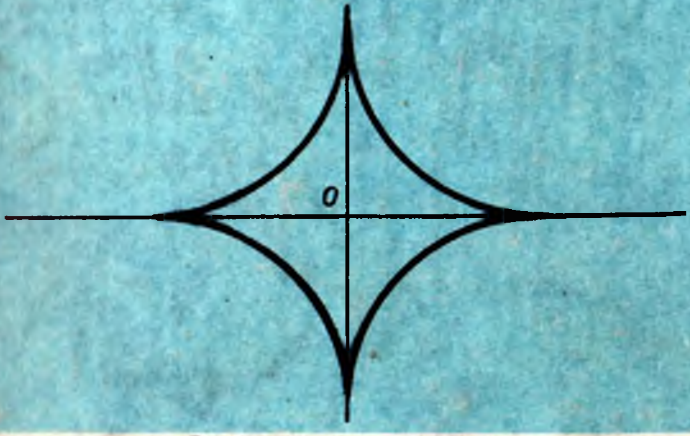
Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

II



ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

„ЎЗБЕКИСТОН"

АБДУЛЛАЕВ, Х. МАНСУРОВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
А. ВОРИСОВ, Р. ҒУЛОМОВ

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

II

*Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
университетлар талабалари учун ўқув
қўлланма сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1995

22.16
М12

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори
Р. Р. АШУРОВ доцент Т. Т. ТУЙЧИЕВ

ISBN 5-640-01508-х

С $\frac{1602070000-66}{\text{М351 (04) 95}}$ 95

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб «Ўзбекистон» нашриётида чоп этилган «Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами», I жилдининг давоми бўлиб, у ўз ичига кўп ўзгарувчили функцияларнинг лимити ва узлуксизлиги, дифференциал ҳисоб, функционал кетма-кетликлар ва қаторлар, хосмас интеграллар, параметрга боғлиқ хос ҳамда хосмас интеграллар, каррали интеграллар, эгри чизиқли ва сирт интеграллари, Фурье қаторлари мавзуларини олади.

Мазкур китоб Тошкент Давлат университети математика факультети ўқитувчиларининг бир гуруҳи томонидан ёзилган бўлиб, унга математика ихтисослиги бўйича мутахассислар тайёрлаш дастури ҳамда Т. Азларов ва Х. Мансуров томонидан ёзилган икки жилдлик «Математик анализ» китоби асос қилиб олинган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар ҳар бир математик тушунча ва таърифни мос мисол ва масалаларни батафсил ечиш орқали таҳлил қилиб ўқувчиларга етказишга ҳаракат қилдилар. Қўлланмада 1300 га яқин мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг 250 дан ортиғи тўлиқ ечими билан берилган.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз хиссаларини қўшган профессорлар Ш. Ёрмуҳамедов, Р. Ашуров, доцентлар Т. Тўйчиев, М. Мамировларга муаллифлар ташаккур изҳор қиладилар.

Қўлланманинг сифатини янада яхшилаш борасидаги фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар аввалдан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

XII боб

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. R^m ФАЗО. R^m ФАЗОДА КЕТМА-КЕТЛИК ВА УНИНГ ЛИМИТИ

m та ҳақиқий сонлар тўплами R нинг ўзаро Декарт кўпайтмасидан иборат ушбу

$$R^m=R\times R\times\ldots\times R=\{(x_1, x_2,\ldots, x_m); x_1\in R, x_2\in R,\ldots,x_m\in R\}$$

тўпламни қарайлик. Одатда бу тўпламнинг элементини (нуқтасини) битта ҳарф билан белгиланади: $x=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$. Бунда $x_1, x_2,\ldots,x_m$ сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи, ..., m-координаталари дейилади.

R^m тўпламда ихтиёрий $x=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$, $y=(y_1, y_2,\ldots, y_m)$ нуқталарни олайлик. Ушбу

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}=$$

$$=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-y_k)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги масофа дейилади. У қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\rho(x, y)\geqslant 0$ ва $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$,
2°. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$,
3°. $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z) \quad (z\in R^m)$.

R^m тўплам R^m фазо (m ўлчовли Евклид фазоси) деб аталади.

Хусусан, $m=2$ бўлганда ($x_1=x$, $x_2=y$)

$$R^2=R\times R=\{(x, y): x\in R, y\in R\}$$

фазога эга бўламиз. Бунда $\forall(x_1, y_1)\in R^2$, $\forall(x_2, y_2)\in R^2$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

бўлади. R^2 фазо текисликни ифодалайди.

Ушбу

$$f: N \to R^m$$

акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, \quad x^{(n)}, \ldots \; (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}), \; n \in N)$$

тўплам R^m *фазода кетма-кетлик* дейилади ва у $\{(x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Ҳар бир $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ни *кетма-кетлик ҳадлари* дейилади.

R^m фазода бирор $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$$

кетма-кетлик ва $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *олинганда ҳам шундай* $n_0 \in N$ *топилсаки, ихтиёрий* $n > n_0$ *учун*

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a *нуқта* $\{x^{(n)}\}$ *кетма-кетликнинг лимити дейилади ва*

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a \quad \text{ёки} \quad n \to \infty \quad \text{да} \quad x^{(n)} \to a$$

каби белгиланади.

Агар $\{x^{(n)}\}$ *кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.*

1-мисол. R^m фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\}$$

кетма-кетликнинг лимити $a = (0, 0, \ldots, 0)$ эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1$ ни топамиз. Унда $\forall \; n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho\left((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}), (0, 0, \ldots, 0)\right) =$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{n} - 0)^2 + (\frac{1}{n} - 0)^2 + \ldots + (\frac{1}{n} - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{n^2}} = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon.$$

Таърифга кўра

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = (0,0,\ldots 0) = a$$

бўлади.

2-мисол. R^2 фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \{(-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}\}$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a = (a_1, a_2)$ га тенг бўлсин. Унда лимит таърифига кўра $\forall\varepsilon > 0$, жумладан $\varepsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики $\forall n > n_0$ да

$$\rho((1,1), (a_1, a_2) < \varepsilon,$$
$$\rho((-1, -1), (a_1, a_2)) < \varepsilon$$

бўлади. Бу муносабатлар ушбу

$$2\sqrt{2} = \rho((-1, -1), (1,1)) \leqslant \rho((-1, -1), (a_1, a_2)) +$$
$$+ \rho((a_1, a_2), (1,1) < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon = 2 \qquad (\varepsilon = 1)$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб берилган кетма-кетликни лимитга эга деб қарашдан иборатдир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

1-теорема. **R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ га интилиши:**

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

учун бир йўла

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m$$

бўлиши зарур ва етарли. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)}=a_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)}=a_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)}=a_m \end{cases}$$

Бу теорема R^m фазода кетма-кетликнинг лимити сонли кетма-кетликнинг лимитига келишини ифодалайди.

3-мисол. R^2 фазода ушбу

$$x^{(n)}=\left\{n(\sqrt[n]{5}-1),\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right\}$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган кетма-кетлик сонлар кетма-кетлиги бўлиб, улар қуйидагича бўлади:

$$x_1^{(n)}=n(\sqrt[n]{5}-1),\ x_2^{(n)}=\left(\frac{n+2}{n}\right)^n.$$

Равшанки, бу кетма-кетликлар учун

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 5,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

бўлади. 1-теоремадан фойдаланиб берилган кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1,\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right)=(\ln 5,e^2)$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

R^2 фазода қуйидаги кетма-кетликларнинг лимити a ($a\in R^2$) эканини исботланг:

1. $\{x^{(n)}\}=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{10}{n}\right)\right\}$, $a=(0,0)$.

