждать на практических занятиях. Информация об этих обозначениях обычно предваряет лекции.

Каждой лекции помимо рекомендаций предшествует перечисление ее основных понятий и сведений из предыдущих разделов курса, необходимых для ее понимания. Приводится схема самой лекции и ее взаимосвязи с другими главами учебника, что должно давать читателю представление об архитектуре курса и помогать в нем ориентироваться. В конце каждой лекции приводится список литературы по ее темам с постраничным указанием материала к каждому ее параграфу. Дополнительная литература, как правило, предлагает читателю другую точку зрения, манеру изложения или иной подход к вопросу, а иногда и более глубокие сведения, чем предполагает учебный курс.

Еще одна особенность учебника состоит в том, что каждая лекция завершается кратким сообщением об истории изучаемых понятий, их месте и значимости в науке. Это дает читателю представление о математике, как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали математическим открытиям. Автору хотелось сообщить читателю, начинающему жить в серьезной математике, не только достоверную информацию, но и передать ту романтику, а порой и драматизм, которые сопутствуют математическим поискам и открытиям.

Каждой лекции предшествует рисунок автора, который чем-то отражает ее содержание или настроение.

СЕМЕСТР 1

Часть I

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах.
(§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения.
(§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования.
(§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество.
(§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства.
(§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы.
(§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители.
(§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства.
(§ 33 — § 36).

Часть II

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
(§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.
(§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
(§ 49 — § 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
(§ 54 — § 57).

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
(§ 58 — § 64).

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
(§ 65 — § 69).

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.
(§ 70 — § 75).

Знак вопроса является ключом ко всякому знанию.

О. де Бальзак

Лекция 9

ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

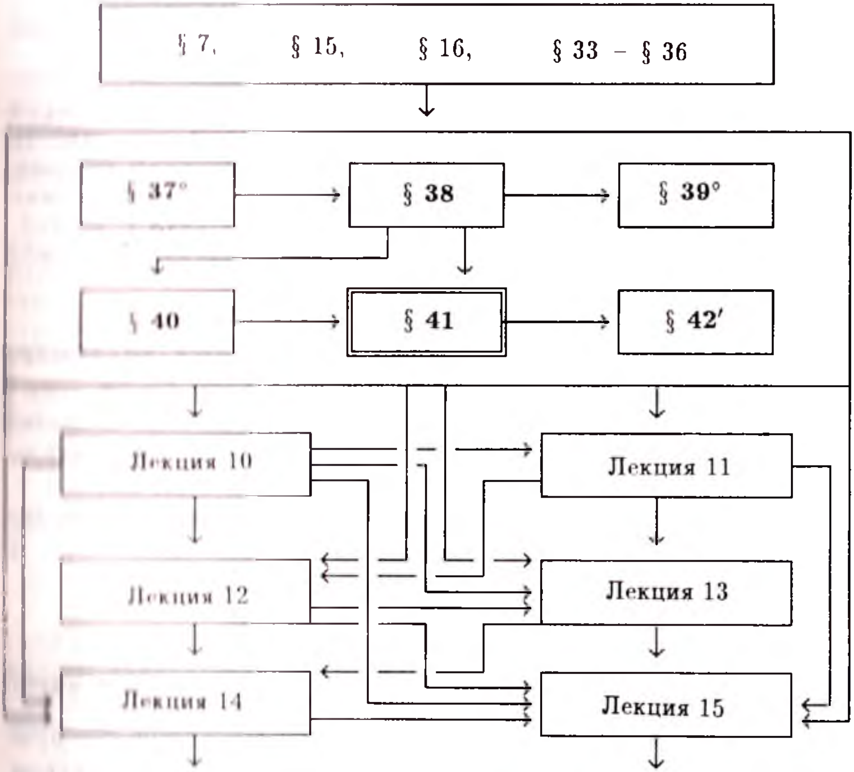
ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

§ 37°. Коллинеарные векторы.
§ 38. Линейно зависимые системы векторов.
§ 39°. Компланарные векторы.
§ 40. Линейно независимые системы векторов.
§ 41. Базис. Размерность векторного пространства.
§ 42′. Векторная форма системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли.

Основные понятия: коллинеарные векторы, геометрический смысл коллинеарности, линейно зависимая система векторов, компланарные векторы, геометрический смысл компланарности, линейно независимая система векторов, базис векторного пространства, размерность векторного пространства, аксиомы размерности векторного пространства.

Необходимые сведения: вектор, векторное пространство, линейная комбинация векторов, свободный вектор, векторное пространство свободных векторов, подпространство векторного пространства, линейная оболочка множества (системы) векторов, матричное векторное пространство, координатное векторное пространство; система линейных уравнений, матричная форма системы линейных уравнений, решение системы линейных уравнений.

Рекомендации: § 37° и §39° предлагаются для самостоятельного изучения студентами, если пособие используется при аудиторной работе, § 42′ можно рекомендовать как для практических занятий, так и для самостоятельного изучения.



Семестр 1

Лекция 1 Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 Подстановки. Группы. (§ 23—§ 26).

Лекция 7 Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Лекция 11 Линейные отображения векторных пространств.

Лекция 12 Матричное представление гомоморфизмов.

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.

Лекция 14 Собственные векторы линейных операторов.

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 37°. КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Слово «коллинеарность» латинского происхождения: con — вместе, linea — линия, т. е. совместимость с линией, вместимость в линию — в этом будет заключаться, как мы покажем позднее, геометрический смысл коллинеарности векторов. Этот термин впервые был использован У. Р. Гамильтоном в 1843 г, а окончательно введен в математическую терминологию в начале XX в. Дж. Гиббсом.

Пусть V — произвольное векторное пространство.

Определение 37.1. ***Вектор*** $\vec{b}$ *называется* ***коллинеарным вектору*** $\vec{a}$, *если найдется* $\alpha \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются* ***коллинеарными,*** *если* $\vec{b}$ *коллинеарен* $\vec{a}$ *или* $\vec{a}$ *коллинеарен* $\vec{b}$. *В противном случае векторы называются* ***неколлинеарными.***

Обозначается коллинеарность и неколлинеарность: $\vec{b} \parallel \vec{a}$ и, соответственно, $\vec{b} \nparallel \vec{a}$.

Это определение можно записать формулой:

$$\vec{b} \parallel \vec{a} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists \alpha \in \mathbf{R} \mid \vec{a} = \alpha\vec{b} \vee \vec{b} = \alpha\vec{a}),$$

т. е. найдется такое число α, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ или $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ или имеет место то и другое.

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору векторного пространства, так как хотя для $\vec{a} \neq \vec{0}$, очевидно, $\vec{a} \neq \alpha\vec{0}$ ни при каком $\alpha \in \mathbf{R}$, но зато по свойству 33.6 всегда $\vec{0} = 0\vec{a}$.

Если же оба вектора ненулевые, то для их коллинеарности достаточно одного из условий $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ или $\vec{a} = \alpha\vec{b}$: каждое из них с очевидностью следует из другого.

Утверждение 37.1. *Если векторы* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *коллинеарны ненулевому вектору* $\vec{a}$, $\vec{b} = \beta\vec{a}$ и $\vec{c} = \gamma\vec{a}$, *то* $\vec{b} = \vec{c}$ *тогда и только тогда, когда* $\beta = \gamma$.

Доказательство. Из предположения равенства векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ немедленно следует, что $\beta\vec{a} = \gamma\vec{a}$, тогда $\beta\vec{a} - \gamma\vec{a} = \vec{0}$. Откуда $(\beta - \gamma)\vec{a} = \vec{0}$, а значит, по свойству 33.10, так как вектор $\vec{a}$ ненулевой: $\beta - \gamma = 0$, т. е. $\beta = \gamma$.

Очевидно, что если $\beta = \gamma$, то $\beta\vec{a} = \gamma\vec{a}$, а значит, равны и векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. ■

Утверждение 37.2. *Подмножество всех векторов, коллинеарных любому вектору векторного пространства, есть его подпространство.*

Доказательство. 1. Пусть $\vec{a} \in V$, множество

$$L(\vec{a}) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda\vec{a} \wedge \lambda \in \mathbf{R}\}$$

есть не что иное, как линейная оболочка вектора $\vec{a}$. Тогда $L(\vec{a})$ — подпространство векторного пространства V по теореме 36.2, а значит и само является векторным пространством (теорема 36.1).

2) В частности, если $\vec{a}=\vec{0}$, то множество векторов V, ему коллинеарных, т. е. $L(\vec{0})$, состоит только из нулевого вектора. Как мы знаем (пример 34.2), это — тривиальное векторное пространство, и оно является подпространством любого векторного пространства. ■

Определение 37.2. *Множество всех векторов, коллинеарных ненулевому вектору $\vec{a}$, называется* ***одномерным векторным пространством***

Обозначается такое подпространство $V^1(\vec{a})$ или $L^1(\vec{a})$.

Утверждение 37.3. *Отношение коллинеарности на множестве всех ненулевых векторов $V\backslash\{\vec{0}\}$ векторного пространства V есть отношение эквивалентности*

$$[\|]=\{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle \mid \{\vec{a},\ \vec{b}\}\subset V\backslash\{\vec{0}\}\wedge\vec{a}\|\vec{b}\}.$$

Задача 37.1.2. Докажите утверждение 37.3. Определите классы эквивалентности этого отношения.

Будет ли отношением эквивалентности отношение коллинеарности на множестве всех векторов V?

Доказательство. По утверждению 15.? симметричность и транзитивность бинарного отношения достаточны для того, чтобы оно было отношением эквивалентности.

I. Бинарное отношение на $V\backslash\{\vec{0}\}$

$$[\|]=\{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle \mid \{\vec{a},\ \vec{b}\}\subset V\backslash\{\vec{0}\}\wedge\vec{a}\|\vec{b}\}$$

1) симметрично: т. е. для любых ненулевых векторов

$$(\vec{a}\|\vec{b})\overset{?}{\Rightarrow}(\vec{b}\|\vec{a}),$$

2) транзитивно: для ненулевых векторов $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}\subset V\backslash\{\vec{0}\}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\|\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=\alpha\vec{b}\\ \vec{b}\|\vec{c}\Rightarrow\vec{b}=\beta\vec{c}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\vec{a}\|\vec{c}.$$

Следовательно, $[\|]$ — отношение эквивалентности на $V\backslash\{\vec{0}\}$.

Класс эквивалентности ненулевого вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ по отношению $[\|]$:

$$\vec{a}/_{[\|]}=\{\vec{b}\mid\vec{b}\in V\backslash\{\vec{0}\}\wedge\vec{b}=\lambda\vec{a}\}\ \overset{\text{опр. 37.2}}{=\!=\!=}L(\vec{a})\backslash\{\vec{0}\},$$

т. е. одномерное векторное пространство без нулевого вектора или множество всех ненулевых коллинеарных между собой векторов. ■

2. Для бинарного отношения

$$[\|'] = \{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle \mid \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset V\} \wedge \vec{a} \| \vec{b}\}$$

1) выполнимость условия $((\vec{a}\|\vec{b}) \Rightarrow (\vec{b}\|\vec{a}))$ доказана выше, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, и очевидна, если $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

Указание. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, например, $\vec{b} = \vec{0}$, то можно ли утверждать, что $((\vec{a}\|\vec{0}) \Rightarrow (\vec{0}\|\vec{a}))$?

2) транзитивность: условие

$$\left.\begin{matrix} \vec{a}\|\vec{b} \\ \vec{b}\|\vec{c} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}\|\vec{c}$$

доказано выше для ненулевых векторов.

Указание. Проверьте, сохранится ли оно, если хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\vec{c}$ нулевой?

Это означает, что $[\|']$ — ? не ? является отношением эквивалентности на $V\backslash\{\vec{0}\}$.

По аналогии с понятиями в пространстве свободных векторов вводится следующее понятие.

Определение 37.3. ***Вектор*** $\vec{b}$ *называется* ***сонаправленным вектору*** $\vec{a}$, *если* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, *причем* $\alpha > 0$. *Если же* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, *но* $\alpha < 0$, *то они называются* ***противоположно направленными***.

Как правило, принимают по определению, что нулевой вектор сонаправлен и в то же время противоположно направлен с любым вектором векторного пространства.

Обозначается сонаправленность векторов $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и, соответственно, противоположная направленность $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Из определения с очевидностью следует

Утверждение 37.4. *Отношение сонаправленности:*

$$[\uparrow\uparrow] = \{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle \mid \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset V\backslash\{\vec{0}\} \wedge \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\}$$

есть отношение эквивалентности на множестве $V\backslash\{\vec{0}\}$.

Геометрический смысл понятия коллинеарности рассмотрим на примере пространства всех свободных векторов (лекция 8, § 36). Так что в этом параграфе в дальнейшем, пока не будет оговорено иное, все векторы — свободные.

Теорема 37.1. (Геометрический смысл коллинеарности векторов). *Два* ***свободных вектора*** *коллинеарны тогда и только тогда, когда существуют их представители, принадлежащие одной прямой.*

Требуется доказать два утверждения:

37.1 (1). *$\vec{b}\parallel\vec{a}$, тогда найдутся их представители, принадлежащие одной прямой.*

Доказательство. $\vec{b}\parallel\vec{a} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\vec{a}=\alpha\vec{b} \vee \vec{b}=\alpha\vec{a})$, ограничимся случаем $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, поскольку случай $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ ему аналогичен.

1) Если $\alpha=0$, то $\vec{b}=0\vec{a}\overset{?}{=}\vec{0}$. Выберем произвольную точку $A\in\mathscr{P}$, отложив от нее представители: $\overline{AB}\in\vec{a}$ и $\overline{AA}\in\vec{b}=\vec{0}$ (см. лемма 36.3), получим $\overline{AA}\subset\overline{AB}\subset(AB)$, если вектор $\vec{a}$ ненулевой. Или, если $\vec{a}=\vec{0}$ (а значит, и $\vec{b}=\vec{0}$), то их представитель — $\overline{AA}$ — нулевой направленный отрезок принадлежит любой прямой, проходящей через точку A.

Напоминание: $\mathscr{P}$ — множество точек пространства.

2) Если $\alpha\neq 0$, то отложив представители $\overline{AC}\in\vec{a}$ и $\overline{AB}\in\vec{b}=\alpha\vec{a}$, получим $[AB)\uparrow\uparrow[AC)$ при $\alpha>0$ и $[AB)\uparrow\downarrow[AC)$, в том и другом случае (см. определение 36.4) прямые $(AB)\parallel(AC)$, а значит, и совпадают, как имеющие общую точку A. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ принадлежат этой прямой. ■

37.1 (2). *Если найдется прямая, содержащая направленные отрезки — представители двух свободных векторов, то эти свободные векторы коллинеарны.*

Доказательство. Пусть $\overline{AB}\in\vec{a}$, $\overline{CD}\in\vec{b}$, и прямая $a\supset\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$. Возможно несколько взаимных расположений направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на одной прямой (рис. 1):

1) $\overline{AB}\notin\vec{0}$, $\overline{CD}\in\vec{0}$, тогда $\vec{b}=\vec{0}=0\vec{a}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$.

2) Случай $\overline{AB}\in\vec{0}$, $\overline{CD}\notin\vec{0}$ — аналогичен 1).

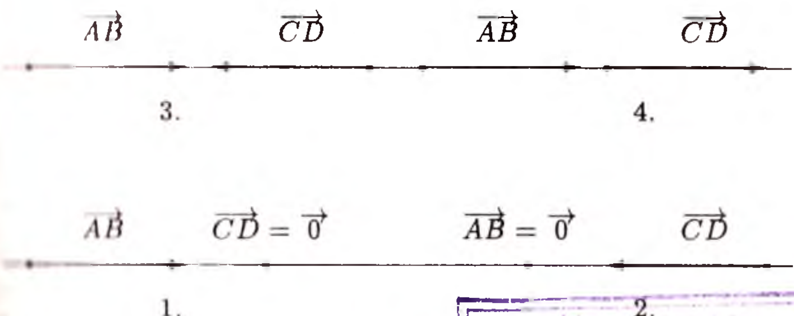


Рис. 1

3) $\overline{AB} \notin \vec{0}$ и $\overline{CD} \notin \vec{0}$, причем $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$. Возьмем число $\alpha = -|\vec{b}|/|\vec{a}| \in \mathbf{R}$, тогда $\alpha\vec{a} = -|\vec{b}|/|\vec{a}|\ \vec{a} \overset{?}{=} \vec{b}$, откуда $\vec{b} \| \vec{a}$.

4) Случай $\overline{AB} \notin \vec{0}$ и $\overline{CD} \notin \vec{0}$ с $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ аналогичен предыдущему, причем $\alpha > 0$ и $\alpha = |\vec{b}|/|\vec{a}|$. ■

Задача 37.1.1. Докажите, что если $\vec{a} \| \vec{b}$, то для любого вектора $\vec{c}$ вида $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$, коэффициенты α, β определяются однозначно.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, но нашелся вектор $\vec{c}$, имеющий по крайней мере два различных разложения по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\langle \alpha, \beta \rangle \neq \langle \alpha', \beta' \rangle$, но

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$$

Откуда $(\alpha - \alpha')\vec{a} \overset{?}{=} (\beta' - \beta)\vec{b} \overset{?}{\Rightarrow} (\vec{a} = \lambda\vec{b} \vee \vec{b} = \mu\vec{a})$,

где $\lambda = ?$ и $\mu = ?$, по определению коллинеарности векторов 37.1 это означает, что $\vec{a} \| \vec{b}$. ■

§ 38. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Определение 38.1. ***Система*** *(конечное множество)* ***векторов*** $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots \vec{a}_k\}$ *называется* ***линейно зависимой,*** *если существуют такие коэффициенты* $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots \alpha^k\}$, *не все равные* 0, *что*

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \dots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0},$$

т. е. найдется ***нетривиальная линейная комбинация*** *векторов этой системы,* ***равная нулевому вектору.***

Это определение можно записать символически:

$$(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots \vec{a}_k\} - \textit{линейно зависима}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (\exists\ \langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k \rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0 \rangle \mid \alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \dots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0}). \tag{38.1}$$

Линейная зависимость системы векторов означает, что помимо тривиальной линейной комбинации этих векторов (которая обязательно равна $\vec{0}$) есть их нетривиальная линейная комбинация, тоже равная нулевому вектору.

Задание 38.1. Сформулируйте и запишите в соответствии с предыдущим определением определения линейно зависимых систем, состоящих из двух векторов и из одного вектора (они потребуются в дальнейших примерах и задачах).

Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ***линейно зависима***, *если* ♦

Система, *состоящая* ***из одного вектора*** $\{\vec{a}_1\}$, ***линейно зависима***, *если он нулевой.* ♦

Из последнего следует утверждение.

Утверждение 38.1. *Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство.

1. $\{\vec{a}\}$ — линейно зависима $\xrightarrow{\text{задание 38.1}}$

$$\xrightarrow{\text{задание 38.1}} (\alpha\vec{a}=\vec{0} \wedge \alpha\neq 0) \xrightarrow{\text{св. 33.?.}} \vec{a}=\vec{0}.$$

2. $\vec{a}=\vec{0} \xrightarrow{\text{св. 33.?.}} 1\vec{a}=\vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \{\vec{a}\}$ — линейно зависима. ■

Несложно сформулировать и признаки линейной зависимости системы из двух векторов:

Утверждение 38.2. *Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство.

1. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ — линейно зависимая система, согласно заданию 38.1 найдутся $\langle\alpha^1, \alpha^2\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ такие, что $\alpha^1\vec{a}_1+\alpha^2\vec{a}_2=\vec{0}$. Пусть $\alpha^1\neq 0$, тогда $\vec{a}_1=?$, что означает $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$.

Случай $\alpha^2\neq 0$ аналогичен.

2. $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \overset{?}{\Rightarrow} (\vec{a}_1=\alpha\vec{a}_2 \vee \vec{a}_2=\alpha\vec{a}_1)$, что влечет

$$\vec{a}_1-\alpha\vec{a}_2=\vec{0} \vee \vec{a}_2-\alpha\vec{a}_1=\vec{0},$$

т. е. $\langle 1, -\alpha^2\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ или $\langle \alpha^1, -1\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, что означает согласно заданию 38.1 линейную зависимость системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ■

Свойства линейно зависимых систем векторов

Свойство 38.1. *Если система векторов содержит хотя бы один нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Доказательство. Пусть $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots \vec{a}_n\} \ni \vec{0}$, для простоты будем считать $\vec{a}_1=\vec{0}$. В соответствии с определением 38.1 надо решить — существует ли кортеж

$$\langle\alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^n\rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0\rangle \mid \alpha^1\vec{0}+\alpha^2\vec{a}_2+\alpha^3\vec{a}_3+\dots+\alpha^n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Для системы векторов $\{\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_n\}$ его можно взять из чисел $\langle ?, ?, ?, \ldots ?\rangle \neq \langle 0, 0, 0, \ldots 0\rangle$, тогда:

$$\begin{array}{ccccccc} ?\,\vec{0} + & ?\,\vec{a}_2 + & ?\,\vec{a}_3 & + \ldots + & ?\,\vec{a}_n & & \\ \overset{\text{св. 33.?}}{\Vert} & \Vert & \Vert & & \overset{\text{св. 33.?}}{\Vert} & & \\ \vec{0} + & \vec{0} + & \vec{0} & + \ldots + & \vec{0} & = & \vec{0}. \end{array}$$

Получена равная нулевому вектору нетривиальная линейная комбинация векторов $\{\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_n\}$, а это означает их линейную зависимость. ■

Свойство 38.2. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то эта система линейно зависима.*

Задача 38.1.2. Докажите свойство 38.2.

Доказательство. Пусть $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_k\} \subset \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_n\}$

и $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_k\}$ — линейно зависима $\overset{?}{\Rightarrow}$

$\overset{?}{\Rightarrow} (\exists\ \langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^k\rangle \neq \langle 0, 0, \ldots 0\rangle \mid \alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \alpha^3\vec{a}_3 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0})$.

Чтобы нашлась равная нулевому вектору нетривиальная линейная комбинация векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \ldots \vec{a}_n\}$:

$$\beta^1\vec{a}_1 + \beta^2\vec{a}_2 + \beta^3\vec{a}_3 + \ldots + \beta^k\vec{a}_k + \beta^{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \beta^n\vec{a}_n = \vec{0},$$

возьмем

$\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^k, \beta^{k+1}, \ldots \beta^n\rangle = \langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^k, ?, ?, \ldots ?\rangle \overset{?}{\neq} \langle 0, 0, \ldots 0\rangle$.

Тогда

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \alpha^3\vec{a}_3 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k + ?\,\vec{a}_{k+1} + \ldots + ?\vec{a}_n \overset{?}{=} \vec{0},$$

что и означает линейную зависимость системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_n\}$. ■

Свойство 38.3. *Система векторов, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов есть линейная комбинация остальных.*

Доказательство.

1. Пусть система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ — линейно зависима, тогда найдется равная нулевому вектору нетривиальная линейная комбинация векторов:

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \alpha^3\vec{a}_3 + \ldots + \alpha^n\vec{a}_n = \vec{0},$$

и значит, некоторое $\alpha^i \overset{?}{\neq} 0$. Без особого ограничения общности можем считать, что $\alpha^1 \neq 0$, тогда $\vec{a}_1 \overset{?}{=} \beta^2\vec{a}_2 + \beta^3\vec{a}_3 + \ldots + \beta^n\vec{a}_n$ с $\beta^k = ?$, т. е. один вектор представим в виде линейной комбинации остальных векторов системы.

2. Пусть хотя бы один из векторов системы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n\}$ разложим в линейную комбинацию ее остальных векторов, например: $\vec{a}_1 = \beta^2\vec{a}_2 + \beta^3\vec{a}_3 + \ldots + \beta^n\vec{a}_n$.

Тогда

$$-\vec{a}_1 + \beta^2\vec{a}_2 + \beta^3\vec{a}_3 + \ldots + \beta^n\vec{a}_n \overset{?}{=} \vec{0},$$

причем $\langle -1, \beta^2, \beta^3, \ldots \beta^n\rangle \overset{?}{\neq} \langle 0, 0, 0, \ldots 0\rangle$. Это означает линейную зависимость системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n\}$. □

Задача 38.1.3. Верно ли утверждение: система векторов, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда каждый из ее векторов есть линейная комбинация остальных?

Задача 38.1.1. Определите, является ли линейно зависимой система векторов:

$$\left\{\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\} \in \boldsymbol{M}(3 \times 1)?$$

Указание. Определить, линейно зависима система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ или нет, означает ответить на вопрос, существует ли равная $\vec{0}$ линейная комбинация этих векторов помимо тривиальной, т. е. существует ли

$$\langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\rangle \neq \langle 0, 0, 0\rangle \mid \alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \alpha^3\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Если такие $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ найдутся, то

$$\alpha^1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha^2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha^3\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix}1\alpha^1 + 1\alpha^2 - 1\alpha^3\\2\alpha^1 + 0\alpha^2 + 2\alpha^3\\3\alpha^1 + 1\alpha^2 + 2\alpha^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

что эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases}1\alpha^1 + 1\alpha^2 - 1\alpha^3 = 0,\\2\alpha^1 + 0\alpha^2 + 2\alpha^3 = 0,\\3\alpha^1 + 1\alpha^2 + 2\alpha^3 = 0.\end{cases}$$

Решая ее, получим $\langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\rangle = \langle ?, ?, ?\rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, 0\rangle$, это означает, что система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ — $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ является линейно зависимой.

Задача 38.2.2. Определите, является ли линейно зависимой система векторов:

$$\left\{\vec{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \vec{E}_2^1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \vec{E}_1^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \vec{E}_2^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\subset \boldsymbol{M}(2),$$

т.е. существуют ли $\langle\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4\rangle\neq\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0\rangle$ такие, что $\alpha^1\vec{E}+\alpha^2\vec{E}_2^1+\alpha^3\vec{E}_1^2+\alpha^4\vec{E}_2^2=?$.

Если такие $\langle\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4\rangle$ найдутся, то

$$\alpha^1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\alpha^3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha^4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix}\alpha^1&\alpha^2\\\alpha^3&\alpha^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Значит, $\langle\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4\rangle\overset{?}{=}\langle 0,0,0,0\rangle$, это означает, что система векторов $\{\vec{E},\ \vec{E}_2^1,\ \vec{E}_1^2,\ \vec{E}_2^2\}$ $\overline{\text{? не ?}}$ является линейно зависимой.

Задача 38.2.3. Определите, являются ли линейно зависимыми системы векторов в $\mathscr{P}^2[x]$:

$$S_1=\{\vec{e}_0=1,\ \vec{e}_1=1+x,\ \vec{e}_2=1+x+x^2\}.$$

$$S_2=\{\vec{e}_0'=1+x,\ \vec{e}_2'=1+2x,\ \vec{e}_3'=1-x,\ \vec{e}_4'=1+x^2\}.$$

1) S_1 линейно зависима, если найдутся

$$\langle\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2\rangle\neq\langle 0,\ 0,\ 0\rangle\,|\,\alpha^0\vec{e}_0+\alpha^1\vec{e}_1+\alpha^2\vec{e}_2=\vec{0}.$$

Последнее, принимая во внимание обозначения, влечет

$$\alpha^0 1+\alpha^1(1+x)+\alpha^2(1+x+x^2)=0\cdot 1+0x+0x^2.$$

Откуда, учитывая, что два многочлена, по определению, равны тогда и только тогда, когда равны их все соответствующие коэффициенты, получим

$$\langle\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2\rangle\overset{?}{=}\langle 0,\ 0,\ 0\rangle,$$

т. е. система векторов S_1 — $\overline{\text{? не ?}}$ является линейно зависимой.

2) S_2 линейно зависима, если найдутся

$$\langle\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3\rangle\neq\langle ?,\ ?,\ ?,\ ?\rangle\,|\,\alpha^0\vec{e}_0'+\alpha^1\vec{e}_1'+\alpha^2\vec{e}_2'+\alpha^3\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Учитывая обозначения, это влечет

$$\alpha^0(1+x)+\alpha^1(1+2x)+\alpha^2(1-x)+\alpha^3(1+x^2)=0\cdot 1+0x+0x^2.$$

Откуда $\langle\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3\rangle\overset{?}{\neq}\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0\rangle$, т. е. система векторов S_2 $\overline{\text{? не ?}}$ является линейно зависимой.

§ 39°. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

О компланарности векторов чаще говорят, когда векторы — свободные, слово это, так же как и коллинеарность,— латинского происхождения (от com — вместе и planum — плоскость, т. е. помещаемые в плоскость), в этом заключен геометрический смысл компланарности (трех векторов): очевидно, далеко не всякие три свободных вектора можно «поместить» в одну плоскость.

Определение 39.1. *Три линейно зависимых* ***вектора*** *называются* ***компланарными****, в противном случае их называют* ***некомпланарными****.*

Очевидно, что если среди трех векторов есть нулевой вектор или коллинеарные, то такие векторы компланарны. ◆

Теорема 39.1. (Геометрический смысл компланарности). *Три* ***свободных вектора*** *компланарны тогда и только тогда, когда существуют их представители, принадлежащие одной плоскости.*

Заметим, что поскольку пространство свободных векторов V, как было доказано в § 35′, есть векторное пространство, то в нем можно пользоваться понятиями и свойствами линейно зависимых систем векторов и коллинеарности векторов.

В теореме 39.1 выделим два утверждения, требующих доказательства:

39.1.(1). *Если свободные векторы компланарны, то найдутся их представители — направленные отрезки, лежащие в одной плоскости.*

При доказательстве следует рассмотреть несколько случаев:

1) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\ni\vec{0}$, пусть $\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{b}\nparallel\vec{c}$.

Отложим эти свободные векторы от одной точки A, по лемме 35.3 об откладывании существуют направленные отрезки $\overline{AA}\in\vec{a}=\vec{0}$, $\overline{AB}\in\vec{b}$ и $\overline{AC}\in\vec{c}$. Тогда, очевидно, $\{\overline{AA}, \overline{AB}, \overline{AC}\}\subset(ABC)$. ◆

Напоминание: (ABC) обозначается плоскость, проходящая через три различных точки A, B и C. (A, a) — плоскость, проходящая через точку A и прямую a, $A\notin a$.

2) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ содержат хотя бы два коллинеарных вектора, например, $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Также отложим представители этих свободных векторов от одной точки O: $\overline{OA}\in\vec{a}$, $\overline{OB}\in\vec{b}$ и $\overline{OC}\in\vec{c}$.

Исходя из геометрического смысла коллинеарности (теорема 37.1), $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ принадлежат одной прямой. Тогда $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}\subset(OAB)$. ♦

3) Пусть среди $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ нет нулевых или коллинеарных.

Отложим их от одной точки O: $\overline{OA}\in\vec{a}=\vec{0}$, $\overline{OB}\in\vec{b}$, $\overline{OC}\in\vec{c}$. По свойству 38.? из линейной зависимости этой системы векторов следует, что хотя бы один из них можно разложить в линейную комбинацию остальных, пусть $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Это позволяет сделать чертеж (рис. 2)

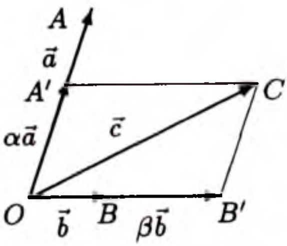


Рис. 2

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA'}\in\alpha\vec{a}\\ \overline{OB'}\in\beta\vec{b}\\ \overline{OC}\in\vec{c}\end{array}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}\subset(OA'B'). \quad ♦$$

39.1.(2). *Если представители трех свободных векторов принадлежат одной плоскости, то эти векторы компланарны.*

Собственно, надо доказать линейную зависимость трех таких свободных векторов.

В доказательстве также выделим имеющиеся возможности:

1) Система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ содержит нулевой свободный вектор или пару коллинеарных.

В этих случаях $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линейно зависима по свойству 38.? или 38.2, (поскольку коллинеарность двух из векторов системы по определению 37.1 означает их линейную зависимость). ♦

2) Система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ не содержит нулевого вектора или коллинеарных свободных векторов.

Отложим представители каждого из этих свободных векторов от одной точки O: $\overline{OA}\in\vec{a}$, $\overline{OB}\in\vec{b}$, $\overline{OC}\in\vec{c}$.

По условию $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}\subset(ABC)$ (рис. 3). Проведя прямые через точку C параллельно (OA) и, соответственно, (OB), получим параллелограмм $OA'CB'$. Откуда

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}\overset{?}{=}\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}\overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=}\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\overset{?}{=}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},$$

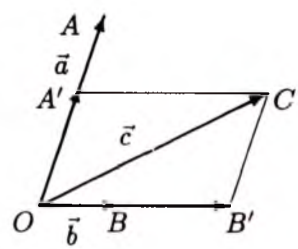


Рис. 3

что по свойству 38.? означает линейную зависимость, а значит, и компланарность системы векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. ♦

Следствие 39.1. *Если среди трех компланарных свободных векторов есть два неколлинеарных, то третий вектор разложим в их линейную комбинацию, причем такое разложение единственно.*

Задача 39.1.1. Докажите следствие 39.1.

Доказательство. Пусть свободные векторы $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — компланарны и $\vec{a}\nparallel\vec{b}$. Из определения компланарности следует, что найдутся $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle \overset{?}{\neq} \langle 0, 0, 0\rangle$ такие, что

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}.$$

При этом $\gamma\neq 0$, так как в противном случае $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$, что влечет коллинеарность $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ♦

Тогда $\vec{c}\overset{?}{=}\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$. По задаче 37.?.1 такое разложение единственно.

Теорема 39.2. *Любые четыре свободные вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Рассмотрим две возможности:

1) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ содержит подсистему компланарных векторов. Тогда по свойству 38.? система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ линейно зависима.

2) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ не содержит компланарной тройки векторов. Отложим все эти свободные векторы от одной точки O, что по лемме 35.3 об откладывании дает:

$$\overline{OA}\in\vec{a},\ \overline{OB}\in\vec{b},\ \overline{OC}\in\vec{c},\ \overline{OD}\in\vec{d}.$$

Причем никакие три точки из $\{A, B, C, D\}$ не лежат в одной плоскости, проходящей через точку O (рис. 4).

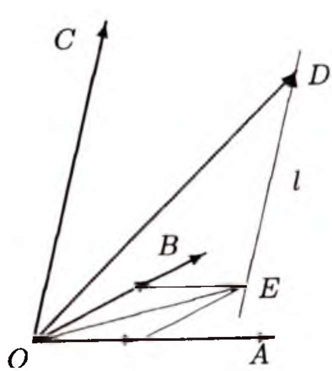


Рис. 4

Проведем прямую $l|(l\ni D\wedge l\|(OC))$. При этом $l\cap(OAB)\neq\varnothing$ и $l\not\subset(OAB)$, так как в противном случае $(OC)\|(OAB)$, т. е. $(OC)\subset(OAB)$, откуда $\overline{OC}\subset(OAB)$, что влечет компланарность тройки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\subset\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$, а это исключается рассматриваемым случаем.

Обозначим, $l\cap(OAB)=E$. Тогда

$$\vec{d}\overset{?}{=}\overline{OE}+\gamma\vec{c}\overset{?}{=}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},$$

по свойству 38.? это означает линейную зависимость системы векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$. Что и завершает доказательство теоремы. ■

Следствие 39.2. *Если среди четырех свободных векторов есть три некомпланарных, то четвертый вектор разложим в их линейную комбинацию, причем такое разложение единственно.*

Доказательство. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\} \subset \mathscr{V}$, причем можем, не нарушая общности, считать $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ некомпланарными.

Так как по теореме 39.2 всякие четыре свободные векторы линейно зависимы, то найдутся $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle \neq \langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$.

При этом $\delta \neq 0$, так как равенство $\delta = 0$ влечет $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, т. е. компланарность $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, а это противоречит условию. ◆

Из $\delta \neq 0$ следует разложимость свободного вектора $\vec{d}$ в линейную комбинацию некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}.$$

Допустим, что такое разложение не единственно, найдется еще $\langle \alpha'', \beta'', \gamma'' \rangle \neq \langle \alpha', \beta', \gamma' \rangle \mid \vec{d} = \alpha''\vec{a} + \beta''\vec{b} + \gamma''\vec{c}$. Тогда

$$\vec{d} = \alpha''\vec{a} + \beta''\vec{b} + \gamma''\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c},$$

откуда

$$(\alpha'' - \alpha')\vec{a} + (\beta'' - \beta')\vec{b} + (\gamma'' - \gamma')\vec{c} = \vec{0}.$$

При $\langle \alpha'', \beta'', \gamma'' \rangle \neq \langle \alpha', \beta', \gamma' \rangle$, т. е. $\langle \alpha'' - \alpha', \beta'' - \beta', \gamma'' - \gamma' \rangle \neq$ $\neq \langle 0, 0, 0 \rangle$ последнее векторное равенство означает линейную зависимость, а значит, и компланарность системы векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Это противоречие доказывает следствие, так как означает, что при его условиях свободный вектор $\vec{d}$ не может иметь два различных разложения по трем некомпланарным свободным векторам, а одно было найдено выше. ■

Следствие 39.3. *В пространстве свободных векторов любая система, содержащая более трех векторов, линейно зависима.* ◆

Замечание 39.1. В теореме 39.2 существенно условие, что четыре вектора — свободные, однако, существуют векторные пространства, в которых системы четырех, пяти и вообще, даже любого числа векторов, могут не быть линейно зависимыми.

§ 40. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Естественно конечную систему векторов произвольного векторного пространства, не являющуюся линейно зависимой, называть *линейно зависимой системой*. Однако, для удобства целесообразно ее определение формулировать позитивно (без отрицания).

Определение 40.1. ***Система векторов*** $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_k\}$ *называется* ***линейно независимой****, если* ***из равенства*** $\vec{0}$ ***их линейной комбинации следует равенство*** 0 ***всех ее коэффициентов.*** Т. е такая система векторов не имеет нетривиальных линейных комбинаций, равных $\vec{0}$.

Это определение можно записать символически:

$$(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_k\} — \textit{линейно независима} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0}) \Rightarrow (\langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^k \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle)). \tag{40.1}$$

Очевидно, что линейно независимая система векторов не может содержать нулевой вектор, коллинеарные векторы, компланарные векторы. ◆

Задание 40.1. Приведите примеры линейно независимых систем векторов.

Свойства линейно независимых систем векторов

Свойство 40.1. *Система, состоящая из одного вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.*

(Сравните с утверждением 38.1).

Свойство 40.2. *Система, состоящая из двух векторов, линейно независима тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.*

(Сравните с утверждением 38.2).

Свойство 40.3. *Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.*

(См. определение 39.1).

Свойство 40.4. *Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.*

Свойство 40.5. *Если* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$ *линейно независимая* *система, а* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k, \vec{b}\}$ *— линейно зависимая, то вектор* $\vec{b}$ *есть линейная комбинация* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$.

З а д а ч а 40.1.2. Докажите свойство 40.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k, \vec{b}\}$ — линейно зависимая система, то найдется кортеж

$$\langle \beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots \beta^k, \beta \rangle \neq \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$$

такой, что $\beta^1\vec{a}_1 + \beta^2\vec{a}_2 + \ldots + \beta^k\vec{a}_k + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Причем, если $\beta = 0$, то система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$ — линейно зависима. ◆

Это противоречит условию, следовательно $\beta \neq 0$ и

$$\vec{b} \overset{?}{=} \alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k,$$

где $\alpha^i = ?$, $i = 1, 2, \ldots, k$. ■

С л е д с т в и е 40.1. *Если система векторов* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\} \in V$ *линейно независима, а вектор* $\vec{a}_{k+1} \in V$ *и не выражается линейно через* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$, *то система* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}\}$ *линейно независима.*

З а д а ч а 40.1.1. Докажите следствие 40.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что линейно зависима система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}\}$ с линейно независимой подсистемой $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$, тогда вектор $\vec{a}_{k+1}$ есть линейная комбинация векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$. ◆

Противоречие доказывает следствие. ■

С в о й с т в о 40.6. *Система векторов* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$ *линейно независима тогда и только тогда, когда всякий вектор, выражающийся линейно через вектора этой системы, представим в виде их линейной комбинации единственным способом.*

З а д а ч а 40.1.3. Докажите свойство 40.6.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k\}$ линейно независима.

Предположим, что некоторый вектор $\vec{b}$ допускает два разложения:

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{b} = \beta^1\vec{a}_1 + \beta^2\vec{a}_2 + \ldots + \beta^k\vec{a}_k.$$

Тогда

$$(\alpha^1-\beta^1)\vec{a}_1+(\alpha^2-\beta^2)\vec{a}_2+\dots+(\alpha^k-\beta^k)\vec{a}_k\overset{?}{=}\vec{0},$$

откуда $\langle\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots \alpha^k\rangle \overset{?}{=} \langle\beta^1, \beta^2, \beta^3, \dots \beta^k\rangle$.

2. Пусть для всякого вектора $\vec{b}=x^1\vec{a}_1+x^2\vec{a}_2+\dots+x^k\vec{a}_k$ разложение в линейную комбинацию векторов $\{\vec{a}_i\}_1^k$ единственно, тогда, в частности, разложение нулевого вектора:

$$\vec{0}=0\vec{a}_1+0\vec{a}_2+\dots+0\vec{a}_k$$

единственно. Это означает линейную независимость системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$. ♦■

Обозначение. $\{\vec{a}_i\}_1^k \overset{\text{des}}{=} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$.

Свойство 40.7. *Если линейно независима система векторов* $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_i, \dots \vec{b}_j, \dots \vec{b}_n\}$, *то линейно независимы и системы векторов:* $B'=\langle\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots \vec{b}'_j, \dots \vec{b}'_n\rangle$, $B''=\langle\vec{b}_1'', \vec{b}_2'', \dots \vec{b}_i'', \dots \vec{b}_n''\rangle$, $B^*=\langle\vec{b}_1^*, \vec{b}_2^*, \dots \vec{b}_i^*, \dots \vec{b}_n^*\rangle$ такие, что при $\lambda\neq 0$, $\{i, j\}\subset\{1, 2, \dots n\}$, $s=1, 2, \dots n$

$$\vec{b}'_s=\begin{cases}\vec{b}_s & \text{при } s\neq j\\ \lambda\vec{b}_j & \text{при } s=j\end{cases},\qquad \vec{b}''_s=\begin{cases}\vec{b}_s & \text{при } s\neq i\\ \vec{b}_i+\vec{b}_j & \text{при } s=i\end{cases},$$

$$\vec{b}^*_s=\begin{cases}\vec{b}_s & \text{при } s\neq i\\ \vec{b}_i+\lambda\vec{b}_j & \text{при } s=i\end{cases}.$$

Напоминание. Запись вида $i=1, 2, \dots k$ означает, что i принимает все целые значения от 1 до k.

Доказательство. Так как линейно независима система векторов $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_i, \dots \vec{b}_j, \dots \vec{b}_n\}$, то из

$$\alpha^1\vec{b}_1+\alpha^2\vec{b}_2+\dots+\alpha^i\vec{b}_i+\dots+\alpha^j\vec{b}_j+\dots+\alpha^n\vec{b}_n=\vec{0}$$

следует $\langle\alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^i, \dots \alpha^j, \dots \alpha^n\} = \langle 0, 0, 0, \dots 0\rangle$.

1. Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы B':

$$\begin{array}{ccccccccc}\beta^1\vec{b}'_1 & + & \beta^2\vec{b}'_2 & +\dots+ & \beta^j\vec{b}'_j & +\dots+ & \beta^n\vec{b}'_n & = & \vec{0}\\ \| & & \| & & \| & & \| & & \|\\ \beta^1\vec{b}_1 & + & \beta^2\vec{b}_2 & +\dots+ & \beta^j(\lambda\vec{b}_j) & +\dots+ & \beta^n\vec{b}_n & = & \vec{0}\\ \| & & \| & & \| & & \| & & \|\\ \beta^1\vec{b}_1 & + & \beta^2\vec{b}_2 & +\dots+ & (\beta^j\lambda)\vec{b}_j & +\dots+ & \beta^n\vec{b}_n & = & \vec{0}\end{array}$$

Тогда $\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \lambda\beta^j, \ldots \beta^n \rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$, а так как по условию $\lambda \neq 0$, то $\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^j, \ldots \beta^n \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$, что означает линейную независимость системы векторов B'. ◆

2. Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы B'':

$$\begin{array}{ccccccccc}
\beta^1\vec{b}''_1 + & \beta^2\vec{b}''_2 + \ldots + & \beta^i\vec{b}''_i & + \ldots + & \beta^j\vec{b}''_j \ldots + & \beta^n\vec{b}''_n = \vec{0} \\
\| & \| & \| & & \| & \| \\
\beta^1\vec{b}_1 + & \beta^2\vec{b}_2 + \ldots + & \beta^i(\vec{b}_i + \vec{b}_j) & + \ldots + & \beta^j\vec{b}_j \ldots + & \beta^n\vec{b}_n = \vec{0} \\
\| & \| & \| & & \| & \| \\
\beta^1\vec{b}_1 + & \beta^2\vec{b}_2 + \ldots + & \beta^i\vec{b}_i & + \ldots + & (\beta^i + \beta^j)\vec{b}_j \ldots + & \beta^n\vec{b}_n = \vec{0}.
\end{array}$$

Тогда $\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^i, \ldots (\beta^i + \beta^j), \ldots \beta^n \rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$, а значит, и $\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^i, \ldots \beta^n \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$. ◆

Откуда следует линейная независимость системы векторов B''.

3. Систему векторов B^* можно получить из системы B последовательным выполнением «двух переходов»: от B к B' — заменой ее вектора $\vec{b}_j$ на $\lambda\vec{b}_j$, затем в B' заменой $\vec{b}_i$ на его сумму с j-ым вектором $\lambda\vec{b}_j$. Каждый из таких переходов сохраняет линейную независимость. ■

Лемма 40.1. *Если система векторов $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_k\} \subset V$ линейно независима, то линейно независима и система векторов $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_{k-1}\} \subset V$ такая, что $\vec{c} = \vec{b}_i - \lambda_i\vec{b}_k$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, а $i = 1, 2, \ldots k-1$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\beta^1\vec{c}_1 + \beta^2\vec{c}_2 + \ldots + \beta^{k-1}\vec{c}_{k-1}$ и выясним, при каких значениях коэффициентов $\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^{k-1} \rangle$ она принимает значения $\vec{0}$. Пусть

$$\begin{array}{ccccc}
\beta^1\vec{c}_1 + & \beta^2\vec{c}_2 & + \ldots & + \beta^{k-1}\vec{c}_{k-1} & = \vec{0}. \\
\| & \| & \vec{c}_i = \vec{b}_i - \lambda_i\vec{b}_k & \| & \|
\end{array}$$

$$\beta^1(\vec{b}_1 - \lambda_1\vec{b}_k) + \beta^2(\vec{b}_2 - \lambda_2\vec{b}_k) + \ldots + \beta^{k-1}(\vec{b}_{k-1} - \lambda_{k-1}\vec{b}_k) = \vec{0}.$$

Перегруппировав слагаемые, получим линейную комбинацию линейно независимых векторов $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_k\}$:

$$\beta^1\vec{b}_1 + \beta^2\vec{b}_2 + \ldots + \beta^{k-1}\vec{b}_{k-1} - (\lambda_1\beta^1 + \lambda_2\beta^2 + \ldots + \lambda_{k-1}\beta^{k-1})\vec{b}_k = \vec{0}.$$

Отсюда

$$\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^{k-1}, -(\lambda_1\beta^1 + \lambda_2\beta^2 + \ldots \lambda_{k-1}\beta^{k-1}) \rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle,$$

и в частности, $\langle \beta^1, \beta^2, \dots \beta^{k-1}\rangle = \langle 0, 0, \dots 0\rangle$ — что означает линейную независимость системы векторов $\{\vec{b}_i - \lambda_i \vec{b}_k\}_1^{k-1}$.

Утверждение 40.1. *Если $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\}$ — линейно независимая, а $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ — произвольная системы векторов и $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\} \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n)$, то $k \leqslant n$.*

Доказательство проведем индукцией по n (числу векторов, для которых составляется линейная оболочка).

1) Базa индукции: $n = 1$. Докажем, что если линейно независима система векторов $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\} \subset L(\vec{a}_1)$, то $k \leqslant 1$, т. е. $k = 1$.

$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\}$ — линейно независимая система, тогда по свойству 40.? линейно независима ее подсистема $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Тогда оба эти вектора ненулевые $(\vec{b}_1 \neq \vec{0} \wedge \vec{b}_2 \neq \vec{0})$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{b}_1 \in L\{\vec{a}_1\} \Rightarrow \vec{b}_1 = \alpha^1 \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 \in L\{\vec{a}_1\} \Rightarrow \vec{b}_2 = \alpha^2 \vec{a}_1 \overset{?}{\Rightarrow} \vec{a}_1 = (\alpha^2)^{-1} \vec{b}_2 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \vec{b}_1 = \frac{\alpha^1}{\alpha^2}\vec{b}_2.$$

По свойству 38.3 система $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ — линейно зависима — пришли к противоречию, которое означает, что число векторов в линейно независимой системе из $L(\vec{a}_1)$ не может быть больше 1, т. е. $k = 1$.

2) Предположение индукции. Если линейно независимая система векторов $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\} \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_{n-1}\}$, то $k \leqslant n-1$.

3) Шаг индукции. Докажем, что если система линейно независима $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_k\} \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n)$, то $k \leqslant n$.

По определению линейной оболочки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n)$ всякий ее вектор

$$\vec{b}_j = \alpha_j^1 \vec{a}_1 + \alpha_j^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_j^{n-1} \vec{a}_{n-1} + \alpha_j^n \vec{a}_n,$$

$j = 1, 2, \dots k$.

Причем найдется кортеж коэффициентов $\langle \alpha_j^1, \alpha_j^2, \dots \alpha_j^n\rangle \neq \neq \langle 0, 0, \dots 0\rangle$, так как в противном случае система $\{\vec{b}_i\}_1^k \supset \vec{0}$ и, значит, линейно зависима. ◆

Не нарушая общности, можем считать, что $\vec{b}_k \neq \vec{0}$ и $\alpha_k^n \neq 0$, где $\vec{b}_k = \alpha_k^1 \vec{a}_1 + \alpha_k^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k^{n-1} \vec{a}_{n-1} + \boxed{\alpha_k^n}\, \vec{a}_n$.

Выразим из этого разложения по аналогии с базой индукции вектор

$$\vec{a}_n = \frac{1}{\alpha_k^n}\vec{b}_k - \frac{\alpha_k^1}{\alpha_k^n}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^n}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_k^3}{\alpha_k^n}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\alpha_k^{n-1}}{\alpha_k^n}\vec{a}_{n-1}. \qquad (40.\text{a})$$

Подставим такое выражение $\vec{a}_n$ в каждое $\vec{b}_j$ ($j=1,\ 2, \ldots n$):

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j^i \vec{a}_i + \alpha_j^n \vec{a}_n \overset{(40.\text{a})}{=\!=}$$

$$\overset{(40.\text{a})}{=\!=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j^i \vec{a}_i + \alpha_j^n \left(\frac{1}{\alpha_k^n}\vec{b}_k - \frac{\alpha_k^1}{\alpha_k^n}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^n}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k^{n-1}}{\alpha_k^n}\vec{a}_{n-1} \right) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_j^i - \alpha_j^n \frac{\alpha_k^i}{\alpha_k^n} \right) \vec{a}_i + \frac{\alpha_j^n}{\alpha_k^n}\vec{b}_k.$$

Откуда для любого $j=1,\ 2, \ldots n$ вектор

$$\vec{c}_j = \vec{b}_j - \frac{\alpha_j^n}{\alpha_k^n}\vec{b}_k = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_j^i - \alpha_j^n \frac{\alpha_k^i}{\alpha_k^n} \right) \vec{a}_i \in L(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_{n-1}).$$

По лемме 40.1 такая система векторов линейно независима, а из предположения индукции следует, что $k-1 \leqslant n-1$, откуда $k \leqslant n$.

Это завершает доказательство, поскольку шаг индукции выполнен. ■

Следствие 40.2. *Любая система, содержащая более n векторов линейной оболочки n линейно независимых векторов, линейно зависима.* ♦

(Сравните с теоремой 39.2, следствием 39.3).

§ 41. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение 41.1. *Конечная **упорядоченная** система векторов B называется **базисом множества** или **системы векторов** V, если выполняются условия:*

B. 1: *она **линейно независима**.*

B. 2: *любой вектор из множества V линейно выражается через векторы этой системы.*

*Если V — векторное пространство, то такую систему называют **базисом векторного пространства**.*

Обозначение базиса: B, часто в базисе указывают его векторы: $B=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$, а векторное пространство с фиксированным в нем базисом обозначают $\langle V, B \rangle$.

Базис — слово греческого происхождения: «βασιζ» означает основание, основу.

В. 2 означает, что $V=L(B)$ и может быть сформулировано так:

В.2′: $V=L(B)$. ◆

Отметим, что не всякое векторное пространство (или система векторов) имеют базис в указанном смысле, например, нулевое векторное пространство не имеет базиса, поскольку в нем невыполнимо даже условие В. 1. Не существует базиса и в векторном пространстве функций $C[a, b]$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ (см. пример 36.7).

Определение 41.2. *Если* ***векторное пространство имеет*** *базис, то оно называется* ***конечномерным***.

Иногда по дополнительному соглашению к конечномерным пространствам относят и нульмерное векторное пространство.

Несложно увидеть, что в конечномерном векторном пространстве всякая система векторов, содержащая более некоторого числа n векторов, линейно зависима. ◆

Постараемся найти в отдельных векторных пространствах базисы и ответить на вопрос: единствен ли базис в векторном пространстве, если он существует.

Пример 41.1. Укажем в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2\times 1)$ базис.

$$\boldsymbol{M}(2\times 1)=\left\{\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\right\},\ \vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B^0=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle.$$

Проверяем выполнимость условий В. 1 и В. 2:

1) В. 1: $\alpha^1\vec{e}_1+\alpha^2\vec{e}_2=\vec{0}\overset{?}{\Rightarrow}\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle=\langle 0, 0\rangle$.

$$\alpha^1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle=\langle 0, 0\rangle,$$

т. е. система векторов $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ — линейно независима.

2) В. 2: $\forall \vec{x}\in \boldsymbol{M}(2\times 1)\overset{?}{\Rightarrow}\vec{x}=\alpha^1\vec{e}_1+\alpha^2\vec{e}_2$.

$$\alpha^1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\langle \alpha^1, \alpha^2\rangle=\langle x^1, x^2\rangle,$$

т. е.; $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2$.

Следовательно, $B^0=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ — базис $\boldsymbol{M}(2\times 1)$, его называют ***стандартным базисом*** в $\boldsymbol{M}(2\times 1)$.

Можно показать, что и в любом координатном пространстве подобная система векторов образует базис.

Определение 41.3. ***Стандартным базисом в векторном пространстве*** $\boldsymbol{M}(n \times 1)$ *называется система векторов:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Его обозначение $B^0 = \langle \vec{e}^{\,0}_1, \ \vec{e}^{\,0}_2, \dots \vec{e}^{\,0}_n \rangle$.

Можно ли в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(n \times 1)$ выбрать базис отличный от стандартного? Определим, например, образуют ли базис в $\boldsymbol{M}(2 \times 1)$ векторы:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B'' = \langle \vec{c}_1, \ \vec{c}_2, \ \vec{c}_3 \rangle .$$

Аналогично примеру 41.1 проверим выполнимость условий базиса:

1) В.1: $\alpha^1 \vec{c}_1 + \alpha^2 \vec{c}_2 + \alpha^3 \vec{c}_3 = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \langle \alpha^1, \ \alpha^2, \ \alpha^3 \rangle \neq \langle 0, \ 0, \ 0 \rangle$.

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^1 \cdot 1 + \alpha^2 \cdot 1 + \alpha^3 \cdot 2 = 0, \\ \alpha^1 \cdot 0 + \alpha^2 \cdot 1 + \alpha^3 \cdot 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

например $\langle \alpha^1, \ \alpha^2, \ \alpha^2 \rangle = \langle 1, \ 1, \ -1 \rangle$, т. е. система векторов $\langle \vec{c}_1, \ \vec{c}_2, \ \vec{c}_3 \rangle$ — линейно зависима и не выполняется условие В.1 базиса.

Следовательно, система $B' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ не является базисом в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2 \times 1)$.

Задача 41.1.1. Образуют ли базис в $\boldsymbol{M}(2 \times 1)$ векторы:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Аналогично предыдущему проверим выполнимость условий В. 1 и В. 2:

1) В. 1: $\alpha^1 \vec{c}_1 + \alpha^2 \vec{c}_2 = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \langle \alpha^1, \ \alpha^2 \rangle = \langle 0, \ 0 \rangle$.

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 + \alpha^2 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \alpha^1, \ \alpha^2 \rangle \overset{?}{=} \langle 0, \ 0 \rangle, \text{ т. е.}$$

система векторов $\langle \vec{c}_1, \ \vec{c}_2 \rangle$ — линейно $\underline{?\text{ не }?}$ зависима.

2) В. 2: $\forall \vec{x} \in \boldsymbol{M}(2\times 1) \overset{?}{\Rightarrow} \vec{x} = \alpha^1\vec{c}_1 + \alpha^2\vec{c}_2$.

$$\alpha^1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha^1+\alpha^2\\ \alpha^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} \Rightarrow \langle \alpha^1, \alpha^2\rangle = \langle x^1 - x^2, x^2\rangle,$$

откуда $\vec{x} = (x^1 - x^2)\vec{c}_1 + x^2\vec{c}_2$.

Следовательно, система $B'' = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$? не ? образует базис в $\boldsymbol{M}(2\times 1)$.

Задача 41.1.2. Найдите какой-либо базис в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(m\times n)$ (например, так, чтобы всякая матрица $A \in \boldsymbol{M}(m\times n)$ наиболее естественным образом разлагалась в линейную комбинацию таких векторов-матриц, причем линейно независимых).

Указание. Подумайте, в линейную комбинацию каких (и скольких) матриц можно разложить произвольную матрицу $A = \|a^i_j\| \in \boldsymbol{M}(m\times n)$. Удобнее в качестве «кандидатов в базисные матрицы» брать матрицы с возможно большим числом ...

Постройте еще один базис в $\boldsymbol{M}(m\times n)$.

Указание. См. утверждение 40.1, лемму 40.1.

Определение 41.4. ***Стандартным базисом в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(m\times n)$ называется система матриц:***
$B^0 = \langle E^1_1, E^1_2, \dots E^1_n, E^2_1, E^2_2, \dots E^2_n, \dots E^m_1, E^m_2, \dots E^m_n\rangle$.

Пример 41.2. За базис векторного пространства примера 34.1 $\langle R, +, \cdot\rangle$ можно взять 1. Укажите какой-либо другой базис в этом векторном пространстве.

Пример 41.3. В векторном пространстве многочленов от одной переменной степени не выше второй

$$\mathscr{P}^2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

базис $B^0 = \langle 1, x, x^2\rangle$, т. е. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$.

Убедимся в выполнимости условий базиса В. 1 и В. 2.

1) В. 1: $\alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3 = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle$.

Заменим $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ на их выражения через степени x:

$$\alpha^1 1 + \alpha^2 x + \alpha^3 x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2,$$

отсюда $\langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\rangle \overset{?}{\neq} \langle 0, 0, 0\rangle$, т. е. $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$ — линейно независима.

2) В. 2: Любой многочлен f степени не выше второй, по определению: $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$, что означает разложимость f в линейную комбинацию $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$, т. е. выполнение и этого условия очевидно.

Определение 41.5. ***Стандартным базисом в векторном пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ многочленов степени не выше n*** *называется система векторов вида* $B^0 = \langle 1,\ x,\ x^2, \dots x^n \rangle$.

Задача 41.2.1. В $\mathscr{P}^2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ образует ли базис система векторов: $B' = \langle 1 + x,\ 1 - x,\ x^2 \rangle$?

Обозначим: $\vec{c}_1 = 1 + x$, $\vec{c}_2 = 1 - x$, $\vec{c}_3 = x^2$ и проверим выполнимость условий базиса для этой системы векторов.

1) В. 1: $\lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + \lambda_3\vec{c}_3 = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \langle \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \rangle = \langle 0,\ 0,\ 0 \rangle$.

Заменим $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ на их выражения через степени x, затем сгруппируем в выражении члены также по степеням x:

$$\lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 - x) + \lambda_3x^2 = 0,$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)\,1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\,x + \lambda_3x^2 = 0.$$

Отсюда $\langle \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \rangle \overset{?}{=} \langle 0,\ 0,\ 0 \rangle$, т. е. $\langle \vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3 \rangle$ — линейно ? не ? зависимая система.

2) В. 2: $\forall f \in \mathscr{P}^2[x] \overset{?}{\Rightarrow} f = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + \lambda_3\vec{c}_3$.

Аналогично заменим $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ на их выражения через степени x:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 - x) + \lambda_3x^2.$$
$$\Downarrow$$
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\,1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\,x + \lambda_3x^2.$$

Так как по определению многочлены равны при равенстве всех коэффициентов при соответствующих степенях x, то a_1, a_2 и a_3 — решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = a_1, \\ \qquad \lambda_3 = a_2. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $\langle \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \rangle = \langle ?,\ ?,\ a_2 \rangle$. Т. е.

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 = ?\,(1 + x) + ?\,(1 - x) + ?x^2.$$

Следовательно, условие В.2 тоже выполняется и система $B' = \langle 1 + x,\ 1 - x,\ x^2 \rangle$ является базисом в $\mathscr{P}^2[x]$ — пространстве полиномов степени не выше второй.

Предыдущие примеры и задачи показывают, что базис в векторном пространстве можно выбрать не единственным образом. Поэтому естественно задаться вопросами: каково возможное число векторов в одном базисе векторного пространства (множестве векторов) и как много базисов оно может иметь.

Предположим, что в некотором конечномерном векторном пространстве V имеется по крайней мере два базиса:

$$B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle \text{ и } B' = \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots \vec{e}'_k \rangle, \text{ причем } k \neq n.$$

По условию В.2′: $V = L(B) = L(B')$.

Согласно утверждению 40.1 $k \leqslant n$, так как B состоит из n векторов, а $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots \vec{e}'_k\} \subset V = L(B)$. Аналогично получим, что $n \leqslant k$, так как $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\} \subset V = L(B')$. Т. е. $k = n$.

Тем самым доказана теорема.

Теорема 41.1. *Все базисы конечномерного векторного пространства содержат одинаковое число векторов.*

Для конечной системы векторов имеет место аналогичное

Утверждение 41.1. *Всякая конечная система векторов, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис, все ее базисы состоят из одинакового числа векторов.*

Доказательство. Прежде всего приведем алгоритм отыскания базиса, который часто используется при выполнении практических задач.

1) Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$ — некоторая конечная система векторов векторного пространства V, содержащая по крайней мере один ненулевой вектор.

1. Если A — линейно независима, то ее векторы, взятые в определенном порядке, например: $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k \rangle$ и составляют базис A.

2. Если A — линейно зависима, то по свойству 38.3 хотя бы один из ее векторов есть линейная комбинация остальных векторов системы A, пусть это вектор $\vec{a}_{i_1}$.

3. Рассмотрим систему $A_1 = A \setminus \{\vec{a}_{i_1}\}$ и также решим вопрос о ее линейной зависимости. Если она линейно независима (В. 1), то A_1 и составляет базис A, поскольку п. 2 обеспечивает выполнимость условия В. 2 базиса.

4. Если система A_1 линейно зависима, то по свойству 38.3 найдется вектор — линейная комбинация ее остальных векторов, пусть это вектор $\vec{a}_{i_2}$.

5. Исключив его из A_1, получим $A_2 = A_1 \setminus \{\vec{a}_{i_2}\}$ и будем решать вопрос линейной зависимости этой системы, действуя аналогично п. п. 3 и 4.

6. Если A_2 линейно независима (В. 1), то она составляет ба-

зис A_1 и A, так как хотя по построению вектор $\vec{a}_{i_1}$ есть линейная комбинация векторов системы

$$A_1=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \dots \vec{a}_{i_1}, \dots \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_k\},$$

но вектор $\vec{a}_{i_2}$ в свою очередь — линейная комбинация векторов системы

$$A_2=A_1\backslash\{\vec{a}_{i_2}\}=A\backslash\{\vec{a}_{i_1},\ \vec{a}_{i_2}\}=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \dots \hat{\vec{a}}_{i_1}, \dots \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_k\}.$$

Обозначение: $\{a_1,\ a_2, \dots a_k\}\backslash\{a_{i_1},\ a_{i_2}\}\overset{\text{des}}{=}\{a_1,\ a_2, \dots \widehat{a}_{i_1}, \dots \widehat{a}_{i_2}, \dots a_k\}$.

Таким образом, в конечном счете, вектор $\vec{a}_{i_1}$ тоже разложим в линейную комбинацию векторов системы A_2. Это означает выполнимость условия В. 2 для всех векторов множества A.

7. Если A_2 линейно зависима, см. п. 4.

8. Таким образом, за конечное число шагов (не больше $k-1$) получим базис системы векторов A.

2) Пусть $B=\langle\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_{i_m}\rangle$ и $B'=\langle\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots \vec{a}_{j_n}\rangle$ — два базиса системы A. Тогда, очевидно, $\{\vec{a}_{i_1},\ \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_{i_m}\}\subset L\,(\vec{a}_{j_1},\ \vec{a}_{j_2}, \dots \vec{a}_{j_n})$ и $\{\vec{a}_{i_1},\ \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_{i_m}\}\subset L\,(\vec{a}_{j_1},\ \vec{a}_{j_2}, \dots \vec{a}_{j_n})$,

причем каждая из систем B и B' линейно независима, т. е. выполняются условия утверждения 40.1, согласно которому получим $m\leqslant n$ и $n\leqslant m$, а значит, $m=n$. ■

Эти теорема и утверждение позволяют ввести вполне корректное следующее понятие.

Определение 41.6. *Число векторов базиса* ***системы*** *векторов называется ее* ***рангом****.*

Ранг системы, состоящей только из нулевых векторов, принимается по определению равным 0.

Если система векторов — конечномерное векторное пространство, то ее ранг называют ***размерностью векторного пространства.***

Т. е. размерность векторного пространства это число векторов его любого базиса.

Если число векторов базиса векторного пространства V равно n, то его называют ***n-мерным****.*

Обозначение размерности векторного пространства: dim V (от английского “dimention” — размер, размерность), если векторное пространство имеет размерность n, для его обозначения используется обозначение: V^n. Термин «ранг» чаще употребим применительно к конечной системе векторов, а именно, для обозначения числа линейно независимых векторов такой системы: Rang V. (Слово ранг — немецкого происхождения: “rang” означает уровень, порядок).

Из определения ранга системы векторов вытекает следующее.

Замечание 41.1. Если $\vec{a} \in L(A)$ для некоторой системы векторов A, то $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A \cup \{\vec{a}\})$. ♦

Утверждение 41.2. *Всякая конечная система векторов конечномерного векторного пространства имеет ранг, не превышающий его размерности.*

Доказательство. Пусть $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\} \subset V$, и содержит хотя бы один ненулевой вектор. По определению ранга конечной системы базис A составляет его некоторая подсистема $A' = \{\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots \vec{a}_{i_m}\} \subset A$, и, значит, $\operatorname{Rang} A \leqslant k$. По условию В. 2′ для базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ векторного пространства $V = L(B)$. Тогда согласно утверждению 40.1, так как линейно независимая система $A' \subset L(B)$, то $\operatorname{Rang} A \leqslant n = \dim V$.

Если же $A = \{\vec{0}\} \subset V$, то по определению $\operatorname{Rang} A = 0 \leqslant \dim V$. ■

Следствие 41.1. *Если для некоторой системы векторов A векторное пространство $V = L(A)$, то* $\operatorname{Rang} A = \dim V$.

Теорема 41.2. *Векторное пространство V имеет размерность n тогда и только тогда, когда в V удовлетворяются условия:*

D. 1: *существует n линейно независимых векторов.*

D. 2: *любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.*

Замечание 41.2. Условия D. 1 и D. 2 иногда принимаются за определение размерности векторного пространства, и в так называемой ***аксиоматике Вейля аффинного пространства****, которая будет изучаться позднее, именно эти условия принято называть* ***аксиомами размерности векторного пространства.***

Задача 41.2.2. Докажите теорему 41.2.

Предстоит доказать два утверждения.

41.2(1). *Если векторное пространство V n-мерно, то имеют место условия* D. 1 *и* D. 2.

Доказательство. Если $\dim V = n$, то в V существует базис из n векторов: линейно независимая система векторов $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$, т. е. удовлетворяется условие D. 1.

Из условия В. 2 следует D. 2 (следствие 40.?). ♦

41.2(2). *Если имеют место условия* D. 1 *и* D. 2, *то выполнимы условия* В. 1 *и* В. 2 *базиса для некоторой системы из n векторов.*

Доказательство. Условие D. 1 обеспечивает существование в V системы из n линейно независимых векторов, что совпадает с условием В. 1.

По условию D. 2 в векторном пространстве V всякая система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n, \vec{x}\}$ линейно зависима. Отсюда следует, что всякий вектор $\vec{x} \in V$ представим в виде:

$$\vec{x} \overset{?}{=} x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n.$$

Это и означает выполнимость в этом случае второго условия базиса В. 2. ■ ♦

Утверждение 41.3. *Всякая упорядоченная система из n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства образует его базис.*

В доказательстве следует установить, что в n-мерном векторном пространстве V всякая линейно независимая (т. е. удовлетворяющая условию В. 1) система из n векторов удовлетворяет и второму условию базиса — В. 2.

Пусть система векторов $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n \rangle \subset V^n$ и линейно независима. В силу условия D. 2 теоремы 41.2 линейно зависима всякая система векторов вида: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n, \vec{x}\}$. Тогда найдется $\langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^n, \alpha \rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0 \rangle$ такой, что

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \dots + \alpha^n\vec{a}_n + \alpha\vec{x} = \vec{0}, \text{ причем } \alpha \overset{?}{\neq} 0.$$

(Если $\alpha = 0$, то $\langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^n, \alpha \rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, \dots 0 \rangle$). ♦

Из этого следует $\vec{x} \overset{?}{=} \beta^1\vec{a}_1 + \beta^2\vec{a}_2 + \dots + \beta^n\vec{a}_n$ для произвольного $\vec{x} \in V$ т. е. выполнимость условия В. 2. ■

Следствие 41.2. *Любую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства, не являющуюся его базисом, можно дополнить до базиса этого векторного пространства.*

Доказательство. Пусть V^n — векторное пространство, $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ — его базис и $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_k \}$ — некоторая система линейно независимых векторов, $k < n$.

1. Система, состоящая из $k+n$ векторов:

$$C' = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_k, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$$

имеет $\operatorname{Rang} C' = n$ и, значит, линейно зависима (почему? ♦).

2. Тогда в их нетривиальной линейной комбинации

$$\alpha^1\vec{c}_1 + \alpha^2\vec{c}_2 + \dots + \alpha^k\vec{c}_k + \alpha^{k+1}\vec{e}_1 + \dots + \alpha^{k+n}\vec{e}_n = \vec{0}, \qquad (41.c)$$

(где $\langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k, \alpha^{k+1}, \dots \alpha^{k+n} \rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0 \rangle$) хотя бы один из коэффициентов $\alpha^{k+i} \neq 0$ $(i \in \{1, 2, \dots n\})$. Так как из

$\langle \alpha^{k+1}, \alpha^{k+2}, \dots \alpha^{k+n}\rangle = \langle 0, 0, \dots 0\rangle$ немедленно следует

$$\alpha^1\vec{c}_1 + \alpha^2\vec{c}_2 + \dots + \alpha^k\vec{c}_k = \vec{0},$$

и значит, равенство нулю всех коэффициентов:

$$\langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k, \alpha^{k+1}, \alpha^{k+2}, \dots \alpha^{k+n}\rangle \overset{?}{=} \langle 0, 0, \dots 0\rangle.$$

Это противоречит линейной зависимости системы векторов C'.

3. Тогда вектор $\vec{e}_{k+i}$ при ненулевом коэффициенте α^{k+i} выражается из (41.c) в виде линейной комбинации остальных векторов системы C'. Исключим его из нее: $C'' = C' \setminus \{\vec{e}_{k+i}\}$. При этом $\operatorname{Rang} C'' \overset{?}{=} \operatorname{Rang} C' = n$.

4. Если C'' состоит из n векторов, то они составляют линейно независимую систему (почему? ◆) и согласно утверждению 41.2 образуют базис в V^n.

5. Если C'' содержит более n векторов, повторим применительно к этой системе процедуры п. п. 1—4. В конце концов, за конечное число шагов придем к линейно независимой системе из n векторов, упорядочив которую, получим базис в векторном пространстве V^n, первые k векторов которой есть $\langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_k\rangle$. ■

Несложно доказать вытекающее из этого утверждение.

Следствие 41.3. *Всякое подпространство V' конечномерного векторного пространства V^n конечномерно, причем, $\dim V' \leqslant \dim V^n$, а если $\dim V' = \dim V^n$, то $V' = V^n$.* ◆

Следствие 41.4. *Если векторное пространство $V^n = V' \oplus V''$, то существует его базис $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots \vec{e}_n\rangle$ такой, что $B' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k\rangle$ — базис подпространства V', а $B'' = \langle \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots \vec{e}_n\rangle$ — базис подпространства V''.*

Напоминание.

Определение 36.4. ***Суммой подпространств** V' **и** V'' **векторного пространства** V называется линейная оболочка множества $V' \cup V''$. Если $V' \cap V'' = \{\vec{0}\}$, то сумму подпространств называют **прямой**.*

Доказательство. В подпространстве V' выберем какой-либо базис: $B' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k\rangle$, согласно утверждению 41.3 дополним его до базиса векторного пространства V^n:

$$B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots \vec{e}_n\rangle.$$

Покажем, что $B'' = \langle \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots \vec{e}_n\rangle$ — базис подпространства V''.

Так как никакой из векторов $\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots \vec{e}_n\}$ не выражается линейно через векторы $B'=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k\rangle$ (почему? ♦), то $\{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots \vec{e}_n\}\subset V''$. Эта система векторов линейно независима (почему? ♦) — тем самым для нее выполняется аксиома В. 1 базиса.

Всякий вектор из $\vec{x}\in V''\subset V^n$ однозначно разложим в линейную комбинацию векторов базиса B:

$$\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^k\vec{e}_k+x^{k+1}\vec{e}_{k+1}+\dots+x^n\vec{e}_n=$$
$$=(x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^k\vec{e}_k)+(x^{k+1}\vec{e}_{k+1}+\dots+x^n\vec{e}_n).$$

Отсюда, в силу однозначности разложения произвольного вектора из V^n на слагаемые, принадлежащие V' и V'' (утверждение 36.6), следует, что

$$x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^k\vec{e}_k\overset{?}{=}\vec{0}.$$

Откуда $\langle x^1, x^2, \dots x^k\rangle\overset{?}{=}\langle 0, 0, \dots 0\rangle$ и

$$\vec{x}=x^{k+1}\vec{e}_{k+1}+x^{k+2}\vec{e}_{k+2}+\dots+x^{k+n}\vec{e}_n.$$

Следовательно любой вектор $\vec{x}\in V''$ разложим в линейную комбинацию векторов B'' — выполнено условие В. 2 базиса. ■

Следствие 41.5. *Если конечномерное векторное пространство $V=V'\oplus V''$, то* $\dim V=\dim V'+\dim V''$.

Следствие 41.6. *Если $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$ — базис векторного пространства V^n, то оно представимо в виде:*

$$V^n=L(\vec{e}_1)\oplus L(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots \vec{e}_n).$$

Можно доказать, что имеет место и такое утверждение.

Утверждение 41.4. *Конечномерное векторное пространство $V=V'\oplus V''$, если $V'\cap V''=\{\vec{0}\}$ и* $\dim V=\dim V'+\dim V''$.

Следствие 41.7. *Если $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_i, \dots \vec{e}_j, \dots \vec{e}_n\rangle$-базис векторного пространства V^n, то его базисами являются и системы векторов: $B'=\langle\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots \vec{e}\,'_i, \dots \vec{e}\,'_n\rangle$, $B''=\langle\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \dots \vec{e}\,''_i, \dots \vec{e}\,''_n\rangle$ и $B^*=\langle\vec{e}^{\,*}_1, \vec{e}^{\,*}_2, \dots \vec{e}^{\,*}_i, \dots \vec{e}^{\,*}_n\rangle$, такие, что при $\lambda\neq 0$, $\{i, j\}\subset\{1, 2, \dots n\}$* и $s=1, 2, \dots n$

$$\vec{e}\,'_s=\left\{\begin{array}{ll}\vec{e}_s & \text{при } s\neq j\\ \lambda\vec{e}_j & \text{при } s=j\end{array}\right\}\quad \vec{e}\,''_s=\left\{\begin{array}{ll}\vec{e}_s & \text{при } s\neq i\\ \vec{e}_i+\vec{e}_j & \text{при } s=i\end{array}\right\}$$

$$\vec{e}^{\,*}_s=\left\{\begin{array}{ll}\vec{e}_s & \text{при } s\neq i\\ \vec{e}_i+\lambda\vec{e}_j & \text{при } s=i\end{array}\right\}.$$

Согласно предыдущему следствию для доказательства достаточно показать линейную независимость систем B', B'' и B^*, что обеспечивает свойство 40.7 линейно независимых систем векторов. ■

Следствие 41.8. *Если системы векторов $A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ и $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n\}$ таковы, что*

$$\vec{b}_i=\left\{\begin{array}{ll} \vec{a}_i & \text{при } i\neq k \\ \vec{a}_k+\vec{a}_j & \text{при } i=k \end{array}\right\},$$

то $\dim L(A)=\dim L(B)$.

Доказательство. Согласно утверждению 36.8 $L(A)=L(B)$, тогда с очевидностью $\dim L(A)=\dim L(B)$. ■

Пример 41.4. Если $A=\|A^i\|\in \boldsymbol{M}(m\times n)$ и ступенчатого вида, то система всех ее ненулевых строк $\langle A^1, A^2, \dots A^r\rangle$ образует в векторном подпространстве $L(A^1, A^2, \dots A^m)\subset \boldsymbol{M}(1\times n)$ базис и

$$\operatorname{Rang}\{A^1, A^2, \dots A^m\}=r=\dim L(A^1, A^2, \dots A^m).$$

Напоминание.

Определение 17.6. ***Матрица** называется **ступенчатой**, если во всех ее строках нижние индексы первых (слева) ненулевых элементов $a^i_{j_i}$ возрастают:* $j_1<j_2<\dots<j_n$.

Условие В. 2′ для базиса выполняется по самому определению линейной оболочки.

Условие В. 1 требует линейной независимости системы векторов-строк: $\{A^i\}_1^r\subset \boldsymbol{M}(1\times n)$. По определению ступенчатой матрицы 17.6.

$$A^i=\langle 0, 0, \dots a^i_{j_i}, a^i_{j_i+1}, \dots a^i_n\rangle \mid j_1<j_2<\dots<j_n,$$

где $a^i_{j_i}$ — первый (слева) ненулевой элемент i-ой строки.

Чтобы установить линейную независимость системы ненулевых строк ступенчатой матрицы, приравняем их линейную комбинацию к нулевому элементу векторного пространства $\boldsymbol{M}(1\times n)$ — нулевой строке:

$$\alpha_1A^1+\alpha_2A^2+\dots+\alpha_rA^r=0. \tag{41.A}$$

Отсюда имеем систему уравнений $\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i a^i_{j_s}=0$, где $s=1, 2, \dots r$ и $\alpha_i=0$ для всех $i\in\{1, 2, \dots r\}$.

Подробнее: равенство 0 соответствующих элементов линейной комбинации (41.A) дает систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}
\alpha_1 a^1_{j_1} = 0, & \xRightarrow{?} \quad \alpha_1 = 0,\\
\alpha_1 a^1_{j_2} + \alpha_2 a^2_{j_2} = 0, & \xRightarrow{?} \quad \alpha_2 = 0,\\
\alpha_1 a^1_{j_3} + \alpha_2 a^2_{j_3} + \alpha_3 a^3_{j_3} = 0, & \xRightarrow{?} \quad \alpha_3 = 0.\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
\alpha_1 a^1_{j_r} + \alpha_2 a^2_{j_r} + \alpha_3 a^3_{j_r} + \dots + \alpha_{r-1} a^{r-1}_{j_r} + \alpha_r a^r_{j_r} = 0 & \xRightarrow{?} \quad \alpha_r = 0.
\end{cases}$$

Это означает, что (41.A) имеет место только при всех $\alpha_i = 0$, т. е. линейную независимость системы $\{A^i\}_1^r$, выполнимость условия В. 1, а в конечном счете — что множество всех ненулевых строк $\langle A^1, A^2, \dots A^r\rangle$ ступенчатой матрицы A образует базис в векторном пространстве $L(A^1, A^2, \dots A^m)$ и системе векторов $\{A^1, A^2, \dots A^m\}$ и, значит,

$$\operatorname{Rang}\{A^1, A^2, \dots A^m\} = r = \dim L(A^1, A^2, \dots A^m). \qquad \blacksquare$$

Пример 41.5. В векторном пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ — всех многочленов степени не выше n базис образуют одночлены:

$$B^0 = \langle 1, x, x^2, \dots x^n\rangle.$$

А в векторном пространстве $\mathscr{P}[x]$ всех многочленов от одной переменной нет базиса в смысле определения 41.1. Действительно, какое бы конечное множество многочленов ни взять, их линейными комбинациями нельзя получить многочлены сколь угодно высоких степеней. ♦

Задание 41.1. Какая система векторов образует базис в векторном пространстве всех свободных векторов $\mathscr{V}$?

Приведите примеры. ♦

Указание. См. § 39, теорема 39.2, свойство 40.3.

Таким образом, векторное пространство всех свободных векторов трехмерно, его в дальнейшем обозначаем $\mathscr{V}^3$.

Какая система векторов образует базис в векторном пространстве всех компланарных свободных векторов? Всех свободных векторов, коллинеарных ненулевому вектору? Приведите примеры.

Указание. См. § 39, определение 39.1, следствие 39.1, свойство 40.2.

Таким образом, векторное пространство всех компланарных свободных векторов двумерно, его в дальнейшем обозначаем $\mathscr{V}^2$, а одномерное векторное пространство свободных векторов, коллинеарных ненулевому свободному вектору $\vec{a}$ — $\mathscr{V}^1 = L(\vec{a})$.

Определение 41.7. *Одномерное векторное пространство свободных векторов $\mathscr{V}^1$ называется* ***векторной прямой*** *(свободных векторов), $\mathscr{V}^2$ —* ***векторной плоскостью,*** *$\mathscr{V}^3$ —* ***пространством свободных векторов.***

§ 42′. ВЕКТОРНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ

Пусть дана система m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = b^m. \end{cases} \qquad (42.(\mathrm{A}|B))$$

Как мы знаем (§ 22), она может быть записана в матричной форме, так $(42.(A|B))$ соответствует:

$$A\cdot X = B, \qquad (42.(A|B)')$$

где $X = \|x^i\| \in \boldsymbol{M}(n\times 1)$, $B = \|b^i\| \in \boldsymbol{M}(m\times 1)$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \ldots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \ldots a_n^2 \\ . & & \ldots . \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m \ldots a_n^m \end{pmatrix} = \|a_j^i\| = \|A^i\| = \|A_j\| \in \boldsymbol{M}(m\times n).$$

Напомним, что матрица A называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots a_n^2 & b^2 \\ & & \ldots & & . \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \ldots a_n^m & b^m \end{array}\right)$$

ее *расширенной матрицей*.

Систему линейных уравнений можно записать в другой форме:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} x^2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} x^n = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \qquad (42.(A|B)'')$$

так как легко видеть, что домножив эти матрицы-столбцы на соответствующие коэффициенты: x^1, x^2, ... x^n и сложив их, получим исходную систему уравнений $(42.(\mathrm{A}|B))$. ◆

Заметим, что каждый из n столбцов $A_j = \|a_j^i\|$ матрицы A и столбец свободных членов представляют собой векторы m-мерного векторного пространства, т. е. $(42.(A|B)')$ по существу есть векторное уравнение:

$$x^1\vec{\boldsymbol{A}}_1 + x^2\vec{\boldsymbol{A}}_2 + \ldots + x^n\vec{\boldsymbol{A}}_n = \vec{\boldsymbol{B}}, \qquad (42.(\vec{A}\,|\,\vec{B}))$$

которое и называется ***векторной формой системы линейных уравнений.*** Здесь $\{A_1, A_2, \dots A_n, B\} \subset \boldsymbol{M}(m \times 1)$. Причем неизвестные: $x^1, x^2, \dots x^n$ выступают в роли коэффициентов разложения вектора $\vec{\boldsymbol{B}}$ в линейную комбинацию векторов-столбцов $\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n\}$.

Совершенно очевидно, имеет система уравнений (42. $(A|B)$) решения (см. определение 22.1), т. е. кортеж чисел $\langle x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n \rangle$, удовлетворяющий системе, или нет, зависит от того, возможно ли разложение вектора $\vec{\boldsymbol{B}}$ в линейную комбинацию (42. $(\vec{\boldsymbol{A}} \mid \vec{\boldsymbol{B}})$) векторов: $\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n$. По определению линейной оболочки это имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{\boldsymbol{B}} \in L(\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n)$ и согласно замечанию 41.1

$$\operatorname{Rang}\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n, \vec{\boldsymbol{B}}\} = \operatorname{Rang}\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n\}.$$

Таким образом, установлено необходимое и достаточное условие, как говорят, ***совместности системы линейных уравнений.*** ■

Определение 42.1. ***Система уравнений*** *называется* ***совместной,*** *если она имеет решение, если же множество ее решений пусто (система не имеет решений), то она называется* ***несовместной.***

Утверждение 42.1. *Система линейных уравнений с основной|расширенной матрицей $A|B$ совместна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Rang}\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n, \vec{\boldsymbol{B}}\} = \operatorname{Rang}\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{A}}_n\}$.

Это утверждение позволяет определять, совместна или нет система линейных уравнений, не вычисляя самих ее решений, что очень важно, поскольку, если при решении системы уравнений вычислениями той или иной степени искусности не удается получить ее решение, всегда остается сомнение в правильности проделанных вычислений.

Естественно, не всякая система линейных уравнений совместна, так, очевидно, система

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = 1, \\ x^1 + x^2 = -1 \end{cases}$$

не имеет решений. В простейшем случае, вроде этого, совместность или несовместность системы уравнений бывает очевидна. Однако, ответ на вопрос о совместности более сложных систем уравнений получить столь легко и быстро не удается (особенно при большом числе неизвестных или уравнений, что чаще всего встречается в задачах прикладного характера). Поэтому естественно было задаться целью найти какой-либо критерий, который бы позволил определять, имеет решения или нет та или иная система линейных уравнений. Причем так, чтобы он требовал меньшего объема вычислений, чем непосредственное решение системы. Такой признак и составляет доказанное выше утверждение 42.1, в несколько иной форме он был установлен в конце XIX века и носит ныне название теоремы Кронекера-Капелли. Немаловажную роль в нем играет понятие ранга системы линейных уравнений.

Определение 42.2. $\mathrm{Rang}\{\vec{A}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{A}_n\}$ называется ***столбцовым рангом матрицы***

$$A = \|a_j^i\| = \|A_j\| = \|A^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n),$$

$\mathrm{Rang}\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots \vec{A}^m\}$ — *ее* ***строчечным рангом***.

Обозначается столбцовый ранг матрицы A: $r_v(A)$ и, соответственно, $r_h(A)$ — ее строчечный ранг.

Индексы v и h — начальные буквы слов латинского происхождения: vertical (вертикаль) и horizontal (горизонталь), так как столбцовый и строчечный ранги матрицы некоторые авторы, в частности А. И. Кострикин [10], называют ***вертикальным*** (или ***рангом по столбцам***) и, соответственно, ***горизонтальным*** (или ***рангом по строкам***).

Позднее мы докажем, что для любой матрицы ее столбцовый и строчечный ранги равны, что позволит говорить просто о ***ранге матрицы***.

Ранг основной матрицы системы линейных уравнений (его называют также ***основным рангом***) будем обозначать r, а ранг расширенной — R, т. е. для системы (42.$(A|B)$):

$$\mathrm{Rang}(A) = r, \ \mathrm{Rang}(A|B) = R.$$

Определение 42.3. ***Рангом системы линейных уравнений*** *называется кортеж $\langle r, R\rangle$, где r — ранг ее основной матрицы, а R — расширенной.*

Эти дополнительные определения позволяют полученный выше признак совместности системы линейных уравнений переформулировать «в терминах рангов матриц».

Теорема Кронекера — Капелли 42.1. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее расширенной матрицы $A|B$ равен ее основному рангу.*

Т.е. $R = r$.

Пример 42.1. Определим, имеет ли решения система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x^1+\ x^2+\ \ x^3+\ \ x^4+\ \ x^5=1, \\ x^1+\ x^2+\ 3x^3+\ 4x^4+\ 5x^5=2, \\ 2x^1+\ x^2+10x^3+\ 2x^4+\ 7x^5=3, \\ 5x^1+5x^2+\ 9x^3+11x^4+13x^5=7. \end{cases} \qquad (42.x)$$

Ее основная|расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right).$$

Найдем ранг этой системы, например, приводя ее матрицы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right) \overset{\substack{(2)-\ (1)\\(3)-2(1)\\(4)-5(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right) \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim}$$

$$\overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right) \overset{(4)-3(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Откуда $\langle r, R\rangle = \underline{\langle ?,\ ?\rangle}$, что согласно теореме Кронекера — Капелли означает $\overline{\text{? не ?}}$ совместность этой системы уравнений.

Ответ на вопрос — имеет ли решения система уравнений (42.x) получен с вычислениями существенно меньшего объема, чем это потребовалось бы для непосредственного нахождения ее решения.

Задача 42.1.1. Определите с помощью теоремы Кронекера — Капелли, имеет ли решения система уравнений:

$$\begin{cases} x^1-\ x^2-\ \ x^3+\ x^4=\ 4, \\ x^1+\ x^2+\ 3x^3+2x^4=\ 8, \\ 2x^1-4x^2-\ 6x^3+\ x^4=\ 4, \\ 2x^1+4x^2+10x^3+5x^4=20. \end{cases}$$

Ее основная|расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 20 \end{array}\right).$$

Найдем ранг этой системы, приводя ее матрицы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim ?$$

Откуда $\langle r, R\rangle = \langle ?, ?\rangle$, следовательно, система уравнений ? не ? совместна.