2. $\{x^{(n)}\}=\left\{\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right\}$, $a=(0,0)$.

3. $\{x^{(n)}\}=\left\{\left(\frac{3n}{2n-1}, \frac{2-n}{2+n}\right)\right\}$, $a=\left(\frac{3}{2}, -1\right)$.

4. $\{x^{(n)}\}=\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{\sin n}{n}\right)\right\}$, $a=(0,0)$.

5. $\{x^{(n)}\}=\left\{\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}, \frac{1}{n}\right\}$, $a=(0,0)$.

6. $\{x^{(n)}\}=\left\{\frac{n}{3^n}, \frac{2}{n}\right\}$, $a=(0,0)$.

7. $\{x^{(n)}\}=\left\{\frac{2^n}{n!}, \frac{n}{2^n}\right\}$, $a=(0,0)$.

8. $\{x^{(n)}\}=\left\{\sqrt[n]{5}, \frac{\log_5 n}{n}\right\}$, $a=(1,0)$.

9. $\{x^{(n)}\}=\left\{\sqrt[n]{n}, \frac{n^3}{3^n}\right\}$, $a=(1,0)$.

R^2 фазода қуйидаги кетма-кетликларнинг лимитини топинг:

10. $\{x^{(n)}\}=\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^5, \frac{n^3+27}{n^4-15}\right)$.

11. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}, \frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}\right)$.

12. $\{x^{(n)}\}=(\sqrt[3n]{8}, \sqrt[2n]{0{,}5})$.

13. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}, 4^{\frac{n+2}{n+1}}\right)$.

14. $\{x^{(n)}\}=\left((1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}, a^{\frac{1}{n+p}}\right)$, $a>0$, $p>0$.

15. $\{x^{(n)}\}=(\sqrt[n]{n^2}, \sqrt[n^2]{n})$.

16. $\{x^{(n)}\}=(\sqrt[n]{3n-2}, \sqrt[n]{n^3+3n})$.

17. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{\log_5(n^2+1)}{n}, \frac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}\right)$.

18. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{(-2)^n}{(n+2)!}, \frac{1}{(0{,}3)^n n!}\right)$.

19. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}, \frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}\right)$.

20. $\{x^{(n)}\}=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)},\ \sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

2-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1°. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси. R^m фазода бирор M тўпламни қарайлик: $M\subset R^m$.

2-таъриф. *Агар M тўпламдаги ҳар бир $x=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон $y(y\in R)$ мос қўйилган бўлса, M тўпламда кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функция берилган дейилади ва уни*

$$f:(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)\to y \quad \text{ёки} \quad y=f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)$$

каби белгиланади. Бунда M — функциянинг аниқланиш тўплами, $x_1, x_2,\ldots, x_m$ — функция аргументлари, y эса $x_1, x_2,\ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

Масалан, f — R^m — фазодаги ҳар бир $x=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ нуқтага шу нуқта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўювчи қоида, яъни

$$f:x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)\to x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$$

бўлсин. Бу ҳолда $y=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами $M=R^m$ бўлади.

R^{m+1} фазонинг нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,\ f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m))\}$$

тўплам $y=f(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ функция графиги дейилади.

Масалан, икки ўзгарувчили

$$z=x\cdot y, \qquad z=x^2+y^2$$

функцияларнинг графиги R^3 фазода гиперболик ҳамда айланма параболоидлар бўлади.

4-мисол. Ушбу

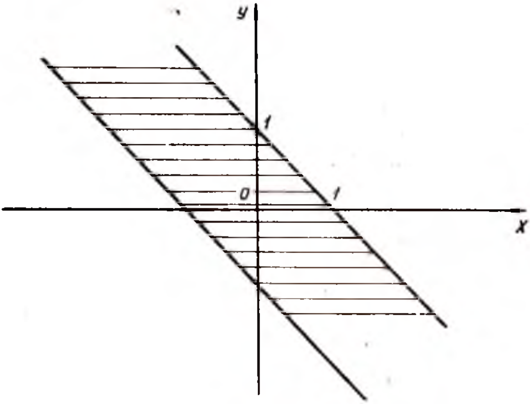
$$z=\arcsin(x+y)$$

функциянинг аниқланиш тўпламини топинг.

Равшанки, x ва y аргументларнинг қийматларига кўра z нинг маънога эга бўлиши учун, x ва y лар ушбу

$$-1\leqslant x+y\leqslant 1$$

муносабатда бўлиши лозим. Бу тенгсизликларни текисликнинг $x+y+1=0$ ва $x+y-1=0$ тўғри чизиқлар орасидаги нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради. Берилган функциянинг аниқланиш тўплами 1-чизмада тасвирланган



1-чизма.

5-мисол. Ушбу

$$z=\sqrt{(-1-x^2-y^2)(\sin^2\pi x+\sin^2\pi y)}$$

функциянинг аниқланиш тўпламини топинг. Бу функция x ва y ларнинг

$$\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$$

бўладиган қийматларидагина аниқланган. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\sin^2\pi x=0\Rightarrow x=p \qquad (p \text{ — бутун сон}),$$
$$\sin^2\pi y=0\Rightarrow y=q \qquad (q \text{ — бутун сон}).$$

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш тўплами

$$M=\{(p,q)\in R^2 : p\in Z,\ q\in Z\}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш тўпламларини топинг:

21. $f(x, y)=\frac{1}{x+y}$.

22. $f(x, y)=\sqrt{x+y}$.

23. $f(x, y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

24. $f(x, y)=\sqrt{-x}+\sqrt{y}$.

25. $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

26. $f(x, y)=\arccos\frac{x^2+y^2}{9}$.

27. $f(x, y)=\sqrt{y\sin x}$.

28. $f(x, y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

29. $f(x, y)=\ln(x+y)$.

30. $f(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+x^2y^2}$.

31. $f(x, y)=1+\sqrt{-(x-y)^2}$.

32. $f(x, y)=\ln\left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-1\right)$.

33. $f(x, y)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y}$.

34. $f(x, y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

35. $f(x, y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{1-y^2}$.

36. $f(x, y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

37. $f(x, y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

38. $f(x, y)=\ln(-x-y)$.

39. $f(x, y)=xy+\sqrt{\ln\frac{9}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-9}$.

40. $f(x, y)=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

41. $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2-1)\cdot(4-x^2-y^2)}$.

42. $f(x, y)=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2°. Каррали лимит. R^m фазода бирор $x^\circ=(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$ нуқтани ҳамда $\varepsilon>0$ сонни олайлик. Ушбу

$$U_\varepsilon(x^\circ)=\{(x_1, x_2,\dots, x_m)\in R^m:\rho((x_1, x_2,\dots, x_m), (x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0))<\varepsilon\}$$

тўплам x^0 нуқтанинг *атрофи* дейилади.

Агар x^0 нуқтанинг ихтиёрий атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ да ($\forall\varepsilon>0$) M ($M\subset R^m$) тўпламнинг x^0 нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, x^0 нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.

Фараз қилайлик, R^m фазода M тўплам берилган бўлиб, $a=(a_1, a_2,\dots, a_m)$ нуқта ($a\in R^m$) унинг лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпламда $y=f(x_1, x_2,\dots, x_m)=f(x)$ функция аниқланган.

3-таъриф (Гейне таърифи). *Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)}\neq a$, $n=1,2,\dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити деб аталади.*

4-таъриф. (Коши таърифи. *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, ушбу $0<\rho(x, \alpha)<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x\in M$ нуқталарда*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити деб аталади.

Функция лимитини

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \text{ ёки } \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, x_2,\dots, x_m)=b$$

каби белгиланади.

Одатда функциянинг бу лимитини унинг каррали лимити деб ҳам юритилади.