Из теоремы Кронекера — Капелли, в частности, следует, что ***линейная однородная система уравнений***, т. е. система вида:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = 0 \end{cases} \qquad (42.(A\,|\,O))$$

всегда имеет решение (нулевое), что согласуется с теоремой Кронекера — Капелли, так как

$$\operatorname{Rang}\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_n, \vec{0}\} = \operatorname{Rang}\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_n\}.$$

З а м е ч а н и е 42.1. В силу вышесказанного под рангом линейной однородной системы уравнений часто понимается общее значение $r = R$, а не кортеж $\langle r, R\rangle$.

А имеет такая система уравнений единственное решение или более одного, находится в зависимости от того, линейно зависимы или нет, например, столбцы матрицы A, т. е. имеются ли их линейные комбинации, равные нулевому вектору, но отличные от тривиальной:

$$0\vec{A}_1 + 0\vec{A}_2 + \ldots + 0\vec{A}_n = \vec{0}.$$

Из этого вытекает, что если $r = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_n\} < n$, то система уравнений $(42.(A\,|\,O))$ имеет бесконечно много решений, поскольку условие, что ранг конечной системы векторов меньше их количества, означает, что среди них есть линейно зависимые, и значит, ненулевой кортеж коэффициентов $\langle x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n\rangle$ таких, что

$$x_0^1\vec{A}_1 + x_0^2\vec{A}_2 + \ldots + x_0^n\vec{A}_n = \vec{0}. \qquad (42.(A\,|\,O)'')$$

Тогда очевидно, что этому векторному уравнению наряду с ненулевым кортежем $\langle x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n\rangle$ удовлетворяет при любом

$\lambda \in \mathbf{R}$ и кортеж $\langle \lambda x_0^1, \lambda x_0^2, \dots \lambda x_0^n \rangle$. Что и доказывает следующее.

Утверждение 42.2. *Линейная однородная система всегда совместна и имеет единственное (нулевое) решение при ее основном ранге, равном числу переменных в системе и бесконечно много решений, если он меньше числа переменных.*

Следствие 42.1. *Линейная однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее ранг меньше числа переменных системы.*

Очевидно, что кортежи $\langle x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n \rangle$ и $\langle \lambda x_0^1, \lambda x_0^2, \dots \lambda x_0^n \rangle$ определяют хотя и разные, но коллинеарные решения, если рассматривать их как векторы координатного пространства R^n. Вполне естественно теперь задаться вопросом о существовании «неколлинеарных решений» системы линейных однородных уравнений или, что, по существу, то же самое, какова размерность пространства ее решений S_A.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> На долю человеческого разума в одном из видов его познания выпала странная судьба: его осаждают вопросы, от которых он не может уклониться, так как они навязаны ему его собственной природой; но в то же время он не может ответить на них, так как они превосходят возможности человеческого разума.
>
> *И. Кант.* «Критика чистого разума»

Можно с уверенностью сказать, что до середины XIX в. мир математики был трехмерным, хотя, казалось бы, после введения Декартом в первой половине XVII в. координатного метода (его «Геометрия» была опубликована в 1637 г.), как мощного и универсального аппарата геометрических исследований, до перехода к изучению многомерных пространств оставался совсем небольшой шаг: вместо двух или трех координат поставить в соответствие «точке» хотя бы четыре числа.

Идею многомерности пространства высказывал еще в 1746 г. немецкий философ И. Кант (Kant Immanuel, 1724—1804), преподававший математику и физику в Кенигсбергском университете. Видимо, Даламбер впервые, в 1764 г., предложил использовать в качестве четвертой координаты время, предвосхитив тем самым пространство-время Минковского современной теории относительности. Однако, эти его работы, как и аналогичные идеи в исследованиях Лагранжа и Коши по механике, не получили того развития, которое смогло бы привести к n-мерным пространствам, хотя идеи многомерности пространства можно найти также и у великого Гаусса.

Препятствием, возможно, было само естественноиспытательное происхождение науки и математики в частности. Абстрагируясь от действительности, она проводила собственные исследования, которые все же в значительной мере имели эмпирические приложения или продолжения. Но, казалось бы, о каком прикладном значении, например, четырехмерного куба может идти речь, когда наш жизненный опыт просто не позволяет его представить? Это отразилось и в терминологии того, да и нынешнего времени: если a^2 — квадрат числа, a^3 — его куб, то $a^4=(a^2)^2$ — его биквадрат, a^6 — кубоквадрат и т. д. С точки зрения здравого смысла подобные многомерные геометрические конструкции казались бессмыслицей, а возражения некоторых философов против самой идеи многомерного пространства имели часто откровенно примитивный теистический характер.

Между тем с накоплением опыта в аналитической геометрии переход к n-мерным пространствам все же становился неизбежностью, поскольку эффективность методов Декарта стала вытеснять конструктивные методы, заменяя пространственные построения исследованиями их «аналитических эквивалентов», т. е. уравнений, описывающих поверхности, плоскости, кривые и т. п. При этом алгебраические соотношения, имеющие интерпретацию для двух-трех переменных, естественно все же стали обобщаться для произвольного их числа. Ограничивать себя представлениями пространства трех измерений становилось уже просто неудобно. На рубеже XVIII и XIX веков начали проявляться основные понятия и терминология многомерных пространств. А к середине XIX в. их язык приняли многие математики, хотя воспринимали его скорее как некоторую условность, которая была удобна тем, что позволяла кратко и точно выражать алгебраические теоремы об уравнениях с произвольным числом переменных и особенно — общие теоремы линейной алгебры. Но собственно абстрактные многомерные пространства пока не становились объектом самостоятельных изучений, поскольку к этому отсутствовали сколько-нибудь серьезные стимулы и, главное — интуитивное представление о пространствах более трех измерений. Математика экономна и рациональна, и только содержательность какого-либо специфически n-мерного (с $n>3$) понятия могла привлечь внимание к исследованиям многомерных пространств.

Таким результатом и стала геометрическая интерпретация кватернионов У. Р. Гамильтона, как объектов четырехмерного векторного пространства, поскольку она содержательно могла быть реализована только в таком пространстве. Дальнейшие работы в этой области: Г. Грассмана “Lineale Ausdenhnungslehere" («Учение о протяженности»), А. Кэли «Chapters on analytical geometry of n dimensions" («Главы из n-мерной аналитической геометрии»), опубликованные в 1844 г., а позднее немецких математиков А. Мебиуса и Ю. Плюкера (Plüker Julius, 1801—1868) подтвердили, сколь интересна и многообразна открытая область математики. Тем самым в математике был создан еще один «прецедент» изучения структуры, созданной умозрительно, без непосредственной аналогии в физическом мире. Создание и накопление результатов исследований таких абстрактных конструкций в конечном счете развило аксиоматический метод в науке, наполнив его новым содержанием. Интересно, что исследования ученых в самых абстрактных разделах математики (теории представлений, теории операторов, топологии и т. п.) находят приложения в различных областях современной физики и квантовой механики, космогонии и астрономии, а математические модели многих процессов в физике, механике, химии, экономике часто позволяют предвосхитить их эмпирические результаты.

Отметим еще тот факт, что именно Грассман ввел понятие и первым исследовал линейно независимые системы векторов, ему же принадлежат понятия базиса и размерности векторного пространства, основные соотношения для размерностей сумм и подпространств векторного пространства, в частности:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Так начиналась эра многомерной геометрии и алгебры. Но до появления в этой области великого Бернгарда Римана (Rieman Georg Friedrich Bernhard, 1826—1866), идеи которого по существу изменили сам предмет геометрии, оставалось еще почти 10 лет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979,— 560 с.
2. *Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П.* Геометрия, ч. 1.— М.: Просвещение, 1974.— 352 с.
3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия, ч. 1.— М.: Просвещение, 1986.— 336 с.
4. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
5. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—512 с.
6. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.— 296 с.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 416 с.

9. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 400 с.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.
11. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.— 272 с.
12. *Яунземс А.* Математика для экономических наук. Общий курс.— Рига.: Латвийский университет, 1993.—841 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 37°. Коллинеарные векторы

[2] — стр. 15—16.
[3] — стр. 16—17.
[5] — стр. 18—21.
[6] — стр. 6.
[8] — стр. 30—31.

§ 38. Линейно зависимая система векторов

[1] — стр. 247.
[2] — стр. 19—20.
[3] — стр. 18—19.
[4] — стр. 13—14.
[5] — стр. 332—333.
[6] — стр. 199—200.
[7] — стр. 48—51.
[8] — стр. 23—29.
[10] — стр. 67—68.
[11] — стр. 10.

§ 39°. Компланарные векторы

[2] — стр. 21—22.
[3] — стр. 20—21.
[5] — стр. 18—21.
[6] — стр. 6.
[8] — стр. 31—32.

§ 40. Линейно независимая система векторов

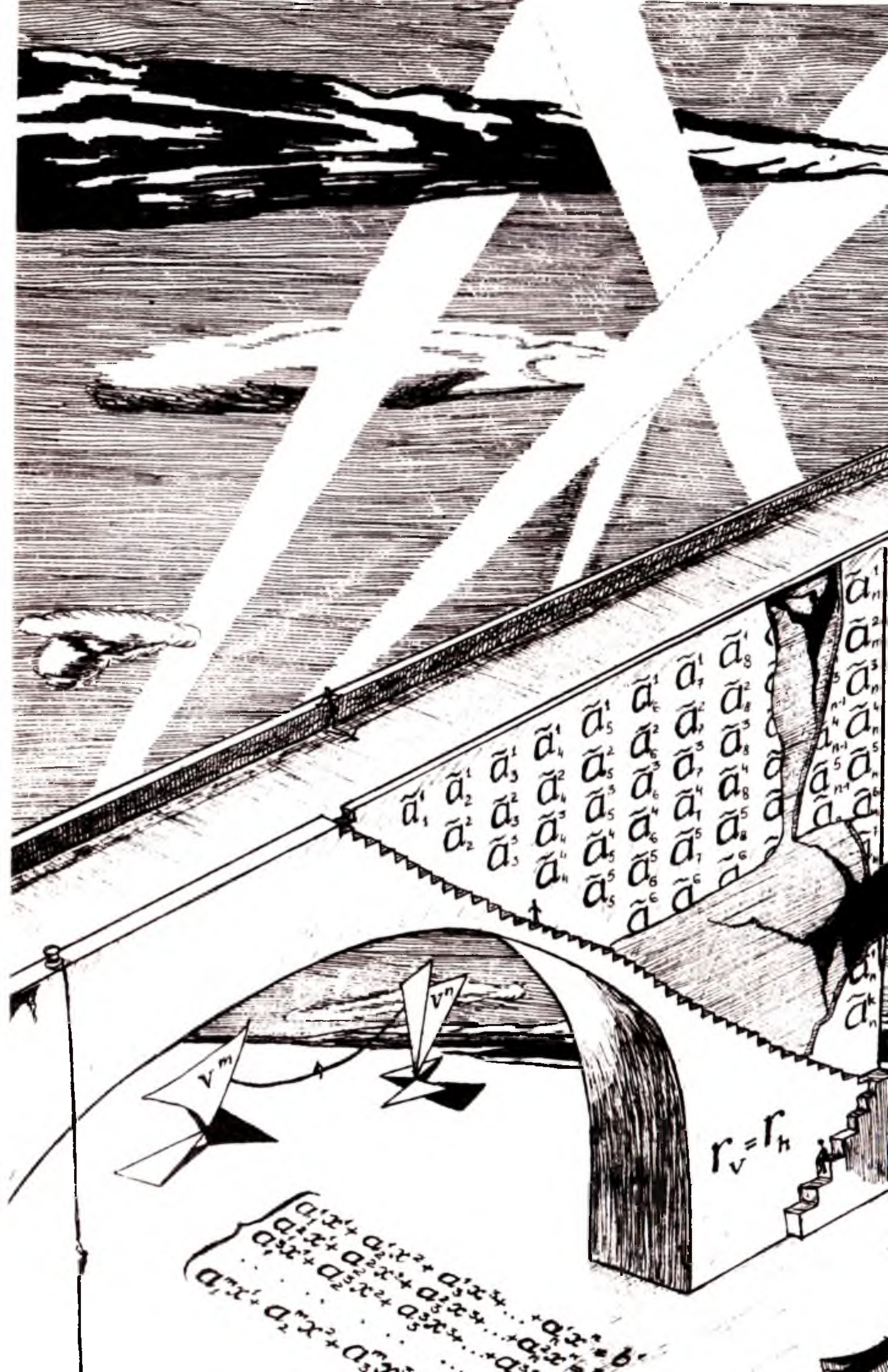
[1] — стр. 247.
[2] — стр. 19—20.
[3] — стр. 18—21.
[4] — стр. 13, 14, 18—24, 297—298.
[5] — стр. 332—333.
[6] — стр. 199—200.
[8] — стр. 24—27.
[10] — стр. 67—68.
[11] — стр. 10—15.

§ 41. Базис и размерность векторного пространства

[1] — стр. 261—263.
[2] — стр. 23.
[3] — стр. 21—23.
[4] — стр. 16—17, 298—301.
[5] — стр. 335.
[6] — стр. 200—203.
[7] — стр. 50—53.
[8] — стр. 33—36.
[9] — стр. 12—16.
[10] — стр. 66—71.
[11] — стр. 11—16.

§ 42′. Векторная форма системы линейных уравнений Теорема Кронекера — Капелли

[1] — стр. 22—24.
[2] — стр. 192—193.
[4] — стр. 348—352.
[5] — стр. 372—374.
[6] — стр. 172—174.
[7] — стр. 70—71.
[8] — стр. 76—77.
[12] — стр. 456—459.



V^m
V^n
$r_v = r_h$

Лекция 10

РАНГ МАТРИЦЫ
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАНГ МАТРИЦЫ

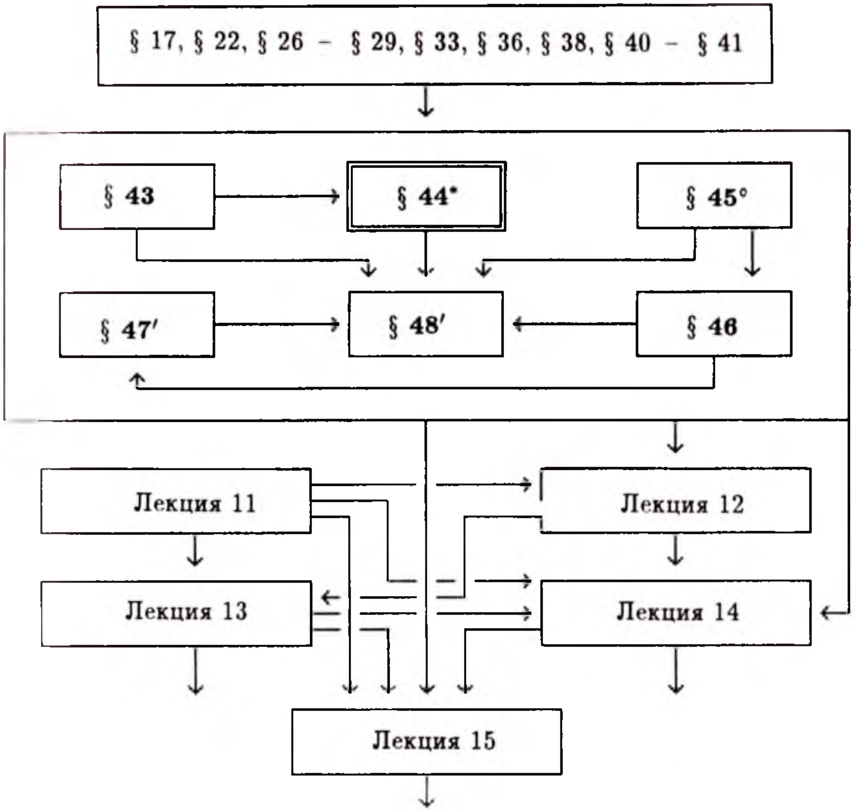
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 43. Ранг матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
§ 44*. Ранг матрицы.
§ 45°. Эквивалентные системы линейных уравнений.
§ 46. Общее решение системы линейных однородных уравнений.
§ 47′. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений.
§ 48′. Метод последовательного исключения переменных.

Основные понятия: элементарное преобразование матрицы, ранг матрицы, элементарные преобразования системы уравнений, равносильные (эквивалентные) системы уравнений, ранг системы линейных уравнений, свободные переменные, зависимые переменные, общее и частное решения системы уравнений.

Необходимые сведения: матрица, векторное пространство, линейная оболочка, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базис и размерность векторного пространства, определитель матрицы, свойства определителей, дополнительный минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы, теорема о разложении определителя, матрица ступенчатого вида, решение уравнения (системы уравнений).

Рекомендации: если пособие используется в качестве аудиторного учебного материала, то § 45° можно предложить студентам для самостоятельного изучения, а § 47′ и 48′ — для практических занятий или самостоятельного изучения.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).
Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).
Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).
Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).
Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).
Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).
Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).
Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).
Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).
Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).
Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств.
Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.
Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 43. РАНГ МАТРИЦЫ. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

В предыдущем параграфе отмечена важность новых понятий ранга матрицы и ранга системы линейных уравнений в вопросе существования решений такой системы. От ранга матрицы системы линейных однородных уравнений зависит число ее решений, точнее, размерность векторного пространства решений S_A (лекция 9, утверждение 36.2), которое конечномерно, как подпространство координатного n-мерного векторного пространства (следствие 41.?) $\mathbf{R}^n$, если система уравнений содержит n неизвестных. Естествен вопрос, какова размерность этого подпространства, как именно она зависит от системы линейных уравнений. Для продолжения исследований и ответа на поставленный вопрос прежде всего надо научиться находить ранг произвольной матрицы, например, вычисляя столбцовый и строчечный ранги, введенные выше (см. определение 42.2).

Если задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = \|a_j^i\| = \|A^i\| = \|A_j\| \in M\,(m \otimes n),$$

то каждый из ее n стобцов $A_j = \|a_j^i\|$ можно рассматривать, как вектор $\vec{A}_j$ m-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^m$, а каждую из ее m строк $A^i = \|a_j^i\|$ — как вектор $\vec{A}^i$ другого координатного пространства — $\mathbf{R}^n$. Тогда

$$r_v(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Rang}\,\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_n\}$$

и

$$r_h(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Rang}\,\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots \vec{A}^m\},$$

соответственно, ***столбцовый*** *и* ***строчечный ранги матрицы*** A.

Пример 43.1. Найдем строчечный ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для его определения надо найти число линейно независимых векторов системы $\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \vec{A}^3\}$. Постараемся выяснить, есть ли среди них векторы, разлагающиеся в линейную комбинацию остальных.

Можно заметить, что векторы-строки матрицы A таковы, что $\vec{A}^2 = ?\vec{A}^1 + ?\vec{A}^3$, а $\vec{A}^1 \nparallel \vec{A}^3$, что означает, что $\operatorname{Rang}\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \vec{A}^3\} = r_h(A) = ?$. ♦

В общем случае, чтобы найти строчечный ранг матрицы $\|A'\| \in M(m \times n)$, надо найти базис в $\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots \vec{A}^m\}$, рассматривая каждую из ее m строк, как вектор из $M(1 \times n)$. Число векторов этого базиса и есть $\operatorname{Rang}\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots \vec{A}^n\} = r_h(A)$.

Пример 43.2. Столбцовый ранг вычисляется подобно строчечному. Найдем столбцовый ранг той же матрицы и убедимся в их равенстве.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, например, что $\vec{A}_2 \nparallel \vec{A}_3$, а $\vec{A}_1 = ?\vec{A}_2 + ?\vec{A}_3$. Откуда $\operatorname{Rang}\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\} = r_v(A) = ?$. ♦

Сравнивая результаты этих примеров, видим, что $r_h(A) = r_v(A) = 2$.

Вычисления столбцового и строчечного рангов произвольной матрицы $A \in M(m \times n)$ порядка выше второго в общем случае довольно объемны: если не удается каким-либо образом достаточно просто найти, сколько среди ее строк (стобцов) линейно независимых, то задача определения ранга матрицы сводится к решению систем линейных уравнений.

Совершенно просто находится строчечный ранг ступенчатой матрицы (см. пример 41.4): он равен числу ее ненулевых строк. Поэтому существенно упрощает решение проблемы определения ранга матрицы ***метод приведения ее к ступенчатому виду***. Его основная идея заключается в том, чтобы преобразуя произвольную матрицу специальными операциями, сохраняющими ранги, свести ее к матрице более простого — ступенчатого вида.

Напомним.

Определение 28.1. *Замена в матрице строки (столбца) на ее произведение на ненулевой скаляр λ называется **элементарным преобразованием матрицы первого рода**, а замена ее строки (столбца) на ее сумму с другой ее строкой (столбцом), домноженной на некоторый скаляр, называется **элементарным преобразованием матрицы второго рода**. Преобразование матрицы, полученное последовательным выполнением некоторого числа элементарных преобразований первого и второго рода строк (столбцов), называют **элементарными**.*

Было доказано (см. § 28), что, в частности, к элементарным преобразованиям матрицы относится перемена местами двух строк (столбцов) матрицы.

Утверждение 43.1. *При элементарных преобразованиях матриц сохраняются строчечный и столбцовый ранги.*

Для доказательства этого отметим, что согласно следствию

41.1 для произвольной матрицы

$$A = \|a_j^i\| = \|A_j\| = \|A^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$$

$$r_h(A) \overset{?}{=} \dim L(\vec{A}^1, \vec{A}^2, \vec{A}^m), \qquad \blacklozenge$$

а

$$r_v(A) \overset{?}{=} \dim L(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_n). \qquad \blacklozenge$$

Это позволит использовать некоторые результаты, доказанные ранее для векторных подпространств специального вида — линейных оболочек, в частности, линейных оболочек конечных систем векторов.

Доказательство утверждения 43.1 проведем для элементарных преобразований, **изменяющих строки матрицы**, для столбцов это делается аналогично (или сводится транспонированием к «случаю строк»).

Пусть $A = \|A^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, матрицу, полученную элементарными преобразованиями строк матрицы A, будем обозначать $A' = \|A'^i\| = \|A'_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$.

1. Определим, каковы линейные оболочки векторов-строк матриц при таких элементарных преобразованиях:

1) Очевидно, для элементарных преобразований первого рода при $\lambda \neq 0$:

$$L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \lambda\vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m) \overset{\text{утв. 36.?}}{=\!=\!=} L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m).$$

2) Для элементарных преобразований второго рода:

$$L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^j + \lambda\vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m) \overset{\text{п. 1)}}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{п. 1)}}{=\!=\!=} L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots -\lambda\vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^j + \lambda\vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m) \overset{\text{утв. 36.?}}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{утв. 36.?}}{=\!=\!=} L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots -\lambda\vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^j, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m) \overset{\text{п. 1)}}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{п. 1)}}{=\!=\!=} L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^i, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^j, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m).$$

3) Поскольку всякое элементарное преобразование, изменяющее строки матрицы, сводится к последовательному выполнению некоторого числа элементарных преобразований первого и (или) второго рода, то такое преобразование матрицы в силу предыдущего также сохраняет линейную оболочку ее строк $L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m)$, а следовательно, и строчечный ранг $r_h(A)$.

2. Пусть матрица $A = \|A_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ имеет столбцовый ранг, равный r:

$$r_v(A) = \operatorname{Rang}\{\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}_n\} = r.$$

Т. е. в матрице A существует r линейно независимых векторов-столбцов, пусть это $\{\vec{\boldsymbol{A}}_{i_1}, \vec{\boldsymbol{A}}_{i_2}, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}_{i_r}\}$, а ее любые $r+1$ векторы-столбцы линейно зависимы (теорема 41.2).

1) Первое из этих условий означает, что из равенства

$$\alpha^1 \vec{A}_{i_1} + \alpha^2 \vec{A}_{i_2} + \ldots + \alpha^r \vec{A}_{i_r} = \vec{0},$$

т. е.

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} a^1_{i_1} \\ a^2_{i_1} \\ \vdots \\ a^m_{i_1} \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} a^1_{i_2} \\ a^2_{i_2} \\ \vdots \\ a^m_{i_2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha^r \begin{pmatrix} a^1_{i_r} \\ a^2_{i_r} \\ \vdots \\ a^m_{i_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

следует, что $\langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^r \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$.

В матричной записи это условие эквивалентно тому, что уравнение

$$\begin{pmatrix} a^1_{i_1} & a^1_{i_2} & \ldots & a^1_{i_r} \\ a^2_{i_1} & a^2_{i_2} & \ldots & a^2_{i_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m_{i_1} & a^m_{i_2} & \ldots & a^m_{i_r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (43.a)$$

имеет единственное решение, причем оно — нулевое.

Обозначим матрицу, составленную из этих r линейно независимых столбцов матрицы A через $\bar{A} = \| A_{i_j} \| \in \boldsymbol{M}(m \times r)$, тогда предыдущее (векторное) уравнение запишется в матричной форме, как

$$\bar{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix} = O. \qquad (43.\bar{A})$$

Очевидно, что всякое элементарное преобразование, изменяющее строки матрицы A, влечет такое же элементарное преобразование матрицы $\bar{A}$. Обозначим матрицу, полученную в результате этого через $\bar{A}' = \| A'_{i_j} \| \in \boldsymbol{M}(m \times r)$. В силу лемм 30.1, 30.2 и замечания 30.1 элементарные преобразования матрицы (первого и второго рода), меняющие ее строки, равносильны умножению слева на нее элементарных (невырожденных) матриц вида $E + \lambda E^i_j$ с $\lambda \neq 0$ при $i \neq j$ и $\lambda \neq -1$ при $i = j$ (см. § 30), т. е.

$$\bar{A}' = (E + \lambda E^i_j) \cdot \bar{A}. \qquad (43.^{-})$$

Выяснение, является ли r столбцов $\{\vec{A}'_{i_1}, \vec{A}'_{i_2}, \ldots \vec{A}'_{i_r}\}$ матрицы $\bar{A}'$ линейно независимыми, сводится к решению относительно

$\langle \beta^1, \beta^2, \dots \beta^r \rangle$ векторного уравнения:

$$\beta^1 \vec{A}'_{i_1} + \beta^2 \vec{A}'_{i_2} + \dots + \beta^r \vec{A}'_{i_r} = \vec{0},$$

а оно, в свою очередь — к задаче: имеет ли ненулевые решения матричное уравнение

$$\tilde{A}' \cdot \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (43.\tilde{A}')$$

$$\Big\| \, (43.\tilde{\ })$$

$$((E + \lambda E_j^i) \cdot \tilde{A}) \cdot \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

так как $(E + \lambda E_j^i)$ обратима (почему? ◆), то

$$\Leftrightarrow \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^r \end{pmatrix} = (E + \lambda E_j^i)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow} \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad ◆$$

Следовательно, матричное уравнение $(43.\tilde{A}')$ имеет единственное решение и оно нулевое, что означает линейную независимость векторов-столбцов $\{\vec{A}'_{i_1}, \vec{A}'_{i_2}, \dots \vec{A}'_{i_r}\}$ матрицы $\tilde{A}'$ (тем самым удовлетворена аксиома базиса В.1).

2) Остается показать, что в $\{\vec{A}'_1, \vec{A}'_2, \dots \vec{A}'_m\}$ любая система из $r+1$ вектора (вектора-стобца матрицы A') линейно зависима.

Рассмотрим относительно неизвестных $\gamma^1, \gamma^2, \dots \gamma^r, \gamma^{r+1}$ векторное уравнение:

$$\gamma^1 \vec{A}'_{j_1} + \gamma^2 \vec{A}'_{j_2} + \dots + \gamma^r \vec{A}'_{j_r} + \gamma^{r+1} \vec{A}'_{j_{r+1}} = \vec{0},$$

где $\{\vec{A}'_{j_1}, \vec{A}'_{j_2}, \dots \vec{A}'_{j_r}, \vec{A}'_{j_{r+1}}\}$ — система, состоящая из $r+1$ произвольных векторов-столбцов матрицы A'. Наличие ненулевых решений у этого уравнения и будет означать линейную зависимость системы. Это уравнение имеет матричную форму:

$$\begin{pmatrix} a'^1_{i_1} & a'^1_{i_2} & \dots & a'^1_{i_r} & a'^1_{i_{r+1}} \\ a'^2_{i_1} & a'^2_{i_2} & \dots & a'^2_{i_r} & a'^2_{i_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'^m_{i_1} & a'^m_{i_2} & \dots & a'^m_{i_r} & a'^m_{i_{r+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^r \\ \gamma^{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (43.\gamma)$$

Обозначим его матрицу $\widehat{A}' = \|A'_{i_i}\| \in \boldsymbol{M}(m \times (r+1))$, где $\widehat{A} = \|A_{i_i}\|$ — матрица того же порядка, перестановкой строк которой получена матрица $\widehat{A}'$. Так как любое элементарное преобразование первого или второго рода матрицы A влечет такое же изменение строк $\widehat{A}$ и подобное $(43.\bar{\ })$ соотношение:

$$\widehat{A}' = (E + \lambda\, E^i_j) \cdot \widehat{A}, \qquad (43.\widehat{\ \ })$$

то с очевидностью следует, что аналогично $(43.\bar{A}')$ матричное уравнение $(43.\gamma)$ влечет:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{A}' \cdot \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^r \\ \gamma^{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & (43.\widehat{A}') \\ \Big\| \, (43.\widehat{\ \ }) & & & & \\ ((E + \lambda E^i_j) \cdot \widehat{A}) \cdot \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^r \\ \gamma^{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overset{?}{\Leftrightarrow} & \widehat{A} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^r \\ \gamma^{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. & & \end{array}$$

Последнее равносильно векторному уравнению:

$$\gamma^1 \vec{\boldsymbol{A}}_{i_1} + \gamma^2 \vec{\boldsymbol{A}}_{i_2} + \dots + \gamma^r \vec{\boldsymbol{A}}_{i_r} + \gamma^{r+1} \vec{\boldsymbol{A}}_{i_{r+1}} = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

А оно в силу линейной зависимости любых $r+1$ векторов-столбцов матрицы A имеет ненулевое решение $\langle \gamma^1_0, \gamma^2_0, \dots \gamma^r_0 \rangle$. Очевидно, что этот кортеж является решением и матричного уравнения $(43.\widehat{A}')$, и это означает, что

$$\gamma^1_0 \vec{\boldsymbol{A}}'_{i_1} + \gamma^2_0 \vec{\boldsymbol{A}}'_{i_2} + \dots + \gamma^r_0 \vec{\boldsymbol{A}}'_{i_r} + \gamma^{r+1}_0 \vec{\boldsymbol{A}}'_{i_{r+1}} = \vec{\boldsymbol{0}},$$

т. е. линейную зависимость системы из любых $r+1$ векторов-столбцов матрицы A', строки которой изменены элементарными преобразованиями первого или второго рода. По свойству 40.5 вектор $\vec{A}'_{j_{r+1}}$ разлагается в линейную комбинацию линейно независимых векторов $\{\vec{A}'_j\}^r_1$. Таким образом, для системы $\langle \vec{A}'_{i_1}, \vec{A}'_{i_2}, \dots \vec{A}'_{i_r} \rangle$ выполнены условия и аксиомы В.2 базиса. Следовательно,

$$\operatorname{Rang}\{\vec{A}'_1, \vec{A}'_2, \dots \vec{A}'_m\} = r = r_v(A).$$

3) Поскольку любое элементарное преобразование (опр. 28.1), изменяющее строки матрицы, сводится к последовательному выполнению некоторого числа элементарных преобразований первого и (или) второго рода, при каждом из которых сохраняется $r_v(A)$, то тем самым утверждение доказано. □

Это утверждение и позволяет определять ранг матрицы посредством довольно простых приемов, которые хорошо иллюстрируются следующим примером.

П р и м е р 43.3. Приведем к ступенчатому виду элементарными преобразованиями матрицу B и определим ее ранг:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-3(1)}{\sim}$$

$$\overset{(3)-3(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{[1]-2[2] \\ (3)\leftrightarrow(4)}}{\sim}$$

$$\overset{\substack{[1]-2[2] \\ (3)\leftrightarrow(4)}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1[1]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначение. Для записи элементарных преобразований матрицы используются: круглые скобки $\overset{(2)-2(1)}{\sim}$ — для действий со строками, и квадратные $\overset{[1]-2[2]}{\sim}$ — со столбцами, $(3)\leftrightarrow(4)$ — для перестановки строк.

Следовательно, $\operatorname{Rang} B = ?$ ◆

З а д а н и е 43.1. Приведите к ступенчатому виду матрицу примеров 43.1 и 43.2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что так как всякая невырожденная матрица представима в виде произведения элементарных матриц (утв. 30.1), а домножению матрицы на элементарную соответствует ее элементарное преобразование — домножение строки или столбца на ненулевой скаляр, или прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца) с некоторым множителем (леммы 30.1 и 30.2), то из предыдущего утверждения вытекает

Следствие 43.1. *Ранг матрицы не меняется при умножении ее на невырожденную матрицу:*

$$(\langle A,\ B,\ C\rangle \subset \boldsymbol{Gl}(m)\times \boldsymbol{M}(m\times n)\times \boldsymbol{Gl}(n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Rang} A\cdot B = \operatorname{Rang} B\cdot C = \operatorname{Rang} B.$$

§ 44*. РАНГ МАТРИЦЫ

Так как ранг матрицы — ее важнейшая характеристика, то, практически, с самого момента введения этого понятия в алгебре разрабатывались различные методы и способы его определения, которые позволили бы найти его, по возможности, проще: вычисление строчечных, столбцовых рангов, приведения к ступенчатому виду. Еще один — ***метод окаймляющих миноров***, основан на том, что ранг матрицы равен наибольшему порядку ее ненулевого минора. Это будет доказано ниже.

Объясним его на примере.

Пример 44.1. Вычислим методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$B=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 2&2&2&2&3\\ 3&3&3&3&4\\ 2&1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Определение 44.1. *Любой минор матрицы $A\in\boldsymbol{M}(m\times n)$, содержащий строки и столбцы минора M порядка r, называется* ***окаймляющим минором*** *M, если его порядок выше r.*

Очевидно, что матрица B имеет ненулевые миноры первого и, по крайней мере, второго порядка:

$$M^{12}_{45}=\begin{vmatrix} 1&1\\ 2&3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Максимальный порядок минора в матрице $B\in \mathcal{M}(4\times 5)$ равен 4. Следовательно, $2\leqslant \operatorname{Rang} B\leqslant 4$.

Посмотрим, найдется ли у этой матрицы ненулевой минор четвертого порядка, для этого из матрицы будем последовательно вычеркивать по одному столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?.$$

Значит, $2 \leqslant \operatorname{Rang} B \leqslant ?$, т. е. надо рассматривать миноры третьего порядка. Возьмем какой-либо минор, окаймляющий найденный нами ненулевой минор второго порядка (т. е. содержащий M_{45}^{12}), пополнив его элементами какой-либо строки и столбца матрицы B (или, что то же самое, вычеркнув в B какие-либо два столбца и строку), рассмотрим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Это означает, что $\operatorname{Rang} B = 3$.

Метод окаймляющих миноров позволяет найти ненулевой минор матрицы наибольшего порядка без полного перебора всех ее миноров. Такой способ вычисления ранга матрицы, несмотря на возможность сокращения числа перебираемых миноров, все же довольно трудоемок, особенно при «вычислениях вручную», но при определении ранга компьютерными методами используется часто, поскольку не дает так называемой «машинной погрешности». Метод окаймляющих миноров часто используется в теоретических исследованиях, с использованием его ниже будет доказано равенство строчечного и столбцового рангов матрицы: $r_h(A)=r_v(A)$.

Очевидно, что ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая, и равен единице тогда и только тогда, когда все ее строки (столбцы) пропорциональны. ◆

Теорема (о ранге) 44.1. *Строчечный и столбцовый ранги матрицы равны и равны наибольшему порядку ее ненулевого минора.*

Этот результат, можно сказать, является совершенно неожиданным, поскольку из него следует равенство размерностей $\dim L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}^m)=r_h(A)$ и $\dim L(\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}_n)=r_v(A)$ подпространств $L(\vec{\boldsymbol{A}}^1, \vec{\boldsymbol{A}}^2, \ldots\vec{\boldsymbol{A}}^m)$ и $L(\vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2, \ldots \vec{\boldsymbol{A}}_n)$ двух различных векторных пространств: $\boldsymbol{M}(1\times n)$ и, соответственно, $\boldsymbol{M}(m\times 1)$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма (о главном миноре) 44.1. *Если главный минор матрицы $A=\|a_j^i\|\in\boldsymbol{M}(m\times n)$ ненулевой и имеет порядок r, то первые r строк и r столбцов этой матрицы линейно независимы.*

Доказательство. Пусть

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \boxed{\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_r^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \cdots & a_r^r \end{matrix}} & & & & & \begin{matrix} a_{r+1}^1 \\ a_{r+1}^2 \\ \cdot \\ a_{r+1}^r \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \cdot \\ a_n^r \end{matrix} \\ a_1^{r+1} & a_2^{r+1} & a_3^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{array}\right),$$

$$\text{где } \det \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_r^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

1. Предположим линейную зависимость системы, состоящей из первых r векторов-столбцов:

$$\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots \vec{A}_r\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^r \\ \cdots \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^r \\ \cdots \\ a_2^{r+1} \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ \vdots \\ a_3^r \\ \cdots \\ a_3^{r+1} \\ \vdots \\ a_3^m \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} a_r^1 \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^r \\ \cdots \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{M}(m \times 1).$$

Тогда найдутся $\langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^r \rangle \neq \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$ такие, что

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^1 \vec{A}_1 & + & \alpha^2 \vec{A}_2 & + \ldots + & \alpha^r \vec{A}_r & = & \vec{0} \\ \| & & \| & & \| & & \| \end{array}$$

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^r \\ \cdots \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^r \\ \cdots \\ a_2^{r+1} \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \ldots + \alpha^r \begin{pmatrix} a_r^1 \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^r \\ \cdots \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого с очевидностью следует, что для «укороченных столбцов» при тех же значениях $\langle \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^r \rangle \neq \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^r \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^r \end{pmatrix} + \ldots + \alpha^r \begin{pmatrix} a_r^1 \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. столбцы главного минора M линейно зависимы, что по свойству 27.6 противоречит условию леммы — невырожденности матрицы минора M.

2. Доказательство линейной независимости системы векторов-строк $\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots \vec{A}^r\}$ аналогично. ■

Лемма 44.2 (об окаймлении минора). *Если главный минор δ матрицы $A = \|a_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ ненулевой и имеет порядок r, а все его окаймляющие миноры порядка $r+1$ равны нулю, то любой вектор-столбец $\vec{A}_k$ $(k \in \{1, 2, \ldots n\})$ матрицы A разложим в линейную комбинацию ее первых r столбцов, а* *любая из ее векторов-строк* $\vec{A}^s$ $(s \in \{1, 2, \dots m\})$ — *в линейную комбинацию ее первых r строк.*

Доказательство. Пусть $\delta = |a^i_j|$ — главный минор порядка r матрицы $A = \|A_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$.

1. Из столбцов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_r, \vec{A}_k\}$ матрицы A для фиксированного $k \in \{1, 2, \dots n\}$ и произвольного $s \in \{1, 2, \dots m\}$ построим окаймляющий минор — определитель порядка $r+1$:

$$\left|\begin{array}{ccccc:c} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \dots & a^1_r & a^1_k \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \dots & a^2_r & a^2_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a^r_1 & a^r_2 & a^r_3 & \dots & a^r_r & a^r_k \\ \hdashline a^s_1 & a^s_2 & a^s_3 & \dots & a^s_r & a^s_k \end{array}\right|, \qquad (44.A)$$

(для этого «обрезаем» все взятые столбцы на r-ом номере, а затем пополняем их соответствующими элементами одной s-ой строки).

2. Этот минор равен нулю при любом $s = 1, 2, \dots m$: при $s > r$ — по условию леммы, а при $s \leqslant r$, как имеющий две равных строки (см. следствие 27.3).

3. Заметив, что никакое из алгебраических дополнений элементов последней строки минора (44.A) не зависит от s, обозначим их для простоты записи последующего разложения, соответственно, $\delta^1_k, \delta^2_k, \dots \delta^r_k, \delta^{r+1}_k$, при этом очевидно, $\delta^{r+1}_k = \delta$.

Тогда разложение этого минора, равного нулю, по его последней строке согласно теореме о разложении 29.1 дает:

$$\delta^1_k a^s_1 + \delta^2_k a^s_2 + \dots + \delta^{r-1}_k a^s_{r-1} + \delta^r_k a^s_r + \delta a^s_k = 0.$$

4. Так как $s \in \{1, 2, \dots m\}$ и произвольно, то с одними и теми же коэффициентами $\delta^1_k, \delta^2_k, \dots \delta^r_k, \delta^{r+1}_k$ имеем систему из m числовых равенств. Ее естественно и удобно записать в векторной форме:

$$\delta^1_k \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix} + \delta^2_k \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \dots + \delta^r_k \begin{pmatrix} a^1_r \\ a^2_r \\ \vdots \\ a^m_r \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} a^1_k \\ a^2_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая означает, что для всякого вектора-столбца $\vec{A}_k$ матрицы A:

$$\delta^1_k \vec{A}_1 + \delta^2_k \vec{A}_2 + \dots + \delta^r_k \vec{A}^r + \delta \vec{A}_k = \vec{0}. \qquad (44.\delta)$$

Это и означает линейную зависимость системы векторов-столбцов $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_r, \vec{A}_k\}$ (почему? ◆) при любом $k=1, 2, \dots n$.

5. Отсюда следует, что всякий столбец матрицы A разложим в виде:

$$\vec{A}_k \stackrel{?}{=} \left(-\frac{\delta^1}{\delta}\right)\vec{A}_1 + \left(-\frac{\delta^2}{\delta}\right)\vec{A}_2 + \dots + \left(-\frac{\delta^r}{\delta}\right)\vec{A}_r.$$

6. Соотношение

$$\gamma_1^s \vec{A}^1 + \gamma_2^s \vec{A}^2 + \dots + \gamma_r^s \vec{A}^r + \delta \vec{A}^s = \vec{0}, \qquad (44.\gamma)$$

линейная зависимость системы из $r+1$ векторов-строк $\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots \vec{A}^r, \vec{A}^s\}$ при любом $s=1, 2, \dots m$ и разложения любой из строк матрицы A в линейную комбинацию ее первых r строк: $\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots \vec{A}^r\}$ могут быть получены аналогично разложением минора (44.A) по его последнему столбцу или сведено к предыдущему транспонированием матрицы A.

Что и требовалось доказать. ■

Доказательство теоремы о ранге разобьем на несколько этапов:

1°. Пусть наибольший порядок ненулевого минора матрицы A равен r, без ограничения общности можем считать, что этот минор — главный: δ, так как можно переставить строки и столбцы матрицы $A = \|a_j^i\| = \|A_j\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ ее элементарными преобразованиями, которые согласно утверждению 43.1 не меняют ни строчечный, ни столбцовый ранги.

2°. По лемме о главном миноре первые r столбцов такой матрицы линейно независимы, т. е. среди $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_n\}$ существуют r линейно независимых векторов. Значит условию В.1 базиса удовлетворяет система $B = \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_r \rangle$.

3°. По лемме об окаймлении минора любой вектор-столбец $\vec{A}_k$ ($k \in \{1, 2, \dots n\}$) матрицы A разложим в линейную комбинацию ее первых r столбцов. Это означает, что для системы векторов $\boldsymbol{B} = \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_r \rangle$ выполнено и условие В.2′ базиса системы $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots \vec{A}_n\}$ и ее ранг, а значит и столбцовый ранг матрицы A, равен r.

4°. Аналогично 2° — 3° из соответствующих соотношений для строк следует, что строчечный ранг $r_h(A) = \mathrm{Rang}\{\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots \vec{A}^m\} = r$.

5°. Из равенства строчечного и столбцового рангов числу r следует $r_v(A) = r_h(A)$. ■

Из теоремы о ранге очевидным образом вытекают следствия.

Следствие 44.1. *Квадратная матрица порядка n невырождена (и обратима) тогда и только тогда, когда ее ранг максимален, т. е. равен n.* ◆

Следствие 44.2. *Если определитель квадратной матрицы равен* 0, *то ее строки и столбцы линейно зависимы.* ♦

В совокупности со свойством 27.6 теперь это дает необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы:

Теорема 44.2. *Квадратная матрица вырождена тогда и только тогда, когда ее строки и столбцы линейно зависимы.*

§ 45°. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Заметим, что при решении любой системы уравнений (или уравнения), она, как правило, подвергается преобразованиям (т. е. одна система заменяется на другую), прежде чем удается указать решение исходной системы. При этом важно, чтобы такие системы уравнений имели одинаковые (совпадающие) множества решений, что, собственно, и означает, что в конце концов получено решение данной, а не какой-либо иной системы уравнений.

Определение 45.1. *Две* ***системы уравнений*** *называются* ***эквивалентными*** (или ***равносильными***), *если множества их решений совпадают.*

Простейший пример эквивалентных систем уравнений:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = 1, \\ x^1 \phantom{{}+x^2} = 2. \end{cases} \sim \begin{cases} x^1 = 2, \\ x^2 = -1. \end{cases}$$ ♦

Естественно указать, какие преобразования систем линейных уравнений допустимы, т. е. гарантируют, что полученная в результате система эквивалентна исходной.

Определение 45.2. ***Элементарными преобразованиями*** *системы линейных уравнений называются*

1. *Прибавление к одному уравнению системы другого, домноженного на некоторый скаляр.*
2. *Умножение всех коэффициентов одного из ее уравнений на ненулевой множитель.*
3. *Перестановка ее двух уравнений.*
4. *Перенумерация двух неизвестных.*
5. *Исключение из системы уравнений уравнения со всеми нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.*

Эти преобразования сохраняют множество решений системы уравнений и ее ранг. Точнее:

Утверждение 45.1. *Элементарные преобразования системы линейных уравнений переводят ее в эквивалентную ей систему (с точностью до порядка неизвестных).*

Доказательство. Пусть дана некоторая система линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = b^m. \end{cases} \qquad (45.(A\,|\,B))$$

Ее матричная форма:

$$A \cdot X = B. \qquad (45.(A\,|\,B)')$$

здесь A — основная матрица системы $(45.(A\,|\,B))$,

$A = \| a_j^i \| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$, $X = \| x^j \| \in \boldsymbol{M}(n \times 1)$, $B = \| b^i \| \in \boldsymbol{M}(m \times 1)$.

1°. Несложно убедиться в том, что первому виду элементарных преобразований системы линейных уравнений в матричной форме соответствует домножение каждой из частей $(45.(A\,|\,B))$ **слева** на матрицу вида $E + \lambda E_j^i$ $(\lambda \neq 0)$:

Напоминание. E_j^i — матрица, все элементы которой равны 0 за исключением одного, стоящего на пересечении i-ой строки и j-ого столбца и равного 1.

$$((E + \lambda E_j^i) \cdot A) \cdot X = (E + \lambda E_j^i) \cdot B. \qquad (45.(A\,|\,B)^*)$$

А второму виду элементарных преобразований системы — домножение тоже **слева** каждой из частей $(45.(A\,|\,B)')$ на матрицу вида $E + (\lambda - 1)E_k^k$ $(\lambda \neq 1)$:

$$((E + (\lambda - 1)E_k^k) \cdot A) \cdot X = (E + (\lambda - 1)E_k^k) \cdot B. \qquad (45.(A\,|\,B)^*_*)$$

Перестановке двух строк матриц, в частности, матриц A и B уравнения $(45.(A\,|\,B)')$ согласно замечанию 30.1 соответствует домножение каждой из них также **слева** на матрицу:

$$C \overset{\text{def}}{=\!=} E - E_i^i - E_j^j + E_j^i + E_i^j$$

(невырожденную и разлагающуюся в произведение элементарных матриц первого и второго рода):

$$(C \cdot A) \cdot X \overset{?}{=} C \cdot B. \qquad (45.(A\,|\,B)^{\overset{*}{*}}_*)$$

Из обратимости множителей: $(E + \lambda E_j^i)$, $(E + (\lambda - 1)E_k^k)$ и C, приводящих матричное уравнение $(45.(A\,|\,B)')$, соответственно, к виду $(45.(A\,|\,B)^*)$, $(45.(A\,|\,B)^*_*)$ или $(45.(A\,|\,B)^{\overset{*}{*}}_*)$ следует, что всякое решение $(45.(A\,|\,B)')$ является решением этих матричных уравнений и наоборот. А это в свою очередь влечет эквивалентность соответствующих им систем линейных уравнений.

2°. Элементарное преобразование системы линейных уравнений, состоящее в перенумерации неизвестных, приводит исходную систему $(45.(A\,|\,B))$ к системе вида:

$$\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_j^1x^j+\ldots+a_i^1x^i+\ldots+a_n^1x^n=b^1, \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+\ldots+a_j^2x^j+\ldots+a_i^2x^i+\ldots+a_n^2x^n=b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1+a_2^mx^2+\ldots+a_j^mx^j+\ldots+a_i^mx^i+\ldots+a_n^mx^n=b^m. \end{cases} \qquad (45.(A'|B))$$

Что при новой нумерации неизвестных

$$\langle y^1,\ y^2,\ \ldots\ y^{i-1},\ \boxed{y^i,}\ y^{i+1},\ \ldots\ y^{j-1},\ \boxed{y^j,}\ y^{j+1},\ \ldots\ y^n\rangle =$$

$$=\langle x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^{i-1},\ \boxed{x^j},\ x^{i+1},\ \ldots\ x^{j-1},\ \boxed{x^i}\ x^{j+1},\ \ldots\ x^n\rangle$$

(и коэффициентов i-ого и j-ого столбцов) дает систему:

$$\begin{cases} a_1^1y^1+a_2^1y^2+\ldots+a_i^1y^i+\ldots+a_j^1y^j+\ldots+a_n^1y^n=b^1, \\ a_1^2y^1+a_2^2y^2+\ldots+a_i^2y^i+\ldots+a_j^2y^j+\ldots+a_n^2y^n=b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^my^1+a_2^my^2+\ldots+a_i^my^i+\ldots+a_j^my^j+\ldots+a_n^my^n=b^m. \end{cases} \qquad (45.(A''|B))$$

Ясно, что с **точностью до порядка i-ой и j-ой компоненты** множество решений системы $(45.(A''|B))$ совпадает с множествами решений систем $(45.(A'|B))$ и $(45.(A|B))$.

3°. Уравнению со всеми нулевыми коэффициентами (***нулевому уравнению***):

$$0x^1+0x^2+\ldots+0x^n=0,$$

очевидно, удовлетворяет любой кортеж чисел $\langle x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n\rangle$, так что его исключение из системы уравнений не изменяет множества решений и приводит к эквивалентной системе линейных уравнений. ◆■

Утверждение 45.2. *Элементарные преобразования системы линейных уравнений переводят ее в систему линейных уравнений того же ранга.*

Действительно, первым четырем видам элементарных преобразований системы линейных уравнений соответствуют аналогичные элементарные преобразования основной и расширенной матриц системы, которые, согласно утверждению 43.1, не меняют их ранги. Последнему из видов элементарных преобразований — исключению из системы уравнений нулевого уравнения — соответствуют вычеркивание в матрице нулевой строки, что, очевидно, приводит к матрицам (а значит, и системам) того же ранга. ◆ ■

Следовательно, можно сказать, что ранг системы линейных уравнений есть *инвариант ее элементарных преобразований.* Это позволяет из соображений удобства в дальнейших рассуждениях пользоваться преобразованиями матриц, соответствующих системе.

Инвариант — от латинского слова invarians, означающего неменяющийся, неизменный.

§ 46. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Утверждения предыдущего параграфа позволяют, не нарушая общности считать, что любая линейная однородная система с n неизвестными, основной ранг которой равен r, может быть задана в виде:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_r^1x^r + a_{r+1}^1x^{r+1} + \ldots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_r^2x^r + a_{r+1}^2x^{r+1} + \ldots + a_n^2x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^rx^1 + a_2^rx^2 + \ldots + a_r^rx^r + a_{r+1}^rx^{r+1} + \ldots + a_n^rx^n = 0, \end{cases} \qquad (46.(A|0))$$

(к которому она приводима элементарными преобразованиями), причем так, что ее первые r столбцов линейно независимы.

Множество ее решений — S_A, как отмечалось в начале лекции — конечномерное векторное пространство, и, следовательно, в нем можно выбрать базис.

При равенстве основного ранга системы числу переменных ($r=n$) векторное пространство ее решений нулевое: $S_A=\{\vec{0}\}$ (утверждение 42.?), и его размерность также равна 0.

Чтобы определить размерность векторного пространства решений системы (46.$(A|0)$) при условии, что ее основной ранг $r<n$, надо описать пространство всех ее решений, а затем базис этого пространства. Так как $S_A \subset \boldsymbol{M}(n\times 1)$, то S_A конечномерно и $\dim S_A \leqslant n$. ◆

1. Постараемся найти общий вид решений системы линейных уравнений (46.$(A|0)$), или найдем, как пишут некоторые авторы, ее ***общее решение.***

1°. Перенесем в правую часть каждого из уравнений системы (46.$(A|0)$) все неизвестные, начиная с $r+1$-го: x^{r+1}, x^{r+2}, ... x^n:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + \ldots + a_r^1x^r = -a_{r+1}^1x^{r+1} - a_{r+2}^1x^{r+2} - \ldots - a_n^1x^n, \\ a_1^2x^1 + \ldots + a_r^2x^r = -a_{r+1}^2x^{r+1} - a_{r+2}^2x^{r+2} - \ldots - a_n^2x^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^rx^1 + \ldots + a_r^rx^r = -a_{r+1}^rx^{r+1} - a_{r+2}^rx^{r+2} - \ldots - a_n^rx^n. \end{cases} \qquad (46.(A|0)')$$

Этой системе уравнений соответствует матричная форма:

$$A' \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = -A'' \cdot \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad (46.A)$$

где $A' = \|a_j^i\| = \|A_j\| \in \boldsymbol{M}(r)$, $A'' = \|a_k^i\| = \|A_k\| \in \boldsymbol{M}(n-r))$, $(i=1,\ 2,\ \ldots\ r,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ r,\ k=r+1,\ r+2,\ \ldots\ n)$.

2°. Такое разделение неизвестных позволяет выразить x^1, x^2, ... x^r через x^{r+1}, x^{r+2}, ... x^n: ◆

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} \overset{?}{=} (-(A')^{-1} \cdot A'') \cdot \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \qquad (46.A')$$

При этом матрица $(-(A')^{-1} \cdot A'') \in \boldsymbol{M}(? \times (n-r))$.

3°. Из этого соотношения видно, что давая неизвестным x^{r+1}, x^{r+2}, ... x^n любые значения, получим значения остальных неизвестных x^1, x^2, ... x^r, а в конечном счете — кортеж чисел $\langle x^1, x^2, \ldots x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots x^n \rangle$, удовлетворяющий (46.$A'$), (46.$A$), (46.$(A|0)'$), т. е. решение линейной однородной системы (46.(A|0)).

В силу той роли, которую выполняют в формуле (46.A') неизвестные x^{r+1}, x^{r+2}, ... x^n, они называются ***свободными неизвестными*** (***переменными***), их значения произвольны, а неизвестные x^1, x^2, ... x^r, выражающиеся через них — ***зависимыми.*** Причем значения x^1, x^2, ... x^r определяются значениями $\langle x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots x^n \rangle$ однозначно в силу обратимости матрицы A' (почему? ◆) и однозначности матричных операций.

Всякое решение системы с фиксированными числовыми значениями свободных переменных иногда называется ее ***частным решением*** (в отличие от *общего решения* системы линейных уравнений).

4°. Дописав к столбцу зависимых переменных свободные, получим общий вид решений системы уравнений (46.A), который удобно представить координатным столбцом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ \cdots\cdots \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \overset{n-r}{\boxed{\begin{matrix} \left.-(A')^{-1}\cdot A''\right\} r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}\right\} n-r \end{matrix}}} \cdot \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (46.1)$$

Это равносильно пополнению соотношений, соответствующих матричной форме (46.A'), тривиальными:

$$\begin{cases} x^{r+1} = x^{r+1}, \\ x^{r+2} = x^{r+2}, \\ \cdots \quad . \quad \cdots \\ x^n \quad = x^n. \end{cases}$$

Тем самым указан общий вид решения системы. ■

Утверждение 46.1. *Любое решение системы линейных однородных уравнений* (46.($A|0$)) *представимо формулами* (46.1).

2. Найдем базис в векторном подпространстве $\boldsymbol{M}(n \times 1)$ элементов вида (46.1).

1°. Обозначив через $A^{\#}$ матрицу формулы (46.1):

$$\begin{pmatrix} -(A')^{-1}\cdot A'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=\!=} A^{\#} \in \boldsymbol{M}(n \times (n-r)),$$

преобразуем (46.1):

$$X = A^{\#} \cdot \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =$$

$$= A^{\#} \cdot \left(x^{r+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x^{r+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \overset{?}{=}$$

$$x^{r+1}A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x^{r+2}A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+x^{n}A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

(Все столбцы высотой $n-r$).

2°. Это означает, что любое решение системы линейных однородных уравнений представимо в виде линейной комбинации $n-r$ ее решений специального вида:

$$X_1=A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad X_2=A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

....

$$X_{n-r}=A^{\#}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Т. е. $\vec{X}=x^{r+1}\vec{X}_1+x^{r+2}\vec{X}_2+\ \ldots\ +x^{n}\vec{X}_{n-r}$ — для системы векторов $\langle\vec{X}_1,\ \vec{X}_2,\ \ldots\ \vec{X}_{n-r}\rangle$ выполнено условие В.2 базиса векторного пространства (см. определение 41.1).

3°. Легко видеть, что такая система векторов

$$\left\{\vec{X}_1=\begin{pmatrix}x_1^1\\x_1^2\\\vdots\\x_1^r\\\cdots\cdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \vec{X}_2=\begin{pmatrix}x_2^1\\x_2^2\\\vdots\\x_2^r\\\cdots\cdots\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots,\ \vec{X}_{n-r}=\begin{pmatrix}x_{n-r}^1\\x_{n-r}^2\\\vdots\\x_{n-r}^r\\\cdots\cdots\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

линейно независима (почему? ♦), что означает выполнимость условия В.1 базиса.

4°. Таким образом в подпространстве $S_A\subset \boldsymbol{M}(n\times 1)$ найден базис из $n-r$ векторов, что позволяет указать размерность пространства решений системы уравнений (46.А). ■

Утверждение 46.2. *Множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными ранга r, как векторное пространство $(n-r)$-мерно.*

Определение 46.1. *Базис пространства решений линейной однородной системы уравнений называется ее* ***фундаментальной системой решений***.

Так как базис в векторном пространстве определяется не единственным способом, то и фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений может быть выбрана, вообще говоря, неоднозначно. Однако, в силу доказанного утверждения 41.1 все фундаментальные системы решений состоят из одинакового числа частных решений (векторов): $n-r$.

Пример 46.1. Найдем общее решение и фундаментальную систему решений линейной однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x^1+x^2+x^3+x^4+x^5=0, \\ x^1+x^2+3x^3+4x^4+5x^5=0, \\ 2x^1+x^2+10x^3+2x^4+7x^5=0, \\ 5x^1+5x^2+9x^3+11x^4+13x^5=0. \end{cases} \tag{46.x}$$

1. Ранг основной матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

равен 3 (см. пример 44.1), значит, пространство ее решений 2-мерно, и число свободных переменных равно двум.

2. Чтобы записать общий вид решений формулой (46.1), приведем матрицу системы к ступенчатому виду (см. пример 44.1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3. Это означает, что x^4, x^5 — выбраны свободными переменными, а x^1, x^2, x^3 — зависимыми. Выделим соответствующие им матрицы:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A''=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

и найдем матрицу $A^{\#}$:

$$A^{\#} = -(A')^{-1} \cdot A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ?.$$

4. Общий вид решений системы выражается согласно (46.1):

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25/2 & -12 \\ 12 & 11 \\ 3/2 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}.$$

5. Фундаментальную систему решений составляют частные решения системы:

$$\left\{ \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} -25/2 & -12 \\ 12 & 11 \\ 3/2 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -25/2 & -12 \\ 12 & 11 \\ 3/2 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Причем $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ неколлинеарны (почему? ◆), и любое решение системы уравнений представимо в виде их линейной комбинации.

6. Тогда общее решение этой системы (как вектор двумерного

подпространства в $\boldsymbol{M}(4\times 1)$) представимо в виде:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25/2 & -12 \\ 12 & 11 \\ 3/2 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} =$$

$$= x^4 \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что фундаментальную систему решений системы (46.x) составляют и другие ее частные решения:

$$\left\{ \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \blacklozenge$$

Найдите фундаментальную систему решений, отличную от $\langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle$ и $\langle \vec{Y}_1, \vec{Y}_2 \rangle$, (как базис в векторном пространстве $L(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$).

§ 47′. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

После того, как было найдено общее решение системы линейных однородных уравнений, естественно поставить вопрос о методах и структуре решений системы неоднородных линейных уравнений. Оказывается, что всякое решение такой системы может быть получено в виде суммы ее некоторого другого (частного) решения и решения соответствующей однородной системы линейных уравнений, т. е. имеющей ту же самую основную матрицу, что и исходная система линейных уравнений.

Точнее имеет место теорема.

Теорема 47.1. *Если $\langle x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n\rangle$ — какое-либо решение* ***линейной неоднородной системы:***

$$\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+ \dots +a_n^1x^n=b^1, \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+ \dots +a_n^2x^n=b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1+a_2^mx^2+ \dots +a_n^mx^n=b^m, \end{cases} \qquad (47.(A\,|\,B))$$

а $\langle \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots \tilde{x}^n\rangle$ — решение соответствующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+ \dots +a_n^1x^n=0, \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+ \dots +a_n^2x^n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1+a_2^mx^2+ \dots +a_n^mx^n=0, \end{cases} \qquad (47.(A\,|\,0))$$

то решение неоднородной системы $(47.(A\,|\,B))$:

$$\langle x_0^1+\tilde{x}^1,\ x_0^2+\tilde{x}^2,\ \dots\ x_0^n+\tilde{x}^n\rangle.$$

Обратно: *независимо от того, какое выбрано решение $\langle x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n\rangle$ неоднородной системы* $(47.(A\,|\,B))$, *ее любое другое решение может быть представлено в виде суммы данного ее решения и некоторого решения соответствующей однородной системы:*

$$\langle x_0^1+x^1,\ x_0^2+x^2,\ \dots\ x_0^n+x^n\rangle.$$

Доказательство. Напомним, что каждая из систем линейных уравнений $(47.(A\,|\,B))$ и $(47.(A\,|\,0))$ может быть записана в матричной форме:

$$A\cdot X=B, \qquad (47.(A\,|\,B)')$$

и, соответственно:

$$A\cdot X=0. \qquad (47.(A\,|\,0)')$$

1. Пусть $X_0=\|x_0^j\|$ — некоторое решение матричного уравнения $(47.(A\,|\,B)')$, а $\tilde{X}=\|\tilde{x}^j\|$ — решение уравнения $(47.(A\,|\,0)')$.

Тогда для $Y=X_0+\tilde{X}$ имеем:

$$A\cdot Y=A\cdot(X_0+\tilde{X})\stackrel{?}{=}A\cdot X_0+A\cdot\tilde{X}\stackrel{?}{=}B+0=B.$$

Отсюда

$$Y = X_0 + \tilde{X} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 + \tilde{x}^1 \\ x_0^2 + \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ x_0^n + \tilde{x}_0^n \end{pmatrix} \qquad (47.1)$$

$$\langle x_0^1 + \tilde{x}^1,\ x_0^2 + \tilde{x}^2,\ \dots\ x_0^n + \tilde{x}^n \rangle$$

— решение системы уравнений (47.($A \mid B$)).

2. Обратно: пусть $Y = \| y^j \|$, $X_0 = \| x_0^j \|$ — два решения уравнения (47.($A \mid B$)$'$), т. е.

$$A \cdot Y = B \text{ и } A \cdot X_0 = B.$$

Тогда $A \cdot (Y - X_0) \overset{?}{=} A \cdot Y - A \cdot X_0 \overset{?}{=} O$, это означает, что $\tilde{X} = Y - X_0$ есть решение матричного уравнения (47.($A \mid$ O)$'$), соответствующего линейной однородной системе уравнений (47.($A \mid$ O)). Откуда $Y = X_0 + \tilde{X}$ и, значит, произвольное фиксированное решение системы (47.($A \mid B$)) представимо в виде:

$$\langle y^1,\ y^2,\ \dots\ y^n \rangle = \langle x_0^1 + \tilde{x}^1,\ x_0^2 + \tilde{x}^2,\ \dots\ x_0^n + \tilde{x}^n \rangle,$$

т. е. в виде суммы ее некоторого решения X_0 и решения $\tilde{X}$ системы (47.($A \mid$ O)$'$). ■

Теорема 47.1 позволяет представить множество $S_{A|B}$ всех решений системы линейных неоднородных уравнений (47.($A \mid B$)) в виде

$$S_{A|B} = X_0 + S_A,$$

где, по определению

$$X_0 + S_A \overset{\text{def}}{=\!=} \{X_0 + \tilde{X} \mid (\forall \tilde{X} \mid A \cdot \tilde{X} = O)\}.$$

Такое множество часто называют ***линейным многообразием решений системы*** (47.($A \mid B$)) в векторном пространстве $\mathbf{R}^n$, здесь X_0 — ее некоторое решение.

Линейное многообразие можно изобразить схемой (рис. 5).

Говорят, что линейное многообразие $S_{A|B} = X_0 + S_A$ ***получено сдвигом*** векторного пространства S_A на вектор X_0. (При этом векторное подпространство S_A тоже можно считать линейным многообразием (полученным сдвигом на нулевой вектор). ***Раз-***

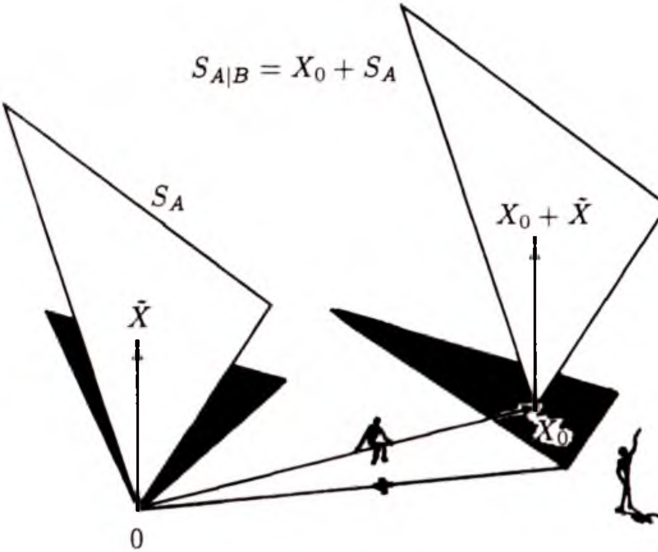


Рис. 5

мерностью линейного многообразия X_0+S_A называется размерность его векторного пространства S_A.

Пример 47.1. В примере 42.1 было установлено, что система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x^1+x^2+x^3+x^4+x^5=1, \\ x^1+x^2+3x^3+4x^4+5x^5=2, \\ 2x^1+x^2+10x^3+2x^4+7x^5=3, \\ 5x^1+5x^2+9x^3+11x^4+13x^5=7, \end{cases}$$

совместна. Ее решением является, например, кортеж: $\langle 5/3,\ -1,\ 0,\ 1/3,\ 0\rangle$ (он может быть найден подбором).

В примере 46.1 был найден общий вид решения соответствующей ей системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = x^4 \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 47.1 решение исходной неоднородной системы уравнений имеет вид:

решение неоднородной системы — фундаментальная система решений

$$X = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x^4 \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{решение однородной системы}}.$$

частное решение неоднородной системы — решение однородной системы

Давая произвольные значения x^4 и x^5, можно получить все возможные решения этой системы.

Можно указать следующую схему.

Схема решения неоднородных систем линейных уравнений

1. Выписываем основную|расширенную матрицу системы.
2. Определяем ранг $\langle r, R\rangle$ системы (определения 42.2, 42.3), ее совместность (теорема 44.1).
3. Если система совместна, находим размерность линейного многообразия решений, равную $\dim S_A = n - r$.
4. Находим систему фундаментальных решений соответствующей системы линейных однородных уравнений.
5. Если система совместна, находим ее какое-либо решение.
6. Записываем общий вид решения системы линейных неоднородных уравнений (формула 47.1).

Задача 47.1.1. Решите систему уравнений, указанную в задаче 42.1.1:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 4, \\ x^1 + x^2 + 3x^3 + 2x^4 = 8, \\ 2x^1 - 4x^2 - 6x^3 + x^4 = 4, \\ 2x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 5x^4 = 20. \end{cases}$$

1. Ее основная|расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 20 \end{array}\right).$$

2. При решении задачи 42.1.1 найден ранг этой системы: $\langle r, R\rangle = \langle 2, 2\rangle$, что означает ее совместность.

3. $\dim S_A = n - r = ?$.

4. Находим фундаментальную систему решений соответствующей системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + 3x^3 + 2x^4 = 0, \\ 2x^1 - 4x^2 - 6x^3 + x^4 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 5x^4 = 0. \end{cases}$$

5. Находим какое-либо решение системы.

6. Записываем общее решение системы линейных неоднородных уравнений (формула 47.1).

решение неоднородной системы

фундаментальная система решений

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}}_{\text{частное решение неоднородной системы}} + \underbrace{?\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}}_{\text{решение однородной системы}}.$$

Задача 47.1.2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 5x^4 = 3, \\ 2x^1 + 3x^2 + 8x^3 + 6x^4 = 5, \\ x^1 - 6x^2 - 20x^3 - 9x^4 = -11, \\ 4x^1 + x^2 + x^3 + 4x^4 = 2. \end{cases}$$

Задача 47.1.3. Определите, при каких значениях λ следующая система уравнений совместна:

$$\begin{cases} \lambda x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 + \lambda x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 + x^2 + \lambda x^3 = 1. \end{cases}$$

Найдите ее общее решение в тех случаях, когда она совместна. Существуют ли такие значения λ, при которых эта система имеет единственное решение?

§ 48′. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Научившись определять ранг $\langle r,\ R\rangle$ системы линейных уравнений и применяя теорему Кронкера — Капелли, всегда можно определить совместна система или нет. В случае ее совместности существенно важно уметь находить эти решения. Однако далеко не всегда удается достаточно быстро отыскать даже одно из ее решений. Более того, оказывается, что иногда удобнее находить сразу общий вид решений системы линейных уравнений, поскольку отыскание ее фундаментальной системы решений, тоже требуя больших вычислений, бывает сложным.

В этом параграфе будет описан ***метод последовательного исключения переменных*** (метод Гаусса), позволяющий несложной процедурой не только определить, когда система линейных уравнений совместна, но и находить все ее решения явно. Он заключается в том, что элементарными преобразованиями система m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ \dots \ + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ \dots \ + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ \dots \ + a_n^mx^n = b^m \end{cases} \tag{48.(A|b)}$$

приводится к эквивалентной ей (с точностью до порядка неизвестных) системе вида:

$$\begin{cases} c_1^1y^1 + c_2^1y^2 + \ \dots \ + c_{r-1}^1 y^{r-1} + c_r^1 y^r + \ \dots \ + c_n^1 y^n = d^1, \\ \qquad\quad c_2^2y^2 + \ \dots \ + c_{r-1}^2 y^{r-1} + c_r^2 y^r + \ \dots \ + c_n^2 y^n = d^2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad c_{r-1}^{r-1} y^{r-1} + c_r^{r-1} y^r + \ \dots \ + c_n^{r-1} y^n = d^{r-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_r^r y^r + \ \dots \ + c_n^r y^n = d^r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d^{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d^m, \end{cases} \tag{48.(C|D)}$$

матрица которой ступенчата:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} c_1^1 & * & * & \dots & * & * & \dots & c_n^1 & d^1 \\ 0 & c_2^2 & * & \dots & * & * & \dots & c_n^2 & d^2 \\ . & . & & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_r^r & * & \dots & c_n^r & d^r \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d^{r+1} \\ . & . & & \dots & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d^m \end{array}\right] \qquad (48.C)$$

причем в верхнем блоке, если он имеется, все диагональные элементы отличны от нуля: $c_1^1 c_2^2 \dots c_{r-1}^{r-1} c_r^r \neq 0$.

Для последней системы (48.($C|D$)) не составит большого труда ответить на вопрос совместна ли она, и в случае утвердительного ответа метод позволяет получить все множество ее решений.

Этот метод (и его различные модификации) применяется при решениях систем линейных уравнений компьютерными средствами, поскольку, по существу, он представляет собой алгоритм (точное описание процесса), последовательные действия согласно которому, неизбежно приведут к успешному решению задачи.

Слово алгоритм происходит от латинской формы имени знаменитого арабского математика средних веков аль-Хорезми (Al-gorithmi).

Алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений методом последовательного исключения переменных

Алгоритм заключается в следующем:

1) в приведении матрицы системы уравнений (48.($A|B$)) к ступенчатому виду (48.($C|D$)).

2) методе решений систем линейных уравнений вида (48.($C|D$)).

Пусть дана основная|расширенная матрица системы линейных уравнений (48.($A|B$)):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = \boxed{\quad A \quad}\boxed{\; B \;}\,. \qquad (48.0)$$

1. Если $a_1^1 \neq 0$, то *умножаем первую строку матрицы* ($A|B$) *последовательно на подходящие числа* так, чтобы складывая ее

со второй строкой, затем третьей и т. д., получить остальные элементы первого столбца нулевыми. (Это множители: $-a_1^2/a_1^1$ для второй строки,— a_1^3/a_1^1 для третьей, для i-ой: $-a_1^i/a_1^1$). Тем самым добьемся, что матрица системы будет иметь вид:

$$\begin{array}{|c|ccc|c|} \hline a_1^1 & * & * \;\dots & * & * \\ \cline{2-5} 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & B' \\ 0 & & & & \\ \hline \end{array} \tag{48.1}$$

2. Если $a_1^1=0$, но найдется $a_1^i \neq 0$, то *переставим строки матрицы* $(A|B)$ *так, чтобы в левом верхнем углу был ненулевой элемент.* (Например, можно делать циклические перестановки строк до тех пор, пока на первом месте не окажется ненулевой элемент). Затем действуем согласно п. 1.

3. Если $a_1^i=0 \quad \forall i \in \{1, 2 \dots m\}$ (т. е. $A_1=O$), то *поменяем местами первый столбец с каким-либо другим, ненулевым.* (Например, можно делать циклические перестановки столбцов основной матрицы). Затем действуем согласно п. 1 и 2.

4. Очевидно, что п. 1—3 всегда выполнимы в случае ненулевой основной матрицы. Но в случае

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \quad O \quad & B' \\ & \\ \hline \end{array}$$

можно сказать, что основная матрица уже ступенчатого вида.

5. *Повторим процедуру* п. 1—4, применяя ее к матрице $(A'|B')$. Следует только иметь в виду, что все операции над ее строками или столбцами распространяются и на объемлющие ее строки и столбцы (продолжения) матрицы (48.1).

6. В результате получим матрицу вида:

$$\begin{array}{|cc|ccc|c|} \hline a_1^1 & & * & * \;\dots & * & * \\ 0 & \tilde{a}_2^2 & * & * \;\dots & * & * \\ \cline{3-6} 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & & B'' \\ 0 & 0 & & & & \\ \hline \end{array} \tag{48.2}$$

7. Повторим процедуру п. 1—4, применяя ее к матрице $(A''|B'')$, и так далее. Так как число строк матрицы $A|B$ конечно, то за конечное число шагов придем к матрице вида (48.C) и системе:

$$\begin{cases} c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \ldots + c_{r-1}^1 y^{r-1} + c_r^1 y^r + \ldots + c_n^1 y^n = d^1, \\ \qquad c_2^2 y^2 + \ldots + c_{r-1}^2 y^{r-1} + c_r^2 y^r + \ldots + c_n^2 y^n = d^2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{r-1}^{r-1} y^{r-1} + c_r^{r-1} y^r + \ldots + c_n^{r-1} y^n = d^{r-1}, \\ \qquad\qquad\qquad c_r^r y^r + \ldots + c_n^r y^n = d^r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d^{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d^m, \end{cases}$$

(48.$(C|D)$)

8. Следует иметь в виду, что в этой системе уравнений неизвестные $y^1, y^2, \ldots y^n$ — это неизвестные $x^1, x^2, \ldots x^n$, быть может, переставленные, поэтому решение системы (48.$(C|D)$) вместе с данными, какой y^i соответствует какому x^j, дает решение исходной системы (48.$(A|B)$) (см. утверждение 48.1). При этом последние $m-r$ уравнений системы (48.$(C|D)$) надо понимать, как уравнения вида:

$$\begin{cases} 0y^1 + 0y^2 + 0y^3 + \ldots + 0y^n = d^{r+1}, \\ 0y^1 + 0y^2 + 0y^3 + \ldots + 0y^n = d^{r+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0y^1 + 0y^2 + 0y^3 + \ldots + 0y^n = d^m. \end{cases}$$

Из этого очевидно, что, если

$$\langle d^{r+1}, d^{r+2}, \ldots d^m \rangle \neq \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle,$$

то имеем противоречивые равенства и несовместную систему уравнений. ($r \neq R$). ♦

Для любой совместной системы

$$\langle d^{r+1}, d^{r+2}, \ldots d^m \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle,$$

т. е. последние $m-r$ уравнений — тривиальные тождества вида $0=0$ и их можно не принимать во внимание (отбросить).

Сформулируем установленное выше в виде теоремы.

Теорема 48.1. *Любая система линейных уравнений* (48.$(A|B)$) *может быть преобразована в эквивалентную ей, с точностью до порядка неизвестных, систему* (48.$(C|D)$), *где* r *— ранг ее основной матрицы.*

9. В случае совместности система $(48.(C|D))$ примет вид:

$$\begin{cases} c_1^1y^1+c_2^1y^2+\ldots+c_{r-1}^1y^{r-1}+c_r^1y^r+c_{r+1}^1y^{r+1}+\ldots+c_n^1y^n=d^1, \\ \qquad c_2^2y^2+\ldots+c_{r-1}^2y^{r-1}+c_r^2y^r+c_{r+1}^2y^{r+1}+\ldots+c_n^2y^n=d^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{r-1}^{r-1}y^{r-1}+c_r^{r-1}y^r+c_{r+1}^{r-1}y^{r+1}+\ldots+c_n^{r-1}y^n=d^{r-1}, \\ \qquad\qquad\qquad c_r^ry^r+c_{r+1}^ry^{r+1}+\ldots+c_n^ry^n=d^r, \end{cases}$$

$$(48.(C'|D'))$$

10. Перенесем во всех уравнениях вправо все члены, содержащие переменные y^{r+1}, y^{r+2}, ... y^n:

$$\begin{cases} c_1^1y^1+c_2^1y^2+\ldots+c_{r-1}^1y^{r-1}+c_r^1y^r=d^1-c_{r+1}^1y^{r+1}-\ldots-c_n^1y^n, \\ \qquad c_2^2y^2+\ldots+c_{r-1}^2y^{r-1}+c_r^2y^r=d^2-c_{r+1}^2y^{r+1}-\ldots-c_n^2y^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{r-1}^{r-1}y^{r-1}+c_r^{r-1}y^r=d^{r-1}-c_{r+1}^{r-1}y^{r+1}-\ldots-c_n^{r-1}y^n, \\ \qquad\qquad\qquad c_r^ry^r=d^r-c_{r+1}^ry^{r+1}-\ldots-c_n^ry^n, \end{cases}$$

$$(48.(C''|D''))$$

Очевидно, что системы $(48.(C''|D''))$ и $(48.(C'|D'))$ эквивалентны.

11. Из последнего уравнения этой системы выразим

$$y^r=\frac{1}{c_r^r}(d^r-c_{r+1}^ry^{r+1}-\ldots-c_n^ry^n).$$

Подставим выражение y^r в предпоследнее уравнение и выразим из него

$$\begin{aligned} y^{r-1}&=\frac{1}{c_{r-1}^{r-1}}(d^{r-1}-c_{r+1}^{r-1}y^{r+1}-\ldots-c_n^{r-1}y^n-c_r^{r-1}y^r)= \\ &=\frac{1}{c_{r-1}^{r-1}}(d^{r-1}-c_{r+1}^{r-1}y^{r+1}-\ldots-c_n^{r-1}y^n- \\ &\quad -c_r^{r-1}\frac{1}{c_r^r}(d^r-c_{r+1}^ry^{r+1}-\ldots-c_n^ry^n)), \end{aligned} \tag{48.Y}$$

затем аналогично выделим y^{r-2}, y^{r-3} и т. д.

В конце концов (за r шагов) получим выражения всех переменных y^r, y^{r-1}, ... y^2, y^1 через y^{r+1}, y^{r+2}, ... y^n. При этом совершенно ясно, что если $r<n$, то переменным y^{r+1}, y^{r+2}, ... y^n можно давать всевозможные значения, и система $(48.(C'|D'))$ имеет бесконечно много решений, а значит, и исходная система $(48.(A|B))$ тоже.

Таким образом, получаем все решения системы (48.$(A|B)$). Подытожим предыдущее.

Теорема 48.2. *Если система линейных уравнений* (48.$(A|B)$) *приведена к виду* (48.$(C|D)$) *и найдется* $d^j \neq 0$ *с индексом* $j > r$, *где* r — *ранг ее основной матрицы, то система несовместна.*

Если же $d^{r+1} = d^{r+2} = \ldots = d^m = 0$, *то она совместна, причем при* $r < n$ *решений бесконечно много, и они находятся по формулам* (48.Y).

Так как при решении системы линейных уравнений методом Гаусса при условии $r < n$ неизвестным $\langle y^{r+1}, y^{r+2}, \ldots y^n \rangle$ можно давать произвольные значения, то их называют по аналогии с п. 3° § 46 (в котором рассматривались системы линейных однородных уравнений) ***свободными переменными (неизвестными)*** в отличие от выражающихся через них $y^1, y^2, \ldots y^r$, которые также носят названия ***зависимых переменных (неизвестных)***.

Замечание 48.1: Поскольку в методе Гаусса шаги алгоритма неоднозначны, то и разделение переменных на свободные и зависимые тоже не единственно, однако, из алгоритма следует, что однозначно определяется их число: свободных $n - r$, а зависимых r. ◆

Если же $r = n$, т. е. система (48.$(A|B)$) элементарными преобразованиями (п. 1— п. 4 алгоритма) приводится к системе вида:

$$\begin{cases} c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \ldots + c_{n-1}^1 y^{n-1} + c_n^1 y^n = d^1, \\ \qquad c_2^2 y^2 + \ldots + c_{n-1}^2 y^{n-1} + c_n^2 y^n = d^2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad c_{n-1}^{n-1} y^{n-1} + c_n^{n-1} y^n = d^{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad c_n^n y^n = d^n, \end{cases} \tag{48.$(C''|D)$}$$

матрица которой треугольна:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} c_1^1 & * & * & \ldots & c_n^1 & d^1 \\ 0 & c_2^2 & * & \ldots & c_n^2 & d^2 \\ \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \ldots & c_n^n & d^n \end{array}\right]$$

и все ее диагональные элементы — ненулевые (или в (48.C) отсутствует нулевой блок). Очевидно, что в этом случае процесс п. 9 и п. 10 алгоритма дает однозначно определяемые коэффициентами системы уравнений значения $\langle y^1, y^2, \ldots y^n \rangle$:

$$y^n \quad = \frac{1}{c_n^n} d^n,$$

$$y^{n-1} = \frac{1}{c_{n-1}^{n-1}} (d^{n-1} - c_n^{n-1} y^n) = \frac{1}{c_{n-1}^{n-1}} \left(d^{n-1} - \frac{c_n^{n-1}}{c_n^n} d^n\right),$$

$$y^{n-2} = \frac{1}{c_{n-2}^{n-2}} (d^{n-2} - c_{n-2}^{n-2} y^{n-1} - c_n^{n-2} d^n) = \qquad (48.C')$$

$$= \frac{1}{c_{n-2}^{n-2}} \left(d^{n-2} - \frac{c_{n-2}^{n-2}}{c_{n-1}^{n-1}} \left(d^{n-1} - \frac{c_n^{n-1}}{c_n^n} d^n\right) - \frac{c_n^{n-2}}{c_n^n} d^n\right), \text{ и т. д.}$$

Таким образом получаем весь кортеж решений $\langle y^1, y^2, \dots y^n \rangle$. ■

Теорема 48.3. *Если система линейных уравнений имеет основной ранг, равный количеству переменных в системе: $r = n$, то она имеет единственное решение, которое находится по формулам* (48.C').

Продемонстрируем этот метод решения систем линейных уравнений на примере.

Пример 48.1. Решим методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 1, \\ x^1 + x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 = 2, \\ 2x^1 + x^2 + 10x^3 + 2x^4 + 7x^5 = 3, \\ 5x^1 + 5x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 13x^5 = 7, \end{cases} \qquad (48.x)$$

(см. примеры 42.1, 46.1).

1. Для этого выпишем ее основную|расширенную матрицу порядка 4×6:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right)$$

и приведем ее к ступенчатому виду (п. 1—7):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{a_1^1 \neq 0} \overset{(2)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)-2(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 9 & 11 & 13 & 7 \end{array}\right) \overset{(4)-5(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right).$$

Поскольку все элементы первого столбца кроме a^1_1 получены нулевые, применяем алгоритм Гаусса к матрице порядка 3×5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right) \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

так как элементы второго столбца ниже диагонального — нулевые, переходим к преобразованию следующей матрицы — порядка 2×4:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right) \overset{(4)-2(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Элементы и третьего столбца ниже диагонали нулевые, поэтому опять понижаем порядок рассматриваемой матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. Выделенная пунктиром матрица нулевая, таким образом, п. 1—7 алгоритма выполнены, и следует переходить к указанию свободных переменных, при этом уравнение, соответствующее нулевой последней строке, можно отбросить, так как ему удовлетворяют любые $\langle x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\rangle$

$$\left\{\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 &= 1, \\ -1x^2 + 8x^3 \qquad + 5x^5 &= 1, \\ 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 &= 1. \end{aligned}\right. \tag{44.x}$$

3. Для п. 8—10 алгоритма тоже удобнее использовать матрицы, выделим квадратную часть основной матрицы системы (приведенной к ступенчатому виду):

$$\left(\begin{array}{ccc:cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Этому соответствует выделение переменных: x^4, x^5 — в качестве свободных, а x^1, x^2, x^3 — зависимых.

Далее, согласно методу Гаусса, надо выражать неизвестную x^3 в третьем уравнении через свободные переменные x^4 и x^5, подставлять ее во второе уравнение и т. д. Однако, этот процесс проделать в матричной форме удобнее следующим образом. Сначала приведем отделенную слева квадратную матрицу к диагональному виду «снизу вверх», преобразуя при этом строки всей (расширенной) матрицы (по существу это равносильно операциям п. 11 метода Гаусса: выражение неизвестной через неизвестные с большими номерами их индексов, и подстановка их в предыдущее уравнение):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 5 & \vline & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \vline & 1 \end{pmatrix} \overset{(2)-4(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & -3 & \vline & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \vline & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(1)+(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -11 & -2 & \vline & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & -3 & \vline & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \vline & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(1)-1/2(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -25/2 & -4 & \vline & -5/2 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & -3 & \vline & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \vline & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем приведем ее к единичному виду, поделив каждую строку на ее диагональный (ненулевой!) элемент:

$$\underset{1/2(3)}{\overset{-1(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -25/2 & -4 & \vline & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 3 & \vline & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & \vline & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Это позволяет записать соответствующую матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - 25/2x^4 - 4x^5 = -5/2, \\ x^2 + 12x^4 + 3x^5 = 0, \\ x^3 + 3/2x^4 + 2x^5 = 1/2, \end{cases}$$

и сразу выразить зависимые переменные через свободные, перенося члены с ними в правую часть:

$$\begin{cases} x^1 = -5/2 + 25/2x^4 + 4x^5, \\ x^2 = -12x^4 - 3x^5, \\ x^3 = 1/2 - 3/2x^4 - 2x^5. \end{cases}$$

Таким образом, найден общий вид решений системы линейных уравнений (44.x), его можно записать кортежем:

$$\langle -5/2+25/2x^4+4x^5, \quad -12x^4-3x^5, \quad 1/2-3/2x^4-2x^5, \quad x^4, \quad x^5\rangle,$$

(где x^4 и x^5 принимают произвольные значения). Очевидно, что решений бесконечно много — их можно получать, давая всевозможные значения свободным переменным. В частности:

$$\langle -5/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 0\rangle,\ \langle 14,\ -15,\ -3,\ 1,\ 1\rangle,\ \langle 10,\ -12,\ 1,\ 1,\ 0\rangle,$$
$$\langle 3/2,\ -3,\ -3/2,\ 0,\ 1\rangle,\ \langle 6,\ -9,\ 1,\ 1,\ -1\rangle \text{ и т. д.}$$

Для записи решений системы уравнений удобно использовать матричную форму:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2+25/2x^4+\ \ 4x^5 \\ -\ \ 12x^4-\ \ 3x^5 \\ 1/2-\ 3/2x^4-4/2x^5 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + x^4 \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравните ответ с примером 46.1. ◆

З а м е ч а н и е 48.2. Подчеркнем, что метод Гаусса применим к решению как неоднородных, так и однородных систем линейных уравнений. Так из полученного общего вида решений системы (48.x) вытекает, что общий вид решений соответствующей ей системе линейных однородных уравнений следующий:

$$\begin{cases} x^1 = +25/2x^4+4x^5, \\ x^2 = -\ \ 12x^4-3x^5, \\ x^3 = -\ \ 3/2x^4-2x^5, \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = x^4 \begin{pmatrix} -25/2 \\ 12 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З а д а ч а 48.1.1. Определите, совместна или нет система линейных уравнений, а в случае совместности найдите общий вид ее решений и несколько частных, сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x^1 + 4x^2 = 7, \\ 5x^1 + 3x^2 = 8, \\ \;\; x^1 + \;\; x^2 = 2. \end{cases}$$

Задача 48.1.2. Определите, совместна или нет система линейных уравнений, в случае совместности найдите общий вид ее решений и какое-либо частное решение, сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x^1 + \;\; x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 5x^2 + x^3 = 8, \\ 4x^1 - 3x^2 + x^3 = 2. \end{cases}$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Боги открыли людям не все. В поиск пустившись, люди сами открыли немало.