Бир ўзгарувчили функцияларга ўхшаш, бу ҳолда ҳам 3— ва 4 — таърифлар ўзаро эквивалентдир.

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{агар } x^2+y^2>0 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x^2+y^2=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $(x, y)\to(0,0)$ (яъни $x\to 0$, $y\to 0$) даги лимитининг нолга тенг эканини кўрсатинг.

а) Гейне таърифига кўра: (0,0) нуқтага интилувчи ихтиёрий (x_n, y_n) кетма-кетликни оламиз.

$$(x_n, y_n)\to(0,0) \qquad (\text{яъни } x_n\to 0,\ y_n\to 0)$$
$$((x_n, y_n)\neq(0,0),\ n=1,2\ldots)$$

Унда

$$f(x_n, y_n)=\frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}$$

бўлади. Агар

$$\frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\sqrt{\frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2}}\cdot\sqrt{x_n y_n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_n y_n}$$

эканини эътиборга олсак, $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ да

$$\lim f(x_n, y_n)=0$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

б) Коши таърифига кўра: $\forall\varepsilon$ сонга кўра $\delta=2\varepsilon$ деб олинса. У холда $0<\rho((x, y), (0,0))<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча, (x, y) нуқталарда

$$|f(x, y)-0|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\rho((x, y), (0,0))<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon.$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

эканини билдиради.

7-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} x+y\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $(x, y) \to (0,0)$даги лимити нолга тенг эканини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олинса, унда $0 < \rho((x, y), (0,0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$|f(x, y) - 0| = |x + y \sin\frac{1}{x}| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} <$$
$$< 2\delta = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса Коши таърифига кўра $(x, y) \to (0, 0)$ да берилган функциянинг лимити 0 эканини билдиради:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x + y \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

8- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$$

функциянинг $(x, y) \to (0, 0)$ даги лимити ноль бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг лимити ноль бўлишини Коши таърифидан фойдаланиб кўрсатамиз. Бунинг учун $\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра шундай $\delta > 0$ сон мавжудлигини топиш керакки,

$$0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$$

тенгсизликни каноатлантирувчи барча (x, y) ларда

$$|f(x, y) - 0| = |(x + y)\sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}| < \varepsilon$$

бўлсин. Равшанки,

$$\rho((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Энди

$$\rho((x, y), (0, 0)) < \delta$$

ва

$$|x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

тенгсизликларни эътиборга олиб,

$$|f(x, y)-0| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x|+|y| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\rho((x, y), (0, 0)) < 2\delta = \varepsilon$$

дейилса, унда $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ бўлишини топамиз. Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ сон топиладики, $0 < \rho((x, y), (0, 0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) ларда

$$|f(x, y)-0| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлди. Бу эса

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right] = 0$$

эканини билдиради.

5- таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон учун шундай* $\delta > 0$ *топилсаки, ушбу* $\rho((x, y), (0, 0)) > \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* (x, y) *нуқталарда*

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x, y)$ *функциянинг* $x \to \infty$, $y \to \infty$ *даги лимити дейилади ва*

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x, y) = b$$

каби белгиланади.

9- мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

функциянинг $x \to \infty$, $y \to \infty$ даги лимитини топинг.

Аввало берилган функцияни

$$\frac{x+y+(x^2+y^2)2}{x^2+y^2} = 2 + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$$

каби ёзиб оламиз. Сўнгра

$$\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2 = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$$

тенгликнинг ўнг томонини баҳолаймиз:

$$\left|\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}\leqslant 2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Демак,

$$\left|\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}-2\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Равшанки,

$$\rho((x, y), (0, 0))=\sqrt{x^2+y^2}>\delta \qquad (\delta>0)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$|f(x, y)-2|=\left|\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}-2\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}<\frac{2}{\delta}$$

бўлади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, унга кўра $\delta=\frac{2}{\varepsilon}$ деб олинса, унда $\rho((x, y), (0, 0))>\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y) нуқталарда

$$\left|\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}-2\right|<\frac{2}{\delta}=\varepsilon$$

бўлади. Юқорида келтирилган 5- таърифга кўра

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2$$

эканлиги келиб чиқади.

10- мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

функциянинг $(x, y)\to(0, 0)$ да лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

$(0, 0)$ нуқтага интилувчи 2 та —

$$(x_n, y_n)=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\to(0, 0).$$

$$(x'_n, y'_n)=\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\to(0, 0).$$

кетма-кетлик оламиз. Унда функция қийматларидан иборат кетма-кетликлар

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = 1,$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4n^2+1}$$

бўлиб,

$$\lim f(x_n, y_n)=1,$$
$$\lim f(x'_n, y'_n)=0$$

бўлади. Бу эса $(x, y)\to(0, 0)$ да берилган функциянинг лимитини мавжуд эмаслигини билдиради.

11-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 3, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x\to 0$, $y\to 3$ даги лимитини хисобланг.

Агар $x^2\cdot y=t$ дейилса, унда $x\to 0$, $y\to 3$ да $t\to 0$. Натижада

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot y = \lim_{\substack{t\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin t}{t}\,y=3$$

бўлади.

1-эслатма. Айрим ҳолларда $x=a+r\cos\varphi$, $y=b+$ $+r\sin\varphi$ алмаштириш

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$$

каррали лимитни топишни енгиллаштиради. Бунда

$$f(x, y)=f(a+r\cos\varphi,\ b+r\sin\varphi)=F(r, \varphi)$$

бўлиб,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=c \Leftrightarrow \lim F(r, \varphi)=c$$

бўлади.

12- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

лимитни ҳисобланг.

Аввало

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{2\sin^2\frac{(x^2+y^2)}{2}} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\frac{x^2+y^2}{2}\cdot x^2y^2}{\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \left[\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right]^2 \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = 2\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \left[\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right]^2 \cdot \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}$$

эканини топамиз. Сўнгра $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to0} r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = 0\,.$$

13- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$$

лимитни ҳисобланг.

Лимити ҳисобланадиган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2}{x^2+xy}\cdot xy} = \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}.$$

Сўнгра $t=xy$ алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, $x\to0$, $y\to2$ да $t\to0$. Унда, бир томондан,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e\,,$$

иккинчи томондан,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$$

бўлишини ҳисобга олиб, берилган лимит

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = e^2$$

га тенг бўлишини топамиз.

14- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

лимит мавжудми?

Айтайлик, (x, y) нуқта $(0, 0)$ нуқтага текисликдаги $y=$ $=kx$ тўғри чизиқ бўйича интилсин. У ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

бўлади. Демак, (x, y) нуқта турли тўғри чизиқлар бўйича $(0, 0)$ га интилганда лимитнинг қиймати турлича бўлади. Бу ҳол қаралаётган лимитнинг мавжуд эмаслигини билдиради.

15- мисол. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$$

лимитни ҳисобланг.

Ушбу

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, $x\to\infty$, $y\to\infty$ да $r\to\infty$. Натижада

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\cos\varphi+2r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi-2r^2\cos\varphi\sin\varphi+2r^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi+2\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi}$$

бўлади. Агар $[0, 2\pi]$ да

$$\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi}$$

функциянинг чегараланганлигини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi}=0$$

бўлишини топамиз.

3°. Такрорий лимит. Кўп ўзгарувчили функцияларда каррали лимит тушунчаси билан бир қаторда такрорий лимит тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M тўпламда $(M\subset R^m)$ берилган бўлиб, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ лар тайинланган бўлиб $x_i\to a_i$ да берилган функциянинг лимити (агар у мавжуд бўлса) $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади:

$$\lim_{x_i\to a_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m).$$

φ_i функцияларда ҳам шундай мулоҳаза юритиб ушбу

$$\lim_{x_m\to a_m}\ \lim_{x_{m-1}\to a_{m-1}}\ \ldots\ \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Одатда бу лимит $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг такрорий лимити дейилади.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лар мос равишда $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{агар } x^2+y^2>0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x^2+y^2=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $(0,\ 0)$ нуқтадаги такрорий лимитларини топинг.

Равшанки,

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Бу тенгликдан

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0} 0=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Шунингдек,

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари бир-бирига тенг бўлиб, у нолга тенг:

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Бу функциянинг (0, 0) нуқтада каррали лимитининг 0 га тенг эканини 6- мисолда кўрган эдик.

17- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x-y}{x+3y}, & \text{агар } x+3y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x+3y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0, 0) нуқтадаги такрорий лимитларини топинг. Бу функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x-y}{x+3y} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \lim_{y\to 0} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{2x-y}{x+3y} = 2,$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0} 2 = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитларидан бири $-\frac{1}{3}$ га, иккинчиси эса 2 га тенг. Бунда равшанки,

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{2x-y}{x+3y} \neq \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{2x-y}{x+3y}.$$

Шуни айтиш керакки, қаралаётган функциянинг (0,0) нуқтадаги каррали лимити мавжуд эмас.

Ҳақиқатан ҳам, (0, 0) нуқтага интилувчи

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0),$$

$$(x_n', y_n') = \left(\frac{5}{n}, \frac{4}{n}\right) \to (0, 0)$$

кетма-кетликлар учун мос равишда

$$f(x_n, y_n) = \frac{2\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 3\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4},$$

$$f(x_n', y_n') = \frac{2\cdot\frac{5}{n} - \frac{4}{n}}{\frac{5}{n} + 3\cdot\frac{4}{n}} = \frac{6}{17} \to \frac{6}{17}$$

бўлади ва бу берилган функциянинг каррали лимитининг мавжуд эмаслигини билдиради.

18- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

функциянинг (0, 0) нуқтадаги такрорий лимитларини топинг.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0, \quad \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари бир-бирига тенг бўлиб, улар нолга тенг:

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Бу функциянинг (0, 0) нуқтада каррали лимитининг мавжуд эмаслиги 10- мисолда кўрсатилган эди.

19- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0, 0) нуқтада такрорий лимитлари мавжудми?

Равшанки,

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = x$$

бўлади. Бироқ $x \to 0$ да $\sin\frac{1}{x}$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаганлиги сабабли

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

мавжуд эмас.

Демак, берилган функциянинг битта такрорий лимити мавжуд бўлиб, иккинчиси эса мавжуд эмас.

Бу функциянинг (0, 0) нуқтада каррали лимитининг мавжудлиги (унинг нолга тенглиги) 7- мисолда кўрсатилган.

20- мисол. Ушбу

$$f(x,\ y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

функциянинг (0, 0) нуқтада такрорий лимитлари мавжудми?

$x \to 0$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас, чунки

$$x_n=\frac{1}{n\pi}\to 0,\ x'_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}\to 0$$

кетма-кетликлар учун уларга мос равишда ҳосил бўлган кетма-кетликлар лимитлари

$$f(x_n,\ y)=f\left(\frac{1}{n\pi},\ y\right)=\left(\frac{1}{n\pi}+y\right)\sin n\pi\sin\frac{1}{y}=0\to 0$$

$$(y\neq 0),$$

$$f(x'_n,\ y)=f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi},y\right)=\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}+y\right)\sin\frac{1}{y}\to y\sin\frac{1}{y}$$

турлича бўлади. Бинобарин,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

лимит мавжуд эмас. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

лимитнинг мавжуд эмаслиги кўрсатилади. Демак, берилган функциянинг иккала такрорий лимити ҳам мавжуд эмас.

Бу функциянинг (0, 0) нуқтада каррали лимитининг мавжудлигини (ва унинг нолга тенглигини) 8- мисолда кўрган эдик.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг каррали ҳамда такрорий лимитлари орасидаги муносабатлар турлича бўлар экан:

а) $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y)$

лимитларнинг ҳар бири мавжуд ва

$$\lim_{x\to a_1}\lim_{y\to a_2} f(x, y)=\lim_{y\to a_2}\lim_{x\to a_1} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y),$$

б) $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ лимитлар мавжуд ва $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)\neq\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ бўлиб, $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y)$ лимит мавжуд эмас,

в) $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ лимитлар мавжуд ва $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)=\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ бўлиб, $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y)$ лимит мавжуд,

г) $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ лимитларнинг бири мавжуд, иккинчиси мавжуд эмас, аммо $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y)$ лимит мавжуд.

д) $\lim\limits_{x\to a_1}\lim\limits_{y\to a_2} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to a_2}\lim\limits_{x\to a_1} f(x, y)$ лимитларнинг иккаласи ҳам мавжуд эмас, аммо

$$\lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y)$$

лимит мавжуд.

2-теорема. $f(x, y)$ **функция** $M=\{(x, y)\in R^2: |x-x_0|<a_1, |y-y_0|<a_2\}$ **тўпламда берилган бўлсин.**

Агар: 1) $(x, y)\to(x_0, y_0)$ **да** $f(x, y)$ **функциянинг каррали лимити мавжуд:**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=b;$$

2) ҳар бир тайинланган x да (ҳар бир тайинланган y да)

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)\right)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \qquad \left(\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)\right)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b \qquad \left(\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b\right)$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги каррали лимитларни ҳисобланг:

43. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$, $(a \neq 0)$.

44. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}$.

45. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$.

46. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

47. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to a}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$.

48. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}$.

49. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

50. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (xy)^{2(x^2 + y^2)}$.

51. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\frac{1}{e^{x^4 + y^4}}}{x^4 + y^4}$.

52. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

53. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

54. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt[3]{x^4y^2}}{x^2+y^2}$.

55. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

56. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

57. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

58. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

59. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{|x^3|+|y|^3}$.

60. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{|x|}$.

61. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

62. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Қуйидаги каррали лимитларнинг мавжуд эмаслигини исботланг:

63. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$.

64. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$.

65. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

66. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

67. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$.

68. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

69. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+y)}{y}$.

70. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

71. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^2}, & \text{агар } (x, y)\neq(0, 0) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x, y)=(0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0, 0) нуқтада каррали лимитининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

72. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)^{x+y}, & \text{агар } x+y\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x+y=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x\to\infty$, $y\to\infty$ да каррали лимитининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Қуйида берилган $f(x, y)$ функцияларнинг такрорий

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y), \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

лимитларини ҳисобланг.

73.

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & \text{агар } x\neq -y \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=-y \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$x_0=0, \ y_0=0.$$

74. $f(x, y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; $\quad x_0=0, \ y_0=0.$

75. $f(x, y)=\frac{\sin(x+y)}{2x+3y}$; $\quad x_0=0, \ y_0=0.$

76. $f(x, y)=\frac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$; $\quad x_0=0, \ y_0=0.$

77. $f(x, y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad x_0=0, \ y_0=0.$

78. $f(x, y)=\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}2y}{6x+3y}; \quad x_0=0, \ y_0=0.$

79. $f(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}; \quad x_0=\infty, \ y_0=\infty.$

80. $f(x, y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}; \quad x_0=\infty, \ y_0=0.$

81. $f(x, y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+3y}; \quad x_0=\infty, \ y_0=\infty.$

82. $f(x, y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}; \quad x_0=0, \ y_0=0.$

83. $f(x, y)=\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}; \quad x_0=0, \ y_0=\infty.$

84. $f(x, y)=\log_x(x+y); \quad x_0=1, \ y_0=0.$

85. $f(x, y)=\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}+y}{x+y}; \quad x_0=0, \ y_0=0.$

86.