Ксенофан

Как упомянуто в исторической справке лекции 5, понятие матрицы возникло в XVII веке, как удобный аппарат при исследовании систем линейных уравнений. Подобные системы решали еще математики Древнего Вавилона, причем методами, близкими к современным методам их решений в элементарной математике: выражением одной переменной через другие с последующими подстановками в остальные уравнения системы. Любопытно, что на протяжении почти двух тысячелетий преобладало мнение, что нерешенных проблем в этой области нет, поскольку довольно несложные правила (теперь мы говорим — алгоритмы) всегда приводили к решению требуемой системы n линейных уравнений с n неизвестными (а другие системы таких уравнений просто не рассматривались) и невырожденной основной матрицей. Если все же какая-либо задача сводилась к системе линейных уравнений, число которых оказывалось меньше числа переменных, то от поисков ее решений отказывались, полагая, что задача плохо поставлена. Интересно, что решение общего вида в случае невырожденности основной матрицы системы линейных уравнений было получено и описано независимо друг от друга многими учеными (Лейбниц, Крамер, Лагранж и другие).

Понадобилось время, чтобы в результате развития и применения координатного метода в геометрии возникла возможность (и потребность!) геометрических истолкований систем линейных уравнений, в том числе и тех, число уравнений в которых не равно числу переменных. (Например, система линейных уравнений с тремя переменными ранга $\langle 2, 2\rangle$ определяет прямую в пространстве, как линию пересечения плоскостей). С другой стороны, оказалось, что в области дифференциальных уравнений, которая была приоритетной для многих математиков XIX в., решения линейных дифференциальных уравнений и их систем (где удалось сделать значительное продвижение) тоже привели к необходимости более тщательного исследования самого понятия решения системы алгебраических линейных уравнений.

Однако, случай линейной зависимости строк основной матрицы такой системы долгое время не поддавался описанию. Один из исследователей вопроса К. Г. Якоби про подобную систему уравнений писал: «paulo proxium viedetur» — она не может быть кратко истолкована.

Несколько позже с аналогичными трудностями столкнулись в изучении аффинных квадрик, квадратичных и билинейных форм: проблемы возникали в тех областях, где матрицы уже были признаны, как наиболее точный и удобный язык описания.

В 1849 г. Гаусс предложил свой метод решения систем линейных уравнений — алгоритм последовательного исключения переменных. Проводя вычисления согласно этому алгоритму, можно для любой системы уравнений ответить на вопросы: имеет она решения или нет, а в первом случае — найти их все (даже указать общий вид). Однако, во-первых, для систем с большим числом уравнений и неизвестных вычисления по методу Гаусса очень объемны (хотя теперь с созданием и использованием электронной вычислительной техники это не составляет трудностей и все решения систем линейных уравнений компьютерными средствами проводятся, как правило, по алгоритму Гаусса). Во-вторых, желательно было получить какую-либо простую характеристику системы, по которой можно было бы, по крайней мере, узнать, имеется ли у нее решение.

Отысканием такого критерия во второй половине XIX в. активно занимались многие математики, но ответ был получен только к его концу.

Решение проблемы нашел и познакомил с ним в 1882—1883 г.г. слушателей своих лекций в Берлинском университете немецкий математик Л. Кронекер (Kronecker Leopold, 1823—1891), а удачно и кратко сформулировал, используя понятие ранга матрицы, в 1892 г. другой ученый — итальянский математик А. Капелли (Capelli Alfredo, 1855—1910). Теперь этот критерий разрешимости систем линейных уравнений носит их имена: теорема Кронекера — Капелли. Так было завершено построение общей теории линейных уравнений, исследования которых начали вавилонские ученые еще до нашей эры.

Однако, исследования в области систем линейных уравнений продолжаются, они стали более чем актуальными в связи с применением в исследованиях электронных вычислительных средств, необходимостью экстраполировать различные задачи со многими параметрами в физике, космонавтике, экономике, некоторых разделах математики. Представляет большой практический интерес построение алгоритмов получения решений с минимальной допустимой погрешностью, так как, например, при решении на ЭВМ достаточно «больших» систем линейных уравнений непосредственно методом Гаусса погрешность вычислений растет столь быстро, что зачастую он оказывается просто непригодным. Существенно и то, чтобы разрабатываемые алгоритмы были достаточно «короткими», т. е. не требовали бы слишком много машинного времени, а получаемые им решения в некотором смысле — устойчивыми. Некоторые модификации так называемого метода прогонки решения систем уравнений дают в настоящее время достаточно хорошие и точные результаты. Так что хотя общая теория систем линейных уравнений и была завершена к концу XIX в., представляется вполне вероятным, что новые практические задачи выдвинут новые проблемы в этой старейшей области математики.

Причина всех долгих неудач заключалась в отсутствии в аппарате предшествующих исследователей понятия ранга матрицы, а поскольку решения таких систем разных рангов имеют «различное поведение», то оно и не могло быть описано единой общей формулой, которую пытались найти исследователи. Можно сказать, что, если бы не открытие в конце XIX века ранга матрицы, то решения многих серьезных задач в различных областях математики и физики, где универсальность и удобство матричного аппарата находили ему применения, были бы отодвинуты на много лет. К счастью, этого не произошло, в основном благодаря Дж. Сильвестру, Л. Кронекеру и Г. Фробениусу, также профессору Берлинского университета. Значение понятия ранга матрицы, как это ни странно, по-видимому, было осознано далеко не сразу, для этого понадобилось более десяти лет. Приоритет его открытия принадлежит Дж. Сильвестру (50-е годы XIX в.), а его основного приложения — в теории систем линейных уравнений — Л. Кронекеру, но известно, что этот ученый настолько беспечно относился к публикациям и оформлению результатов своих исследований, что даже сам термин «ранг матрицы» был введен не им, а его учеником Г. Фробениусом (1877 г.).

Открытие такой важной характеристики матрицы, как ее ранг, сразу продвинуло работу во всех областях математики, так или иначе связанных с этим вопросом. Важность его можно подчеркнуть еще и тем, что без понятия ранга матрицы трудно, а зачастую и невозможно говорить о матричных интерпретациях многих задач геометрической или физической природы, квантовой механики, исследованиях функций многих переменных.

Следующая лекция посвящена линейным отображениям и операторам, важными характеристиками этих отображений являются ядро и ранг, которые, в конечном счете, определяются посредством ранга матрицы, сопоставленной определенным образом линейному отображению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—512 с.
2. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.—296 с.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.—336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.—480 с.
6. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.
7. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.—496 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 43. Ранг матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду

[2] — стр. 198—203.
[3] — стр. 58.
[5] — стр. 67—69.
[3] — стр. 73—74.

§ 44*. Ранг матрицы

[1] — стр. 346—349.
[2] — стр. 188—191, 239—240.
[3] — стр. 40— 42.
[4] — стр. 166—172.
[5] — стр. 62—67.
[6] — стр. 17—20.
[7] — стр. 72—77.

§ 45°. Эквивалентные системы линейных уравнений

[2] — стр. 186—188.
[5] — стр. 346—350.

§ 46. Общее решение системы линейных однородных уравнений

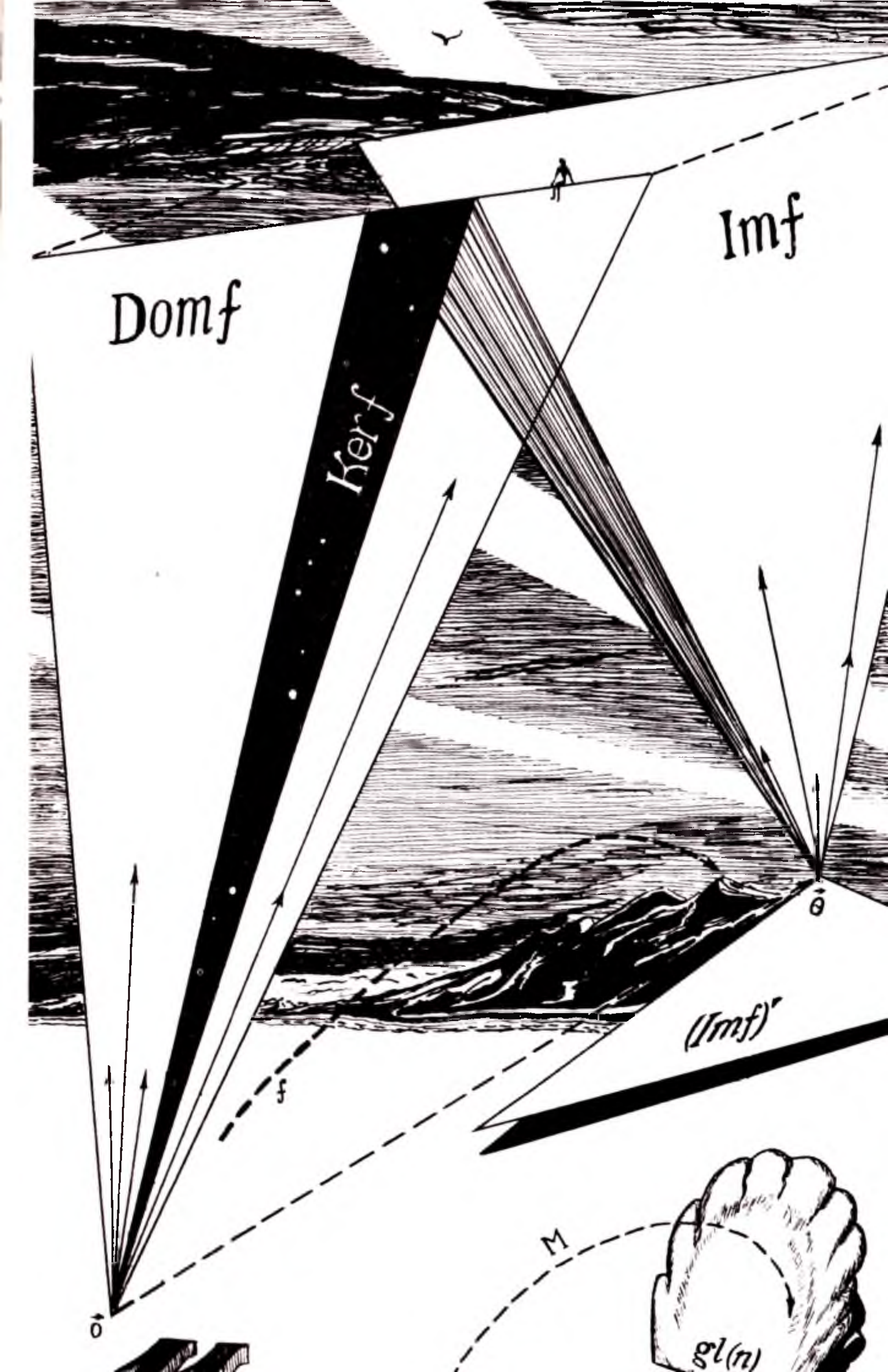
[2] — стр. 203—206.
[3] — стр. 69— 70.
[4] — стр. 177—180.
[7] — стр. 92—95.

§ 47′. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений

[1] — стр. 374—376.
[2] — стр. 193—195.
[3] — стр. 77— 82.
[4] — стр. 180—182.
[5] — стр. 83—84.
[7] — стр. 95—96.

§ 48′. Метод последовательного исключения переменных

[1] — стр. 349—354.
[2] — стр. 206—208.
[4] — стр. 168—173.
[5] — стр. 78—82.



Imf
Domf
Kerf
(Imf)'
f
M
gl(n)

Лекция 11

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

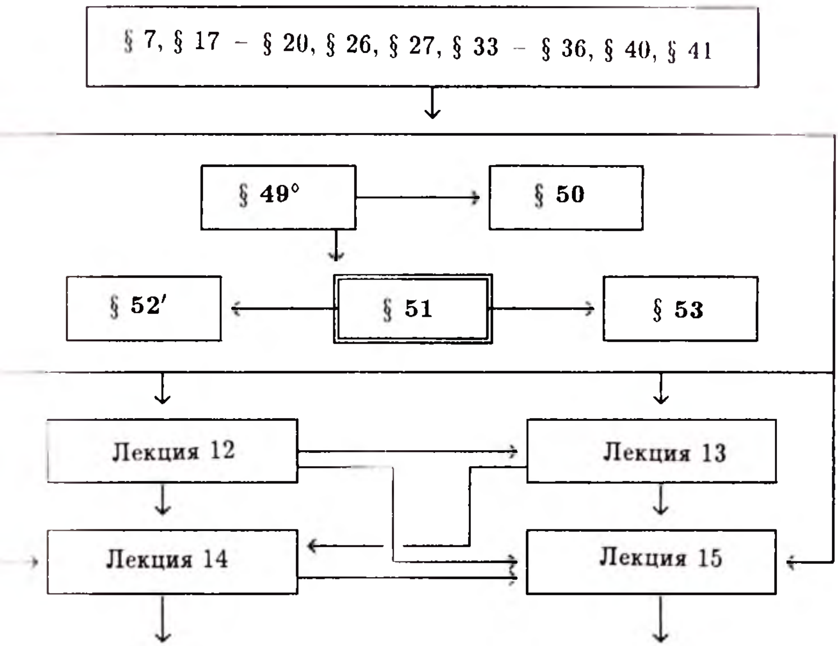
ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 49°. Координаты вектора.
§ 50. Ориентация векторного пространства.
§ 51. Линейные отображения векторных пространств.
§ 52′. Пространство линейных отображений.
§ 53. Матрица линейного отображения.

Основные понятия: координаты вектора, матрица перехода от базиса к базису, ориентация векторного пространства, линейное отображение (гомоморфизм) векторных пространств, нулевое отображение; отображение, противоположное данному, пространство линейных отображений, двойственное векторное пространство, пространство линейных отображений, матрица линейного отображения.

Необходимые сведения: векторное пространство, координатное векторное пространство, базис и размерность векторного пространства, конечномерное векторное пространство, подпространство векторного пространства, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, матрица, определитель матрицы, свойства определителей, отображение, образ и прообраз элемента, равенство отображений, сужение отображения, матрица, операции на матрицах, обратимые матрицы.

Рекомендации: § 49° предлагается для самостоятельного изучения, а § 52′— для обсуждения на практических занятиях, если пособие использовать в качестве аудиторного учебного материала.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23—§ 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств. (§ 49—§ 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов.

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 49°. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ

Слово «координаты» латинского происхождения, от co — совместно и ordinatus — упорядоченный, определенный. Это некоторые числа, взятые в определенном порядке, которые однозначно определяют «положение элемента», в нашем случае — вектора. В дальнейшем будут рассматриваться преимущественно конечномерные векторные пространства, что упрощает само понятие и доказательства свойств координат.

Понятие «координаты вектора» тесно связано с базисом векторного пространства, поэтому напомним

Определение 41.1. *Конечная упорядоченная система векторов называется **базисом** векторного пространства V, если*

В. 1 *она линейно независима.*

В. 2: *любой вектор из V линейно выражается через векторы этой системы.*

Определение 49.1. *Коэффициенты разложения вектора векторного пространства $\langle V, B\rangle$ в линейную комбинацию базисных векторов называются **координатами вектора** в данном базисе.*

Здесь $\langle V, B\rangle$ — векторное пространство V с фиксированным в нем базисом B. Если $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$ — базис в V, то всякий вектор $\vec{x}\in V$, в силу свойства В. 2 базиса, можно представить в виде линейной комбинации:

$$\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^n\vec{e}_n=x^i\vec{e}_i.$$

Его координаты образуют кортежи, которые обозначают: $\langle x^1,\ x^2, \dots x^n\rangle_B$ или $(x^1,\ x^2, \dots x^n)_B$, и пишут $\vec{x}\,(x^1,\ x^2, \dots x^n)_B$ или $\vec{x}=(x^1,\ x^2, \dots x^n)_B$.

Известно (§ 41), что в ненулевом векторном пространстве можно задать сколь угодно много базисов, однако, если из контекста понятно, о каком из них идет речь, или рассматривается только один базис, то индекс у кортежа координат, как правило, не указывается: $(x^1,\ x^2, \dots x^n)$. Часто удобнее пользоваться записью координат вектора в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

В первом случае говорят о координатной строке вектора, во втором — о его координатном столбце.

Свойства координат векторов

Свойство 49.1. *Координаты любого вектора относительно данного базиса определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$ — базис V^n и вектор $\vec{x}\in V^n$ имеет два различных кортежа координат в этом базисе: $\langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle \neq \langle y^1, y^2, \dots y^n\rangle$.

Это означает, что

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^n\vec{e}_n\\ \vec{x}=y^1\vec{e}_1+y^2\vec{e}_2+\dots+y^n\vec{e}_n\end{array}\right] \overset{?}{\Rightarrow} (x^1-y^1)\vec{e}_1+\dots+(x^n-y^n)\vec{e}_n=\vec{0} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} x^i=y^i \text{ при всех } i=1, 2, \dots n, \text{ т. е.}$$

$\langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle=\langle y^1, y^2, \dots y^n\rangle$. Это противоречие показывает, что никакой вектор из векторного пространства $\langle V^n, B\rangle$ не может иметь различные кортежи координат. ■

По существу, указанием координат вектора мы задаем бинарное отношение на $V^n\times R^n$:

$$\mathscr{C}_B^n=\{\langle\vec{x}, \langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle_B\rangle \mid \vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^n\vec{e}_n \wedge B \text{ — базис } V^n\}$$

с областью определения $\mathrm{Dom}\,\mathscr{C}_B^n=V^n$. Свойства этого отношения и составляют свойства координат векторов. Однозначность определения координат каждого вектора означает, что отношение $\mathscr{C}_B^n\subset\langle V^n, B\rangle\times\mathbf{R}^n$, есть отображение $\mathscr{C}_B^n: V^n\to\mathbf{R}^n$.

Свойство 49.2. *Отображение, сопоставляющее вектору его координаты, биективно.*

Задача 49.1.1. Докажите свойство 49.2.

Доказательство. Пусть $\langle V^n, B\rangle$, а $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$. Биективность отображения $\mathscr{C}_B^n$ означает, что оно и сюръективно и инъективно.

1. Установим его сюръективность (определение 9.1), т. е. что любой числовой кортеж длины n: $\langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle\in\mathbf{R}^n$, является координатами некоторого вектора из V^n. Для этого возьмем линейную комбинацию векторов базиса с данными коэффициентами:

$$x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\dots+x^n\vec{e}_n=\vec{x}\overset{?}{\in}L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)\overset{?}{=}V^n.$$

Это и означает, что $\mathscr{C}_B^n(\vec{x})=\langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle$ и сюръективность отображения $\mathscr{C}_B^n$.

2. Инъективность отображения (определение 9.2) $\mathscr{E}_B^n$ означает, что

$$\left.\begin{array}{l}\langle \vec{x},\ \langle x^1,\ x^2, \dots x^n\rangle\rangle \in \mathscr{E}_B^n \\ \langle \vec{y},\ \langle x^1,\ x^2, \dots x^n\rangle\rangle \in \mathscr{E}_B^n\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} \overset{?}{=} \vec{y}.$$

Действительно, по определению координат вектора (отображения $\mathscr{E}_B^n$):

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n, \text{ и } \vec{y} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n,$$

а значит $\vec{x} = \vec{y}$ и $\mathscr{E}_B^n$ инъективно. ■

Мы отмечали, что $\boldsymbol{M}(n \times 1)$ — одно из представлений (форм записи) $\mathbf{R}^n$, так что, записав $\mathbf{R}^n$ в виде $\boldsymbol{M}(n \times 1)$, получим (по свойствам 49.1 и 49.2) биективность отображения:

$$M_B : V^n \to \boldsymbol{M}(n \times 1) \mid M_B : \vec{x} \to \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = M_B(\vec{x}).$$

Если в векторном пространстве рассматривается один базис, то индекс базиса в обозначении отображения не пишется: $M(\vec{x}) \overset{\text{des}}{=} M_{\vec{x}}$.

На основании свойств векторного пространства (определение 33.1, V 7, V 8) и координат вектора (свойство 49.1) не составляет особого труда доказать следующее.

Свойство 49.3. *Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых.* ◆

Свойство 49.4. *Координаты произведения скаляра на вектор равны произведению этого скаляра на соответствующие координаты вектора.* ◆

Обобщив эти свойства, получим утверждение.

Утверждение 49.1. *Координаты линейной комбинации векторов равны линейным комбинациям их соответствующих координат с теми же коэффициентами.*

Далее речь пойдет о свойствах координат и координатных признаках коллинеарности и компланарности векторов. Из свойства 49.4 вытекает очевидное утверждение.

Следствие 49.1. *Два вектора коллинеарны* (определение 37.1) *тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.*

Пропорциональность координат векторов $\vec{a}(a^1,\ a^2, \dots a^n)$ и $\vec{b}(b^1,\ b^2, \dots b^n)$ означает

$$\frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2} = \dots = \frac{a^n}{b^n} \text{ или } \frac{b^1}{a^1} = \frac{b^2}{a^2} = \dots = \frac{b^n}{a^n}$$

в случае, когда ни один из них не имеет нулевых координат. Если же знаменатель хотя бы одной дроби равен 0, то под пропорциональностью понимается требование равенства 0 и ее числителя.

Свойство 49.5. *Два вектора* $\vec{a}(a^1, a^2, \dots a^n)$ и $\vec{b}(b^1, b^2, \dots b^n)$ *коллинеарны* (определение 37.1) *тогда и только тогда, когда все определители второго порядка, составленные из их соответствующих координат, нулевые.*

Так если $\{\vec{a}(a^1, a^2, a^3), \vec{b}(b^1, b^2, b^3)\} \subset V^3$, то

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 49.1.2. Докажите свойство 49.5 для $\{\vec{a}, \vec{b}\} \in V^3$.
Доказательство.

$$\vec{a}(a^1, a^2, a^3) \parallel \vec{b}(b^1, b^2, b^3) \overset{?}{\Rightarrow} \vec{a} = \lambda\vec{b} \vee \vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Пусть $\vec{a} = \lambda\vec{b} \overset{?}{\Leftrightarrow} a^i = \lambda b^i$ при всех $i = 1,2,3 \overset{?}{\Leftrightarrow} \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \leqslant 1$, что по теореме 44.1 о ранге матрицы означает

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0,$$

Случай $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, очевидно, аналогичен. ■

Свойство 49.6. *Три вектора трехмерного векторного пространства компланарны* (определение 39.1) *тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю.*

Т. е. $\{\vec{a}(a^1, a^2, a^3), \vec{b}(b^1, b^2, b^3), \vec{c}(c^1, c^2, c^3)\} \subset V^3$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 49.1.3. Докажите свойство 49.6.

Доказательство. По определению 39.1 компланарность трех векторов $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$, $\vec{c}(c^1, c^2, c^3)$ означает их линейную зависимость. По свойству 38.? один из них, например,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \xLeftrightarrow{\text{утв. 49.1.}} c^i = \alpha a^i + \beta b^i \text{ при всех } i = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \overset{\text{св. 27.?}}{=\!=} 0. \qquad \blacksquare$$

Попробуйте сформулировать и доказать критерий компланарности для трех векторов из $\langle V^n, B\rangle$, т. е. обобщить результат на конечномерное векторное пространство произвольной размерности. Компланарность векторов $\vec{a}(a^1, a^2, \dots a^n)$, $\vec{b}(b^1, b^2, \dots b^n)$, $\vec{c}(c^1, c^2, \dots c^n)$ означает, что, например, $\vec{c} \overset{?}{=} \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $c^i \overset{?}{=} \alpha a^i + \beta b^i$ при всех $i = 1, 2, \dots n$, а это, в свою очередь, что

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \dots a^n \\ b^1 & b^2 \dots b^n \\ c^1 & c^2 \dots c^n \end{pmatrix} \overset{?}{<} 3. \qquad \blacklozenge$$

Обобщением последних свойств является следующее утверждение.

Утверждение 49.2. *Система векторов* $\{\vec{a}_j(a_j^1, a_j^2, \dots a_j^n)\}_1^m$ *векторного пространства* $\langle V^n, B\rangle$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Rang}\|a_j^i\| < m$.

Т. е. система из m векторов n-мерного векторного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из их координатных строк (или столбцов), меньше числа этих векторов.

Напоминание: $\{\vec{a}_j\}_1^m \overset{\text{des}}{=\!=} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_m\}$.

Если заметить, что

$$\operatorname{Rang}\|a_j^i\| \overset{?}{=} \operatorname{Rang}\{M(\vec{a}_1), M(\vec{a}_2), \dots M(\vec{a}_n)\},$$

то доказательство этого утверждения будет тривиально следовать из двух очевидных лемм.

Лемма 49.1. *Система векторов* $\{\vec{a}_j(a_j^1, a_j^2, \dots a_j^n)\}_1^m$ *векторного пространства* $\langle V^n, B\rangle$ *линейно зависима (независима) тогда и только тогда, когда линейно зависима (независима) система координатных векторов-столбцов* $\{M(\vec{a}_j)\}_1^m$. $\blacklozenge$

Лемма 49.2. *Система векторов* $\{\vec{a}(a_j^1, a_j^2, \dots a_j^n)\}_1^m \subset V$ *имеет ранг равный* r *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Rang}\|a_j^i\| = r$. $\blacklozenge$

Доказательство утверждения 49.2: Линейная зависимость системы векторов $\{\vec{a}_j(a_j^1, a_j^2, \dots a_j^n)\}_1^m \subset V$ означает (определения 41.1, 41.6), что $\operatorname{Rang}\{\vec{a}_j\}_1^m = r < m$. Тогда согласно лемме 49.2 $\operatorname{Rang}\|a_j^i\| = r < m$. $\square$

§ 50. ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Известно (утверждение 41.3), что в ненулевом векторном пространстве можно задать сколь угодно много базисов, так, например, в трехмерном векторном пространстве базис образует любая тройка некомпланарных векторов: $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$. Относительно этого базиса координаты этих векторов, соответственно: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Однако, $\langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle$ — тоже базис, и относительно него те же векторы: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеют координаты: (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0). ◆

Поэтому вполне естественно возникает вопрос — можно ли указать закон изменения координат произвольного вектора при замене базиса?

Пусть в векторном пространстве V^n указаны два базиса: $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ и $B' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}'_2, \dots \vec{e}'_n \rangle$. Так как всякий вектор из V^n разложим в линейную комбинацию базисных,то можем представить

$$\vec{e}'_j = t_j^1 \vec{e}_1 + t_j^2 \vec{e}_2 + \dots + t_j^n \vec{e}_n \qquad (50.B')$$

при любом $j = 1, 2, \dots n$, или указать кортеж координат каждого базисного вектора $\vec{e}'_j$: $(t_j^1, t_j^2, \dots t_j^n)_{B'}$. Если координаты всех этих векторов заданы, то говорят, что ***базис** B' **задан относительно базиса** B*.

В задачах, где базис B' задается относительно базиса B, последний часто называют «старым», а базис B' — «новым», а координаты вектора $\vec{x} \in V^n$ относительно базисов B и B', соответственно, «старыми» и «новыми».

Определение 50.1. *Матрица, составленная из координатных столбцов векторов $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots \vec{e}'_n \rangle$ базиса B' относительно базиса B векторного пространства V^n, называется **матрицей перехода от базиса B к базису B'**.*

Обозначается матрица перехода от базиса B к базису B^1: $T_{\langle B, B' \rangle} = \| t_j^i \| \in M\,(n \times n)$.

$$T_{\langle B, B' \rangle} = \begin{pmatrix} t_2^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \vec{e}'_1 & (t_1^1, t_1^2, \dots t_1^n)_B \\ \vec{e}'_2 & (t_2^1, t_2^2, \dots t_2^n)_B \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{e}'_n & (t_n^1, t_n^2, \dots t_n^n)_B \end{matrix} \qquad (50.T)$$

В такой матрице $\|t^i_j\|$ верхний индекс указывает номер координаты вектора, а нижний индекс — номер вектора.

Несложно заметить, что, в частности: $T_{\langle B,\ B\rangle} = ?$. ♦

Если в векторном пространстве рассматриваются только два базиса и из контекста ясно, о каком переходе: от B к B' или от B' к B идет речь, то индекс у матрицы перехода обычно опускается и матрица обозначается просто T.

Задание 50.1. Определите, какие из следующих матриц могут быть матрицами перехода от одного базиса векторного пространства к его другому базису и почему? ♦

$$T_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ T_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ T_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ T_5=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_6=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\ T_7=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T_8=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\ T_9=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$T_{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}?$$

Результат выполнения этого задания позволяет высказать в качестве предположения следующее.

Утверждение 50.1. *Матрица $T=\|t^i_j\|$ может быть матрицей перехода от одного базиса векторного пространства к другому его базису тогда и только тогда, когда она квадратная и невырождена.* ♦

Задача 50.1.3. Докажите утверждение 50.1.

Доказательство.

1. Докажем, что $(T=T_{\langle B,\ B'\rangle})\Rightarrow(T\in \boldsymbol{GL}(n))$.

Пусть $B=\langle\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \dots\ \vec{e}_n\rangle$ и $B'=\langle\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \dots\ \vec{e}\,'_n\rangle$ — базисы в V^n, а $T=T_{\langle B,\ B'\rangle}=\|t^i_j\|$. Тогда $T\overset{?}{\in}\boldsymbol{gl}(n)$ и $\det T\overset{?}{\neq}0$. (См. леммы 49.1, 49.2, следствие 41.1).

2. Докажем обратное: $(T=\boldsymbol{GL}(n))\Rightarrow(T=T_{\langle B,\ B'\rangle})$.

$$\det T\neq 0 \xLeftrightarrow{\text{сл. } 44.1} \operatorname{Rang} T=n \xLeftrightarrow{\text{Т. } 44.1} \operatorname{Rang}\{T_j\}=$$

$$=n \xLeftrightarrow{\text{л. } 49.2} \operatorname{Rang}\{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \dots\ \vec{e}\,'_n\}=n \xRightarrow{\text{утв. } 41.3} \langle\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \dots\ \vec{e}\,'_n\rangle=B' —$$

базис в V^n. ■

Следствие 50.1. *Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к ее другому базису всегда обратима.* ♦

Задание 50.2. Найдите матрицы перехода от базиса

$B=\langle\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \dots\ \vec{e}_i,\ \dots\ \vec{e}_j,\ \dots\ \vec{e}_n\rangle$ к базисам: B', B'', B''', если $B' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \boxed{\lambda\vec{e}_i}, \dots \vec{e}_j, \dots \vec{e}_n \rangle$, где $\lambda \neq 0$,

$$B'' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \boxed{\vec{e}_j}, \dots \boxed{\vec{e}_n}, \dots \vec{e}_n \rangle, \ i < j \leqslant n,$$

$$B''' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \boxed{\vec{e}_i + \vec{e}_j}, \dots \vec{e}_j, \dots \vec{e}_n \rangle, \ i < j \leqslant n.$$

После того, как мы определили, что означает задать один базис векторного пространства относительно другого, можно поставить задачу о законе изменения координат произвольного вектора при замене базиса.

Постановка задачи. В векторном пространстве V^n указаны два базиса: B и B' с матрицей перехода $\underset{\langle B,\, B' \rangle}{T} = \| t^i_j \|$, а координатные столбцы произвольного вектора $\vec{x}$ обозначены для удобства: $M_{\vec{x}}$ относительно базиса B и $M'_{\vec{x}}$ относительно B':

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=\!=} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_B, \quad M'_{\vec{x}'} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=\!=} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}_{B'}.$$

Надо найти, как связаны координатные столбцы $\boldsymbol{M}_{\vec{x}}$ и $\boldsymbol{M}'_{\vec{x}}$ (координаты вектора $\vec{x}$ в базисах B и B').

Для всякого $\vec{x} \in \langle V^n, B' \rangle$ по определению координат (49.1)

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}'_1 + x^2 \vec{e}'_2 + \dots + x^n \vec{e}'_n.$$

Заменим базисные векторы $\vec{e}'_j$ $(j = 1, 2, \dots n)$ на их выражения через базисные векторы B.

$$\vec{x} \overset{(50.\,B')}{=\!=\!=} x'^1 (t^1_1 \vec{e}_1 + \dots + t^n_1 \vec{e}_n) + \dots + x'^n (t^1_n \vec{e}_1 + \dots + t^n_n \vec{e}_n) =$$

(сгруппируем члены, выделяя коэффициенты при $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$)

$$= (x'^1 t^1_1 + \dots + x'^n t^1_n)\, \vec{e}_1 + \dots + (x'^1 t^n_1 + \dots + x'^n t^n_n)\, \vec{e}_n. \qquad (50.x')$$

Так как координаты вектора определяются однозначно (свойство 49.1), а разложение вектора $\vec{x}$ по базису B имеет вид:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n, \qquad (50.x)$$

то, приравнивая соответствующие координаты (коэффициенты при векторах базиса B) в разложениях (50.x) и (50.x'), получим:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 t_1^1 + x'^2 t_2^1 + \ldots + x'^n t_n^1 \\ x'^1 t_1^2 + x'^2 t_2^2 + \ldots + x'^n t_n^2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ x'^1 t_1^n + x'^2 t_2^n + \ldots + x'^n t_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что последняя матрица представима в виде произведения и:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \ldots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_n^2 \\ .. & .. & \ldots & .. \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} \overset{(50.?)}{=\!=} T_{\langle B,\ B'\rangle} M'_{\vec{x}}.$$

Тем самым установлена зависимость между координатными столбцами вектора относительно разных базисов и доказана

Теорема 50.1. *Если в векторном пространстве V^n базис B' задан относительно базиса B матрицей $T_{\langle B, B'\rangle} = \| t_j^i \|$, то для любого вектора $\vec{x} \in V^n$:*

$$M_{\vec{x}} = T_{\langle B,\ B'\rangle} M'_{\vec{x}}, \tag{50.1}$$

$M_{\vec{x}}$ — столбец координат вектора $\vec{x}$ относительно B,

$M'_{\vec{x}}$ — столбец координат вектора $\vec{x}$ относительно B',

$T_{\langle B,\ B'\rangle}$ — матрица перехода от B к B'.

Следствие 50.2. *Так как матрица $T^{-1}_{\langle B,\ B'\rangle}$ обратима, то* ♦

$$M'_{\vec{x}} = T^{-1}_{\langle B,\ B'\rangle} M'_{\vec{x}}. \tag{50.2}$$

Задание 50.3. Разберите доказательство теоремы 50.1 с использованием свертки индексов:

$$\vec{x} = x'^i \vec{e}'_i = x'^i (t_i^j \vec{e}_j) = (t_i^j x'^i)\, \vec{e}_j = x^i \vec{e}_i.$$

По свойству 49.1 $x^j = t_i^j x'^i$ $(i = 1,\ 2, \ldots n)$. В матричной форме это соотношение означает (50.1). ■

Полезно заметить, что для всякого $\vec{x} \in V^n$:

$$M'_{\vec{x}} \overset{(50.1)}{=\!=} T_{\langle B',\ B\rangle} M_{\vec{x}} \overset{(50.2)}{=\!=} T_{\langle B',\ B\rangle} (T_{\langle B,\ B'\rangle} M'_{\vec{x}}) \overset{\text{V. 6}}{=\!=} (T_{\langle B',\ B\rangle} T_{\langle B,\ B'\rangle})\, M'_{\vec{x}}.$$

(Последнее — в силу ассоциативности умножения матриц).

Из матричного равенства:

$$M'_{\vec{x}} = (T_{\langle B',\ B\rangle} T_{\langle B,\ B'\rangle})\, M'_{\vec{x}} \qquad (50.*)$$

получим, что $E \overset{?}{=} T_{\langle B',\ B\rangle} T_{\langle B,\ B'\rangle}$, откуда

$$T_{\langle B',\ B\rangle} = T^{-1}_{\langle B,\ B'\rangle}. \qquad (50.3)$$

Замечание 50.1. Обоснованием «сокращения» равенства (50.*) на матрицу $M_{\vec{x}}$ является следующее утверждение.

Лемма (о сокращении) 50.1. *Если $\langle A, B\rangle \in \boldsymbol{M}^2(m \times n)$ и $A \cdot X = B \cdot X$ для всякой матрицы $X \in \boldsymbol{M}(n \times 1)$, то $A = B$.*

Ее доказательство не составляет большого труда и основано на понятии равенства матриц при последовательной подстановке вместо X матриц-векторов стандартного базиса в $\boldsymbol{M}(n \times 1)$. Доказательство существенно упрощается в частном случае этого соотношения: $X = A \cdot X$, с $A \in \boldsymbol{M}(n)$ и $X \in \boldsymbol{M}(n \times 1)$, который и требуется для вывода формулы (50.3). ◆

Транспонированием матричного равенства $A \cdot X = B \cdot X$ легко доказывается ее следствие.

Следствие 50.3. *Если $\langle A,\ B\rangle \in M^2(n \times m)$ и $X \cdot A = X \cdot B$ для всякой матрицы $X \in \boldsymbol{M}(1 \times n)$, то $A = B$.* ◆

Задача 50.1.1. Определите координаты вектора $\vec{x}\,(1,\ 2)_{B'}$, относительно базиса B, и вектора $\vec{y}\,(0,\ -1)_B$ относительно базиса B', если $T_{\langle B',\ B\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M_{\vec{x}} \overset{(50.1)}{=\!=} T_{\langle B,\ B'\rangle}\, M'_{\vec{x}} = ?. \qquad M_{\vec{y}} \overset{(50.2)}{=\!=} T^{-1}_{\langle B',\ B\rangle}\, M'_{\vec{y}} = ?.$$

Указание. Чтобы воспользоваться формулой (50.2), надо обратить матрицу $T_{\langle B',\ B\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, например, с помощью ее присоединенной матрицы $T^*_{\langle B',\ B\rangle}$ или дописыванием к $T_{\langle B',\ B\rangle}$ единичной и приведением левой части полученной матрицы порядка 2×4 к единичному виду. (См. § 21).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim ? \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right).$$

Задание 50.4. Укажите, как изменятся координаты вектора $\vec{x} \in \langle V^n,\ B\rangle$ при переходе к базисам: B', B'', B''' от базиса

$$B = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_i, \ldots \vec{e}_j, \ldots \vec{e}_n\rangle, \text{ если}$$

$$B' = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots \boxed{\lambda\vec{e}_i}, \ldots \vec{e}_j, \ldots \vec{e}_n\rangle, \text{ где } \lambda \neq 0,$$

$$B'' = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots \boxed{\vec{e}_j}, \ldots \boxed{\vec{e}_i}, \ldots \vec{e}_n\rangle,\ i<j\leqslant n,$$

$$B''' = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots \boxed{\vec{e}_i+\vec{e}_j}, \ldots \vec{e}_j, \ldots \vec{e}_n\rangle,\ i<j\leqslant n.$$

Указание. См. задание 50.2.

З а д а ч а 50.1.2. Определите, как меняются координаты вектора при последовательном переходе сначала от базиса B к базису B', а затем — к B''.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть B, B', B'' — базисы векторного пространства V^n с матрицами перехода: $T_{\langle B, B'\rangle}$ и, соответственно, $T_{\langle B', B''\rangle}$ и $T_{\langle B, B''\rangle}$. $\forall \vec{x} \in V^n$ обозначены координатные столбцы: $M_{\vec{x}}$ — в базисе B, $M'_{\vec{x}}$ — в базисе B' и $M''_{\vec{x}}$ — в базисе B''. Надо определить зависимость $M_{\vec{x}}$ от $M''_{\vec{x}}$, учитывая «протягивание» координат вектора $\vec{x}$ через базис B'. Т. е. координатный столбец $M_{\vec{x}}$ вектора $\vec{x}$ в базисе B выразим через $M'_{\vec{x}}$, последний — через координаты $\vec{x}$ в базисе B'', всякий раз действуя согласно формуле (50.1).

$$M_{\vec{x}} \underset{\langle B,\ B'\rangle}{\overset{(50.1)}{=\!=}} T_{\langle B,\ B'\rangle} M'_{\vec{x}} \underset{\langle B',\ B''\rangle}{\overset{(50.1)}{=\!=}} T_{\langle B,\ B'\rangle} (T_{\langle B',\ B''\rangle} M''_{\vec{x}}) \overset{?}{=}$$
$$= (T_{\langle B,\ B'\rangle} T_{\langle B',\ B''\rangle})\, M''_{\vec{x}}.$$

С другой стороны, согласно той же формуле

$$M_{\vec{x}} \underset{\langle B,\ B''\rangle}{\overset{(50.1)}{=\!=}} T_{\langle B^?,\ B^?\rangle} M'_{\vec{x}}.$$

Сравнивая две формы выражения $M_{\vec{x}}$ через $M''_{\vec{x}}$, получим, что

$$T_{\langle B,\ B''\rangle} \overset{?}{=} T_{\langle B,\ B'\rangle} T_{\langle B',\ B''\rangle}. \qquad (50.4)$$

Таким образом, доказано утверждение.

У т в е р ж д е н и е 50.2. *Если в векторном пространстве V^n заданы базисы: B, B', B'' с матрицами перехода, соответственно: $T_{\langle B, B'\rangle}$, $T_{\langle B', B''\rangle}$ и $T_{\langle B, B''\rangle}$, то*

$$T_{\langle B,\ B''\rangle} = T_{\langle B,\ B'\rangle} T_{\langle B',\ B''\rangle}. \qquad (50.5)$$

Отсюда легко может быть получена еще раз формула

$$T_{\langle B',\, B\rangle} = T^{-1}_{\langle B,\, B'\rangle}, \qquad (50.6)$$

так как $T_{\langle B,\, B'\rangle} T_{\langle B',\, B\rangle} \overset{?}{=} T_{\langle B,\, B\rangle} \overset{?}{=} E$, откуда $T_{\langle B',\, B\rangle} \overset{?}{=} T^{-1}_{\langle B,\, B'\rangle}$.

С заданием базиса векторного пространства относительно его другого базиса связано понятие ***ориентированности векторного пространства.***

Определение 50.2. ***Базис*** *B векторного пространства V называется* ***одинаково ориентированным с базисом*** *B′, если* $\det T_{\langle B,\, B'\rangle} > 0$, и ***противоположно ориентированым*** *с B′, если* $\det T_{\langle B,\, B'\rangle} < 0$.

Задание 50.5. Определите, есть ли среди отношений на множестве всех базисов «быть одинаково ориетированными»: $O = \{\langle B,\ B'\rangle \mid \{B,\ B'\} \subset (V^n)^n \wedge B,\ B'$ — базисы $\wedge \det T_{\langle B,\, B'\rangle} > 0\}$ и «противоположно ориентированными»:

$\overline{O} = \{\langle B,\ B'\rangle \mid \{B,\ B'\} \subset (V^n)^n \wedge B,\ B'$ — базисы $\wedge \det T_{\langle B,\, B'\rangle} < 0\}$ отношение эквивалентности?

Для бинарного отношения O проверим выполнимость условий:

1) рефлексивность — $\langle B,\ B\rangle \overset{?}{\in} O$. ◆

2) симметричность — $(\langle B,\ B'\rangle \in O \overset{?}{\Rightarrow} (\langle B',\ B\rangle \in O)$. ◆

3) транзитивность — $\left(\begin{matrix}\langle B,\ B'\rangle \in O \\ \langle B',\ B''\rangle \in O\end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (\langle B,\ B''\rangle \in O)\Big)$. ◆

Это означает, что O — является отношением эквивалентности.

Для бинарного отношения $\overline{O}$? не ? выполняется рефлексивность — $\langle B,\ B\rangle \overset{?}{\notin} \overline{O}$.

Предыдущие рассуждения по существу являются доказательством следующего.

Утверждения 50.3. *На множестве всех базисов векторного пространства отношение «быть одинаково ориентированными» является отношением эквивалентности, а отношение «быть противоположно ориентированными» отношением эквивалентности не является.*

Следствие 50.4. *Множество всех базисов векторного пространства* (по теореме 16.3) *разбивается на два непересекающихся класса эквивалентности одинаково ориентированных базисов.*

Определение 50.3. *Класс эквивалентности множества всех базисов векторного пространства по отношению их одинаковой ориентированности называется* ***ориентацией векторного пространства.***

Таким образом, во всяком ненулевом векторном пространстве есть только два вида (класса) его ориентации.

Определение 50.4. ***Векторное пространство*** *также называют* ***ориентированным****, если в нем указан (фиксирован) некоторый базис.*

Как правило, в дальнейшем будут рассматриваться ориентированные векторные пространства.

Замечание 50.2. Согласно утверждению 41.3 любые n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства образуют его базис. Это позволяет, упорядочив такие системы и рассматривая каждую из них, как базис, ввести понятие взаимной ориентации любых двух из них.

Определение 50.5. ***Две упорядоченные системы*** *по n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства называются* ***одинаково (противоположно) ориентированными****, если они одинаково (противоположно) ориентированы как базисы этого векторного пространства.*

В векторном пространстве свободных векторов $\mathscr{V}^3$ принято называть ориентацию базисной (некомпланарной) тройки векторов $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ «***левой***», если по ее векторам $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ можно направить пальцы левой руки в таком порядке: большой, средний, указательный, и ***«правой»*** — если в таком же порядке используем пальцы правой руки. Такие базисы, очевидно, имеют разную ориентацию (рис. 6).

Сходным образом определяются левый и правый базисы в векторном пространстве $\mathscr{V}^2$ свободных компланарных векторов

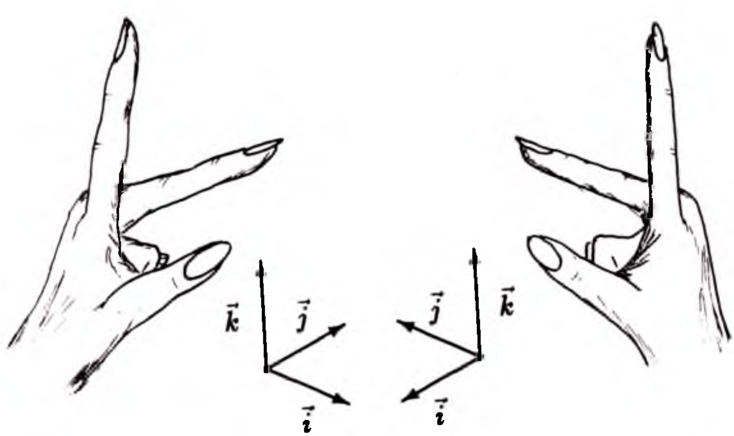


Рис. 6

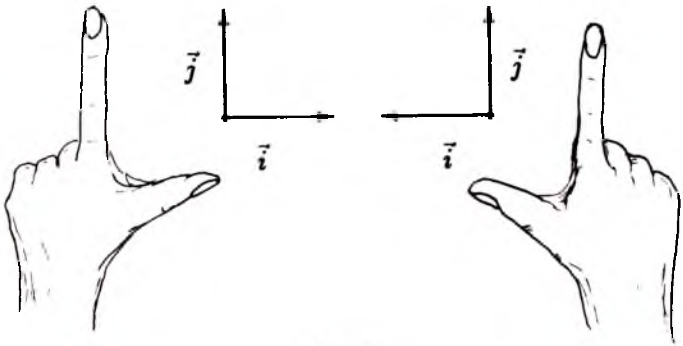


Рис. 7

(пальцы: большой и указательный левой и, соответственно, правой руки), они тоже — разной ориентации (рис. 7).

В $\mathscr{V}^1$ — векторном пространстве всех коллинеарных свободных векторов согласно следствию 50.4 также две ориентации, приведите примеры одинаково и противоположно ориентированных базисов в этом пространстве. ♦

§ 51. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Можно сказать, что одним из основных по значимости и многочисленности областей применения как в алгебре, так и в геометрии, является векторное пространство линейных отображений.

Определение 51.1. ***Отображение*** *f векторного пространства $\langle U, +, \cdot\rangle$ в векторное пространство $\langle V, \oplus, \odot\rangle$ называется* ***линейным*** *или* ***гомоморфизмом векторного пространства U в векторное пространство V****, если оно удовлетворяет двум условиям:*

L. 1 $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) \oplus y(\vec{y}) \qquad \forall\ \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \in U^2,$

L. 2 $f(\lambda\vec{x}) = \lambda \odot f(\vec{x}) \qquad \forall\ \langle \lambda, \vec{x}\rangle \in \mathbf{R}\times U.$

В литературе (например, [2], [3]) встречаются для этого понятия и другие названия: ***линейный оператор, линейное преобразование.***

Обозначение множества всех гомоморфизмов векторного пространства U в векторное пространство V: ***Hom***(U, V).

Интересно, что само множество ***Hom***(U, V) также может быть наделено естественной структурой векторного пространства, это будет сделано позднее, в § 52.

Слово гомоморфизм греческого происхождения: ὁμὸζ — одинаковый, похожий, подобный, а μορφη — форма, образ, т. е. можно приблизительно перевести как «одинаковообразное» или «похожеобразное отображение».

Следует заметить, что

$$\{\vec{x}+\vec{y},\ \lambda\vec{x}\}\subset U,\ \text{а}\ \{f(\vec{x})\oplus f(\vec{y}),\ \lambda\odot f(\vec{x})\}\subset V,$$

чтобы подчеркнуть это, для операций векторных пространств U и V введены разные обозначения, по-разному будут обозначаться и их нейтральные элементы: $\vec{0}\in U$ и, соответственно, $\vec{0}'\in V$.

Суть свойств (условий) линейности отображения в следующем:

1) $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\}\subset U$, а $\{f(\vec{x})\oplus f(\vec{y}),\ \lambda\odot f(\vec{x})\}\subset V$, но на V есть операция сложения векторов и, значит, $f(\vec{x})\oplus f(\vec{y})\in V$. Свойство L. 1 означает, что для любых векторов $\{\vec{x}, \vec{y}\}\subset U$ образ их суммы $f(\vec{x}+\vec{y})\in V$ совпадает с суммой их образов: $f(\vec{x})\oplus f(\vec{y})\in V$.

2) Аналогично L. 2: для любого числа и вектора $\langle\lambda, \vec{x}\rangle\in\mathbf{R}\times U$ образ вектора $\lambda\vec{x}\in U$ под действием отображения f совпадает с $\lambda\odot f(\vec{x})$ — произведением в V числа λ на образ вектора $\vec{x}$.

Таким образом видно, что свойства L.1 и L.2 накладывают определенные ограничения на отображение $f: U\to V$.

Эти условия удобно изобразить схемой (рис. 8).

Рассмотрим несколько примеров отображений векторных пространств:

Пример 51.1. Отображение

$$f_1: \boldsymbol{M}(2\times 1)\to \boldsymbol{M}(3\times 1) \mid\ \forall\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}\ f_1(\vec{x})=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\0\end{pmatrix},\ \text{т. е.}$$

$$f_1\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\0\end{pmatrix} \qquad (51.f_1)$$

линейно.

Проверим второе условие линейности отображения:

L. 2: $f_1(\lambda\vec{x})\overset{?}{=}\lambda_1 f(\vec{x}),\ \forall\ \langle\lambda,\ \vec{x}\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{M}(2\times 1)$.

Рассмотрим левую часть этого выражения, в котором:

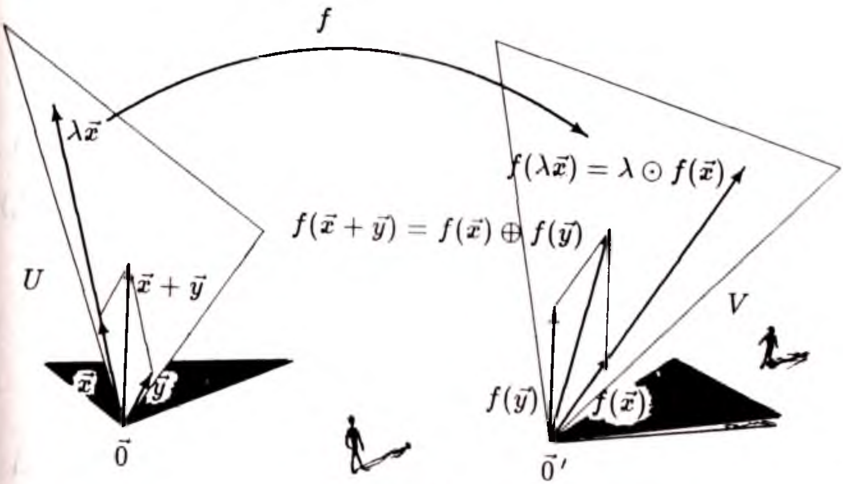


Рис. 8

$$\lambda\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=\!=} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{z}}.$$

$$f_1(\lambda\vec{\boldsymbol{x}}) = f_1(\vec{\boldsymbol{z}}) \overset{(51.f_1)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(51.f_1)}{=\!=\!=} \lambda f_1(\vec{\boldsymbol{x}}).$$

Следовательно, свойство L. 2 имеет место.
В условии

L. 1: $f_1(\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{y}}) \overset{?}{=} f_1(\vec{\boldsymbol{x}}) + f_1(\vec{\boldsymbol{y}}),\ \forall\{\vec{\boldsymbol{x}},\ \vec{\boldsymbol{y}}\} \subset \boldsymbol{M}(2\times 1)$

рассмотрим левую часть с

$$\left\{\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right\}, \subset \boldsymbol{M}(2\times 1),\ \text{а}$$

$$\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1+y^1 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=\!=} \vec{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix},$$

$$f_1(\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{y}}) = f_1(\vec{\boldsymbol{z}}) \overset{(51.f_1)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1+y^1 \\ x^2+y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(51.f_1)}{=\!=\!=}$$

$$\overset{(51.f_1)}{=\!=\!=} f_1(\vec{\boldsymbol{x}}) + f_1(\vec{\boldsymbol{y}}).$$

Следовательно, свойство L. 1 тоже имеет место. Таким образом доказано, что отображение f_1 линейно.

Задание 51.1. Определите, линейно ли отображение:

$$f_2: \boldsymbol{M}(2\times 1)\to \boldsymbol{M}(3\times 1) \mid f_2\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ (x^2)^2 \\ x^1+x^2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2\times 1). \tag{51.f_2}$$

Проверим выполнимость второго условия линейности:

L. 2: $f_2(\lambda\vec{x}) \overset{?}{=} \lambda_2 f(\vec{x}),\ \forall\ \langle\lambda,\ \vec{x}\rangle \in R\times M(2\times 1).$

$$\lambda\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \vec{z}.$$

$$f_2(\lambda\vec{x}) = f_2(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 2z^1 \\ (z^2)^2 \\ z^1+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x^1 \\ (\lambda x^2)^2 \\ \lambda x^1+\lambda x^2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2x^1 \\ \lambda(x^2)^2 \\ x^1+x^2 \end{pmatrix} \overset{?}{\neq}$$

$$\overset{?}{\neq} \lambda\begin{pmatrix} 2x^1 \\ (x^2)^2 \\ x^1+x^2 \end{pmatrix} \overset{(51.f_2)}{=\!=} \lambda f_2(\vec{x}).$$

Отсюда видно, что для всех $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2\times 1)$ (с $x^2\neq 0$), условие L. 2 — не удовлетворяется: $f_2(\lambda\vec{x}) \neq \lambda f_2(\vec{x})$ и, значит, отображение $f_2(\vec{x})$ не является линейным. ◆

Задание 51.2. Определите, линейно ли отображение:

$$f_3: \boldsymbol{M}(3\times 1)\to \boldsymbol{M}(2\times 1) \mid f_3\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1+2x^2 \\ x^2-x^3 \end{pmatrix} \ \forall\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}? \tag{51.f_3}$$

Начнем также с проверки выполнимости второго условия:

L. 2: $f_3(\lambda\vec{x}) \overset{?}{=} \lambda_3 f(\vec{x}),\ \forall\ \langle\lambda,\ \vec{x}\rangle \in \mathbf{R}\times M(3\times 1).$

Рассмотрим левую часть этого соотношения, где

$$\lambda\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \lambda x^3 \end{pmatrix} \overset{\text{des}}{=} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \vec{z}.$$

$$f_3(\lambda\vec{x}) = f_3(\vec{z}) \overset{(51.f_3)}{=\!=} \begin{pmatrix} z^1+2z^2 \\ z^2-z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1+2\lambda x^2 \\ \lambda x^2-\lambda x^3 \end{pmatrix} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \lambda\begin{pmatrix} x^1+2x^2 \\ x^2-x^3 \end{pmatrix} = \lambda\ ?.$$

Следовательно, условие линейности L. 2— ? не ? выполняется. А для проверки выполнимости условия

$$\text{L. 1:}\quad f_3(\vec{x}+\vec{y}) \overset{?}{=} f_3(\vec{x})+f_3(\vec{y})\ \ \forall(\vec{x},\ \vec{y})\subset \boldsymbol{M}(3\times 1)$$

рассмотрим его левую часть с

$$\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix},\ \vec{y}=\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ y^3\end{pmatrix}\right\}\subset \boldsymbol{M}(3\times 1),$$

$$\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^1+y^1\\ x^2+y^2\\ x^3+y^3\end{pmatrix}\overset{\text{des}}{=}\begin{pmatrix} z^1\\ z^2\\ z^3\end{pmatrix}=\vec{z},$$

$$f_3(\vec{x}+\vec{y})=f_3(\vec{z})\overset{(51.f_3)}{=\!=\!=}\begin{pmatrix} z^1+2z^2\\ z^2-z^3\end{pmatrix}= ?\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\begin{pmatrix} x^1+2x^2\\ x^2-x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y^1+2y^2\\ y^2-y^3\end{pmatrix}\overset{(51.f_3)}{=\!=\!=}f_3(\vec{x})+f_3(\vec{y}).$$

Следовательно, свойство L. 1 ? не ? имеет место, и отображение f_3 ? не ? линейно.

Пример 51.2. Очевидно, линейно биективное отображение:

$$f_4:\boldsymbol{M}(n\times 1)\to \boldsymbol{M}(1\times n)\mid f_4\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=(x^1,\ x^2,\dots x^n)\qquad (51.f_4)$$

и обратное ему:

$$f_4^{-1}:\boldsymbol{M}(1\times n)\to \boldsymbol{M}(n\times 1)\mid f_4^{-1}(x^1,\ x^2,\dots x^n)=\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \\ x^n\end{pmatrix}.\qquad (51.f_4^{-1})$$

Пример 51.3. Аналогично предыдущему можно убедиться в линейности отображения:

$$f_5:\boldsymbol{M}(2\times 1)\to \boldsymbol{M}(2\times 1)\mid f_5\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x^1\\ x^1+x^2\end{pmatrix},$$
$$\forall\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\end{pmatrix}\in \boldsymbol{M}(2\times 1),\qquad (51.f_5)$$

(оно тоже биективно). ♦

Приведенный выше пример — пример одного важного частного случая гомоморфизмов — гомоморфизма векторного пространства в себя.

Определение 51.2. ***Линейным оператором*** *на векторном пространстве или* ***эндоморфизмом*** *векторного пространства называется его гомоморфизм в себя.*

Слово эндоморфизм происходит от греческих ενδον — внутри и μορφη — вид, форму, его можно перевести приблизительно, как имеющий форму, образ внутри, т. е. отображающий в себя.

Множество всех эндоморфизмов векторного пространства (которое тоже является векторным пространством) обозначается — $\boldsymbol{End}(V)$ и называется ***алгеброй эндоморфизмов*** или ***алгеброй линейных операторов*** векторного пространства V.

Так что в примере 51.3 $f_5 \in \boldsymbol{End}\ (\boldsymbol{M}(2 \times 1))$.

Задача 51.1.1. Определите, линейно ли отображение:

$$f_6 : \boldsymbol{M}(2 \times 1) \to \boldsymbol{M}(2 \times 2) \mid f_6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^1 + x^2 \\ x^2 & 2x^1 \end{pmatrix},$$
$$\forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2 \times 1)? \tag{51.f_6}$$

Проверяем выполнимость первого условия линейности отображения:

$$\text{L. 1:} \quad f_6(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) \stackrel{?}{=} f_6(\vec{\boldsymbol{x}}) + f_6(\vec{\boldsymbol{y}}), \ \forall \{\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\} \subset \boldsymbol{M}(2 \times 1).$$

Рассмотрим выражения в его левой части с

$$\left\{\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{M}(2 \times 1),$$

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{des}}{=\!=} \vec{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix},$$

$$f_6(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) = f_6(\vec{\boldsymbol{z}}) \stackrel{(51.f_6)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} z^1 & z^1 + z^2 \\ z^2 & 2z^1 \end{pmatrix} = ? \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} x^1 & x^1 + x^2 \\ x^2 & 2x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 & y^1 + y^2 \\ y^2 & 2y^1 \end{pmatrix} \stackrel{(51.f_6)}{=\!=\!=} f_6(\vec{\boldsymbol{x}}) + f_6(\vec{\boldsymbol{y}}).$$

Что означает $\overline{?\ \text{не}\ ?}$ выполнимость условия линейности L. 1.

Проверяем выполнимость второго условия линейности отображения:

L. 2: $f_6(\lambda\vec{x}) \stackrel{?}{=} \lambda f_6(\vec{x})$, $\forall\ \langle\lambda, \vec{x}\rangle \in \mathbf{R}\times \boldsymbol{M}(2\times 1)$.

$$\lambda\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x^1 \\ \lambda x^2\end{pmatrix} \stackrel{\text{des}}{=\!=} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2\end{pmatrix} = \vec{z}.$$

$$f_6(\lambda\vec{x}) = f_6(\vec{z}) \stackrel{(51.f_6)}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} z^1 & z^1+z^2 \\ z^2 & 2z^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x^1 & \lambda x^1 + \lambda x^2 \\ \lambda x^2 & 2\lambda x^1\end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} x^1 & x^1+x^2 \\ x^2 & 2x^1\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda f_6(\vec{x}).$$

Что и означает ? не ? выполнимость условия линейности L. 2.

Следовательно, отображение f_6 ? не ? является линейным.

Задача 51.1.3. Линейно ли отображение интегрирования в пространстве $\mathscr{I}[a, b]$ (интегрируемых функций одной переменной на отрезке $[a, b]$), сопоставляющее каждой такой функции ее интеграл:

$$I:\ f(x) \mapsto \int_a^x f(t)\,dt,\ \ \forall\ f(x) \in I[a, b]. \qquad (51.I)$$

Проверим выполнимость условий линейности: первого —

L. 1: $I(f(x)+g(x)) \stackrel{?}{=} I(f(x)) + I(g(x))$, $\forall\ \{f(x), g(x)\} \subset \mathscr{I}[a, b]$.

Рассмотрим:

$$I(f(x)+g(x)) \stackrel{(51.1)}{=\!=\!=} \int_a^x (f(t)+g(t))\,dt \stackrel{?}{=} I(f(x)) + I(g(x)).$$

Значит, свойство L. 1 — ? не ? имеет места.

Проверим выполнимость второго условия линейности:

L. 2: $I(\lambda f(x)) \stackrel{?}{=} \lambda I(f(x))$, $\forall\ \langle\lambda, f\rangle \in \mathbf{R}\times\mathscr{I}[a, b]$.

Рассмотрим

$$I(\lambda f(x)) \stackrel{(51.1)}{=\!=\!=} \int_a^x (\lambda f(t))\,dt \stackrel{?}{=} \lambda I(f(x)).$$

Следовательно, для отображения I свойство L. 2 — ? не ? удовлетворяется.

Таким образом, интегрирование I на пространстве интегрируемых функций одной переменной на отрезке является линейным отображением.

Задача 51.1.2. Линейно ли отображение дифференцирования на пространстве $\mathscr{D}[a, b]$ (дифференцируемых на $[a, b]$ функций одной переменной x), сопоставляющее каждой дифференцируемой функции ее производную: D:

$$f(x) \to f'(x), \ \forall f(x) \in \mathscr{D}[a, b] \qquad (51.D)$$

Проверим выполнимость первого условия линейности отображения:

L. 1: $D(f(x)+g(x)) \overset{?}{=} D(f(x))+D(g(x))$,
$\forall \{f(x), g(x)\} \subset \mathscr{D}[a, b]$.

Для этого рассмотрим:

$$D(f(x)+g(x)) \overset{(51.D)}{=\!=\!=} (f(x)+g(x))' \overset{?}{=} D(f(x))+ \\ +D(g(x)),$$

что означает $\overline{\text{? не ?}}$ выполнимость условия линейности L. 1.

Проверяя условие L. 2:

L. 2: $D(\lambda f(x)) \overset{?}{=} \lambda D(f(x))$, $\forall \langle \lambda, x \rangle \in \mathbf{R} \times \mathscr{D}[a, b]$.

Рассмотрим выражение:

$$D(\lambda f(x)) \overset{(51.D)}{=\!=\!=} (\lambda f(x))' = ? \overset{?}{=} \lambda D(f(x)).$$

Следовательно, для отображения D условие L. 2 — $\overline{\text{? не ?}}$ удовлетворяется.

Дифференцирование на пространстве функций, дифференцируемых на отрезке является линейным отображением.

Линейно ли отображение дифференцирования на подпространстве $\mathscr{P}[x]|_{[a,\ b]} \subset \mathscr{D}[a, b]$ (многочленов на отрезке $[a, b]$)? (Почему? ♦)

Несложно показать, что не только для дифференцирования функций, но и в общем случае имеет место утверждение.

Утверждение 51.1. *Сужение гомоморфизма $f\colon U \to V$ на любое подпространство $U' \subset U$ есть гомоморфизм $f|_{U'}\colon U' \to V$.*

Поскольку свойства линейности (L. 1, L. 2) удовлетворяются всеми кортежами $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in U^2$ и $\langle \lambda, x \rangle \in \mathbf{R} \times U$, то, значит, удовлетворимы и кортежами $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, принадлежащими подмножеству $U'^2 \subset U^2$, и $\langle \lambda, \vec{x} \rangle \in \mathbf{R} \times U' \subset \mathbf{R} \times U$.

Замечание 51.1. Два характеристических свойства линейности отображения $f\colon U \to V$

L. 1: $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) \oplus f(\vec{y})$, $\forall \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in U^2$,

L. 2: $f(\lambda \vec{x}) = \lambda \odot \vec{f}(x)$, $\forall (\lambda, \vec{x} \rangle \in \mathbf{R} \times U$

могут быть записаны единым условием, им эквивалентным:

$$L:\ f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda\odot f(\vec{x})\oplus\mu\odot f(\vec{y}),\quad \forall\ \langle\lambda,\ \mu,\ \vec{x},\ \vec{y}\rangle\in \mathbf{R}^2\times U^2,$$

в этом несложно убедиться, выбирая, например, подходящие значения λ и μ (в условии L). ♦

Перейдем к изучению основных общих свойств гомоморфизмов.

Основные свойства линейных отображений

Утверждение 51.2. *При гомоморфизме образ векторного пространства есть векторное пространство.*

Задача 51.2.1. Докажите утверждение 51.2.

Указание. Чтобы множество $\operatorname{Im} f\subset V$ (см. опр. 7.2) удовлетворяло определению подпространства векторного пространства 35.1, надо установить его замкнутость относительно операций сложения векторов и умножения скаляра на вектор в V.

Доказательство. $\langle U,\ +,\ \cdot\rangle$, $\langle V,\ \oplus,\ \odot\rangle$ — векторные пространства, $f\in \boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ и $\operatorname{Im} f\subset V$. Проверяем выполнимость характеристических свойств подпространства SS. 1 и SS. 2 (определение 36.1):

1) SS.1: $(\forall\ \langle\vec{a}',\ \vec{b}'\rangle\subset(\operatorname{Im} f)^2)\overset{?}{\Rightarrow}(\vec{a}'\oplus\vec{b}'\in\operatorname{Im} f)$.

По определению прообраза элемента

$$\vec{a}'\in\operatorname{Im} f\xrightarrow{\text{опр. } 7.6}(\exists\vec{a}\in U\mid f(\vec{a})=\vec{a}'),$$

$$\vec{b}'\in\operatorname{Im} f\xrightarrow{\text{опр. } 7.6}(\exists\vec{b}\in U\mid f(\vec{b})=\vec{b}').$$

Тогда $\vec{a}'\oplus\vec{b}'=f(\vec{a})\oplus f(\vec{b})\overset{?}{=}f(\vec{a}+\vec{b})$. Отсюда следует, что вектор $\vec{a}'\oplus\vec{b}'\in\operatorname{Im} f$ (почему? ♦), что и означает замкнутость множества $\operatorname{Im} f$ относительно сложения.

2) SS. 2: $\langle\forall\ \langle\lambda,\ \vec{a}'\rangle\subset \mathbf{R}\times\operatorname{Im} f)\overset{?}{\Rightarrow}(\lambda\odot\vec{a}'\in\operatorname{Im} f)$.

Также по определению прообраза элемента

$$\vec{a}'\in\operatorname{Im} f\Rightarrow(\exists\vec{a}\in \boldsymbol{U}\mid f(\vec{a})=\vec{a}'.$$

Откуда $\lambda\odot\vec{a}'=\lambda\odot f(\vec{a})\overset{?}{=}f(\lambda\vec{a})$, для любых $\langle\lambda,\ \vec{a}'\rangle\in \mathbf{R}\times\operatorname{Im} f$. Следовательно $\lambda\odot\vec{a}'\in\operatorname{Im} f$ (почему? ♦), и $\operatorname{Im} f$ — векторное подпространство в пространстве $\langle V,\ \oplus,\ \odot\rangle$. ■

Во многих задачах оказывается необходимым знать, сохраняется ли при действии того или иного гомоморфизма линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.

Лемма 51.1. *При гомоморфизме нулевой вектор отображается в нулевой.*

Действительно, если $f \in \boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ и $\vec{0} \in U$, то

$$f(\vec{0}) \overset{?}{=} f(0\,\vec{x}) = 0 \odot f(\vec{x}) = \vec{0}' \in V. \qquad \blacksquare$$

Утверждение 51.3. *Если $\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n\}$ — линейно зависимая система векторов в векторном пространстве U, а $f \in \boldsymbol{Hom}(U,\ V)$, то $\{f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2), \dots f(\vec{x}_n)\}$ является линейно зависимой системой в V.*

Доказательство. Пусть заданы векторные пространства $\langle U,\ +,\ \cdot\rangle$ и $\langle V,\ \oplus,\ \odot\rangle$. Линейная зависимость системы векторов $\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n\}$ означает, что найдется кортеж чисел $\langle \alpha^1,\ \alpha^2, \dots \alpha^n\rangle \neq \langle 0,\ 0, \dots 0\rangle$ такой, что

$$\alpha^1\vec{x}_1 + \alpha^2\vec{x}_2 + \dots + \alpha^n\vec{x}_n = \vec{0}.$$

Подействуем отображением f на обе части этого равенства:

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha^1\vec{x}_1 + \alpha^2\vec{x}_2 + \dots + \alpha^n\vec{x}_n) & = & f(\vec{0}). \\ ?\Vert & & \Vert \xleftarrow{\text{л. 51.?}} \\ \alpha^1 f(\vec{x}_1) \oplus \alpha^2 f(\vec{x}_2) \oplus \dots \oplus \alpha^n f(\vec{x}_n) & = & \vec{0}'. \end{array}$$

В результате получаем нулевую, но нетривиальную ($\langle \alpha^1,\ \alpha^2, \dots \alpha^n\rangle \neq \langle 0,\ 0, \dots 0\rangle$) линейную комбинацию векторов $\{f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2), \dots f(\vec{x}_n)\}$, что и означает линейную зависимость этой системы. $\blacksquare$

Задание 51.3. Системы векторов:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{M}(3\times 1) \ \text{ и } \ \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{M}(3\times 1),$$

очевидно, линейно независимы, так как в каждой из них векторы неколлинеарны.

Определите, будут ли линейно независимыми системы, состоящие из образов этих векторов при действии на них гомоморфизмом f_3 задания 51.1:

$$f_3\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1 + 2x^2\\ x^2 - x^3\end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(3\times 1):$$

$$\left\{f_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_3\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{M}(2\times 1) \ \text{ и } \ \left\{f_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{M}(2\times 1).$$

1. Найдем образы первой пары векторов:

$$f_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\ f_3\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}=?.$$

Эта система векторов линейно зависима.

2. Найдем образы следующей пары векторов: ♦

$$f_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\ f_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=?.$$

Эта система векторов линейно $\overline{\text{? не ?}}$ зависима. ♦

Из этого примера следует, что гомоморфизм может отображать некоторую линейно независимую систему векторов в линейно зависимую, а другую линейно независимую систему — в линейно независимую систему.

Замечание 51.2. Линейная независимость системы векторов под действием гомоморфизма, вообще говоря, не сохраняется.

А тривиальным примером гомоморфизма, отображающим любую систему векторов (в том числе и линейно независимую) в линейно зависимую систему, является нулевой гомоморфизм (см. ниже определение 51.3), который любой вектор отображает в нулевой.

Конечно, интересно найти, при каких дополнительных условиях или для каких гомоморфизмов линейная независимость системы векторов все же наследуется их образами. Ответы на эти вопросы мы найдем позже.

Очевидно следующее.

Утверждение 51.4. *Тождественное отображение векторного пространства в себя — линейное отображение (эндоморфизм).* ♦

Теорема 51.1. *Если f — инъективный гомоморфизм, то f^{-1} также гомоморфизм.*

Задача 51.2.3. Докажите теорему 51.1.

Доказательство. Пусть $\langle U, +, \cdot\rangle$, $\langle V, \oplus, \odot\rangle$ — векторные пространства, а $f\in \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

По утверждению 51.2 $\operatorname{Im} f$ есть подпространство V.

1. Согласно утверждению 9.? из инъективности f следует его обратимость, т. е. отношение f^{-1} является отображением, причем $f^{-1}\colon \operatorname{Im} f\to U$.

Следовательно, остается установить линейность f^{-1}. Будем доказывать выполнимость условия линейности L (см. замечание 51.1).

2. L: $\forall\ \langle\lambda,\ \mu,\ \vec{x}',\ \vec{y}'\rangle \in \mathbf{R}^2 \times (\operatorname{Im} f)^2 \overset{?}{\Rightarrow}$

$$\overset{?}{\Rightarrow} f^{-1}(\lambda \odot \vec{x}' \oplus \mu \odot \vec{y}') \overset{?}{=} \lambda f^{-1}(\vec{x}) + \mu f^{-1}(\vec{y}) \qquad (51.f^{-1}\text{-}L)$$

Если $\{\lambda \odot \vec{x}',\ \mu \odot \vec{y}'\} \subset \operatorname{Im} f = \operatorname{Dom} f^{-1}$, то по определению прообраза элемента (определение 7.6) в U существует единственный вектор $\vec{x}_0$, такой что $f(\vec{x}_0) = \lambda \odot \vec{x}'$. Обозначим $\vec{x}_0 = \lambda\vec{x}$ (почему это возможно при любом $\lambda \in \mathbf{R}$? ◆), тогда $f(\lambda\vec{x}) = \lambda \odot \vec{x}'$. Аналогично, найдется единственный вектор $\mu\vec{y} \subset U$, что $f(\mu\vec{y}) = \mu \odot \vec{y}'$.

Поскольку

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \overset{?}{=} \lambda \odot f(\vec{x}) \oplus \mu \odot f(\vec{y}) = \lambda \odot \vec{x}' \oplus \mu \odot \vec{y}',$$

а прообраз вектора $\lambda \odot \vec{x}' \oplus \mu \odot \vec{y}'$ единствен, то

$$f^{-1}(\lambda \odot \vec{x}' \oplus \mu \odot \vec{y}') = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda f^{-1}(\vec{x}') + \mu f^{-1}(\vec{y}'),$$

т. е. доказано соотношение $(51.f^{-1}\text{-}L)$. ■

Следствие 51.1. *Если $f \in \boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ и биективно, то $f^{-1} \in \boldsymbol{Hom}(V,\ U)$.* ◆

Теорема 51.2. *Композиция двух гомоморфизмов векторных пространств, если она определена, есть гомоморфизм.* Или: $(f \in \boldsymbol{Hom}(U,\ V) \wedge g \in \boldsymbol{Hom}(V,\ W)) \Rightarrow g \circ f \in \boldsymbol{Hom}(U,\ W)$.

Задача 51.2.2. Докажите теорему 51.2.

Доказательство. Пусть $\langle U,\ +,\ \cdot\rangle$, $\langle V,\ \oplus,\ \odot\rangle$, $\langle W,\ \boxed{+},\boxed{\cdot}\rangle$ векторные пространства.

1. По теореме 8.?, если $f: U \to V$ и $g: V \to W$, то $g \circ f: U \to W$.

2. Остается установить выполнимость свойств линейности отображением $g \circ f$. Проверим выполнимость условия

$$\text{L: } \forall\ \langle\lambda,\ \mu,\ \vec{x},\ \vec{y}\rangle \in \mathbf{R}^2 \times U^2 \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (g \circ f)(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda \boxed{\cdot} (g \circ f)(\vec{x}) \boxed{+} \mu \boxed{\cdot} (g \circ f)(\vec{y}).$$

Для этого найдем значение композиции $g \circ f$ отображений на векторе $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ при произвольном кортеже $\langle\lambda,\ \mu,\ \vec{x},\ \vec{y}\rangle$:

$$(g \circ f)(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \;\underset{g \cdot f}{\overset{\text{опр. 8.?}}{=\!=\!=}}\; g(f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})) \underset{f}{\overset{?}{=}} g(\lambda \odot f(\vec{x}) \oplus \mu \odot f(\vec{y})) \overset{?}{=}$$

$$\underset{g}{\overset{?}{=}} \lambda \boxed{\cdot} g(f(\vec{x})) \boxed{+} \mu \boxed{\cdot} g(f(\vec{y})) \overset{?}{=} \lambda \boxed{\cdot} (g \circ f)(\vec{x}) \boxed{+} \mu \boxed{\cdot} (g \circ f)(\vec{y}).$$

Это означает, что отображение $g \circ f$ удовлетворяет условию L, т. е. линейно. ■

Следствие 51.2. *Множество всех эндоморфизмов векторного пространства* $\boldsymbol{End}(V)$ *замкнуто относительно их композиции.* ◆

§ 52′. ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Выше мы упоминали, что множество гомоморфизмов векторных пространств $\boldsymbol{Hom}(U, V)$ относительно некоторых специальных операций само является векторным пространством. Но прежде чем говорить о такой его структуре следует ввести несколько дополнительных определений и отображений — операций на гомоморфизмах.

По определению векторного пространства (33.1), чтобы на $\boldsymbol{Hom}(U, V)$ была задана его структура, должны быть определены два отображения:

$$\boldsymbol{Hom}(U, V) \times \boldsymbol{Hom}(U, V) \to \boldsymbol{Hom}(U, V),$$
$$\mathrm{R} \times \boldsymbol{Hom}(U, V) \mapsto \boldsymbol{Hom}(U, V)$$

так, чтобы они удовлетворяли аксиомам V. 1—V. 8. (Первое из них определяет сумму гомоморфизмов, второе — произведение скаляра на гомоморфизм).

В этом параграфе U и V — векторные пространства с операциями: «$+$, $\cdot$» и, соответственно, «$\oplus$, $\odot$», т. е. $\langle U, +, \cdot \rangle$ и $\langle V, \oplus, \odot \rangle$.

Для любых $\{f, g\} \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ определим отображение U в V, поставив всякому вектору $\vec{x} \in U$ в соответствие сумму векторов $(f(\vec{x}) \oplus g(\vec{x})) \in V$, такой вектор единствен. ◆

Определение 52.1. ***Суммой гомоморфизмов*** $\{f, g\} \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ *называется отображение векторного пространства* U *в* V, *которое каждому* $\vec{x} \in U$ *сопоставляет вектор* $(f(\vec{x}) \oplus g(\vec{x})) \in V$:

$$(f \boxed{+} g)(\vec{x}) \overset{\text{des}}{=} f(\vec{x}) \oplus g(\vec{x}) \qquad (52.\boxed{+})$$

Лемма 52.1. *Сумма гомоморфизмов двух векторных пространств есть также их гомоморфизм.*

Т. е. $(\forall \{f, g\} \subset \boldsymbol{Hom}(U, V)) \Rightarrow (f \boxed{+} g \in \boldsymbol{Hom}(U, V))$.

Доказательство. Пусть $\{f, g\} \subset \boldsymbol{Hom}(U, V)$, надо показать, что отображение $(f \boxed{+} g)$ линейно, для этого воспользуемся условием линейности L (см. замечание 51.1):

L: $(f \boxed{+} g)(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) \overset{?}{=} \lambda\odot(f\boxed{+}g)(\vec{x})\oplus\mu\odot(f\boxed{+}g)(\vec{y})$, для любых $\langle\lambda,\ \mu,\ \vec{x},\ \vec{y}\rangle\subset\mathbf{R}^2\times U^2$.

Рассмотрим

$$(f\boxed{+}g)(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) \overset{\text{des}}{=\!=} (f\boxed{+}g)(\vec{z}) \overset{\text{def}}{=\!=} f(\vec{z})\oplus g(\vec{z}) \overset{\text{des}}{=\!=}$$
$$\vec{z}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$$
$$= f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\oplus g(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} (\lambda\odot f(\vec{x})\oplus\mu\odot f(\vec{y}))\oplus(\lambda\odot g(\vec{x})\oplus\mu\odot g(\vec{y})) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \lambda\odot(f(\vec{x})\oplus g(\vec{x}))\oplus\mu\odot(f(\vec{y})\oplus g(\vec{y})) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \lambda\odot(f\boxed{+}g)(\vec{x})\oplus\mu\odot(f\boxed{+}g)(\vec{y}).$$

Что и означает линейность отображения $f\boxed{+}g$. ■

Таким образом, определением 52.1 задано отображение:

$$\boxed{+}:\boldsymbol{Hom}(U,\ V)\times\boldsymbol{Hom}(U,\ V)\to\boldsymbol{Hom}(U,\ V).$$

Теперь определим отображение U в V, сопоставив всякому вектору $\vec{x}\in U$ вектор $\alpha\odot f(\vec{x})\in V$, где α — действительное число, а f — гомоморфизм U в V. Такой вектор определяется по $\vec{x}$ однозначно. ♦

Определение 52.2. ***Произведением скаляра*** $\alpha\in\mathbf{R}$ ***на гомоморфизм*** $f\in\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ *называется отображение векторного пространства* U *в* V, *которое обозначается* $\alpha\boxed{\cdot}f$ *и такое, что для любого* $\vec{x}\in U$:

$$(\alpha\boxed{\cdot}f)(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha\cdot f(\vec{x}) \qquad (52.\boxed{\cdot})$$

Аналогично лемме 52.1 доказывается лемма.

Лемма 52.2. *Произведение скаляра на гомоморфизм есть гомоморфизм.*

Т. е. $(\forall\ \langle\alpha,\ f\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{Hom}(U,\ V))\Rightarrow(\alpha\boxed{\cdot}f\in\boldsymbol{Hom}(U,\ V))$.

Тем самым определено отображение:

$$\boxed{\cdot}:\mathbf{R}\times\boldsymbol{Hom}(U,\ V)\to\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$$

После того как введены отображения (52.$\boxed{+}$) и (52.$\boxed{\cdot}$), необходимо установить, что они удовлетворяют аксиомам векторного пространства. При этом важно понимать, что всякий раз речь будет идти о **равенстве отображений** (см. определение 8.1), Причем, так как области определений всех гомоморфизмов U в V есть векторное пространство U, то достаточно проверять только второе из условий этого определения: совпадение значений двух отображений при любом $\vec{x} \in U$.

V. 1: $f \boxed{+} g \overset{?}{=} g \boxed{+} f \quad \forall \{f, g\} \subset \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

Рассмотрим

$$(f \boxed{+} g)(\vec{x}) \underset{(52.\boxed{+})}{\overset{\text{def}}{=\!=\!=}} f(\vec{x}) \oplus g(\vec{x}) \overset{?}{=} g(\vec{x}) \oplus f(\vec{x}) \overset{?}{=} (g \boxed{+} f)(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

Аналогично доказывается выполнимость следующей аксиомы

V. 2: $(f \boxed{+} g) \boxed{+} h = f \boxed{+} (g \boxed{+} h) \quad \forall \{f, g, h\} \subset \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

Укажите, какими свойствами (аксиомами) и в каких векторных пространствах (помимо определения суммы гомоморфизмов) надо пользоваться при доказательстве этого равенства.

Для того, чтобы обсуждать выполнимость следующей аксиомы векторного пространства:

V. 3: $\exists\, \theta \in \boldsymbol{Hom}(U, V) \mid f \boxed{+} \theta = f \quad \forall\, f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$,

следует ввести нулевой гомоморфизм.

Определение 52.3. ***Нулевым отображением*** *векторного пространства U в пространство V называется отображение, которое каждому вектору из U сопоставляет нулевой вектор в V.*

$$\theta(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} \vec{0}. \qquad (52.\theta)$$

Очевидно $(0 \boxed{\cdot} f)(\vec{x}) \underset{(52.\boxed{\cdot})}{\overset{\text{def}}{=\!=\!=}} 0 \cdot f(\vec{x}) \overset{?}{=} \vec{0}'$ для любого $\vec{x} \in U$ и любого $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$, и значит, $\theta = (0 \boxed{\cdot} f)$ (почему? $\blacklozenge$).

Таким образом, θ есть гомоморфизм U в V, что позволяет называть это отображение нулевым гомоморфизмом. $\blacklozenge$

Лемма 52.3. $\theta \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

Проверка выполнимости в $\boldsymbol{Hom}(U, V)$ аксиомы V. 3 теперь не составит труда: для всякого $\vec{x} \in U$

$$(f \boxed{+} \theta)(\vec{x}) \underset{(52.\boxed{+})}{\overset{\text{def}}{=\!=}} f(\vec{x}) \oplus \theta(\vec{x}) \underset{(52.0)}{\overset{\text{def}}{=\!=}} f(\vec{x}) \oplus \vec{0}' \overset{?}{=} f(\vec{x}).$$

По определению равенства отображений это означает, что $f \boxed{+} \theta = f$, то есть элемент θ — нейтральный относительно операции $\boxed{+}$. ■

Для аксиомы

V. 4: $\forall f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)\ \exists(-f) \in \boldsymbol{Hom}(U, V) | f \boxed{+} (-f) = \theta$

требуется ввести гомоморфизм, противоположный данному.

Определение 52.4. ***Отображением, противоположным гомоморфизму*** $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$, *называется отображение* U в V, которое каждому вектору $\vec{x} \in U$ *сопоставляет вектор* $-f(\vec{x})$:

$$(-f)(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} -f(\vec{x}). \tag{52.—}$$

Лемма 52.4. *Отображение, противоположное гомоморфизму, есть гомоморфизм.*

Точнее: $(\forall f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)) \Rightarrow ((-f) \in \boldsymbol{Hom}(U, V))$.

Это очевидно, т. к. $(-f) = (-1) \boxed{\cdot} f$. Так иногда и определяется гомоморфизм, противоположный f.

Задача 52.1.1. Докажите, что в $\boldsymbol{Hom}(U, V)$ имеет место аксиома V. 4.

Доказательство сведется к проверке выполнимости при любом $\vec{x} \in U$ соотношения $(f \boxed{+} (-f))(\vec{x}) = \theta(\vec{x})$. ◆

$$(f \boxed{+} (-f))(\vec{x}) \overset{?}{=} f(\vec{x}) \oplus (-f)(\vec{x}) \overset{?}{=} f(\vec{x}) \oplus (-f(\vec{x})) \overset{?}{=} \vec{0} \overset{?}{=} \theta(\vec{x}).$$

Это и означает, что $f \boxed{+} (-f) = \theta$. ■

Для остальных аксиом уже не потребуется введения новых понятий, но потребуется аккуратность в применении аксиом векторных пространств и операций в $\boldsymbol{Hom}(U, V)$. Например,

V. 5: $1 \boxed{\cdot} f = f \quad \forall f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

Доказательство. Для всякого $\vec{x} \in U$.

$$(1 \boxed{\cdot} f)(\vec{x}) \underset{(52.\boxed{\cdot})}{\overset{\text{def}}{=\!=}} 1 \odot f(\vec{x}) \overset{?}{=} f(\vec{x}).$$

Отсюда следует, что $1 \boxed{\cdot} f = f$. ■

V. 6: $\alpha\boxed{\cdot}(\beta\boxed{\cdot}f)=\alpha\beta\boxed{\cdot}f \quad \forall\ \langle\alpha,\ \beta,\ f\rangle\in\mathbf{R}^2\times\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$.

Задача 52.1.2. Докажите выполнимость в $\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ аксиомы V. 6.

Доказательство. При любом $\vec{x}\in U$

$$(\alpha\boxed{\cdot}(\beta\boxed{\cdot}f))(\vec{x})\stackrel{?}{=}\alpha\odot((\beta\boxed{\cdot}f)(\vec{x}))\stackrel{?}{=}\alpha\odot(\beta\odot f(\vec{x}))\stackrel{?}{=}(\alpha\beta)\odot f(\vec{x}).$$

Откуда $\alpha\boxed{\cdot}(\beta\boxed{\cdot}f)=\alpha\beta\boxed{\cdot}f$ в силу произвольности $\vec{x}\in U$. ■

Подобным образом проверяется выполнимость остальных аксиом векторного пространства:

V. 7: $(\alpha+\beta)\boxed{\cdot}f=\alpha\boxed{\cdot}f\boxed{+}\beta\boxed{\cdot}f \quad \forall\ \langle\alpha,\ \beta,\ f\rangle\in\mathbf{R}^2\times\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$.

V. 8: $\alpha\boxed{\cdot}(f\boxed{+}g)=\alpha\boxed{\cdot}f\boxed{+}\alpha\boxed{\cdot}g$

$\forall\ \langle\alpha,\ f,\ g\rangle\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{Hom}^2(U,\ V)$.

Все определения и доказательства этого параграфа позволяют сформулировать его основной результат в следующем виде.

Теорема 52.1. $\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ — *векторное пространство относительно операций* $\boxed{+}$ *и* $\boxed{\cdot}$.

Таким образом построен еще один пример векторного пространства — пространство гомоморфизмов или линейных отображений: $\langle\boldsymbol{Hom}(U,\ V),\ \boxed{+},\ \boxed{\cdot}\rangle$. В дальнейшем, чтобы упростить записи, для обозначений операций в $\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ будем пользоваться знаками: $+$ и $\cdot$ там, где это не приведет к ошибкам и разночтениям, т. е. $\langle\boldsymbol{Hom}(U,\ V),\ +,\ \cdot\rangle$, как и для операций во всех векторных пространствах.

Поскольку $\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ — векторное пространство, то интересно узнать, является ли оно конечномерным? (См. определение 41.2). Можно ли указать базис в $\boldsymbol{Hom}(U,\ V)$ хотя бы для случая конечномерных векторных пространств U и V — $\boldsymbol{Hom}(U^n,\ V^m)$? В следующей лекции мы попытаемся дать ответы на эти вопросы.

В примере 34.5 мы заметили, что $\langle\mathbf{R},\ +,\ \cdot\rangle$ — множество действительных чисел относительно операций сложения и умножения также имеет структуру векторного пространства. Поэтому согласно определению функционала естественно такое понятие.