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{|x|-|y|}, & \text{агар } |x|\neq|y| \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } |x|=|y| \text{ бўлса.}\end{cases}$$

$$x_0=0, \ y_0=0.$$

3-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1°. Функция узлуксизлиги таърифлари. R^m фазодаги M тўпламда $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция берилган бўлиб, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқта $(a\in M)$ шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-таъриф. *Агар*

$$x\to a \text{ да, яъни } \begin{array}{l} x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m\end{array}$$

да $f(x)=f(x_1, \ldots, x_m)$ *функциянинг лимити мавжуд бўлиб,*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

яъни

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, x_1, \ldots, x_m)=f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

бўлса, функция $a=(a_1, \ldots, a_m)$ нуқтада узлуксиз деб аталади.

7-таъриф (Гейне таърифи). *Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га $(a \in M)$ интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.*

8-таъриф (Коши таърифи). *Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз деб аталади.

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция аргументларининг орттирмалари

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$$

га мос ушбу

$$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(a_2, a_2, \ldots, a_m) =$$
$$= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

айирма $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги тўлиқ орттирмаси дейилади ва $\Delta f(a)$ каби белгиланади:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Қуйидаги

$$\Delta x_1 f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \ldots, a_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m),$$
$$\Delta_{x_2} f(a) = f(a_1, a_2 + \Delta x_2, a_3, \ldots, a_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_{x_m} f(a) = f(a_1, a_2, \ldots, a_m + \Delta_{xm}) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

айирмалар $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг a нуқтадаги хусусий орттирмалари дейилади.

9-таъриф. *Агар*

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f(a) = 0$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз дейилади.

10-таъриф. *Агар $f(x)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда узлуксиз дейилади.*

Шуни таъкидлаш лозимки, юқорида келтирилган таърифлар кўп ўзгарувчили функциянинг барча ўзгарувчилари бўйича узлуксизлигини ифодалайди.

21-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x, y)\neq(0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y)=(0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг R^2 да узлуксиз эканини кўрсатинг. Бу функциянинг ихтиёрий (x_0, y_0) $((x_0, y_0)\neq(0,0))$ нуқтада узлуксиз бўлиши,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\frac{x_0^4+x_0^4}{x_0^2+y_0^2}$$

муносабатдан келиб чиқади.

Энди қаралаётган функциянинг (0, 0) нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. Агар ўзгарувчиларни $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ дейилса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=$$

$$=\lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=0$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0).$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (0,0) нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

22-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x+y$$

функциянинг R^2 да узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall\varepsilon>0$ сонни оламиз. Унга кўра $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ дейилса, у ҳолда $\rho((x, y), (x_0, y_0))=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall(x, y)\in R^2$ нуқталарда

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|x+y-(x_0+y_0)|\leqslant$$
$$\leqslant|x-x_0|+|y-y_0|\leqslant 2\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<2\delta=\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса Коши таърифига кўра $f(x,y)$ функциянинг $\forall(x_0,y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

23- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{2x+3}{x^2+y^2+1}$$

функциянинг ихтиёрий $(x_0,\ y_0)\in R^2$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

(x_0,y_0) нуқтага Δx, Δy орттирмалар бериб, функциянинг тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=\frac{2(x_0+\Delta x)+3}{(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2+1}-\frac{2x_0+3}{x_0^2+y_0^2+1}=$$

$$=\frac{[2(x_0+\Delta x)+3](x_0^2+y_0^2+1)-(2x_0+3)[(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2+1]}{[(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2+1](x_0^2+y_0^2+1)}.$$

Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(x_0,y_0)=0$$

бўлиши келиб чиқади. 9-таърифга кўра берилган функция $(x_0,\ y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

$f(x_1,x_2,\ldots,\ x_m)$ функция $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Бу функциянинг бирор $x_к(к=1,2,\ldots,m)$ аргументидан бошқа барча аргументларини тайинлаб, бу $x_к$ аргументга Δx_k орттирма берамиз. Унда функция ушбу

$$\Delta_{x_k}f=f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{k-1},x_k,\ +\Delta x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_m)-f(x_1,\ldots,\ x_m)$$

$(k=1,2\ldots,\ m)$ хусусий орттирмага эга бўлади.

11-таъриф. *Агар $\Delta x_к\to 0$ да функциянинг хусусий орттирмаси $\Delta_{x_k}f$ ҳам нолга интилса, яъни*

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\Delta_{x_k}f=0\qquad (k=1,2,\ldots,\ m)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтада x_k ўзгарувчиси бўйича узлуксиз дейилади. Одатда функциянинг бундай узлуксизлигини унинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги дейилади.

3-теорема. **Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуқтада узлуксиз (барча ўзгарувчилари бўйича бир йўла узлуксиз) бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлади.**

2-эслатма. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан унинг шу нуқтада узлуксиз (бир йўла узлуксиз) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

24-мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{агар} x^2+y^2 \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{агар} x^2+y^2=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз, иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Равшанки,

$$y \neq 0 \text{ ва } x \to x_0 \neq 0 \text{ бўлса}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^2+y^2} = f(x_0, y).$$

$$y = 0 \text{ ва } x \to x_0 \neq 0 \text{ бўлса},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x,0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x \cdot 0}{x^2+0} = 0 = f(x_0, 0);$$

$$y = 0 \text{ ва } x \to 0 \text{ бўлса},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = f(x_0, y).$$

Бу берилган $f(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишини кўрсатади. Худди шунга ўхшаш қаралаётган функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлиши кўрсатилади.

Берилган функция (0,0) нуқтада узлуксиз (иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз) бўлмайди. Чунки $x \to 0$, $y \to 0$ да

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

мавжуд эмас. Уни 14- мисолда кўрсатилган эди.

2°. Функциянинг узилиши.

12- таъриф. *Агар*

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b \neq f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

бўлса, ёки

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \infty$$

бўлса, ёки $f(x_1 x_2, \ldots, x_m)$ *функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, у ҳолда* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функция* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *нуқтада узилишга эга дейилади.*

25- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2+y^2, \text{ агар } (x, y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } (x, y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узилишга эга бўлишини кўрсатинг.

Равшанки,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2+y^2) = 0.$$

Бу ҳолда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 1$$

бўлади. Юқоридаги таърифга кўра берилган функция (0,0) нуқтада узилишга эга бўлади.

26- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, \text{ агар } (x, y) \neq (0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } (x, y) = (0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узилишга эга бўлишини аниқланг.

Равшанки, берилган функция R^2 тўпламда аниқланган бўлиб,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$$

бўлади. Таърифга кўра берилган функция (0,0) нуқтада узилишга эга.

27- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Бу функция R^2 фазонинг

$$\begin{cases}\sin\pi x=0,\\ \sin\pi y=0\end{cases}$$

системани қаноатлантирувчи (x, y) нуқталарида узилишга эга бўлади. Кейинги системанинг ечими

$$\{(x,\ y){:}\,x=n\ \text{— бутун сон},\ y=m\ \text{— бутун сон}\}$$

тўпламнинг нуқталаридан иборат. Демак, берилган функциянинг узилиш нуқталари чексиз кўп бўлиб, улар

$$\{(n,\ m){:}\,n\in Z,\ m\in Z\}$$

тўпламни ташкил этади.

28- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2-y)(x+3y)}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Бу функция R^2 фазонинг

$$x^2-y=0,\ \text{яъни}\ y=x^2$$

ҳамда

$$x+3y=0,\ \text{яъни}\ y=-\frac{1}{3}x$$

тенгликларни қаноатлантирувчи нуқталарида узилишга эга бўлади. Демак, берилган функциянинг узилиш нуқталари тўплами $y=x^2$ парабола ҳамда $y=-\frac{1}{3}x$ тўғри чизиқлардан иборат.