Определение 52.5. *Элементы векторного пространства* $\boldsymbol{Hom}(V,\ \mathbf{R})$ *называются* ***линейными функционалами*** *или* ***линейными формами,*** *а это пространство —* ***сопряженным*** *или* ***двойственным к векторному пространству*** V.

Для такого пространства принято специальное обозначение:

$$V^* \overset{\text{des}}{=\!=} \mathbf{Hom}(V,\ \mathbf{R}).$$

Интересно, что изоморфны векторные пространства V и $(V^*)^* = \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(V,\ \mathbf{R}),\ \mathbf{R})$.

Один из разделов современной математики — функциональный анализ имеет среди многочисленных областей и проблем исследований изучение свойств двойственных пространств. Особое место среди вопросов, которыми занимается функциональный анализ, принадлежит пространству (алгебре) эндоморфизмов $\mathbf{End}(V)$ для различных специальных векторных пространств. Эндоморфизмы векторных пространств используются во многих исследованиях и задачах алгебры и геометрии. Изучение некоторых из свойств эндоморфизмов предстоит в дальнейшем.

Задача 52.1.3. Векторные пространства $\mathbf{R}^* = \mathbf{Hom}(\mathbf{R},\ \mathbf{R})$ и $(\mathbf{R}^2)^* = \mathbf{Hom}(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R}^1)$ конечномерны. Постарайтесь определить их размерности. $\dim \mathbf{Hom}(\mathbf{R}^1,\ \mathbf{R}^1) = ?$. $\dim \mathbf{Hom}(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R}^1) = ?$

Указание. Элементами $\mathbf{R}^*$ являются линейные отображения $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, каков их общий вид? Как выбрать базис в $\mathbf{R}^*$? Аналогично для $(\mathbf{R}^2)^*$.

§ 53. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В примерах предыдущей лекции, как правило, гомоморфизм одного конечномерного векторного пространства в другое указывался в координатной форме (т. е. по кортежу (столбцу) координат вектора задавался кортеж координат его образа). Естественно возникает вопрос о других способах задания таких отображений.

Пример 53.1. В векторном пространстве $\mathbf{M}(2 \times 1)$ фиксируем стандартный базис

$$B = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Рассмотрим гомоморфизм $f_1 \in \mathbf{Hom}(\mathbf{M}(2 \times 1),\ \mathbf{M}(3 \times 1))$ примера 51.1:

$$f_1 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$f_1(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f_1(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при этом линейном отображении образ произвольного вектора определяется однозначно его координатами и образами базисных векторов. Действительно, если $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$, то так как

$$f_1(\vec{x}) = f_1(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2) \overset{?}{=} x^1 f_1(\vec{e}_1) + x^2 f_1(\vec{e}_2) =$$

$$= x^1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}.$$

2. Аналогично (по образам базисных векторов) можно «восстановить» (т. е. указать образ произвольного вектора) и другой гомоморфизм, например возьмем $f \in \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{M}(2\times 1), \ \boldsymbol{M}(3\times 1))$ такой, что

$$f(\vec{e}_1) = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(\vec{e}_2) = \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

то можно, как говорят, по линейности, получить образ произвольного вектора:

$$f(\vec{x}) = f(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2) = x^1 f_1(\vec{e}_1) + x^2 f_1(\vec{e}_2) =$$

$$= x^1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = ? = \begin{pmatrix}1&1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}.$$

Из этих примеров видно, что, чтобы задать гомоморфизм одного векторного пространства в другое, достаточно указать образы базисных векторов первого из векторных пространств. Эти наблюдения обобщим.

Лемма 53.1. *Если в векторном пространстве U^n задан базис: $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$, а в векторном пространстве V указано упорядоченное множество из n векторов $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_n\rangle$, то существует единственный гомоморфизм $f: V^n \to U$* такой, что при всех $i = 1, 2, \dots n$

$$f(\vec{e}_i) = \vec{c}_i. \tag{53.c}$$

Замечание 53.1. От системы векторов $C \subset V$ не требуется, вообще говоря, линейной независимости, а от векторного пространства, содержащего $\operatorname{Im} f$, конечномерности.

В доказательстве выделим три этапа:

Определим отображение $f: U^n \to V$.

Докажем, что построенное отображение линейно.

Покажем, что любой гомоморфизм U^n в V с теми же значениями на базисных векторах совпадает с f.

1) Произвольный вектор $\vec{x} \in \langle U^n, B\rangle$ разложим в линейную комбинацию базисных векторов:

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n = x^i\vec{e}_i. \qquad (53.\vec{x})$$

Определим отображение:

$$f(\vec{x}) = f(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n) \overset{\text{def}}{=} x^1\vec{c}_1 + x^2\vec{c}_2 + \ldots + x^n\vec{c}_n \qquad (53.f)$$

или, что то же самое, в краткой (тензорной) записи:

$$f(x^i\vec{e}_i) = x^i\vec{c}_i \qquad (53.f')$$

(по i суммирование от 1 до n).

2) Это отображение линейно — убедимся в выполнимости условия линейности:

L.: $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \overset{?}{=} \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{x}) \quad \forall\ \langle\lambda, \mu, \vec{x}, \vec{y}\rangle \in \mathbf{R}^2 \times (U^n)^2.$

Действительно, пусть $\vec{x}$ определяется разложением $(53.\vec{x})$, а

$$\vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \ldots + y^n\vec{e}_n = y^i\vec{e}_i. \qquad (53.\vec{y})$$

Тогда

$$\begin{gathered} f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \\ = f(\lambda(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n) + \mu(y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \ldots + y^n\vec{e}_n)) \overset{?}{=} \\ = f((\lambda x^1 + \mu y^1)\vec{e}_1 + (\lambda x^2 + \mu y^2)\vec{e}_2 + \ldots + (\lambda x^n + \mu y^n)\vec{e}_n) \overset{(53.f)}{=\!=} \\ \overset{(53.f)}{=\!=} (\lambda x^1 + \mu y^1)\vec{c}_1 + (\lambda x^2 + \mu y^2)\vec{c}_2 + \ldots + (\lambda x^n + \mu y^n)\vec{c}_n \overset{?}{=} \\ \overset{?}{=} \lambda x^1\vec{c}_1 + \mu y^1\vec{c}_1 + \lambda x^2\vec{c}_2 + \mu y^2\vec{c}_2 + \ldots + \lambda x^n\vec{c}_n + \mu y^n\vec{c}_n \overset{?}{=} \\ = (\lambda x^1\vec{c}_1 + \lambda x^2\vec{c}_2 + \ldots + \lambda x^n\vec{c}_n) + (\mu y^1\vec{c}_1 + \mu y^2\vec{c}_2 + \ldots + \mu y^n\vec{c}_n) \overset{?}{=} \\ = \lambda(x^1\vec{c}_1 + x^2\vec{c}_2 + \ldots + x^n\vec{c}_n) + \mu(y^1\vec{c}_1 + y^2\vec{c}_2 + \ldots + y^n\vec{c}_n) \overset{?}{=} \\ \overset{?}{=} \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}). \end{gathered}$$

Следовательно, определенное формулой $(53.f)$ отображение линейно и $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V)$.

Тем самым доказано существование гомоморфизма с заданными значениями на базисных векторах.

3) Предположим, что найдется гомоморфизм $g \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V)$ такой, что его значения на векторах базиса B совпадают со значениями f, т. е. для всех $i = 1, 2, \ldots n$

$$g(\vec{e}_i) = \vec{c}_i. \qquad (53.g)$$

Рассмотрим на произвольном векторе $\vec{x} \in U^n$ значение отображения g:

$$g(\vec{x}) = g(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} x^1 g(\vec{e}_1) + x^2 g(\vec{e}_2) + \ldots + x^n g(\vec{e}_n) \stackrel{?}{=}$$
$$= x^1\vec{c}_1 + x^2\vec{c}_2 + \ldots + x^n\vec{c}_n \stackrel{?}{=} x^1 f(\vec{e}_1) + x^2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x^n f(\vec{e}_n) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} f(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n) \stackrel{?}{=} f(\vec{x}).$$

Так как $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g = U^n$ и $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ при любом $\vec{x} \in U^n$, то $g = f$ (см. определение 8.1, лекция 2).

Следовательно, гомоморфизм векторного пространства U^n в векторное пространство V, удовлетворяющий условию (53.c), единствен. ■

Следствие 53.1. *Линейное отображение, переводящее базис векторного пространства в базис векторного пространства, биективно.*

Точнее: если U и V — векторные пространства, а $f\colon U \to V$ так, что

$$f(\vec{e}_i) = \vec{c}_i \tag{53.c}$$

при всех $i = 1, 2, \ldots n$, где $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \rangle$ — базис в U, а $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_n \rangle$ — не произвольная система векторов в пространстве V, а его базис, то отображение f является биективным, так как оно всякий вектор $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots x^n)_B$ отображает в вектор пространства V с теми же координатами относительно базиса C, т. е. $f(\vec{x})(x^1, x^2, \ldots x^n)_C$ (см. (53.f)), и следовательно, сюръективно и инъективно. ◆■

Лемма 53.1 позволяет сказать, что всякий гомоморфизм векторных пространств однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Для конечномерных пространств это позволяет ввести новое понятие.

Определение 53.1. *Если в векторных пространствах U^n и V^m указаны* ***базисы*** *$B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \rangle$ и, соответственно, $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_m \rangle$, то* ***матрицей гомоморфизма*** *$f \in \mathbf{Hom}(U^n, V^m)$ (относительно базисов B и C) называется матрица, составленная из координатных столбцов образов базисных векторов: $\langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n) \rangle$.*

Обозначается такая матрица: $M_{f_{\langle B,\,C\rangle}}$. Если из контекста понятно, относительно каких базисов определена матрица гомоморфизма, то, как правило, индексы базисов не пишутся: M_f.

Отметим, что, если по базису $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_m \rangle$ образы векторов базиса B имеют следующие разложения:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= f_1^1\vec{c}_1 + f_1^2\vec{c}_2 + \dots + f_1^m\vec{c}_m, \\ f(\vec{e}_2) &= f_2^1\vec{c}_1 + f_2^2\vec{c}_2 + \dots + f_2^m\vec{c}_m, \\ \dots\dots & \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots \\ f(\vec{e}_n) &= f_n^1\vec{c}_1 + f_n^2\vec{c}_2 + \dots + f_n^m\vec{c}_m, \end{aligned} \tag{53.1}$$

то матрица гомоморфизма f такова:

$$M_f = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \cdots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & f_2^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{ll} f(\vec{e}_1) & (f_1^1,\ f_1^2,\ \dots\ f_1^m) \\ f(\vec{e}_1) & (f_2^1,\ f_2^2,\ \dots\ f_2^m), \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ f(\vec{e}_1) & (f_n^1,\ f_n^2,\ \dots\ f_n^m). \end{array} \tag{53.2}$$

Очевидно, что если $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, то $M_f = \| f_j^i \| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$. ◆

Утверждение 53.1. *Сопоставлением гомоморфизму ее матрицы (относительно фиксированных базисов) задается отображение* $M : \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m) \to \boldsymbol{M}(m \times n)$ такое, что

$$M(f) = M_f.$$

Т. е. матрица гомоморфизма (относительно указанных базисов) определяется им однозначно, так как каждый гомоморфизм, как отображение, однозначно определяет векторы: $\langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n) \rangle$ в векторном пространстве $\langle V^m, C \rangle$, а они, в свою очередь, n кортежей (координатных столбцов высоты m) относительно базиса C — столбцов матрицы M_f. ◆

Задание 53.1. Укажем матрицы гомоморфизмов f_1 и f примера 53.1, где значения гомоморфизмов на базисных векторах:

1. $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, откуда $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $f_1(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, откуда $M_{f_1} = ?$

Замечание 53.2. Если f — эндоморфизм векторного пространства V^n (см. опр. 51.2), то, как правило, его матрица, как матрица гомоморфизма, рассматривается относительно пары одинаковых базисов $\langle B, B\rangle$ и обозначается $M_{f_{\langle B\rangle}} \overset{\text{des}}{=} M_{f\ \langle B\rangle}$ (при этом координаты образов всех базисных векторов указываются в том же самом базисе), такая матрица называется ***матрицей эндоморфизма f относительно базиса*** B (индекс $\langle B\rangle$ в ее обозначении также часто опускается, если понятно о каком базисе идет речь).

Задание 53.2. Докажите, что существует единственный эндоморфизм векторного пространства $\boldsymbol{M}(2\times 1)$, отображающий векторы $\langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ в векторы $\langle \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2\rangle$, где

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ и } \vec{\boldsymbol{A}}_2=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \text{ а } \vec{\boldsymbol{B}}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ и } \vec{\boldsymbol{B}}_2=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого эндоморфизма в стандартном базисе:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{E}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Векторы $\vec{\boldsymbol{A}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{A}}_2$ линейно независимы и могут быть взяты за базисные в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2\times 1)$. ◆

2. Согласно лемме 53.1 существует эндоморфизм, отображающий векторы $\langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ в векторы $\langle \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2\rangle$ — обозначим его f. $f(\vec{\boldsymbol{A}}_1)=\vec{\boldsymbol{B}}_1$ и $f(\vec{\boldsymbol{A}}_2)=\vec{\boldsymbol{B}}_2$. ◆

3. Чтобы найти матрицу f в стандартном базисе, надо указать относительно его координаты векторов $f(\vec{\boldsymbol{E}}_1)$ и $f(\vec{\boldsymbol{E}}_2)$. ◆

Заметим, что

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=-1\vec{\boldsymbol{A}}_1+1\vec{\boldsymbol{A}}_2.$$

Значит,

$$f(\vec{\boldsymbol{E}}_1)=f(-1\vec{\boldsymbol{A}}_1+1\vec{\boldsymbol{A}}_2)\overset{?}{=}-1f(\vec{\boldsymbol{A}}_1)+1f(\vec{\boldsymbol{A}}_2)\overset{?}{=}-1\vec{\boldsymbol{B}}_1+1\vec{\boldsymbol{B}}_2\overset{?}{=}$$
$$=-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

А вектор $\vec{\boldsymbol{E}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=?\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+?\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=?\vec{\boldsymbol{A}}_1+?\vec{\boldsymbol{A}}_2$, тогда

$$f(\vec{\boldsymbol{E}}_2)=f(?\vec{\boldsymbol{A}}_1+?\vec{\boldsymbol{A}}_2)\overset{?}{=}?\vec{\boldsymbol{B}}_1+?\vec{\boldsymbol{B}}_2\overset{?}{=}?\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+?\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

3. Следовательно,

$$M_f=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Задача 53.1.1. Найдите матрицу гомотетии $h_\lambda \in End(V^2)$ относительно некоторого базиса B в V^2 согласно следующему определению.

Определение 53.2. ***Гомотетией векторного пространства** V **с коэффициентом** $k\in\mathbf{R}$* *называется его эндоморфизм, отображающий всякий вектор* $\vec{x}\in V$ *в вектор* $k\vec{x}$.

Гомотетия с коэффициентом k обозначение: $h_k: V\to V$ и $h_k(\vec{x})=k\vec{x}\ \ \forall \vec{x}\in V$.

Пусть $B=\langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$. $h_k(\vec{e}_1)=?$, $h_k(\vec{e}_2)=?$.

Тогда

$$M_{h_k}=?.$$

Задача 53.1.2 — 1.3. Дифференцирование D есть эндоморфизм векторного пространства $\mathscr{P}^n[x]$ многочленов степени не выше n (сравните с задачей 51.1.2), найдите его матрицу относительно стандартного базиса: $B=\langle 1,\ x,\ x^2,\ x^3, \dots\ x^n\rangle$, затем относительно другого базиса этого пространства:

$$C=\langle 1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ (x-a)^3, \dots (x-a)^n\rangle.$$

Задача 53.2.3. Покажите, что умножение слева (справа) всякой матрицы второго порядка на постоянную матрицу A есть линейное отображение $\boldsymbol{M}(2)$ в себя. Найдите его матрицу относительно стандартного базиса: $B=\langle \vec{\boldsymbol{E}}{}_1^1,\ \vec{\boldsymbol{E}}{}_2^1,\ \vec{\boldsymbol{E}}{}_1^2,\ \vec{\boldsymbol{E}}{}_2^2\rangle$ (см. определение матриц E_j^i: § 17, лекция 5), если

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Указание. Рассмотрите отображение $L_A(X)=A\,X$. Какие координаты в базисе B имеет вектор $L_A(\vec{\boldsymbol{E}}{}_1^1)=A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$? И т. д. Аналогично для умножения справа: $R_A(X)=X\,A$. Сравните матрицы M_{L_A} и M_{R_A}.

Теперь вполне закономерен вопрос: всякая ли матрица из пространства $\boldsymbol{M}(m\times n)$ может быть матрицей гомоморфизма n-мерного векторного пространства в m-мерное пространство?

Пусть $F=\|f_j^i\|$ — произвольная матрица порядка m на n, тогда m элементов каждого из ее n столбцов.

$$F_j=\begin{pmatrix}f_j^1\\ f_j^2\\ \vdots\\ f_j^m\end{pmatrix}$$

можно принять за m координат $(f_i^1, f_i^2, \dots f_i^n)$ n векторов в базисе $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_m \rangle$ векторного пространства V^m:

$$\vec{f}_i = f_i^1 \vec{c}_1 + f_i^2 \vec{c}_2 + \dots + f_i^n \vec{c}_n,$$

$(i = 1, 2, \dots n)$. Согласно лемме 53.1 существует гомоморфизм $f: U^n \to V^m$, отображающий систему базисных векторов $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ векторного пространства U^n в упорядоченную систему векторов векторного пространства V^m: $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_n \rangle$.

Поскольку при этом, по определению, при $i = 1, 2, \dots n$

$$f(\vec{e}_i) = \vec{f}_i = f_i^1 \vec{c}_1 + f_i^2 \vec{c}_2 + \dots + f_i^n \vec{c}_n,$$

то $M_f = \| f_j^i \| = F$. Т. е. произвольно выбранная матрица порядка m на n является матрицей некоторого гомоморфизма n-мерного векторного пространства в m-мерное. Что означает сюръективность отображения f (см. определение 9.1).

Таким образом, установлено следующее.

У т в е р ж д е н и е 53.2. *M: $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m) \to \boldsymbol{M}(m \times n)$ — отображение, сопоставляющее гомоморфизму его матрицу относительно заданных в этих векторных пространствах базисах, сюръективно.*

З а д а н и е 53.3. Пусть относительно некоторых базисов в векторных пространствах U и V матрица гомоморфизма $g \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ имеет вид:

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По ее виду можно определить размерности векторных пространств U и V: $\dim U \overset{?}{=} 3$ и $\dim V \overset{?}{=} 2$.

Чтобы найти образ вектора из пространства U^3, например, $\vec{a}(2, 1, -1)$, то заметим, что $\vec{a} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$, а

$$M_g(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; M_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; M_g(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и получим по линейности:

$$M_g(\vec{a}) = ?\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + ?\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + ?\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = ?. \qquad \blacklozenge$$

Постарайтесь найти прообразы векторов $\vec{a}(1, -1)$ и $\vec{b}(1, 2)$ из векторного пространства V^2.

В примере 53.1 мы видели, как с помощью матрицы гомоморфизма удалось выразить координаты $f_1(\vec{x})$ образа произвольного вектора через координаты самого вектора $\vec{x}$.

Можно ли для гомоморфизма g настоящего задания сделать то же самое — найти координаты образа произвольного вектора из пространства U^3? Указать координаты прообраза произвольного вектора из V^2? (относительно заданных базисов). ♦

Рассмотрим общий случай. Пусть $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, и заданы базисы: $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ в векторном пространстве U^n и $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_m \rangle$ в V^m и относительно этих базисов указана матрица гомоморфизма f:

$$M_f = \| f^i_j \| = \begin{pmatrix} f^1_1 & f^1_2 & \dots & f^1_n \\ f^2_1 & f^2_2 & \dots & f^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^m_1 & f^m_2 & \dots & f^m_n \end{pmatrix}. \qquad (53.3)$$

Пусть

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n = x^i\vec{e}_i \qquad (53.\vec{x})$$

разложение произвольного вектора $\vec{x} \in U^n$ по базису B и его координатный столбец:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$f(\vec{x}) = f(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n) \overset{?}{=} x^1 f(\vec{e}_1) + x^2 f(\vec{e}_2) + \dots + x^n f(\vec{e}_n) \overset{?}{=}$$

$$= x^1 (f^1_1\vec{c}_1 + f^2_1\vec{c}_2 + \dots + f^m_1\vec{c}_m) + x^2 (f^1_2\vec{c}_1 + f^2_2\vec{c}_2 + \dots + f^m_2\vec{c}_m) + \dots +$$

$$+ x^n (f^1_n\vec{c}_1 + f^2_n\vec{c}_2 + \dots + f^m_n\vec{c}_m) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} (x^1 f^1_1 + x^2 f^1_2 + \dots + x^n f^1_n)\,\vec{c}_1 +$$

$$+ (x^1 f^2_1 + x^2 f^2_2 + \dots + x^n f^2_n)\,\vec{c}_2 + \dots$$

$$\dots + (x^1 f^m_1 + x^2 f^m_2 + \dots + x^n f^m_n)\,\vec{c}_m.$$

Выпишем координатный столбец $M_{f(\vec{x})}$ вектора

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y^1\vec{c}_1 + y^2\vec{c}_2 + \dots + y^m\vec{c}_m:$$

$$M_{f(\vec{x})}=M_{\vec{y}}=\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1^1x^1+f_2^1x^2+\ldots+f_n^1x^n \\ f_1^2x^1+f_2^2x^2+\ldots+f_n^2x^n \\ \ldots \\ f_1^mx^1+f_2^mx^2+\ldots+f_n^mx^n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \ldots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ldots & f_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^m & f_2^m & \ldots & f_n^m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}=M_f\cdot M_{\vec{x}},$$

где $M_{\vec{x}}$ — координатный столбец вектора $\vec{x}$.

Тем самым доказано утверждение.

Утверждение 53.3. *Если B и C — базисы векторных пространств: U^n и, соответственно, V^m, и M_f — матрица гомоморфизма $f\in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ относительно этих базисов, то для любого вектора $\vec{x}\in U^n$*

$$M_{f(\vec{x})}=M_fM_{\vec{x}} \tag{53.4}$$

$M_{f(\vec{x})}$ — столбец координат образа вектора V^m,
M_f — матрица гомоморфизма f,
$M_{\vec{x}}$ — столбец координат вектора U^n.

Так что продолжая задание 53.3, теперь стандартным образом можем получить координатный столбец образа произвольного вектора из U^3 по формуле:

$$\boldsymbol{M}_{g(\vec{x})}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=?$$

Задача 53.2.1. $h\in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$, $M_h=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица гомоморфизма h относительно некоторого базиса $B=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ в $\mathbf{R}^2$. Найдите координаты прообразов базисных векторов. Можно ли указать координаты прообраза произвольного вектора $\vec{x}(x^1, x^2)$? Если это возможно, то найдите их.

Указание. См. формулу (54.4). Обратима ли матрица M_f?

Задача 53.2.2. $g\in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$, $M_g=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица гомоморфизма g относительно некоторого базиса $B=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ в векторном пространстве $\mathbf{R}^2$. Можно ли найти координаты прообразов базисных векторов, координаты прообраза произвольного вектора $\vec{x}(x^1, x^2)$, какого-либо вектора? Если это возможно, укажите их.

Указание. См. формулу (53.4). Обратима ли матрица M_f?

Замечание 53.2. Если относительно некоторых заданных базисов в векторных пространствах U и V указана матрица M_f гомоморфизма $f\colon U\to V$, то прообраз произвольного вектора однозначно можно найти только в том случае, если эта матрица M_f квадратна и обратима. Тогда

$$M_{\vec{x}}=M_f^{-1}M_{f(\vec{x})}, \tag{53.5}$$

$M_{f(\vec{x})}$ — столбец координат образа вектора V^m,
M_f — матрица гомоморфизма f,
$M_{\vec{x}}$ — столбец координат вектора U^n.

Если $f\in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ и $n<m$, в векторном пространстве V^m найдутся векторы, не имеющие прообраза в U^n. ◆

Задача 53.3.3. Подумайте, является ли условие $n<m$ необходимым, чтобы в векторном пространстве V^m нашелся вектор для $f\in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, не принадлежащий $\operatorname{Im} f$. Т. е. может ли найтись такой вектор для какого-либо гомоморфизма $f\in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ при $n\geqslant m$?

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Сотри случайные черты —
И ты увидишь — мир прекрасен.

А. Блок

Собственно современное определение линейного отображения впервые дал итальянский математик Дж. Пеано в 1888 году (ему же принадлежит и аксиоматическое определение векторного пространства (см. историческую справку лекции 8)). Однако это понятие было подготовлено развитием математики от ее истоков. Так древнейшая и простейшая из известных нам функций — линейная: $f(x)=kx$ есть не что иное, как пример линейного отображения $\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$. Более того, $f(x)=kx$ — общий вид такого отображения (при любом действительном k).

Наряду с векторным пространством понятие линейного отображения (гомеоморфизма векторных пространств) является одним из основных в разделе современной математики, который носит название линейной алгебры. К ее области относятся такие вопросы, как теория линейных уравнений, теория матриц, преобразования аффинных координат точек, некоторые виды преобразований плоскости (в частности, движения или перемещения), многие вопросы аналитической геометрии, дифференциальные и интегральные преобразования функций. Истоки линейной алгебры, как и всякого крупного раздела математики, лежат в глубине времен, и многие из ее простейших правил были открыты еще задолго до Новой Эры. Можно сказать, что эта наука появилась на свет, чтобы удовлетворять нужды вычислителя-практика. Так из 84-х задач знаменитого египетского папируса Ринда, относящегося ко времени Среднего царства (20—18 в. в. до Р. Х.) большинство составляют задачи на действия с дробями, пропорциональное деление, вычисление некоторых площадей и объемов, описание правил и приемов подобных вычислений, где, как бы мы сказали теперь, результат линейным образом зависит от начальных данных. К трактатам по линейной алгебре вполне могут быть отнесены различные «вычислительные книги» Средних веков и всевозможные руководства по практической арифметике вплоть до современных школьных учебников начальных классов по этому предмету.

Исторически же первым разделом линейной алгебры, как науки, была теория линейных уравнений, построение которой, как мы отмечали в исторической справке к предыдущей лекции, было завершено к концу XIX века. Метод координат позволил свести, если не все, то многие вопросы аналитической геометрии к задачам линейной алгебры, что существенно расширило область ее применения. В частности, в решении так называемых задач классификации (кривых и поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка (квадрик), форм и т. п.). В XX веке основные задачи линейной алгебры связаны с понятием векторного пространства и связанных с ним понятиями линейного отображения (оператора), собственных значений и собственных векторов, линейной, билинейной и полилинейной функций на векторном пространстве, а также их обобщения — тензора. Последние играют важную роль во многих областях математики и физики. Следует отметить, что до начала XX века линейная алгебра была «конечномерной», т. е. занималась вопросами и задачами в векторных пространствах конечной размерности. Первые «бесконечномерные» результаты были получены немецким математиком О. Теплицем. Он заметил, что теория определителей по существу не нужна в доказательствах многих основных теорем и фактов линейной алгебры. Отказавшись от «техники определителей» — основного аппарата линейной алгебры конца XIX века, Теплиц распространил многие результаты классической линейной алгебры на векторные пространства бесконечного числа измерений (и даже над произвольным числовым полем), опубликовав в 1909 г. в Палермо работу “Über die Auflösung inendichvieler liniearer Gleihungen mit unendichvielen Unbekanneten“ («О разрешимости систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных»), где, в частности, оперировал понятиями линейно зависимых и независимых систем векторов в бесконечномерных (координатных) пространствах.

Многие идеи линейной алгебры в бесконечномерных векторных пространствах (с некоторыми дополнительными структурами) были развиты другим немецким математиком Д. Гильбертом (Hilbert David, 1862—1943) и польским математиком С. Банахом (Banach Stefan, 1892—1945). Их исследования привели к созданию нового раздела современной математики: линейного функционального анализа, а классы векторных пространств, изучением которых они занимались, получили их имена: гильбертовы и банаховы пространства нашли интерпретации в современнейших разделах теории функций и теоретической физики.

Со второй половины XX века, особенно с созданием быстродействующих ЭВМ и развитием вычислительной техники, большое значение получают так называемые численные методы линейной алгебры, различные задачи устойчивости решений систем линейных уравнений, апроксимаций (приближений) нелинейных процессов линейными. Собственно первые работы по анализу устойчивости и ошибок округления появились, можно сказать, совсем недавно: в 1947—1948 г.г. Ныне круг проблем в этой области уже достаточно четко очерчен (к широко применяемым методам решений относятся также, например, методы решения систем линейных уравнений последовательным исключением переменных и окаймляющих миноров, методы сопряженных градиентов, простой итерации или релаксации и т. д.). В настоящее время достаточно большое количество разработанных численных методов линейной алгебры делает актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию уже существующих методов. Поскольку при большом числе переменных или начальных данных реальным решением той или иной численной задачи линейной алгебры становится, по существу, ее приближенное решение с требуемой точностью (погрешностью) для того или иного физического или, вообще, любого математически моделируемого процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.— 272 с.
3. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
4. *Мантуров О. В.* Элементы тензорного исчисления.— М.: Просвещение, 1991.—255 с.
5. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 532 с.
6. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 416 с.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 400 с.
9. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 49°. Координаты вектора в базисе

[1] — стр. 265—266.
[2] — стр. 16—19.
[4] — стр. 12—13.
[5] — стр. 335—337.
[6] — стр. 11—13, 203.
[7] — стр. 36—38.
[9] — стр. 68—69.

§ 50. Ориентация векторного пространства

[1] — стр. 295—296.
[2] — стр. 28—30.
[4] — стр. 20, 24—25, 29—30.
[5] — стр. 337.
[6] — стр. 203—204.
[7] — стр. 66—74.

§ 51. Линейные отображения векторных пространств

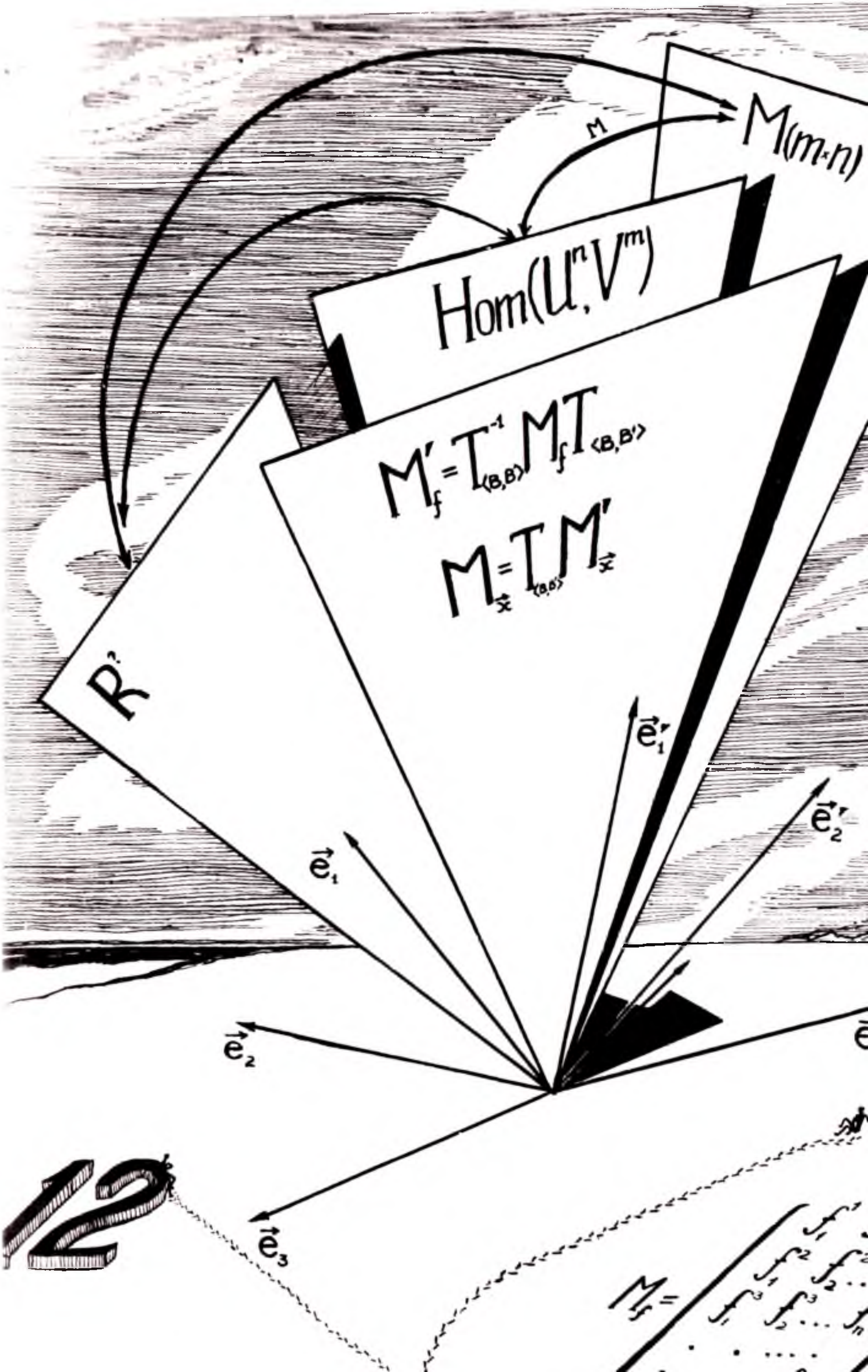
[1] — стр. 283—284.
[2] — стр. 95—97.
[3] — стр. 34—36.
[4] — стр. 17—18.
[5] — стр. 378—379.
[6] — стр. 210—212.
[8] — стр. 30.

§ 52′. Пространство линейных отображений

[1] — стр. 287—288, 291.
[2] — стр. 101—104.
[3] — стр. 38, 316 — 318.

§ 53. Матрица гомоморфизма

[1] — стр. 289—293.
[2] — стр. 37—38.
[3] — стр. 62—64.
[4] — стр. 314.
[6] — стр. 213—215.
[6] — стр. 79—80.
[8] — стр. 97—100.


M(m×n)
M
Hom(U^n, V^m)
M'_f = T^{-1}_{⟨B,B'⟩} M_f T_{⟨B,B'⟩}
M_x = T_{⟨B,B'⟩} M'_x
e'_1
e'_2
e_1
e_2
e_3
12
M_f =

Лекция 12

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ

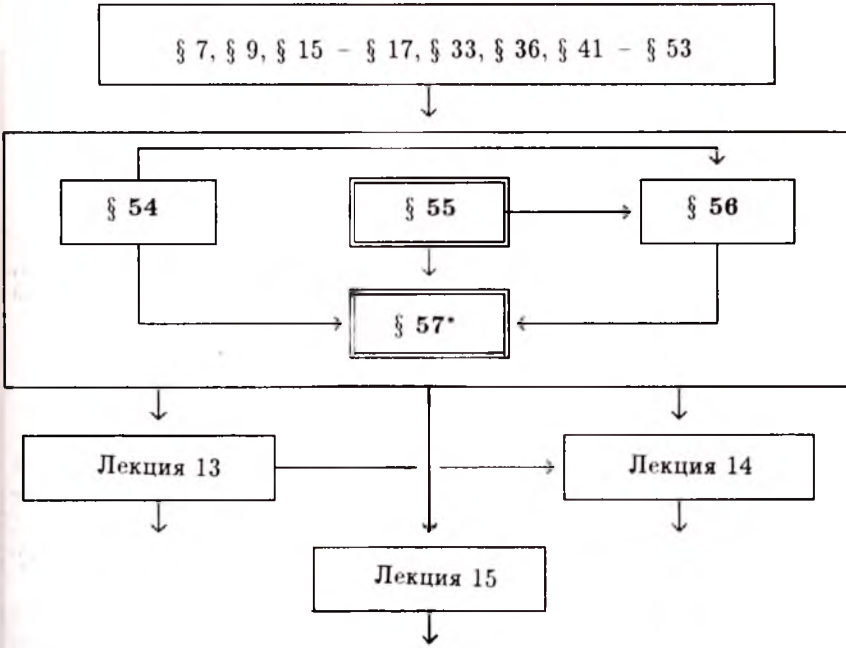
МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ

§ 54. Изменение матрицы гомоморфизма при замене базисов векторных пространств.
§ 55. Изоморфизм векторных пространств.
§ 56. Изоморфизм векторных пространств $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ и $\boldsymbol{M}(m \times n)$.
§ 57*. Ядро гомоморфизма.

Основные понятия: матрица гомоморфизма, изоморфизм векторных пространств, ядро гомоморфизма, ранг и дефект гомоморфизма.

Необходимые сведения: векторное пространство, подпространство векторного пространства, базис векторного пространства, размерность векторного пространства, координаты вектора, гомоморфизм векторных пространств, эндоморфизм, биективное отображение, координатное векторное пространство, размерность координатного векторного пространства, отношение эквивалентности, класс эквивалентности, полная система представителей отношения эквивалентности, операции на гомоморфизмах, векторное пространство гомоморфизмов $\boldsymbol{Hom}(V^n, V^m)$, векторное пространство матриц $\boldsymbol{M}(m \times n)$, размерность векторного пространства $\boldsymbol{M}(m \times n)$, ранг матрицы.

Рекомендации: § 57* можно посоветовать для самостоятельного изучения наиболее любознательным студентам.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств. (§ 49 — § 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов. (§ 54 — § 57).

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов.
Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.
Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 54. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ГОМОМОРФИЗМА ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСОВ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В § 53 отмечалось (см. определение 53.1), что матрица гомоморфизма $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ задается относительно базисов, указанных в векторных пространствах U^n и V^m. При замене базиса, в векторном пространстве, как мы выяснили в § 50, координаты векторов, вообще говоря, меняются, и естественно задаться вопросом: не меняется ли при изменениях базисов в пространствах U^n и V^m матрица гомоморфизма?

Постановка задачи. Пусть $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, а M_f — матрица этого гомоморфизма относительно базисов: B в векторном пространстве U^n и, соответственно, C в векторном пространстве V^m. Пусть в U^n задан еще базис B' с матрицей перехода $T_{\langle B,\ B' \rangle}$, а в V^m — базис C' с матрицей перехода $T_{\langle C,\ C' \rangle}$. Матрицу гомоморфизма f относительно «новых базисов» B' и C' обозначим M_f'.

Выясним, совпадают ли матрицы M_f и M_f'?

Будем, как всегда, обозначать $M_{\vec{x}}$ координатный столбец произвольного вектора $\vec{x} \in U^n$ относительно базиса B, а $M'_{\vec{x}}$ — его координатный столбец относительно базиса B'. Аналогично, $M_{f(\vec{x})}$ и $M'_{f(\vec{x})}$ — координатные столбцы вектора $f(\vec{x}) \in V^m$ относительно базисов C и, соответственно, C' в векторном пространстве V^m.

Известно, что при переходе от базиса B к базису B' в векторном пространстве U^n координаты произвольного вектора $\vec{x}$ меняются по закону:

$$M_{\vec{x}} \overset{(50.1)}{=\!=} T_{\langle B,\ B' \rangle} M'_{\vec{x}}, \tag{54.B}$$

соответствующее изменение координат вектора $f(\vec{x}) \in V^m$ при замене базиса C на C':

$$M_{f(\vec{x})} \overset{(50.1)}{=\!=} T_{\langle C,\ C' \rangle} M'_{f(\vec{x})}. \tag{54.C}$$

Тогда согласно этой формуле изменения координат вектора при замене базиса (теор. 50.1):

$$M_{f(\vec{x})} = T_{\langle C,\ C' \rangle} M'_{f(\vec{x})} \overset{?}{=} T_{\langle C,\ C' \rangle} (M_f' M'_{\vec{x}}) \overset{?}{=} (T_{\langle C,\ C' \rangle} M_f') M'_{\vec{x}}.$$

С другой стороны

$$M_{f(\vec{x})} \overset{?}{=} M_f M_{\vec{x}} \overset{?}{=} M_f (T_{\langle B,\, B'\rangle} M'_{\vec{x}}) \overset{?}{=} (M_f T_{\langle B,\, B'\rangle}) M'_{\vec{x}}.$$

Следовательно,

$$(T_{\langle C,\, C'\rangle} M'_f) M'_{\vec{x}} = (M_f T_{\langle B,\, B'\rangle}) M'_{\vec{x}}.$$

Так как вектор $\vec{x} \in U^n$ произволен, а значит, произволен координатный столбец $M_{\vec{x}} \in \mathbf{M}(n \times 1)$, то по лемме о сокращении 50.1 будем иметь:

$$T_{\langle C,\, C'\rangle} M'_f = M_f T_{\langle B,\, B'\rangle},$$

а в силу обратимости матрицы $T_{\langle C,\, C'\rangle}$ (почему? ◆) — и закон изменения матрицы гомоморфизма при замене базисов. Тем самым доказана следующая теорема о матрице гомоморфизма. ■

Теорема 54.1. *Если $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, то с заменой базисов в векторных пространствах U^n и V^m матрица гомоморфизма меняется по правилу:*

$$M'_f = T^{-1}_{\langle C,\, C'\rangle} M_f T_{\langle B,\, B'\rangle}. \qquad (54.1)$$

M'_f — матрица $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ относительно базисов B' и C'.
M_f — матрица $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ относительно базисов B и C.
$T_{\langle C,\, C'\rangle}$ — матрица перехода от базиса C к C' в V^m.
$T_{\langle B,\, B'\rangle}$ — матрица перехода от базиса B к B' в U^n.

Полученная формула и дает ответ на поставленный выше вопрос: матрица гомоморфизма, вообще говоря, меняется при изменениях базисов в векторных пространствах, более того, найден закон изменения матриц гомоморфизмов.

Отметим один частный случай, важный в приложениях.

Следствие 54.1. *Если f — эндоморфизм некоторого пространства V^n, то*

$$M'_f = T^{-1}_{\langle B,\, B'\rangle} M_f T_{\langle B,\, B'\rangle}. \qquad (54.2)$$

M'_f — матрица $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$ относительно базиса B'.
M_f — матрица $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$ относительно базиса B.
$T_{\langle B,\, B'\rangle}$ — матрица перехода от базиса B к B' в V^m.

Эта формула (54.2) используется в различных задачах и исследованиях: так в настоящем курсе изучению свойств эндоморфизмов будет посвящено несколько лекций, в которых закон изменения их матриц при заменах базисов будет играть существенную роль.

Задача 54.1.1. В векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2\times 1)$ относительно стандартного базиса $B^\circ=\langle\vec{E}_1, \vec{E}_2\rangle$ (см. определение 41.3), где

$$\vec{E}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{E}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

эндоморфизм f задан матрицей:

$$M_{f_{\langle B^\circ\rangle}}=\begin{pmatrix}3&4\\5&3\end{pmatrix}.$$

Найдите его матрицу относительно базиса $B'=\langle\vec{A}_1, \vec{A}_2\rangle$ с векторами:

$$\vec{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{A}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Указание.
$T_{\langle B^\circ,\ B'\rangle}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, тогда $M_{f_{\langle B'\rangle}}=T^{-1}_{\langle B^\circ,\ B'\rangle}M_{f_{\langle B^\circ\rangle}}T_{\langle B^\circ,\ B'\rangle}=?\begin{pmatrix}3&4\\5&3\end{pmatrix}?.$

Следствие 54.2. *Ранг матрицы гомоморфизма не меняется при замене базисов.*

Так если $f\in\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, а M_f и M'_f — матрицы гомоморфизма f относительно соответствующих пар базисов, то, поскольку согласно следствию 43.1 домножение матрицы на невырожденные (в нашем случае это $T^{-1}_{\langle C,\ C'\rangle}$ и $T_{\langle B,\ B'\rangle}$) не меняет ее ранга:

$$\operatorname{Rang} M_f=\operatorname{Rang} M'_f. \tag{54.2}$$

Это следствие позволяет корректно ввести еще одну характеристику гомоморфизма.

Определение 54.1. ***Рангом гомоморфизма*** *называется ранг его матрицы.*

$$\operatorname{rang} f=\operatorname{Rang} M_f. \tag{54.3}$$

Таким образом, можно сказать, что ранг гомоморфизма является его инвариантом (относительно замены базисов).

§ 55. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Понятие изоморфизма векторных пространств является одним из основных. Как и «гомоморфизм», это слово греческого происхождения: значение μορφη мы уже знаем — образ, форма, а ισος — равный. Таким образом, речь пойдет об «равнообразных», а точнее «равноотображаемых» в некотором смысле векторных пространствах.

Определение 55.1. ***Векторное пространство*** U *называется* ***изоморфным векторному пространству*** V, *если существует биективный гомоморфизм* $f: U \to V$, *отображение* f *в этом случае называется* ***изоморфизмом векторных пространств*** U *и* V.

Обозначается множество всех изоморфизмов векторных пространств U и V: $\boldsymbol{Izom}(U, V)$.

Очевидно, $\boldsymbol{Izom}(U, V) \subset \boldsymbol{Hom}(U, V)$.

Примеры изоморфизмов векторных пространств — гомоморфизмы 51: f_4, f_4^{-1}, f_5 (примеры 51.2, 51.3):

$$f_4: M(n \times 1) \to M(1 \times n) \mid f_4 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, x^2, \ldots x^n),$$

$$f_4^{-1}: M(1 \times n) \to M(n \times 1) \mid f_4^{-1}(x^1, x^2, \ldots x^n) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

$$f_5: M(2 \times 1) \to M(2 \times 1) \mid f_5 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}.$$

См. также отображения: f (задание 53.2), h_n (задача 53.1.1). А изоморфизмы f_4 и f_4^{-1} примечательны тем, что позволяют как бы отождествлять координатный столбец и координатную строку вектора n-мерного векторного пространства — элементы, вообще говоря, разных векторных пространств.

Заметим, что следствие 53.1, доказанное выше, по существу теперь можно рассматривать, как признак изоморфизма конечномерных векторных пространств, так как линейное отображение, переводящее базис векторного пространства в базис векторного пространства, является изоморфизмом этих векторных пространств. Отсюда немедленно следует, что если размерности векторных пространств равны, то такие векторные пространства изоморфны, так как в этом случае всегда можно определить гомоморфизм, отображающий базис в базис. А именно, если $\langle U^n, B\rangle$ и $\langle V^n, C\rangle$ — векторные пространства с базисом: $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \rangle$ и, соответственно, $C = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_n \rangle$, то очевидно задание отображения $f: U \to V$ так, что

$$f(\vec{e}_i) = \vec{c}_i \qquad (55.f)$$

при всех $i = 1, 2, \dots n$, и определяет требуемый изоморфизм векторных пространств U^n и V^n. ◆

Таким образом имеем следующую формулировку признака изоморфизма векторных пространств.

Утверждение 55.1. *Если размерности векторных пространств равны, то они изоморфны.*

Оказывается, что равенство размерностей конечномерных векторных пространств является не только достаточным, но и необходимым признаком их изоморфизма, что будет доказано позже и таким образом имеет место важная теорема.

Теорема 55.1. *Два векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Все это означает, что важнейшей характеристикой конечномерного векторного пространства является его размерность. В частности, согласно теореме 55.1 любое n-мерное векторное пространство изоморфно координатному пространству $\mathbf{R}^n$, как пространству одной с ним разномерности — n (см. § 41). Следующие соображения позволяют выделить как «эталонные» в некотором смысле среди изоморфных конечномерных векторных пространств — именно координатные (определение 34.1), и построить канонический изоморфизм произвольного n-мерного векторного пространства и соответствующего координатного пространства. Для этого воспользуемся тем фактом, что любой гомоморфизм однозначно определяется своими значениями на базисных векторах (лемма 53.1, следствие 53.1).

Векторное пространство V^n, как n-мерное, по определению имеет некоторый базис из n векторов: $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$.

В качестве представления координатного n-мерного векторного пространства возьмем, например, матричное пространство $\boldsymbol{M}(n \times 1)$ со стандартным базисом $B^\circ = \langle \vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2, \dots \vec{\boldsymbol{E}}_n \rangle$ (определение 41.3).

Изоморфизм $M: V^n \to \boldsymbol{M}(n \times 1)$ зададим значениями на базисных векторах:

$$M_B(\vec{e}_i) = \vec{\boldsymbol{E}}_i$$

при всех $i = 1, 2, \dots n$. (См. (55.f)). Тогда

$$M_B(\vec{x}) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

для любого вектора $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)_B$.

Такое каноническое отображение объясняет использование термина «координатное пространство» для векторного пространства $\langle \mathbf{R}^n, +, \cdot \rangle$ и его представлений — $\langle \boldsymbol{M}(n \times 1), +, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{M}(1 \times n), +, \cdot \rangle$

Рассмотрим бинарное отношение на множестве всех векторных пространств:

$$\mathscr{I}z = \{\langle U, V \rangle \mid U \text{ изоморфно } V\}.$$

Свойства гомоморфизмов векторных пространств и биективных отображений позволяют установить следующую теорему.

Теорема 55.2. *Отношение $\mathscr{I}z$ изоморфизма векторных пространств есть отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств.*

Доказательство. Согласно утверждению 15.1 достаточно доказать симметричность и транзитивность отношения $\mathscr{I}z$.

1. Симметричность: теорема 10.3 + следствие 51.1. ◆
2. Транзитивность: теорема 10.1 + теорема 51.?. ◆

Эта теорема важна тем, что разбивая все векторные пространства на непересекающиеся классы эквивалентности изоморфных между собой векторных пространств, существенно сужает объем исследований, поскольку достаточно изучить и описать свойства одного из пространств такого класса эквивалентности, чтобы получить полное представление о свойствах любого изоморфного ему векторного пространства. Конечно, только как векторного пространства, так как каждое из них может иметь свои особенности в зависимости от того, на каком множестве элементов задана его структура, например: пространство свободных векторов, какое-либо матричное векторное пространство, пространство функций на отрезке и т. д.

При этом теорема 55.1 означает, что векторные пространства одной размерности составляют один класс эквивалентности. А координатные векторные пространства и составляют полную систему представителей отношения эквивалентности $\mathscr{I}z$. Это существенно упрощает исследования конечномерных векторных пространств, так как позволяет выбирать для изучения свойств n-мерного пространства наиболее удобный для этого представитель его класса эквивалентности — изоморфное ему координатное векторное пространство соответствующей размерности, элементы которого легко представимы числовыми кортежами, а подпространства такого векторного пространства (как отмечено утверждением 36.3) описываются системами линейных однородных уравнений.

Следствие 55.1. *Если f — изоморфизм векторных пространств U и V, то отображение f^{-1} — изоморфизм пространств V и U.* Это следует из симметричности отношения $\mathscr{I}z$.

Изучим некоторые основные свойства изоморфных пространств.

Лемма 55.1. *При изоморфизме векторных пространств прообразом нулевого вектора является нулевой вектор.*

(Сравните с леммой 51.1).

Доказательство. По лемме 51.1 $f(\vec{0})=\vec{0}$, а так как при изоморфизме прообраз всякого элемента единствен (почему? ♦), то $f^{-1}(\vec{0})=\vec{0}$. ■

В § 40 мы задавались вопросом — существуют ли отображения векторных пространств, сохраняющих линейную независимость систем векторов. Ответ на него дает следующее утверждение.

Утверждение 55.2. *Изоморфизм векторных пространств отображает всякую линейно независимую систему векторов в линейно независимую.*

Задача 55.1.2. Докажите утверждение 55.2.

Доказательство. Пусть $\langle U, +, \cdot\rangle$, $\langle V, \oplus, \odot\rangle$ — векторные пространства, $f\in \boldsymbol{Izom}(U, V)$, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$ — линейно независимая система векторов в пространстве U.

Если бы система векторов $\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \dots f(\vec{a}_k)\}$ была линейно зависима, то так как f^{-1} — тоже изоморфизм (следствие 55.1), а значит, является и гомоморфизмом, то по утверждению 51.3 линейно зависима система:

$$\{f^{-1}(f(\vec{a}_1)), f^{-1}(f(\vec{a}_2)), \dots f^{-1}(f(\vec{a}_k))\}\overset{?}{=}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\},$$

что противоречит условию и влечет линейную независимость системы векторов $\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \dots f(\vec{a}_k)\}$. ♦ ■

Следствие 55.2. *При изоморфизме векторных пространств прообразом линейно независимой системы векторов является также линейно независимая система.*

Т. е. если $f\in \boldsymbol{Izom}(U, V)$ и $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ — линейно независимая система векторов в V, то линейно независима и система из их прообразов:

$$\{f^{-1}(\vec{a}_1), f^{-1}(\vec{a}_2), \dots f^{-1}(\vec{a}_n)\}\subset U,$$

так как $f^{-1}\in \boldsymbol{Izom}(V, U)$ и последнюю можно рассматривать, как систему образов линейно независимой системы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\}$ при гомоморфизме f^{-1}.

Совершенно очевидно следующее.

Следствие 55.3. *При изоморфизме векторных пространств прообразом всякой линейно зависимой системы векторов является линейно зависимая система.* ♦

Предыдущее утверждение (в совокупности с утверждением 51.3) и следствия означают, что при изоморфизме векторных пространств системами векторов наследуются свойства линейной зависимости и независимости, т. е.

Следствие 55.4. *При изоморфизме векторных пространств образом и прообразом любой линейно зависимой (независимой) системы векторов является также линейно зависимая (независимая) система.*

Теперь мы располагаем результатами, достаточными для того, чтобы доказать необходимый признак изоморфизма конечномерных векторных пространств (см. теорема 55.2).

Утверждение 55.3. *Если конечномерные векторные пространства U и V изоморфны, то их размерности равны:*

$$\dim V = \dim U.$$

Пусть $\dim U = n$. Доказательство опирается на теорему о размерности векторного пространства 41.2: ее требования выполнимости условий:

D.1. существует система из n линейно независимых векторов.

D.2 всякая система из $n+1$ вектора линейно зависима и сохранении изоморфизмом свойства линейной зависимости или независимости системой векторов.

Поскольку в U найдется линейно независимая система из n векторов, то согласно утверждению 55.2 их образы также линейно независимы. Что означает выполнимость условия D.1 в векторном пространстве V.

Если бы в V нашлась линейно независимая система из $n+1$ вектора, то согласно следствию 55.? это означало бы наличие в векторном пространстве U линейно независимой системы из $n+1$ вектора. Значит в V выполняется и условие D.2: всякая система из $n+1$ вектора линейно зависима.

Значит, размерность векторного пространства V также n и $\dim V = \dim U$. ■

Задание 55.1. Единственным ли способом определяется изоморфизм двух изоморфных векторных пространств? ◆

Указание. Попробуйте указать другой изоморфизм хотя бы векторных пространств $\boldsymbol{M}(2\times 1)\to \boldsymbol{M}(1\times 2)$, отличный от биективного гомоморфизма примера 51.2:

$$f_4 : \boldsymbol{M}(2\times 1)\to \boldsymbol{M}(1\times 2) \mid f_4\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1,\ x^2).$$

Следствие 55.5. *При изоморфизме векторных пространств базис отображается в базис.*

(Сравните это утверждение со следствием 53.1).

Доказательство. Если $B = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots\ \vec{e}_n \rangle$ — базис U^n, а $f \in \boldsymbol{Izom}(U^n,\ V^n)$, то по утверждению 55.1 система векторов:

$B' = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)\rangle$ линейно независима, а значит, согласно следствию 41.1 образует базис в n-мерном векторном пространстве V^n. ■

§ 56. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ И $\boldsymbol{M}(m \times n)$

В § 53 мы определили, как гомоморфизму сопоставляется его матрица. При этом, когда в векторных пространствах U^n и V^m фиксированы базисы: B и, соответственно C, то, согласно утверждению 53.2, можно считать заданным и отображение M пространства гомоморфизмов $\langle \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m), +, \cdot\rangle$ в матричное векторное пространство $\boldsymbol{M}(m \times n)$, сопоставляющее гомоморфизму его матрицу (относительно данных базисов B и C):

$$M(f) \overset{\text{des}}{=\!=} M_f = \| f_j^i \| \in \boldsymbol{M}(m \times n). \tag{56.1}$$

Исследуем свойства этого отображения: линейность, биективность (инъективность и сюръективность).

1. Линейно ли отображение M? Чтобы установить это, следует убедиться в выполнимости условий линейности L.1 и L.2.

1) Рассмотрим сначала условие L.2:

$$M(\lambda \cdot f) \overset{?}{=} \lambda M(f)$$

для любых $\langle \lambda, f\rangle \in \mathbf{R} \times \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$.

В обозначениях (56.1) оно имеет вид:

$$M_{(\lambda \cdot f)} \overset{?}{=} \lambda M_f\,. \tag{56.2}$$

Заметим, что, если

$$M_f = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & f_2^m & \dots & f_n^m \end{pmatrix}, \text{ то } \lambda M_f = \begin{pmatrix} \lambda f_1^1 & \lambda f_2^1 & \dots & \lambda f_n^1 \\ \lambda f_1^2 & \lambda f_2^2 & \dots & \lambda f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda f_1^m & \lambda f_2^m & \dots & \lambda f_n^m \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить матрицу $M_{(\lambda \cdot f)}$, надо найти значения гомоморфизма $\lambda \cdot f$ на векторах базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$, для примера рассмотрим значение $\lambda \cdot f$ на первом базисном векторе $\vec{e}_1$:

$$(\lambda \cdot f)(\vec{e}_1) \overset{?}{=} \lambda f(\vec{e}_1) \overset{?}{=} \lambda (f_1^1 \vec{c}_1 + f_1^2 \vec{c}_2 + \dots + f_1^m \vec{c}_m) =$$
$$= \lambda f_1^1 \vec{c}_1 + \lambda f_1^2 \vec{c}_2 + \dots + \lambda f_1^m \vec{c}_m.$$

Таким образом, $(\lambda f_1^1,\ \lambda f_1^2,\ \dots\ \lambda f_1^m)$ — координаты вектора $(\lambda\cdot f)(\vec{e}_1)$ в базисе $C=\langle\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \dots\ \vec{c}_m\rangle$ и первый столбец матрицы $M_{(\lambda\cdot f)}$ равен

$$\begin{pmatrix}\lambda f_1^1\\ \lambda f_1^2\\ \dots\\ \lambda f_1^m\end{pmatrix}.$$

Аналогично могут быть получены остальные ее столбцы, так что

$$M_{(\lambda\cdot f)}=\begin{pmatrix}\lambda f_1^1 & \lambda f_2^1 & \dots & \lambda f_n^1\\ \lambda f_1^2 & \lambda f_2^2 & \dots & \lambda f_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda f_1^m & \lambda f_2^m & \dots & \lambda f_n^m\end{pmatrix}=\lambda M_f,$$

и характеристическое свойство L.2 отображением M выполняется.

2) Условие L.1 применительно к отображению M имеет вид:

$$M(f+g)=M(f)+M(g)$$

для любых $\{f,\ g\}\subset\boldsymbol{Hom}(U^n,\ V^m)$, или в обозначениях (56.1):

$$M_{(f+g)}\overset{?}{=}M_f+M_g. \tag{56.3}$$

Пусть

$$M_f=\begin{pmatrix}f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1\\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_1^m & f_2^m & \dots & f_n^m\end{pmatrix}\ \text{и}\ M_g=\begin{pmatrix}g_1^1 & g_2^1 & \dots & g_n^1\\ g_1^2 & g_2^2 & \dots & g_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ g_1^m & g_2^m & \dots & g_n^m\end{pmatrix}.$$

Чтобы получить матрицу $M_{(f+g)}$, надо найти координаты образов всех базисных векторов при действии суммой гомоморфизмов: $f+g$. Для любого $i=1,\ 2,\ \dots\ n$

$$(f+g)(\vec{e}_i)\overset{(52.\boxed{+})}{=\!=\!=}f(\vec{e}_i)+g(\vec{e}_i)\overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=}(f_i^1\vec{c}_1+f_i^2\vec{c}_2+\ \dots\ +f_i^m\vec{c}_m)+(g_i^1\vec{c}_1+g_i^2\vec{c}_2+\ \dots\ +g_i^m\vec{c}_m)\overset{?}{=}$$
$$=(f_i^1+g_i^1)\vec{c}_1+(f_i^2+g_i^2)\vec{c}_2+\ \dots\ +(f_i^m+g_i^m)\vec{c}_m.$$

Из этого следует, что i-й столбец матрицы $M_{(f+g)}$ есть

$$\begin{pmatrix} f_i^1+g_i^1 \\ f_i^2+g_i^2 \\ \dots \\ f_i^m+g_i^m \end{pmatrix},$$

а матрица

$$M_{(f+g)}=\begin{pmatrix} f_1^1+g_1^1 & f_2^1+g_2^1 & \dots & f_n^1+g_n^1 \\ f_1^2+g_1^2 & f_2^2+g_2^2 & \dots & f_n^2+g_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^m+g_1^m & f_2^m+g_2^m & \dots & f_n^m+g_n^m \end{pmatrix} \overset{?}{=} M_f+M_g.$$

Т. е. условие L.1 удовлетворяется, и таким образом, доказано, что M — гомоморфизм. ■

Утверждение 56.1. *Отображение векторных пространств M:$\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m) \to \boldsymbol{M}(m \times n)$, сопоставляющее гомоморфизму его матрицу относительно данных в U^n и V^m базисов, есть гомоморфизм.*

2. Биективно ли отображение M?

1) Утверждением 53.2 установлена его сюръективность.

2) Если $\|f_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ и является матрицей некоторого гомоморфизма $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ относительно фиксированных базисов этих пространств, т. е. $\|f_j^i\| = M_f$, то по определению 53.1 матрицы гомоморфизма при всех $i=1, 2, \dots n$

$$f(\vec{e}_i)=f_i^1\vec{c}_1+f_i^2\vec{c}_2+ \dots +f_i^n\vec{c}_n=\vec{f}_i.$$

Согласно лемме 53.1 гомоморфизм векторного пространства $\langle U^n, B\rangle$ в $\langle V^m, C\rangle$ с данными значениями на базисных векторах единствен, так что данной матрице $\|f_j^i\| \in \boldsymbol{M}(m \times n)$ соответствует только гомоморфизм f, что и означает инъективность отображения M. Тем самым доказана биективность M. ■

Утверждение 56.2. *Отображение векторных пространств M:$\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m) \to \boldsymbol{M}(m \times n)$ биективно.*

Утверждения 53.1, 53.2, 56.1, 56.2 объединяем в следующую теорему.

Теорема 56.1. *Векторные пространства: гомоморфизмов $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ и матричное $\boldsymbol{M}(m \times n)$ изоморфны.*

Задача 56.1.1. В векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2 \times 1)$ относительно стандартного базиса $\boldsymbol{B}^\circ = \langle \vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2\rangle$ (см. определение 41.3):

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{E}}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

эндоморфизмы f и g заданы матрицами:

$$M_f=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ и, соответственно, } M_g=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу эндоморфизма $2f+g$ относительно стандартного базиса в этом векторном пространстве.

Указание. См. теорему 56.1, (56.2), (56.3).

Задача 56.1.2. В векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2\times 1)$ относительно базиса $B'=\langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ с векторами:

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{A}}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

эндоморфизм f задан матрицей:

$$M_{f_{\langle B'\rangle}}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу эндоморфизма $2f$ относительно стандартного базиса $B^\circ=\langle \vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2\rangle$ (см. определение 41.3) в этом векторном пространстве:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{E}}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Указание. $T_{\langle B^\circ,\, B'\rangle}\overset{?}{=}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $T_{\langle B',\, B^\circ\rangle}=?$

$M_{f_{\langle B^\circ\rangle}}=T^{-1}_{\langle B',\, B^\circ\rangle}\, M_{f_{\langle B'\rangle}}\, T_{\langle B',\, B^\circ\rangle}=?\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}?$

См. также теорему 56.1, (56.2).

Задача 56.1.3. В векторном пространстве $M(2\times 1)$ относительно базиса $B'=\langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ с векторами:

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{A}}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

эндоморфизм f задан матрицей:

$$M_{f_{\langle B'\rangle}}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

и эндоморфизм g — матрицей:

$$M_{g_{\langle B''\rangle}}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

относительно базиса $B''=\langle \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2\rangle$ в этом векторном пространстве:

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{B}}_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу эндоморфизма $f+g$ относительно базиса $B''=\langle \vec{B}_1, \vec{B}_2\rangle$.

Указание. Можно непосредственно разложить векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ по базису $B'=\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2\rangle$ и найти матрицу $T_{\langle B', B''\rangle}$ (см. определение 50.1). Ее можно найти и как произведение матриц: $T_{\langle B',B''\rangle} \stackrel{?}{=} T_{\langle B',B^\circ\rangle} T_{\langle B^\circ,B''\rangle} \stackrel{?}{=} T^{-1}_{\langle B^\circ,B'\rangle} T_{\langle B^\circ,B''\rangle}$ (см. утверждение 50.2). Затем воспользоваться формулой (54.1), чтобы получить матрицу $M_{f_{\langle B''\rangle}}$. См. также теорему 56.1, (56.3).

Теорема 56.1 позволяет ответить на вопрос о размерности векторного пространства $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, поставленный в § 52:

Следствие 56.1. *Векторное пространство* $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ *имеет размерность* mn.

Более красиво этот же результат можно сформулировать в следующей форме:

Если векторные пространства U *и* V *конечномерны, то*

$$\dim \boldsymbol{Hom}(U, V)=\dim U\cdot\dim V.$$

Задача 56.2.2. Докажите следствие 56.1.

Указание. См. задачу 41.1, 2, теорему 54.1.

Следствие 56.2. *Векторное пространство эндоморфизмов* $\boldsymbol{End}(V^n)$ *изоморфно матричному векторному пространству* $\boldsymbol{gl}(n)$ *и имеет размерность* n^2.

Задача 56.2.3. Поскольку $\dim \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)=mn$, то в этом векторном пространстве базис состоит из mn векторов. Укажите какой-либо базис $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$.

Указание. См. задачу 41.1.2, теорему 54.1, следствие 55.5. Какие матрицы образуют базис в векторном пространстве $\boldsymbol{M}(m\times n)$?

§ 57*. ЯДРО ГОМОМОРФИЗМА

Образ гомоморфизма и его ядро — два подпространства, естественно связанные с линейным отображением, их «устройство» дает важную информацию о самом гомоморфизме: его действии на векторах и подпространствах его области определения.

Для названия области значений гомоморфизма иногда используется термин ***образ гомоморфизма***.

Для $f\in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ (см. определения 5.5, 7.2)

$$\operatorname{Im} f=\{\vec{y}\in V\,|\,\exists\vec{x}\in U\,|\,f(\vec{x})=\vec{y}\}.$$

Как известно (утверждение 51.2), для гомоморфизма $\operatorname{Im} f$ есть подпространство векторного пространства V, а если V конечномерно, то $\dim\operatorname{Im} f\leqslant\dim V$ (согласно следствию 41.2)

Утверждение 57.1. $\operatorname{Im} f$ *является подпространством век* *торного пространства U для всякого гомоморфизма $f \in \mathbf{Hom}(U, V)$.*

Доказательство сводится к проверке выполнимости характеристических свойств SS.1 и SS.2 подпространства векторного пространства (определение 36.1) или эквивалентного требования (см. замечание 36.1) SS: для любых $\langle \lambda, \mu, \vec{x}', \vec{y}' \rangle \in \mathbf{R}^2 \times (\operatorname{Im} f)^2$ вектор $\lambda \vec{x}' + \mu \vec{y}' \in \operatorname{Im} f$.

$\{\vec{x}', \vec{y}'\} \subset \operatorname{Im} f$ означает, что найдутся $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset U$ такие, что $f(\vec{x}) = \vec{x}'$ и $f(\vec{y}) = \vec{y}'$. Тогда

$$\lambda \vec{x}' \oplus \mu \vec{y}' \stackrel{?}{=} \lambda f(\vec{x}) \oplus \mu f(\vec{y}) \stackrel{?}{=} f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}).$$

Это и означает, что вектор $\lambda \vec{x}' \oplus \mu \vec{y}'$ имеет прообраз (вектор $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \stackrel{?}{\in} U$), следовательно, $\lambda \vec{x}' \oplus \mu \vec{y}' \in \operatorname{Im} f$, т. е. множество $\operatorname{Im} f$ замкнуто относительно операций векторного пространства U. ■

Утверждение 57.2. *Если векторные пространства U и V конечномерны, а $f \in \mathbf{Hom}(U, V)$, то* $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Доказательство. Пусть $\langle U, +, \cdot \rangle$ и $\langle V, \oplus, \odot \rangle$ — векторные пространства, $\dim U = n$, а $\dim V = m$. Выберем в пространстве U^n базис $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$, а в V^m, соответственно, базис $C = \langle \vec{c}'_1, \vec{c}'_2, \dots \vec{c}'_m \rangle$.

Пусть $M_f = \|f^i_j\| = \|F_j\|$ — матрица гомоморфизма f относительно этих базисов. $M_f \in \mathbf{M}(m \times n)$.

Очевидно, что

$$\operatorname{Im} f = \{x^1 \odot f(\vec{e}_1) \oplus x^2 \odot f(\vec{e}_2) \oplus \dots \oplus x^n \odot f(\vec{e}_n) \mid \forall \langle x^1, x^2, \dots x^n \rangle \in \mathbf{R}^n\} =$$

$$\stackrel{\text{опр. } 36.3}{=\!=\!=} L(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)).$$

Тогда

$$\dim L(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)) \stackrel{\text{сл. } 41.?}{=\!=\!=}$$

$$\stackrel{\text{сл. } 41.?}{=\!=\!=} \operatorname{Rang}\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)\} \stackrel{\text{сл. } 55.1}{=\!=\!=}$$

$$\stackrel{\text{сл. } 55.1}{=\!=\!=} \operatorname{Rang}\{F_1, F_2, \dots F_n\} \stackrel{?}{=} \operatorname{Rang}\|f^i_j\| \stackrel{\text{опр. } 53.1}{=\!=\!=} \operatorname{Rang} M_f. \qquad ■$$

Определение 57.2. ***Ядром гомоморфизма*** *называется полный прообраз нулевого вектора.*

Ядро гомоморфизма обозначается f: $\operatorname{Ker} f$.

Если $f \in \mathbf{Hom}(U, V)$ и $\vec{0}'$ — нейтральный элемент V, то

$$\operatorname{Ker} f \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = \vec{0}'\}.$$

Ker — начальные буквы английского слова «kernel», которое означает зерно, ядро, суть.

Утверждение 57.3. *$\operatorname{Ker} f \neq \varnothing$ для любого гомоморфизма f.*

Так как $f(\vec{0}) \overset{\text{л. 51.?}}{=\!=\!=} \vec{0}'$ для всякого линейного отображения, и значит, $\operatorname{Ker} f \ni \vec{0}$. ■

Определение 57.3. ***Ядро гомоморфизма*** $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ *называется* ***вырожденным***, *если оно состоит только из нулевого вектора, в противном случае (т. е.* $\operatorname{Ker} f \neq \{\vec{0}\}$) *ядро называют* ***невырожденным***.

Утверждение 57.4. *$\operatorname{Ker} f$ является подпространством векторного пространства U для всякого гомоморфизма $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$.*

Задача 57.1.2. Докажите утверждение 57.4.

Доказательство сводится к проверке выполнимости условия SS: для любых $\langle \lambda, \mu, \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbf{R}^2 \times (\operatorname{Ker} f)^2$ вектор $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$ (см. замечание 36.1). Рассмотрим

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \overset{?}{=} \lambda \odot f(\vec{x}) \oplus \mu \odot f(\vec{y}) \overset{?}{=} \lambda \odot \vec{0}' \oplus \mu \odot \vec{0}' \overset{?}{=} \vec{0}' \oplus \vec{0}' \overset{?}{=} \vec{0}'.$$

Это и означает, что $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$, т. е. замкнутость ядра гомоморфизма относительно операций векторного пространства U. ■

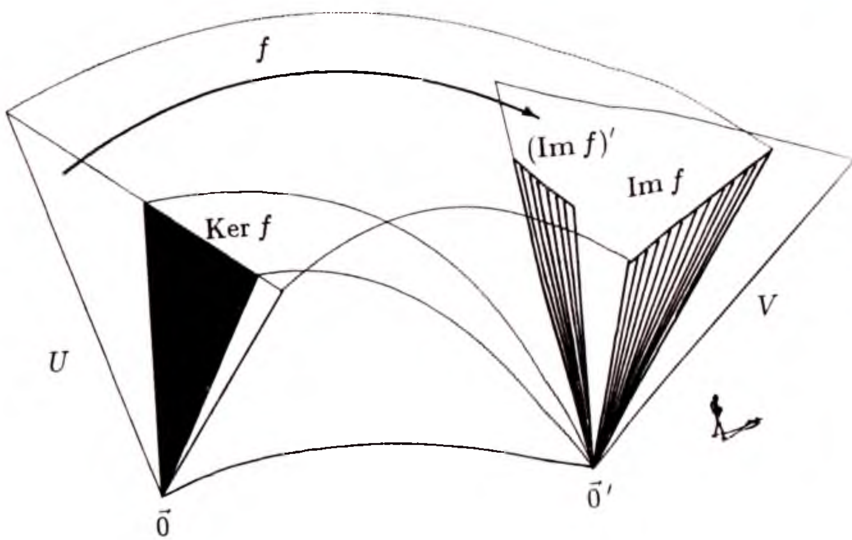


Рис. 9

Представление о ядре и образе гомоморфизма векторных пространств дает схема на рисунке 9.

Определение 57.4. *Размерность ядра гомоморфизма векторных пространств называется* ***дефектом гомоморфизма***.

Дефект гомоморфизма f обозначается: $\operatorname{def} f$.

$$\operatorname{def} f \overset{\text{def}}{=\!=} \dim \operatorname{Ker} f.$$

Дефект — слово латинского происхождения: от «defectus» — изъян, недостаток, недочет.

Пример 57.1. Найдем ядро и дефект гомоморфизма задания 51.1. $f_3: \boldsymbol{M}(3\times 1) \to \boldsymbol{M}(2\times 1)$, где

$$f_3\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + 2x^2 \\ x^2 - x^3 \end{pmatrix} \quad \forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Т. е. надо найти все такие $\vec{x}$, что

$$f_3\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + 2x^2 \\ x^2 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого матричного равенства получим:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 = 0, \\ x^2 - x^3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -2x^2, \\ x^3 = x^2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = x^2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

это означает, что

$$\operatorname{Ker} f_3 = \left\{ x^2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \forall x^2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

А размерность этого подпространства, т. е. $\operatorname{def} f_3 = ?$

Задача 57.1.1. Найдите дефект гомоморфизма задачи 51.1.1:

$$f_6: \boldsymbol{M}(2\times 1) \rightarrowtail \boldsymbol{M}(2\times 2) \mid f_6\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^1 + x^2 \\ x^2 & 2x^1 \end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2\times 1).$$

Надо найти все такие

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \text{ что } \begin{pmatrix} x^1 & x^1+x^2 \\ x^2 & 2x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого матричного равенства следует, что

$$\begin{cases} x^1 = ?, \\ x^1+x^2 = ?, \\ x^2 = ?, \\ 2x^1 = ?, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = ?, \\ x^2 = ?, \end{cases}$$

и, значит, $\operatorname{Ker} f_6 = ?$, $\operatorname{def} f_6 = ?$

Задача 57.1.3. Найдите ядро и дефект линейного отображения интегрирования задачи 51.1.3: $I : f(x) \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ на пространстве $\mathscr{I}[a, b]$ всех интегрируемых на отрезке функций.

Указание. Очевидно, что $\int\limits_a^x 0dt = 0$, найдутся ли еще такие функции $f(x)$, чтобы $\int\limits_a^x f(t)dt = 0$? т. е. $\operatorname{def} I = ?$

Изменится ли ответ, если будем рассматривать не все интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции, а только непрерывные (которые, конечно, тоже интегрируемы)?

В этом случае $\operatorname{def} I = ?$.

Задача 57.2.2. Найдите ядро и дефект линейного отображения дифференцирования задачи 51.1.2: $D : f(x) \to f'(x)$ на пространстве $D[a, b]$ всех дифференцируемых на отрезке функций.

Указание. $D(f(x)) = f'(x) = 0$, отсюда $f(x) = ?$ Как определять в этом случае $\operatorname{def} D$?

Утверждение 57.5. *Гомоморфизм f есть инъективное отображение тогда и только тогда, когда его ядро вырождено.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in \mathbf{Hom}(U, V)$. Если отображение f не инъективно, то найдутся хотя бы два различных вектора: $\vec{x}$ и $\vec{y}$ такие, что $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Откуда

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}' \text{ и } f(\vec{x} - \vec{y}) \overset{?}{=} \vec{0}',$$

это влечет $\vec{x} - \vec{y} \overset{?}{=} \vec{0}$ (почему? ◆) и равенство векторов: $\vec{x} = \vec{y}$. Следовательно, никакие два различных вектора не могут иметь один и тот же образ и f — инъективное отображение.

2. Обратное очевидно: так как $f(\vec{0}) = \vec{0}'$ (почему? ◆), то из инъективности отображения f следует единственность прообраза $\vec{0}'$, т. е. $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$. ■

Определение 57.5. *Гомоморфизм векторных пространств с вырожденным ядром называется их* ***мономорфизмом***.

Так что предыдущее утверждение может быть сформулировано короче:

Утверждение 57.5′. *Гомоморфизм векторных пространств инъективен тогда и только тогда, когда он является мономорфизмом.*

Определение 57.6. *Гомоморфизм f векторных пространств U и V называется их* ***эпиморфизмом***, *если его образ (область значений) совпадает с пространством V.*

Термины мономорфизм и эпиморфизм происходят от греческих слов: μονοσ — один, επι — на, над и μορφη — вид, форма, т. е. мономорфизм можно перевести, как «имеющий единственную форму, образ, а эпиморфизм — как отображение «на», что и соответствует сущности этих понятий.

Следствие 57.1. *Если $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ — мономорфизм и эпиморфизм, то он является изоморфизмом векторных пространств U и V, и обратно.*

В этом случае гомоморфизм f не только инъективное отображение (утверждение 57.4), но и сюръективное (определение 9.1). Биективный гомоморфизм векторных пространств, по определению 55.1, и есть их изоморфизм.

Следствие 57.2. *Если f — гомоморфизм векторных пространств с нулевым ядром, то линейно независимая система векторов отображается в линейно независимую систему.*

Задача 57.2.3. Докажите следствие 57.2.

Доказательство. Если $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$ и $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, то векторные пространства U и $\operatorname{Im} f$ (утверждение 51.2) изоморфны (следствие 57.1). Согласно утверждению 52.1 при этом линейно независимая система векторов отображается в линейно независимую систему. ■

Лемма 57.1. *Если f — гомоморфизм конечномерных векторных пространств U и V, то базис в подпространстве U'', дополнительном к ядру f, отображается в базис образа f.*

Доказательство. Пусть $\dim U = n$, $\operatorname{def} f = k$, $\operatorname{rang} f = r$.

1. Если $\dim \operatorname{Ker} f = k$, то его дополнительное в U^n подпространство $U'' = (\ker f)'$ имеет, по следствию 41.5, размерность $n - k$.

2. Пусть $B'' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-k} \rangle$ — какой-либо базис в U'', дополним его в соответствии со следствием 41.2: до базиса в пространстве U^n:

$$B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{(n-k)-1}, \vec{e}_{n-k}, \vec{e}_{(n-k)+1}, \dots \vec{e}_n \rangle.$$

Тогда $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-k}\}$ — линейно независимая система векторов (почему? ◆). По предыдущему следствию 57.2 система векторов $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_{n-k})\}$ также линейно независима в $\operatorname{Im} f \in V$.

3. Так как всякий вектор $\vec{x}' \in \operatorname{Im} f$ имеет прообраз $\vec{x} \in U^n$, который разложим в линейную комбинацию базисных:

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^{n-k}\vec{e}_{n-k} + x^{(n-k)+1}\vec{e}_{(n-k)+1} + \dots + x^n\vec{e}_n,$$

то

$$\vec{x}' = f(\vec{x}) = f(x^1\vec{e}_1 + \dots + x^{n-k}\vec{e}_{n-k} + x^{(n-k)+1}\vec{e}_{(n-k)+1} + \dots + x^n\vec{e}_n) \overset{?}{=}$$
$$= x^1 \odot f(\vec{e}_1) \oplus x^2 \odot f(\vec{e}_2) \oplus \dots \oplus x^{n-k} \odot f(\vec{e}_{n-k}) \oplus$$
$$\oplus x^{(n-k)+1} \odot f(\vec{e}_{(n-k)+1}) \oplus \dots \oplus x^n \odot f(\vec{e}_n) \overset{?}{=}$$
$$= x^1 \odot f(\vec{e}_1) \oplus \dots \oplus x^{n-k} \odot f(\vec{e}_{n-k}).$$

Последнее означает, что произвольный вектор из $\operatorname{Im} f$ разложим в линейную комбинацию $n-k$ линейно независимых векторов $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_{n-k})\}$, следовательно, согласно определению 41.1 $\langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_{n-k})\rangle$ — базис в векторном пространстве $\operatorname{Im} f$. ■

Задание 57.1. Рассмотрите самостоятельно доказательство в случае вырожденного ядра: $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Теорема (о ранге и дефекте) 57.1. *Если f — гомоморфизм конечномерных векторных пространств U в V, то*

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rang} f = \dim U.$$

Доказательство. Пусть $\dim U = n$, $\operatorname{def} f = k$, а $\operatorname{rang} f = r$. Выберем какой-либо базис $B'' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-k}\rangle$ в дополнении ядра. Согласно лемме 57.1 базисом подпространства $\operatorname{Im} f$ является $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_{n-k})\}$. Тогда $n-k=r$ (теорема 41.? ◆), или $\operatorname{def} f + \operatorname{rang} f \overset{?}{=} \dim U$. ■

Следствие 57.3. *Если f — эндоморфизм n-мерного векторного пространства, то*

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rang} f = n. \tag{57.1}$$

Теорема (о двух базисах) 57.2. *Если векторные пространства U и V конечномерны, $\dim U = n$, $\dim V = m$, $f \in \boldsymbol{Hom}(U, V)$, $\operatorname{rang} f = r$, то существуют базисы: B в U^n и C в V^m, относительно которых матрица гомоморфизма имеет вид:*

$$M_f=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&\dots&0\\ 0&1&0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot\\ 0&0&0&1&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot\\ 0&0&0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot\\ 0&0&0&0&0&\dots&0 \end{pmatrix}\in \boldsymbol{M}(m\times n). \qquad (57.2)$$

Доказательство.

1. Очевидно, что если $f\in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, то векторное пространство U^n разлагается в прямую сумму ядра гомоморфизма f и его дополнения (см. определение 36.5):

$$U^n=\operatorname{Ker} f\oplus U'',$$

где $U''=\{\vec{x}\in U^n|f(\vec{x})\neq\vec{0}'\}$. А векторное пространство V^m — в прямую сумму образа гомоморфизма f и его дополнения:

$$V^m=\operatorname{Im} f\oplus V'',$$

где $V''=\{\vec{y}'\in V^m|\ (\overline{\exists}\ \vec{x}\in U|f(\vec{x})=\vec{y}')\}$.

Обозначение. $\overline{\exists}$ — не существует.

2. По следствию 41.3 $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$ — конечномерные векторные пространства, а по утверждению 57.2 $\dim\operatorname{Im} f=r$.

3. Будем считать $\operatorname{Ker} f$ невырожденным.

4. Выберем базис $B''=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_r\rangle$ в U'' и дополним его до базиса $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \vec{e}_{r+2}, \dots \vec{e}_n\rangle$ пространства U^n. Согласно лемме 57.1 $C'=\langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_r)\rangle$ — базис в $\operatorname{Im} f$.

5. Дополним C' до базиса векторного пространства V^m, пусть $C=\langle\vec{c}'_1, \vec{c}'_2, \dots \vec{c}'_r, \vec{c}'_{r+1}, \vec{c}'_{r+2}, \dots \vec{c}'_m\rangle$ такой его базис, что $\vec{c}'_i=f(\vec{e}_i)$ при $i=1, 2, \dots r$.

Тогда $f(\vec{e}_i)(0, 0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)$. ◆

В то же время $f(\vec{e}_j)=\vec{0}'$ при $j=r+1, r=2, \dots n$, (почему? ◆) и $f(\vec{e}_j)(0, 0, \dots 0)$.

Все это и означает, что матрица гомоморфизма f относительно базисов B и C имеет вид (57.2). □

Замечание 57.1. Если ядро гомоморфизма $\operatorname{Ker} f$ вырождено, то $r \stackrel{?}{=} n$ и M_f относительно построенных базисов имеет вид:

$$M_f \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(m \times n).$$

Обратите внимание: в этом случае обязательно $m \geqslant n$ (почему? ◆).

Отсюда вытекает интересное следствие.

Следствие 57.4. *Если f — изоморфизм конечномерных векторных пространств, то в них всегда найдется пара базисов, относительно которых матрица M_f — единичная.*

Определение 57.7. ***Пара базисов*** *в векторных пространствах U^n и V^m называется* ***канонической для гомоморфизма*** $f \in \boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$, *если его матрица относительно этих базисов имеет вид* (57.2).

Если указана каноническая пара базисов для данного гоморфизма, то говорят, что его ***матрица приведена к каноническому виду***.

Таким образом предыдущая теорема может быть переформулирована, как

Теорема 57.2′. *Для любого гомоморфизма конечномерных векторных пространств существует каноническая пара базисов.*

Определение 57.8. *Биективный эндоморфизм векторного пространства называется его* ***автоморфизмом***.

Множество всех автоморфизмов векторного пространства V обозначается $\boldsymbol{Aut}(V)$.

Термин автоморфизм имеет греческое происхождение: αυτοζ — сам, β μορφη — форма, вид. Т. е. можно сказать, что слово автоморфизм можно перевести, как имеющий (сохраняющий) собственную форму.

Следствие 57.5. *Если f — автоморфизм n-мерного векторного пространства, то в канонической паре базисов его матрица единичная.*

Следствие 57.6. *Если f — автоморфизм n-мерного векторного пространства, то относительно его любого базиса — матрица автоморфизма невырождена.*

Поскольку относительно канонической пары базисов матрица автоморфизма единичная, то ее ранг, а значит, и ранг автоморфизма равен n. Так как ранг гомоморфизма инвариантен относительно замены базисов, то и относительно любой «пары» базисов $\langle B, B\rangle$ ранг матрицы автоморфизма также максимален и равен n, т. е. матрица невырождена.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Мы часто воспринимаем людей полуторaумных как полоумных потому, что нам доступна лишь треть их ума.
>
> *Г. Д. Тюро*

Основной труд Германа Грассмана носит название «Die Ausdehnungslehre» («Учение о протяженности»), был задуман и написан им, чтобы изложить результаты его размышлений о некоторых вопросах аффинной (первое издание, 1844 г.) и метрической геометрии (в основном, во втором издании —1861 г). Задачи, которые Грассман перед собой ставил, позволили ему, как мы уже упоминали, открыть абстрактное (n-мерное) векторное пространство, что уже было большим вкладом в создание абстрактной алгебры, хотя до конца не понятым ни им самим, ни его современниками.

Помимо этого, загадочная логика развития науки привела Грассмана к тому, что, занимаясь геометрическими вопросами, он заложил основы мощной ветви современной алгебры — теории линейных операторов. До Грассмана просто никто не выделял отображения (операторы) такого типа и не занимался специально их изучением, хотя именно линейность, как общее свойство хорошо изученных и известных отображений таких, как например, параллельный перенос, симметрия, различные виды проекций, были ясны многим геометрам и неоднократно использовались ими при решении всевозможных задач аналитической и конструктивной геометрии. Не говоря уже о том, что линейность дифференцирования и интегрирования функций — основное свойство этих операций, были очевидны еще создателям дифференциального и интегрального исчислений.

Кроме выделения класса линейных отображений, что было важным для осмысления многих проблем геометрии, Грассман изучил их основные свойства и ввел многие важные характеристики гомоморфизма конечномерных векторных пространств, например, такие как матрица и ядро, и понял их значение. При этом он неявно использовал ранг линейного отображения и ранг матрицы. Напомним, что в математике понятие ранга матрицы формировалось в 50-е —70-е годы XIX века, а сам термин был введен Фробениусом только в 1877 г. (см. историческую справку лекции 10). Грассман также установил закон изменения матрицы линейного отображения при замене базисов в соответствующих пространствах, ему же принадлежит теорема о том, что линейное отображение конечномерного векторного пространства однозначно определяется своими значениями на его базисных векторах. Правда он доказал ее для ортонормированных базисов стандартного евклидова векторного пространства, но только спустя 20 лет этот результат был заново самостоятельно открыт и обобщен американским математиком Дж. Гиббсом. Значительное место в труде Грассмана занимают специальные виды линейных отображений, которые теперь принято называть эндоморфизмами векторных пространств. По существу, рассматривая конечномерные и даже координатные евклидовы пространства, он сумел создать основной аппарат исследований произвольных векторных пространств. Позднее, в конце XIX — начале XX в. в. многие идеи, появившиеся впервые у Грассмана, были расширены и обобщены на бесконечномерные (функциональные) векторные пространства английским математиком У. К. Клиффордом (Clifford William Kingdom, 1845—1879), американскими математиками Б. Пирсом (Pierce Benjamin, 1809—1880) и его сыном Ч. Пирсом (Pierce Charlts Sanders, 1839—1914), немецкими — Д. Гильбертом и Э. Шмидтом (Shmidt Erhard, 1862—1943), поляком С. Банахом и другими. Исследования в этой области не прекращаются и поныне. В частности, удивительным образом оказалось, что многие из результатов обобщенной теории линейных операторов применимы к описанию конкретных физических процессов, имеют эффективное применение в квантовой механике и, по существу, теория операторов является одним из важных аппаратов исследований в этой области физики.

Именно Грассман первым установил изоморфность векторных пространств $\boldsymbol{Hom}\,(U^n, V^m)$ и $\boldsymbol{M}\,(m \times n)$. По существу это означает, то изучение многих свойств гомоморфизмов конечномерных векторных пространств сводимо к изучению достаточно хорошо исследованного и описанного векторного пространства матриц. В настоящее время эти результаты, впервые установленные Германом Грассманом в середине XIX века, входят в любой классический курс линейной алгебры.

Впрочем, термины изоморфизм и гомоморфизм появились в математике и стали общепринятыми существенно позже. Так «изоморфизм» был введен в математический язык Фробениусом во второй половине XIX в., а в современном значении — отображения, сохраняющего алгебраическую структуру, он утвердился только после работ Э. Нетер по теории групп в 1918 г. Таким образом, в начале XX в. именно в теории групп было отчетливо осознано, что изучение внутренней структуры двух изоморфных систем объектов представляет собой по существу одну и ту же задачу. Хотя еще в начале XVII в. Р. Декарт, как можно увидеть в его работах, понимал возможность отождествления отдельных изоморфных структур и изучение их свойств на более удобных для этого моделях. По-видимому, плодотворность этого метода достаточно ясно представляли и другие крупные математики прошлого, такие как: Эйлер, Лежандр, Гаусс, Фробениус. Однако, потребовалось почти три сотни лет, чтобы идеи общности свойств изоморфных структур стали естественным и удобным аппаратом исследований всей математики. Спустя еще полвека эти же идеи породили целый раздел математики — теорию категорий, которая, можно сказать, занимается общими свойствами изоморфных математических структур (не обязательно алгебраических).

В заключение упомянем о драматической судьбе основного, очень глубокого и богатого идеями труда Германа Грассмана. «Die Ausdehnungslehre», написанный очень тяжелым языком со сложными специальными обозначениями (так, например, линейное отображение обозначалось дробью: $Q\dfrac{a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n}{b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n}$, где a_1, a_2, ... a_n — базисные векторы пространства, а b_1, b_2, ... b_n — их образы), этот трактат остался непонятым современными Грассману математиками. Да и в настоящее время его чтение требует значительных усилий и терпения читателя. Именно по причине чрезвычайной сложности и вычурности языка и обозначений, замешанных к тому же на философии мистического характера (особенно в первом издании), этот труд, оставаясь долгое время неизвестным научной общественности, не оказал на развитие математики того влияния, которое он, несомненно, мог бы оказать и заслуживал, если бы Грассман изложил свои блестящие идеи в более доступной форме. Даже «автором» абстрактного векторного пространства в истории математики признан итальянский математик Дж. Пеано, который сформулировал это понятие достаточно просто в 1888 г., т. е. четверть века спустя. Также спустя десятилетия многие важнейшие результаты Грассмана были вновь получены Дж. Гиббсом, Б. Пирсом, Ч. Пирсом, К. Жорданом, У. К. Клиффордом и другими. Досадно сознавать, что математиками в какой-то мере были потеряны те годы, которые ушли на повторное открытие того, что Грассману было ясно еще в середине XIX века.

Наверное, многие сложности судьбы научных результатов Германа Грассмана кроются в том, что он не получил систематического математического образования: лекций по математике он не слушал никогда. Примерно с 1832-го года он стал заниматься этой наукой самостоятельно. Грассман никогда не работал в университете и был далек от университетской жизни, оставаясь до конца своей жизни учителем гимназии в Штеттине. Хотя именно это позволило развиться его самобытному математическому таланту. Но изолированность Г. Грассмана от университетской среды, религиозность (он происходил из старинной протестантсткой пасторской семьи) и природная склонность к философии и мистицизму, и привели его к столь сложному мышлению и сложному способу выражения своих мыслей.

Производит потрясающее впечатление количество и разнообразие вопросов, которыми Грассман с успехом занимался. Он был не только одаренным математиком с явно выраженными философскими интересами, но и физиком: теоретиком и практиком, выполнившим великолепные работы в области учений о свете и звуке и по теории электричества. Грассман обладал исключительной музыкальной одаренностью и проявлял большой интерес к музыке, он также интересовался сравнительным языкознанием и составил словарь к древнему индийскому эпосу Ригведа. Не чуждался общественной жизни: много лет редактировал газету острого политического направления. И имел звание магистра франкмасонской ложи...

Отметим еще, что этот, безусловно, блестящий и уникальный математический талант, был, как отмечали его современники, увы, плохим педагогом. Почти всю жизнь проработав учителем гимназии, относясь к своей профессии со свойственной ему добросовестностью, он так и не смог снискать любви своих учеников и пробудить в них интерес к математике. Видимо, совместные занятия для обеих сторон были большой мукой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
2. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.—480 с.
3. *Мантуров О. В.* Элементы тензорного исчисления.— М.: Просвещение, 1991.—255 с.
4. *Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения.— М.: Изд. МГУ, 1987.—311 с.
5. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.—336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.—496 с.
7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.
8. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.—272 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 54. Изменение матрицы гомоморфизма при замене базисов векторных пространств

— стр. 294, 296—297.
— стр. 66—67.
— стр. 315.
— стр. 217.
[8] — стр. 110—111.

§ 55. Изоморфизм векторных пространств

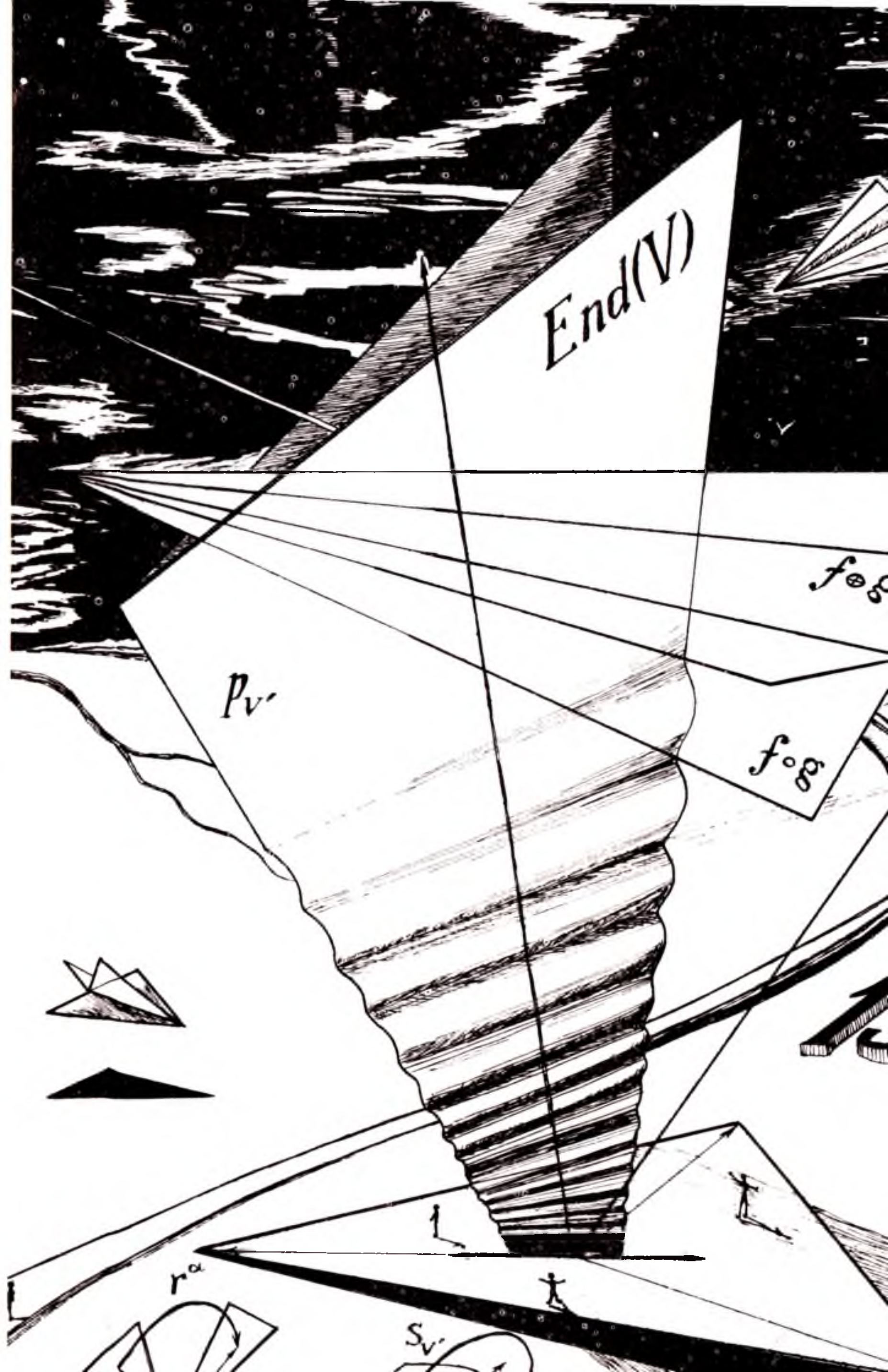
— стр. 266—269.
— стр. 19— 21.
— стр. 304—305.
— стр. 338—339.
— стр. 216—217.
[7] — стр. 39—41.

§ 56. Изоморфизм векторных пространств *Hom* (V^n, V^m) и *M* ($m \times n$)

— стр. 293—294.
— стр. 320—321.
— стр. 64— 66.
[6] — стр. 80—82.

§ 57*. Ядро гомоморфизма

— стр. 286—287.
— стр. 96— 97, 354—355.
— стр. 55— 57, 69— 70.
— стр. 315—316.
— стр. 213, 215.
[7] — стр. 30—32.


End(V)
f∘g
p_{v'}
f∘g
r^α
S_{v'}

Лекция 13

АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

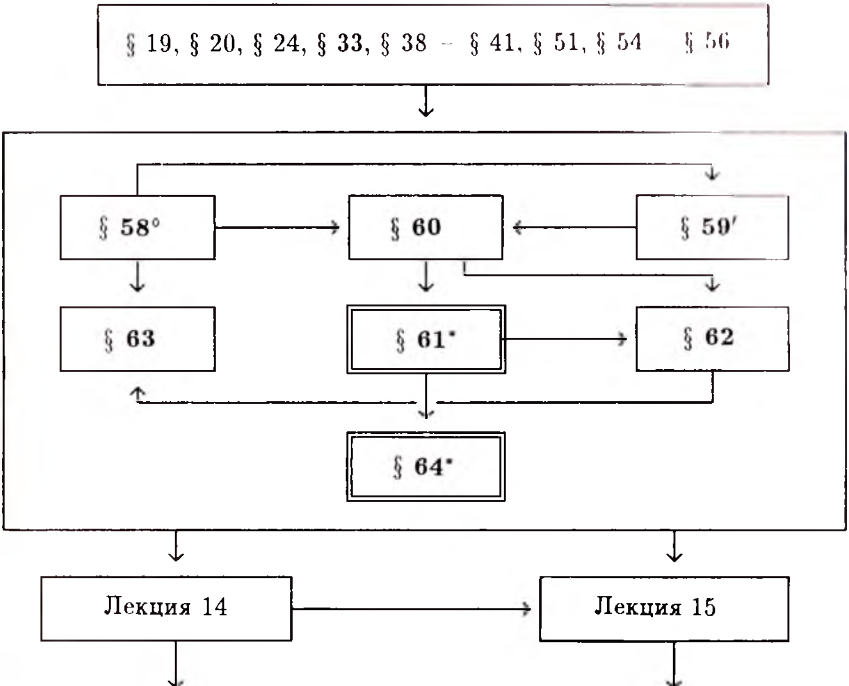
АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 58°. Линейные операторы.
§ 59′. Линейные операторы в двумерном векторном пространстве.
§ 60. Алгебра линейных операторов.
§ 61* Линейные алгебры.
§ 62. Изоморфизм линейных алгебр ***End*** (V^n) и ***gl*** $(n, \mathbf{R})$.
§ 63. Группа автоморфизмов векторного пространства ***Aut*** (V^n).
§ 64* Кольца, поля.

Основные понятия: эндоморфизм векторного пространства, матрица эндоморфизма; поворот, проектирование и симметрии векторного пространства, линейная алгебра, изоморфизм алгебр, произведение эндоморфизмов векторного пространства, автоморфизм векторного пространства, группа, изоморфизм групп, кольцо, поле.

Необходимые сведения: векторное пространство, линейно зависимая и линейно независимая система векторов, базис векторного пространства, изоморфизм векторных пространств, гомоморфизм векторных пространств, векторное пространство ***Hom*** (U, V); образ, ядро, дефект и ранг гомоморфизма, матрица гомоморфизма; эндоморфизм, автоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм векторных пространств; полная линейная алгебра ***gl*** $(n, \mathbf{R})$, полная линейная группа ***GL*** $(n, \mathbf{R})$; группа, подгруппа; обратимые и невырожденные матрицы; композиция отображений, гомотетия векторного пространства.

Рекомендации: § 58°, § 59′ рекомендуются для самостоятельного изучения студентами и обсуждения на практических занятиях, а § 61* и § 64* (за исключением основных определений) без нарушения общей логики курса могут быть опущены.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств. (§ 49 — § 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов. (§ 54 — § 57).

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов. (§ 58 — § 64).

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов.

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 58°. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Термин «линейный оператор» иногда используется для обозначения гомоморфизма одного векторного пространства в другое, т. е. как синоним линейного отображения. Однако, в нашем курсе, как и выше, под линейным оператором понимается линейное отображение векторного пространства в само это пространство.

Напоминание.

Определение 51.2. ***Эндоморфизмом*** *или* ***линейным оператором*** *векторного пространства называется его гомоморфизм в себя.*

Множество всех эндоморфизмов векторного пространства V обозначается $\boldsymbol{End}(V)$.

Примерами эндоморфизмов векторных пространств являются: тождественное отображение (утверждение 51.4), гомотетия векторного пространства (определение 53.2), интегрирование

$$I: f(x) \to \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]$$

в пространстве интегрируемых функций одной переменной на отрезке (задача 51.1.3), дифференцирование

$$D: f(x) \to f'(x), \quad x \in [a, b],$$

в пространстве дифференцируемых функций одной переменной на отрезке (см. также задачу 51.1.2 — дифференцирование в пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ многочленов степени не выше n), гомоморфизм примера 51.3:

$$f_5: \boldsymbol{M}(2 \times 1) \to \boldsymbol{M}(2 \times 1) \mid f_5\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2 \times 1).$$

Так как в ближайших лекциях будут изучаться линейные операторы, приведем основные их свойства, они были установлены выше, как свойства гомоморфизмов векторных пространств. Сформулируем их применительно к эндоморфизмам (или линейным операторам):

Свойство 58.1 (следует из теоремы 52.1). *Множество* $\boldsymbol{End}(V)$ *эндоморфизмов векторного пространства является векторным пространством относительно операций сложения эндоморфизмов и умножения скаляра на эндоморфизм.* ◆

Свойство 58.2 (следует из следствия 56.2). *Векторные пространства* $\boldsymbol{End}(V^n)$ *и* $\boldsymbol{M}(n)$ *изоморфны.* ◆

Свойство 58.3 (утверждение 55.3). *Если векторное пространство V n-мерно, то* $\dim \boldsymbol{End}(V) = n^2$. ◆

Свойство 58.4 (следует из теоремы 57.1). *Если f — эндо-*

морфизм n-мерного векторного пространства, то

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rang} f = n.$$ ♦

Задача 58.1.3. Если $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$, то следует ли из соотношения: $\operatorname{def} f + \operatorname{rang} f = n$, что для любого эндоморфизма этого векторного пространства $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = V^n$?

Указание. См. утверждение 41.4. Найдите ядро и образ эндоморфизма $f \in \boldsymbol{End}(M(2 \times 1))$ такого, что

$$f\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для любого} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(2 \times 1).$$

Свойство 58.5 (следует из теоремы 57.2). *Если f — эндоморфизм n-мерного векторного пространства, то существует пара базисов в этом векторном пространстве, относительно которых он имеет канонический вид (т. е. его матрица диагонализируема).* ♦

Свойство 58.6 (следствие 57.5). *Если f — автоморфизм n-мерного векторного пространства, то в канонической паре базисов его матрица единичная.*

Свойство 58.7 (утверждение 54.3). *Если M_f — матрица эндоморфизма f относительно базиса B векторного пространства V^n, а $M_{\vec{x}}$ и $M_{f(\vec{x})}$ являются координатными столбцами векторов $\vec{x}$ и $f(\vec{x})$ относительно этого же базиса, то $M_{f(\vec{x})} = M_f M_{\vec{x}}$*

Напомним (см. замечание 54.2), что для эндоморфизма векторного пространства V^n его матрица, как матрица всякого гомоморфизма, рассматривается, если не оговаривается особо, относительно пары одинаковых базисов $\langle B, B \rangle$. Такая матрица называется *матрицей эндоморфизма f относительно базиса B.*

Свойство 58.8 (следствие 54.1). *Если f — эндоморфизм n-мерного векторного пространства, то*

$$M'_f = T^{-1}_{\langle B, B' \rangle} M_f T_{\langle B, B' \rangle},$$

где $\langle M_f, M'_f, T_{\langle B, B' \rangle} \rangle \in \boldsymbol{M}^3(n)$, M — матрица f относительно базиса B, M'_f — матрица f относительно B', а $T_{\langle B, B' \rangle}$ — матрица перехода от базиса B к базису B'.

Следствие 58.1. *Если f — эндоморфизм конечномерного векторного пространства, то определитель его матрицы не зависит от выбранного в пространстве базиса.*

Поскольку

$$\det M'_f \stackrel{?}{=} \det T^{-1}_{\langle B, B' \rangle} \det M_f \det T_{\langle B, B' \rangle} \stackrel{?}{=} \det M.$$

Таким образом, определитель матрицы эндоморфизма конечномерного векторного пространства является его инвариантом относительно выбора базиса в векторном пространстве. ■

Определение 58.1. ***Определителем (детерминантом) эндоморфизма*** *конечномерного векторного пространства называется определитель его матрицы относительно любого базиса этого пространства.*

Детерминант эндоморфизма $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$ обозначается $\det f$.

Задача 58.1.1 — 1.2. Как изменится матрица эндоморфизма $g \in \boldsymbol{End}(V^n)$, заданная относительно базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_i, \ldots \vec{e}_j, \ldots \vec{e}_n \rangle$, если в нем поменять местами векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$? Вектор $\vec{e}_i$ умножить на число $\lambda \neq 0$?

Указание. См. задание 50.2.

Свойство 58.9 (следует из утверждения 51.4). *Тождественное отображение векторного пространства в себя есть его эндоморфизм (и даже автоморфизм).* ◆

Свойство 58.10 (следствие 51.2). *Множество эндоморфизмов векторного пространства* $\boldsymbol{End}(V)$ *замкнуто относительно их композиции.*

Свойство 58.11 (следствие 51.1). *Если f — автоморфизм векторного пространства, то f^{-1} также его автоморфизм.*

Приведем примеры еще нескольких эндоморфизмов векторных пространств, важных в приложениях:

Напоминание.

Определение 54.2. ***Гомотетией*** *векторного пространства V* ***с коэффициентом $k \in \mathbf{R}$*** *называется его эндоморфизм, отображающий всякий вектор $\vec{x} \in V$ в вектор $k\vec{x}$, причем $k \neq 0$.*

Обозначение гомотетии: h_k и для любого $\vec{x} \in V$

$$h_k(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} k\vec{x}.$$

Если векторное пространство V — конечномерно, то $M_{h_k} = kE$ относительно любого базиса пространства V. ◆

Так как *тождественный эндоморфизм (единичный оператор)* e отображает каждый вектор векторного пространства V^n, в том числе и базисный, в себя, то $M_e = E$ относительно любого базиса V^n. Отметим еще, что $e = h_1$. ◆

Определение 58.2. ***Центральной симметрией*** *векторного пространства называется отображение, сопоставляющее каждому его вектору противоположный ему вектор.*

Обозначение центральной симметрии: z. Для любого $\vec{x} \in V$

$$z(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} -\vec{x}.$$

Несложно увидеть, что $z = h_{-1}$, и в любом базисе векторного пространства V^n матрица центральной симметрии $M_z = ?$ ◆

Если векторное пространство V разложено в прямую сумму своих подпространств: $V=V'\oplus V''$, то всякий вектор $\vec{x}\in V$, согласно утверждению 36.6, однозначно разлагается в сумму векторов: $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$ с $\vec{x}'\in V'$ и $\vec{x}''\in V''$.

Полученный таким образом вектор $\vec{x}'\in V'$ называется ***проекцией*** *вектора* $\vec{x}$ *на подпространство* V' *параллельно* V''.

Определение 58.3. ***Проектированием*** *векторного пространства* $V=V'\oplus V''$ ***на его подпространство V′ параллельно подпространству V″*** *называется отображение, сопоставляющее всякому вектору из* V *его проекцию на* V'.

Обозначение такого проектирования: $p_{\langle V',\, V''\rangle}$

Таким образом, по определению

$$p_{\langle V',\, V''\rangle}(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=\!=} \vec{x}.$$

Задача 58.2.1. Докажите, что $p_{\langle V',\, V''\rangle}\in \boldsymbol{End}(V)$.

Доказательство. Если $V=V'\oplus V''$, то любые векторы из векторного пространства V', в частности, $\vec{x}$ и $\vec{y}$, можно представить в виде: $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$ с $\vec{x}'\in V'$, $\vec{x}''\in V''$ и $\vec{y}=\vec{y}'+\vec{y}''$ с $\vec{y}'\in V'$, $\vec{y}''\in V''$.

Проверим выполнимость для отображения $p_{\langle V',\, V''\rangle}$ условия линейности L:

$$p_{\langle V',\, V''\rangle}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=p_{\langle V',\, V''\rangle}(\alpha(\vec{x}'+\vec{x}'')+\beta(\vec{y}'+\vec{y}''))=? \qquad \square$$

Задача 58.2.2. Докажите, что если векторное пространство V n-мерно, а его подпространство V' k-мерно, то в V^n найдется базис, относительно которого матрица проектирования $p_{\langle V',\, V''\rangle}\boldsymbol{End}(V^n)$ имеет вид:

$$M_{p_{\langle V',\, V''\rangle}} = \begin{array}{c|c:c|l} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{} & \\ \cline{2-3} k & E & 0 & \\ \hdashline & 0 & 0 & n-k \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{n-k} & \end{array} \in \boldsymbol{M}(n).$$

Указание. См. утверждение 36.6, следствие 41.4.

Определение 58.4. ***Отражением*** *(или* ***симметрией****)* *векторного пространства* $V=V'\oplus V''$ ***относительно*** *его* ***подпространства V′ параллельно подпространству V″*** *называется отображение, сопоставляющее всякому вектору* $\vec{x}\in V$

такому, что $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$, где $\vec{x}'\in V'$ и $\vec{x}''\in V''$, вектор $\vec{y}=\vec{x}'-\vec{x}''\in V$.

Обозначение такой симметрии: $s_{\langle V',\, V''\rangle}$.

Так как всякий вектор $\vec{x}\in V$ однозначно разлагается в сумму: $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$ с $\vec{x}'\in V'$ и $\vec{x}''\in V''$, то вектор $\vec{y}=\vec{x}'-\vec{x}''$ определяется им также однозначно, поэтому $s_{\langle V',\, V''\rangle}$ есть отображение V в V, а его линейность доказывается аналогично линейности оператора проектирования $p_{\langle V',\, V''\rangle}$. Так что $s_{\langle V',\, V''\rangle}\in \boldsymbol{End}\,(V)$, и по определению симметрии

$$s_{\langle V',\, V''\rangle}(\vec{x})\overset{\mathrm{def}}{=}\vec{x}'-\vec{x}''.$$

Если векторное пространство V имеет размерность n, а его подпространство V' размерности k, то можно показать, что в V^n найдется базис, относительно которого матрица этого эндоморфизма имеет блочный вид:

$$M_{s_{\langle V',\, V''\rangle}}=\begin{array}{c|c|c|}
 & k & n-k \\ \hline
k & E & 0 \\ \hline
n-k & 0 & -E \\ \hline
\end{array}\in \boldsymbol{M}\,(n). \qquad (58.s)$$

З а д а ч а 58.2.3. Докажите, что если $s_{\langle V',\, V''\rangle}\in \boldsymbol{End}\,(V^n)$, а V' размерности k, то найдется в V^n базис, относительно которого его матрица имеет вид (58.s).

Указание. См. утверждение 36.6, следствие 41.4.

§ 59′. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ДВУМЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Двумерное векторное пространство, в частности, пространство свободных (компланарных) векторов $\mathscr{V}^2$,— одна из основных моделей векторного пространства и уже потому представляет, как мы видели (§ 36), интерес. Отсюда и интерес к эндоморфизмам такого пространства, тем более, что с ними тесно связаны такие вопросы классической (и даже школьной геометрии), как преобразования и движения (перемещения) плоскости. Поэтому основным содержанием настоящего параграфа является описание основных, важных в приложениях, эндоморфизмов двумерного векторного пространства. Они имеют наглядные геометрические представления на пространстве свободных векторов $\mathscr{V}^2$ (плоскости).

Нулевой эндоморфизм (нулевой оператор) (см. определение 52.3) векторного пространства V^2 отображает каждый его вектор в нулевой и относительно любого базиса имеет своей матрицей нулевую:

$$M_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

Тождественный эндоморфизм (единичный оператор) векторного пространства V^2, отображая каждый его вектор в себя, относительно любого базиса имеет своей матрицей единичную:

$$M_e=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

Центральная симметрия векторного пространства V^2 (см. определение 58.2) отображает каждый его вектор в противоположный ему, относительно любого базиса центральная симметрия имеет матрицей противоположную единичной.

$$M_z=-E=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

На плоскости и модели двумерного векторного пространства — пространстве свободных векторов $\mathscr{V}^2$ центральную симметрию удобно изобразить схемой, которая наглядно представляет действие эндоморфизма z на $\mathscr{V}^2$ (рис. 10):

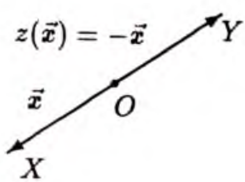


Рис. 10

Любые неколлинеарные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис в векторном пространстве V^2: $B=\langle\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\rangle$ (см. задание 41.1), а так как $L(\vec{e}_1)$ и $L(\vec{e}_2)$ — подпространства в V^2, то, согласно следствию 41.6, $V^2=L(\vec{e}_1)\oplus L(\vec{e}_2)$ и можно переформулировать определение отражения (симметрии) векторного пространства в случае его двумерности следующим образом:

Симметрия (отражение) векторного пространства (см. определение 58.3) V^2 *относительно направления вектора* $\vec{e}_1$ *параллельно вектору* $\vec{e}_2$ (где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — ненулевые неколлинеарные векто-

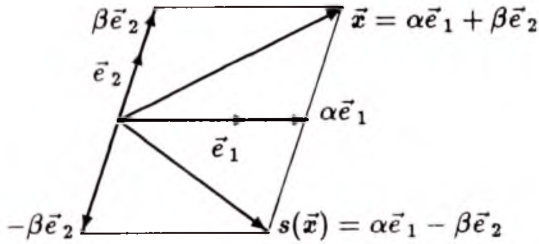


Рис. 11

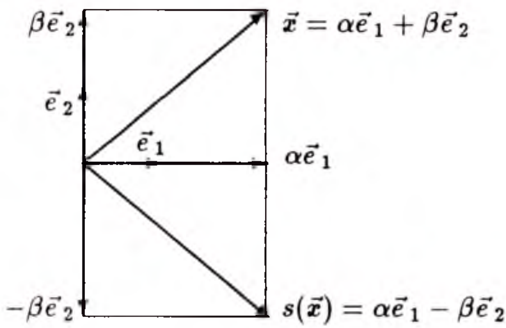


Рис. 12

ры) сопоставляет всякому его вектору $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ вектор $\vec{y} = \alpha\vec{e}_1 - \beta\vec{e}_2 \in V^2$.

Такая симметрия обозначается: $s_{\langle \vec{e}_1,\, \vec{e}_2 \rangle}$. Если из контекста понятно, о каких направлениях (векторах) идет речь, то индексы в обозначении обычно опускаются.

В базисе $B = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \rangle$ матрица симметрии относительно направления вектора $\vec{e}_1$ параллельно вектору $\vec{e}_2$ имеет вид:

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

В пространстве свободных векторов $\mathscr{V}^2$ такую симметрию удобно изобразить схемами (рис. 11, 12).

Причем особый интерес представляет случай, когда направленные отрезки, представляющие свободные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, перпендикулярны.

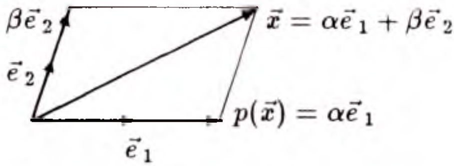


Рис. 13

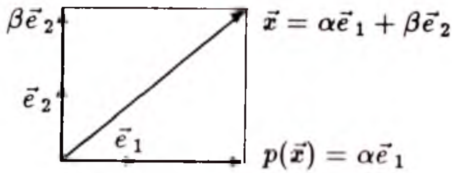


Рис. 14

С учетом предыдущих замечаний о разложении двумерного векторного пространства в прямую сумму своих одномерных подпространств, аналогично симметрии модифицируется понятие его проектирования.

Проектирование векторного пространства (см. определение 58.3) V^2 на направление $\vec{e}_1$ параллельно $\vec{e}_2$ (где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — неколлинеарные векторы) сопоставляет всякому его вектору $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ вектор $\alpha\vec{e}_1 \in V^2$. ♦

Обозначение такого проектирования: $p_{\langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \rangle}$, а если очевидно, о каких направлениях проектирования (векторах) идет речь, индексы опускаются.

В базисе $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ матрица проектирования на направление вектора $\vec{e}_1$ параллельно $\vec{e}_2$ имеет вид:

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad ♦$$

Соответствующую интерпретацию в пространстве $\mathscr{V}^2$ см. на рисунках 13, 14.

Выделим случай перпендикулярности направленных отрезков, представляющих свободные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (рис. 14).

Пусть теперь в векторной плоскости заданы два свободных вектора: $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, которых представляют направленные отрезки $\overline{OE_1}$ и $\overline{OE_2}$, перпендикулярные и длиной равные единице. Такие векторы, конечно, неколлинеарны и образуют базис в векторном пространстве $\mathscr{V}^2$, обозначим его B. «Повернем» $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$

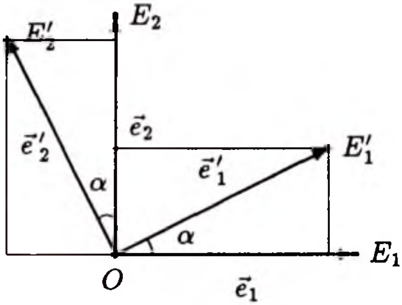


Рис. 15

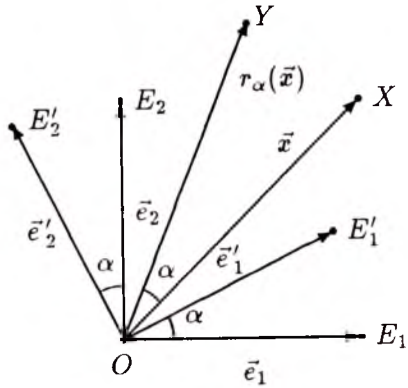


Рис. 16

на угол α, обозначив векторы, полученные в результате такого поворота, $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$ (рис. 15).

Свободные векторы $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$, естественно, неколлинеарны, как и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, и образуют базис в векторном пространстве $\mathscr{V}^2$, который обозначим B'. При этом очевидно, что

$$\vec{e}\,'_1 = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2,\ \text{а}\ \vec{e}\,'_2 = -\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2. \qquad \blacklozenge$$

Так что матрица перехода от базиса B к базису B' имеет вид:

$$T_{\langle B,\,B'\rangle} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{59.α}$$

причем этой же матрицей можно задавать линейное отображение векторного пространства $\mathbf{V}^2$ в себя, рассматривая векторы $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$, как образы векторов базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$. Обозначим его r_α.

Несложно найти, как при действии эндоморфизма r_α изменяются координаты произвольного свободного вектора $\vec{x} \in \mathscr{V}^2$. Если $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ и координатные столбцы $\vec{x}$ и $f(\vec{x})$ относительно базиса B:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{и, соответственно,} \quad M_{r_\alpha(\vec{x})} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix},$$

то согласно формуле (53.4):

$$M_{r_\alpha(\vec{x})} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x^1 - \sin\alpha\cdot x^2 \\ \sin\alpha\cdot x^1 + \cos\alpha\cdot x^2 \end{pmatrix}.$$

Т. е. $r_\alpha(\vec{x}) = (\cos\alpha\cdot x^1 - \sin\alpha\cdot x^2)\,\vec{e}_1 + (\sin\alpha\cdot x^1 + \cos\alpha\cdot x^2)\,\vec{e}_2$.

Это соответствует повороту вектора $\vec{x}$ вместе с системой координат $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ на угол α (рис. 16).

Действительно, если $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2$, то очевидно, что

$$\begin{cases} x^1=|\vec{x}|\cos\beta, \\ x^2=|\vec{x}|\sin\beta, \end{cases}$$

где β — угол, который образует направленный отрезок $\overline{OX}$ вектора $\vec{x}$, отложенный от точки O, с направленным отрезком вектора $\vec{e}_1$.

Повернув $\overline{OX}$ на угол α вместе с базисными векторами, получим новый свободный вектор $\vec{y}=y^1\vec{e}_1+y^2\vec{e}_2$ с направленным отрезком $\overline{OY}$ такой же длины: $|\overline{OX}|=|\overline{OY}|$. Тогда

$$\begin{cases} y^1=|\vec{x}|\cos(\alpha+\beta)\overset{?}{=}|\vec{x}|(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\overset{?}{=} \\ y^2=|\vec{x}|\sin(\alpha+\beta)\overset{?}{=}|\vec{x}|(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\overset{?}{=} \end{cases}$$

$$=\cos\alpha|\vec{x}|\cos\beta-\sin\alpha|\vec{x}|\sin\beta\overset{?}{=}\cos\alpha\cdot x^1-\sin\alpha\cdot x^2,$$
$$=\sin\alpha|\vec{x}|\cos\beta+\cos\alpha|\vec{x}|\sin\beta\overset{?}{=}\sin\alpha\cdot x^1+\cos\alpha\cdot x^2.$$

Естественно назвать эндоморфизм любого двумерного векторного пространства, задаваемый матрицей (59.α), его вращением или поворотом на угол α.

Приведенные выше построения обобщим на произвольное двумерное векторное пространство:

Определение 59.1. ***Вращением (поворотом)*** *векторного пространства* $\boldsymbol{V}^2$ ***на угол*** α *(причем α — любое действительное число) называется любой его эндоморфизм, который относительно некоторого его базиса имеет своей матрицей матрицу*

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Поворот векторного пространства V^2 на угол α обозначается также r_α, так что в некотором базисе

$$M_{r_\alpha}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Гомотетия векторного пространства (см. определение 54.2) V^2 с *коэффициентом* $k\in\mathbf{R}$ отображает всякий его вектор $\vec{x}$ в вектор

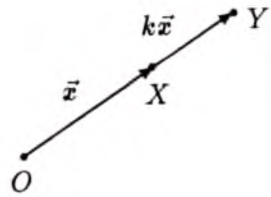


Рис. 17

$k\vec{x}$ ($k \neq 0$). Относительно любого базиса в V^2 ее матрица имеет вид:

$$M_{h_k} = kE = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$ ♦

В векторной плоскости — пространстве $\mathscr{V}^2$ действие гомотетии представляется схемой (рис. 17).

$$\overline{OX} \in \vec{x},\ \overline{OY} \in k\vec{x} = h_k(\vec{x}) \text{ при } k > 0.$$

Задание 59.1. Убедитесь в равенствах следующих эндоморфизмов: $r_\alpha = r_{\alpha + 2\pi k}$, $r^0 = e$, $r^\pi = z$, $h_1 = e$, $h_0 = \theta$, $h_{-1} = z$, где $k \in Z$.

Задание 59.2. Определите, какие из указанных выше эндоморфизмов двумерного векторного пространства (θ, e, z, s, p, r_α, h_k) являются его мономорфизмами (определение 57.5)? эпиморфизмами (определение 57.6)? автоморфизмами (определение 57.8)?

§ 60. АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Множество всех эндоморфизмов векторного пространства ***End*** $(V) =$ ***Hom*** $(V,\ V)$, согласно определению эндоморфизма (51.2), и значит, является векторным пространством относительно операций сложения эндоморфизмов и умножения скаляра на эндоморфизм (см. свойство 58.1)

$$\boxed{+} : \boldsymbol{End}(V) \times \boldsymbol{End}(V) \to \boldsymbol{End}(V), \text{ и } \boxed{\cdot} : \mathrm{R} \times \boldsymbol{End}(V) \to \boldsymbol{End}(V).$$

Как отмечено в § 58 (свойство 58.10), помимо этого, множество ***End*** (V) замкнуто относительно их композиции, или, как принято говорить в этом случае,— *произведения эндоморфизмов.*

Напомним, что *произведением (композицией)* эндоморфизмов f и g векторного пространства V является его эндоморфизм, который обозначается $g \circ f$, и по определению, для любого вектора $\vec{x} \in V$

$$g \circ f(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(\vec{x})). \qquad (60.1)$$

Свойства произведения эндоморфизмов

Для любых $\langle f, g, h, \lambda\rangle \in (\boldsymbol{End}\,(V))^3 \times \mathbf{R}$ и тождественного эндоморфизма e:

PE.1: $f\circ(g \boxed{+} h) = f\circ g \boxed{+} f\circ h.$

PE.2: $(f \boxed{+} g)\circ h = f\circ h \boxed{+} g\circ h.$

PE.3: $\lambda \boxed{\cdot} (f\circ g) = (\lambda \boxed{\cdot} f)\circ g = f\circ(\lambda \boxed{\cdot} g).$

PE.4: $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

PE.5: $e\circ f = f\circ e = f.$

($\boxed{+}$ — сложение эндоморфизмов (определение 52.1), $\boxed{\cdot}$ — умножение скаляра на эндоморфизм (определение 52.2)).

В качестве примера доказательства таких свойств приведем доказательство свойства PE. 2, напомнив, что для равенства двух отображений (см. определение 8.1) $(f\boxed{+}g)\circ h$ и $f\circ h\boxed{+}g\circ h$ с общей областью определения V достаточно установить равенства образов произвольного вектора $\vec{x}\in V$ при действии на него этими отображениями, точнее:

$$((f\boxed{+}g)\circ h)(\vec{x}) = (f\circ h \boxed{+} g\circ h)(\vec{x}).$$

Итак

$$((f\boxed{+}g)\circ h)(\vec{x}) \overset{\text{def}}{\underset{?}{=}} (f\boxed{+}g)(h(\vec{x})) \overset{?}{=} f(h(\vec{x})) + g(h(\vec{x})) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} (f\circ h \boxed{+} g\circ h)(\vec{x}). \qquad \blacksquare$$

Остальные свойства доказываются столь же элементарно.

Определение 60.1. *Множество* $\boldsymbol{End}\,(V)$ *всех эндоморфизмов векторного пространства* V *с операциями* $\boxed{+}$, $\boxed{\cdot}$ *и* $\circ$ *называется* ***алгеброй эндоморфизмов*** *или* ***алгеброй линейных операторов*** *векторного пространства* V.

Ее полное обозначение: $\langle \boldsymbol{End}\,(V), \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \circ\rangle$, хотя, как правило, операции специально не указываются, пишется просто $\boldsymbol{End}\,(V)$, а для их обозначений из соображений упрощения записи используются более привычные символы: $+$, $\cdot$, $\circ$, если это не ведет к недоразумениям.

Основные свойства линейной алгебры *End* (V)

(следуют из свойств векторного пространства ***End*** (V) (см. § 51) и свойств произведения эндоморфизмов PE.1 — PE.5). Для любых $\langle f, g, h, \alpha, \beta, \lambda\rangle \in (\boldsymbol{End}\,(V))^3 \times \mathbf{R}^3$, ненулевого эндоморфизма θ и тождественного эндоморфизма e:

60.1: $f \boxed{+} g = g \boxed{+} f$.

60.2: $(f \boxed{+} g) \boxed{+} h = f \boxed{+} (g \boxed{+} h)$.

60.3: $\exists \theta \in \boldsymbol{End}\,(V) \mid f \boxed{+} \theta = f$.

60.4: $\forall f \in \boldsymbol{End}\,(V)\ \exists\,(-f) \in \boldsymbol{End}\,(V) \mid f \boxed{+} (-f) = \theta$.

60.5: $1 \boxed{\cdot} f = f \quad \forall f \in \boldsymbol{End}\,(V)$.

60.6: $\alpha \boxed{\cdot} (\beta \boxed{\cdot} f) = \alpha\beta \boxed{\cdot} f$.

60.7: $(\alpha + \beta) \boxed{\cdot} f = \alpha \boxed{\cdot} f \boxed{+} \beta \boxed{\cdot} f$.

60.8: $\alpha \boxed{\cdot} (f \boxed{+} g) = \alpha \boxed{\cdot} f \boxed{+} \alpha \boxed{\cdot} g$.

60.9: $f \circ (g \boxed{+} h) = f \circ g \boxed{+} f \circ h$.

60.10: $(f \boxed{+} g) \circ h = f \circ h \boxed{+} g \circ h$.

60.11: $\lambda \boxed{\cdot} (f \circ g) = (\lambda \boxed{\cdot} f) \circ g = f \circ (\lambda \boxed{\cdot} g)$.

60.12: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

60.13: $e \circ f = f \circ e = f$.

Алгебра линейных операторов векторного пространства представляет собой пример математической структуры. Эта структура называется *линейной алгеброй.*

§ 61*. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

Определение 61.1. ***Линейной алгеброй*** *(или просто* ***алгеброй****)* называется векторное пространство $\langle A, +, \cdot\rangle$, *на котором помимо операций сложения элементов* $(+)$ *и умножения числа на элемент* $(\cdot)$ *определена еще одна операция (отображение):* $*\colon A \times A \to A$, *называемая* ***умножением****, так, что требуется выполнение следующих условий:*

A.1: $a * (b + c) = a * b + a * c$.

A.2: $(a + b) * c = a * c + b * c$.

A.3: $\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b)$.

для любых $\langle a, b, c, \lambda\rangle \in A^3 \times R$. *(через* $a * b$ *— обозначается результат операции* $*$ *).*

Обозначение алгебры: $\langle A, +, \cdot, * \rangle$.

Если $\langle A, +, \cdot \rangle$ — векторное пространство над полем действительных чисел, то $\langle A, +, \cdot, * \rangle$ называется *алгеброй над полем действительных чисел.*

Определение 61.2. *Линейная алгебра $\langle A, +, \cdot, * \rangle$ называется* ***коммутативной алгеброй****, если операция умножения удовлетворяет условию коммутативности:*

A.C: $a * b = b * a$ *при любых* $\langle a, b \rangle \in A^2$.

Алгебра A называется ***ассоциативной****, если ее определение (аксиомы A. 1— A. 3) пополнено требованием ассоциативности умножения:*

A. A: $a * (b * c) = (a * b) * c$ *при любых* $\langle a, b, c \rangle \in A^3$.

Если к тому же выполняется условие:

A. E: $\exists e \in A \mid \forall a \in A \Rightarrow a * e = e * a = a$,

то алгебра называется ***ассоциативной алгеброй с единицей****, а элемент e, удовлетворяющий этому условию,—* ***единицей алгебры*** *A.*

Ассоциативная алгебра с единицей называется ***алгеброй с делением****, если кроме A. 1 — A. 3 и A. A, A. E выполняется условие:*

A D: $(\forall a \in A \mid a \neq 0)\, \exists a' \in A \mid a * a' = a' * a = e$,

т. е. ее ***всякий ненулевой элемент обратим.***

Таким образом (см. свойства 60.1—60.13), ***End*** (V) является ассоциативной алгеброй с единицей, ? не ? коммутативной. ◆

Помимо алгебры эндоморфизмов векторного пространства, очевидно, структуру ассоциативных алгебр с единицей и делением имеют: ***gl*** (n) — полная линейная алгебра и множество действительных чисел **R**. Однако, этими примерами множество алгебр не исчерпывается.

Пример 61.1. Множество полиномов (многочленов) от одной переменной (см. пример 34.6) с вещественными коэффициентами $\mathscr{P}[x]$ есть ассоциативная коммутативная алгебра с единицей относительно операций:

сложения полиномов:

$$(f \boxed{+} g) \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + b_2)\, x^2 + \ldots + (a_n + b_n)\, x^n,$$

(здесь $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$),

умножения скаляра на полином:

$$(\lambda \boxed{\cdot} f) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \ldots + \lambda a_n x^n,$$

и обычного (почленного) умножения полиномов:

$$(f\odot h)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)(c_0+c_1x+\ldots+c_mx^m)\overset{\text{def}}{=\!=}$$
$$\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ic_j\right)x^k, \qquad (60.p)$$

(здесь $h=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m$).

Единицей этой алгебры является моном (одночлен) вида

$$1=1+0x+0x^2+\ldots+0x^n. \qquad \blacklozenge$$

Является ли $\langle\mathscr{P}[x], \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \odot\rangle$ алгеброй с делением? Т. е. можно ли утверждать, что для любого многочлена f найдется такой многочлен $\tilde{f}$, что $f\odot\tilde{f}=\tilde{f}\odot f=1$?

Указание. Рассмотрите одночлен $f(x)=x^2$, найдется ли для него в $\mathscr{P}[x]$ элемент, удовлетворяющий условию A. D?

Образует ли алгебру векторное пространство $\mathscr{P}^n[x]$ — полиномов степени не выше n при введении их произведения тем же правилом (60.p)? ◆

Пример 61.2. Векторное пространство всех числовых функций одной переменной $\mathscr{F}[D]$ с областью определения D (см. пример 34.8), (34.F) с операциями:

$$(f\,[+]\,g)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}f(x)+g(x) \text{ и } (\lambda\,[\cdot]\,f)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\lambda f(x)$$

становится ассоциативной алгеброй с единицей при введении операции умножения:

$$(f\odot g)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}f(x)\,g(x)$$

для любых $x\in D$ и $\langle\lambda, f, g\rangle\in\mathbf{R}\times\mathscr{F}^2(D)$. (Здесь $\odot$ — не композиция функций, а их поточечное умножение. Так, например, $(\ln\odot\sin)(x)=\ln x\cdot\sin x$, а не $\ln(\sin x)$.

Ноль в этой алгебре — постоянная функция вида: $g(x)\overset{\text{def}}{=\!=}0$ при любых $x\in D$, а единица этой алгебры тоже постоянная функция: $e(x)\overset{\text{def}}{=\!=}1$. ◆

Алгебра $\mathscr{F}[D]$, вообще говоря, не является алгеброй с делением. Например, $x\in\mathscr{F}[\mathbf{R}]$ и хотя $x\odot\frac{1}{x}=1$, но $\frac{1}{x}\notin\mathscr{F}[\mathbf{R}]$ (области определения функций x и $\frac{1}{x}$ разные), т. е. элемент x не имеет обратного в $\mathscr{F}[\mathbf{R}]$.

Алгебра $\langle\mathscr{F}[D], [+], [\cdot], \odot\rangle$? не ? коммутативна. ◆

Определение 61.3. ***Размерностью линейной алгебры*** *$\langle A, +, \cdot, *\rangle$ называется размерность ее векторного пространства $\langle A, +, \cdot\rangle$.*

Таким образом, в приведенных примерах $\boldsymbol{gl}(n)$ и $\mathbf{R}$ — конечномерные алгебры ($\dim \boldsymbol{gl}(n) = ?$, $\dim \mathbf{R} = ?$), а алгебры $\mathscr{P}[x]$ и $\mathscr{T}[Dx]$ конечномерными не являются.

Сравнительно недавно с привлечением серьезных топологических средств исследований был установлен удивительный факт:

Теорема 61.1. *Всякая конечномерная алгебра с делением (не обязательно ассоциативная) имеет размерность* 1, 2, 4 *или* 8. *Все эти возможности реализуются.*

Пример 61.3. Подмножество матриц полной линейной алгебры $\boldsymbol{gl}(n)$, состоящее из всех попарно коммутирующих матриц, есть ассоциативная алгебра с единицей относительно обычных матричных операций: сложения, умножения скаляра на матрицу и умножения матриц. ◆

Задача 61.1.1. Докажите, что множество $\boldsymbol{S}'(n)$ всех скалярных матриц порядка n является алгеброй относительно обычных операций на матрицах.

Является ли алгебра $\boldsymbol{S}'$ коммутативной? ассоциативной? имеет ли единицу? является ли алгеброй с делением?

Определите размерность этой алгебры.

Напоминание. Скалярные матрицы имеют вид λE, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Указание. $\boldsymbol{S}'(n)$ — подпространство векторного пространства $\boldsymbol{gl}(n)$ (см. пример 35.1,1), почему для всех элементов $\boldsymbol{S}'(n)$ выполнимы условия А.1 — А.3. Почему имеет место для скалярных матриц закон ассоциативности умножения (условие А. А)? Проверьте выполнимость условий наличия единицы, обратимости и коммутативности А.Е, A.D, А.С.

Задача 61.1.2. Докажите, что множество $\boldsymbol{A}'$ всех квадратных матриц второго порядка вида:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix},$$

(где a и b — любые действительные числа) относительно обычных матричных операций — линейная алгебра.

Является ли алгебра $\boldsymbol{A}'$ ассоциативной с единицей? с делением? коммутативной?

Определите размерность этой алгебры.

Указание. Проверьте замкнутость $\boldsymbol{A}'$ относительно операций векторного пространства $\boldsymbol{M}(2)$, это будет означать, что $\boldsymbol{A}'$ — подпространство в $\boldsymbol{M}(2)$ и векторное пространство. Проверьте выполнимость аксиом линейной алгебры (А.1 — А.3). Почему для матриц из $\boldsymbol{A}'$ имеет место закон ассоциативности умножения (условие А.А)? Выполнимы ли условия существования единицы, делимости и коммутативности: А.Е, A.D и А.С?

Чтобы установить размерность алгебры (векторного пространства $\boldsymbol{A}'$), разложите матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ по стандартному базису $B = \langle E_1^1, E_2^1, E_1^2, E_2^2 \rangle$ в $\boldsymbol{M}(2)$.

Задача 61.1.3. Докажите, что подмножество $\mathbf{C}'$ всех квадратных матриц второго порядка вида:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

(где a и b — любые действительные числа) относительно обычных матричных операций есть алгебра.

Является ли алгебра $\mathbf{C}'$ ассоциативной с единицей? с делением? коммутативной?

Определите размерность этой алгебры.

Указание. Обратите внимание, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = aE + bI, \text{ где } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда, в частности, $\dim \boldsymbol{C}' = ?$ $\mathbf{C}' = L(E, I)$.

Пример 61.4. Одним из важнейших примеров ассоциативной и коммутативной алгебры с единицей является *поле комплексных чисел* $\mathbf{C}$ (см. ниже § 64*, пример 64.5).

Пример 61.5. Множество *кватернионов* — $\mathbf{H}$, о которых упоминалось в исторических справках лекций 8 и 9, также имеет структуру линейной алгебры, коммутативной, ассоциативной с единицей (см. § 64*, пример 64.6).

Определение 61.4. ***Подалгеброй алгебры*** $\langle A, +, \cdot, *\rangle$ *называется ее непустое подмножество A', являющееся подпространством в векторном пространстве $\langle A, +, \cdot\rangle$, если для любых ее элементов a и b выполняется условие:*

SA: $a * b \in A'$.

Таким образом, совокупность всех условий, чтобы непустое подмножество $A' \subset A$ являлось подалгеброй алгебры A есть замкнутость относительно всех операций алгебры A, а именно: для любых $\langle \alpha, a, b\rangle \in \mathbf{R} \times A'^2$.:

SS.1: $a + b \in A'$.
SS.2: $\alpha \cdot a \in A'$.
SA.3: $a * b \in A'$.

Подалгебрами полной линейной алгебры $\boldsymbol{gl}(2)$ являются алгебры $\boldsymbol{A}'$ и $\mathbf{C}'$. Алгебры $\boldsymbol{S}'(2)$ есть подалгебра алгебр $\boldsymbol{A}'$ и $\mathbf{C}'$ (см. задачи 61.1.1, 61.1.2 и 61.1.3), а $\boldsymbol{S}'(n)$ — множество всех скалярных матриц порядка n есть подалгебра полной линейной алгебры $\boldsymbol{gl}(n)$ (см. задача 61.1.1). Примером подалгебры в алгебре всех функций, определенных на числовой оси, является подалгебра полиномов: $\mathscr{F}[x] \subset \mathscr{F}[\mathbf{R}]$. Можно показать, что подалгебру в $\mathscr{F}[\mathbf{R}]$, например, образуют все функции на $\mathbf{R}$, обращающиеся в 0 в какой-либо фиксированной точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

Утверждение 61.1. *Отношение «быть подалгеброй» транзитивно на множестве алгебр и является отношением строгого порядка.* ♦

Утверждение 61.2. *Всякая подалгебра линейной алгебры (ассоциативной, с единицей, коммутативной) есть линейная алгебра (соответственно: ассоциативная, с единицей, коммутативная).* ♦

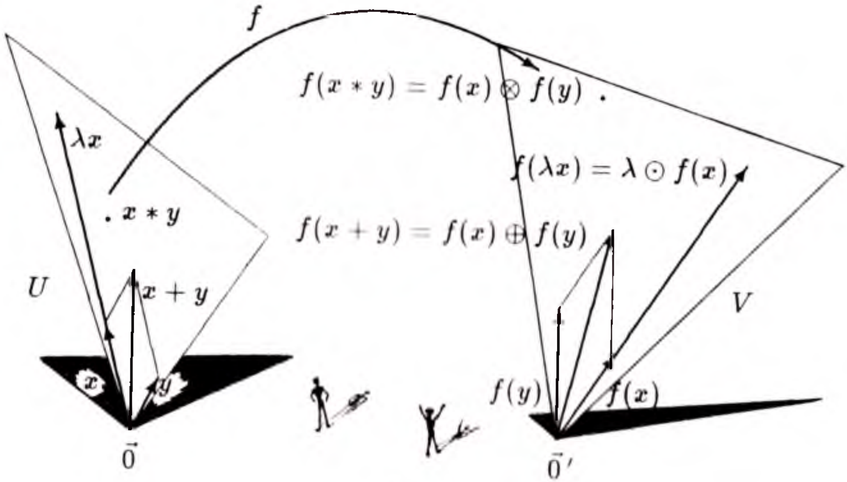


Рис. 18

Однако, подалгебра линейной алгебры с делением, вообще говоря, алгеброй с делением не является. ♦

Определение 61.5. ***Линейные алгебры*** $\langle A, +, \cdot, * \rangle$ *и* $\langle B, \oplus, \odot, \circledast \rangle$ *называются* ***изоморфными***, *если существует изоморфизм векторных пространств, сохраняющий операцию умножения. Т. е. для некоторого* f: $\langle A, +, \cdot \rangle \to \langle B, \oplus, \odot \rangle$ выполняется условие:

AI: $f(a*b)=f(a)\odot f(b)$.

Учитывая определение изоморфизма векторных пространств 55.1, укажем совокупность всех условий для того, чтобы отображение f: $\langle A, +, \cdot, * \rangle \to \langle B, \oplus, \odot, \circledast \rangle$ было изоморфизмом алгебр:

AI.1: f — биективное отображение.

AI.2: f — линейное отображение:

$f(\alpha\cdot a+\beta\cdot b)=\alpha\odot f(a)\oplus\beta\odot f(b) \quad \forall\ \langle a, b, \alpha, \beta\rangle\in A^2\times \mathbf{R}^2$.

AI.3: $f(a*b)=f(a)\odot f(b) \quad \forall\ \langle a, b\rangle\in A^2$.

Представление об изоморфизме линейных алгебр дает схема на рис. 18.

Замечание 61.1. Если алгебра $\langle A, +, \cdot, * \rangle$ коммутативная, ассоциативная, имеет единицу или алгебра с делением, то изоморфная ей линейная алгебра $\langle B, \oplus, \odot, \circledast \rangle$ того же типа: соответственно, коммутативная, ассоциативная, с единицей или с делением.

§ 62. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР *End* (V^n) и *gl* (n)

Выше в § 56 было установлено, что векторные пространства $\boldsymbol{Hom}(U^n, V^m)$ и $\boldsymbol{M}(m\times n)$ изоморфны (см. теорему 56.1), а значит, изоморфны и векторные пространства $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{gl}(n)$ (свойство 58.2).

Покажем, что этот изоморфизм векторных пространств является изоморфизмом $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{gl}(n)$, как алгебр. Напомним (см. § 55), что изоморфизмом векторных пространств $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{gl}(n)$ задает отображением M, сопоставляющее каждому эндоморфизму его матрицу относительно некоторого базиса в векторном пространстве V^n (см. определение 53.1, замечание 53.2), столбцы которой состоят из координат образов векторов базиса относительно этого же самого базиса:

$$M(f)\overset{\text{des}}{=\!=}M_f=\|f^i_j\|\in\boldsymbol{gl}(n).$$

Согласно определению изоморфизма линейных алгебр 61.5, достаточно дополнительно показать, что для отображения M выполняется условие AI, т. е. для любых эндоморфизмов $\{f,\ g\}\in\boldsymbol{End}(V^n)$:

$$M(g\circ f)=M(g)\,M(f),$$

или, учитывая обозначения матриц гомоморфизмов:

$$M_{g\circ f}=M_gM_f.$$

По определению композиции отображений для любого вектора $\vec{x}\in V^n$

$$(g\circ f)(\vec{x})=(g(f(\vec{x})),$$

тогда:

$$M_{(g\circ f)(\vec{x})}=M_{(g(f(\vec{x}))}\overset{?}{=}M_gM_{f(\vec{x})}\overset{?}{=}M_g(M_fM_{\vec{x}})\overset{?}{=}(M_gM_f)\,M_{\vec{x}}.$$

Т. е.

$$M_{(g\circ f)(\vec{x})}=(M_gM_f)\,M_{\vec{x}},$$

с другой стороны:

$$M_{(g\circ f)(\vec{x})}\overset{?}{=}M_{(g\circ f)}\,M_{\vec{x}},$$

откуда:

$$M_{(g\circ f)}M_{\vec{x}}=(M_gM_f)\,M_{\vec{x}}$$

и по лемме 50.1 о сокращении в силу произвольности вектора $\vec{x}$ (и матрицы-столбца $M_{\vec{x}}$) следует, что

$$M_{g\circ f}=M_gM_f \qquad (62.1)$$

Это и означает сохранение операции умножения отображением M: композиции эндоморфизмов в алгебре $\boldsymbol{End}(V^n)$ соответствует умножение матриц в $\boldsymbol{gl}(n)$.

Следовательно, для изоморфизма M векторных пространств $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{gl}(n, R)$ выполнено условие AI, и поэтому они изоморфны, как линейные алгебры. ■

Тем самым приведен пример изоморфных алгебр и доказана теорема.

Теорема 62.1. *Линейные алгебры* $\langle \boldsymbol{End}(V^2), +, \cdot, \circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{gl}(n, R), +, \cdot, \bullet\rangle$ *изоморфны.*

Задание 62.1. Коммутативно ли умножение в алгебре эндоморфизмов векторного пространства — $\boldsymbol{End}(V^n)$? ♦

Указание. Коммутативно ли умножение в $\boldsymbol{gl}(n)$ (см. замечание 61.1).

Задание 62.2. Существует ли изоморфизм линейных алгебр $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{gl}(n, R)$, отличный от изоморфизма M? Постарайтесь его построить.

Задача 62.1.1. В векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2\times 1)$ относительно стандартного базиса $B^0 = \langle \vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2\rangle$ (см. определение 41.3):

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{E}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

задан эндоморфизм f матрицей:

$$M_{f_{\langle B^0\rangle}} = \begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}.$$

Эндоморфизм g задан матрицей:

$$M_{g_{\langle B'\rangle}} = \begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 9\end{pmatrix}.$$

относительно базиса $B' = \langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ с векторами

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу эндоморфизма $g\circ f$ в базисе B'.

Указание. См. задачу 56.1.1, теорему 62.1, (62.1).

Задача 62.1.2. В векторном пространстве $M(2\times 1)$ относительно базиса $B' = \langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2\rangle$ с

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

эндоморфизм f задан матрицей:

$$M_{f_{\langle B' \rangle}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

а эндоморфизм g — матрицей

$$M_{g_{\langle B^0 \rangle}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

относительно стандартного базиса в $M(2 \times 1)$.

Найдите матрицу эндоморфизма $2f \circ g$ относительно стандартного базиса $B^0 = \langle \vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2 \rangle$ в этом пространстве.

Указание. См. задачу 56.1.2, теорему 62.1, (62.1).

Задача 62.1.3. В векторном пространстве $\boldsymbol{M}(2 \times 1)$ относительно базиса $B' = \langle \vec{\boldsymbol{A}}_1, \vec{\boldsymbol{A}}_2 \rangle$ с

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

эндоморфизм f задан матрицей:

$$M_{f_{\langle B' \rangle}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

а эндоморфизм g — матрицей

$$M_{g_{\langle B'' \rangle}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

относительно базиса $B'' = \langle \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2 \rangle$ в этом векторном пространстве, где

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{B}}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу эндоморфизма $(f+g)^2 = (f+g) \circ (f+g)$ относительно базиса $B'' = \langle \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2 \rangle$.

Указание. См. задачу 56.1.3, теорему 62.1, (62.1).

§ 63. ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА $Aut(V^n)$

Напоминание.

Определение: 57.8. *Биективный эндоморфизм векторного пространства называется его* ***автоморфизмом.***

Множество всех автоморфизмов векторного пространства V обозначается $\boldsymbol{Aut}(V)$ и называется ***группой автоморфизмов векторного пространства*** V.

Некоторые авторы вместо термина автоморфизм используют название *линейное преобразование*, которое соответствует содержанию этого термина. По своей сущности, термины изоморфизм векторного пространства (определение 56.1) в себя и его автоморфизмом равнозначны, т. е. являются синонимами.

Задание 63.1. Множество автоморфизмов $\boldsymbol{Aut}(V)$ замкнуто относительно умножения (почему? ◆). Определим, является ли $\boldsymbol{Aut}(V)$ подалгеброй линейной алгебры $\boldsymbol{End}(V)$.

Чтобы $\boldsymbol{Aut}(V)$ было подалгеброй $\boldsymbol{End}(V)$ по определению подалгебры (определение 61.6), $\boldsymbol{Aut}(V)$ должно быть подпространством векторного пространства $\boldsymbol{End}(V)$, тогда, в частности, это подмножество должно содержать нулевой элемент векторного пространства $\boldsymbol{End}(V)$ — нулевой эндоморфизм θ (см. определение 52.3), который, как отображение, ? не ? биективен. Следовательно, $\theta \overset{?}{\notin} \boldsymbol{Aut}(V)$ и $\boldsymbol{Aut}(V)$ не является подалгеброй линейной алгебры $\boldsymbol{End}(V)$.

Если f — автоморфизм векторного пространства V, то по свойству 58.11 обратный к f элемент f^{-1} также является автоморфизмом V и $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = e$. (почему? ◆) и представляет собой пример *обратимого линейного оператора* или *обратимого эндоморфизма* векторного пространства.

Определение 63.1. ***Эндоморфизм*** *f векторного пространства V называется* ***обратимым,*** *если найдется его такой эндоморфизм g, что*

$$g\circ f = f\circ g = e.$$

Естественно задаться вопросом, существуют ли в линейной алгебре $\boldsymbol{End}(V)$ обратимые эндоморфизмы кроме элементов $\boldsymbol{Aut}(V)$.

Лемма 63.1. *Обратимый эндоморфизм векторного пространства V является его мономорфизмом.* (определение 57.5).

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$ и обратим. Тогда найдется $g \in \boldsymbol{End}(V)$ такой, что

$$(g\circ f)(\vec{x}) = \vec{x}$$

для любого $\vec{x} \in V$. Отсюда, если $(g\circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$, то $\vec{x} \overset{?}{=} \vec{0}$.

Очевидно, что $f(\vec{0}) \overset{?}{=} \vec{0}$. Чтобы определить, найдутся ли в ядре f элементы, отличные от нулевого вектора, рассмотрим соотношение $f(\vec{x})=\vec{0}$. Подействовав эндоморфизмом g на его обе части, получим, что:

$$\begin{array}{c} g(f(\vec{x}))=g(\vec{0}) \\ \text{def}\,\|\qquad\quad\|\,? \\ (g\circ f)(\vec{x})=\vec{0}. \end{array}$$

Как установлено выше, последнее имеет место только при $\vec{x}=\vec{0}$. Следовательно, из условия $f(\vec{x})=\vec{0}$ следует, что $\operatorname{Ker} f=\{\vec{0}\}$ и f — мономорфизм векторного пространства V. ■

Лемма 63.2. *Обратимый эндоморфизм векторного пространства V является его эпиморфизмом.* (определение 57.6).

Доказательство. Пусть $f\in \boldsymbol{End}(V)$ и обратим. Тогда найдется $g\in \boldsymbol{End}(V)$ такой, что для любого $\vec{x}\in V$ имеет место:

$$\begin{array}{c} (f\circ g)(\vec{x})=\vec{x} \\ \text{def}\,\|\qquad\quad\| \\ f(g(\vec{x}))=\vec{x}. \end{array}$$

Таким образом, $g(\vec{x})$ — прообраз произвольного вектора $\vec{x}$ векторного пространства V, что означает сюръективность отображения f, т. е. f — эпиморфизм V. ■

Тем самым получен ответ на поставленный вопрос: из лемм следует, что всякий обратимый эндоморфизм векторного пространства биективен, т. е. является изоморфизмом его в себя, и, значит, автоморфизмом. В совокупности с замеченной выше обратимостью всякого автоморфизма векторного пространства это означает, что имеет место следующий признак.

Утверждение 63.1. *Эндоморфизм векторного пространства является его автоморфизмом тогда и только тогда, когда он обратим.*

Другие признаки того, что эндоморфизм векторного пространства есть его автоморфизмом, дает следующая теорема.

Теорема 63.1. *Эндоморфизм векторного конечномерного векторного пространства V^n есть его автоморфизм тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из условий.*

1. $\operatorname{Ker} f=\{\vec{0}\}$.
2. $\operatorname{Im} f=V$.
3. $\operatorname{rang} f=\dim V$.
4. M_f — невырожденая матрица.
5. $\det f\neq 0$.
6. f — обратим.

Доказательство. Если f — автоморфизм векторного пространства V, то согласно следствию 57.1 — f — мономорфизм V, а значит по определению мономорфизма 57.5: $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ (выполняется условие 1 теоремы) и $\det f = 0$.

Тогда по теореме о ранге (свойство 58.4) $\operatorname{rang} f = n$, следовательно, $\dim \operatorname{Im} f = n$ и $\operatorname{Im} f = V$ (почему? ◆) (выполняется условие 2 теоремы), тем самым доказано, что f — эпиморфизм V (определение 57.6).

По утверждению 57.2 $\operatorname{rang} f \stackrel{?}{=} \dim V = n$ (выполняется условие 3 теоремы). А из определения ранга гомоморфизма (определение 54.1) следует, что ранг матрицы этого гомоморфизма — M_f (относительно любого базиса в V^n) равен n, т. е. эта матрица невырождена (выполняется условие 4 теоремы). Тогда $\det f \stackrel{?}{\neq} 0$ (выполняется условие 5 теоремы).

Из того, что $\det f \stackrel{?}{\neq} 0$ и $\det f = \det M_f$, следует обратимость M_f: существует матрица $(M_f)^{-1}$ такая, что $M_f(M_f)^{-1} = (M_f)^{-1}M_f = E$. В силу изоморфизма векторных пространств $\operatorname{End}(V^n)$ и $gl(n)$ найдется такой эндоморфизм g, что $M_g = (M_f)^{-1}$. Тогда из того, что

$$M_{g \circ f} = M_g M_f = (M_f)^{-1} M_f = E \quad \text{и} \quad M_{f \circ g} = M_f M_g = M_f (M_f)^{-1} = E$$

следует, что $g \circ f \stackrel{?}{=} e$ и $f \circ g \stackrel{?}{=} e$. (почему? ◆) Это означает обратимость эндоморфизма f (выполняется условие 6 теоремы).

Согласно утверждению 63.1 всякий обратимый эндоморфизм векторного пространства есть его автоморфизм. ■

Следствие 63.1. *Эндоморфизм векторного пространства является его автоморфизмом тогда и только тогда, когда он любую линейно независимую систему векторов отображает в линейно независимую систему.*

Задача 63.1.2. Докажите следствие 63.1.

Доказательство. 1. Так как автоморфизм векторного пространства является его изоморфизмом, то по утверждению 55.? любая линейно независимая система векторов отображается им в линейно независимую систему.

2. Обратно: из равенства $f(\vec{x}) = \vec{0}$ для эндоморфизма f, удовлетворяющего условию следствия, вытекает, что $\vec{x} = \vec{0}$, так как равенство $f(\vec{x}) = \vec{0}$ при ненулевом векторе $\vec{x}$ противоречит условию отображения любой линейно независимой системы векторов в линейно независимую. ◆

Значит, $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, и, следовательно, f — мономорфизм.

Согласно теореме 63.1 мономорфизм векторного пространства в себя является его автоморфизмом. ■

Теорема 63.2. *Множество автоморфизмов векторного пространства есть группа относительно их произведения.*

Доказательство. Для того, чтобы на множестве $\boldsymbol{Aut}(V)$ отображением $\circ$ (композицией) была задана структура группы (определение 24.1), надо установить замкнутость его относительно произведения эндоморфизмов и доказать выполнимость аксиом группы (G.1′ — G.3′).

0. Согласно свойству 58.10 произведение двух эндоморфизмов векторного пространства, в частности, его автоморфизмов: $\{f, g\} \subset \boldsymbol{Aut}(V)$, есть эндоморфизм: $g \circ f \in \boldsymbol{End}(V)$. Наряду с этим $g \circ f$ — биективное отображение (теорема 10.?), и значит, $g \circ f \in \boldsymbol{Aut}(V)$. ◆

1. Условию существования нейтрального элемента G.1′, очевидно, удовлетворяет тождественное отображение (свойство 58.9) — автоморфизм e такой, что $e(\vec{x}) = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$. Очевидно, что $f \circ e = e$ для любого $f \in \boldsymbol{Aut}(V)$. ◆

2. По свойству 58.11 для всякого автоморфизма $f \in \boldsymbol{Aut}(V)$ существует обратное ему отображение f^{-1}, причем $f^{-1} \in \boldsymbol{Aut}(V)$, т. е. выполнено условие G.2′ существования обратного элемента и $f \circ f^{-1} = e$.

3. Произведение автоморфизмов ассоциативно, как композиция отображений (теорема 8.2) — выполнено последнее из условий группы (G.3′). ■

Напомним, что в группе обратный элемент для данного элемента единствен (свойство 24.2).

Задача 63.1.3. Верно ли утверждение, что из соотношения $f \circ g = e$ для эндоморфизмов векторного пространства V, (e — тождественный эндоморфизм) следует, что f и g являются его автоморфизмами?

Указание. Рассмотрите пример эндоморфизмов f и g векторного пространства всех многочленов:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = a_1 + a_2 x \ldots + a_n x^{n-1},$$

$$g(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = a_0 x + a_1 x^2 \ldots + a_n x^{n+1}.$$

Подумайте, почему этот пример не противоречит определению группы.

В теореме 63.1 мы отмечали, что матрица любого автоморфизма конечномерного векторного пространства невырождена и наоборот. Оказывается, между группами $\boldsymbol{Aut}(V^n)$ и $\boldsymbol{GL}(n)$ более глубокая связь.

Определение 63.2. ***Группы*** $\langle G, \cdot \rangle$ *и* $\langle G', \odot \rangle$ *называются* ***изоморфными****, если существует биективное отображение* $f\colon G \to G'$*, сохраняющее групповую операцию:*

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b),$$

Теорема 63.3. *Группы* $\langle \boldsymbol{Aut}(V^n), \circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{GL}(n), \cdot\rangle$ *изоморфны.*

Доказательство. 1. По теореме 63.1 эндоморфизм тогда и только тогда является автоморфизмом конечномерного векторного пространства, когда его матрица (относительно любого базиса) невырождена. По существу это означает сюръективность отображения $M':\boldsymbol{Aut}(V^n)\rightarrowtail\boldsymbol{GL}(n)$, которое сопоставляет автоморфизму его матрицу.

Отображение M', очевидно, есть сужение отображения $M:\boldsymbol{End}(V^n)\rightarrowtail\boldsymbol{gl}(n)$, сопоставляемого эндоморфизму его матрицу относительно некоторого базиса в векторном пространстве V^n на подмножество $\boldsymbol{Aut}(V^n)\subset\boldsymbol{End}(V^n)$. Т. е. $M'=M|_{\boldsymbol{Aut}(V^n)}$

Как установлено теоремой 62.1, отображение M есть изоморфизм линейных алгебр $\langle\boldsymbol{End}(V^n), +, \cdot, \circ\rangle$ и $\langle\boldsymbol{gl}(n), +, \cdot, \circ\rangle$, а значит, и его сужение на множество $\boldsymbol{Aut}(V^n)$ инъективно. ♦

Т. е. M': $\boldsymbol{Aut}(V^n)\rightarrowtail\boldsymbol{GL}(n)$ — биективное отображение.

2. Для отображения M относительно операций умножения в алгебрах $\boldsymbol{End}(V^n)$ (композиции эндоморфизмов) и $\boldsymbol{gl}(n)$ (произведения матриц) выше установлено соотношение (62.1):

$$M_{g\circ f}=M_gM_f.$$

Так как групповые операции в $\langle\boldsymbol{Aut}(V^n), \circ\rangle$ и $\langle\boldsymbol{GL}(n), \cdot\rangle$ те же самые, то это равенство завершает доказательство теоремы. ■

Задача 63.1.1. Относительно операции сложения множество действительных чисел $\langle \mathbf{R}, +\rangle$ — группа, а $\langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle$ — группа положительных чисел относительно умножения (см. задание 24.1).

Докажите, что отображение ln: $\langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle\to\langle \mathbf{R}, +\rangle$ устанавливает изоморфизм этих групп ($x\to\ln x$).

Указание. 1. Установите, что ln — биективное отображение (определение 10.1) $\langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle$ в $\langle \mathbf{R}, +\rangle$. 2. $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$.

§ 64*. КОЛЬЦА, ПОЛЯ

Ранее мы знакомились с такими алгебраическими структурами, как группа, векторное пространство, линейная алгебра, их основными свойствами и моделями. К важнейшим алгебраическим структурам относятся также кольцо и поле.

Определение 64.1. ***Кольцом*** *называется непустое множество* $\boldsymbol{K}$, *если на нем заданы две операции — отображения* $+:\boldsymbol{K}^2\to\boldsymbol{K}$ и $\cdot:\boldsymbol{K}^2\to\boldsymbol{K}$, *удовлетворяющие аксиомам:*

R.1: $a+b=b+a$,
R.2: $(a+b)+c=a+(b+c)$,
R.3: $\exists 0\in \boldsymbol{K} \mid \forall a\in \boldsymbol{K} \Rightarrow a+0=a$,
R.4: $\forall a\in \boldsymbol{K}\ \exists -a\in \boldsymbol{K} \mid a+(-a)=0$,
R.5: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,
R.6: $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$,
для любых элементов $\{a,\ b,\ c\}\subset \boldsymbol{K}$.

Через $a+b$ и $a\cdot b$ обозначены образы кортежа элементов $\langle a,\ b\rangle\in \boldsymbol{K}^2$ при действии отображениями $+$ (***сложении элементов***) и, соответственно, $\cdot$ (***умножении элементов***). Обычно, в записи умножения, если это не ведет к недоразумениям, знак опускается и произведение элементов a и b обозначается ab.

Кольцо обозначается $\langle \boldsymbol{K},\ +,\ \cdot\rangle$, хотя часто для сокращения записи операции не указываются.

Структуру кольца относительно обычных операций сложения и умножения имеют действительные числа — кольцо $\langle \mathbf{R},\ +,\ \cdot\rangle$, целые числа — кольцо $\langle \mathbf{Z},\ +,\ \cdot\rangle$, рациональные числа — кольцо $\langle \mathbf{Q},\ +,\ \cdot\rangle$ и целые числа, кратные некоторому натуральному числу m — кольцо $\langle m\mathbf{Z},\ +,\ \cdot\rangle$. ◆

Несложно заметить, что $\langle \boldsymbol{K},\ +\rangle$ — группа (определение 24.1), причем, абелева (определение 24.2), ее называют ***аддитивной группой кольца.*** Элемент 0, определяемый аксиомой R.3, называется ***нулевым элементом кольца***, а элемент $-a$, определяемый аксиомой R.4, — ***противоположным к а элементом кольца.***

Нулевой элемент в кольце единствен (см. свойство 24.3), и любым элементом кольца однозначно определяется ему противоположный (см. свойство 24.2). Очевидно, что $(-(-a))=a$ (см. свойство 24.4), $0+a=a$ и $(-a)+a=0$ для любого $a\in \boldsymbol{K}$. ◆

Простейшие свойства кольца

Свойство 64.1. $0a=a0=0$ *для любого элемента кольца* $a\in \boldsymbol{K}$.

Доказательство. $$\underbrace{0a+0a\overset{R.6}{=}(0+0)a\overset{R.3}{=}0a}_{\Downarrow\,?}$$

$$0a=0.$$

Аналогично доказывается равенство $a0=0$. ■

Свойство 64.2. $(-a)b=a(-b)=-ab$ *для любых элементов кольца* $\{a,\ b\}\subset \boldsymbol{K}$.

Доказательство. Пусть a и b — произвольные элементы кольца $\boldsymbol{K}$. Тогда

$$\begin{array}{c} \underline{\Vert\; ab+(-a)\,b \overset{\text{R.6}}{=} (a+(-a))\,b \overset{\text{R.?}}{=} 0\,b = 0. \;\Vert} \\ \Downarrow ? \\ (-a)\,b = -(ab) \end{array}$$

Равенство $a(-b)=-(ab)$ доказывается аналогично. ■

Следствие 64.1. $(-a)(-b)=ab$ *для любых* $\{a, b\}\subset \boldsymbol{K}$, *так как* $(-a)(-b)=-(-a)\,b=-(-ab)=ab$. ♦ ■

Прежде чем рассмотреть более сложные и содержательные примеры колец, укажем их некоторые специальные виды.

Определение 64.2. *Кольцо* $\langle \boldsymbol{K}, +, \cdot\rangle$ *называется* ***коммутативным***, *если умножение в кольце обладает свойством коммутативности, т. е. выполняется условие:*

R.C: $ab=ba$ для любых $\{a, b\}\subset \boldsymbol{K}$.

Кольцо называется ***ассоциативным***, *если умножение в нем ассоциативно, т. е.*

R.A: $a(bc)=(ab)c$ *для любых* $\{a, b, c\}\subset \boldsymbol{K}$.

Кольцо $\boldsymbol{K}$ *называется* ***кольцом с единицей***, *если выполняется условие:*

R.E: $\exists e\in \boldsymbol{K} \mid \forall a\in \boldsymbol{K} \Rightarrow ae=ea=a$.

Кольцо $\boldsymbol{K}$ *называется* ***кольцом с делением***, *если оно является кольцом с единицей и выполняется условие:*

R.I: $(\forall a\in \boldsymbol{K} \mid a\neq 0)\, \exists a'\in \boldsymbol{K} \mid aa'=a'a=e$,

при этом элемент a' *называется* ***обратным к a.***

Очевидно, если кольцо имеет единицу, то она единственна, так как $e' \overset{?}{=} e'e=e$ для любого элемента $e'\in \boldsymbol{K}$, удовлетворяющего аксиоме R.E. ♦

Свойство 64.3. *В кольце с делением для всякого ненулевого элемента обратный ему единствен.*

Доказательство. По существу, аксиомы R.E, R.D и R.A на множестве $\boldsymbol{K}\setminus\{0\}$ задают структуру группы. ♦

В группе всякий элемент имеет единственный ему обратный (свойство 24.2). ■

Кольца **R**, **Q**, **Z**, и $m\boldsymbol{Z}$, упомянутые выше, обладают свойствами ассоциативности и коммутативности, все они, за исключением последнего, имеют единицу, а **R** и **Q** к тому же являются кольцами с делением. ♦

Пример 64.1. Структуру ассоциативного, некоммутативного кольца имеет полная линейная алгебра $\langle \boldsymbol{gl}(n)\ +, \cdot\rangle$ относительно сложения и умножения матриц. Это кольцо с единицей (аксиоме R.E удовлетворяет единичная матрица). (См. свойства $gl.1 - gl.15$ § 19). ♦

$\langle \boldsymbol{gl}(n), +, \cdot\rangle$ не является кольцом с делением. ♦

Пример 64.2. На множестве $\boldsymbol{End}(V)$ всех эндоморфизмов векторного пространства V сложением ($\boxed{+}$) и композицией ($\circ$) эндоморфизмов задается структура кольца $\langle \boldsymbol{End}(V), \boxed{+}, \circ\rangle$, которое $\overline{\text{? не ?}}$ ассоциативно, $\overline{\text{? не ?}}$ некоммутативно, $\overline{\text{? не ?}}$ имеет единицы (см. свойства E.1—E.15, § 60), $\overline{\text{? не ?}}$ является кольцом с делением. ◆

Пример 64.3. На множестве $\mathcal{F}[D]$ функций от одной переменной с общей областью определения (см. пример 34.8) структура кольца определяется операциями:

$$(f\,[+]\,g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(f\odot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Здесь $\odot$ — поточечное умножение функций. (См. пример 61.2).

Аксиомы R.1 — R.4 кольца в точности совпадают с первыми четырьмя аксиомами векторного пространства (см. определение 33.1) и обсуждались при введении на множестве $\mathcal{F}[D]$ структуры векторного пространства (см. пример 34.8). Напомним, что нулем (нейтральным элементом относительно операции сложения) является *нулевая функция:* $\theta(x)\equiv 0$ при любом $x\in D$, а противоположной к $f(x)$ — функция $(-f)(x)=-f(x)$ при всех $x\in D$.

Выполнимость аксиом дистрибутивности операции сложения относительно умножения в $\mathcal{F}[D]$

R.5: $f\odot(g\,[+]\,h)=f\odot g\,[+]\,f\odot h$ и R.6 $(g\,[+]\,h)\odot f=g\odot f\,[+]\,h\odot f$ будет доказана, если установим для всех $x\in D$ равенства:

$$(f\odot(g\,[+]\,h))(x)=((f\odot g)\,[+]\,(f\odot h))(x)$$

и

$$((g\,[+]\,h)\odot f)(x)=((g\odot f)\,[+]\,(h\odot f))(x)$$

(почему? ◆). Остановимся на первом из них, поскольку второе доказывается совершенно аналогично.

$$(f\odot(g\,[+]\,h))(x)\overset{?}{=}f(x)(g\,[+]\,h)(x)\overset{?}{=}f(x)\,g(x)+f(x)\,h(x)=$$
$$=(f\odot g)(x)+(f\odot h)(x)=(f\odot g\,[+]\,f\odot h)(x).$$

Выполнимость условий ассоциативности и коммутативности также следует из определения равенства отображений (определение 8.1) и законов дистрибутивности в кольце действительных чисел $\langle \mathbf{R}, +, \cdot\rangle$. ◆

$\langle \mathcal{F}[(D], [+], \odot\rangle$ является кольцом с единицей: $e(x)=1$ при всех $x\in D$, однако, не является кольцом с делением (см. пример 61.2). ◆

Пример 64.4. Примером кольца, состоящего из конечного числа элементов *(конечного кольца)*, является кольцо классов вычетов $\langle Z_m, \boxed{\oplus}, \boxed{\odot}\rangle$ (см. примеры 15.4, 16.2, определения 15.2, 16.2).

Напоминание.

Определение 15.2. *Число x называется* ***сравнимым с y по модулю m*** *или* ***вычетом y по модулю m****, если* $\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}_4(m)$.

Определение 16.2. *Класс эквивалентности целого числа по отношению сравнения по модулю m называется* ***классом вычетов по модулю m***.

Сравнимость числа x с числом y по модулю m обозначается $x \equiv y \pmod m$, а класс вычетов числа a по модулю m обозначается $a \pmod m$.

Операции сложения и умножения на множестве классов вычетов $\mathbf{Z}_m$ вводятся следующим образом:

$$a \pmod m \boxed{\oplus} b \pmod m = (a+b) \pmod m$$

и

$$a \pmod m \boxed{\odot} b \pmod m = (ab) \pmod m.$$

Задача 64.1.2. Докажите, что $\langle \mathbf{Z}_m, \boxed{\oplus}, \boxed{\odot}\rangle$ — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей.

Доказательство сводится к проверке выполнимости аксиом кольца для любых элементов

$$\{a \pmod m,\ b \pmod m,\ c \pmod m\} \subset \mathbf{Z}_m.$$

1. Аксиома коммутативности R.1 сложения:

$$\begin{array}{ccc} a \pmod m \boxed{\oplus} b \pmod m & = & b \pmod m \boxed{\oplus} a \pmod m. \\ \Big\|\text{def} & & \Big\|\text{def} \\ (a+b) \pmod m & \overset{?}{=} & (b+a) \pmod m. \end{array}$$

2. Выполнимость аксиомы ассоциативности R.2 сложения:

$$(a \pmod m \boxed{\oplus} b \pmod m) \boxed{\oplus} c \pmod m =$$
$$= a \pmod m \boxed{\oplus} (b \pmod m \boxed{\oplus} c \pmod m)$$

вытекает из определения сложения классов вычетов и ассоциативности сложения в кольце $\langle \mathbf{R}, +, \cdot\rangle$, а именно: указанные выше классы вычетов, как классы эквивалентности, совпадают с классом элемента $(a+b+c)$. ◆

3. Нулем (аксиома R.3) относительно операции $\boxed{\oplus}$ является класс вычетов нуля — $0 \pmod m$, в чем несложно убедиться, так как $a \pmod m \boxed{\oplus} 0 \pmod m \overset{\text{def}}{=} (a+0) \pmod m = a \pmod m$.

4. Класс вычетов, противоположный $a \pmod m$ естественно определить, как $(m-a) \pmod m$ (аксиома R.4). ◆

5—6. Дистрибутивность операций на $\mathbf{Z}_m$ (аксиомы R.5, R.6) следует из дистрибутивности сложения относительно умножения в кольце $\langle Z, +, \cdot \rangle$, например:

$$a \pmod m \boxed{\odot} (b \pmod m \boxed{\oplus} c \pmod m) \stackrel{?}{=}$$

$$= a \pmod m \boxed{\odot} (b+c) \pmod m \stackrel{?}{=} \underline{(a(b+c)) \pmod m}.$$

С другой стороны:

$$(a \pmod m \boxed{\odot} b \pmod m) \boxed{\oplus} (a \pmod m \boxed{\odot} c \pmod m) \stackrel{?}{=}$$

$$= (ab \pmod m) \boxed{\oplus} (ac \pmod m) \stackrel{?}{=} \underline{(a(b+c)) \pmod m}.$$

Что и показывает выполнимость условия аксиомы R.5 в $\mathbf{Z}_m$.

7—8. Аналогично устанавливается коммутативность и ассоциативность умножения в кольце $\langle \mathbf{Z}_m, \boxed{\oplus}, \boxed{\odot} \rangle$:

RC: $a \pmod m \boxed{\odot} b \pmod m \stackrel{?}{=} b \pmod m \boxed{\odot} a \pmod m$.

RA: $a \pmod m \boxed{\odot} (b \pmod m \boxed{\odot} c \pmod m) \stackrel{?}{=}$

$$= (a \pmod m \boxed{\odot} b \pmod m) \boxed{\odot} c \pmod m.$$

9. Единицей кольца $\langle \mathbf{Z}_m, \boxed{\oplus}, \boxed{\odot} \rangle$, очевидно, является класс вычетов 1, так как

$$a \pmod m \boxed{\odot} 1 \pmod m \stackrel{?}{=} (a1) \pmod m = (1a) \pmod m = a \pmod m.$$

П р и м е р 64.5. Одним из важнейших примеров кольца является *кольцо комплексных чисел* $\mathbf{C}$.

О п р е д е л е н и е 64.3. *Элемент декартова квадрата множества действительных чисел* $\mathbf{R}^2$ *будем обозначать*

$$z = x + yi \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, y \rangle.$$

и называть ***комплексным числом****, при этом число x называется его* ***действительной частью****, число y его* ***мнимой частью****, а i* ***мнимой единицей.***

Они обозначаются: $x = \operatorname{Re} z$, и, соответственно, $y = \operatorname{Im} z$. (Начальные буквы слов позднелатинского происхождения: realis — вещественный, настоящий и imago — образ, подобие).

Если $\operatorname{Re} z \neq 0$, то комплексное число z называется ***существенно комплексным***, если же $\operatorname{Re} z = 0$ — ***чисто мнимым.***

Комплексные числа вида $x+yi$ и $x-yi$ называются ***сопряженными***. Число, сопряженное к комплексному числу z, обозначается $\overline{z}$.

Два комплексных числа по определению считаются равными тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, т. е.

$$x+yi=u+vi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle x,\ y\rangle=\langle u,\ v\rangle.$$

Вместо $x+0i$ и $0+yi$ принято писать, соответственно, x и yi, в частности, $0+0i$ заменяется на 0.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$.

Зададим на множестве комплексных чисел $\mathbf{C}$ операции ***сложения*** и ***умножения*** следующим образом:
для любых $\{a,\ b,\ c,\ d\}\subset R$

$$(a+bi)\oplus(c+di)\overset{\text{def}}{=\!=}(a+c)+(b+d)\,i, \qquad (64.\oplus)$$

$$(a+bi)\odot(c+di)\overset{\text{def}}{=\!=}(ac-bd)+(ad+bc)\,i. \qquad (64.\odot)$$

По существу тем самым заданы два отображения: $\oplus:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ и $\odot:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$, где через $z_1\oplus z_2$ и $z_1\odot z_2$ обозначены образы произвольного кортежа $\langle z_1,\ z_2\rangle\in\mathbf{C}^2$ при отображениях $\oplus$ и, соответственно, $\odot$.

Выполнимость аксиом аддитивной группы кольца R.1 — R.4 для комплексных чисел очевидна и вытекает из свойств действительных чисел. Отметим, что нулевым элементом в $\mathbf{C}$ является число $0+0i$, т. е. 0, а противоположным к $x+yi$ число

$$-x-yi\overset{\text{des}}{=\!=}(-x)+(-y)\,i.$$

Можно проверить, что $(0+1i)\odot(0+1i)=-1+0i=-1$, это равенство принято записывать в форме: $i^2=i\odot i=-1$.