3°. Функциянинг текис узлуксизлиги. $f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ функция M тўпламда ($M\subset R^m$) берилган бўлсин.

13- таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки,* M *тўпламнинг* $\rho((x_1',x_2',\dots,x_m'), (x_1'',\dots, x_m''))<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий* $(x_1', x_2',\dots, x'_m)\in M$, $(x_1'',\dots, x''_m)\in M$ *нуқталарида*

$$|f(x_1'', x_2'',\dots, x_m'')-f(x_1', x_2',\dots, x_m')|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x_1, x_2,\dots,x_m)$ *функция* M *тўпламда текис узлуксиз дейилади.*

29- мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^2+y^2$$

функциянинг $M=\{(x, y)\in R^2{:}x^2+y^2\leqslant 1\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга кўра олинадиган $\delta>0$ сонни $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ бўлсин дейлик. У ҳолда

$$\rho((x_1, y_1))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta.$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall(x_1, y_1)\in M$, $\forall(x_2, y_2)\in M$ нуқталар учун

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|=|x_1^2+y_1^2-(x_2^2+y_2^2)|=$$
$$=|(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+$$
$$+2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=4\delta<\varepsilon$$

бўлади. Таърифга кўра берилган функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади.

30- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{1}{xy}$$

функциянинг $M=\{(x,y)\in R^2:0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Бу функция M тўпламда узлуксиз. Бироқ у қаралаётган M тўпламда текис узлуксизлик таърифидаги шартни бажармайди. Бошқача айтганда $\forall\delta>0$ учун шундай $\varepsilon>$ >0 ва (x_1', y_1'), (x_2', y_2') нуқталар топиладики,

$$\rho((x_1', y_1'), (x_2', y^{2'}))<\delta=>|f(x_1'y_1')-f(x_2', y_2')|>\varepsilon$$

Ҳақиқатан ҳам, $\forall\delta>0$ учун $\varepsilon=1$ деб

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in M$, $\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right)\in M$ нуқталарни олсак,

$n>n_0=\left[\frac{1}{\sqrt{2}\,\delta}\right]$ бўлганда

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}<\delta$$

ҳамда

$$|f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right)|=3n^2>1=\varepsilon$$

бўлади. Демак, қаралаётган функция M тўпламда текис узлуксиз эмас.

4-теорема (Кантор теоремаси). **Агар $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда ($M\subset R^m$) берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.**

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг, узилиш нуқталарини топинг:

87. $f(x,y)=\frac{10x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

88. $f(x,y)=\frac{3y}{2x-y}$.

89. $f(x, y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, \text{ агар } x^2+y^2\leqslant 1 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x^2+y^2>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$

90. $f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$.

91. $f(x, y)=\frac{2x-3}{x^2+y^2-4}$.

92. $f(x, y)=\frac{x-y^2}{x+y^2}$.

93. $f(x, y)=\frac{x-y}{x^3-y^3}$.

94. $f(x, y)=\ln(9-x^2-y^2)$.

95. $f(x, y)=\frac{3}{x^2+y^2}$.

96. $f(x, y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

97. $f(x, y)=\frac{xy}{x+y}$.

98. $f(x, y)=\sin\frac{1}{xy}$.

99. $f(x, y)=\frac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

100. $f(x, y)=\cos\frac{1}{x^2+y^2-9}$.

101. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, \text{ агар } y\geqslant x^4 \text{ ёки } y\leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } 0<y<x^4 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узилишга эга эканини исботланг.

102. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}, \text{ агар } y=0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{4-y^2}, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x\neq 0,\ y\neq 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

103. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{(xy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ агар } x^2+y^2>0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x^2+y^2=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

104. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}, \text{ агар } x+y\neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x+y=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

105. Агар $f(x, y)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлиб, бирор ўзгарувчиси буйича монотон бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функциянинг иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг M тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг:

106. $f(x, y)=x^3-y^3$; $M=\{(x, y)\in R^2:1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

107. $f(x, y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; $M=\{(x, y)\in R^2:0<x^2+y^2<25\}$.

108. $f(x, y)=xy\sin\dfrac{1}{y}$, $M=\{(x, y)\in R^2:0<x<1,0<y<1\}$.

109. $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$; $M=R^2$.

Қуйидаги функцияларнинг M тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг:

110. $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}$; $M=\{(x, y)\in R^2:0<x^2+y^2\leqslant 1\}$.

111 $f(x, y)=x\sin\dfrac{1}{y}$; $M=\{(x, y)\in R^2:0<x, 0<y<1\}$.

112. $f(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; $M=\{(x, y)\in R^2:0<x^2+y^2<1\}$.

XIII боб

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1°. Функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциалланувчанлиги.

$f(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ функция очиқ M тўпламда ($M\subset R^m$) берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_m^0)\in M$ бўлсин. Бу функциянинг

x_k ($k=1,2,\dots,m$) координатасига шундай Δx_k ($k=1,2,\dots,$ m) орттирма берайликки, $(x_1^0, x_2^0,\dots, x_k^0+\Delta x_k,\dots, x_m)\in M$ бўлсин. Унда функция

$$\Delta x_k f = f(x_1^0, x_2^0,\dots, x_k^0+\Delta x_k,\dots, x_m) - f(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$$

хусусий орттирмага эга бўлади.

1-таъриф. *Агар* $\Delta x_k\to 0$ *да ушбу* $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} =$ $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1^0,\dots,x_k^0+\Delta x_k,\dots,x_m^0)-f(x_1^0,\dots,x_m^0)}{\Delta x_k}$ *лимит мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит* $f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ *функциянинг* $(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$ *нуқтадаги* x_k *ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва*

$$\frac{\partial f(x_1^0,\dots,x_m^0)}{\partial x_k},\ \frac{\partial f}{\partial x_k},\ f'_{xk}(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$$

белгиларнинг бири билан белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k}\quad (k=1,2,\dots,m).$$

Келтирилган таърифдан, $f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ функция $f'_{x_1}, f'_{x_2},\dots, f'_{x_m}$хусусий ҳосилалари бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи каби эканлиги кўринади. Бинобарин, кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласини ҳисоблашдаги маълум қоида ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = e^{xy}$$

функциянинг (1.1) нуқтадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,1)-f(1,1)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y}\ \text{бўлиб,}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,1)-f(1,1)}{\Delta x} = \lim\frac{e^{1+\Delta x}-e}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e$$

га тенг. Худди шунга ухшаш

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{1+\Delta y}-e}{\Delta y} = e$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = e, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = e.$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

функциянинг (0,0) нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Равшанки, $(x, y) \neq (0,0)$ да

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ҳосила таърифига кўра

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

бўлади. Бироқ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

лимитлар мавжуд бўлганлиги сабабли, қаралаётган функциянинг (0,0) нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд бўлмайди.

3-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

функциянинг f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Бу функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда y ни ўзгармас, y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда эса x ни ўзгармас деб қараймиз. Унда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y})'_x=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin 2\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y})'_y=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2})=\frac{-2x}{y^2\sin 2\frac{x}{y}}$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Икки ҳолни қарайлик:

1) $(x, y)\neq(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{2y(x^2+y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{2x(x^2+y^2)-2xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

бўлади.

2) $(x, y)=(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда, ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot 0}{\Delta x^3}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta y\cdot 0}{\Delta y^3}=0.$$

Демак, берилган функция ихтиёрий $(x, y)\in R^2$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга.

5-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтада хусусий ҳосилаларини топинг.

Хусусий ҳосилалар таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0))}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

Демак,

$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0.$$

Берилган функция (0,0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлсада, у шу нуқтада узлуксиз бўлмайди. Чунки (0,0) нуқтага интилувчи

$$\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})\}\quad ((\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})\to(0,0))$$

кетма-кетликда функция қийматларидан иборат

$$\{f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})\}$$

кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})\neq f(0,0).$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (0,0) нуқтада узилишга эга эканини билдиради.

$f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ функция очиқ $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)\in M$ бўлсин. M тўпламда $(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2,\dots, x_m^0+\Delta x_m)$ нуқтани олиб, функциянинг тўла орттирмаси

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)=f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2,\dots, x_m^0+\Delta x_m)-$$
$$-f(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$$

ни қараймиз.

2-таъриф. *Агар $f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$ нуқтадаги $\Delta f(x_1^0, x_2^0,\dots, x_m^0)$ орттирмасини*

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_m\Delta x_m+$$

$+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\cdot\Delta x_2+...+\alpha_m\cdot\Delta x_m$ *каби ифодалаш мумкин бўлса,* $f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)$ *нуқтада дифференциалланувчи дейилади* (бунда $A_1, A_2,..., A_m$ лар $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ ларга боглиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0,..., \Delta x_m\to 0$, *да* $\alpha_1\to 0, \alpha_2\to 0,..., \alpha_m\to 0(\Delta x_1=\Delta x_2=$ $=...=\Delta x_m=0$ бўлганда $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0$ деб олинади).

Агар $f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция M тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

Юқоридаги (1) муносабатни

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_m\Delta x_m+0(\rho) \quad (2)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу ерда:

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_m^2}.$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^2+y^2$$

функциянинг ихтиёрий $(x_0, y_0)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканини кўрсатинг.

Берилган функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2-(x_0^2+y_0^2)=$$

$$=2x_0\Delta x+2y_0\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2.$$

Агар $A_1=2x_0$, $A_2=2y_0$, $\alpha_1=\Delta x$, $\alpha_2=\Delta y$ дейилса, унда

$$\Delta f(x_0, y_0)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

7-мисол. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилалари мавжуд ва (2) муносабатдаги A_1 ва A_2 лар учун

$$f'_x(x_0, y_0)=A_1, \ f'_y(x_0, y_0)=A_2$$

бўлишини исботланг.

$f'_y(0,0)$

Дема

к,

алла

араз

нувчи

бўлн $\Delta f(0,0$

б, бу

кўри

нишда

ҳуйида

мун

лиг

саба

Δy

ни қ

$=\frac{1}{n}$

Ай Дема

ди

бў илга

да фер

фу $f(x_1,$

иб, х

46 $t_1, t_2,$

нкци

0,

0

лганда

$\alpha_1 \to 0,$

ишига

иалла-

ункция

$,\dots,\ x_m^0)$

унинг

келиб

га эга

анувчи

иянинг

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}}{\Delta y}=0.$$

Демак,

$$f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0.$$

Фараз қилайлик функция (0,0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=$$
$$=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$$

бўлиб, бу орттирмани ушбу

$$\Delta f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+0(\rho)$$
$$(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

кўринишда ифодаланади.

Қуйидаги

$$\frac{\Delta f(0,0)-(A_1\Delta x+A_2\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

муносабат ихтиёрий $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ларда нолга интилмаслигини кўриш қийин эмас. Масалан, $\Delta x=\frac{1}{n}\to 0$, $\Delta y=\frac{1}{n}\to 0$ бўлганда

$$\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}\to\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}\neq 0(\rho).$$

Айтилганлардан, берилган функциянинг (0,0) нуқтада дифференциалланувчи эмаслиги келиб чиқади.

$f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x_1, x_2,..., x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида $t_1, t_2,\ldots, t_k$ ўзгарувчиларнинг $T\subset R^k$ тўпламда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{aligned} \tag{4}$$

Бунда $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ бўлсин. Натижада

$$f(\varphi_1, (t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = \\ = F(t_1, \dots, t_k)$$

мураккаб функция ҳосил бўлади.

1-теорема. **Агар (4) функцияларнинг ҳар бири ($t_1^0, \dots, t_k^0$) нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос ($x_1^0, x_2^0, \dots, x^0_m$) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция ҳам ($t_1^0, t_2^0, \dots, t^0_k$) нуқтада дифференциалланувчи бўлиб,**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \end{aligned} \tag{5}$$

бўлади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг, бу ерда $x = t = t_1 \cos t_2$, $y = t_1 \sin t_2$.

Юқорида келтирилган (5) формулалардан фойдаланиб, берилган мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1} = (x^2 - y^2)'_x \cdot (t_1 \cos t_2)'_{t_1} + \\ + (x^2 - y^2)'_y \cdot (t_1 \sin t_2)'_{t_1} = 2x \cos t_2 - 2y \sin t_2 = 2t_1 \cos t_2 \times \\ \times \cos t_2 - 2t_1 \sin t_2 \sin t_2 = 2t_1 \cos 2t_2, \quad \frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}=(x^2-y^2)'_x\cdot(t_1\cos t_2)'_{t_2}+$$

$$+(x^2-y^2)'_y\cdot(t_1\sin t_2)'_{t_2}=2x(-t_1\sin t_2)-2y\cdot t_1\cos t_2=$$

$$=-2t_1^2\sin t_2\cos t_2-2t_1^2\sin t_2\cos t_2=-2t_1^2\sin 2t_2.$$

Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=2t_1\cos 2t_2,\quad \frac{\partial f}{\partial t_2}=-2t_1^2\sin 2t_2.$$

11-мисол. Ушбу

$$F=f(x^2y,\ x^y)$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Берилган функцияни

$$F=f(u,\ v),\ \text{бу ерда}\ u=x^2y,\ v=x^y$$

деб қараш мумкин. Унда (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot 2xy+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}x^2+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot x^y\ln x$$

2°. **Йўналиш бўйича ҳосила.** $f(x, y)$ функция очиқ M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган бўлсин. (x_0, y_0) тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, l бу нуқтадан ўтувчи бирор тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиқда (x_0, y_0) нуқтага нисбатан икки йўналишдан бирини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. l чизиқнинг мусбат йўналиши билан, мос равишда, абсцисса ҳамда ордината ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчаклар α ва β бўлсин.

3-таъриф. *l чизиқдаги (x, y) нуқта l чизиқ бўйлаб (x_0, y_0) нуқтага интилганда ушбу*

$$\frac{f(x, y)-f(x_0, y_0)}{\rho((x_0, y_0), (x, y))}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x,y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи дейилади ва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\rho((x_0,y_0),(x,y))}$$

2-теорема. **Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай l йўналиши бўйича ҳосилага эга ва**

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$$

бўлади.

12-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

функциянинг (1,1) нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг, бу ерда l—(0,0) нуқтадан (1,1) нуқтага қараб йўналган биссектрисадан иборат.

Берилган функция (1,1) нуқтада дифференциалланувчи бўлганлигидан 2-теоремага кўра

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\cos\beta$$

бўлади. Равшанки, $\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

ва l — биссектриса бўлганлиги сабабли $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Демак,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=0.$$

13-мисол. Ушбу

$$f(x,\ y)=\ln(x+y)$$

функциянинг $(\frac{9}{4},\frac{9}{2})$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг, бу ерда l — шу нуқтадан ўтувчи абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан $\frac{\pi}{4}$ бурчак ташкил этадиган тўғри чизиқ.