Сложение в множестве комплексных чисел обладает свойством дистрибутивности относительно умножения (аксиомы R.5, R.6), так первое из этих условий принимает вид: для любых $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}\subset\mathbf{C}$

$$z_1\odot(z_2\oplus z_3)\overset{?}{=}z_1\odot z_2\oplus z_1\odot z_3.$$

Т. е. для любых $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}\subset\mathbf{R}^6$

$$(a+bi)\odot((c+di)\oplus(e+fi))\overset{?}{=}(a+bi)\odot(c+di)\oplus(a+bi)\odot(e+fi).$$

Рассмотрим левую часть этого условия:

$$(a+bi)\odot((c+di)\oplus(e+fi)) \underset{\oplus}{\overset{\text{def}}{=}} (a+bi)\odot((c+e)+(d+f)\,i) \underset{\odot}{\overset{\text{def}}{=}}$$
$$\underline{=(a\,(c+e)-b\,(d+f))+(a\,(d+f)+b\,(c+e))\,i.}$$

Его правая часть:

$$(a+bi)\odot(c+di)\oplus(a+bi)\odot(e+fi) \underset{\odot}{\overset{\text{def}}{=}}$$
$$=((ac-bd)+(ad+bc)\,i)\oplus((ae-bf)+(af+be)\,i) \underset{\oplus}{\overset{\text{def}}{=}}$$
$$=((ac-bd)+(ae-bf))+((ad+bc)+(af+be))\,i \overset{?}{=}$$
$$\underline{=(a\,(c+e)-b\,(d+f))+(a\,(d+f)+b\,(c+e))\,i.}$$

Из равенства этих представлений комплексных чисел $z_1\odot(z_2\oplus z_3)$ и $z_1\odot z_2\oplus z_1\odot z_3$ и следует выполнимость условия дистрибутивности R.5.

Аналогичным способом проверяется, что умножение (64.$\odot$) коммутативно и ассоциативно. Очевидно, что аксиоме R.E удовлетворяет число $1 \overset{\text{def}}{=} 1+0i$:

$$(a+bi)\odot 1 \overset{\text{def}}{=} (a+bi)\odot(1+0i) \underset{\otimes}{\overset{\text{def}}{=}} (a1-b0)+(a0+b1)\,i=a+bi.$$

Таким образом, $\langle \mathbf{C},\ \oplus,\ \odot \rangle$ — коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей, оно является кольцом с делением. Несложно проверить, что число, обратное ненулевому комплексному числу $z=a+bi$, есть

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i. \qquad \blacklozenge$$

Чтобы упростить запись, в дальнейшем для обозначений операций в кольце $\mathbf{C}$, будем использовать принятые для действительных чисел обозначения: $+$ и $\cdot$, опуская при необходимости знак умножения $\cdot$

Комплексные числа важны как интересный пример кольца и *поля* (о котором речь пойдет ниже).

Изучению комплексных чисел, их более глубоким свойствам и приложениям в дальнейшем будет посвящено несколько лекций. В частности, уже можно заметить, что, по существу, структура комплексных чисел вводится на двумерном векторном пространстве над полем действительных чисел.

Заметим, что в форме комплексного числа вида $a+0i$ записываются действительные числа. Поэтому можно сказать, что кольцо $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$ вложено в некотором смысле в кольцо $\langle \mathbf{C}, +, \cdot \rangle$: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, и представляет собой пример *подкольца* кольца $\mathbf{C}$.

Теперь если рассматривать умножение только действительных чисел на элементы $\mathbf{C}$: $\cdot = \odot|_{\mathbf{R}}$, то несложно убедиться в том, что аксиомы кольца RE, RA, R.6, R.5 и RC обеспечивают выполнимость аксиом векторного пространства V.5—V.8, а аксиоматика аддитивной группы кольца, как отмечалось выше, в точности совпадает с аксиомами V.1—V.4 векторного пространства. ♦

$\langle \mathbf{C}, \oplus, \odot \rangle$ — двумерно, как векторное пространство над полем действительных чисел: базис в нем образуют «векторы» — комплексные числа $1 \overset{\text{def}}{=} 1+0i$ и $i \overset{\text{def}}{=} 0+1i$ (См. определение 41.1). ♦

Итогом предыдущих рассуждений является следующее утверждение.

Утверждение 64.1. $\langle \mathbf{C}, \oplus, \cdot \rangle$ — *двумерное векторное пространство над полем действительных чисел.*

Аккуратной проверкой условий аксиом можно установить, что комплексные числа представляют собой и пример линейной алгебры.

Утверждение 64.2. $\langle \mathbf{C}, \cdot, \oplus, \odot \rangle$ — *двумерная линейная алгебра над полем действительных чисел, ассоциативная, коммутативная с единицей и делением.*

В лекциях 8 и 9 упоминалось, сколь важным в развитии математики оказалось открытие Грассманом кватернионов.

Пример 64.6. Кольцо кватернионов.

Множество всех кватернионов обозначается $\mathbf{H}$.

Кватернионы вводятся на множестве $\mathbf{R}^4$.

Определение 64.4. ***Кватернионами*** *называются выражения вида $a+bi+cj+dk$, где $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R}$.*

Операции на множестве кватернионов вводятся следующим образом: для любых $\{a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2\} \subset \mathbf{R}$:

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k) \oplus (a_2+b_2i+c_2j+d_2k) \overset{\text{def}}{=} \\ = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i+(c_1+c_2)\,j+(d_1+d_2)\,k,$$

$$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k) \odot (a_2+b_2i+c_2j+d_2k) \overset{\text{def}}{=} \\ = (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\,i+ \\ +(a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2)\,j+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)\,k.$$

Два кватерниона $a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ и $a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ по определению считаются равными тогда и только тогда, когда $\langle a_1, b_1, c_1, d_1 \rangle = \langle a_2, b_2, c_2, d_2 \rangle$.

$\langle \mathbf{H}, \oplus, \odot \rangle$ — ассоциативное, некоммутативное кольцо с единицей и делением, кроме того оно имеет структуру векторного пространства и, как вещественное векторное пространство, четырехмерно. Можно показать, что $\langle \mathbf{H}, \cdot, \oplus, \odot \rangle$ — ассоциативная, некоммутативная линейная алгебра с единицей. Причем умножение действительных чисел на кватернионы вводится как в предыдущем примере ($\cdot = \odot|_{\mathbf{R}}$). ♦

Перейдя к обозначению алгебраических операций, упрощающих запись: $+$, $\cdot$, (подобно тому, как это было сделано для комплексных чисел), из закона умножения получим соотношения:

$$ij = k = -ji, \ jk = i = -kj, \ ki = j = -ik,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

(где $i^2 = i \cdot i$, $j^2 = j \cdot j$, $k^2 = k \cdot k$).

Аналогично предыдущему примеру, всякое действительное число a может быть отождествлено с кватернионом вида $a + 0i + 0j + 0k$, т. е. $a \overset{\text{def}}{=} a + 0i + 0j + 0k$, а комплексное число: $a + bi \overset{\text{def}}{=} a + bi + 0j + 0k$. Тем самым в кольце кватернионов имеем примеры *подколец:* $\mathbf{R} \subset \mathbf{H}$ и $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$.

Определение 64.5. *Подмножество K' кольца $\langle K, +, \cdot \rangle$ называется его* ***подкольцом****, если K' замкнуто относительно операций кольца K, т. е. для любых $\{x, y\} \subset K'$.*

SR.1: $x + y \in K'$,
SR.2: $x - y \in K'$,
SR.3: $x \cdot y \in K'$.

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 64.3. *Всякое подкольцо является кольцом.*

Задание 64.1. Подумайте, если кольцо $\langle K, +, \cdot \rangle$ — коммутативно, ассоциативно, имеет единицу или кольцо с делением, обладает ли этими свойствами его любое подкольцо?

Оказывается, имеет место довольно интересный и неожиданный результат (см. также теорему 61.1):

Теорема (Фробениуса) 64.1. *Существуют только три конечномерных ассоциативных алгебры с делением над полем действительных чисел:* **R**, **C** *и* **H**.

Определение 64.6. *Коммутативное кольцо с делением, содержащее не менее двух элементов, называется* ***полем****.*
Если $\langle \mathbf{F}, +, \cdot \rangle$ — поле, то $\langle \mathbf{F}, + \rangle$ называется его ***аддитивной подгруппой****, а $\langle \mathbf{F} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ — его* ***мультипликативной подгруппой.*** *Нейтральный элемент аддитивной подгруппы поля называется* ***нулем поля****, а нейтральный элемент его мультипликативной подгруппы —* ***единицей поля****.*

Нуль и единица поля обозначаются 0 и, соответственно, 1.

Определение поля может быть дано независимо от кольца. Оно заключается в определении на множестве F, состоящем не менее чем из двух элементов, двух операций (отображений $\mathbf{F}^2 \to \mathbf{F}$): сложения (+) и умножения (·), удовлетворяющим свойствам (аксиомам поля): для любых $\{a, b, c\} \subset \mathbf{F}$ выполняются условия:

F.1: $a+b=b+a$.
F.2: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
F.3: $\exists 0 \in F \mid a+0=a$.
F.4: $\forall a \in F \, \exists (-a) \in F \mid a+(-a)=0$.
F.5: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$.
F.6: $a \cdot b=b \cdot a$.
F.7: $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$.
F.8: $\exists 1 \in \mathbf{F} \mid 1 \cdot a=a \cdot 1=a$.
F.9: $\forall a \in \mathbf{F} \setminus \{0\} \, \exists a' \in \mathbf{F} \mid a \cdot a'=a' \cdot a=1$.

Из рассмотренных выше примеров колец важнейшими примерами полей являются поле действительных чисел $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$ и поле комплексных чисел $\langle \mathbf{C}, +, \cdot \rangle$, причем **R** является ***подполем*** **C**.

Простейшие свойства поля приведем, в основном, без доказательства, поскольку они непосредственно следуют из свойств группы (аддитивной и мультипликативной подгрупп поля), которые уже были доказаны в § 24*.

Простейшие свойства поля

Для любых элементов поля $\{a, b, c\} \subset \mathbf{F}$:

Свойство 64.4. *Нулевой элемент поля единствен.*

Свойство 64.5. *Единица поля единственна.*

Т. е. существует только по одному элементу поля, удовлетворяющему аксиоме F.3 или, соответственно, F.8.

Свойство 64.6. *Для любого ненулевого элемента поля обратный элемент единствен.*

Свойство 64.7. *В поле* $0 \neq 1$.

Так как равенство этих элементов в силу аксиоматики поля ведет к одноэлементному множеству, что противоречит определению поля. ◆

Свойство 64.8. $0a=a0=0$.

Свойство 64.9. *Если* $ab=1$, *то* $a \neq 0$ *и* $b=a'$.

Доказательство. $a \neq 0$, *так как при* $a=0$ *будем иметь* $0 \stackrel{?}{=} 1$. Тогда $b \stackrel{?}{=} eb \stackrel{?}{=} (a'a)\,b \stackrel{?}{=} a'\,(ab) \stackrel{?}{=} a'1 \stackrel{?}{=} a'$. ■

Свойство 64.10. *Если* $ac=bc$ *и* $c \neq 0$, *то* $a=b$.

Свойство 64.11. $ab=0$, *тогда и только тогда, когда* $a=0$ или $b=0$.

Свойство 64.12. *Если* $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *то* $(ab)' = b'a'$.

Свойство 64.13. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

Следствие 64.2. $(-a)(-b) = ab$.

Определение 64.7. *Подкольцо* $\mathbf{F}'$ *поля* $\langle \mathbf{F}, +, \cdot \rangle$ *называется его* ***подполем****, если всякий его ненулевой элемент обратим.*

Это условие означает, что в подкольце $\mathbf{F}'$ требуется выполнение аксиомы F.9.

Заметим, что не всякое подкольцо поля является его подполем. Так кольцо целых чисел является подкольцом в поле действительных чисел (замкнуто относительно всех операций в $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$), но его подполем не является. Однако кольцо рациональных чисел $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ есть подполе поля $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$.

Замечание 64.2. Все определения понятий, вводившихся выше и основанных на понятии действительного числа (матрица, векторное пространство, линейная зависимость, размерность, линейность отображения, системы линейных уравнений и т. п.), естественным образом переносятся на комплексные числа и в этом случае также имеют место их основные (доказанные ранее на основе действительных чисел) свойства. В дальнейшем, хотя основным предметом изучения, если не оговорено особо, будут вещественные пространства и конструкции (т. е. построения на основе действительных чисел), всякий раз будет оговариваться, если результат не обобщаем на комплексные числа.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

— Здорово, Пух,— сказал Кролик.
— Здорово, Кролик,— сказал Пух сонно.
— Это ты сам додумался?
— Да, вроде бы, как сам,— отвечал Пух.— Не то, чтобы я умел думать,— продолжал он скромно,— ты ведь знаешь, но иногда на меня это находит.

А. А. Милн. «Винни Пух и все-все-все».

Заметим, что термины «алгебра» и «линейная алгебра» в математике имеют несколько значений. Прежде всего, алгебра — это часть математики, принадлежащая наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. В современном понимании алгебра может быть определена как наука о системах объектов различной природы, для которых установлены операции, по своим свойствам сходные со сложением и умножением действительных чисел. Такие операции называются алгеб раическими. Алгебра классифицирует системы объектов с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам и изучает различные задачи, возникающие в этих системах.

Линейная алгебра является классическим и одним из древнейших разделов алгебры. Подробнее об истории и вопросах, которыми занимается линейная алгебра, говорилось в исторической справке лекции 10. Добавим к этому, что помимо теории линейных уравнений, этот раздел алгебры занимается теорией векторных пространств, линейных, билинейных (и вообще, полилинейных) отображений и форм (в частности, квадратичными формами).

Вместе с тем под линейной алгеброй понимается и определенная математическая структура (см. определение 61.1), которую часто называют просто алгеброй: на векторном пространстве определяется дополнительная алгебраическая операция, обычно называемая умножением элементов (иногда внешним умножением), связанная с операциями векторного пространства законами дистрибутивности и ассоциативности.

Мы обсудим, как в алгебре появилось само понятие линейной алгебры, как алгебраической структуры и, в частности, алгебры линейных операторов (или эндоморфизмов векторного пространства), и какое влияние оно оказало на линейную алгебру, как науку, а значит, и алгебру в целом.

В середине XIX в. к идее линейной алгебры, как математической структуры, близко подошел А. Кэли в своих работах по теории матриц. Как мы знаем, квадратные матрицы — один из основных примеров такой алгебры. Был близок к ее понятию в "A Treatise on Algebra" («Трактате по алгебре»), опубликованном в Кэмбридже в 1830-м году, и другой английский математик Г. Пикок (Peacocck George, 1791—1858). Впервые же линейную алгебру (над полем действительных чисел), как специальную математическую структуру, выделил Г. Грассман в своем знаменитом труде "Die Lineale Ausdehnungslehere" («Учение о линейной протяженности») в 1844-м году и, что самое интересное, на непростом примере линейных операторов (эндоморфизмов n-мерного векторного пространства). Что еще удивительнее тем, что довольно сложные обозначения линейных операторов весьма запутывали ситуацию и можно только гадать, каков был ход мыслей этого талантливого математика, позволивший увидеть за хитросплетением обозначений изящество новой алгебраической структуры. Тем более, что внешнее умножение в алгебре линейных операторов Грассмана отличалось от общепринятого ныне в алгебре $\boldsymbol{End}\,(V)$ — их композиции. Однако, с 1850-го по 1860-й г. г. он нашел еще несколько примеров линейных алгебр и таким образом подтвердил содержательность открытой им алгебраической структуры. Казалось бы, она должна была получить право на существование и интерес к ней математиков. Однако, печальная судьба трудов Г. Грассмана известна.

В семидесятых годах XIX в. американские математики, отец и сын Пирсы, изучая квадратные матрицы одного порядка, выделили основные свойства матричных операций (сложения, умножения и умножения на скаляр), относительно которых множество $\boldsymbol{M}(n)$ оставалось замкнутым, как характеристические свойства этого множества и, таким образом, ими была определена алгебра матриц или полная линейная алгебра. Опубликованы результаты этих исследований были несколько позднее: в 1881 г., в работе Ч. Пирса "On the Relativ Forms on the Algebras" («Об относительных формах на алгебрах»).

Идея обобщения понятий линейной алгебры матриц над полем комплексных чисел принадлежит немецкому математику Г. Ганкелю (Hankel Hermann, 1839—1873), у которого эта структура возникла при изучении кватернионов и гиперкомплексных чисел и изложена в его работе "Theorie der complexen Zahlensysteme" («Теория комплексных числовых систем»), опубликованной в Лейпциге в 1867-м году.

Безусловно, среди множества работ в этой области следует отметить работы французского математика Ф. Сервуа (Servois François, 1767—1847), который, по существу, еще в самом начале XIX в. изучал кольцо линейных операторов в пространстве функций, причем сами такие операторы он обозначал вполне современно:

$$Af=\varphi(x)f(x), \qquad Ef=f(x+h), \qquad Ff=F(f(x)).$$

(Кстати, именно Сервуа ввел в математику термины «дистрибутивность» и «ассоциативность»). Значение его работ состоит в том, что в них была непосредственно построена новая система объектов (символов, операторов) со свойствами, близкими к свойствам чисел, но не являющимися таковыми. А появление алгебры (кольца) линейных операторов на векторном пространстве наряду с алгеброй матриц явилось одной из важнейших предпосылок к созданию современной алгебры.

В дальнейшем эти идеи Ф. Сервуа были систематизированы и развиты многими алгебраистами. Среди них стоит упомянуть английского математика Р. Морфи (Murphy Robert). Именно он, как считают многие историки математики, ввел в математический лексикон термин «линейный оператор» в своем труде "First Memoire on the Theory of Analitical Operations" («Первый мемуар по теории аналитических операторов»), опубликованном в Лондоне в 1837-м г. Он описал, именно как линейные операторы, основные операции на пространстве функций: сдвиг, умножение на функцию, сумму (разность) и дифференцирование функции

Причем, исследуя свойства этих линейных операторов, в отличие от Сервуа, Морфи часто «отрывает» их от объектов действия. Т. е. у него уже имели смысл выражения с линейными операторами вроде: A^2+E-F и т. п. (Подобную форму записи он использовал, как правило, в тех случаях, когда рассматривал ряды от операторов). Для его предшественников и многих современников в аналогичных случаях было традиционно и существенно указывать объект, на который действует отображение. Так предыдущая запись требовала бы дополнительных разъяснений: $A(A(f(x)))+E(f(x))-F(f(x))$. Сейчас довольно ясно, что при такой форме изложения нелегко увидеть алгебраическую структуру самого множества отображений, в данном случае — множества $\boldsymbol{End}(\mathscr{F}(\mathbf{R}))$ — эндоморфизмов пространства функций на прямой.

Это, казалось бы, небольшая формализация, сделанная Морфи, и явно не оцененная им самим (поскольку в его работах зачастую соседствуют обе формы записи), оказалась тем толчком в истории математики, который и привел в конце концов к созданию современной абстрактной алгебры. Так как, по существу, именно Р. Морфи впервые в качестве самостоятельного объекта исследования была предложена абстрактная структура символов, свойства которой задавались аксиоматически. Справедливости ради следует отметить, что различные попытки формализации математического языка, а значит, и предтечи абстрактных алгебраических структур, имели место задолго до середины XIX века (см. историческую справку лекции 1), и в той или иной мере осознанно или нет, предпринимались различными математиками, пожалуй, начиная с Лейбница (конец XVII в). Однако, только ко второй половине XIX в. в математике накопилось достаточно фактического материала: проблем и задач различного характера, чтобы стало возможным оперировать абстрактными объектами и структурами, все более и более отрываясь от объектов конкретной природы, породившей их.

Так начался новый этап развития алгебры и математики в целом, который состоит в том, что вопросы необходимого расширения круга задач и подлежащих рассмотрению пространственных форм и количественных отношений становятся предметом сознательного и активного интереса ученых. При этом само развитие математики потребовало выработки приемов и сознательного и планомерного создания новых систем и новых «алгебр» по мере возникновения в них потребности. Первой же в череде этих структур была алгебра линейных операторов векторного (конечномерного) пространства.

Интересно, что значительный вклад в развитие математики в этом направлении внесли физики, точнее, физико-математики или математико-физики, т. е. ученые, работавшие в пограничных областях этих великих наук. Среди них следует отметить английских ученых Дж. Максвелла (Maxwell James Clark, 1831–1879), П. Тэта (Tait Peter Guthrie, 1831-1901), американских — О. Хевисайда, Дж. Гиббса и немца О. Теплица, которые своими многочисленными работами доказали удобство векторного языка для описания различных физических процессов и гибкость операторных методов исследований в этой области. Эта тенденция нашла отражение, например, в фундаментальной работе Хевисайда 1893-го года «On operators in physical mathematics" («Об операторах в физической математике»). В частности, оказалось, что многие процессы в теории электричества и электромагнетизма удобно описываются векторным и операторным языком и, более того, удивительным образом этот язык позволяет получать новые результаты, которые затем подтверждаются физическими экспериментами.

Таким образом, на заре XX века стала рождаться теоретическая физика. Ее alma mater и колыбелью можно назвать теорию линейных операторов. Дальнейшее развитие и удивительно эффективное применение эта теория получила при решении задач квантовой механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Шикин Е. В.*Линейные пространства и отображения.— М.: Изд. МГУ, 1987.— 311 с.
2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.— 296 с.
3. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.— 560 с.
4. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
5. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1980.— 336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.— 512 с.
7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.
8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 496 с.
9. *Мантуров О. В.* Элементы тензорного исчисления.— М.: Просвещение, 1991.— 255 с.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 736 с.
11. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.— 520 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 58°. Линейные операторы

— стр. 55—57, 70—71.
— стр. 110—111.
— стр. 220—222.
[6] — стр. 382—384
[7] — стр. 243—244.

§ 59′. Линейные операторы в двумерном векторном пространстве

§ 60. Алгебра линейных операторов

— стр. 59—60
— стр. 298—301.
— стр. 57—59.
[7] — стр. 244—245
[8] — стр. 466—468

§ 61.* Линейные алгебры

— стр. 298—300.
[8] — стр. 462—468.

§ 62. Изоморфизм линейных алгебр *End* (V^n) и *gl* (n, R)

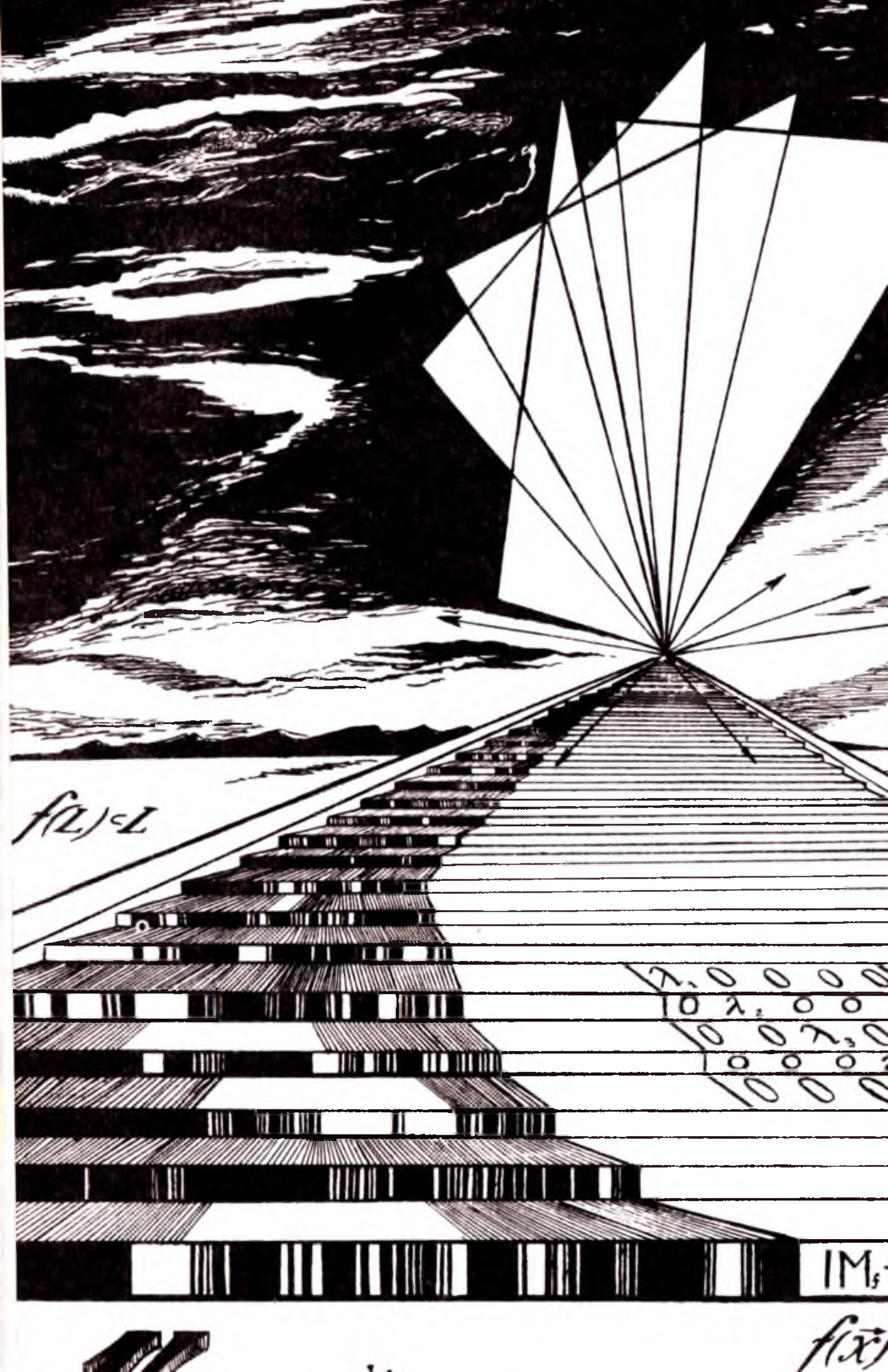
— стр. 301—302.

§ 63. Группа автоморфизмов векторного пространства *Aut* (V^n)

— стр. 60—62.
— стр. 303—306.
[7] — стр. 256—259.
[8] — стр. 156—158.
[9] — стр. 47—51.

§ 64*. Кольца, поля

— стр. 104—107.
стр. 146—148.
стр. 299—300.
[8] — стр. 172—178.
[10] — стр. 20—22.
[11] — стр. 166—167.


f(L) < L

Лекция 14

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

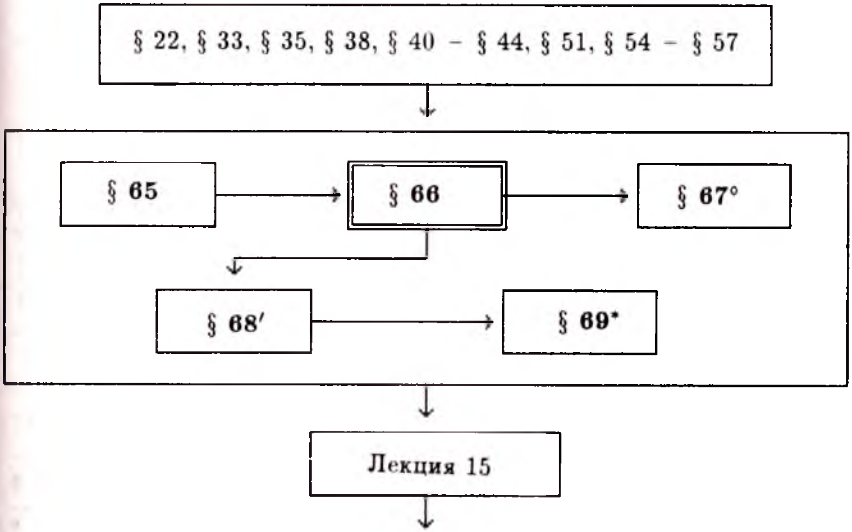
СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 65. Инвариантные подпространства линейных операторов.
§ 66. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.
§ 67°. Алгоритм определения собственных векторов линейного оператора.
§ 68′. Линейные операторы с простым спектром.
§ 69*. Канонический вид матрицы линейного оператора.

Основные понятия: инвариантное подпространство, собственный вектор и собственное значение линейного оператора, характеристический многочлен и характеристическое уравнение, спектр линейного оператора, линейный оператор с простым спектром, диагонализируемый оператор.

Необходимые сведения: линейный оператор, эндоморфизм, матрица эндоморфизма (гомоморфизма), векторное пространство, подпространство векторного пространства, линейно зависимая система векторов, линейно независимая система векторов, базис векторного пространства, линейная оболочка системы векторов, ядро гомоморфизма, дефект и ранг линейного оператора, ранг матрицы, система линейных уравнений, решение системы линейных уравнений, теорема Кронекера-Капелли, корень уравнения, кратность корня уравнения.

Рекомендации: если использовать пособие как лекционный раздаточный материал, то § 67° целесообразно предложить для самостоятельной работы, § 68′ — для практических занятий, § 69* можно опустить, не нарушая общей логики курса, ограничившись знакомством с содержанием его основной теоремы.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств. (§ 49 — § 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов. (§ 54 — § 57).

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов. (§ 58 — § 64).

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов. (§ 65 — § 69).

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства.

§ 65. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 65.1. *Подпространство V' векторного пространства V называется **инвариантным** относительно его эндоморфизма f, если $f(V') \subset V'$.*

Другими словами, V' — инвариантное подпространство, если всякий его вектор $\vec{x}$ отображается в вектор $f(\vec{x})$ также этого подпространства.

Очевидно, относительно тождественного оператора e инвариантны все подпространства векторного пространства, на котором он действует: $e(\vec{x}) = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$. По аналогичным соображениям инварианты относительно центральной симметрии z все подпространства пространства V ($z(\vec{x}) = -\vec{x}$ при любом $\vec{x} \in V$). А нулевой оператор θ (см. определение 52.3) также имеет все подпространства V инвариантными, поскольку в этом случае нулевой вектор $\theta(\vec{x}) = \vec{0} \in V$ — образ любого вектора $\vec{x} \in V$.

Пример 65.1. Инвариантным подпространством линейного оператора проектирования $p_{\langle V', V''\rangle}$ (векторного пространства $V = V' \oplus V''$ на его подпространство V' параллельно подпространству V'') (см. определение 58.3) является подпространство V', так как согласно этому определению, если $\vec{x}' \in V'$, то

$$p_{\langle V', V''\rangle}(\vec{x}') = \vec{x}' \in V'.$$

Подпространство V'' — дополнительное к V', относительно действия $p_{\langle V', V''\rangle}$? не ? инвариантно, так как для любого вектора $\vec{x}'' \in V''$

$$p_{\langle V', V''\rangle}(\vec{x}'') = ? \ \overset{?}{\in} V''.$$

Задание 65.1. Укажите инвариантные подпространства оператора отражения $s_{\langle V', V''\rangle}$ (векторного пространства $V = V' \oplus V''$ относительно его подпространства V' параллельно подпространству V'') (см. определение 58.4).

Заметим, что, согласно этому определению,

$$s_{\langle V', V''\rangle}(\vec{x}') = ?$$

для любого вектора $\vec{x}' \in V'$, что влечет $\overline{\text{? не ?}}$ инвариантность V' относительно действия $s_{\langle V', V''\rangle}$. В свою очередь, для произвольного вектора $\vec{x}'' \in V''$

$$s_{\langle V', V''\rangle}(\vec{x}'') = -\vec{x}'' \overset{?}{\in} V''.$$

Это означает, что подпространство V'' $\overline{\text{? не ?}}$ инвариантно относительно эндоморфизма $s_{\langle V', V''\rangle}$.

Задача 65.1.2. Докажите, что все подпространства векторного пространства инвариантны относительно гомотетии h_k (см. определение 53.2), действующей на этом векторном пространстве.

Указание. Поскольку $h_k(\vec{x}) = k\vec{x}$ для любого вектора $\vec{x} \in V$, то инвариантно любое одномерное подпространство V.

Почему инвариантно любое двумерное подпространство? трехмерное? произвольное подпространство?

Задача 65.1.3. Предыдущие примеры позволяют высказать предположение, что если f — эндоморфизм векторного пространства V имеет инвариантным его подпространство V', то дополнительное к V' подпространство в V также инвариантно относительно действия f — верно ли это?

Указание. Найдется ли такой эндоморфизм, например, $f \in \boldsymbol{End}(\mathscr{V}^2)$, чтобы $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ и $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$? Какие одномерные подпространства инвариантны относительно его действия?

Очевидно, всякий эндоморфизм на векторном пространстве V имеет инвариантные подпространства — несобственные: V и $\{\vec{0}\}$. Естественно задаться вопросом, всякий ли эндоморфизм имеет инвариантными собственные подпространства V (т. е. отличные от V и $\{\vec{0}\}$)?

Утверждение 65.1. *Образ и ядро эндоморфизма f — инвариантные подпространства относительно f.*

Задача 65.1.1. Докажите утверждение 65.1.

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$. Согласно утверждению 57.1 $\operatorname{Im} f$ — подпространство V и

$$\operatorname{Im} f = \{\vec{y} \in V \mid (\exists \vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{y})\},$$

следовательно, $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im} f$ для любого $\vec{x} \in \operatorname{Im} f$. ◆
Т. е. $f(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.

Аналогично, $\operatorname{Ker} f$ — подпространство V (утверждение 57.4):

$$\operatorname{Ker} f \overset{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\},$$

значит, для любого $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ элемент $f(\vec{x}) = \vec{0} \overset{?}{\in} \operatorname{Ker} f$.

Таким образом $\operatorname{Im} f$ и $\operatorname{Ker} f$ — подпространства V, инвариантные относительно эндоморфизма f. ■

Задача 65.2.3. Пусть линейные операторы f и g перестановочны, т. е. $f\circ g = g\circ f$. Выясните, являются ли ядро и образ оператора f подпространствами, инвариантными относительно g.

Доказательство. 1. Пусть $\vec{x}\in \operatorname{Ker} f$, т. е. $f(\vec{x})=\vec{0}$. Рассмотрим $g(\vec{x})$ и

$$f(g(\vec{x}))\overset{?}{=}(f\circ g)(\vec{x})\overset{?}{=}(g\circ f)(\vec{x})\overset{?}{=}g(f(\vec{x}))\overset{?}{=}\vec{0}.$$

Отсюда в силу произвольности выбора вектора $\vec{x}\in \operatorname{Ker} f$ следует, что $g(\vec{x})\in \operatorname{Ker} f$, т. е. подпространство $\operatorname{Ker} f$ инвариантно относительно g.

2. Пусть $\vec{y}\in \operatorname{Im} f$, т. е. найдется $\vec{x}\in V$ такой, что $f(\vec{x})=\vec{y}$. Рассмотрим

$$g(\vec{y})=g(f(\vec{x}))\overset{?}{=}(g\circ f)(\vec{x})\overset{?}{=}(f\circ g)(\vec{x})\overset{?}{=}f(g(\vec{x}))\ \overset{\text{des } g(\vec{x})=\vec{z}}{=\!=\!=\!=}\ f(\vec{z}).$$

Отсюда следует, что $g(\vec{y})\overset{?}{\in} \operatorname{Im} f$, т. е. подпространство $\operatorname{Im} f$? не ? инвариантно относительно g в силу произвольности выбора вектора $\vec{y}\in \operatorname{Im} f$. ■

Утверждение 65.2. *Если V' и V'' — подпространства векторного пространства V, инвариантные относительно линейного оператора f, то подпространства $V'\cap V''$ и $V'+V''$ также инвариантны относительно f.*

Задача 65.2.2. Докажите утверждение 65.2.

Доказательство. Пусть $f\in \boldsymbol{End}(V)$ и для любых $\vec{x}\in V'$ и $\vec{y}\in V''$ векторы $f(\vec{x})\in V'$ и $f(\vec{y})\in V''$.

1. Согласно утверждению 36.4 $V'\cap V''$ — подпространство векторного пространства V. Тогда если $\vec{z}\in V'\cap V''$, то $f(\vec{z})\overset{?}{\in} V'$ и $f(\vec{z})\overset{?}{\in} V''$ и, значит, $f(\vec{z})\in V'\cap V''$. ♦

2. По следствию 36.1 $V'+V''$ — подпространство V. И если вектор $\vec{z}\in V'+V''$, то он разлагается в сумму векторов: $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$ таких, что $\vec{x}\in V'$, а $\vec{y}\in V''$ (см. определение 36.4). Тогда $f(\vec{z})\overset{?}{\in} V'\cap V''$. ♦ ■

Пример 65.2. Рассмотрим вращение двумерного векторного пространства (над полем действительных чисел) на угол $\alpha\neq\pi k$ ($k\in \mathbf{Z}$) (определение 59.1). Несобственные подпространства этого пространства одномерны. Так что, чтобы определить, существуют ли такие инвариантные подпространства относительно r_α, надо выяснить, найдутся ли ненулевые векторы $\vec{x}$, что $r_\alpha(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ при каких-либо λ. ◆

Векторному равенству $r_\alpha(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ соответствует матричное: $M_{r_\alpha}M_{\vec{x}}\overset{?}{=}M_{\lambda\vec{x}}$ или $M_{r_\alpha}M_{\vec{x}}\overset{?}{=}\lambda M_{\vec{x}}$. ◆

Из геометрических соображений (см. § 59, рис. 116) очевидно, что при повороте на угол отличный от πk ни один нулевой вектор не отображается в ему коллинеарный. Это можно также доказать вычислениями: учитывая вид матрицы поворота векторного пространства V^2 на угол α, последнее матричное равенство запишется как:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}. \qquad (65.r)$$

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}-\lambda E\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}(\cos\alpha-\lambda) & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & (\cos\alpha-\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \qquad ◆$$

Приравнивая соответствующие элементы матриц, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(\cos\alpha-\lambda)x^1-\sin\alpha\,x^2=0,\\ \sin\alpha\,x^1+(\cos\alpha-\lambda)x^2=0.\end{cases} \qquad (65.r')$$

Относительно неизвестных x^1 и x^2 это линейная однородная система. Она имеет только нулевое решение, так как определитель:

$$\begin{vmatrix}(\cos\alpha-\lambda) & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & (\cos\alpha-\lambda)\end{vmatrix}= \qquad (65.\lambda)$$

$$=(\cos\alpha-\lambda)^2+\sin^2\alpha=\lambda^2-2\cos\alpha\lambda+1\neq 0$$

при всех действительных λ. Дискриминант этого квадратного трехчлена $D=4(\cos^2\alpha-1)<0$ для $\alpha\neq\pi k$. Следовательно, эндоморфизм r_α — вращение на угол $\alpha\neq\pi k$ двумерного векторного пространства не имеет одномерных инвариантных подпространств.

Тем самым приведен пример эндоморфизма векторного пространства (над полем действительных чисел), не имеющего несобственных инвариантных подпространств и дан ответ на поставленный выше вопрос о существовании у всякого линейного оператора несобственных инвариантных подпространств.

Пример 65.3. Пусть эндоморфизм f координатного векторного пространства V^3 в некотором базисе B задан матрицей:

$$M_f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Докажем, что относительно f инвариантно подпространство $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, где $B=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$.

Заметим, что $\vec{x}\in L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^3\vec{e}_3$ (почему? ◆), и значит, координатный столбец такого вектора имеет вид:

$$M_{\vec{x}}=\begin{pmatrix}x^1\\ 0\\ x^3\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_{f(\vec{x})}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ 0\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?\\ 0\\ ?\end{pmatrix},$$

это означает, что $f(\vec{x})=?\vec{e}_1+0\vec{e}_2+\vec{e}_3\overset{?}{\in}\mathrm{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, и инвариантность подпространства $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ относительно действия f.

Задание 65.2. Имеет ли эндоморфизм f предыдущего примера инвариантные подпространства, отличные от $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$?

Указание. Инвариантны ли подпространства $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_3)$, $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$? Все ли инвариантные подпространства этого эндоморфизма найдены?

В общем случае задача отыскания всех инвариантных подпространств эндоморфизма на произвольном векторном пространстве (даже конечномерном) довольно сложна. Однако, во многих прикладных задачах бывает важным знать, есть ли у того или иного эндоморфизма (линейного оператора) инвариантные подпространства и, если есть, то каковы они.

Важную роль в представлении о том, как действует линейный оператор, играют одномерные инвариантные подпространства, т. е. инвариантные подпространства, которые порождаются одним ненулевым вектором: $L(\vec{a})$. Его инвариантность относительно f означает, что $f(\vec{a})\in L(\vec{a})$, т. е. $f(\vec{a})=?$.

§ 66. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Как отмечено выше (пример 65.2), не всякий эндоморфизм векторного пространства имеет одномерные инвариантные подпространства, но наличие их существенно проясняет характер действия эндоморфизма на векторном пространстве. Поэтому важно знать, существуют ли такие подпространства для данного эндоморфизма и как их найти.

Определение 66.1. *Вектор $\vec{x} \in V$ называется **собственным вектором** линейного оператора $f \in \mathbf{End}(V)$, если он ненулевой и существует такое число λ, что $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.*

*Число λ в этом случае называется **собственным значением** собственного вектора $\vec{x}$ линейного оператора f.*

*Множество всех собственных значений линейного оператора f называется его **спектром**.*

Спектр линейного оператора f обозначается: $\mathrm{Sp}\, f$. (Начальные буквы латинского слова spectrum, которое означает видение, видимое значение.)

Для тождественного оператора e на векторном пространстве V любой **ненулевой** вектор из V является собственным с собственным значением 1. ◆

Спектр этого оператора состоит из одного элемента: $\mathrm{Sp}\, e = \{1\}$. Относительно центральной симметрии z на векторном пространстве V и нулевого оператора θ также все ненулевые векторы этого пространства собственные, а их спектры состоят также из одного элемента: $\mathrm{Sp}\, z = \{?\}$, а $\mathrm{Sp}\, \theta = \{?\}$. ◆

Для гомотетии h_k (см. задача 65.1.2, определение 53.2) на векторном пространстве V спектр $\mathrm{Sp}\, h_k = \{k\}$, и также все ненулевые векторы — собственные, так как $h_k(\vec{x}) = k\vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$.

В примере 65.2 при определении одномерных инвариантных подпространств эндоморфизма r_α, по существу, решалась задача отыскания его собственных векторов. При этом было установлено, что вращение двумерного векторного пространства над полем вещественных чисел на угол отличный от πk не имеет инвариантных одномерных векторных подпространств, а значит и собственных векторов.

Пример 66.1. Если векторное пространство $V = V' \oplus V''$, а $p_{\langle V', V'' \rangle}$ оператор проектирования, то так как произвольный вектор $\vec{x}$ из V разлагается в сумму векторов $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$ с $\vec{x}'\in V'$ и $\vec{x}''\in V''$, и согласно определению

$$p_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}'+\vec{x}'')=\vec{x}', \tag{66.p}$$

то собственным вектором с собственным значением 1 является любой **ненулевой** вектор из V': $P_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}')=\vec{x}'$. А всякий **ненулевой** вектор из V'' — тоже собственный, но с собственным значением равным 0, так как для такого вектора $\vec{x}''$ согласно (66.p)

$$p_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}'')=\vec{0}=0\vec{x}''.$$

И, таким образом, $\operatorname{Sp} p_{\langle V',\ V''\rangle}=\{1,\ 0\}$.

Задание 66.1. Найдите спектр оператора отражения (симметрии) $s_{\langle V',\ V''\rangle}$ векторного пространства $V=V'\oplus V''$ (см. задание 65.1).

Согласно определению 58.4 отражения

$$s_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}'+\vec{x}'')=\vec{x}'-\vec{x}'' \tag{66.s}$$

для любого вектора $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''\in V$ с $\vec{x}'\in V'$ и $\vec{x}''\in V''$. Откуда следует, что $s_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}')=?$ и $s_{\langle V',\ V''\rangle}(\vec{x}'')=?$ для произвольных векторов $\vec{x}\in V'$ и, соответственно, $\vec{x}''\in V''$. Т. е. собственным вектором относительно линейного оператора $s_{\langle V',\ V''\rangle}$ является любой **ненулевой** вектор из V' и $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ является любой **ненулевой** вектор из V''.

$$\operatorname{Sp} s_{\langle V',\ V''\rangle}=\{1,\ -1\}.$$

Пример 66.2. Линейный оператор дифференцирования D на векторном пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ полиномов от одной переменной степени не выше n в качестве собственного вектора имеет любой ненулевой постоянный одночлен: $f_c(x)=c\ (c\neq 0)$. Собственное значение, соответствующее такому собственному вектору, очевидно, равно 0, так как $D(f_c)=0=0f_c$. Причем, столь же очевидно, что других собственных векторов с нулевым собственным значением у оператора дифференцирования на $\mathscr{P}^n[x]$ нет. ◆

Очевидно, что в векторном пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ и даже в $\mathscr{P}[x]$ — пространстве всех многочленов оператор дифференцирования вообще не имеет собственных векторов, отличных от f_c. ◆

Пример 66.3. На векторном пространстве $\mathscr{D}[\boldsymbol{R}]$ дифференцируемых функций одной переменной (см. задача 51.1.2) опера тор дифференцирования D помимо собственных векторов с нулевым собственным значением — f_c, имеет собственные векторы с собственным значением 1 — это экспоненциальные функции вида ce^x с коэффициентом $c \neq 0$. ◆

Пример 66.4. Эндоморфизм f трехмерного векторного пространства примера 65.3 имеет собственными векторами базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$ (см. также задание 65.2), поскольку

$$M_{f(\vec{e}_1)}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{и } M_{f(\vec{e}_3)}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=?,$$

что означает, что $f(\vec{e}_1)=1\vec{e}_1$ и $f(\vec{e}_3)=?\,\vec{e}_3$, т. е. $\vec{e}_1$ — собственный вектор линейного оператора f с собственным значением 1, а $\vec{e}_3$ — его собственный вектор с собственным значением 2.

Можно заметить, что собственными векторами f и с теми же собственными значениями 1 и 2 являются векторы $\lambda\vec{e}_1$ и, соответственно, $\lambda\vec{e}_3$ с ненулевым значением λ. ◆

Однако, несмотря на два найденных собственных направления (все векторы, коллинеарные $\vec{e}_1$ — одно направление и, соответственно, все векторы, коллинеарные $\vec{e}_3$ — второе) остается открытым вопрос о существовании других собственных векторов (направлений) у этого линейного оператора.

Интересно поставить задачу в общем случае: как определить, имеет ли линейный оператор собственные векторы (пример 65.2 показывает, что это имеет место не всегда), а в случае, когда собственные векторы существуют, как отыскать все такие векторы. Однако, прежде чем решать эти проблемы, выясним, каковы общие свойства собственных векторов и собственных значений линейных операторов, вытекающие из их определений.

Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора

Свойство 66.1. *Если $\vec{x}$ — собственный вектор линейного оператора с собственным значением λ, то любой вектор, коллинеарный ему — собственный вектор этого оператора с тем же собственным значением.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$ и $\vec{x}$ — его собственный вектор с собственным значением λ, т. е. $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Возьмем произвольный ненулевой вектор, коллинеарный $\vec{x}$, т. е. $\alpha\vec{x}$ с $\alpha \neq 0$, тогда

$$f(\alpha\vec{x}) \overset{?}{=} \alpha f(\vec{x}) \overset{?}{=} \alpha(\lambda\vec{x}) \overset{?}{=} \lambda(\alpha\vec{x}),$$

это означает, что вектор $\alpha\vec{x}$ — собственный вектор линейного оператора f. ♦

Т. е. наряду с собственным вектором $\vec{x}$ линейного оператора f его собственным вектором является и любой вектор из $L(\vec{x})\backslash\{\vec{0}\}$, а подпространство $L(\vec{x})$ — линейная оболочка вектора $\vec{x}$, инвариантно относительно f. Очевидно и обратное: если линейный оператор имеет инвариантное одномерное векторное подпространство, то он имеет собственный вектор. ♦

Инвариантное одномерное подпространство линейного оператора иногда называют его ***собственным направлением*** (определяемым собственным вектором $\vec{x}$).

Следствие 66.1. *Если λ — собственное значение линейного оператора f, то λ^k — собственное значение f^k.* ♦

Свойство 66.2. *Собственное значение собственного вектора линейного оператора определяется этим вектором однозначно.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$ и $\vec{x}$ — его собственный вектор. Из предположения, что $f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$ и $f(\vec{x}) = \lambda_2\vec{x}$, немедленно следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$ (см. следствие 37.1). ♦ ■

Впрочем, как видно из примеров гомотетии, проектирования и т. д. (см. пример 66.1, задание 66.1), разные и даже неколлинеарные собственные векторы могут иметь равные собственные значения. ♦

Свойство 66.3. *Любая система собственных векторов линейного оператора, собственные значения которых попарно различны, линейно независима.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$, $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k\}$ множество собственных значений f: $\Lambda \subset \operatorname{Sp} f$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots k\}$, $X_k = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_k\} \subset V$ — соответствующая им система собственных векторов линейного оператора f.

Доказательство проведем методом математической индукции.

1. <u>База индукции</u>. Если $k=1$, то X_1 состоит из одного ненулевого вектора и, следовательно, является линейно независимой системой векторов (определение 40.1). ◆

2. <u>Предположение индукции</u>. Предположим, что для любого $m<k$ система векторов X_m линейно независима.

3. <u>Шаг индукции</u>. Покажем, что линейно независима система векторов X_k.

Допустим, что система $X_k=\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \dots\ \vec{x}_k\}$ линейно зависима, т. е. найдется кортеж $\langle\alpha^1,\ \alpha^2,\ \dots\ \alpha^k\rangle\neq\langle 0,\ 0,\ \dots\ 0\rangle$ такой, что

$$\alpha^1\vec{x}_1+\alpha^2\vec{x}_2+\dots+\alpha^k\vec{x}_k=\vec{0}. \qquad (66.x)$$

Подействуем на обе части этого векторного равенства оператором f:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & f(\alpha^1\vec{x}_1+\alpha^2\vec{x}_2+\dots+\alpha^k\vec{x}_k) & & & & = & f(\vec{0}). \\
 & & \Vert^{?} & & & & & \Vert^{?} \\
\alpha^1 f(\vec{x}_1) & + & \alpha^2 f(\vec{x}_2) & + & \dots & + \ \alpha^k f(\vec{x}_k) & = & \vec{0}. \\
\Vert^{?} & & \Vert^{?} & & & \Vert^{?} & & \Vert \\
\alpha^1\lambda_1\vec{x}_1 & + & \alpha^2\lambda_2\vec{x}_2 & + & \dots & + \ \alpha^k\lambda_k\vec{x}_k & = & \vec{0}.
\end{array}$$

Из последнего равенства вычтем равенство (66.x), домноженное на λ_k (не нарушая общности, можем считать $\lambda_k\neq 0$), и получим:

$$\alpha^1(\lambda_1-\lambda_k)\vec{x}_1+\alpha^2(\lambda_2-\lambda_k)\vec{x}_2+\dots+\alpha^{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\vec{x}_{k-1}=\vec{0}.$$

По условию все разности $\lambda_i-\lambda_k\overset{?}{\neq}0$ ($i=1,\ 2,\ \dots\ k-1$) и среди коэффициентов $\alpha^1,\ \alpha^2,\ \dots\ \alpha^{k-1}$ найдется хотя бы один ненулевой (почему? ◆). Значит,

$$\langle\alpha^1(\lambda_1-\lambda_k),\ \alpha^2(\lambda_2-\lambda_k),\ \dots\ \alpha^{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\rangle\neq\langle 0,\ 0,\ \dots\ 0\rangle.$$

Это противоречит предположению индукции — условию линейной независимости системы векторов X_m при любом $m<k$.

Следовательно предположение о линейной зависимости системы векторов $X_k=\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \dots\ \vec{x}_k\}$ неверно, и система, составленная из собственных векторов линейного оператора, собственные значения которых различны, всегда линейно независима. ■

Следствие 66.2. *Разным собственным значениям линейного оператора соответствуют неколлинеарные собственные векторы этого оператора.* ◆

Свойство 66.4. *Любая ненулевая линейная комбинация собственных векторов эндоморфизма с собственным значением λ есть его собственный вектор с тем же собственным значением.*

Задача 66.1.1. Докажите свойство 66.4.

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V)$ и ненулевой вектор $\vec{\boldsymbol{x}} \in V$ является линейной комбинацией некоторого числа собственных векторов f, каждый из которых — собственный с собственным значением λ:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \alpha^1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha^2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{\boldsymbol{a}}_k \,|\, f(\vec{\boldsymbol{a}}_i) = \lambda\vec{\boldsymbol{a}}_i \text{ при всех } i \in \{1,\ 2,\ \ldots\ k\}.$$

Тогда

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}) = f(\alpha^1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha^2\vec{\boldsymbol{x}}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{\boldsymbol{a}}_k) \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \alpha^1 f(\vec{\boldsymbol{a}}_1) + \alpha^2 f(\vec{\boldsymbol{a}}_2) \ldots + \alpha^k f(\vec{\boldsymbol{a}}_k) \stackrel{?}{=} \lambda(\alpha^1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha^2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \ldots + \alpha^k\vec{\boldsymbol{a}}_k) \stackrel{?}{=} \lambda f(\vec{\boldsymbol{x}})$$

$$\text{т. е. } f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \lambda f(\vec{\boldsymbol{x}}).$$ ■

Напомним, что по теореме 36.2 линейная оболочка любого множества векторов (см. определение 36.3) векторного пространства является его подпространством.

Определение 66.2. *Линейная оболочка множества собственных векторов линейного оператора с общим собственным значением называется* ***собственным подпространством линейного оператора***.

Из предыдущего очевидным образом вытекает следствие.

Следствие 66.3. *Все ненулевые векторы собственного подпространства линейного оператора являются его собственными векторами с общим собственным значением.*

Очевидно, что собственные подпространства линейного оператора $f \in \boldsymbol{End}(V)$ с различными собственными значениями общим имеют только нулевой вектор. ◆

Линейный оператор f может иметь, вообще говоря, не одно собственное подпространство с данным собственным значением. Так, например, для оператора проектирования $p_{\langle V',\, V''\rangle}$ собственным подпространством с собственным значением 1 является подпространство V', а также его любое подпространство.

Наибольшее собственное подпространство линейного оператора $f \in \boldsymbol{End}(V)$, соответствующее общему собственному значению λ, обозначается $V_\lambda(f)$, если оператор рассматривается только один, то соответствующее обозначение: V_λ. Так что

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\vec{\boldsymbol{x}} \in V \,|\, f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}\}.$$

Свойство 66.5. *Множество всех собственных векторов линейного оператора $f \in \boldsymbol{End}(V)$ с собственным значением λ совпадает с* $\mathrm{Ker}(f - \lambda e) \backslash \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$.

Т. е. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda e)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\operatorname{Ker}(f-\lambda e)=\{\vec{x}\in V\,|\,(f-\lambda e)(\vec{x})=\vec{0}\}\overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=}\{\vec{x}\in V\,|\,f(\vec{x})-\lambda e(\vec{x})=\vec{0}\}\overset{?}{=}\{\vec{x}\in V\,|\,f(\vec{x})=\lambda\vec{x}\}=V_\lambda. \qquad \blacksquare$$

Свойство 66.6. *Если f — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве, а M_f — его матрица относительно некоторого базиса этого пространства, то вектор $\vec{x}$ является собственным с собственным значением λ относительно оператора f тогда и только тогда, когда координатный столбец этого вектора $M_{\vec{x}}$ — ненулевое решение матричного уравнения:*

$$(M_f-\lambda E)\cdot M_{\vec{x}}=0. \tag{66.1}$$

Доказательство. Пусть $f\in \boldsymbol{End}(V^n)$. По предыдущему свойству множество всех собственных векторов f с собственным значением λ совпадает с $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)\setminus\{\vec{0}\}$.

Таким образом, нас интересуют числа λ и векторы $\vec{x}\in V^n$, удовлетворяющие условиям: $\vec{x}\neq\vec{0}$ и $(f-\lambda e)(\vec{x})=\vec{0}$.

Заметим, что $(f-\lambda e)\overset{?}{\in}\boldsymbol{End}(V^n)$, следовательно, относительно некоторого базиса этого векторного пространства матрица линейного оператора $f-\lambda e$ и координатный столбец вектора удовлетворяют соотношению:

$$\begin{array}{ccccc}
M_{(f-\lambda e)}\,M_{\vec{x}} & & \overset{(53.4)}{=\!=} & & M_{(f-\lambda e)(\vec{x})} \\
\| & & & & \|? \\
M_{(f-\lambda e)}\,M_{\vec{x}} & & = & & M_{\vec{0}}. \\
\|? & & & & \| \\
(M_f-\lambda M_e)\,M_{\vec{x}} & & = & & 0. \\
\| \quad\quad \| & & & & \| \\
(M_f\ -\ \lambda E)\,M_{\vec{x}} & & = & & 0.
\end{array}$$

Таким образом получено матричное условие того, что вектор $\vec{x}$ с координатным столбцом $M_{\vec{x}}$ является собственным вектором линейного оператора f с собственным значением λ, оно состоит в том, что $M_{\vec{x}}$ должен быть ненулевым решением матричного уравнения (66.1). $\blacksquare$

Перейдя к координатной (поэлементной) записи матричного уравнения (66.1), можно получить условие в виде системы линейных уравнений.

Следствие 66.4. *Для того, чтобы вектор $\vec{x}\in V^n$ был собственным вектором с собственным значением λ линейного оператора f, действующего на этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы он был ненулевым и относительно некоторо-*

го базиса в V^n координаты вектора $\vec{x}$ и элементы матрицы оператора f удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} (f_1^1-\lambda)x^1+f_2^1x^2+\ldots+f_n^1x^n=0,\\ f_1^2x^1+(f_2^2-\lambda)x^2+\ldots+f_n^2x^n=0,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ f_1^nx^1+f_2^nx^2+\ldots+(f_n^n-\lambda)x^n=0. \end{cases} \tag{66.2}$$

Чтобы такая система имела ненулевое решение (см. следствие 42.1), матрица этой системы должна быть вырождена:

$$\det(M_f-\lambda E)=0.$$

Отметим, что $\det(M_f-\lambda E)$ — многочлен от λ степени не выше n.

Следствие 66.5. *Число λ — собственное значение линейного оператора f тогда и только тогда, когда матрица $(M_f-\lambda E)$ вырождена.*

Определение 66.3. ***Характеристическим многочленом линейного оператора** f на конечномерном векторном пространстве V^n называется определитель матрицы $(M_f-\lambda E)$, где M_f — матрица f относительно некоторого базиса в V^n. Уравнение*

$$\det(M_f-\lambda E)=0 \tag{66.3}$$

*называется **характеристическим уравнением линейного оператора** f.*

Характеристический многочлен линейного оператора обозначается $\chi(f)$.

Задание 66.2. Найдем характеристическое уравнение линейного оператора f примера 65.3, заданного в некотором базисе матрицей:

$$M_f=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Чтобы получить характеристический многочлен f, найдем матрицу:

$$M_f-\lambda E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&0\\0&1&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&0\\0&-3-\lambda&0\\0&1&2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Откуда характеристический многочлен $\chi(f)$:

$$\det(M_f-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&-3-\lambda&0\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{?}{=}(1-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda),$$

и, соответственно, характеристическое уравнение линейного оператора $f:(1-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)=0$.

Определим, как меняется характеристический многочлен линейного оператора f при переходе к другому базису.

Согласно следствию 54.1 при замене базиса B в векторном пространстве V^n на базис B'

$$M'_f=T^{-1}_{\langle B,\,B'\rangle}M_fT_{\langle B,\,B'\rangle},$$

где M_f — матрица f относительно B, M'_f — его матрица относительно B', а $T_{\langle B,\,B'\rangle}$ — матрица перехода от базиса B к базису B'.

Тогда

$$\det(M'_f-\lambda E)=\det(T^{-1}_{\langle B,\,B'\rangle}M_fT_{\langle B,\,B'\rangle}-\lambda E)\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\det(T^{-1}_{\langle B,\,B'\rangle}(M_f-\lambda E)\,T_{\langle B,\,B'\rangle})\overset{?}{=}$$

$$=\det T^{-1}_{\langle B,\,B'\rangle}\det(M_f-\lambda E)\det T_{\langle B,\,B'\rangle}\overset{?}{=}\det(M_f-\lambda E).$$

Следовательно, характеристический многочлен линейного оператора не меняется при замене базиса. ■

Утверждение 66.1. *Характеристический многочлен линейного оператора инвариантен относительно замены базиса векторного пространства.*

Следствие 66.6. *Характеристическое уравнение линейного оператора f на конечномерном векторном пространстве является инвариантом относительно замены базиса, следовательно, и корни этого уравнения также инвариантны.*

Утверждение 66.2. *Для того, чтобы скаляр λ был собственным значением линейного оператора f, необходимо и достаточно, чтобы он был корнем его характеристического уравнения.*

Доказательство. Пусть $f\in \boldsymbol{End}(V^n)$. Число $\lambda\in \mathbf{Sp}\,f$ тогда и только тогда, когда существует такой ненулевой вектор $\vec{x}$, что $f(\vec{x})=\lambda\vec{x}$. Согласно следствию 66.5 для этого необходимо и достаточно, чтобы координатный столбец этого вектора относительно какого-либо базиса в V^n удовлетворял матричному уравнению (66.1) с данным λ. В силу утверждения 66.2 это имеет место в том и только в том случае, когда λ — корень характеристического уравнения f. ■

Свойство 66.7. *Спектр линейного оператора не зависит от выбора базиса в векторном пространстве.* ◆

Задание 66.3. Найдем спектр линейного оператора f примера 65.3.

В задании 66.1 был найден его характеристический многочлен: $(1-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)=0$. Его корнями, очевидно, являются: -3, 1, 2, так что $\operatorname{Sp} f=\{-3, 1, 2\}$.

По свойству 66.7 линейный оператор f должен иметь три одномерных собственных подпространства (собственных направления). (Сравните с результатами задания 65.2).

Задача 66.1.2—1.3. Найдите спектр линейного оператора дифференцирования D в пространстве $\mathcal{P}^n[x]$ многочленов от одной переменной степени не выше n. (См. задачу 51.1.2, пример 66.2).

В стандартном базисе $B=\langle 1, x, x^2, \dots x^n\rangle$ матрица этого оператора:

$$M_D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0-\lambda & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix}=?$$

Решая его, получим, что $\operatorname{Sp} D=\{?\}$.

Теорема 66.1. *Всякий линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел имеет хотя бы один собственный вектор.*

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры всякий многочлен над полем комплексных чисел (т. е. все его коэффициенты — комплексные числа) имеет хотя бы один корень в поле комплексных чисел.

В силу утверждения 66.2 такой корень характеристического уравнения f есть собственное значение линейного оператора f. А тогда по свойству 66.5 найдется собственный вектор с собственным значением λ. ■

Замечание 66.1. Из основной теоремы алгебры следует, что уравнение нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень, поэтому из предыдущей теоремы вытекает, что линейный оператор на нечетномерном векторном пространстве над полем действительных чисел имеет хотя бы один собственный вектор (см. пример 65.3).

В четномерном векторном пространстве над полем действительных чисел дело обстоит несколько иначе: линейный оператор может иметь, а может и не иметь собственных векторов. Так, например, оператор отображения $s_{(\vec{e}', \vec{e}'')}$ в двумерном векторном пространстве (см. задание 66.1) имеет спектр $Sp=\{-1, 1\}$, а собственными векторами: $\vec{e}'$ (с собственным значением 1) и $\vec{e}''$ (с собственным значением -1). Т. е. $V_1(s)=L(\vec{e}')$, $V_{-1}(s)=L(\vec{e}'')$.

А оператор r_α вращения на угол $\alpha\neq\pi k$ пространства V^2 над полем действительных чисел не имеет собственных векторов, так как его характеристическое уравнение не имеет действительных корней (см. пример 65.2). Однако, если рассматривать V^2, как двумерное векторное пространство над полем комплексных чисел, то характеристическое уравнение оператора вращения: $\lambda^2-2\cos\alpha\lambda+1=0$ имеет два комплексных корня — числа: $\lambda_1=\cos\alpha-\sin\alpha\, i$ и $\lambda_2=\cos\alpha+\sin\alpha\, i$, а значит, согласно теореме 66.1, r_α имеет хотя бы один собственный вектор. Можно показать, что в этом случае у линейного оператора r_α два собственных одномерных пространства.

Теорема 66.2. *Всякий линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над полем действительных чисел имеет инвариантное подпространство размерности 1 или 2.*

Доказательство. Если $f\in \boldsymbol{End}(V^n)$ и V^n — векторное пространство над полем действительных чисел, то по следствию 66.4 характеристическое уравнение этого линейного оператора f имеет степень n, причем все его коэффициенты действительные числа. Согласно основной теореме алгебры такое уравнение имеет хотя бы один корень.

1. Пусть корень характеристического уравнения — действительное число: $\lambda\in\mathbf{R}$. Тогда матричное уравнение (66.1) имеет ненулевое решение $M_x\in\boldsymbol{M}(n\times 1, \mathbf{R})$ (следствие 66.4), причем все его коэффициенты — действительные числа (почему? ◆), а оператор f имеет собственный вектор $\vec{x}$, координатный столбец которого M_x (свойство 66.6), и значит, f имеет одномерное инвариантное подпространство. ◆

2. Пусть корень характеристического уравнения — комплексное число: $\lambda=\alpha+\beta i\in\mathbf{C}$, причем $\beta\neq0$.

1) Тогда матричное уравнение (66.1) также имеет ненулевое решение M_x (следствие 66.4), а оператор f — собственным вектором — $\vec{x}$, координатный столбец которого M_x, однако, его элементы — комплексные числа: $M_x\in\boldsymbol{M}(n\times 1, \mathbf{C})$. ◆

$$M_{\vec{x}}=\begin{pmatrix} u^1+v^1i \\ u^2+v^2i \\ \vdots \\ u^n+v^ni \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}=M_{\vec{u}}+iM_{\vec{v}}\in \boldsymbol{M}(n\times 1,\ \boldsymbol{C}),$$

причем элементы $M_{\vec{u}}$, $M_{\vec{v}}$ — вещественны: $\{M_{\vec{u}},\ M_{\vec{v}}\}\in \boldsymbol{M}(n\times 1,\ \mathbf{R})$.

2) Подставляя $M_{\vec{x}}=M_{\vec{u}}+iM_{\vec{v}}$ и $\lambda=\alpha+\beta i$ в матричное уравнение (66.1), получим:

$$(M_f-(\alpha+\beta i)E)\cdot(M_{\vec{u}}+iM_{\vec{v}})=0.$$

Выделим в этом соотношении действительную и мнимую части:

$$(M_f\cdot M_{\vec{u}}-\alpha M_{\vec{u}}+\beta M_{\vec{v}})+(M_f\cdot M_{\vec{v}}-\beta M_{\vec{u}}-\alpha M_{\vec{v}})=0+i0.$$

(По условию матрица M_f состоит из действительных элементов: $M_f\in M(n,\ \mathbf{R})$ ◆).

На основании определения равенства комплексных чисел из предыдущего получим систему матричных уравнений, все элементы которой действительные числа:

$$\begin{cases} M_f\cdot M_{\vec{u}}-\alpha M_{\vec{u}}+\beta M_{\vec{v}}=0, \\ M_f\cdot M_{\vec{v}}-\beta M_{\vec{u}}-\alpha M_{\vec{v}}=0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} M_f\cdot M_{\vec{u}}=\alpha M_{\vec{u}}-\beta M_{\vec{v}}, \\ M_f\cdot M_{\vec{v}}=\beta M_{\vec{u}}+\alpha M_{\vec{v}}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M_{f(\vec{u})}=\alpha M_{\vec{u}}-\beta M_{\vec{v}}, \\ M_{f(\vec{v})}=\beta M_{\vec{u}}+\alpha M_{\vec{v}}. \end{cases}$$

3) В силу изоморфизма $M: V^n\to \boldsymbol{M}(n\times 1,\ \mathbf{R})$ (теорема 56.1) последняя матричная система означает, что векторы $f(\vec{u})$ и $f(\vec{v})$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} f(\vec{u})=\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}, \\ f(\vec{v})=\beta\vec{u}+\alpha\vec{v}. \end{cases} \qquad (66.uv)$$

Таким образом, $\{f(\vec{u}),\ f(\vec{v})\}\subset L(\vec{u},\ \vec{v})$.

4) Покажем, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — линейно независимы и, тем самым, что двумерно подпространство $L(\vec{u},\ \vec{v})\subset V^n$.

Предположим противное: $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — линейно зависимы, тогда найдется число $k \in \mathbf{R}$ такое, что $\vec{v} = k\vec{u}$ либо $\vec{u} = k\vec{v}$.

Рассмотрим случай $\vec{v} = k\vec{u}$.

Если $\vec{u} = \vec{0}$, то вектор $\vec{v}$ тоже нулевой, откуда $\vec{x} = \vec{0}$ (почему? ◆), что противоречит тому, что вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$, как собственный.

Для $\vec{v} = k\vec{u}$ система (66.uv) принимает вид:

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = \alpha\vec{u} - \beta k\vec{u}, \\ f(k\vec{u}) = \beta\vec{u} + \alpha k\vec{u}. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = (\alpha - \beta k)\vec{u}, \\ kf(\vec{u}) = (\beta + \alpha k)\vec{u}. \end{cases} \qquad (66.uv')$$

Если $k = 0$, а $\vec{u} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{v} = \vec{0}$ и из последней системы будем иметь $\beta\vec{u} = \vec{0}$. А это влечет равенство $\beta = 0$ (почему? ◆), что противоречит условию рассматриваемого случая ($\beta \neq 0$).

Следовательно, $\vec{v} = k\vec{u}$, где $k \neq 0$ и $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Домножив первое из этих соотношений (66.uv') на k и вычитая из него второе, получим:

$$k(\alpha - \beta k)\vec{u} - (\beta + \alpha k)\vec{u} = \vec{0}.$$

Откуда

$$(k^2 + 1)\beta\vec{u} = \vec{0}.$$

По условию вектор $\vec{u} \neq \vec{0}$ и числа $\beta \neq 0$, $(k^2 + 1) \neq 0$. ◆

Следовательно, $(k^2 + 1)\beta\vec{u} \neq \vec{0}$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость системы векторов $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, а значит, и двумерность линейной оболочки $L(\vec{u}, \vec{v}) \subset V^n$. ◆

Аналогично рассматривается случай $\vec{u} = k\vec{v}$. ◆

Тем самым доказано, что комплексному корню характеристического уравнения соответствует двумерное векторное инвариантное подпространство относительно линейного оператора на векторном пространстве над полем действительных чисел. ■

§ 67°. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Постановка задачи. Пусть линейный оператор $f \in \mathbf{End}(V^n)$ задан своей матрицей M_f относительно некоторого базиса B, требуется определить, имеет ли он собственные векторы, и если они есть, то в данном базисе указать координаты всех его собственных векторов и их собственные значения.

Утверждение 66.2, свойства собственных векторов линейного оператора и собственных значений (свойства 66.2, 66.6, следствия 66.4, 66.5) служат основанием для следующего алгоритма (правила) их определения:

1. *Выпишем матричное уравнение для собственных векторов f:*

$$(M_f - \lambda E)\cdot M_x = 0.$$

Т. е.:

$$\begin{pmatrix} (f_1^1-\lambda) & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & (f_2^2-\lambda) & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & f_2^n & \dots & (f_n^n-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Выпишем характеристическое уравнение f*, приравняв к 0 определитель $(M_f - \lambda E)$:

$$\begin{vmatrix} (f_1^1-\lambda) & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & (f_2^2-\lambda) & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & f_2^n & \dots & (f_n^n-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Решив характеристическое уравнение, найдем его корни.* Каждому характеристическому корню соответствует по крайней мере один собственный вектор эндоморфизма.

4. *Найдем координаты собственных векторов, с собственным значением* λ_1, подставляя его в систему уравнений (66.2) и решая ее относительно $x^1, x^2, \dots x^n$:

$$\begin{cases} (f_1^1-\lambda_1)x^1 + f_2^1x^2 + \dots + f_n^1x^n = 0, \\ f_1^2x^1 + (f_2^2-\lambda_1)x^2 + \dots + f_n^2x^n = 0, \\ \dots \\ f_1^nx^1 + f_2^nx^2 + \dots + (f_n^n-\lambda_1)x^n = 0. \end{cases} \qquad (66.\lambda_1)$$

Каждое ее решение $\langle x^1, x^2, \dots x^n\rangle \neq \langle 0, 0, \dots 0\rangle$ есть координаты собственного вектора линейного оператора f с собственным значением λ_1, а множество всех решений этой системы образует инвариантное собственное подпространство V_{λ_1}, состоящее из всех собственных векторов f с собственным значением λ_1 и нулевого вектора.

5. *Для каждого из характеристических корней повторим вычисления* п. 4, находя его собственные векторы с собственными значениями λ_2, λ_3 и т. д.

Задание 67.1. Найдите все собственные векторы линейного оператора f примера 65.3, заданного относительно некоторого базиса в V^3 матрицей:

$$M_f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу, будем поступать в соответствии с алгоритмом отыскания собственных векторов линейного оператора.

1. Выпишем матричное уравнение для собственных векторов f:

$$(M_f-\lambda E)\cdot M_{\bar{x}}=0.$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выпишем характеристическое уравнение f, приравняв к нулю определитель $(M_f-\lambda E)$. Откуда (см. задание 66.2):

$$(1-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)=0.$$

3. Решив характеристическое уравнение, найдем его корни. (см. задание 66.2): $\operatorname{Sp} f=\{-3, 1, 2\}$.

4. Найдем координаты собственных векторов, с собственными значениями $\lambda_i\in\{-3, 1, 2\}$, подставляя их последовательно в систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x^1+2x^2 & =0, \\ \quad(-3-\lambda)x^2 & =0, \\ \qquad\qquad x^2+(2-\lambda)x^3 & =0 \end{cases}$$

и решая ее относительно x^1, x^2, x^3.

Итак, 1) Найдем соответственные векторы с собственным значением $\lambda_1=-3$.

$$\begin{cases} (1+3)x^1+2x^2 & =0, \\ \quad(-3+3)x^2 & =0, \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad x^2+(2+3)x^3 & =0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^1+2x^2 = 0, \\ 0x^2 = 0, \\ x^2+5x^3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^1+x^2 = 0, \\ x^2+5x^3=0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение, как нулевое, можно отбросить:

$$\begin{cases} 2x^1+x^2 = 0, \\ x^2+5x^3=0. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x^1 = -1/2x^2, \\ x^3 = -1/5x^2, \end{cases}$$

и получен первый собственный вектор с собственным значением $\lambda_1=-3$:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2x^2 \\ x^2 \\ -1/5x^2 \end{pmatrix} = x^2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \text{ где } x^2 \neq 0.$$

Например,

$$M_{\vec{a}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix},$$

и одномерное инвариантное подпространство $V_{-3}=L(\vec{a}_1)$.

2) Найдем собственные векторы с собственным значением $\lambda_2=1$.

$$\begin{cases} (1-1)x^1+2x^2 = 0, \\ (-3-1)x^2 = 0, \\ x^2+(2-1)x^3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0, \\ -4x^2 = 0, \\ x^2+x^3=0. \end{cases}$$

Откуда $x^2=x^3=0$, т. е. собственный вектор с собственным значением $\lambda_2=1$ имеет вид:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } x^1 \neq 0.$$

В частности:

$$M_{\vec{a}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее одномерное инвариантное подпространство: $V_1 = L(\vec{a}_2)$.

3) Аналогично находятся собственные векторы с собственным значением $\lambda_3 = 2$:

$$M_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } x^3 \neq 0. \quad \blacklozenge$$

В частности:

$$M_{\vec{a}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и одномерное инвариантное пространство $V_2 = L(\vec{a}_3)$.

Поставленная выше задача решена. Отметим, что, если собственные векторы $\vec{a}_2 = \vec{e}_1$, $\vec{a}_3 = \vec{e}_3$ с собственными значениями, соответственно, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$ этого линейного оператора можно было угадать или подобрать, исходя из вида его матрицы M_f (см. пример 66.3), то собственный вектор $\vec{a}_1$, как и его собственное значение $\lambda_1 = -3$ «методом подбора» получить было более затруднительно (см. пример 65.3, задание 65.2). Теперь же, зная все собственные векторы (одномерные инвариантные подпространства) этого линейного оператора, можно указать его инвариантные подпространства помимо одномерных: $L(\vec{e}_1)$ и $L(\vec{e}_3)$, указанных в примере 65.3, это $L(\vec{a}_1)$, двумерные: $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, $L(\vec{a}_1, \vec{e}_1)$ и $L(\vec{a}_1, \vec{e}_3)$. $\blacklozenge$

Более того, несложно заметить, что векторы: $\vec{a}_1$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ с координатными столбцами:

$$M_{\vec{a}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \ M_{\vec{a}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ M_{\vec{a}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы и, значит, $B' = \langle \vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ — базис в векторном пространстве V^3. $\blacklozenge$

Тогда относительно этого базиса линейный оператор f имеет матрицу:

$$M'_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

так как

$$f(\vec{a}_1) \overset{?}{=} -3\vec{a}_1 = -3\vec{a}_1 + 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_3,$$

$$f(\vec{e}_1) \overset{?}{=} \quad 1\vec{e}_1 = \quad 0\vec{a}_1 + 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_3,$$

$$f(\vec{e}_3) \overset{?}{=} \quad 1\vec{e}_3 = \quad 0\vec{a}_1 + 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_3.$$

Задание 67.2. Найдите **все** собственные векторы эндоморфизмов двумерного векторного пространства: θ, e, z, s, r_α, p и h_k, зная их матрицы относительно векторного базиса в V^2 (см. § 59′):

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_{r_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{h_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Следующая таблица будет использоваться при изучении свойств преобразований (движений, подобий) плоскости (заполните ее там, где это необходимо).

эндоморфизм	матрица	собственные направления	собственные значения
θ нулевой	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	все	0
e тождественный	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	все	1
z центральная симметрия	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	?	-1
s осевая симметрия	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	два	{?, ?}
r_α вращение $\alpha \neq \pi k$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	нет	нет
p проектирование	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	два	{?, ?}
h_k гомотетия	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	?	?

§ 68′. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

Определение 68.1. ***Спектр** линейного оператора называется **простым**, если он состоит из n различных чисел, и оператор действует на n-мерном векторном пространстве.*

*Линейный оператор, обладающий таким свойством, называется **линейным оператором с простым спектром**.*

Из этого определения следует, что характеристическое уравнение такого оператора имеет n корней, причем все они простые (кратности 1). Тогда согласно свойству 66.3 собственные векторы этого оператора $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n\}$ линейно независимы, и, значит, $B' = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n \rangle$ — базис в векторном пространстве V^n (утверждение 41.?). ◆

Если $\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \rangle$ — соответствующие собственные значения оператора f, а по определению собственного вектора для всех $i = 1, 2, \dots n$

$$f(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_{i-1} + \lambda_i \vec{x}_i + 0\vec{x}_{i+1} + \dots + 0\vec{x}_n,$$

то это и означает, что матрица оператора f в базисе B' диагональна. ■

Тем самым доказана теорема о матрице линейного оператора с простым спектром:

Теорема 68.1. *Матрица линейного оператора с простым спектром в базисе его собственных векторов диагональна с попарно различными диагональными элементами.*

Обратное очевидно: если матрица линейного оператора диагональна в некотором базисе, то этот базис состоит из собственных векторов этого оператора. ◆

Эндоморфизм оператора f примера 65.3 — пример линейного оператора с простым спектром: $\mathrm{Sp}\, f = \{-3, 1, 2\}$ (см. задание 66.2).

Так в базисе $B' = \langle \vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle$ его матрица:

$$M'_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что, меняя порядок векторов в базисе, можно в качестве матриц этого оператора получить другие диагональные матрицы, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (68.f)$$

Таким образом, матрица линейного оператора приводится к диагональному виду не однозначно, а с точностью до порядка диагональных элементов.

Задача 68.1.3. Докажите, что если линейные операторы f и g перестановочны, причем один из них — линейный оператор с простым спектром, то существует базис, в котором матрицы этих операторов диагональны.

Указание. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$ и $\operatorname{Sp} f = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$, причем все собственные значения различны. Тогда найдется базис B в V^n, составленный из собственных векторов f, в котором его матрица M_f диагональна $M_f = \lambda_1 E_1^1 + \lambda_2 E_2^2 + \dots + \lambda_n E_n^n$.

Пусть M_g — матрица линейного оператора g относительно этого же базиса B. Какие условия накладывает на M_g перестановочность операторов f и g?

Заметим, что к диагональному виду могут быть приведены матрицы линейных операторов, со всеми действительными корнями характеристических уравнений (корни действительные, но не обязательно простые). Однако, это может быть осуществлено не всегда.

Лемма 68.1. *Если число λ_0 — корень кратности k характеристического уравнения линейного оператора в конечномерном пространстве, то он имеет собственное подпространство размерности, не превосходящей k.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{End}(V^n)$ и $V_{\lambda_0}(f)$ — собственное подпространство векторного пространства V^n с собственным значением λ_0 (определение 66.2, следствие 66.3). Пусть $\dim V_{\lambda_0}(f) = d$.

Выберем базис в $V_{\lambda_0}(f) : B' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_d \rangle$ и дополним его до базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots \vec{e}_n \rangle$ во всем пространстве V^n. ♦

Тогда очевидно, что так как $f(\vec{e}_i) = \lambda_0 \vec{e}_i$ при $i = 1, 2, \dots d$ матрица f в этом базисе имеет вид:

$$M_f = \begin{array}{c@{}c} & d \\ d & \left(\begin{array}{cccc:c} \lambda_0 & & & & \\ & \lambda_0 & & & \\ & & \ddots & & B \\ & & & \lambda_0 & \\ \hdashline & O & & & C \end{array}\right) \end{array},$$

а характеристический многочлен f имеет вид:

$$\chi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^d \det(C - \lambda E). \qquad ♦$$

Из того, что λ_0 — корень кратности k характеристического многочлена, вытекает, что $\chi(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^k\varphi(\lambda)$, а из единственности разложения многочлена на множители — что $d\leqslant k$, так как $\det(C-\lambda E)$ может иметь число λ_0 своим корнем.

Таким образом, $\dim V_{\lambda_0}(f)\leqslant k$, где k — кратность корня λ_0 характеристического уравнения линейного оператора f. ■

Следующий пример показывает, что случай $\dim V_{\lambda_0}(f)<k$ реализуется.

Пример 68.1. Оператор дифференцирования D в пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ многочленов от одной переменной степени не выше n имеет только одномерное собственное пространство с собственным значением, равным 0 (см. пример 66.2). Но его спектр состоит только из одного элемента: $\operatorname{Sp} D=\{0\}$, причем он n-кратный и единственный корень характеристического уравнения этого оператора: $\lambda^n=0$. (См. задачу 66.1.2—1.3).

Однако, если f эндоморфизм n-мерного векторного пространства, характеристическое уравнение которого имеет только действительные корни (не обязательно простые) и сумма размерностей этих подпространств равна n, т. е.

$$\dim V_{\lambda_1}(f)+\dim V_{\lambda_2}(f)+\ldots+\dim V_{\lambda_k}(f)=n,$$

где $\operatorname{Sp} f=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k\}$, то можно доказать, что существует базис из собственных векторов этого оператора, относительно которого матрица f — диагональна. ◆

Определение 68.2. *Линейный оператор называется* ***диагонализируемым****, если существует базис, в котором его матрица диагональна.*

Так что всякий линейный оператор с простым спектром диагонализируем.

Понятно, что диагонализируемые операторы, видимо, довольно редки и возникает вопрос, существует ли метод приведения матриц линейных операторов к какому-либо специальному виду, который позволил бы выяснить, диагонализируемы ли они, и «сравнивать» их.

Например, эндоморфизм f трехмерного векторного пространства примера 65.3, заданный в некотором базисе $B=\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$ матрицей:

$$M_f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

в базисе из его собственных векторов $B'=\langle\vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle$ имеет, как установлено выше (см. задание 67.1, 66.2), своей матрицей диагональную:

$$M'_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что его действие в точности такое же, как, например, эндоморфизма, заданного той же самой диагональной матрицей относительно базиса $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Столь же очевидно, что и все матрицы (68.f) определяют линейные операторы «одинакового действия» только относительно разных базисов, а значит, по существу их действия на произвольный вектор одинаковы и эти матрицы являются матрицами одного и того же линейного оператора.

Такие матрицы (которые могут быть истолкованы, как матрицы одного линейного оператора, но относительно разных базисов векторного пространства) иногда называют *эквивалентными* или *подобными*.

Определение 68.3. *Две* ***матрицы*** *A и B называются* ***подобными****, если найдется невырожденая матрица T такая, что*

$$A = T^{-1} B T.$$

Очевидно, что все матрицы любого линейного оператора на конечномерном векторном пространстве относительно разных базисов подобны:

$$M_f = T^{-1}_{\langle B,\ B' \rangle} M'_f T_{\langle B,\ B' \rangle}$$

согласно закону преобразования матрицы линейного оператора (теорема 54.1). Интересно выявить признак подобия матриц, и тем самым определять, какие из матриц в указанном смысле задают один и тот же линейный оператор.

Если линейные операторы — с простым спектром, ответ на этот вопрос очевиден.

Утверждение 68.1. *Линейные операторы с простыми спектрами равны тогда и только тогда, когда их спектры совпадают.* ◆

§ 69*. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе n-мерное векторное пространство рассматривается над полем комплексных чисел: $\langle V^n, \mathbf{C} \rangle$. Следовательно, матрица линейного оператора в таком векторном пространстве, вообще говоря, имеет своими элементами комплексные числа, его характеристический многочлен n-ой степени — коэффициентами и корнями также комплексные числа. Согласно основной теореме алгебры такой многочлен имеет хотя бы один корень в поле комплексных чисел, из чего следует, что многочлен степени n в поле комплексных чисел имеет, учитывая кратность, n корней (почему? ◆). Т. е. характеристический многочлен $\chi(f)$ линейного оператора $f \in \boldsymbol{End}(\langle V^n, \mathbf{C}\rangle)$ разложим в произведение:

$$\chi(f) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{d_k},$$

где $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$, а все его корни $\lambda_i \in \mathbf{C}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Однако, наличие корней у характеристического уравнения не обеспечивает диагонализируемости линейного оператора (см. пример 68.1).

Тем не менее в случае, когда характеристический многочлен линейного оператора представим в виде (69.1), его матрица приводима к некоторому специальному, *жордановому виду*.

Определение 69.1. *Матрица A называется* ***жордановой****, если она имеет следующий «клеточный» вид:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_k \end{pmatrix},$$

в котором каждая клетка является квадратной матрицей вида:

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

и называется ***жордановой клеткой****.*

Базис, в котором матрица линейного оператора имеет жорданов вид, составляется из его собственных и так называемых *присоединенных векторов*.

Определение 69.2. *Вектор $\vec{x}$ называется* ***присоединенным вектором порядка*** *m $(m \in \mathbf{N})$ с* ***собственным значением*** *λ линейного оператора f, если вектор $\vec{y} = (f - \lambda e)^m(\vec{x})$ является собственным вектором f с собственным значением λ.*

Из определения следуют свойства присоединенных векторов.

Лемма 69.1. Если $\vec{x}$ — присоединенный вектор порядка m линейного оператора $f \in \boldsymbol{End}(V)$, то

$$(f-\lambda e)^m(\vec{x})\neq\vec{0} \text{ и } (f-\lambda e)^{m+1}(\vec{x})=\vec{0}.$$

Доказательство. Вектор $\vec{y}=(f-\lambda e)^m(\vec{x})\neq\vec{0}$, как собственный вектор, а в силу свойства 66.5 он принадлежит ядру оператора $(f-\lambda e)$, т. е. $(f-\lambda e)(\vec{y})=\vec{0}$. Откуда

$$\vec{0}=(f-\lambda e)(\vec{y})=(f-\lambda e)((f-\lambda e)^m(\vec{x}))=$$
$$=((f-\lambda e)\circ(f-\lambda e)^m)(\vec{x})=(f-\lambda e)^{m+1}(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

Теорема 69.1 (Жордана). *Для любого линейного оператора на конечномерном векторном пространстве существует базис, составленный из его собственных $\{\vec{e}_j^1\}$ и присоединенных $\{\vec{e}_j^i\}$ векторов:*

$$B=\langle\vec{e}_1^1,\ \vec{e}_1^2,\ \ldots\ \vec{e}_1^{n_1};\ \vec{e}_2^1,\ \vec{e}_2^2,\ \ldots\ \vec{e}_2^{n_2};\ldots\ \vec{e}_s^1,\ \vec{e}_s^2,\ \ldots\ \vec{e}_k^{n_k}\rangle,$$

такой, что $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ и

$$f(\vec{e}_j^1)=\lambda^j\vec{e}_j^1,\ \text{а}\ f(\vec{e}_1^i)=\lambda^j\vec{e}_j^i+\vec{e}_j^{i-1}$$

при $j=1,\ 2,\ \ldots\ k,\ i=2,\ 3,\ \ldots\ n$, где $f\in\boldsymbol{End}(V^n)$.

Жорданова форма матрицы определяется неоднозначно: с точностью до порядка ее жордановых клеток.

Доказательство теоремы проводится методом математической индукции.

1. База индукции. При $n=1$ утверждение очевидно, поскольку $M_f\in\boldsymbol{gl}(1)=\mathbf{R}$.

2. Предположение индукции состоит в том, что утверждение теоремы верно для любого оператора на конечномерном векторном пространстве размерности меньшей n.

3. Шаг индукции будет заключаться в доказательстве утверждения теоремы для линейного оператора на n-мерном векторном пространстве на основе базы и предположения индукции.

1. Для какого-либо собственного значения $\lambda_0\in\operatorname{Sp}f$ рассмотрим линейный оператор

$$\tilde{f}\overset{\text{des}}{=\!=}f-\lambda_0 e\overset{?}{\in}\boldsymbol{End}(V^n). \qquad (69.\tilde{f})$$

По свойству 58.4: $\operatorname{def}\tilde{f}+\operatorname{rang}\tilde{f}=n$. Откуда следует, что $\operatorname{Im}\tilde{f}\overset{\text{утв. 57.1}}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rang}\tilde{f}\overset{\text{def}}{=\!=}\operatorname{Rang}M_{\tilde{f}}=\operatorname{Rang}(M_f-\lambda_0E)\overset{\text{des}}{=\!=}n_0<n$, так как λ_0 — собственное значение $\tilde{f}$ и, значит, $\det(M_{\tilde{f}}-\lambda_0E)=0$. $\dim V'=n_0<n$.

Из того же свойства следует, что

$$\dim\operatorname{Ker}\tilde{f}\overset{\text{def}}{=\!=}\operatorname{def}\tilde{f}=n-n_0.$$

2. Обозначим $\operatorname{Im} \tilde{f} = V'$, а $g \stackrel{\text{des}}{=} \tilde{f}|_{V'}$. Очевидно, что $g \in \boldsymbol{End}(V')$, причем так как $\dim V' = n_0 < n$, линейный оператор g удовлетворяет условию предположения индукции и V' существует базис из собственных и присоединенных векторов g:

$$B' = \langle \vec{e}_1^{\,1}, \vec{e}_1^{\,2}, \ldots \vec{e}_1^{\,m_1}; \vec{e}_2^{\,1}, \vec{e}_2^{\,2}, \ldots \vec{e}_2^{\,m_2}; \ldots \vec{e}_s^{\,1}, \vec{e}_s^{\,2}, \vec{e}_s^{\,m_s} \rangle,$$

такой, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n_0$ и

$$g(\vec{e}_j^{\,1}) = \mu^j \vec{e}_j^{\,1}, \text{ а } g(\vec{e}_j^{\,i}) = \mu^j \vec{e}_j^{\,i} + \vec{e}_j^{\,i-1} \tag{69.e}$$

при $j = 1, 2, \ldots s$, $i = 2, 3, \ldots m_j$.

В этом базисе матрица M_g линейного оператора g имеет жорданову форму и состоит из s жордановых клеток вида

$$M_j = \begin{pmatrix} \mu^j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu^j \end{pmatrix} \in \boldsymbol{gl}(n_j).$$

Несложно заметить, что ранг каждой такой клетки равен:

$$\operatorname{Rang} M_j = \begin{cases} n_j & , \text{ если } \mu_j = 0. \\ n_j - 1, & \text{если } \mu \neq 0. \end{cases}$$

3. Не ограничивая общности, можем считать, что в матрице M_g первые n_1 клеток соответствуют нулевому собственному значению (т. е. имеют по диагонали нули) и только они. Тогда $\operatorname{Rang} M_g = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_{n_1} - 1) + (r_{m_2} + r_{m_3} + \ldots + r_{m_s}) = n_0 - n_1$.

Тогда согласно свойству 58.4

$$\dim \operatorname{Ker} g \stackrel{\text{des}}{=} \operatorname{def} g = n_0 - \operatorname{rang} g \stackrel{\text{des}}{=} n_0 - \operatorname{Rang} M_g \stackrel{?}{=} n_1.$$

Причем $\operatorname{Ker} g$ является линейной оболочкой системы линейно независимых собственных векторов $\{\vec{e}_1^{\,1}, \vec{e}_1^{\,2}, \ldots \vec{e}_1^{\,n_1}\}$ оператора g: $\operatorname{Ker} g \stackrel{?}{=} L(\vec{e}_1^{\,1}, \vec{e}_1^{\,2}, \ldots \vec{e}_1^{\,n_1})$. ◆

4. Так как $\operatorname{Ker} g \stackrel{?}{\subset} \operatorname{Ker} \tilde{f}$ и $\operatorname{Ker} \tilde{f}$ — конечномерно, как подпространство векторного пространства V^n, то согласно следствию 41.2 линейно независимую систему векторов $\{\vec{e}_1^{\,1}, \vec{e}_1^{\,2}, \ldots \vec{e}_1^{\,n_1}\}$ можно дополнить до базиса в $\operatorname{Ker} \tilde{f}$. Пусть

$$B''=\langle \vec{e}_1^{\,1},\ \vec{e}_1^{\,2},\ \ldots\ \vec{e}_1^{\,n_1};\quad \vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \ldots\ \vec{c}_m\rangle$$

такой базис. Здесь $n_1+m=n-n_0=\dim \operatorname{Ker}\tilde{f}$ (см. п. 1) Т. е. $m=n-n_0-n_1$. При этом

$$\tilde{f}(\vec{c}_k)=\vec{0} \text{ при всех } k=1,\ 2,\ \ldots\ m, \qquad (69.c)$$

так как $\vec{c}_k\in\operatorname{Ker}\tilde{f}$.

Векторы $\{\vec{e}_1^{\,n_1}, \vec{e}_2^{\,n_2}, \ldots \vec{e}_s^{\,n_1}\}\subset V'=\operatorname{Im}\tilde{f}$ (см. п. 2), поэтому найдутся векторы $\{\vec{d}_1,\ \vec{d}_2,\ \ldots\ \vec{d}_{n_1}\}\subset V$ такие, что

$$\tilde{f}(\vec{e}_j)=\vec{e}_j^{\,n_j},\qquad j=1,\ 2,\ldots\ n_1. \qquad (69.d)$$

5. Обозначим введенные выше системы векторов:

$$C=\{\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \ldots\ \vec{c}_m\}\subset\operatorname{Ker}\tilde{f},\qquad D=\{\vec{d}_1,\ \vec{d}_2,\ \ldots\ \vec{d}_{n_1}\}\subset V.$$

Напомним, что

$$B'=\langle \vec{e}_1^{\,1},\ \vec{e}_1^{\,2},\ \ldots\ \vec{e}_1^{\,m_1};\ \vec{e}_2^{\,1},\ \vec{e}_2^{\,2},\ \ldots\ \vec{e}_2^{\,m_2};\ldots\ \vec{e}_s^{\,1},\ \vec{e}_s^{\,2},\ \ldots\ \vec{e}_s^{\,m_s}\rangle\subset V', \qquad (69.BCD)$$

и состоит из $m_1+m_2+\ldots+m_s=n_0$ векторов. Т. е. общее число векторов системы $\tilde{B}=\langle B',\ C,\ D\rangle$ равно

$$n_0+m+n_1=n_0+(n-n_0-n_1)+n_1=n.$$

6. Покажем, что система векторов $\tilde{B}$ линейно независима Для этого рассмотрим равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов системы $\tilde{B}$:

$$\vec{y}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_j}\alpha_i^j\,\vec{e}_j^{\,i}+\sum_{j=1}^{m}\beta^j\,\vec{c}_j+\sum_{j=1}^{n_1}\gamma^j\,\vec{d}_j=\vec{0}. \qquad (69.0)$$

Тогда

$$\begin{array}{l}
f(\vec{y})=\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{m_j}\alpha_i^j\,f(\vec{e}_j^{\,i})+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta^j f(\vec{c}_j)+\sum\limits_{j=1}^{n_1}\gamma^j f(\vec{d}_j)=\vec{0}.\\
\qquad\Vert\\
\sum\limits_{j=1}^{s}\mu^j\,\vec{e}_j^{\,1}+\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=2}^{m_j}\alpha_i^j(\mu^j\,\vec{e}_j^{\,i}+\vec{e}_j^{\,i-1})+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta^j\,\vec{0}+\sum\limits_{j=1}^{n_1}\gamma^j\,\vec{e}_j^{\,n_j}=\vec{0}.\\
\Vert(*)\\
\sum\limits_{j=1}^{n_1+1}\mu^j\,\vec{e}_j^{\,1}+\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=2}^{m_j}\alpha_i^j(\mu^j\,\vec{e}_j^{\,i}+\vec{e}_j^{\,i-1})+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta^j\,\vec{0}+\sum\limits_{j=1}^{n_1}\gamma^j\,\vec{e}_j^{\,n_j}=\vec{0}.
\end{array}$$

(69 *)

Равенство $(*)$: $\sum_{j=1}^{s} \mu^j \vec{e}^1_j = \sum_{j=1}^{n_1+1} \mu^j \vec{e}^1_j$ объясняется тем, что собственные значения $\mu^j = 0$ при $j \leqslant n_1$, так как векторы: $\{\vec{e}^1_1, \vec{e}^1_2, \ldots \vec{e}^1_{n_1}\} \subset \operatorname{Ker} \tilde{f}$.

Последняя строка в соотношениях $(69.*)$ — линейная комбинация векторов базиса B', равная нулевому вектору. Следовательно, все коэффициенты при базисных векторах равны 0. Отсюда в частности, следует, что в $(69.*)$

$$\langle \gamma^1, \gamma^2, \ldots \gamma^{n_1} \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle. \qquad (69.\gamma)$$

Тогда разложение нулевого вектора (см. $(69.\vec{0})$) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m_j} \alpha^j_i \vec{e}^i_j + \sum_{j=1}^{m} \beta^j \vec{c}_j = \vec{0}.$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^{m} \beta^j \vec{c}_j = -\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m_j} \alpha^j_i \vec{e}^i_j \stackrel{\text{des}}{=\!=} \vec{z}.$$

Такое представление вектора $\vec{z}$ означает, что $\vec{z} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ (см. $(69.BCD)$), поскольку векторы $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_m\}$ составляют часть базиса B'' подпространства $\operatorname{Ker} f$, а $\{\vec{e}^i_j\}$ — входят в базис B' подпространства $\operatorname{Im} \tilde{f} = V'$. Поэтому

$$\vec{z} = \sum_{j=1}^{m} \beta^j \vec{c}_j = \sum_{j=1}^{n_1} \varepsilon^j \vec{e}^1_j.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} \beta^j \vec{c}_j - \sum_{j=1}^{n_1} \varepsilon^j \vec{e}^1_j. = \vec{0}.$$

Система векторов $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots \vec{c}_m; \vec{e}^1_1, \vec{e}^1_2, \ldots \vec{e}^1_{n_1}\}$ составляет базис B'' и линейно независима, поэтому все коэффициенты в предыдущем равенстве равны 0, в частности,

$$\langle \beta^1, \beta^2, \ldots \beta^m \rangle = \langle 0, 0, \ldots 0 \rangle. \qquad (69.\beta)$$

Это означает, что вектор

$$\vec{z} = \sum_{j=1}^{m} \beta^j \vec{c}_j = \vec{0},$$

и это, в свою очередь, влечет равенство нулю всех коэффициентов α^j_i ($j = 1, 2, \ldots m_s$, $i = 1, 2, \ldots s$) другого разложения век тора $\vec{z}$ — в линейную комбинацию векторов $\vec{e}_j^i$:

$$\vec{z} = -\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i^j \vec{e}_j^i = \vec{0}.$$

Таким образом получено (см. (69.γ), (69.β)), что в линейной комбинации (69.$\vec{0}$) векторов системы $\tilde{B}$, равной нулевому вектору, все коэффициенты равны нулю, что и означает линейную независимость системы векторов $\tilde{B}=\{B', C, D\}$.

7. Так как общее число векторов линейно независимой системы $\tilde{B}=\{B', C, D\}$ равно размерности векторного пространства V^n (см. п. 5), то согласно утверждению 41.3, они составляют его базис.

8. Обозначим векторы

$$\langle \vec{d}_1,\ \vec{d}_2,\ \dots\ \vec{d}_{n_1}\rangle \overset{\text{des}}{=\!=} \langle \vec{e}_1^{\,n_1+1},\ \vec{e}_2^{\,n_2+1},\ \dots\ \vec{e}_{n_1}^{\,n_{n_1}+1}\rangle$$

и упорядочим векторы системы $\tilde{B}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B=\langle \vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \dots\ \vec{c}_{n-n_0-n_1},&\\ \vec{e}_j^{\,1},\ \vec{e}_j^{\,2},\ \dots\ \vec{e}_j^{\,n_j};\ \vec{e}_j^{\,n_j+1};\ &\text{при } j=1,\ 2,\ \dots\ n_0, \qquad (69.B)\\ \vec{e}_j^{\,1},\ \vec{e}_j^{\,2},\ \dots\ \vec{e}_j^{\,n_j};\ &\text{при } j=n_0+1,\ n_0+2,\ \dots\ s\rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим действие линейного оператора $\tilde{f}$ на базисе B векторного пространства V^n:

$$\tilde{f}(\vec{c}_k)=\vec{0} \text{ при } k=1,\ 2,\ \dots\ n-n_0-n_1 \text{ (см. (69.}c\text{)),}$$
$$\tilde{f}(\vec{e}_l^{\,n_l+1})=\vec{e}_l^{\,n_l} \text{ при } l=1,\ 2,\ \dots\ n_1 \text{ (см. (69.}d\text{)).}$$

а из (69.e) следует, что при $j=1,\ 2,\ \dots\ s$, $i=2,\ 3,\ \dots\ m_j$:

$$\tilde{f}(\vec{e}_j^{\,1})=\mu^j\vec{e}_j^{\,1}, \text{ а } \tilde{f}(\vec{e}_j^{\,i})=\mu^j\vec{e}_j^{\,i}+\vec{e}_j^{\,i-1}.$$

9. Из определения $\tilde{f}$ (69.$\tilde{f}$) следует, что $f=\tilde{f}+\lambda_0 e$. Воспользовавшись этим, получим действие линейного оператора f на векторах базиса B:

$$f(\vec{e}_k)=(\tilde{f}+\lambda_0 e)(\vec{e}_k)\overset{?}{=}0\vec{c}_k+\lambda_0\vec{c}_k=\lambda_0\vec{c}_k,$$
$$f(\vec{e}_l^{\,n_l+1})=(\tilde{f}+\lambda_0 e)(\vec{e}_l^{\,n_l+1})\overset{?}{=}\vec{e}_l^{\,n}+\vec{e}_l^{\,n+1},$$
$$f(\vec{e}_j^{\,1})=(\tilde{f}+\lambda_0 e)(\vec{e}_j^{\,1})\overset{?}{=}\mu^j\vec{e}_j^{\,1}+\lambda_0\vec{e}_j^{\,1}=(\mu^j+\lambda_0)\vec{e}_j^{\,1},$$
$$f(\vec{e}_j^{\,i})=(\tilde{f}+\lambda_0 e)(\vec{e}_j^{\,i})\overset{?}{=}\mu^j\vec{e}_j^{\,i}+\vec{e}_j^{\,i-1}+\vec{e}_j^{\,i}=(\mu^j+\lambda_0)\vec{e}_j^{\,i}+\vec{e}_j^{\,i-1},$$

что и завершает доказательство теоремы, поскольку последние соотношения и означают, что матрица линейного оператора f клеточная в базисе B. ♦ ■

Следствие 69.1. *Линейные операторы равны тогда и только тогда, когда их матрицы имеют одинаковую жорданову форму (с точностью до порядка жордановых клеток).* ◆

Сравните это следствие с утверждением 68.1. ◆

Непосредственное приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме требует довольно сложных вычислений так называемых инвариантных делителей характеристического многочлена этого линейного оператора и обоснований таких вычислений. А это уже выходит за пределы настоящего учебного курса. Можно порекомендовать любознательному читателю обратиться к специальной литературе, например, монографии [9].

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

> Математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путем тончайших разветвлений идущих от корней, а разбрасывает свои ветки и листья вширь, распространяя их зачастую вниз, к корням... В основных исследованиях в области математики не может быть окончательного завершения, а вместе с тем и окончательно установленного первого начала.
>
> *Ф. Клейн.* «Элементарная математика с точки зрения высшей».

Понятие собственного вектора, собственного значения и спектра линейного оператора на конечномерном (вещественном) векторном пространстве впервые ввел также Г. Грассман в 1844—1861-м годах в своей работе «Die Lineale Ausdehnungslehere» («Учение о линейной протяженности»), которой, как мы уже отмечали, он заложил основы теории линейных операторов. Видимо, стремясь выделить простейшие по характеру действия операторы, Грассман понял, что важно представлять, как линейный оператор действует на одномерных векторных пространствах. Тем более, что большинство «геометрических» эндоморфизмов (параллельный перенос, проектирование и симметрии) имеют не только собственные или даже инвариантные подпространства, но именно одномерные такие подпространства — т. е. собственные векторы. В «Die Lineale Ausdehnungslehere» он также описал основные свойства самосопряженных линейных операторов на конечномерных векторных пространствах. Матрица такого оператора симметрична относительно любого базиса (ортогонального), и значит, все его собственные значения вещественны. Это и позволяет полностью описывать действие такого линейного оператора, можно сказать так, в терминах его собственных значений. Тем самым Грассман не просто изобрел некоторые новые понятия, но продемонстрировал их эффективность, как аппарата исследований в данной области.

Следует отметить, что к середине XIX в. как понятия характеристического многочлена и характеристического уравнения матрицы, ее характеристического корня, которые были введены К. Вейерштрассом, так и задача приведения матрицы к диагональному виду, были уже хорошо изучены и освоены математиками. В силу изоморфизма линейных алгебр $\boldsymbol{End}(V^n)$ и $\boldsymbol{M}(n)$ эти понятия оказались удивительно удобным языком для описания многих свойств линейных операторов, а разработанная к тому времени техника матричных исследований была легко приспособлена к их изучению. При этом многие из результатов в теории матриц были перенесены в теорию конечномерных линейных операторов почти дословно. Например, теорема Гамильтона-Кэли о том, что всякий линейный оператор (всякая матрица) является корнем своего характеристического уравнения.

Развивая далее идеи собственных и весовых (корневых) подпространств, французский математик К. Жордан в конце XIX в. доказал свою знаменитую теорему о приведении матрицы к специальному, носящему ныне его имя, виду. Тем самым была решена довольно сложная задача классификации линейных операторов в конечномерных векторных пространствах: действие любого, не обязательно самосопряженного, эндоморфизма конечномерного векторного пространства вполне описывается его собственными значениями (корнями его характеристического многочлена над данным числовым полем), причем в подходящем базисе оно может быть указано явным образом.

Однако, этой теоремой Жордана не была закрыта собственно теория линейных операторов. Прежде всего неоднократно предпринимались попытки упростить и сделать более доступным ее доказательство. Так доказательство теоремы о приведении матрицы линейного оператора к жордановому виду, которое излагается в настоящей книге, принадлежит А. Ф. Филиппову и было опубликовано в журнале «Вестник Московского университета» в 1971 г. Помимо этого, оказалось, что многие задачи интересного физического содержания могут быть описаны удобно не просто в терминах линейных операторов, но именно их спектров. Например, в теории колебаний изучается движение системы с n степенями свободы в окрестности ее положения устойчивого равновесия. Это состояние описывается векторным дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{y}+Ay=0, \tag{$*$}$$

где y есть вектор n-мерного пространства, характеризующий отклонение системы от равновесного состояния, а A — линейный оператор с симметричной, положительно определенной матрицей. Оказывается, решение этого уравнения, т. е. движение системы, может быть представлено в виде наложения n гармонических колебаний, круговые частоты которых есть ничто иное, как собственные значения линейного оператора A. Если же рассматривается задача колебания около состояния равновесия системы с бесконечным числом степеней свободы (например, однородной или неоднородной струны), то ее движение описывается тем же самым дифференциальным уравнением (*), но A — линейный оператор специального вида, действующий в бесконечномерном векторном пространстве. В частности, для задачи колебания струны он имеет вид:

$$Af=\int_a^b K(x,\ y)\,f(y)\,dy,$$

где $K(x,\ y)$ — непрерывная, заданная на квадрате ($x\leqslant a,\ y\leqslant b$) симметрическая функция двух переменных ($K(x,\ y)=K(y,\ x)$), а $f(y)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a,\ b]$, которая и задает состояние системы с бесконечным числом степеней свободы. Таким образом, в связи с подобными задачами и обобщением теории линейных операторов на бесконечномерные пространства естественно возник вопрос о возможности перенесения столь удобного аппарата исследования, как собственные векторы, на бесконечномерный случай. Так оказалось, что решение задачи о колебании струны определяется посредством собственных функций (аналогом собственных векторов) линейного оператора $K(x,\ y)$ и его собственных значений.

Ясно, что задачи устойчивости системы возникают при решении различных проблем и крайне важны для предсказания исходов многих экспериментов не только физики, но и химии, биологии, экономики и даже социологии. Подобными вопросами занимается раздел современной математики, который имеет название спектральный анализ, начало его было заложено в середине XIX в.

К упомянутым в исторической справке предыдущей лекции математикам, внесшим свой вклад в построение теории линейных операторов на бесконечномерных векторных пространствах, следует добавить еще имена двух немецких математиков: Д. Гильберта и Э. Шмидта, и шведа Э. Фредгольма (Fredholm Erik Harvey, 1866—1927). Гильберт в серии своих работ начала XX в. построил теорию интегральных уравнений с симметричным ядром в векторном пространстве функций. Ныне она составляет одну из основ современного функционального анализа и особенно его раздела — спектральной теории линейных операторов. Шмидт в 1907—1908 г. г. обобщил теорию собственных векторов и значений на операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве. А Фредгольмом был установлен очень мощный результат в теории интегральных операторов в этих пространствах, который ныне известен под названием «альтернативы Фредгольма». Таким образом, наряду с Г. Грассманом Д. Гильберт, Э. Шмидт и Э. Фредгольм являются «отцами» спектрального анализа.

В первой половине XX в. серьезные результаты в этой области были получены американскими математиками Дж. фон Нейманом (von Neuman John, 1903—1957), А. Зигмундом (Zygmund Antoni, 1900—19??), венгром Ф. Риссом (Riesz Frigyes, 1880—1956), французом Ж. Адамаром (Hadamard Jacques Salmon, 1865—1963), а также в работах нашего крупнейшего современного отечественного математика И. М. Гельфанда (р. 1913).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Ильин В. А., Позднял Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.—296 с.
2. *Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения.— М.: Изд. МГУ, 1987.—311 с.
3. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
4. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.—480 с.
5. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.—336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.—272 с.
7. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—512 с.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.—576 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 65. Инвариантные подпространства линейных операторов

[2] — стр. 71— 72.
[5] — стр. 222—223.
[6] — стр. 112—114.
[7] — стр. 387—388.
[8] — стр. 261—263.

§ 66. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

[1] — стр. 123—125.
[2] — стр. 72— 79.
[3] — стр. 307—311.
[4] — стр. 102—103, 360—365.
[5] — стр. 223—224, 226—230.
[6] — стр. 114—121.
[7] — стр. 388—394.
[8] — стр. 264—266.

§ 67°. Алгоритм определения собственных векторов линейного оператора

[3] — стр. 308—311.
[4] — стр. 103—106.
[5] — стр. 224—226.

§ 68′. Линейные операторы с простым спектром

[2] — стр. 75—76.
[3] — стр. 311—314.
[6] — стр. 117—119.
[7] — стр. 419—420.
[8] — стр. 267—271.

§ 69*. Канонический вид матрицы линейного оператора

[1] — стр. 151—155.
[5] — стр. 230—231.
[6] — стр. 190—204.
[7] — стр. 428—431.
[8] — стр. 280—282.
[9] — стр. 181—190.

15

Лекция 15

ЕВКЛИДОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

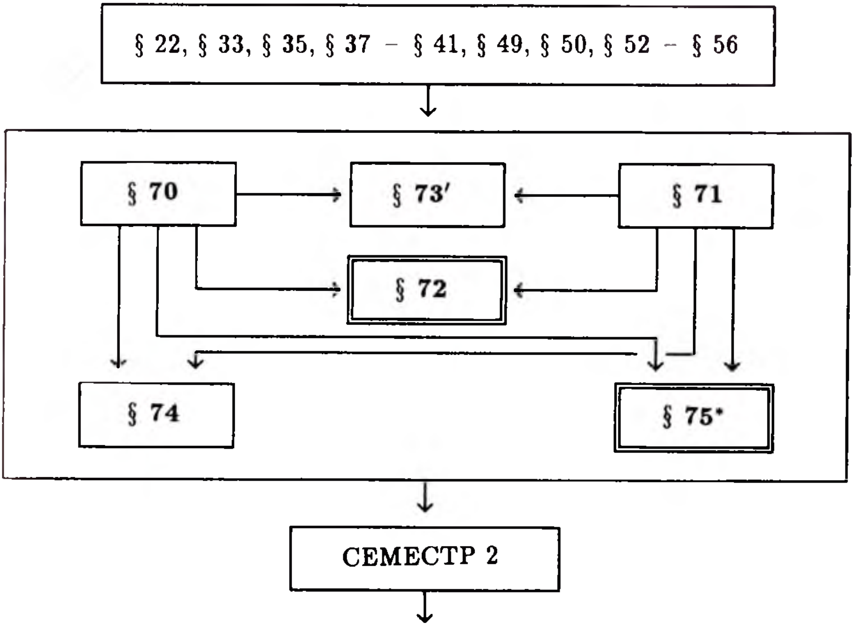
ЕВКЛИДОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 70. Скалярное произведение векторов.
§ 71. Евклидово векторное пространство.
§ 72. Ортогонализация базиса евклидова векторного пространства.
§ 73′. Подпространства евклидова векторного пространства.
§ 74. Изоморфизм евклидовых векторных пространств.
§ 75* Унитарные пространства.

Основные понятия: скалярное произведение векторов, матрица скалярного произведения, евклидово векторное пространство, норма вектора в евклидовом векторном пространстве, орт, ортогональная проекция вектора, геометрическое истолкование скалярного произведения, угол между векторами в евклидовом векторном пространстве, ортогональность векторов, ортонормированная система векторов, ортонормированный базис векторного пространства, ортогональное дополнение, изоморфизм евклидовых векторных пространств.

Необходимые сведения: векторное пространство, свободный вектор, пространство свободных векторов, скалярное произведение векторов в трехмерном пространстве, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, базис, координаты вектора, свойства координат вектора, изменение координат вектора при замене базиса, коллинеарные и компланарные векторы, изоморфизм векторных пространств.

Рекомендации: если использовать пособие как лекционный материал, то § 73′ целесообразно предложить для практических занятий и самостоятельного изучения. § 75* может быть опущен без нарушения общей логики курса.



Семестр 1

Лекция 1 — Множества и отношения на множествах. (§ 1 — § 5).

Лекция 2 — Операции на бинарных отношениях. Отображения. (§ 6 — § 8).

Лекция 3 — Биективные отображения. Преобразования. (§ 9 — § 12).

Лекция 4 — Бинарные отношения на множестве. Фактор-множество. (§ 13 — § 16).

Лекция 5 — Матрицы. Основные операции и свойства. (§ 17 — § 22).

Лекция 6 — Подстановки. Группы. (§ 23 — § 26).

Лекция 7 — Определители. (§ 27 — § 32).

Лекция 8 — Векторные пространства. (§ 33 — § 36).

Лекция 9 — Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. (§ 37 — § 42).

Лекция 10 — Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. (§ 43 — § 48).

Лекция 11 — Линейные отображения векторных пространств. (§ 49 — § 53).

Лекция 12 — Матричное представление гомоморфизмов. (§ 54 — § 57).

Лекция 13 — Алгебра линейных операторов. (§ 58 — § 64).

Лекция 14 — Собственные векторы линейных операторов. (§ 65 — § 69).

Лекция 15 — Евклидовы векторные пространства. (§ 70 — § 75).

§ 70. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В курсе элементарной математики изучалось скалярное произведение в трехмерном векторном пространстве (свободных векторов). Оно определялось как число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними (для ненулевых векторов). Отсюда следовало, что, если координаты векторов $\vec{x}\,(x^1, x^2, x^3)$ и $\vec{y}\,(y^1, y^2, y^3)$, то это число можно вычислить по формуле:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3. \qquad (70.s^3)$$

Иногда последнее дается как определение скалярного произведения векторов, из которого следует, что

$$x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\,(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}).$$

Однако, первое из этих определений не обобщается на произвольное векторное пространство (и даже конечномерное векторное пространство), поскольку для векторов таких пространств (см. определение 33.1) не определены ни модули (длины) векторов, ни углы между ними. Второе из определений скалярного произведения, казалось бы, можно обобщить, вводя его для векторов $\vec{x}\,(x^1, x^2, \dots x^n)$ и $\vec{y}\,(y^1, y^2, \dots y^n)$ формулой:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + \dots + x^ny^n. \qquad (70.s)$$

Однако, такое обобщение явно требует, во-первых, конечномерности векторного пространства и, во-вторых, ответа на вопросы «корректности определения», например: зависит ли это число от выбора базиса (ведь при замене базиса координаты векторов, вообще говоря, изменяются), а если зависит, то каким образом. По этим причинам за определение скалярного произведения в произвольном векторном пространстве удобнее взять основные и важнейшие свойства скалярного произведения векторов в трехмерном пространстве:

Определение 70.1. ***Скалярным произведением на векторном пространстве*** *V над полем действительных чисел называется отображение $g\colon V \times V \to \mathbf{R}$, если оно при любых $\langle \vec{x}, \vec{y}, \alpha, \beta \rangle \in V^2 \times \mathbf{R}^2$ удовлетворяет следующим условиям:*

S.1: $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\, g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\, g(\vec{y}, \vec{z})$;

S.2: $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$;

S.3: $g(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$;

S.4: *если* $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, то $\vec{x} = \vec{0}$.

Первое из этих условий S.1 называется ***линейностью*** (по первому аргументу), второе S.2 называется ***симметричностью***, третье — ***положительной определенностью***, а последнее — ***невырожденностью отображения*** g. Для пары векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ значение отображения $g(\vec{x}, \vec{y})$ называется ***их скалярным произведением.***

Векторное пространство V над полем действительных чисел с заданным на нем скалярным произведением g называется ***евклидовым векторным пространством****, если V конечномерно, то* ***конечномерным евклидовым пространством.***

В этом случае говорят также, что на векторном пространстве V скалярное произведение g задает ***евклидову структуру.***

Обозначается евклидово векторное пространство V со скалярным произведением g, как $\langle V, g\rangle$.

Заметим, что в приведенном определении (скалярного произведения и евклидова пространства) не используются координаты векторов, следовательно, оно не требует задания базиса в векторном пространстве.

Из элементарной математики известно, что скалярное произведение в трехмерном пространстве (каким бы из двух упомянутых выше способов оно не вводилось) обладает всеми перечисленными свойствами (S.1 — S.4), так что является скалярным произведением в смысле определения 70.1. ◆

Несложно заметить простейшие свойства скалярного произведения, вытекающие из его определения:

Свойство 70.1. *Скалярное произведение линейно по второму аргументу,* так как $g(\vec{z}, \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) \stackrel{?}{=} g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}, \vec{z}) \stackrel{?}{=} \alpha g(\vec{x}, \vec{z})+\beta g(\vec{y}, \vec{z}) \stackrel{?}{=} \alpha g(\vec{z}, \vec{x})+\beta g(\vec{z}, \vec{y})$ для любых $\langle\vec{x}, \vec{y}, \alpha, \beta\rangle \in V^2\times\mathbf{R}^2$. Таким образом, скалярное произведение *линейно по каждому из аргументов.*

Свойство 70.2. *Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор равно нулю.* Действительно $g(\vec{0}, \vec{z}) \stackrel{?}{=} (0\vec{x}, \vec{z}) \stackrel{?}{=} 0g(\vec{x}, \vec{z}) \stackrel{?}{=} 0$. Отсюда, в частности, $g(\vec{0}, \vec{0})=0$.

Отметим, что только один вектор в евклидовом векторном пространстве обладает таким свойством.

Следствие 70.1. *Если $g(\vec{x}, \vec{y})=0$ для любого вектора $\vec{y}$ из евклидова векторного пространства $\langle V, g\rangle$,* то $\vec{x}=\vec{0}$.

Действительно, из этого условия, в частности, следует, что $g(\vec{x}, \vec{x})=0$, а тогда по свойству S.? вектор $\vec{x}$ — нулевой. ■

Более сложное свойство 70.3 носит название ***неравен-***

***ства Коши — Буняковского — Шварца**: для любой пары векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ векторного пространства V, на котором задано скалярное произведение g, имеет место неравенство:*

$$g(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}). \qquad (70.1)$$

Доказательство. 1. Если $g(\vec{y}, \vec{y}) = 0$, то $\vec{y} \overset{?}{=} \vec{0}$, а тогда и $g(\vec{x}, \vec{y}) \overset{?}{=} 0$, и неравенство (70.1) справедливо, так как обе его части обращаются в 0. ◆

2. Если же $g(\vec{y}, \vec{y}) \neq 0$, то для любого действительного числа λ и любого вектора $\vec{x}$ векторного пространства $\langle V, g\rangle$ возьмем вектор $\vec{x} + \lambda\vec{y} \in V$. В силу свойств скалярного произведения выражение

$$g(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \overset{S.?}{=\!=} g(\vec{x}, \vec{x}) + 2\lambda g(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2 g(\vec{y}, \vec{y}).$$

А так как $g(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \overset{?}{\geqslant} 0$, то для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ должно быть справедливо квадратное неравенство:

$$\lambda^2 g(\vec{y}, \vec{y}) + 2\lambda g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0. \qquad (70.\lambda).$$

Но это имеет место в том случае, когда дискриминант трехчлена неположителен:

$$D = (2g(\vec{x}, \vec{y}))^2 - 4g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0.$$

Откуда и получаем эквивалентное (70.1) условие:

$$g(\vec{x}, \vec{y})^2 - g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0. \qquad ■$$

Следствие 70.2. *Неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.*

Задача 70.1.2. Докажите следствие 70.2.

Доказательство. Выражение, эквивалентное неравенству (70.1):

$$g(\vec{x}, \vec{y})^2 - g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0,$$

при этом

$$g(\vec{x}, \vec{y})^2 - g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}) = \frac{1}{4} D.$$

Известно, что дискриминант квадратного трехчлена обращается в 0 тогда и только тогда, когда неравенство имеет единственное решение, а трехчлен обращается в 0:

$$\lambda^2 g(\vec{y}, \vec{y}) + 2\lambda g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{x}) = 0.$$

Тогда $g(\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{x}+\lambda\vec{y})=0$, откуда $\vec{x} \overset{?}{\parallel} \vec{y}$. ♦ ■

Пример 70.1. Естественно, что формулой $(70.s^3)$:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 \qquad (70.s^3)$$

можно задать скалярное произведение на любом трехмерном векторном пространстве, в котором фиксирован некоторый базис $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. При этом

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1,$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0 \text{ и т. д.}$$

И, вообще: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ при всех $\langle i, j \rangle \in \{1, 2, 3\}^2$.

Однако, помимо скалярного произведения, которое определяется формулой $(70.s^3)$, на трехмерном векторном пространстве можно задать и другое скалярное произведение, удовлетворяющее определению 70.1, например:

$$g_1(\vec{x}, \vec{y}) = 2x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3,$$

где координаты векторов $\vec{x}(x^1, x^2, x^3)$ и $\vec{y}(y^1, y^2, y^3)$ указаны в том же базисе B векторного пространства V^3.

Несложно убедиться в выполнимости условий S.1—S.4 *скалярного произведения для этого отображения* $V^3 \times V^3 \to \mathbf{R}$. ♦

При этом скалярные произведения векторов базиса B относительно g_1 уже другие. Так

$$g_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 2,$$

$$g_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, на двумерном векторном пространстве $\langle V^2, B \rangle$ скалярное произведение может быть задано следующей формулой:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2. \qquad (70.s^2)$$

(сравните с $(70.s^3)$).

Простейшим примером евклидова векторного пространства является множество действительных чисел $\mathbf{R}$ (одномерное векторное пространство) со скалярным умножением — произведением двух чисел: ♦

$$(x, y) = xy.$$

Задание 70.1. Докажите, что скалярным произведением на двумерном векторном пространстве является отображение $g_2: V^2 \times V^2 \to \mathbf{R}$, которое задается для произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ формулой:

$$g_2(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2, \tag{70.g_2}$$

где (x^1, x^2) и (y^1, y^2) — координаты векторов $\vec{x}$ и, соответственно, $\vec{y}$ относительно некоторого базиса B в векторном пространстве V^2.

Для доказательства следует проверить выполнимость условий определения 70.1 для отображения g_2.

1. Проверим, линейно ли отображение g_2 (по первому аргументу), т. е. выполняется ли при всех $\langle \vec{x}, \vec{y}, \alpha, \beta \rangle \in V^2 \times \mathbf{R}^2$ условие S.1: $g_2(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) \overset{?}{=} \alpha g_2(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g_2(\vec{y}, \vec{z})$.

$$g_2(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}_1) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} (\alpha x^1 + \beta y^1) z^1 - (\alpha x^1 + \beta y^1) z^2 - (\alpha x^2 + \beta y^2) z^1 + 2(\alpha x^2 + \beta y^2) z^2 =$$

$$= (\alpha x^1 z^1 - \alpha x^1 z^2 - \alpha x^2 z^1 + 2\alpha x^2 z^2) + (\beta y^1 z^1 - \beta y^1 z^2 - \beta y^2 z^1 + \beta 2 y^2 z^2) =$$

$$= \alpha (x^1 z^1 - x^1 z^2 - x^2 z^1 + 2x^2 z^2) + \beta (y^1 z^1 - y^1 z^2 - y^2 z^1 + 2y^2 z^2) =$$

$$= \alpha g_2(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g_2(\vec{y}, \vec{z}).$$

Что и означает линейность отображения g_2 по первому аргументу.

2. Проверим выполнимость следующего условия — симметричности:

S.2: $g_2(\vec{x}, \vec{y}) \overset{?}{=} g_2(\vec{y}, \vec{x})$ для любых $\langle x, y \rangle \in V^2 \times V^2$.

$$\left.\begin{array}{l} g_2(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 \\ g_2(\vec{y}, \vec{x}) = y^1x^1 - y^1x^2 - y^2x^1 + 2y^2x^2 \end{array}\right] ? \Rightarrow g_2(\vec{x}, \vec{y}) \overset{?}{=} g_2(\vec{y}, \vec{x}),$$

Т. е. отображение g_2 ? не ? симметрично.

3. Выясним, является ли отображение g_2 положительно определенным (условие S.3), т. е. верно ли, что $g_2(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\vec{x} \in V^2$.

Рассмотрим значение

$$g_2(\vec{x}, \vec{x}) = x^1x^1 - x^1x^2 - x^2x^1 + 2x^2x^2 = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 \overset{?}{=}$$
$$= (x^1 - x^2)^2 + (x^2)^2 \overset{?}{\geqslant} 0,$$

значит, отображение g_2 положительно определено.

4. Чтобы установить невырожденность g_2 (выполнимость условия S.4), найдем для произвольного $\vec{x}(x^1, x^2) \in \langle V^2, B\rangle$ по формуле (70.g_2) значение

$$g_2(\vec{x}, \vec{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 = (x^1 - x^2)^2 + (x^2)^2$$

и решим относительно x^1 и x^2 уравнение:

$$(x^1 - x^2)^2 + (x^2)^2 = 0.$$

Очевидно, что его решением являются x^1 и x^2, удовлетворяющие условиям: ◆

$$\begin{cases} x^1 - x^2 = 0, \\ x^2 = 0, \end{cases} \text{откуда } \langle x^1, x^2\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Следовательно, $g_2(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ только при нулевом векторе $\vec{x}$, что и означает невырожденность отображения g_2.

Таким образом, отображение g_2, определенное на векторном пространстве $\langle V^2, B\rangle$ формулой (70.g_2), является скалярным произведением на V^2.

Пример 70.2. Отображение $g_3 : V^2 \times V^2 \to \mathbf{R}$, которое задается для произвольных векторов $\vec{x}(x^1, x^2)$ и $\vec{y}(y^1, y^2)$ формулой:

$$g_3(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 - 2x^2y^2, \tag{70.g_3}$$

скалярным произведением не является, так как для него не выполняется условие S.3: $g_3(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\vec{x}$. Так как

$$g_3(\vec{x}, \vec{x}) = x^1x^1 + x^1x^2 + x^2x^1 - 2x^2x^2 = (x^1)^2 + 2x^1x^2 - 2(x^2)^2 =$$
$$= (x^1 + x^2)^2 - 3(x^2)^2.$$

А это выражение может принимать отрицательные значения, например, для вектора $\vec{e}_2(0, 1)$ значение

$$g_3(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (0 + 1) - 3 \cdot 1^2 = -2 < 0.$$

Задача 70.2.2. Определите, является ли отображение $g_4 : V^3 \times V^3 \to \mathbf{R}$ скалярным произведением на V^3, если его задать формулой (70.g_2), т. е.

$$g_4(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2, \tag{70.g_4}$$

где (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) — координаты векторов $\vec{x}$ и, соответственно, $\vec{y}$ относительно некоторого базиса в **трехмерном** векторном пространстве V^3.

Указание. Очевидно, условия симметричности, линейности и положительной определенности для отображения g_4, как и для отображения g_2, выполнены. Следует ли из условия $g_4(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, т. е. $(x^1 - x^2)^2 + (x^2)^2 = 0$, что вектор $\vec{x} = \vec{0}$, где $\vec{x}(x^1, x^2, x^3) \in V^3$?

Задача 70.1.1. Определите, являются ли отображения g_5 и g_6 скалярными произведениями на V^3, если для любых векторов $\langle \vec{x}(x^1, x^2, x^3), \vec{y}(y^1, y^2, y^3) \rangle \in V^3 \times V^3$ они задаются, соответственно, формулами:

$$g_5(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 - 2x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 - x^1, \tag{70.g_5}$$

$$g_6(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + 2x^2y^3 + 2x^3y^2 + 5x^3y^3. \tag{70.g_6}$$

Указание. Решение, естественно, заключается в проверке выполнимости условий S.1—S.4. При проверке условий S.3 и S.4 удобно проводить рассуждения, выделяя в выражениях $g_5(\vec{x}, \vec{y})$ и $g_6(\vec{x}, \vec{y})$ «полные квадраты».

Задача 70.1.3. Найдите, как задается произвольное скалярное произведение на одномерном векторном пространстве $\langle V^1, B \rangle$. Постарайтесь найти общий вид скалярного произведения на двумерном векторном пространстве.

Указание. Если $\vec{x} \in \langle V^1, B \rangle$, то он имеет всего одну координату: $\vec{x}(x^1)$, тогда $g(\vec{x}, \vec{y})$ — числовая функция (функционал) двух переменных: $g(\vec{x}, \vec{y}) = f(x^1, y^1)$. Каков должен быть ее вид, чтобы она удовлетворяла аксиомам скалярного произведения — условиям S.1 — S.4?

На двумерном векторном пространстве скалярное произведение — функция четырех переменных: $g(\vec{x}, \vec{y}) = f(x^1, x^2, y^1, y^2)$. Надо найти ее аналитическое задание так, чтобы выполнялись условия S.1 — S.4.

Замечание 70.1. Не следует полагать, что евклидово векторное пространство обязательно конечномерно. Так множество $C[a, b]$ всех непрерывных числовых функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ образует векторное пространство (см. пример 34.8). Но оно не имеет базиса в смысле определения 41.1 (см. § 41) и, значит, не является конечномерным (определение 41.2). Однако, можно показать, что отображение $(,) : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbf{R}$, определенное формулой:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt, \tag{70.2}$$

удовлетворяет условиям S.1—S.4 и, значит, является скалярным произведением на $C[a, b]$. Векторное пространство всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, со скалярным произведением (70.2) имеет специальное обозначение: $CL_2[a, b]$. Это один из основных и важнейших примеров векторных пространств со скалярным произведением в теории функций.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 70.1. *Сужение скалярного произведения g на векторном пространстве V на любое его подпространство V' есть скалярное произведение на V'.*

Другими словами, если $\langle V, g\rangle$ — евклидово векторное пространство, а V' — подпространство V, то $\langle V', g|_{V'}\rangle$ также является евклидовым векторным пространством, так как для всех векторов из $V' \subset V$, конечно, выполнимы все условия S.1—S.4, имеющие место на векторном пространстве V.

Скалярные произведения примера 70.1 ($(\vec{x}, \vec{y})$ и $g_1(\vec{x}, \vec{y})$), задачи 70.1.1 ($g_6(\vec{x}, \vec{y})$) на трехмерном векторном пространстве (и $g_2(\vec{x}, \vec{y})$ задания 70.1 на двумерном) показывают, что евклидова структура на векторном пространстве определяется, вообще говоря, не единственным образом. И естественно задаться вопросом, как много скалярных произведений можно задать на одном, хотя бы конечномерном векторном пространстве.

Помимо этого, когда векторное пространство конечномерно и в нем задан базис, вполне естественно поставить вопрос об определении скалярного произведения двух произвольных векторов этого пространства по их координатам. В этом случае вводится важная характеристика скалярного произведения — его матрица.

Определение 70.2. ***Матрицей скалярного произведения** g на конечномерном векторном пространстве $\langle V^n, B\rangle$ называется матрица, составленная из значений скалярных произведений всех упорядоченных пар базисных векторов:*

$$g_{ij} = (g\,\vec{e}_i, \vec{e}_j), \text{ где } B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle, \{i, j\} \subset \{1, 2, \dots n\}.$$

Обозначение матрицы скалярного произведения g:

$$M_g = \|g_{ij}\|.$$

Если векторное пространство n-мерно, то $M_g \in \boldsymbol{gl}(n)$ ◆

Найдем матрицы скалярных произведений нескольких предыдущих примеров.

Пример 70.3. В примере 70.1 мы уже отмечали, что для скалярного произведения $(70.s^3)$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

$(\vec{e}_i, \vec{e}_j)=\delta_{ij}$ при всех $i, j\in\{1, 2, 3\}$. Это означает, что матрица этого скалярного произведения единичная:

$$M_{(,)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Для скалярного произведения $g_1(\vec{x}, \vec{y})=2x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3$ этого же примера найдем

$$g_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1)=2\cdot1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0=2,$$

$$g_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2)=2\cdot1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0=0,$$

$$g_1(\vec{e}_1, \vec{e}_3)=2\cdot1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1=0,$$

$$g_1(\vec{e}_2, \vec{e}_1)=2\cdot0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0=0$$

$$g_1(\vec{e}_2, \vec{e}_2)=2\cdot0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0=1, \text{ и т. д.}$$ ◆

Окончательно

$$M_{g_1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Для скалярного произведения g_6 задачи 70.1.1:

$$g_6(\vec{x}, \vec{y})=x^1y^1+x^2y^2+2x^2y^3+2x^3y^2+5x^3y^3, \tag{70.g_6}$$

матрица находится аналогично:

$$M_{g_6}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}.$$

Задание 70.2. Найдите матрицу скалярного произведения (70.g_2) задания 70.1. $g_2(\vec{x}, \vec{y})=x^1y^1-x^1y^2-x^2y^1+2x^2y^2$.

$$M_{g_2}=\begin{pmatrix}1&-1\\?&?\end{pmatrix}\overset{?}{\in}\boldsymbol{gl}(2).$$

С помощью матрицы скалярного произведения легко находится скалярное произведение векторов по их координатам, т. е. так называемое координатное задание скалярного произведения. Действительно, пусть на n-мерном векторном пространстве, базис которого $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$, задано некоторое скалярное произведение с матрицей $M_g = \| g_{ij} \|$.

Возьмем произвольные векторы этого пространства: $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)$ и $\vec{y}(y^1, y^2, \dots y^n)$, т. е.

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n = x^i \vec{e}_i$$

и

$$\vec{y} = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + \dots + y^n \vec{e}_n = y^j \vec{e}_j.$$

Запишем и преобразуем их скалярное произведение:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = (x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n, \vec{y}) \overset{?}{=}$$
$$= x^1 g(\vec{e}_1, \vec{y}) + x^2 g(\vec{e}_2, \vec{y}) + \dots + x^n g(\vec{e}_n, \vec{y}) =$$
$$= x^1 g(\vec{e}_1, y^1 \vec{e}_1 + \dots + y^n \vec{e}_n) + \dots + x^n g(\vec{e}_n, y^1 \vec{e}_1 + \dots + y^n \vec{e}_n) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} x^1 y^1 g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x^1 y^2 g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \dots + x^1 y^n g(\vec{e}_1, \vec{e}_n) +$$
$$+ x^2 y^1 g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x^2 y^2 g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \dots + x^2 y^n g(\vec{e}_2, \vec{e}_n) + \dots +$$
$$+ x^n y^1 g(\vec{e}_n, \vec{e}_1) + x^n y^2 g(\vec{e}_n, \vec{e}_2) + \dots + x^n y^n g(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \overset{\text{des}}{=}$$
$$= x^1 y^1 g_{11} + x^1 y^2 g_{12} + \dots + x^1 y^n g_{1n} +$$
$$+ x^2 y^1 g_{21} + x^2 y^2 g_{22} + \dots + x^2 y^n g_{2n} + \dots$$
$$\dots + x^n y^1 g_{n1} + x^n y^2 g_{n2} + \dots + x^n y^n g_{nn}.$$

Можно заметить, что последнее выражение совпадает с произведением матриц:

$$(x^1\ x^2 \dots x^n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

т. е. получена формула:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = M_{\vec{x}}^{\mathrm{T}} M_g M_{\vec{y}}, \tag{70.3}$$

где $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)$, $\vec{y}(y^1, y^2, \dots y^n) \in \langle V^n, B \rangle$,

$g(\vec{x}, \vec{y})$ — скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$,
$M_g = \| g_{ij} \|$ — матрица скалярного произведения g,
$M_{\vec{x}}^{\mathrm{T}}$ — координатная строка вектора $\vec{x}$,
$M_{\vec{y}}$ — координатный столбец вектора $\vec{y}$.

Координаты векторов и матрица скалярного произведения в этой формуле задаются относительно одного и того же базиса, однако, по своему определению значение скалярного произведения $g(\vec{x}, \vec{y})$ от базиса не зависит и определяется только самим скалярным произведением. (Значение скалярного произведения инвариантно относительно замены базиса). ♦

Заметим, что с использованием тензорной символики вывод формулы (70.3) может быть записан существенно короче: если $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$, то

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j) \overset{?}{=} x^i y^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \overset{?}{=} x^i y^j g_{ij}.$$

Выясним, меняется ли матрица скалярного произведения при изменении базиса векторного пространства. Пусть в V^n указаны два базиса: B и B' с матрицей перехода $T_{\langle B, B' \rangle} = \| t_j^i \|$. Пусть $M_g = \| g_{ij} \|$ — матрица скалярного произведения g относительно базиса B, а $M'_g = \| g'_{ij} \|$ — его матрица относительно базиса B'. По теореме 54.1

$$M_{\vec{x}} = T_{\langle B, B' \rangle} M'_{\vec{x}} \text{ и } M_{\vec{y}} = T_{\langle B, B' \rangle} M'_{\vec{y}}$$

(здесь $M_{\vec{x}}$ и $M_{\vec{y}}$ — координатные столбцы векторов $\vec{x}$ и, соответственно, $\vec{y}$ относительно базиса B, а $M'_{\vec{x}}$ и $M'_{\vec{y}}$ — координатные столбцы этих векторов относительно базиса B').

Относительно базиса B' согласно формуле (70.3) имеем

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = M'^{\mathrm{T}}_{\vec{x}} M'_g M'_{\vec{y}}. \qquad (70.g')$$

С другой стороны, воспользовавшись тем же законом относительно базиса B, получим:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = M^{\mathrm{T}}_{\vec{x}} M_g M_{\vec{y}} \overset{?}{=} (T_{\langle B, B' \rangle} M'_{\vec{x}})^{\mathrm{T}} M_g (T_{\langle B, B' \rangle} M'_{\vec{y}}) \overset{?}{=}$$

$$= (M'^{\mathrm{T}}_{\vec{x}} T^{\mathrm{T}}_{\langle B, B' \rangle}) M_g (T_{\langle B, B' \rangle} M'_{\vec{y}}) = M'_{\vec{x}} (T^{\mathrm{T}}_{\langle B, B' \rangle} M_g T_{\langle B, B' \rangle}) M'_{\vec{y}}.$$

Т. е.

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = M'^{\mathrm{T}}_{\vec{x}} (T^{\mathrm{T}}_{\langle B, B' \rangle} M_g T_{\langle B, B' \rangle}) M'_{\vec{y}}. \qquad (70.g)$$

Сравнивая эти два ((70.g') и (70.g)) разложения значения скалярного произведения $g(\vec{x}, \vec{y})$ в базисе B', по лемме 50.1 (о сокращении), получим правило изменения матрицы скалярного произведения при изменении базиса конечномерного векторного пространства.

Теорема 70.1. *Если в конечномерном евклидовом векторном пространстве V определено скалярное произведение, а базис B' задан относительно базиса B матрицей $T_{\langle B, B' \rangle}$,* то *матрицы M_g и M'_g скалярного произведения g относительно соответственных базисов (B и B') связаны законом*:

$$M'_g = T^{\mathrm{T}}_{\langle B,\ B'\rangle} M_g T_{\langle B,\ B'\rangle}. \tag{70.4}$$

Естественный интерес вызывает вопрос, какая матрица может быть матрицей скалярного произведения на конечномерном векторном пространстве.

Заметим, что условие S.2: $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$ влечет равенства:

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = g_{ji},$$

что означает симметричность матрицы скалярного произведения: $M_g = \|g_{ij}\|$, т. е. $M_g = M_g^{\mathrm{T}}$.

Условие S.3 ($g(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$ для любого $\vec{x}$) означает, что все главные миноры матрицы M_g неотрицательны, а условие S.4 (если $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, то $\vec{x} = \vec{0}$) влечет ее невырожденность. Это будет доказано позже.

Имеет место и обратное, т. е. справедлива следующая теорема:

Теорема 70.2. *Матрица $M \in \boldsymbol{gl}(n)$ является матрицей скалярного произведения на n-мерном векторном пространстве тогда и только тогда, когда она симметрична, невырождена и все ее главные миноры неотрицательны.*

Тем самым в какой-то мере дан ответ на поставленный выше вопрос: как много может быть задано скалярных произведений на конечномерном векторном пространстве.

Задание 70.3. Выясните можно ли на векторном пространстве $\langle V^4, B\rangle$ задать скалярное произведение матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найдите координатное задание скалярного произведения, матрица которого равна M.

1. Определим, удовлетворяет ли матрица M условиям теоремы 70.2. Очевидно, матрица M $\overline{\text{? не ?}}$ симметрическая, так как $M^{\mathrm{T}} \overset{?}{=} M$.

$$\det M \overset{?}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ? \neq 0,$$

и значит, матрица M $\overline{\text{? не ?}}$ вырождена.

Найдем главные миноры матрицы M:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D_1=1>0,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1>0,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\cdot 2>0,\ D_4=\det M>0.$$

Таким образом, матрица M удовлетворяет условиям теоремы 70.2 и ее можно рассматривать как матрицу некоторого скалярного произведения.

2. Чтобы получить координатное задание скалярного произведения с матрицей M, запишем в соответствии с полученной выше формулой (70.3)

$$g(\vec{x},\ \vec{y})=M_{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\,M_{g}\,M_{\vec{y}}=M_{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\,M\,M_{\vec{y}}=$$

$$=(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}=$$

$$=x^1y^1-x^1y^2-x^2y^1+2x^2y^2+3x^3y^3+x^3y^4+x^4y^3+4x^4y^4.$$

Матрица скалярного произведения на конечномерном векторном евклидовом пространстве является частным случаем так называемой матрицы Грама.

Определение 70.3. ***Матрицей Грама системы векторов*** *$A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$ векторного пространства V относительно скалярного произведения g называется матрица, составленная из всевозможных скалярных произведений векторов этой системы: $\|g(\vec{a}_i,\ \vec{a}_j)\|$.*

Определитель матрицы Грама называется ***определителем Грама.***

Обозначается матрица Грама системы векторов A (относительно скалярного произведения g): $\Gamma_g(A)=\|g(\vec{a}_i,\ \vec{a}_j)\|$, причем индекс g может быть опущен, если из контекста понятно, о каком скалярном произведении идет речь.

Несложно видеть, что матрица скалярного произведения g

есть ничто иное, как матрица Грама базисной системы векторов:

$$M_g = \| g_{ij} \| = \| g(\vec{e}_i, \ \vec{e}_j) \| = \Gamma(B). \qquad \blacklozenge$$

Очевидно, матрица Грама любой системы векторов симметрична, как и матрица скалярного произведения: $(\Gamma(A))^{\text{т}} = \Gamma(A)$. $\blacklozenge$

Условие Коши — Буняковского (70.1) также может быть выражено через определитель Грама: *для любых векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *евклидова векторного пространства* $\det \Gamma(\vec{x}, \ \vec{y}) \geqslant 0$, так как

$$\begin{vmatrix} g(\vec{x}, \ \vec{x}) & g(\vec{x}, \ \vec{y}) \\ g(\vec{x}, \ \vec{y}) & g(\vec{y}, \ \vec{y}) \end{vmatrix} = g(\vec{x}, \ \vec{x})\, g(\vec{y}, \ \vec{y}) - g^2(\vec{x}, \ \vec{y}).$$

Оказывается, с помощью матрицы Грама в **евклидовом** векторном пространстве можно довольно легко определить линейно зависима система векторов или нет. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 70.2. *Система векторов* $A = \{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$ *векторного пространства* V *линейно независима тогда и только тогда, когда ее матрица Грама некоторого скалярного произведения* g *на* V *невырождена.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы $A = \{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\} \subset V$, равную нулевому вектору:

$$\alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha^k \vec{a}_k = \vec{0}. \qquad (70.a)$$

Линейно зависима или нет система A, зависит от того, найдется или нет нулевой кортеж чисел $\langle \alpha^1, \ \alpha^2, \dots \alpha^k \rangle$, удовлетворяющий (70.$a$). $\blacklozenge$

Пусть на векторном пространстве V определено некоторое скалярное произведение g, тогда очевидно, что все скалярные произведения векторов $g(\vec{a}_i, \ \vec{0}) \overset{?}{=} 0 \quad (i = 1, \ 2, \dots k)$. Откуда

$$g(\vec{a}_i, \ \vec{0}) \overset{(70.a)}{=\!=\!=} g(\vec{a}_i, \ \alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha^k \vec{a}_k) \overset{?}{=}$$

$$= \alpha^1 g(\vec{a}_i, \ \vec{a}_1) + \alpha^2 g(\vec{a}_i, \ \vec{a}_2) + \dots + a^k g(\vec{a}_i, \ \vec{a}_k) \overset{?}{=} 0.$$

Таким образом, система всех условий (при $i = 1, \ 2, \dots k$) составляет систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} g(\vec{a}_1, \ \vec{a}_1)\, \alpha^1 + g(\vec{a}_1, \ \vec{a}_2)\, \alpha^2 + \dots + g(\vec{a}_1, \ \vec{a}_k)\, \alpha^k = 0, \\ g(\vec{a}_2, \ \vec{a}_1)\, \alpha^1 + g(\vec{a}_2, \ \vec{a}_2)\, \alpha^2 + \dots + g(\vec{a}_2, \ \vec{a}_k)\, \alpha^k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots \\ g(\vec{a}_k, \ \vec{a}_1)\, \alpha^1 + g(\vec{a}_k, \ \vec{a}_2)\, \alpha^2 + \dots + g(\vec{a}_k, \ \vec{a}_k)\, \alpha^k = 0, \end{cases} \qquad (70.\Gamma)$$

основной матрицей которой и является матрица Грама системы векторов A: $\Gamma(A) = \|g(\vec{a}_i, \vec{a}_j)\|$, где $i, j \in \{1, 2, \dots k\}$.

Согласно утверждению 42.1 система уравнений (70.Г), а значит, и векторное уравнение (70.a) имеет нулевое решение единственным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Rang} \Gamma(A) = k$, т. е. матрица $\Gamma(A)$ невырождена. ■

Следствие 70.3. *Система векторов векторного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда относительно некоторого скалярного произведения на этом векторном пространстве ее матрица Грама вырождена.* ◆

Отметим, что, если установлена линейная (не) зависимость системы векторов A векторного пространства V с помощью матрицы Грама относительно некоторого скалярного произведения g, то матрица Грама этой системы относительно любого другого скалярного произведения на V также (не) вырождена. (почему? ◆) Причем данная система векторов линейно (не) зависима, если на векторном пространстве V не рассматривать никакого скалярного произведения. ◆

Наибольший интерес представляет скалярное произведение на конечномерном векторном пространстве, матрица которого единичная, не только в силу простоты многих координатных формул, но и ее многих содержательных приложений.

Определение 70.4. *Скалярное произведение на n-мерном векторном пространстве $\langle V^n, B\rangle$ называется* ***скалярным произведением стандартного вида*** *(или* ***стандартным скалярным произведением****), если относительно базиса B его матрица единичная.*

Такое скалярное произведение имеет общепринятое обозначение: $(\vec{x}, \vec{y})$ и, согласно формуле (70.3):

$$(\vec{x}, \vec{y}) = M_{\vec{x}}^{\tau} E\, M_{\vec{y}} = (x^1, x^2, \dots x^n) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \\ = x^1y^1 + x^2y^2 + \dots + x^ny^n. \tag{70.5}$$

Стандартное скалярное произведение можно определять формулой (70.5) относительно некоторого базиса n-мерного пространства, тогда в соответствии с определением матрицы скалярного произведения $M_{(,)} = E$.

Очевидно, если в конечномерном векторном пространстве нашелся хотя бы один базис, относительно которого матрица скалярного произведения единичная, то найдутся и другие базисы, обладающие таким же свойством. ◆

Естествен вопрос, всякое ли скалярное произведение можно привести к стандартному виду? Т. е. можно ли для произвольного скалярного произведения так подобрать базис, чтобы относительно него матрица $M'_g \overset{(70,4)}{=\!=} T^{\mathrm{T}}_{\langle B,\ B'\rangle} M_g T_{\langle B,\ B'\rangle}$ оказалась единичной. Ответ на него будет дан ниже в § 72.

Определение 70.5. *Координатное n-мерное векторное пространство с заданным на нем стандартным скалярным произведением называется* ***стандартным евклидовым n-мерным векторным пространством*** *или* ***координатным евклидовым (n-мерным) векторным пространством.***

Такое пространство обозначается $\langle \mathbf{R}^n,\ (,)\rangle$, $\langle \boldsymbol{M}(n\times 1),\ (,)\rangle$ или $\langle \boldsymbol{M}(1\times n),\ (,)\rangle$ в зависимости от того, какая интерпретация координатного пространства рассматривается.

Пример 70.4. Определим, является ли система векторов $A=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$ стандартного евклидова четырехмерного пространства линейно зависимой, если $\vec{a}_1(1,\ 0,\ 2,\ -4)$, $\vec{a}_2(-1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_3(-1,\ 6,\ 4,\ -5)$.

Решим задачу, вычислив определитель Грама системы векторов A. Стандартное скалярное произведение на четырехмерном векторном пространстве имеет вид:

$$(\vec{x},\ \vec{y})=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3+x^4y^4. \qquad (70.s^4)$$

Чтобы получить $\Gamma(A)=\|(\vec{a}_i,\ \vec{a}_j)\|$ с $\langle i,\ j\rangle\in\{1,\ 2,\ 3\}$, найдем скалярные произведения:

$$(\vec{a}_1,\ \vec{a}_1)=1^2+0^2+2^2+(-4)^2=21.$$
$$(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2)=1(-1)+0\cdot 2+2\cdot 0+(-4)\cdot 1=-5,$$
$$(\vec{a}_1,\ \vec{a}_3)=1(-1)+0\cdot 6+2\cdot 4+(-4)\cdot(-5)=27,$$
$$(\vec{a}_2,\ \vec{a}_2)=(-1)^2+2^2+0^2+1^2=6,$$
$$(\vec{a}_2,\ \vec{a}_3)=?+?+?+?=?$$
$$(\vec{a}_3,\ \vec{a}_3)=(-1)^2+6^2+4^2+(-5)^2=78.$$

Тогда

$$\det\Gamma(A)\overset{?}{=}\begin{vmatrix} 21 & -5 & 27\\ -5 & 6 & 8\\ 27 & 8 & 78\end{vmatrix}=?,$$

что и означает линейную $\overline{\underline{?\text{ не }?}}$ зависимость системы векторов A.

Отметим, что этот способ определения линейной зависимости системы векторов применим только в евклидовых векторных пространствах, он требует значительно меньшего объема вычислений (в общем случае), чем стандартный метод определения линейной зависимости системы векторов в произвольных неевклидовых векторных пространствах (лекция 8, § 38, § 40).

§ 71. ЕВКЛИДОВО ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В настоящем параграфе речь пойдет о свойствах евклидова векторного пространства. Так со скалярным произведением векторов связаны понятия нормы вектора, угла между векторами в таком пространстве, в частности, ортогональности векторов и ортогонального дополнения вектора и пространства.

Напомним.

Определение 70.1. *Векторное пространство V с заданным на нем скалярным произведением называется **евклидовым векторным пространством.***

Обозначается евклидово векторное пространство V со скалярным произведением g, как $\langle V, g\rangle$.

Определение 71.1. ***Нормой вектора** $\vec{x}$ (его **длиной** или **модулем**) евклидова векторного пространства $\langle V, g\rangle$ относительно скалярного произведения g называется число, равное квадратному корню из его скалярного квадрата (скалярного произведения вектора на себя).*

Норма вектора $\vec{x}$ обозначается $\|\vec{x}\|_g$, аналогично обозначению условия ортогональности, индекс скалярного произведения g часто опускается.

Итак, по определению:

$$\|\vec{x}\|_g = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})}. \tag{71.1}$$

Слово норма имеет латинское происхождение, norma означает правило, образец и даже руководящее начало.

Свойства нормы вектора

Свойство 71.1. $\|\vec{x}\|_g \geqslant 0$ *для любого вектора* $\vec{x} \in \langle V, g\rangle$, *причем* $\|\vec{x}\|_g = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{0}$. ◆

Свойство 71.2. $\|\lambda\vec{x}\|_g = |\lambda|\,\|\vec{x}\|_g$ *для любого* $\vec{x} \in \langle V, g\rangle$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$.

Задача 71.1.2. Докажите свойство 71.2.

Доказательство.

$$\|\lambda\vec{x}\|_g = \sqrt{g(\lambda\vec{x}, \overrightarrow{\lambda x})} \stackrel{?}{=} \sqrt{\lambda^2 g(\vec{x}, \vec{x})} \stackrel{?}{=} |\lambda| \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})}. \quad \blacksquare$$

Определение 71.2. ***Ортом*** *называется вектор единичной длины (нормы).*

Орт — слово греческого происхождения, ορθος переводится как прямой.

Следствие 71.1. *Для любого ненулевого вектора евклидова векторного пространства существует коллинеарный ему орт.*

Действительно, если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\|\vec{x}\|_g \neq 0$ и

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_g} \right\|_g \overset{?}{=} \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|_g} \right| \|\vec{x}\|_g \overset{?}{=} \frac{1}{\|\vec{x}\|_g} \|\vec{x}\|_g = 1. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, вектор $\vec{e}_x = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_g}$ — орт, коллинеарный (и даже сонаправленный) ненулевому вектору $\vec{x}$.

Процесс получения орта, сонаправленного с данным ненулевым вектором, называется ***нормированием вектора***.

Свойство 71.3. *Для любых векторов* $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \langle V, g\rangle$

$$|g(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant \|\vec{x}\|_g \|\vec{y}\|_g. \tag{71.2}$$

(Это другая форма записи неравенства Коши — Буняковского (70.1)).

Свойство 71.4. *Для любых векторов евклидова пространства имеет место неравенство:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_g \leqslant \|\vec{x}\|_g + \|\vec{y}\|_g. \tag{71.4}$$

Оно является обобщением хорошо известного в элементарной геометрии свойства сторон треугольника: длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон. Именно поэтому это свойство носит название ***«неравенства треугольника»***.

Доказательство. Рассмотрим для произвольных векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \langle V, g\rangle$ норму вектора $\vec{x} + \vec{y}$.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_g^2 = g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \overset{?}{=} g(\vec{x}, \vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{y}, \vec{y}) \overset{?}{=}$$
$$= \|\vec{x}\|_g^2 + \underline{2g(\vec{x}, \vec{y})} + \|\vec{y}\|_g^2 \overset{?}{\leqslant} g(\vec{x}, \vec{x}) + \underline{2\|\vec{x}\|_g \|\vec{y}\|_g} + g(\vec{y}, \vec{y}) =$$
$$= (\|\vec{x}\|_g + \|\vec{y}\|_g)^2.$$

Т. е. $\|\vec{x} + \vec{y}\|_g^2 \leqslant (\|\vec{x}\|_g + \|\vec{y}\|_g)^2$, что и равносильно неравенству (71.4). $\blacksquare$

В евклидовом векторном пространстве $CL_2[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой, со скалярным произведением (70.2):

$$(f, g)=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \tag{71.5}$$

норма вектора (функции) определяется формулой:

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}, \tag{71.6}$$

а неравенства Коши — Буняковского и треугольника имеют вид:

$$\left[\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt$$

и (71.7)

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\,dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}+\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Эти неравенства играют важную роль во многих разделах математического анализа.

Относительно стандартного скалярного произведения (70.5) на n-мерном евклидовом векторном пространстве:

$$(\vec{x}, \vec{y})=x^1y^1+x^2y^2+\ldots x^ny^n$$

норма вектора $\vec{x}\,(x^1, x^2, \ldots x^n)$ определяется как:

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}, \tag{71.8}$$

а неравенства Коши — Буняковского и треугольника — формулами:

$$(x^1y^1+x^2y^2+\ldots+x^ny^n)^2\leqslant$$

$$\leqslant((x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2)\,((y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^n)^2)$$

и (71.9)

$$\sqrt{(x^1+y^1)^2+(x^2+y^2)^2+\ldots+(x^n+y^n)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}+\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^n)^2}.$$

◆

В элементарной математике косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ трехмерного пространства выражается формулой:

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\ |\vec{y}|},$$

где $(\vec{x}, \vec{y})$ — скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (см. (70.s^3)), а $|\vec{x}|$ и $|\vec{y}|$ — их длины (модули). Так как для произвольного скалярного произведения g на векторном пространстве V для любых ненулевых векторов имеет место неравенство:

$$0 \overset{?}{\leqslant} \left| \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|_g\ \|\vec{y}\|_g} \right| \overset{?}{\leqslant} 1,$$

(см. неравенство Коши — Буняковского (71.2)), то число $\dfrac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|_g\ \|\vec{y}\|_g}$ может быть принято за косинус некоторого угла, который по определению и принимается за угол между ненулевыми векторами произвольного евклидова векторного пространства $\langle V, g \rangle$.

Определение 71.3. ***Углом между ненулевыми векторами** $\vec{x}$ **и** $\vec{y}$ **в евклидовом векторном пространстве** $\langle V, g \rangle$ **(относительно скалярного произведения** g**) называется число:***

$$\arccos \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|_g \|\vec{y}\|_g}.$$

Угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ обозначается $(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})_g$, причем индекс обычно опускается, если на векторном пространстве рассматривается единственная евклидова структура.

Таким образом:

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})_g = \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\|_g\ \|\vec{y}\|_g}. \tag{71.10}$$

Замечание 71.1. В силу свойства 71.2 $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})_g \overset{?}{=} \pm 1$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны. ◆

В n-мерном векторном пространстве со стандартным скалярным произведением (заданным относительно некоторого базиса) угол между векторами $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)$ и $\vec{y}(y^1, y^2, \dots y^n)$ (ненулевыми) определяется согласно (71.10) по координатам этих векторов формулой:

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}\ \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^n)^2}} \qquad (71.11)$$

(См. также (70.5), (71.8)).

Задача 71.1.1. В стандартном евклидовом четырехмерном векторном пространстве найдите угол между векторами $\vec{a}(1, -1, 0, 0)$ и $\vec{b}(-1, 2, 0, 2)$.

Указание. См. (71.11), ($70.s^4$), (71.8).

1. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найдем нормы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в стандартном скалярном произведении.

3. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \overset{?}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ?$.

Определение 71.3 позволяет ввести углы между векторами в пространствах функций, например, в $CL_2[a, b]$ (см. (71.10), (71.5) и (71.6)).

Пример 71.1. Определим угол между функциями — векторами пространства $CL_2[0, 1]$: x^m и x^n, если $m, n \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

1. Найдем в $CL_2[-1, 1]$ согласно (71.5) скалярное произведение:

$$(x^m, x^n) \overset{(71.5)}{=\!=} \int_{-1}^{1} x^m x^n\, dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n}\, dx \overset{?}{=} \left.\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right|_{-1}^{1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } (m+n) \text{ нечетно,} \\ \dfrac{2}{m+n+1}, & \text{если } (m+n) \text{ четно.} \end{cases} \qquad (71.x)$$

2. Найдем в $CL_2[-1, 1]$ нормы:

$$\|x^m\| \overset{(71.6)}{=\!=} \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^m)^2\, dx} \overset{?}{=} \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \ \text{ и } \ \|x^n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

3. Тогда по определению косинуса угла между векторами (71.10), если: $(m+n)$ четно, то $\cos(\widehat{x^m, x^n}) = 0$ и $(\widehat{x^m, x^n}) = \pi/2$, а если $(m+n)$ нечетно, то

$$\cos(\widehat{x^m, x^n}) = \frac{2}{m+n+1} : \left(\sqrt{\frac{2}{2m+1}}\ \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\right) = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{m+n+1}.$$

В частности, если $m = n$, то

$$\cos(\widehat{x^n, x^n}) = \frac{\sqrt{(2n+1)^2}}{2n+1} \overset{?}{=} 1$$

и, значит, $(\widehat{x^n, x^n}) = \arccos 1 = 0$, что вполне согласуется со здравым смыслом: $x^n \parallel x^n$.

Определим, найдутся ли среди множества функций — векторов $T = \{x^n \mid n \in \{0\} \cup \mathbf{N}\}$ коллинеарные пары различных векторов. Согласно замечанию 71.1 модуль косинуса угла между такими векторами равен 1. Тогда

$$\frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{m+n+1} \overset{?}{=} 1,$$

откуда $(m-n)^2 \overset{?}{=} 0$, т. е. $m = n$. Следовательно, при различных m и n векторы-функции x^m и x^n неколлинеарны. ◆

Заметим, что если рассматривать векторное пространство $\mathscr{P}^n[x]$ полиномов от одной переменной степени не выше n (его размерность $n+1$) со скалярным произведением стандартного вида (70.5), определяя скалярное произведение двух его векторов-полиномов формулой:

$$(f,\ g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n,$$

где

$$f = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

а

$$g = b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

то система векторов: $B = \langle 1,\ x^1,\ x^2, \ldots x^n \rangle$ не только образует в $\mathscr{P}^n[x]$ базис (пример 41.5), но относительно стандартного скалярного произведения все векторы этого базиса попарно ортогональны и имеют единичные нормы. ◆

Задача 71.1.3. В пространстве $CL_2[-\pi, \pi]$ определите, какие углы образуют между собой пары всевозможных векторов системы: $S = \{\sin mt,\ \cos nt \mid \langle m,\ n \rangle \in \mathbf{N} \times \{\{0\} \cup \mathbf{N}\}\}$.

1. В евклидовом пространстве $CL_2[-\pi, \pi]$ найдем скалярное произведение при $m \neq n$:

$$(\sin mt,\ \sin nt) \overset{(71.5)}{=\!=} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt\, dt \overset{?}{=}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(m-n)t - \cos(m+n)t]\, dt \overset{?}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)t}{m-n} - \frac{\sin(m+n)t}{m+n} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \overset{?}{=} 0.$$

Следовательно, угол, который образуют в $CL_2[-\pi, \pi]$ эти пары векторов-функций — прямой $(\pi/2)$.

В то же время для любого натурального m:

$$(\sin mt,\ \sin mt)\overset{(71.5)}{=\!=}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mt\,dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2mt)\,dt\overset{?}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin 2mt}{m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\overset{?}{=}\pi,\ \text{т. е.}\ \|\sin mt\|\overset{(71.?)}{=\!=}\sqrt{\pi}$$

и согласно (71.10) $(\sin mt,\widehat{\ }\sin mt)=0$.

2. Аналогично находятся скалярные произведения:

$$(\cos mt,\ \cos nt)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cos nt\,dt=?\ \text{при}\ m\neq n\ \text{и}$$

$$(\cos mt,\ \cos mt)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mt\,dt=?.$$

Откуда следует, что $\|\cos mt\|=\sqrt{\pi}$ и $(\cos mt,\widehat{\ }\cos mt)=\pi/2$.

3. Находя скалярные произведения:

$$(\sin mt,\ \cos nt)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mt\cos nt\,dt\overset{?}{=}0,$$

получим, что при любых $\langle m,\ n\rangle\in\mathbf{N}\times\{\{0\}\cup\mathbf{N}\}$ значения $(\sin mt,\widehat{\ }\cos nt)=\pi/2$. Т. е. все различные векторы системы S попарно образуют прямые углы.

Определение 71.3 угла между векторами позволяет ввести в евклидовом векторном пространстве вполне естественным образом понятие ортогональности векторов.

Определение 71.4. ***Векторы*** $\vec{x}$ и $\vec{y}$ *называются* ***ортогональными относительно скалярного произведения*** g *евклидова векторного пространства* $\langle V,\, g\rangle$, *если их скалярное произведение равно нулю,* т. е. $g(\vec{x},\ \vec{y})=0$.

Ортогональность векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ векторного пространства V относительно скалярного произведения g обозначается $\vec{x}\perp_g\vec{y}$, а их неортогональность — $\vec{x}\not\perp_g\vec{y}$. Если на векторном пространстве V рассматривается только одно скалярное произведение, то в обозначениях индекс может быть опущен: $\vec{x}\perp\vec{y}$, и, соответственно, $\vec{x}\not\perp\vec{y}$.

Определение 71.5. ***Вектор*** $\vec{x}$ *евклидова векторного пространства* $\langle V,\ g\rangle$ *называется* ***ортогональным к*** *его* ***под-***

множеству A, *если* $\vec{x}$ *ортогонален любому вектору этого подмножества.*

Обозначается ортогональность вектора $\vec{x}$ и A как $\vec{x} \perp A$.

$$\vec{x} \perp A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\vec{y} \in A \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}).$$

Очевидно, что только один вектор евклидова векторного пространства ортогонален всем его векторам, так как из равенства $g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ при всех $\vec{y} \in V$ следует, в частности, что $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, а значит, $\vec{x} \overset{?}{=} \vec{0}$. Если же векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ненулевые, но ортогональные, то угол между ними, очевидно, равен $\pi/2$. ◆

Это позволяет сделать вывод, что для всех векторов евклидова векторного пространства

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \, \|\vec{x}\|_g \, \|\vec{y}\|_g. \tag{71.11}$$

Т. е. скалярное произведение двух произвольных векторов евклидова векторного пространства есть число, равное произведению их норм на косинус угла между ними.

Так как в элементарной геометрии для векторов $\vec{x}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ число $||\vec{x}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})|$ есть длина ортогональной проекции вектора $\vec{x}$ на прямую параллельную вектору $\vec{y}$ (рис. 19), то естественно следующее определение.

Определение 71.6. *Число* $\|\vec{x}\|_g \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ *называется* ***ортогональной проекцией вектора*** $\vec{x}$ ***на ненулевой вектор*** $\vec{y}$ *евклидова векторного пространства* $\langle V, g \rangle$.

Проекция вектора $\vec{x}$ на вектор $\vec{y}$ относительно скалярного произведения g обозначается

$$(pr_{\vec{y}} \, \vec{x})_g \overset{\text{def}}{=\!=} \|\vec{x}\|_g \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \overset{?}{=} \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|_g}, \tag{71.12}$$

индекс g может быть опущен, если рассматривается единственное скалярное произведение.

Значением проекции вектора $\vec{x}$ на вектор $\vec{y}$ может быть любое действительное число (почему? ◆), а формула (71.11) позволяет дать следующую **геометрическую интерпретацию скалярного произведения** векторов евклидова векторного пространства:

скалярное произведение вектора $\vec{x}$ на ненулевой вектор $\vec{y}$ есть произведение нормы вектора $\|\vec{y}\|_g$ на проекцию $\vec{x}$ на вектор $\vec{y}$, т. е.:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y}\|_g (pr_{\vec{y}} \vec{x})_g. \qquad (71.13)$$

Если оба вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ненулевые, то очевидно:

$$\|\vec{y}\|_g (pr_{\vec{y}} \vec{x})_g = \|\vec{x}\|_g (pr_{\vec{x}} \vec{y})_g.$$

Скалярное произведение позволяет получать интересные результаты и в элементарной геометрии, причем зачастую использование его свойств делает доказательство существенно проще и нагляднее, чем при стандартных методах элементарной геометрии.

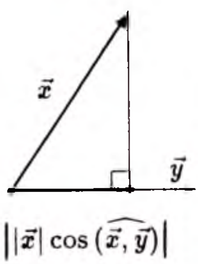


Рис. 19

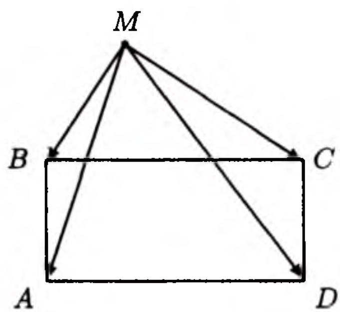


Рис. 20

П р и м е р 71.2. Докажем, что для прямоугольника $ABCD$ и произвольной точки M суммы квадратов длин отрезков, соединяющих точку M с парами противоположных вершин, равны, т. е. имеет место равенство:

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2. \qquad (71.m)$$

Пусть $ABCD$ — произвольный прямоугольник, и M — произвольная точка (рис. 20).

Напомним, что $|MA| = |\overline{MA}| = |\overrightarrow{MA}|$, где $\overline{MA}$ — направленный отрезок, а $\overrightarrow{MA}$ — свободный вектор, представителем которого является $\overline{MA}$ (определения 4.2, 16.4), при этом $\overrightarrow{MA}$ — вектор векторного пространства V^3 (свободных векторов).

Также $|MA|^2 \stackrel{?}{=} (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA})$ — скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{MA}$, аналогичные равенства имеют место для $|MC|^2$, $|MB|^2$ и $|MD|^2$.

Это позволяет заменить условие (71.m) на следующее:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MC})\overset{?}{=}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD}). \qquad (71.m')$$

Заметим, что из $\triangle MAD$ и $\triangle MBC$ имеем: $\overrightarrow{MA}\overset{?}{=}\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}$, и $\overrightarrow{MC}\overset{?}{=}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$.

Тогда, подставляя эти соотношения в левую часть (71.m'), получим, используя свойства скалярного произведения:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})+$$
$$+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})\overset{?}{=}$$
$$=\underline{(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD})}+(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA})+$$
$$+\underline{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB})}+(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})\overset{?}{=}$$
$$=\underline{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD})}+(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA})+$$
$$+(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}).$$

Сравнивая это выражение с (71.m), видим, что для доказательства равенства надо показать, что

$$(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA})+$$
$$+(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})=0.$$

Заметим, что $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$, что позволяет сделать преобразования:

$$\underbrace{(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MD})}_{?}+(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA})+$$
$$+\underbrace{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MB})}_{?}+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})\overset{?}{=}$$
$$=2\,((\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}))\overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=}2\,((\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}))\overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=}2\,((\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}))\overset{?}{=}2\,((\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}))\overset{?}{=}0.$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что в приведенном доказательстве было совершенно несущественно положение точки M: лежит ли она в плоскости прямоугольника, внутри его или нет, не совпадает ли с какой-либо вершиной прямоугольника. Полное же доказательство соотношения (71.m) средствами элементарной геометрии (без при-

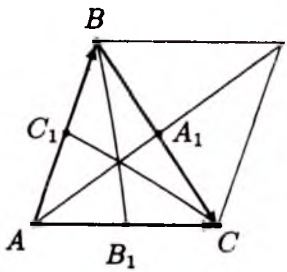


Рис. 21

влечения скалярного произведения) потребовало бы рассмотрения каждого из этих случаев в отдельности.

Задача 71.2.1. Докажите, что для произвольного $\triangle ABC$ имеет место:

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CC_1})+(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BB_1})=0,$$

где A_1 — середина стороны BC, B_1 — середина стороны AC, а C_1 — середина стороны AB треугольника (рис. 21).

Указание. $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

Задача 71.2.2. Докажите, что, если в тетраэдре $ABCD$ две пары противоположных ребер перпендикулярны (например, $(AB)\perp(CD)$ и $(BC)\perp(AD)$), то ребра третьей пары также перпендикулярны $((CA))\perp(BD))$.

Указание. Докажите, что при произвольном расположении точек в пространстве имеет место равенство:

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{DB})=0.$$

Полезно ввести определение вектора-проекции.

Определение 71.7. *Вектор* $(pr_{\vec{y}}\,\vec{x})_g\,\vec{e}_{\vec{y}}$ *называется* ***вектором-проекцией вектора*** $\vec{x}$ ***на ненулевой вектор*** $\vec{y}$ *евклидова векторного пространства* $\langle V,\ g\rangle$.

(Здесь $\vec{e}_{\vec{y}}$ — орт сонаправленный с вектором $\vec{y}$). Если же вектор $\vec{y}$ единичной нормы, то вектор-проекция $\vec{x}$ на $\vec{y}$ выражается еще проще: $(pr_{\vec{y}}\,\vec{x})_g\,\vec{y}$.

Обозначается вектор-проекция $\vec{x}$ на $\vec{y}$:

$$pr_{\vec{y}}\,(\vec{x})_g \overset{\text{def}}{=\!=} (pr_{\vec{y}}\,\vec{x})_g\,\vec{e}_{\vec{y}} \overset{?}{=} \frac{g\,(\vec{x},\ \vec{y})}{\|\vec{y}\|_g^2}\,\vec{y}. \qquad (71.14)$$

Если структура евклидова векторного пространства задана стандартным скалярным произведением, то индекс обычно не пишется, как в обозначении проекции вектора на вектор, так и вектора-проекции: $(pr_{\vec{y}}\,\vec{x})$ и, соответственно, $pr_{\vec{y}}(\vec{x})$. Индекс g может быть опущен для упрощения записи и в том случае, когда скалярное произведение не стандартно, но ясно, относительно какого скалярного произведения рассматриваются проекции.

Задача 71.3.1. Найдите вектор-проекцию и проекцию вектора $\vec{x}(1,\,2,\,3)$ на вектор $\vec{y}(1,\,0,\,-1)$ относительно стандартного скалярного произведения трехмерного векторного пространства.

Указание. См. формулы (71.14) и (71.12).

Задача 71.2.3. Найдите сумму векторов-проекций произвольного вектора $\vec{x}$ на векторы-стороны равностороннего $\triangle ABC$: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 22).

Указание. Надо найти вектор

$$\vec{y}=pr_{\vec{a}}(\vec{x})+pr_{\vec{b}}(\vec{x})+pr_{\vec{c}}(\vec{x}).$$

$\triangle ABC$ такой, что $\overline{AB}\in\vec{a}$, $\overline{BC}\in\vec{b}$, $\overline{CA}\in\vec{c}$, где $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$. $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, поэтому эти векторы можно взять за базисные в векторной плоскости $\mathscr{V}^2$, а произвольный вектор $\vec{x}$ представить в виде: $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, тогда

$$\vec{y}=pr_{\vec{a}}(\vec{x})+pr_{\vec{b}}(\vec{x})+pr_{\vec{c}}(\vec{x})\overset{(71.14)}{=\!=\!=}\frac{(\vec{x},\,\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}+\frac{(\vec{x},\,\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}+\frac{(\vec{x},\,\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\,\vec{c}\overset{?}{=}$$

$$=\frac{1}{|\vec{a}|^2}\,((\vec{x},\,\vec{a})\,\vec{a}+(\vec{x},\,\vec{b})\,\vec{b}+(\vec{x},\,\vec{c})\,\vec{c})=?$$

Утверждение 71.1. *В евклидовом векторном пространстве $\langle V,\,g\rangle$ вектор $\vec{x}'=\vec{x}-pr_{\vec{y}}(\vec{x})$ ортогонален вектору $\vec{y}$.*

Задача 71.3.2. Докажите утверждение 71.1.

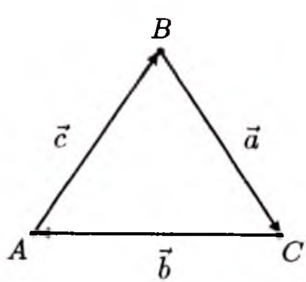


Рис. 22

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\vec{x}'$ и $\vec{y}$:

$$g(\vec{x}', \vec{y}) = g(\vec{x} - (pr_{\vec{y}}\vec{x})\vec{e}_y, \vec{y}) \overset{(71.14)}{=\!=\!=} g\left(\vec{x} - \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2}\vec{y}, \vec{y}\right) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} g(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} g(\vec{y}, \vec{y}) \overset{?}{=} 0,$$

что и означает ортогональность $\vec{x}'$ и $\vec{y}$. ■

Отметим, что предыдущие рассуждения не предполагают, вообще говоря, конечномерности векторного пространства, на котором задана евклидова структура.

Теорема 71.1. *Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова векторного пространства $\langle V, g\rangle$ ненулевые и ортогональные, то имеет место равенство:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2. \tag{71.15}$$

(Сравните с неравенством (71.4)).

При этом естественно назвать вектор суммы $\vec{x} + \vec{y}$ ненулевых и ортогональных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ гипотенузой векторного прямоугольного треугольника со сторонами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — его катетами. Тогда предыдущее утверждение (и равенство) есть не что иное, как обобщение известной теоремы Пифагора, справедливое в произвольном евклидовом векторном пространстве, даже не обязательно конечномерном:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Задание 71.1. Докажите теорему 71.1.

Доказательство. Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \langle V, g\rangle$ и $\vec{x} \perp \vec{y}$, тогда

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \overset{?}{=} g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \overset{?}{=} g(\vec{x}, \vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{y}, \vec{y}) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2. \quad ■$$

Естественно, одна и та же пара векторов относительно одного скалярного произведения может быть ортогональна, а относительно другого — нет. Так базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ двумерного векторного пространства ортогональны относительно стандартного скалярного произведения в этом базисе $(70.s^2)$:

$\vec{e}_1(1, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \leftrightharpoons 1\cdot 0 + 0\cdot 1$, но не ортогональны относительно скалярного произведения $(70.g_2)$:

$$g_2(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightharpoons x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2$$

(см. задание 70.1).

$$g_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1\cdot 0 - 1\cdot 1 - 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 = -1.$$

Определение 71.8. *Множество векторов называется* ***ортогональной системой векторов*** *(или* ***системой попарно ортогональных векторов****), если любые два ее вектора ортогональны (относительно данного скалярного произведения).*

В примере 71.1 и задаче 71.1. 3 были приведены примеры ортогональных систем векторов: $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ — относительно стандартного скалярного произведения в векторном пространстве $\mathscr{F}^n[x]$ и относительно скалярного произведения в $CL_2[-\pi, \pi]$ его система $S = \{\sin mt, \cos nt \mid \langle m, n\rangle \in \mathbf{N}^2\}$.

Утверждение 71.2. *Всякая ортогональная система ненулевых векторов евклидова векторного пространства $\langle V, g\rangle$ линейно независима.*

Доказательство. Пусть V — евклидово векторное пространство со скалярным произведением g и $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_k\}$ — его система ненулевых попарно ортогональных векторов, т. е. $\vec{a}_i \perp_g \vec{a}_j$ или $g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) \overset{?}{=} 0$ при всех $i, j \in \{1, 2, \dots k\}$ и $i \neq j$.

Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы A, равную нулевому вектору, т. е.

$$\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \dots + \alpha^k\vec{a}_k = \vec{0}. \tag{71.A}$$

Для произвольного вектора $\vec{a}_j \in A$ имеет место равенство: $g(\vec{0}, \vec{a}_j) \overset{?}{=} 0$. Тогда

$$0 = g(\vec{0}, \vec{a}_j) \overset{(71.A)}{=\!=} g(\alpha^1\vec{a}_1 + \alpha^2\vec{a}_2 + \dots + \alpha^k\vec{a}_k, \vec{a}_j) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \alpha^1 g(\vec{a}_1, \vec{a}_j) + \alpha^2 g(\vec{a}_2, \vec{a}_j) + \dots + \alpha^{j-1} g(\vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j) +$$
$$+ \alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j) + \alpha^{j+1} g(\vec{a}_{j+1}, \vec{a}_j) + \dots + \alpha^k g(\vec{a}_k, \vec{a}_j) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \alpha^1 0 + \alpha^2 0 + \dots + \alpha^{j-1} 0 + \alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j) + \alpha^{j+1} 0 + \dots + \alpha^k 0 = \alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j).$$

Следовательно $\alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j) = 0$, откуда $\alpha^j = 0$ (почему? ♦).