Юқорида келтирилган теоремага кўра

$$\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial l}=\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial y}\cos\beta$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial x}=\frac{1}{x+y}\Bigg|_{\substack{x=\frac{9}{4}\\ y=\frac{9}{2}}}=\frac{4}{27},$$

$$\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial y}=\frac{1}{x+y}\Bigg|_{\substack{x=\frac{9}{4}\\ y=\frac{9}{2}}}=\frac{4}{27}.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(\frac{9}{4},\frac{9}{2})}{\partial l}=\frac{4}{27}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{4}{27}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{4}{27}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{27}.$$

14-мисол. Ушбу

$$f(x,\ y)=x+|y|$$

функциянинг (0,0) нуқтадаги координата ўқлари бўйича ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг (0,0) нуқтада OX ўқи бўйича ҳосиласи 1 га тенг, OY ўқи бўйича ҳосиласи эса мавжуд эмас.

2-эслатма. Функциянинг дифференциалланувчи бўлмаган нуқтада ҳам йўналиш бўйича ҳосила мавжуд бўлиши мумкин.

15-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

функциянинг (0,0) нуқтада исталган йўналиш бўйича ҳосиласи мавжудлигини кўрсатинг.

Йўналиш бўйича ҳосила таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\rho((x,y),(0,0))}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=1.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=1.$$

Қаралаётган функция (0,0) нуқтада дифференциалланувчи эмас, чунки

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\ \Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\rho.$$

бўлиб, равшанки, $\rho\to 0$ да $\rho\neq 0(\rho)$.

3°. Функциянинг дифференциали.

$f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_m)$ функция очиқ $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0,\ x_2^0,\dots,\ x_m^0)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда функциянинг шу нуқтада орттирмаси учун

$$\Delta f(x_1^0,\ x_2^0,\dots,\ x_m^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\dots+A_m\cdot\Delta x_m+0(\rho)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m+0(\rho)$$

бўлади.

4-таъриф. *$f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_m)$ функция орттирмаси $\Delta f(x_1^0,\ x_2^0,\dots,\ x_m^0)$ нинг $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\dots,\ \Delta x_m$ ларга нисбатан чизиқли бош қисми*

$$A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\dots+A_m\Delta x_m=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\dots+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m$$

$f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_m)$ функциянинг $(x_1^0,\ x_2^0,\dots,\ x_m^0)$ нуқтадаги дифференциали дейилади ва df ёки $df(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$ каби белгиланади.

Демак,

$$df(x_1^0,\ x_2^0,\dots,\ x_m^0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m \qquad (6)$$

$$(\Delta x_1=dx_1,\ \Delta x_2=dx_2,\dots,\ \Delta x_m=dx_m).$$

16-мисол. Ушбу

$$f(x,\ y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$$

функциянинг дифференциалини топинг.

(6) формулага кўра

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

бўлади.

Энди функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(x - \frac{x}{y^2}\right).$$

Демак,

$$df = \frac{y + \frac{1}{y}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} dx + \frac{x - \frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left[\left(y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)dy\right].$$

17-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \arccos\frac{1}{xy}$$

функциянинг дифференциалини топинг.

(6) формулага кўра

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

бўлади.

Энди берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\arccos\frac{1}{xy}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{|xy|}{xy^2\sqrt{x^2y^2 - 1}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(\arccos\frac{1}{xy})'_y=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2y^2}}}\cdot\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{y^2})=$$

$$=\frac{|xy|}{xy^2\sqrt{x^2y^2-1}}.$$

Демак,

$$df=\frac{|xy|}{x^2y\sqrt{x^2y^2-1}}dx+\frac{|xy|}{xy^2\sqrt{x^2y^2-1}}dy=$$

$$=\frac{|xy|}{xy\sqrt{x^2y^2-1}}(\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy).$$

18-мисол. Ушбу

$$F=f(u,v),\ u=xy,\ v=\frac{x}{y}$$

мураккаб функциянинг дифференциалини топинг.

Функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам унинг дифференциали

$$dF=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

кўринишда бўлади. Бироқ бу ҳолда du ва dv лар эркли орттирмалар бўлмасдан, улар x ва y ларга боғлиқ бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$du=d(xy)=(xy)'_xdx+(xy)'_ydy=ydx+xdy,$$

$$dv=d(\frac{x}{y})=(\frac{x}{y})'_xdx+(\frac{x}{y})'_ydy=\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy.$$

Демак,

$$dF=\frac{\partial f}{\partial u}(ydx+xdy)+\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy).$$

4°. **Тақрибий формула.** Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ функция очиқ $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_m^0)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Delta f(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x^0{}_m)=df(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_m^0)+0(\rho)$$

бўлади. $\rho\to 0$ да

$$\frac{\Delta f(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)}{df(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)} \to 1.$$

Натижада ушбу

$$\Delta f(x_1^0,\ x_2^0,...,\ x_m^0) \approx df(x_1^0,\ x_2^0,...,\ x_m^0)$$

тақрибий формулага келамиз. Уни

$$\Delta f(x_1^0,\ x_2^0,...,\ x_m^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m$$

каби ёзиш ҳам мумкин.

19-мисол. Ушбу

$$\alpha = 1{,}02^{3{,}01}$$

миқдорнинг тақрибий қийматини топинг. Берилган миқдорнинг тақрибий қийматини топиш учун

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни қараймиз. Бу функция (1,3) нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f(1{,}3) = \frac{\partial f(1{,}3)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(1{,}3)}{\partial y}\Delta y + 0(\rho).$$

Энди $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$ дейлик: Унда

$$\Delta f(1{,}3) \approx \frac{\partial f(1{,}3)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(1{,}3)}{\partial y}\Delta y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1 + 0{,}02{,}3 + 0{,}01) - f(1{,}3) \approx y \cdot x^{y-1} \cdot \Delta x +$$

$$+ x^y \ln x \cdot \Delta y|_{x=1, y=3, \Delta x = 0{,}02, \Delta y = 0{,}01} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1{,}02;3{,}01) - f(1{,}3) \approx 3 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}02^{3{,}01} - 1 \approx 0{,}06 \Rightarrow 1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06.$$

Демак,

$$\alpha = 1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

1. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

2. $f(x,y)=\frac{x+1}{y^2+1}$.

3. $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$.

4. $f(x,y)=\ln(x^2-y^2)$.

5. $f(x,y)=y\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}$.

6. $f(x,y)=x\sin(x+y)$.

7. $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$.

9. $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

10. $f(x,y)=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$.

11. $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$.

12. $f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

13. $f(x,y)=\ln \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

14. $f(x,y)=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

15. $f(x,y)=xy\ln(xy)$.

16. $f(x,y)=\mathrm{arctg}\sqrt{xy}$.

17. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

18. $f(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^x$.

19. $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}$.

20. $f(x,y)=l^{-\frac{y}{x}}$.

21. $f(x,y)=\ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$.

22. $f(x,y)=\frac{x}{y}e^{xy}$.

23. $f(x,y)=l^{\frac{x}{y}}\mathrm{tg}(x+y)$.

24. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

25. $f(x,y)=(2x)^{3y}$.

Қуйидаги функцияларнинг (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлишини исботланг:

26. $f(x,y)=xy, \forall(x_0,y_0)\in R^2$.

27. $f(x,y)=\sqrt[3]{x}\sin y,\ (x_0,y_0)=(0,0)$.

28. $f(x,y)=l^{xy}, \forall(x_0,y_0)\in R^2$.

29.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса,}\\ (x_0,y_0)=(0,0).\end{cases}$$

30. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса,}\\ (x_0,y_0)=(0,0).\end{cases}$$

Қуйидаги функцияларнинг (x_0,y_0) нуқтада дифференциалланувчи эмаслигини исботланг:

31. $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}\,, (x_0,y_0)=(0,0)$