Поскольку α^j — любой из коэффициентов линейной комбинации (71.A), то $\langle \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^k\rangle = \langle 0, 0, \dots 0\rangle$, что означает тривиальность этой линейной комбинации и линейную независимость системы векторов A.

♦ ■

Укажем более краткую тензорную запись вычислений в доказательстве утверждения:

$$0 \stackrel{?}{=} g(\vec{0}, \vec{a}_j) \stackrel{(71.A)}{=\!=\!=} g(\alpha^i \vec{a}_i, \vec{a}_j) \stackrel{?}{=} \alpha^i g(\vec{a}_i, \vec{a}_j) \stackrel{?}{=} \alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j).$$

Следовательно $\alpha^j g(\vec{a}_j, \vec{a}_j) = 0$, откуда $\alpha^j = 0$ для любого $j \in \{1, 2, \dots k\}$, что означает тривиальность линейной комбинации (70.A) и линейную независимость системы векторов A. ■

Следствие 71.2. *Матрица Грама ортогональной системы векторов невырождена.* ♦

Следствие 71.3. *Всякая упорядоченная ортогональная система из n ненулевых векторов n-мерного евклидова векторного пространства образует его базис.*

*Такой **базис** называется **ортогональным.***

Действительно, по предыдущему утверждению эта система n векторов линейно независима, а согласно утверждению 41.3 она базис n-мерного векторного пространства. ■

Из задачи 71.1.3 следует, что система векторов-функций:

$$\langle 1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots \sin nt, \cos nt \rangle$$

образует базис в пространстве тригонометрических полиномов n-ого порядка. Заметим, что непосредственное доказательство этого факта (исходя только из определения линейной независимости системы векторов) довольно затруднительно или, во всяком случае имеет весьма объемные вычисления.

Естественно задаться вопросом, всегда ли в евклидовом конечномерном векторном пространстве существует базис, состоящий из попарно ортогональных векторов. Ответ на него можно получить, изучив как происходит ортогонализация базиса конечномерного векторного пространства.

§ 72. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ БАЗИСА ЕВКЛИДОВА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы дадим утвердительный ответ на поставленный выше вопрос, более того: укажем алгоритм построения в произвольном векторном пространстве базиса, состоящего из попарно ортогональных векторов-ортов (единичной нормы).

Определение 72.1. ***Базис евклидова векторного пространства*** $\langle V, g \rangle$ *называется **ортонормированным**, если все его векторы — попарно ортогональные орты (относительно скалярного произведения g).*

Простейшим примером ортонормированного базиса в координатном евклидовом пространстве является стандартный базис $B^0 = \langle E_1, E_2, \dots E_n \rangle$ (определение 41.3), например, в $M(3 \times 1)$ он составлен из векторов:

$$B_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ортонормированный относительно скалярного произведения g базис n-мерного евклидова векторного пространства обозначается $B_g = \langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n \rangle$, причем индекс g может быть опущен, если ясно, о каком скалярном произведении идет речь. Векторы такого базиса в трехмерном векторном пространстве свободных векторов V^3 принято обычно обозначать буквами: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, в двумерном V^2 соответственно $\vec{i}, \vec{j}$.

Условия ортонормированности базиса выражаются формулой:

$$g(\vec{i}_j, \vec{i}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k \\ 0, & \text{если } j \neq k \end{cases} \tag{72.1}$$

или $g(\vec{i}_j, \vec{j}_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера, а индексы $\{j, k\} \subset \{1, 2, \dots n\}$. Из этой формулы следует, что в таком базисе матрица скалярного произведения g единичная:

$$M_g = \Gamma(B) = \| g(\vec{i}_j, \vec{i}_k) \| = E.$$

А значит, это скалярное произведение имеет смысл обозначать $(\vec{x}, \vec{y})$, как скалярное произведение стандартного вида, каковым оно и является в базисе B: ◆

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n$$

(где векторы $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)$ и $\vec{y}(y^1, y^2, \dots y^n)$ заданы своими координатами относительно ортонормированного базиса B). Тем самым установлено одно из его основных свойств.

Свойство 72.1. *В ортонормированном базисе скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.*

Или, другими словами, скалярное произведение на конечномерном векторном пространстве имеет стандартный вид, если координаты векторов указаны в базисе, ортонормированном относительно этого скалярного произведения.

Причем в ненулевом векторном пространстве такой базис для данного скалярного произведения неединствен, например, если $B=\langle\vec{i}\rangle$ — ортонормированный базис одномерного векторного пространства, то $B'=\langle-\vec{i}\rangle$ также является его базисом. ♦

Очевидно, что в ортонормированном базисе в любом конечномерном векторном пространстве скалярное произведение может быть представлено в удобном виде:

$$(\vec{x},\ \vec{y})=M^{\mathrm{T}}_{\vec{x}}\,M_{\vec{y}}, \tag{72.2}$$

$M_{\vec{y}}$ — координатный столбец вектора $\vec{y}$.

$M^{\mathrm{T}}_{\vec{x}}$ — координатная строка вектора $\vec{x}$.

При этом любая координата вектора $\vec{x}(x^1,\ x^2, \dots x^n)$ в ортонормированиом базисе чрезвычайно просто выражается посредством скалярного произведения: ♦

$$x^k \overset{?}{=} (\vec{x},\ \vec{i}_k) \overset{(72.1)}{=\!=\!=} |pr_{\vec{i}_k}\vec{x}|$$

$(k=1,\ 2, \dots n)$.

Свойство 72.2. *Для любого вектора евклидова векторного пространства его k-ая координата равна скалярному произведению этого вектора на k-ый координатный вектор ортонормированного базиса или, что то же самое,— ортогональной проекции вектора $\vec{x}$ на k-ый орт.*

Следствие 72.1. *В ортонормированном базисе конечномерного евклидова векторного пространства всякий вектор равен сумме своих ортогональных векторов-проекций на базисные векторы.*

Так как

$$\vec{x}=x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+\dots+x^n\vec{i}_n=x^k\vec{i}_k\overset{?}{=}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\vec{x},\ \vec{i}_k)\,\vec{i}_k\overset{?}{=}\sum_{k=1}^{n}(pr_{\vec{i}_k}\vec{x})\,\vec{i}_k \overset{\text{опр. } 71.7}{=\!=\!=\!=} \sum_{k=1}^{n} pr_{\vec{i}_k}(\vec{x}), \quad ♦$$

где векторы $\vec{i}_k$ — орты $k=1,\ 2, \dots n$. ■

Таким образом, произвольный ортонормированный базис любого конечномерного евклидова пространства обладает свойствами, аналогичными базису трехмерного пространства, которое рассматривается в элементарной геометрии. Поэтому особый интерес составляет тот факт, что в произвольном евклидовом конечномерном пространстве такой базис существует. Чтобы доказать это, воспользуемся так называемым процессом ортогонализации системы векторов, который заключается в алгоритме построения ортогональной системы ненулевых векторов по данной линейно независимой системе.

Пусть $B=\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\rangle$ — некоторый базис n-мерного векторного пространства, на котором задано скалярное произведение g. Норма вектора относительно g будет обозначаться $\| \ \|$.

1. Положим вектор $\vec{a}_1=\vec{e}_1$.

2. Следующий вектор будем искать в виде:

$$\vec{a}_2=\vec{e}_2-\lambda_2^1\vec{a}_1, \tag{72.$\vec{a}_2$}$$

подбирая число λ_2^1 так, чтобы векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ были ортогональны. Для этого используем условие их ортогональности:

$$g(\vec{a}_1, \vec{a}_2)=0 \xleftrightarrow{(72.\vec{a}_2)} g(\vec{a}_1, \vec{e}_2-\lambda_2^1\vec{a}_1)=0$$

$$\|$$

$$g(\vec{a}_1, \vec{e}_2)-\lambda_2^1 g(\vec{a}_1, \vec{a}_1)=0.$$

Откуда:

$$\lambda_2^1=\frac{g(\vec{a}_1, \vec{e}_2)}{g(\vec{a}_1, \vec{a}_1)}\overset{?}{=}\frac{g(\vec{a}_1, \vec{e}_2)}{\|\vec{a}_1\|^2}.$$

При данном значении λ_2^1 система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ортогональна и потому линейно независима (см. утверждение 71.2).

3. Вектор $\vec{a}_3$ найдем в виде:

$$\vec{a}_3=\vec{e}_3-\lambda_3^1\vec{a}_1-\lambda_3^2\vec{a}_2, \tag{72.$\vec{a}_3$}$$

так, чтобы $\vec{a}_3\perp\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3\perp\vec{a}_2$. При этом числа λ_3^1 и λ_3^2 будут определяться условиями ортогональности этого вектора уже найденным векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, причем $\vec{a}_1\perp\vec{a}_2$:

$$g(\vec{a}_1, \vec{a}_3)=0 \text{ и } g(\vec{a}_2, \vec{a}_3)=0.$$

Подставляя в первое из этих равенств выражение вектора $\vec{a}_3$ согласно формуле (72.a_3), найдем:

$$g(\vec{a}_1, \vec{e}_3-\lambda_3^1\vec{a}_1-\lambda_3^2\vec{a}_2)=0$$

$$\|?$$

$$g(\vec{a}_1, \vec{e}_3)-\lambda_3^1 g(\vec{a}_1, \vec{a}_1)-\lambda_3^2 0=0.$$

Откуда

$$\lambda_3^1\overset{?}{=}\frac{g(\vec{a}_1, \vec{e}_3)}{\|\vec{a}_1\|^2}.$$

Аналогично получается

$$\lambda_3^2 \overset{?}{=} \frac{g(\vec{a}_2, \vec{e}_3)}{\|\vec{a}_2\|^2}.$$

При этом полученная система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ортогональна. ♦

4. Произвольный, k-ый вектор $\vec{a}_k$ будем искать в виде:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k^j \vec{a}_j, \qquad (72.\vec{a}_k)$$

коэффициенты разложения которого по найденной ранее системе векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_{k-1}\}$ определим из условий ортогональности, умножая последовательно $\vec{a}_k$ скалярно на векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_{k-1}$. Получим при всех $s = 1, 2, \dots k-1$.

$$g(\vec{a}_s, \vec{a}_k) = 0 \Rightarrow g(\vec{a}_s, \vec{e}_k) - \lambda_k^s g(\vec{a}_s, \vec{a}_s) = 0 \qquad ♦$$

$$\lambda_k^s \overset{?}{=} \frac{g(\vec{a}_s, \vec{e}_k)}{\|\vec{a}_s\|^2}.$$

5. Причем каждый из получаемых таким образом векторов $\vec{a}_k$ — ненулевой, так как из равенства $\vec{a}_k = \vec{0}$ следовало бы, что

$$\vec{e}_k \overset{(72.\vec{a}_k)}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k^j \vec{a}_j,$$

а значит, $\vec{e}_k \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_{k-1}) \overset{?}{=} L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{k-1})$, что противоречит линейной независимости базисной системы векторов. ♦

6. Так как базисная система векторов $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ конечна, то за конечное число шагов (n) процесс ее ортогонализации будет закончен, т. е. получим ортогональную систему из n ненулевых векторов и, согласно следствию 71.3 — ортогональный базис $A = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n \rangle$ векторного пространства V^n.

Чтобы получить ортонормированный базис этого пространства $\langle V^n, g \rangle$, остается пронормировать каждый из векторов этой системы:

$$\vec{i}_k = \frac{\vec{a}_k}{\|\vec{a}_k\|},$$

$(k=1, 2, \dots n)$, что и завершит построение ортонормированного базиса $B=\langle\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n\rangle$, так как полученные векторы будут не только ортогональны, но и орты (векторы с нормой, равной единице). Тем самым и доказана следующая теорема.

Теорема 72.1. *В любом ненулевом конечномерном евклидовом векторном пространстве существует ортонормированный базис.*

Она может быть сформулирована иначе.

В любом ненулевом конечномерном евклидовом векторном пространстве со скалярным произведением g существует базис, относительно которого его матрица M_g единичная — это дает ответ на поставленный выше в § 70 вопрос о приводимости матрицы произвольного скалярного произведения к единичному виду в подходящем базисе. ♦

Это позволяет выразить результат основной теоремы этого параграфа другими словами.

В любом ненулевом конечномерном евклидовом векторном пространстве скалярное произведение приводимо к стандартному виду.

Если учесть, что матрица M_g скалярного произведения изменяется по закону (70.4), то доказанная теорема означает, что для произвольного базиса B евклидова векторного пространства найдется такой базис B', что

$$T^{\mathrm{T}}_{\langle B,\ B'\rangle} M_g T_{\langle B,\ B'\rangle} = E.$$

Очевидно, что в каждом ненулевом конечномерном векторном пространстве существует более одного ортогонального базиса (при размерности пространства свыше единицы их даже бесконечно много). ♦

Описанный выше процесс ортогонализации системы векторов используется не только для доказательства существования в конечномерном евклидовом векторном пространстве, но и для построения таких базисов в конкретных пространствах при решении различных задач.

Следствие 72.2. *Если $\langle V^n, g\rangle$ — евклидово векторное пространство, а V^k — его подпространство с ортонормированным базисом, то его можно дополнить до ортонормированного базиса всего пространства V^n.*

Действительно, базис $B'=\langle\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_k\rangle$ согласно следствию 41.2, как линейно независимая система, дополним до базиса векторного пространства $B''=\langle\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots \vec{e}_n\rangle$. Применив к этому базису процесс ортогонализации и нормирования, получим ортонормированный базис n-мерного векторного пространства V^n, содержащий своими первыми k векторами векторы базиса B', так как описанный процесс ортонормирования не изменит первые k векторов базиса B''. ♦

Пример 72.1. В стандартном евклидовом пространстве ортонормируем систему векторов:

$$B' = \{\vec{b}_1(1,\ 2,\ 1),\ \vec{b}_2(3,\ 4,\ 1),\ \vec{b}_3(-1,\ -3,\ 1)\}.$$

1. Убедимся в том, что данная система линейно независима (и, значит, к ней применим алгоритм ортогонализации). Это можно сделать различными способами, например, вычислив определитель Грама этой системы или, так как она состоит из трех векторов, а векторное пространство трехмерно, найдя определитель, составленный из координат ее векторов: ♦

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{?}{\neq} 0.$$

Что означает, что система векторов B' линейно независима и к ней применима теорема 72.1 и процесс ортогонализации.

2. Положим вектор $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$, а

$$\vec{a}_2 = \vec{b}_2 - \alpha\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 4-2\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

и найдем скалярное произведение:

$$(\vec{a}_2,\ \vec{a}_1) \overset{?}{=} (3-\alpha\ \ 4-2\alpha\ \ 1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=}$$
$$= (3-\alpha)\cdot 1 + (4-2\alpha)\cdot 2 + (1-\alpha)\cdot 1 = 12 - 6\alpha.$$

Из требования ортогональности $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1$ следует, что $(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 0$ и $12 - 6\alpha = 0$, откуда $\alpha = 2$ и вектор

$$\vec{a}_2 = \vec{b}_2 - 2\vec{a}_1 \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Можно непосредственными вычислениями убедиться в правильности найденного вектора — равенстве 0 скалярного произведения:

$$(1\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 1(-1) = 0.$$

Следующий вектор $\vec{a}_3$ будем искать в виде:

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_3 - \beta\vec{a}_1 - \gamma\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \beta - \gamma \\ -3 - 2\beta \\ -1 - \beta + \gamma \end{pmatrix},$$

определяя коэффициенты γ и β так, чтобы $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_1$ и $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_2$, т. е. $(\vec{a}_3, \vec{a}_1) = 0$ и $(\vec{a}_3, \vec{a}_2) = 0$. Вычислив эти скалярные произведения:

$$(1-\beta-\gamma \quad -3-2\beta \quad -1-\beta+\gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} -6-6\beta$$

и

$$(1-\beta-\gamma \quad -3-2\beta \quad -1-\beta+\gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2-2\gamma,$$

получим:

$$\begin{cases} -6-6\beta \qquad = 0, \\ \;\;2 \qquad -2\gamma = 0. \end{cases}$$

Откуда $\beta = -1$ и $\gamma = 1$, а вектор

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_3 + 1\vec{a}_1 - 1\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом ортогонализацией линейно независимой системы векторов B' получена ортогональная система векторов $A = \{\vec{a}_1(1,\ 2,\ 1),\ \vec{a}_2(1,\ 0,\ -1),\ \vec{a}_3(1,\ -1,\ 1)\}$.

3. Пронормируем первый из этих векторов: его норма $\|\vec{a}_1\| \overset{(72.8)}{=\!=} \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$ и поэтому

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 2,\ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Аналогично находятся векторы:

$$\vec{i}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

и

$$\vec{i}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Таким образом, ортонормированный базис стандартного евклидова трехмерного пространства построен: $I = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$.

Напомним, что базис этого пространства

$$B = \langle \vec{e}_1(1, 0, 0), \vec{e}_2(0, 1, 0), \vec{e}_3(0, 0, 1)\rangle$$

также ортонормирован относительно стандартного скалярного произведения в V^3. Все это подтверждает множественность ортонормированных базисов относительно заданного скалярного произведения.

З а д а н и е 72.1. Проортонормируйте систему векторов

$$B' = \{\vec{b}_1(1, 2, 1), \vec{b}_2(3, 4, 1), \vec{b}_3(-1, -3, -1)\}$$

в стандартном евклидовом трехмерном пространстве, выбрав за первый вектор процесса ортогонализации $\vec{b}_3(-1, -3, -1)$.

Указание. Иногда удобнее, ортогонализируя систему векторов, вектор заменять на коллинеарный ему (если это упрощает вычисления). В настоящем задании, если выбирать второй вектор вида $\vec{a}_2' = \vec{b}_3 - \alpha\vec{b}_2$, то получится $\vec{a}_2' = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17\\4\\5\end{pmatrix}$, можно заменить его на вектор $\vec{a}_2'' = \begin{pmatrix}17\\4\\5\end{pmatrix}$, что несколько упростит запись дальнейших уравнений и условий.

З а д а ч а 72.1.1. В стандартном евклидовом пространстве проортонормируйте систему векторов:

$$B_1 = \{\vec{b}_1(1, 1, -1), \vec{b}_2(1, 2, 0), \vec{b}_3(1, 0, 0)\}.$$

З а д а ч а 72.1.2. Проортонормируйте систему векторов задачи 72.1.1 $B_1 = \{\vec{b}_1(1, 1, -1), \vec{b}_2(1, 2, 0), \vec{b}_3(1, 0, 0)\}$ в трехмерном векторном пространстве, если его евклидова структура задана скалярным произведением g_6 задачи 70.1.1:

$$g_6(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + 2x^2y^3 + 2x^3y^2 + 5x^3y^3, \qquad (70.g_6)$$

(для любых векторов $\langle\vec{x}(x^1, x^2, x^3), \vec{y}(y^1, y^2, y^3)\rangle \in V^3 \times V^3$).

Указание. В решении естественно применить схему примера 72.1, однако, не забывайте, что в этом случае

$$g_6(\vec{x}, \vec{y}) = (x^1\ \ x^2\ \ x^3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix},$$

откуда, в частности,

$$\|\vec{x}\|_{g_6} \stackrel{?}{=} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4x^2x^3 + 5(x^3)^2}.$$

З а д а ч а 72.1.3. В стандартном четырехмерном евклидовом пространстве заданы векторы: $\vec{b}_1(1, 2, 1, 1)$ и $\vec{b}_2(1, -1, 0, 1)$. Если это возможно, постройте ортогональный базис этого пространства, содержащий векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$.

Указание. Следует дополнить эту систему до какого-либо базиса в V^4, а затем его ортогонализировать.

Задача 72.2.2. Укажите ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов четырехмерного векторного пространства:

$$B'' = \{\vec{b}_1(1, -1, 1, -1), \vec{b}_2(-2, 1, -2, 1), \vec{b}_3(-2, 7, 4, 7), \vec{b}_4(4, 3, 2, 3), \vec{b}_5(0, 7, -2, 7)\},$$

если его евклидова структура задана стандартным скалярным произведением.

Указание. Система векторов B'' не образует базис в V^4 (почему? ◆). Подумайте, совпадает ли линейная оболочка системы B'' с V^4? Как найти какой-либо базис в $L(B'')$, если $L(B'') \neq V^4$?

Пример 72.2. В задаче 71.1.3 было показано, что в евклидовом векторном пространстве $CL_2[-\pi, \pi]$ векторы-функции: $\sin mt$, $\cos nt$ с $\langle m, n\rangle \in \mathbf{N}^2$ попарно ортогональны и каждая из них имеет норму, равную π. Можно показать, что в $CL_2[-\pi, \pi]$ они ортогональны постоянной функции 1, а ее норма равна 2π:

$$(1, \sin nt) \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{и} \quad (1, \cos nt) \stackrel{?}{=} 0, \quad \text{а} \quad \|1\| \stackrel{?}{=} 2\pi.$$

Таким образом, в векторном пространстве $\mathscr{T}^k[t]$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше k (см. определение 34.3 и пример 36.9), как подпространстве евклидова векторного пространства $CL_2[-\pi, \pi]$ (см. утверждение 70.1), система векторов-функций

$$B = \langle 1, \sin nt, \cos nt \mid n = 1, 2, \dots k\rangle$$

согласно следствию 71.3 представляет собой его ортогональный базис. Пронормировав каждый из этих векторов, получим ортонормированный базис евклидова векторного пространства $\mathscr{T}^k[t]$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$I = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \middle| n = 1, 2, \dots k\right\rangle.$$

Это удивительное свойство тригонометрических функций используется в различных исследованиях в математическом анализе.

Пример 72.3. Если на векторном пространстве $\mathscr{P}^n[x]$ полиномов степени не выше n евклидову структуру задать скалярным произведением $CL_2[-1, 1]$ (см. (71.5)):

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt,$$

то одночлены $\{1,\ x,\ x^2, \dots x^n\}$, как было показано в примере 71.1, ортонормированной системы не образуют. Однако, ортогонализация этой системы приведет к последовательности многочленов:

$$1,\ x,\ 3x^2-1,\ 5x^3-3x, \dots ,$$

которые с точностью до ненулевых множителей совпадают с многочленами вида:

$$\frac{1}{2^k k!}\,\frac{d^k\,(x^2-1)^k}{dx^k}\,.$$

Эти многочлены называются *многочленами Лежандра* или *сферическими многочленами* и также широко используются в исследованиях в математическом анализе и теории уравнений математической физики. Многочлены Лежандра образуют ортогональный, но не ортонормированный базис в пространстве многочленов степени не выше n с переменной $x \in [-1,\ 1]$.

Задача 72.2.3. В евклидовом векторном пространстве $P^3[x]$ со скалярным произведением $CL_2[-1,\ 1]$:

$$(f,\ g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt,$$

применяя процесс ортогонализации к стандартному базису $B = \langle 1,\ x,\ x^2,\ x^3 \rangle$, найдите **ортонормированный** базис.

Указание. См. пример 72.3.

Пример 72.4. Найдем какой-либо ортонормированный базис подпространства $V \subset V^3$ со стандартным скалярным произведением относительно некоторого ортонормированного базиса, если подпространство задано уравнением: $x^1 - x^2 - x^3 = 0$.

Для решения этой задачи прежде всего заметим, что из уравнений подпространства V следует, что всякий вектор $\vec{\boldsymbol{x}} \in V$ представим в виде:

$$\vec{\boldsymbol{x}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} x^2+x^3 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $x^2,\ x^3$ — произвольные действительные числа. Следовательно,

$$B = \langle \vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ -$$

базис в подпространстве V. ♦

Остается ортонормировать систему векторов B:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ а } \vec{a}_2 = \vec{e}_2 - \lambda \vec{e}_1 \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$(\vec{a}_2, \vec{e}_1) \overset{?}{=} (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2-\lambda$$

и $2-\lambda=0$, откуда $\lambda=2$, вектор

$$\vec{a}_2 \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

а ортогональный базис V составят векторы:

$$A = \langle \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Их нормирование дает базис:

$$I \overset{?}{=} \langle \vec{i}_1 \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{i}_2 \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Задача 72.3.2. Найдите ортонормированный базис подпространства S четырехмерного евклидова пространства V^4, если его скалярное произведение стандартного вида, а подпространство S задано системой уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 - 2x^3 + 4x^4 = 0, \\ x^1 - 3x^2 \qquad - 6x^4 = 0. \end{cases}$$

Указание. Естественно (например, приводя эту систему к ступенчатому виду), указать фундаментальную систему решений — базис подпространства S (см. пример 72.4), а затем его ортонормировать.

§ 73′. ПОДПРОСТРАНСТВА ЕВКЛИДОВА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

При изучении подпространств евклидовых векторных пространств отметим прежде всего, что согласно утверждению 70.1 всякое подпространство евклидова векторного пространства является также евклидовым векторным пространством.

Напомним.

Определение 36.5. *Если векторное пространство разложено в прямую сумму подпространств: $V = V' \oplus V''$, то V'' называют* ***дополнительным подпространством*** *или* ***дополнением*** *V'.*

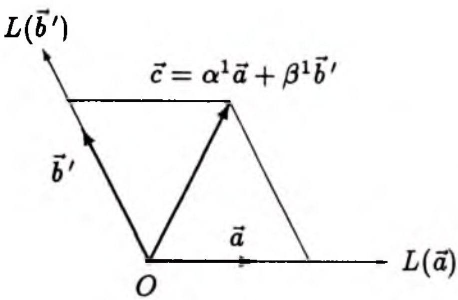


Рис. 23

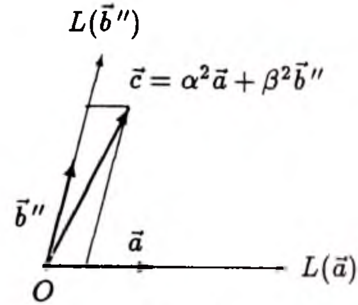


Рис. 24

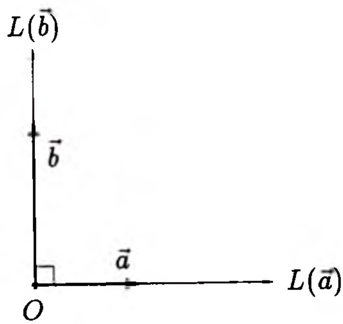


Рис. 25

Определение 36.4. ***Суммой подпространств*** *V' и V'' векторного пространства V называется линейная оболочка множества $V' \bigcup V''$. Если $V' \bigcap V'' = \{0\}$, то сумму подпространств V' и V'' называют* ***прямой***.

Дополнительное подпространство к подпространству векторного пространства определяется, как отмечено в § 36, вообще говоря, не однозначно. Так на векторной плоскости $\mathscr{V}^2$ (свободных векторов) дополнительное подпространство к данному векторному пространству $L^1(\vec{a})$, натянутому на ненулевой вектор $\vec{a}$, является одномерное векторное пространство, которое порождается ненулевым вектором, непараллельном $\vec{a}$.

Например, $\mathscr{V}^2 = L^1(\vec{a}) \oplus L^1(\vec{b}')$ и $\mathscr{V}^2 = L^1(\vec{a}) \oplus L^1(\vec{b}'')$ (рис. 23, 24).

Однако, в евклидовом векторном пространстве среди дополнительных к данному подпространству подпространств можно выделить естественным образом единственное подпространство. Это подпространство называется ортогональным дополнением исходного пространства и играет важную роль во многих геометрических приложениях. Так на упомянутой выше векторной плоскости $\mathscr{K}^2$ ортогональным дополнением к $L^1(\vec{a})$ является подпространство $L^1(\vec{b})$ с вектором $\vec{b}$ перпендикулярным $\vec{a}$ (рис. 25).

(Конечно, векторная плоскость $\mathscr{V}^2$ здесь рассматривается с евклидовой структурой, заданной обычным скалярным произведением: $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|\ |\vec{y}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$).

Определение 73.1. ***Ортогональным дополнением*** *множества векторов A евклидова векторного пространства $\langle V, g\rangle$ называется такое подмножество векторов V, что каждый из них ортогонален всякому вектору из A.*

Обозначается ортогональное дополнение множества A через $A^\perp$:

$$A^\perp \overset{\text{des}}{=\!=} \{\vec{y} \in V \,|\, (\forall \vec{a} \in A \Rightarrow g(\vec{a}, \vec{y}) = 0)\}.$$

Пример 73.1. Найдем ортогональное дополнение вектора $\vec{a}(1, 2, 3) \in \langle M(3 \times 1), (,)\rangle$ (стандартного трехмерного координатного евклидова пространства).

Если $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор ортогонального дополнения вектора $\vec{a}$, то $(\vec{a}, \vec{x}) = 0$ — условие, определяющее подпространство $\{\vec{a}\}^\perp$, т. е.

$$(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0$$

и

$$1x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 0$$

уравнение, которому удовлетворяют координаты векторов, принадлежащих $\{\vec{a}\}^\perp$. Можно найти фундаментальную систему решений этого уравнения, т. е. базис подпространства $\{\vec{a}\}^\perp$, например:

$$x^1 = -2x^2 - 3x^3.$$

Тогда общий вид векторов ортогонального дополнения к вектору $\vec{a}$:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^2 & -3x^3 \\ x^2 & \\ & x^3 \end{pmatrix} = x^2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\{\vec{a}\}^{\perp}=L(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2),\quad \text{где } \vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ и } \vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\dim\{\vec{a}\}^{\perp}\overset{?}{=}2.$$

Задача 73.1.1. Найдите ортогональное дополнение системы векторов $A=\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2\}\subset\langle M(3\times 1),\ (,)\rangle$ и ортонормированный базис дополнительного подпространства $A^{\perp}$, где

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Можно ли указать все ортонормированные базисы $A^{\perp}$?

Указание. Вектор $\vec{x}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\in A^{\perp}$ определяется условиями: $\begin{cases}(\vec{x},\ \vec{a}_1)=0,\\(\vec{x},\ \vec{a}_2)=0.\end{cases}$ Следует найти фундаментальную систему решений этой системы линейных уравнений, а затем пронормировать ее. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Какова размерность пространства $A^{\perp}$?

Свойства ортогонального дополнения

Свойство 73.1. *Ортогональное дополнение к любому подмножеству евклидова векторного пространства есть подпространство этого пространства.*

Доказательство. Пусть $A\subset\langle V,\ g\rangle$. Проверим выполнимость условия SS (лекция 8, § 36) для подмножества $A^{\perp}\subset V$.

SS: для любых $\langle\alpha,\ \beta,\ \vec{x},\ \vec{y}\rangle\in\mathbf{R}^2\times(A^{\perp})^2$ вектор $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in A^{\perp}$.

При произвольном $\vec{a}\in A$ рассмотрим

$$g(\vec{a},\ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\overset{?}{=}\alpha g(\vec{a},\ \vec{x})+\beta g(\vec{a},\ \vec{y})\overset{?}{=}\alpha 0+\beta 0=0.$$

Это означает, что вектор $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\perp\vec{a}$, т. е. $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in A^{\perp}$ и множество $A^{\perp}$ замкнуто относительно операций векторного пространства V.

Поэтому ортогональное дополнение называют также ***дополнительным ортогональным подпространством*** к подмножеству A.

Свойство 73.2. *Евклидово векторное пространство является прямой суммой его любого подпространства и его ортогонального дополнения.*

Это свойство можно сформулировать иначе: ортогональное дополнение векторного подпространства евклидова векторного пространства есть дополнительное к нему подпространство (см. определение 36.5).

Доказательство. Пусть U^k — несобственное подпространство евклидова векторного пространства $\langle V^n, g\rangle$ и $B'=\langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_k\rangle$ — его ортонормированный (относительно g) базис. Согласно следствию 72.1 его можно дополнить до ортонормированного базиса $B=\langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_k, \vec{i}_{k+1}, \dots \vec{i}_n\rangle$.

Обозначим линейную оболочку последних $n-k$ векторов через U^{n-k}. Тогда любой вектор $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)_B$ векторного пространства V^n разлагается в сумму векторов:

$$\vec{x}=x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+\dots+x^k\vec{i}_k+x^{k+1}\vec{i}_{k+1}+\dots+x^n\vec{i}_n=$$

$$=\underbrace{(x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+\dots+x^k\vec{i}_k)}_{\substack{\|\text{des}\\ \vec{x}'\\ \Cap\\ U^k}}+\underbrace{(x^{k+1}\vec{i}_{k+1}+\dots+x^n\vec{i}_n)}_{\substack{\|\text{des}\\ \vec{x}''\\ \Cap\\ U^{n-k}}}.$$

При этом $U^k\cap U^{n-k}\overset{?}{=}\vec{0}$, а всякая линейная комбинация векторов $\vec{i}_{k+1}, \dots \vec{i}_n$ ортогональна произвольной линейной комбинации векторов $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_k$, причем любой вектор $\vec{y}\in(U^k)^\perp$ разлагается в линейную комбинацию векторов $\vec{i}_{k+1}, \vec{i}_{k+2}, \dots \vec{i}_n$ (почему? ◆), это все и означает, что

$$(U^k)^\perp=L(\vec{i}_{k+1}, \dots \vec{i}_n)=U^{n-k}. \qquad ◆$$

Таким образом выполнены все условия утверждения 36.6 (разложения векторного пространства в прямую сумму своих подпространств) и $V^n=U^k\oplus(U^k)^\perp$, что и завершает доказательство свойства. ■

Следствие 73.1. *Если U^k — подпространство n-мерного евклидова векторного пространства, то его ортогональное дополнение имеет размерность $n-k$* (См. следствие 41.5).

Следствие 73.2. *Если U — подпространство n-мерного евклидова векторного пространства, то $(U^\perp)^\perp=U$.* ◆

Следствие 73.3. *Для любого подпространства U n-мерного евклидова векторного пространства найдется конечная система линейно независимых векторов A такая, то $U=A^\perp$.*

Задача 73.1.2. Докажите следствие 73.3.

Доказательство. Если U — подпространство пространства $\langle V^n, g\rangle$, то по свойству 73.2 $V^n = U \oplus U^{\perp}$, причем подпространство $(U^k)^{\perp}$ конечномерно и, значит, имеет базис B', состоящий из конечного числа линейно независимых векторов. Тогда $U^{\perp} = L(A)$ и $U \overset{?}{=} A^{\perp}$. ■

Задача 73.2.2. Найдите ортогональное дополнение подпространства S задачи 72.3.2, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 - 2x^3 + 4x^4 = 0, \\ x^1 - 3x^2 \qquad - 6x^4 = 0. \end{cases}$$

Указание. Используйте результат задачи 72.3.2, а также тот факт, что для базиса B' пространства решений S системы линейных уравнений $S^{\perp} \overset{?}{=} (B')^{\perp}$.

Задача 73.1.3. В евклидовом векторном пространстве многочленов $P^3[x]$ со скалярным произведением $CL_2[-1,1]$:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

найдите ортогональное дополнение вектора x и линейной оболочки $L(1, x)$. Определите размерность $(L(1, x))^{\perp}$.

Указание. Можно использовать результат примера 72.3 и задачи 72.2.3. Но возможно и прямое решение: каким условиям должны удовлетворять коэффициенты многочлена $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, чтобы $(f, 1) = 0$, и $(f, x) = 0$?

Напомним (см. утверждение 36.6), что если векторное пространство разложено в прямую сумму своих подпространств, то всякий его вектор однозначно разлагается в сумму: $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ с векторами $\vec{x}'$ и $\vec{x}''$, принадлежащими соответствующим прямым слагаемым. Т. е. если вектор $\vec{x} \in \langle V, g\rangle$ и $V = U \oplus U^{\perp}$, то $\vec{x}' \in U$ и, соответственно, $\vec{x}'' \in U^{\perp}$.

Полученный таким образом вектор $\vec{x}' \in U$ и называется согласно определению 58.3 проекцией вектора $\vec{x}$ на подпространство U параллельно $U^{\perp}$, а отображение, сопоставляющее всякому вектору из V его проекцию на U называется параллельным проектированием V на U параллельно $U^{\perp}$.

Для евклидовых векторных пространств такое параллельное проектирование называется ***ортогональным проектированием векторного пространства V на подпространство U***.

В отличие от параллельного проектирования его будем обозначать $pr_U \overset{\text{des}}{=} p_{\langle U,\, U^{\perp}\rangle}$.

Таким образом, по определению

$$pr_U(\vec{x}) \overset{\text{des}}{=\!=} \vec{x}',$$

если $V = U \oplus U^{\perp}$ и вектор $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ так, что $\vec{x}' \in U$ и $\vec{x}'' \in U^{\perp}$.

Отметим, что вектор-проекцию, которая была определена выше (см. определения 71.6, 71.5)

$$pr_{\vec{y}}(\vec{x})_g = \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|_g^2}\vec{y}$$

с произвольным $\vec{x}$ можно рассматривать как образ вектора $\vec{x}$ при ортогональном проектировании евклидова векторного пространства $\langle V, g \rangle$ на его одномерное подпространство $L(\vec{y})$ (на ненулевой вектор $\vec{y}$).

Задание 73.1. Найдем ортогональную проекцию вектора $\vec{x}(2, 1, 5, 2)$ на линейную оболочку векторов $\vec{a}_1(1, 1, -2, 1)$ и $\vec{a}_2(2, 0, 1, 1)$, если их координаты заданы в ортонормированном базисе векторного пространства V^4.

Поскольку в V^4 указан ортонормированный базис, то можно полагать, что скалярное произведение стандартного вида, а пространство V^4 отождествить с координатным пространством $\langle \boldsymbol{M}(4 \times 1), (,) \rangle$.

Обозначим $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = U$, так как $V^4 = U \oplus U^{\perp}$, то вектор $\vec{x} \overset{?}{=} \vec{x}' + \vec{x}''$ так, что $\vec{x}' \in U$, а $\vec{x}'' \in U^{\perp}$. При этом $\vec{x}' = pr_U(\vec{x})$ $\vec{x}' = \alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^2 \vec{a}_2$, а

$$\vec{x}'' \overset{?}{=} \vec{x}' - \alpha^1 \vec{a}_1 - \alpha^2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \alpha^1 - 2\alpha^2 \\ 1 - \alpha^1 \\ 5 + 2\alpha^1 - \alpha^2 \\ 2 - \alpha^1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

и следует подобрать коэффициенты $\langle \alpha^1, \alpha^2 \rangle$ так, чтобы вектор $\vec{x}''$ был ортогонален подпространству U, т. е.

$$(\vec{a}_1, \vec{x}'') = 0 \text{ и } (\vec{a}_2, \vec{x}'') = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} (1\ \ 1\ \ -2\ \ 1)\begin{pmatrix} 2-\ \alpha^1-2\alpha^2 \\ 1-\ \alpha^1 \\ 5+2\alpha^1-\ \alpha^2 \\ 2-\alpha^1-\ \alpha^2 \end{pmatrix}=0, \\ (2\ \ 0\ \ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 2-\ \alpha^1-2\alpha^2 \\ 1-\ \alpha^1 \\ 5+2\alpha^1-\ \alpha^2 \\ 2-\alpha^1-\ \alpha^2 \end{pmatrix}=0. \end{cases}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} 7\alpha^1+\ \alpha^2=-5, \\ \alpha^1+6\alpha^2=\ 11, \end{cases}$$

решением которой является $\langle\alpha^1,\alpha^2\rangle=\langle-1\ \ 2\rangle$. Таким образом, искомый вектор ортогональной проекции равен

$$\vec{x}'=-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 74. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Выше в § 52 было введено понятие изоморфизма векторных пространств, как биективного отображения, сохраняющего структуру (операции векторных пространств).

Напоминание.

Определение 52.1. *Векторное пространство U называют* ***изоморфным*** *векторному пространству V, если существует биективный гомоморфизм $f: U\to V$, отображение f в этом случае называют* ***изоморфизмом векторных пространств*** *U и V.*

Естественно, определяя изоморфизм евклидовых векторных пространств, потребовалось, чтобы такое отображение сохраняло не только векторную, но и евклидову структуру.

Определение 74.1. *Евклидово векторное пространство $\langle V, g\rangle$ называется* ***изоморфным*** *евклидову векторному пространству $\langle V', g'\rangle$, если существует изоморфизм векторных пространств $f: V\to V'$ такой, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$*

векторного пространства U выполняется условие:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g'(f(\vec{x}), f(\vec{y})).$$

Отображение f в этом случае называется ***изоморфизмом евклидовых векторных пространств*** *V и V'.*

Иногда такие векторные пространства называют ***изометричными***, а отображение — ***изометрией евклидовых векторных пространств.***

Остановимся на некоторых свойствах таких изоморфизмов.

Утверждение 74.1. *Отображение, обратное изоморфизму евклидовых векторных пространств $\langle V, g\rangle$ и $\langle V', g'\rangle$, является изоморфизмом пространств $\langle V', g'\rangle$ и $\langle V, g\rangle$.*

Утверждение 74.2. *При изоморфизме конечномерных евклидовых векторных пространств ортонормированный базис отображается в ортонормированный базис.*

Задание 74.1. Докажем утверждение 74.2.

Доказательство. Пусть $B = \langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n\rangle$ — ортонормированный базис пространства $\langle U^n, g\rangle$, а $f: U^n \to V^n$ — изоморфизм евклидовых векторных пространств $\langle U^n, g\rangle$ и $\langle V^n, g'\rangle$.

Система векторов $B' = \langle f(\vec{i}_1), f(\vec{i}_2), \dots f(\vec{i}_n)\rangle$ согласно следствию 55.5 образует базис векторного пространства V^n. Вместе с тем

$$g'(f(\vec{i}_j), f(\vec{i}_k)) = g(\vec{i}_j, \vec{i}_k) = ?$$

для любых $j, k \in \{1, 2, \dots n\}$.

Следовательно, условия (72.1) выполнены и B' — ортонормированный базис векторного пространства V^n. ■

Следствие 74.1. *При изоморфизме евклидовых векторных пространств прообразом базиса евклидова векторного пространства является базисная система векторов.* ♦

Следствие 74.2. *При изоморфизме евклидовых векторных пространств образом и прообразом любой ортонормированной системы векторов является ортонормированная система.* ♦

Рассмотрим теперь два евклидовых векторных пространства одной размерности: $\langle U^n, g\rangle$ и $\langle V^n, g\rangle$ с ортонормированными базисами: $B = \langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n\rangle$ в U^n и, соответственно, $B' = \langle \vec{j}_1, \vec{j}_2, \dots \vec{j}_n\rangle$ в V^n. И пусть $f: U^n \to V^n$ — линейное отображение векторных пространств, переводящее базис B в базис B' такое, что $f(\vec{i}_k) = \vec{j}_k$ для всех $k = 1, 2, \dots n$.

При этом любой вектор $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)_B \in U^n$ и его образ $f(\vec{x})$ имеют одинаковые координаты, так как

$$f(\vec{x}) = f(x^1\vec{i}_1 + x^2\vec{i}_2 + \dots + x^n\vec{i}_n) \overset{?}{=}$$

$$= x^1 f(\vec{i}_1) + x^2 f(\vec{i}_2) + \dots + x^n f(\vec{i}_n) =$$

$$= x^1 \vec{j}_1 + x^2 \vec{j}_2 + \dots + x^n \vec{j}_n.$$

Если же векторы заданы своими координатами относительно ортонормированных базисов, то скалярные произведения на таких пространствах имеют стандартный вид. Т. е. g и g' — стандартного вида и тогда имеем для произвольных векторов $\vec{x}(x^1, x^2, \dots x^n)_{B'}$ и $\vec{y}(y^1, y^2, \dots y^n)_B$ имеем:

$$g'(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = x^1y^1 + x^2y^2 + \dots + x^ny^n = g(\vec{x}, \vec{y}).$$

Это означает, что изоморфизм f векторных пространств является изоморфизмом $\langle U^n, g\rangle$ и $\langle V^n, g\rangle$, как евклидовых векторных пространств. ■

Доказанный результат сформулируем следующим образом.

Утверждение 74.3. *Если при линейном отображении векторных пространств ортонормированный базис одного векторного пространства отображается в ортонормированный базис другого пространства, то они изоморфны, как евклидовы векторные пространства.*

Утверждения 74.2 и 74.3 можно объединить в одну теорему.

Теорема 74.1. *Линейное отображение векторных пространств U^n и V^n есть их изоморфизм, как евклидовых векторных пространств, тогда и только тогда, когда оно отображает ортонормированный базис $\langle U^n, g\rangle$ в ортонормированный базис пространства $\langle V^n, g\rangle$.*

При изучении векторных пространств было установлено, что отношение изоморфизма на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности (теорема 55.2), и каждое из конечномерных векторных пространств изоморфно некоторому координатному векторному пространству, которое можно считать эталонным для изучения свойств векторных пространств данной размерности.

Несложно установить, что и отношение изоморфизма на множестве евклидовых векторных пространств также является отношением эквивалентности. ◆

При этом к одному классу эквивалентности относятся векторные пространства одной размерности. ◆

Теорема 74.2. *Два евклидовых векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Доказательство. 1. Если евклидовы векторные пространства изоморфны, то, согласно определению, они изоморфны, как векторные пространства, которые по теореме 54.1 имеют одинаковые размерности.

2. Если евклидовы векторные пространства $\langle U, g\rangle$ и $\langle V, g\rangle$ одной размерности (n), то выбрав в каждом из них ортонормированный базис: $B=\langle \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots \vec{i}_n\rangle$ в U^n и $B'=\langle \vec{j}_1, \vec{j}_2, \ldots \vec{j}_n\rangle$ в V^n, зададим отображение $f: U\to V$ значениями на базисных векторах: $f(\vec{i}_k)=\vec{j}_k$ для всех $k=1, 2, \ldots n$. Согласно лемме 53.1 отображение f — линейно, а согласно теореме 74.1 оно является изоморфизмом U и V, как евклидовых векторных пространств. ■

Замечание 74.1. Всякое n-мерное евклидово векторное пространство изоморфно стандартному n-мерному координатному евклидову векторному пространству, причем этот изоморфизм может быть задан каноническим отображением, сопоставляющим вектору с координатами, указанными относительно ортонормированного базиса, $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots x^n)_B$, столбец (строку) его координат, например,

$$M_B: \vec{x} \to \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in M(n\times 1).$$

Таким образом, стандартное n-мерное координатное евклидово пространство и является тем пространством, которое обычно, в силу наглядности, используется для изучения свойств собственно n-мерных евклидовых векторных пространств.

§ 75*. УНИТАРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В предыдущих параграфах было существенно (см. определение 70.1), что векторное пространство, на котором задается евклидова структура — вещественное (над полем действительных чисел). Естественно возникает вопрос, можно ли определить скалярное произведение на векторном пространстве в том случае, когда оно определено над полем комплексных чисел **C** (см. лекция 13, пример 64.5, определение 64.3, замечание 64.2).

Напомним.

Определение 70.1. ***Скалярным произведением на векторном пространстве*** V ***над полем действительных чисел*** *называется отображение* $g: V\times V\to R$, если оно при любых $\langle \vec{x}, \vec{y}, \alpha, \beta,\rangle \in V^2\times \mathbf{R}^2$ *удовлетворяет следующим условиям:*

S.1: $g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\ \vec{z})=\alpha g(\vec{x},\ \vec{z})+\beta g(\vec{y},\ \vec{z})$;
S.2: $g(\vec{x},\ \vec{y})=g(\vec{y},\ \vec{x})$;
S.3: $g(\vec{x},\ \vec{x})\geqslant 0$;
S.4: *если* $g(\vec{x},\ \vec{x})=0$, то $\vec{x}=\vec{0}$.

Если это определение без изменений перенести на комплексное векторное пространство, то для любого вектора $\vec{x}$ получим:

$$g(i\vec{x},\ i\vec{x})\stackrel{?}{=}i^2 g(\vec{x},\ \vec{x})=-g(\vec{x},\ \vec{x}),$$

откуда и из аксиом S.3 и S.4 следует, что $\vec{x}=\vec{0}$ (почему? ◆). Т. е. единственное векторное пространство над полем комплексных чисел, на котором может быть задано скалярное произведение в смысле определения 70.1, нульмерно (состоит только из нулевого вектора). ◆

Однако на базе векторного пространства над полем комплексных чисел может быть построена содержательная теория евклидовых векторных пространств, которая, однако, требует изменения определения скалярного произведения. Такие пространства возникают во многих задачах теоретической физики, в частности, в теории поля, а также в теории функций комплексного переменного.

В настоящем параграфе в дальнейшем векторные пространства, если не оговаривается особо, рассматриваются над полем комплексных чисел.

Определение 75.1. ***Скалярным произведением на векторном пространстве*** V ***над полем комплексных чисел*** *называется отображение* $g: V\times V\to\mathbf{C}$, *если оно при любых* $\langle\vec{x},\ \vec{y},\ \alpha,\ \beta\rangle\in V^2\times\mathbf{C}^2$ *удовлетворяет следующим условиям:*

SC.1: $g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\ \vec{z})=\alpha g(\vec{x},\ \vec{z})+\beta g(\vec{y},\ \vec{z})$;

SC.2: $g(\vec{x},\ \vec{y})=\overline{g(\vec{y},\ \vec{x})}$;

SC.3: $g(\vec{x},\ \vec{x})\geqslant 0$;

SC.4: если $g(\vec{x},\ \vec{x})=0$, то $\vec{x}=\vec{0}$.

Векторное пространство V *над полем комплексных чисел с заданным на нем скалярным произведением называется* ***унитарным векторным пространством*** *или* ***комплексным евклидовым пространством.***

Обозначается унитарное векторное пространство V со скалярным произведением g как $\langle V,\ g\rangle$, чтобы подчеркнуть комплексный характер скалярного произведения, может быть использован индекс: $g_{\mathbf{C}}$ или $\langle V,\ g_{\mathbf{C}}\rangle$, или $\langle V,\ g\rangle_{\mathbf{C}}$.

Напомним, что через $\bar{z}$ принято обозначать комплексное число, сопряженное числу z, т. е. если $z=x+yi$ то $\bar{z}=x-yi$ ($\langle x\ y\rangle\in\mathbf{R}^2$ по определению).

Несложно показать, что для всякого комплексного числа z имеют место соотношения:

$$z\cdot\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} (x+yi)\cdot(x-yi)=x^2+y^2\geqslant 0, \qquad (75.1)$$
$$\bar{\bar{z}}=z,$$

а для любых $\langle z_1,\ z_2\rangle\in\mathbf{C}^2$

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2 \quad \text{и} \quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

Определение 75.2. *Число* $\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ *называется* ***модулем комплексного числа*** z.

Модуль комплексного числа z обозначается $\operatorname{mod} z$ или $|z|$.

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z\cdot\bar{z}}. \qquad (75.2)$$

Свойства скалярного произведения над полем комплексных чисел

Свойство 75.1. *Для любых векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *унитарного векторного пространства и произвольного комплексного числа* λ *имеет место равенство:*

$$g(\vec{x},\ \lambda\vec{y})=\bar{\lambda}g(\vec{x},\ \vec{y}).$$

Доказательство. Если $\langle\vec{x},\ \vec{y},\ \lambda\rangle\in V^2\times\mathbf{C}$, то

$$g(\vec{x},\ \lambda\vec{y})\stackrel{?}{=}\overline{g(\lambda\vec{y},\ \vec{x})}\stackrel{?}{=}\overline{\lambda g(\vec{y},\ \vec{x})}\stackrel{?}{=}\bar{\lambda}\,\overline{g(\vec{y},\ \vec{x})}\stackrel{?}{=}\bar{\lambda}\overline{\overline{g(\vec{x},\ \vec{y})}}=$$
$$\stackrel{?}{=}\bar{\lambda}g(\vec{x},\ \vec{y}). \qquad \blacksquare$$

Свойство 75.2. *Для любых векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ *унитарного векторного пространства имеет место равенство:*

$$g(\vec{z},\ \vec{x}+\vec{y})=g(\vec{z},\ \vec{x})+g(\vec{z},\ \vec{y}).$$

Доказательство. Если $\langle\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\rangle\in V^3$, то для скалярного произведения g, определенного на комплексном векторном пространстве V, получим

$$g(\vec{z},\ \vec{x}+\vec{y})\stackrel{?}{=}\overline{g(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z})}\stackrel{?}{=}\overline{g(\vec{x},\ \vec{z})+g(\vec{y},\ \vec{z})}\stackrel{?}{=}$$
$$=\overline{g(\vec{x},\ \vec{z})}+\overline{g(\vec{y},\ \vec{z})}\stackrel{?}{=}\overline{\overline{g(\vec{z},\ \vec{x})}}+\overline{\overline{g(\vec{z},\ \vec{y})}}\stackrel{?}{=}g(\vec{z},\ \vec{x})+g(\vec{z},\ \vec{y}). \qquad \blacksquare$$

Объединив эти два свойства, можно говорить *о линейности по второму аргументу* комплексного скалярного произведения в смысле равенства

$$g(\vec{z},\ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\bar{\alpha}g(\vec{z},\ \vec{x})+\bar{\beta}g(\vec{z},\ \vec{y})$$

для любых $\langle\vec{x},\ \vec{y},\ \alpha,\ \beta\rangle\in V^2\times\mathbf{C}^2$.

В указанном смысле скалярное произведение *линейно по каждому из аргументов.*

Свойство 75.3. *Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор равно нулю* доказывается аналогично вещественному случаю. ◆

В частности, $g(\vec{0},\ \vec{0})=0$, и только один вектор в унитарном пространстве обладает таким свойством.

Аналогично евклидову вещественному пространству имеет место следствие.

Следствие 75.1. *Если* $g(\vec{x},\ \vec{y})=0$ *или* $g(\vec{y},\ \vec{x})=0$ *для любого вектора* $\vec{y}$ *из евклидова векторного пространства* $\langle V,\ g\rangle_{\mathbf{C}}$, *то* $\vec{x}=\vec{0}$.

Пример 75.1. Несложно проверить, что на множестве комплексных чисел **C**, как одномерном комплексном векторном пространстве, скалярное произведение задается формулой:

$$(x,\ y)_{\mathbf{C}}=x\bar{y}.$$

(См. определение 64.3 и свойства комплексных чисел, пример 64.5).

Выполнимость условия SC.1: для любых $\langle x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta\rangle\in\mathbf{C}^5$:

$$(\alpha x+\beta y,\ z)_{\mathbf{C}}=\alpha(x,\ z)_{\mathbf{C}}+\beta(y,\ z)_{\mathbf{C}}$$

очевидна в силу свойств комплексных чисел.

Выполнимость SC.3: $(z,\ z)_{\mathbf{C}}\geqslant 0$ для любого $z\in\mathbf{C}$ следует из (75.1), так как $(z,\ z)_{\mathbf{C}}=z\bar{z}=|z|$.

Конечно, из равенства $(z,z)_{\mathbf{C}}=0$, т. е. (см. (75.1)) из $x^2+y^2=0$ (для $z=x+yi$ с $\langle x,\ y\rangle\in\mathbf{R}^2$) следует, что $x=y=0$, и значит, свойство SC.4.

Свойство SC.2: $(x,\ y)_{\mathbf{C}}=\overline{(y,\ x)_{\mathbf{C}}}$ для любых $\langle x,y\rangle\in\mathbf{C}^2$ так же очевидно в силу свойств комплексных чисел:

$$(x,\ y)_{\mathbf{C}}=x\bar{y}\stackrel{?}{=}\bar{y}x\stackrel{?}{=}\bar{y}\bar{\bar{x}}\stackrel{?}{=}\overline{y\bar{x}}\stackrel{?}{=}\overline{(y,\ x)_{\mathbf{C}}}.$$

Задание 75.1. Подумайте, каким образом на одномерном комплексном векторном пространстве **C** задать другие скалярные произведения. Возможно ли это? Каков общий вид скалярного произведения на **C**?

Пример 75.2. Из предыдущего примера следует, что на n-мерном комплексном координатном векторном пространстве $\mathbf{C}^n$, элементы которого можно представить в виде матриц-столбцов «высоты n», т. е. $\langle M(n \times 1), \mathbf{C}\rangle$ (или матриц-строк «длины n» — $\langle M(1 \times n), \mathbf{C}\rangle$) скалярное произведение может быть задано отображением $(,)_{\mathbf{C}}: \langle M(n \times 1), \mathbf{C}\rangle \times \langle M(n \times 1), \mathbf{C}\rangle \to \mathbf{C}$ по формуле:

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbf{C}} = x^1\overline{y^1} + x^2\overline{y^2} + \ldots + x^n\overline{y^n}, \tag{75.(,)$_{\mathbf{C}}$}$$

или

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbf{C}} = (x^1 \; x^2 \; \ldots \; x^n) \begin{pmatrix} \overline{y^1} \\ \overline{y^2} \\ \vdots \\ \overline{y^n} \end{pmatrix},$$

напомним, $x^1, x^2, \ldots x^n, y^1, y^2, \ldots y^n$ — комплексные числа.

Аналогично вещественному случаю вводятся понятия стандартного скалярного произведения и стандартного n-мерного унитарного векторного пространства.

Определение 75.3. *Скалярное произведение на n-мерном* ***комплексном*** *векторном пространстве $\langle V^n, B\rangle$ называется* ***скалярным произведением стандартного вида*** *(или* ***стандартным скалярным произведением****), если относительно базиса B оно задается формулой:*

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbf{C}} = x^1\overline{y^1} + x^2\overline{y^2} + \ldots + x^n\overline{y^n}, \tag{75.3}$$

где $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots x^n)_B$, $\vec{y}(y^1, y^2, \ldots y^n)_B$.

Определение 75.4. *Координатное n-мерное комплексное векторное пространство с заданным на нем стандартным скалярным произведением $(,)_{\mathbf{C}}$ называется* ***стандартным унитарным n-мерным векторным пространством*** *или* ***координатным унитарным (n-мерным) векторным пространством****.*

Такое пространство обозначается $\langle \mathbf{C}^n, (,)\rangle$, $\langle M(n \times 1, \mathbf{C}), (,)\rangle$ или $\langle\langle M(1 \times n), \mathbf{C}\rangle, (,)\rangle$ в зависимости от того, какая интерпретация координатного пространства рассматривается.

Пример 75.3. Если $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ вещественные функции вещественного аргумента, а $z(t)$ — функции вида $z(t) = x(t) + y(t)i$, то относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр:

$$z_1(t) \oplus z_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(t) + x_2(t)) + (y_1(t) + y_2(t))\, i$$

и

$$\lambda \odot z(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x(t)) + (\lambda y(t))\, i$$

(при $z_1(t) = x_1(t) + y_1(t)\, i$ и $z_2(t) = x_2(t) + y_2(t)\, i$) они образуют комплексное векторное пространство, которое имеет стандартное обозначение $C^*[a, b]$ (сравните с примером 34.8 лекции 8). Отображение $(,): C^*[a, b] \times C^*[a, b] \to \mathbf{C}$, определяемое формулой:

$$(z_1(t), z_2(t)) = \int_a^b z_1(t)\, \overline{z_2(t)}\, dt$$

удовлетворяет условиям SC.1— SC.4 и, следовательно, задает евклидову структуру на комплексном векторном пространстве $C^*[a, b]$.

Аналогично вещественному случаю доказывается следующее утверждение.

Утверждение 75.1. *Сужение скалярного произведения g на унитарном векторном пространстве V на любое его подпространство V' есть скалярное произведение на V'.*

Отметим, что, если в векторном пространстве V над полем комплексных чисел выделить множество векторов, замкнутое относительно сложения и умножения на **действительные числа**, то несложно показать, что оно образует векторное пространство над полем действительных чисел, хотя подпространством комплексного векторного пространства оно не является (почему? ♦).

При этом сужение комплексного скалярного произведения (удовлетворяющего условиям SC.1— SC.4) на такую «вещественную часть унитарного пространства» дает скалярное произведение в смысле определения 70.1, т. е. удовлетворяющее условиям S.1— S.4. ♦

И в этом смысле понятие комплексного скалярного произведения (определение 75.1) можно считать расширением или обобщением вещественного скалярного произведения (определение 70.1).

Поскольку по условию SC.3 для любого вектора $\vec{x} \in V$ значение $g(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, в унитарном пространстве содержательно понятие нормы вектора:

$$\|\vec{x}\|_g = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})}$$

и ее свойства аналогичны свойствам (71.1 и 71.2) нормы вектора евклидова (вещественного) пространства. Также имеет место и неравенство Коши — Буняковского:

$$|g(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant \|\vec{x}\|_g \|\vec{y}\|_g$$

для любых векторов $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \langle V, g\rangle_{\mathbf{C}}$ или в другой форме:

$$|g(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leqslant g(\vec{x}, \vec{x})\, g(\vec{y}, \vec{y}), \tag{75.4}$$

с той оговоркой, что, так как $g(\vec{x}, \vec{y})$ — комплексное число, то

$$|g(\vec{x}, \vec{y})| = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{y})\,\overline{g(\vec{x}, \vec{y})}}$$

или

$$|g(\vec{x}, \vec{y})|^2 = g(\vec{x}, \vec{y})\,\overline{g(\vec{x}, \vec{y})}\,.$$

Однако, доказательство неравенства Коши — Буняковского в случае вещественного пространства не переносимо на унитарное пространство дословно (почему? ◆).

Доказательство. 1. Если вектор $\vec{y} = \vec{0}$, то $g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ и $g(\vec{y}, \vec{y}) = 0$, неравенство (75.4) выполняется тривиальным образом.

2. Если $\vec{y} \neq \vec{0}$, то $g(\vec{y}, \vec{y}) \neq 0$, что позволяет ввести число

$$\lambda = -\frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{g(\vec{y}, \vec{y})}\,. \tag{75.λ}$$

Вообще говоря, $\lambda \in \mathbf{C}$ и для любого вектора $\vec{y} \in V$ значение

$$g(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \overset{?}{\geqslant} 0. \tag{75.≥}$$

Преобразуем это выражение:

$$g(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y}) \overset{?}{=} g(\vec{x}, \vec{x}) + g(\lambda\vec{y}, \vec{x}) + g(\vec{x}, \lambda\vec{y}) + g(\lambda\vec{y}, \lambda\vec{y}) \overset{?}{=}$$

$$= g(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda g(\vec{y}, \vec{x}) + \bar{\lambda} g(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda\bar{\lambda} g(\vec{y}, \vec{y}) \overset{?}{=}$$

$$= g(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda \overline{g(\vec{x}, \vec{y})} + \bar{\lambda} g(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda\bar{\lambda} g(\vec{y}, \vec{y}) \overset{(75.\lambda)}{=\!=}$$

$$\overset{(75.\lambda)}{=\!=} g(\vec{x}, \vec{x}) - \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{g(\vec{y}, \vec{y})}\overline{g(\vec{x}, \vec{y})} - \overline{\frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{g(\vec{y}, \vec{y})}}\, g(\vec{x}, \vec{y}) +$$

$$+\frac{g(\vec{x},\,\vec{y})}{g(\vec{y},\,\vec{y})}\,\frac{\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}}{g(\vec{y},\,\vec{y})}\,g(\vec{y},\,\vec{y})\overset{?}{=}$$

$$=\frac{g(\vec{x},\,\vec{x})\,g(\vec{y},\,\vec{y})-g(\vec{x},\,\vec{y})\,\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}-\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}\,g(\vec{y},\,\vec{x})+g(\vec{x},\,\vec{y})\,\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}}{g(\vec{y},\,\vec{y})}=$$

$$=\frac{g(\vec{x},\,\vec{x})\,g(\vec{y},\,\vec{y})-\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}\,\overline{g(\vec{y},\,\vec{x})}}{g(\vec{y},\,\vec{y})}\overset{(75.\geqslant)}{\geqslant}0.$$

Откуда и следует, неравенство Коши — Буняковского (75.4):

$$g(\vec{x},\,\vec{y})\,\overline{g(\vec{x},\,\vec{y})}\leqslant g(\vec{x},\,\vec{x})\;g(\vec{y},\,\vec{y}). \qquad \blacksquare$$

Как и в евклидовом случае, неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны (см. следствие 70.1).

В унитарных векторных пространствах также имеет место неравенство треугольника:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_g\leqslant\|\vec{x}\|_g+\|\vec{y}\|_g\,,$$

содержательны и переносятся без изменений с вещественного евклидова случая понятия орта, ортогональности векторов, (и значит, ортогональной и ортонормированной систем векторов), ортонормированного базиса, матрицы скалярного произведения, ортогональной проекции, ортогонального дополнения множества векторов и изоморфизма унитарных векторных пространств.

Аналогично свойствам 72.1 и 72.2, следствию 72.2, теоремам 72.1 и 74.2 устанавливаются следующие важные свойства унитарных векторных пространств:

Определение 75.4. *Унитарное векторное пространство* $\langle V,\, g_C\rangle$ *называется* ***конечномерным*** **(*n-мерным*)**, *если* ***конечномерно*** **(*n-мерно*)** *векторное пространство* V.

Утверждение 75.2. *В ортонормированном базисе конечномерного унитарного векторного пространства скалярное произведение любых двух векторов имеет вид (75.3):*

$$(\vec{x},\,\vec{y})_C=x^1\overline{y^1}+x^2\overline{y^2}+\ldots+x^n\overline{y^n}.$$

Утверждение 75.3. *Для любого вектора унитарного векторного пространства его k-ая координата равна скалярному произведению этого вектора на k-ый координатный вектор орто-*

нормированного базиса или, что то же самое,— ортогональной проекции вектора $\bar{x}$ *на k-ый орт.*

Следствие 75.2. *В ортонормированном базисе конечномерного унитарного векторного пространства всякий вектор равен сумме своих ортогональных векторов-проекций на базисные векторы* (см. определение 71.6).

Теорема 75.1. *В любом ненулевом конечномерном унитарном векторном пространстве существует ортонормированный базис.*

Или в любом ненулевом конечномерном унитарном векторном пространстве скалярное произведение приводимо к стандартному виду.

Теорема 75.2. *Два унитарных векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

— Будьте добры, скажите, пожалуйста, как отсюда выбраться?
— Многое зависит от того, куда ты хочешь добраться,— сказал Кот.
— Мне, в общем-то, все равно, куда,— начала было Алиса.
— В таком случае,— прервал ее Кот,— все равно, какой дорогой идти.
— Но куда-нибудь я все-таки хотела бы добраться,— пояснила Алиса.
— Об этом не беспокойся,— ответил Кот,— иди как можно дальше и в конце концов куда-нибудь да придешь.

Л. Кэррол. «Алиса в стране чудес».

Термин «скалярное произведение» векторов впервые использовал У. Гамильтон в 1853 г. в работе по теории кватернионов «Lectures on Qaternions» («Лекции о кватернионах»), когда ему в пространстве кватернионов понадобился аналог расстояния. Напомним, что он же ввел в употребление и термин «вектор» (см. историческую справку лекции 8), появившийся в его статье, опубликованной в 1845 г. в одном из английских математических журналов. Однако, первые содержательные результаты применения этого понятия в многомерных векторных пространствах принадлежат Герману Грассману, который под названием «внутреннего произведения» определил его на координатном векторном пространстве в 1861 г. при втором издании «Die Lineale Ausdehnungslehere» («Учение о линейной протяженности») независимо от Гамильтона. Если в первом издании этой книги он рассматривал пространство **R** только с аффинной точки зрения, т. е. без какого-либо аналога расстояния, то во втором издании каждому элементу n-мерного координатного пространства — кортежу $\langle x^1, x^2, \ldots x^n \rangle$ сопоставляется число

$$\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}\ , \qquad (*)$$

т. е., как мы скажем теперь, длина или норма вектора. Тем самым геометрия пространства R становится евклидовой в том смысле, что введенная величина позволяет сравнивать векторы, точнее — их длины, а также содержательно определить угол между векторами такого пространства. Очевидно, что это про пространство n измерений естественным образом построено по образу и подобию обычного двух и трехмерного пространства, того, которое составляло предмет изучения геометров всех предшествующих времен. В частности, в формуле нормы вектора (*) несложно усмотреть пространственный аналог теоремы Пифагора и того свойства, что квадрат длины диагонали прямого параллелепипеда равен сумме квадратов всех его измерений. Конечно, поскольку свойства этих многомерных пространств были близки к пространству с обычной геометрией Евклида, они и получили у их исследователей название евклидовых пространств.

Таким образом, первое из изучавшихся математиками многомерных евклидовых векторных пространств — это ничто иное, как стандартное n-мерное евклидово векторное пространство, в котором скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ с координатами $(x^1, x^2, \ldots x^n)$ и, соответственно, $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ задается формулой:

$$x^1y^1+x^2y^2+\ldots+x^ny^n. \qquad (**)$$

Однако, потребовалось еще несколько лет и немало исследований по теории квадратичных форм и инвариантов таких замечательных математиков второй половины XIX в., как А. Кэли, Дж. Сильвестр и Г. Сальмон (Salmon Georg, 1819—1909), которые работали в Лондоне и Дублине, а также великого Гаусса и других, чтобы математики поняли, что, во-первых, существует бесчисленное множество скалярных произведений, и, соответственно, геометрий n-мерных векторных пространств, а предыдущая формула — лишь один из частных случаев. Во-вторых, как это ни парадоксально звучит, что, тем не менее, по существу, кроме стандартного n-мерного евклидова пространства, изучением которого занимался Грассман, других евклидовых (n-мерных) пространств нет, поскольку все они изоморфны, а значит, как евклидовы пространства, обладают одними и теми же свойствами. К именам ученых, оставивших свой след в теории евклидовых векторных пространств, конечно, стоит присоединить имя шведского математика Й. Грама (Gram Jorgen Pedersen, 1850—1916), который занимаясь вопросами линейной независимости решений дифференциальных уравнений и ввел определитель специального вида, получивший затем его имя.

Отметим еще, что современные обозначения скалярного произведения были предложены математиками конца XIX в., занимавшимися обобщением понятий и структуры евклидова векторного пространства на бесконечномерный случай в связи с задачами, возникшими в теории функций. Так распространенное в настоящее время обозначение — $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ввел американский математик Дж. Гиббс в 1881 г., завершая цикл статей, посвященных вопросам физической химии: «On the Equilibrium of heterogeneous substances» («О равновесии гетерогенных систем»). Другое общепринятое ныне обозначение скалярного произведения $(\vec{x}, \vec{y})$ впервые использовал в 1903 г. немецкий математик О. Хенричи (Henrichi Olaus Magnus, 1840—1918).

Конечно, обнаруженное впервые У. Гамильтоном и Г. Грассманом свойство пространства не избежала судьба всех серьезных математических открытий XIX в.— внутреннее развитие математики и науки в целом привели к открытию «евклидовости» целого ряда функциональных пространств, т. е. таких векторных пространств, элементами которых являются функции одной или нескольких переменных, определенные в некоторой области, для которых были естественны аналоги скалярных произведений. Первые работы в этой области принадлежат немецкому математику Д. Гильберту, который в опубликованной в Лейпциге в 1912 г. статье «Grundlage eine allgemaeinen Theorie der linearen Integraleichungen» («Основы общей теории линейного интегрирования») ввел функциональные пространства l_2 и L_2, в которых скалярные произведения, т. е. некоторые функции, принимающие числовые значения и удовлетворяющие аксиомам скалярного произведения, имели вид:

$$(x, y)=\sum x_i \bar{y}_i$$

и, соответственно,

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Собственно основы теории пространств, которые затем получили наименование в честь их первооткрывателя — Д. Гильберта, были заложены в работах этого выдающегося немецкого математика конца XIX — начала XX в. в. Важную роль в становлении этой теории сыграли работы другого немецкого математика рубежа веков — Э. Шмидта. Ему принадлежит и термин «норма» и ее обозначение: || ||, которые он ввел в 1908 г. А дальнейшее развитие их идей принадлежит американским математикам Дж. фон Нейману и М. Стоуну (Stone Marshall Harvey, 1903—19??), и долгое время работавшему в США венгру Ф. Риссу. Своими работами 20—30-х годов нашего века они положили начало новому разделу в теории векторных пространств и дали им название — гильбертовы пространства. Гильбертовы пространства являются естественным обобщением обычного трехмерного пространства евклидовой геометрии на бесконечномерный случай. Удивительно то, что структура гильбертовых пространств присуща многим вновь открываемым физиками и математиками пространствам. Исследования различных функциональных гильбертовых пространств продолжаются и поныне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1974.—296 с.
2. *Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения.— М.: Изд. МГУ, 1987.—311 с.
3. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высшая школа, 1979.—560 с.
4. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высшая школа, 1986.— 480 с.
5. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.—272 с.
6. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—4-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.—336 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.—736 с.
8. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.—512 с.
9. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—415 с.
10. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Линейная алгебра.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—400 с.

УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

§ 70. Скалярное произведение векторов

[1] — стр. 84— 87.
[2] — стр. 39— 40.
[3] — стр. 270—276.
[4] — стр. 21— 22, 305—307.
[5] — стр. 30— 33.
[6] — стр. 232—233.
[7] — стр. 239—240, 653—654.
[9] — стр. 137—140.

§ 71. Евклидово векторное пространство

[1] — стр. 87— 91.
[2] — стр. 40— 42.
[3] — стр. 277—278.
[4] — стр. 22— 23.
[5] — стр. 33— 37.
[6] — стр. 234—235.
[7] — стр. 239—240, 654—656.
[9] — стр. 140—146.

§ 72. Ортогонализация базиса евклидова векторного пространства

[1] — стр. 91— 96.
[2] — стр. 41— 42.
[3] — стр. 271—273, 278—279.
[4] — стр. 24— 27, 305—311.
[5] — стр. 38— 44.
[6] — стр. 235—236.
[9] — стр. 149—154.

§ 73′. Подпространства евклидова векторного пространства

[1] — стр. 96.
[2] — стр. 46— 48.
[3] — стр. 273—275, 279.
[4] — стр. 45— 49.
[5] — стр. 38— 44.
[6] — стр. 239—241.

§ 74. Изоморфизм евклидовых векторных пространств

[1] — стр. 96— 97.
[2] — стр. 45.
[3] — стр. 280—281.
[5] — стр. 51— 54.
[6] — стр. 247—248.
[9] — стр. 154—155.

§ 75.* Унитарные пространства

[1] — стр. 98—102.
[2] — стр. 50— 53.
[5] — стр. 85— 87.
[6] — стр. 251—255.
[7] — стр. 660—661.
[10] — стр. 362—365.

Я ведь не хотел ничего другого, кроме как воплотить то, что само рвалось из меня. Почему же это оказалось так трудно?

Г. Гессе. «Степной волк»

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоморфизм 172, 203
Алгебра ассоциативная 195
— — с единицей 195
— коммутативная 195
— линейных операторов 122, 193
— с делением 195
— эндоморфизмов 122, 193
Алгоритм Гаусса 87
— определения собственных векторов 246

Базис 32
— векторного пространства 32, 104
— ортогональный 300
— ортонормированный 300
Базисы ориентированные неодинаково 115
— — одинаково 115

Вектор присоединенный 255
— собственный 233
Векторная форма системы линейных уравнений 46
Векторное подпространство дополнительное 311
— — инвариантное 228
— — конечномерное 33
— — n-мерное 38
— — одномерное 15
— — ориентированное 116
Векторные пространства изоморфные 155
Вектор-проекция 296
Векторы коллинеарные 14
— компланарные 23
— неколлинеарные 14
— некомпланарные 23
— ортогональные 292
— противоположно направленные 16
— сонаправленные 16
Вращение 191
Вычет 211

Геометрическая интерпретация скалярного произведения 293
Гомоморфизм векторных пространств 117
Гомотетия 140, 183
Группа автоморфизмов 203
Группы изоморфные 206

Дефект гомоморфизма 167
Дополнение векторного подпространства 311
— — — ортогональное 313
Дополнительное векторное подпространство 311
— ортогональное подпространство 314

Евклидово векторное пространство 271, 286
— — — стандартное n-мерное 285
Евклидовы векторные пространства изоморфные 318

Жорданова клетка 255
— матрица 255

Изоморфизм векторных пространств 155
— — — евклидовых 319
— — — $Hom(U^n, V^m)$ и $M(m\times n)$ 160
— групп 206
— линейных алгебр 199
— — — $End(V^n)$ и $gl(n)$ 200

Кватернионы 215
Класс вычетов 211
Кольцо 207
— ассоциативное 209
— коммутативное 209
— с делением 209
— с единицей 209
Коммутативная алгебра 195
Комплексные числа 212
— — сопряженные 213
— — сложение 213
— — умножение 213
Координатное евклидово пространство 285
— — — n-мерное 285
— унитарное n-мерное векторное пространство 325
Координаты вектора 104

Лемма об окаймлении минора 69
— о главном миноре 67
— о сокращении 113
Линейная алгебра 194
— форма 133
Линейное многообразие решений системы 82
— отображение 117
Линейный оператор 122
— — диагонализируемый 253
— — с простым спектром 251
— функционал 133

Матрица Грамма 282
— гомоморфизма 137
— жорданова 255
— перехода от базиса к базису 109
— скалярного произведения 277
— ступенчатая 43
Матрицы подобные 254
Метод Гаусса 86, 87
— окаймляющих миноров 65
— последовательного исключения переменных 86, 87
— приведения матрицы к ступенчатому виду 58
Минор окаймляющий 65
Модуль комплексного числа 323
Мономорфизм 169

Неизвестные зависимые 75, 91
— свободные 75, 91
Неравенство Коши — Буняковского — Шварца 272, 288
— треугольника 287
Норма вектора 286
Нормирование вектора 287
Нулевое отображение 131
Нулевой эндоморфизм 187

Образ гомоморфизма 164
Общее решение системы линейных уравнений 74, 81
Определитель Грамма 282
— эндоморфизма 184
Ориентация векторного пространства 109, 115
Орт 287
Ортгональная проекция вектора 293
— система векторов 299
Ортогональное дополнение 313
— проектирование на подпространство 316
Отражение 185, 187

Подалгебра 198
Подкольцо 216
Подпространство инвариантное 228
Поле 216
Проектирование 185, 189
Проекция вектора на подпространство 185
Произведение скаляра на гомоморфизм 130
Противоположное отображение 132

Равносильные системы уравнений 71
Размерность векторного пространства 38
— линейного многообразия 82
— линейной алгебры 196
Ранг матрицы 58, 65
— — столбцовый 47
— — строчечный 47
— системы векторов 38
— — линейных уравнений 47

Система векторов линейно зависимая 18
— — — независимая 27

— — ортогональная 299
— уравнений линейная неоднородная 81
— — — однородная 49
— — несовместная 46
— — совместная 46
Скалярное произведение 270, 321
— — стандартное 284
— — унитарное 322
— — — стандартное 325
Собственное значение 233
— направление 236
— подпространство 238
Собственный вектор 233
Спектр линейного оператора 233
— — — простой 251
Стандартное скалярное произведение 284
— — — унитарное 325
— унитарное n-мерное векторное пространство 325
Стандартный базис в $M(n\times 1)$ 34
— — $M(m\times n)$ 35
Сумма гомоморфизмов 129
— подпространств 41, 312
— — прямая 41, 312

Теорема Жордана 256
— Кронекера — Капелли 45
— о двух базисах 170
— о ранге и дефекте 170
— — матрицы 67
— Фробениуса 216
Тождественный эндоморфизм 187

Угол между векторами 289
Унитарное скалярное произведение 322
— векторное пространство 322
— — — конечномерное 328
— — — n-мерное 328

Фундаментальная система решений 78

Характеристический многочлен 240
Характеристическое уравнений 240

Центральная симметрия 184, 187

Частное решение системы линейных уравнений 75

Эквивалентные системы уравнений 71
Элементарные преобразования матрицы 59
— — — второго рода 59
— — — первого рода 59
— — системы уравнений 71
Эндоморфизм 122, 182
— обратимый 203
Эпиморфизм 169

Ядро гомоморфизма 166
— — вырожденное 166
— — невырожденное 166

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

§ 38

1.1: Нет. 2.2: Система не является линейно зависимой.
1.3: Нет. 2.3: S_1 — нет, S_2 — да.

§ 41

1.1: Да. 2.1: Да.
1.2: $B=\langle E_1^1,\ E_2^1,\ \ldots\ E_n^1,\ E_1^2,\ E_2^2,\ \ldots\ E_n^2,\ \ldots\ E_1^m,\ \ldots E_n^m\rangle$.

§ 42

1.1: $\langle r,\ R\rangle=\langle 2,\ 2\rangle$.

§ 47

1.1: $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}5\\0\\1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}.$$

1.2: $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}-3/5\\-8/5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7/5\\-7/5\\1\\0\end{pmatrix}.$$

1.3: Система совместна при $\lambda\neq-2$, имеет единственное решение при $\lambda\notin\{-2,\ 1\}$, $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{3}$, при $\lambda=1$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

§ 48

1.1: Да, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 1.2: Да, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}4\\1\\-13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\0\\14\end{pmatrix}$.

§ 50

1.1: $\vec{x}\,(2,\ -3)_B$, $\vec{y}\,(-1,0)_{B'}$. 1.2: $T_{\langle B,\ B''\rangle}=T_{\langle B,\ B'\rangle}T_{\langle B',\ B''\rangle}$

§ 51

1.1: Да. 1.2: Да, да. 1.3: Да.

§ 52

1.3: $\dim \mathbf{R}^* = 1$, $\dim(\mathbf{R}^2)^* = 2$.

§ 53

1.1: $M_{h_\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. 2.1: $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f^{-1}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f^{-1}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

1.2 — 1.3: $M_{D_{\langle B \rangle}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. $M_{D_{\langle C \rangle}} = M_{D_{\langle B \rangle}}$.

2.2: $f^{-1}(\vec{e}_1) = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f^{-1}(\vec{e}_2)$ не определен, можно указать только прообразы $\lambda\vec{e}_1$:
$f^{-1}(\lambda\vec{e}_1) = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.3: $R_A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$, $L_A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$. 3.3: Нет.

§ 54

1.1: $M_{f_{\langle B' \rangle}} = \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$.

§ 56

1.1: $M_{(2f+g)_{\langle B^0 \rangle}} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$. 1.2: $M_{2f_{\langle B \rangle}} = \begin{pmatrix} -38 & 32 \\ -58 & 50 \end{pmatrix}$.
1.3: $M_{(f+g)_{\langle B'' \rangle}} = \begin{pmatrix} 83 & 88 \\ -72{,}5 & -77 \end{pmatrix}$. 2.3: $f^i_j \mid f^i_j(\vec{e}_k) = \delta^i_k \vec{c}_j$, где
$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n \rangle$ — базис U^n, $\langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots \vec{c}_m \rangle$ — *базис* V^m.

§ 57

1.1: $\operatorname{def} f_6 = 0$. 2.2: $\operatorname{Ker} D = \{f \mid f(x) = \mathrm{const}\ \forall x \in [a, b]\}$, $\operatorname{def} D = 1$.
1.3: $\operatorname{Ker} I = \{f \mid f(x) \equiv 0$ кроме конечного числа точек$\}$, в случае $f \in \mathscr{C}^0$ ядро — $\operatorname{Ker} I = \{f \mid f(x) \equiv 0\}$, $\operatorname{def} I = 0$.

§ 58

1.1—1.2: 1). В матрице M_g поменяются местами i-ая и j-ая строки и столбцы. 2). в матрице M_g в i-ой строке все элементы делятся на λ, в j-ом столбце умножаются на λ. 1.3: Нет.

§ 61

1.1: $S'(n)$ — коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей и делением. $\dim S'(n)=1$.
1.2: A' — коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей. $\dim A'=2$.
1.3: $\mathbf{C}'$ — коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей и делением. $\dim \mathbf{C}'=2$.

§ 62

1.1: $M_{(g\circ f)_{\langle B'\rangle}}=\begin{pmatrix}22 & 38\\ 33 & 57\end{pmatrix}$. 1.2: $M_{(2f\circ g)_{\langle B^0\rangle}}=2\begin{pmatrix}23 & -28\\ 38 & 41\end{pmatrix}$.

1.3: $M_{(f+g)^2_{\langle B''\rangle}}=\begin{pmatrix}509 & 528\\ -435 & -451\end{pmatrix}$.

§ 63

1.3: Нет.

§ 65

1.3: Нет. 2.3: $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$.

§ 66

1.2: $\operatorname{Sp}(D)=\{0\}$. 1.3: $\operatorname{Sp}(D)=\{0\}$.

§ 70

1.1: g_6 — да, g_5 — нет. 2.2: g_4 — нет.

1.3: $g(\vec{x},\vec{y})=\lambda x^1y^1$, $(\lambda>0)$ — в одномерном случае, в двумерном случае:

$g(\vec{x},\vec{y})=ax^1y^1+bx^1y^2+bx^2y^1+cx^2y^2$, $a\geqslant 0$, $ac-b^2\geqslant 0$.

§ 71

1.1: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{3}{4}\pi$

2.1: $\operatorname{pr}_{\vec{y}}(\vec{x})=-\vec{y}$, $|\operatorname{pr}_{\vec{y}}\vec{x}|=-\sqrt{2}$.

1.3: $(\sin mt,\ \cos nt)=\begin{cases}\pi/2 & \text{при } m\neq n\\ 0 & \text{при } m=n\end{cases}$

2.3: $3/2\ \vec{x}$.

§ 72

1.1: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,\ -1,\ 1)$.

1.2: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{42}}(4,\ 7,\ -1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,\ -7,\ 3)$.

2.2: $\vec{e}_1\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e}_2\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 0,\ 1)$, $\vec{e}_3\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1,\ 0)$.

3.2: $\vec{e}_1\ \dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,\ 1,\ 2,\ 0)$, $\vec{e}_2\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}(0,\ 2,\ -1,\ -1)$.

1.3: $\vec{b}_1(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}_2(1,\ -1,\ 0,\ 1)$,

$\vec{b}_3(-1,\ -2,\ 6,\ -1)$, $\vec{b}_4(1,\ 0,\ 0,\ -1)$.

2.3: $P_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x)=x\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $P_2(x)=\dfrac{3x-1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $P_3(x)=$
$=\dfrac{5x^3-3x}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

§ 73

1.1: $\begin{cases} x^1+2x^2+3x^3=0, \\ 2x^1+\ x^2 \qquad\quad =0. \end{cases}$

$B=\langle\vec{e}\rangle$, $\vec{e}\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ 1)$, второй базис $B=\langle-\vec{e}\rangle$.

2.2: $\begin{cases} 3x^1+\ x^2+2x^3 \qquad =0, \\ \qquad\quad 2x^2-\ x^3-x^4=0. \end{cases}$

1.3: $(L(x))^{\perp}=\{a_0+a_1x+a_2x^2-5/3\,a_1x^3\}$, $\dim(L(x))^{\perp}=3$,
$(L(1,\ x),)^{\perp}=\{a_0+a_1x-3a_0x^2-5/3\,a_1x^3\}$, $\dim(L(x))^{\perp}=2$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 9

ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

От автора 5
§ 37°. Коллинеарные векторы 14
§ 38. Линейно зависимые системы векторов 18
§ 39°. Компланарные векторы 23
§ 40. Линейно независимые системы векторов 27
§ 41. Базис и размерность векторного пространства 32
§ 42′. Векторная форма системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли 45
Историческая справка 50

Лекция 10

РАНГ МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 43. Ранг матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду 58
§ 44*. Ранг матрицы 65
§ 45°. Эквивалентные системы линейных уравнений 71
§ 46. Общее решение системы линейных однородных уравнений 74
§ 47′. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений 80
§ 48′. Метод последовательного исключения переменных . . 86
Историческая справка 96

Лекция 11

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 49°. Координаты вектора в базисе 104
§ 50. Ориентация векторного пространства 109
§ 51. Линейные отображения векторных пространств 117
§ 52′. Пространство линейных отображений 129
§ 53. Матрица линейного отображения 134
Историческая справка 144

Лекция 12

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ

§ 54. Изменение матрицы гомоморфизма при замене базисов векторных пространств 152
§ 55. Изоморфизм векторных пространств 154
§ 56. Изоморфизм векторных пространств ***Hom*** (U^n, V^m) и ***M*** $(m \times n)$ 160
§ 57*. Ядро гомоморфизма 164
Историческая справка 173

Лекция 13

АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 58°. Линейные операторы 182
§ 59′. Линейные операторы в двумерном векторном пространстве 186
§ 60. Алгебра линейных операторов 192
§ 61*. Линейные алгебры 194
§ 62. Изоморфизм линейных алгебр ***End*** (V^n) и ***gl*** (n) 200
§ 63. Группа автоморфизмов векторного пространства ***Aut*** (V^n) 203
§ 64*. Кольца, поля 207
Историческая справка 218

Лекция 14

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 65. Инвариантные подпространства линейных операторов . 228
§ 66. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов 233
§ 67°. Алгоритм определения собственных векторов линейного оператора 246
§ 68′. Линейные операторы с простым спектром 251
§ 69*. Канонический вид матрицы линейного оператора . . . 254
Историческая справка 261

Лекция 15

ЕВКЛИДОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 70. Скалярное произведение векторов 270
§ 71. Евклидово векторное пространство 286
§ 72. Ортогонализация базиса евклидова векторного пространства 300
§ 73′. Подпространства евклидова векторного пространства . 311
§ 74. Изоморфизм евклидовых векторных пространств . . . 318
§ 75*. Унитарные векторные пространства 321
Историческая справка 329

Предметный указатель 336
Ответы к задачам 339

Учебное издание

Петрова Вера Тимофеевна

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Часть 2

Зав. редакцией *Т. А. Савчук*
Редактор *Ю. К. Филиппова*
Технический редактор *Н. П. Торчигина*
Корректор *Т. А. Казанская*

Лицензия ЛР № 064380 от 4.01.96. Сдано в набор 24.06.97.
Подписано в печать 20.05.98. Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,5. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1295.

«Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС»,
117571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет,
тел. 437-99-98, 430-04-92, 437-25-52, тел/факс 932-56-19.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Вера Тимофеевна Петрова – кандидат физико-математических наук, доцент, автор более пятидесяти научных работ.

Учебник написан на основе ее опыта преподавания в Рязанском государственном педагогическом университете и Московском физико-техническом институте. Работа над учебником была поддержана грантом Государственной научной программы «Развитие образования в России».

В учебнике изложение ведется на трех уровнях глубины и сложности. Построение и стиль учебника стимулируют активное усвоение его материала. Лекции дополнены историческими справками.

ISBN 5-691-00239-2(II)

9785691002397

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС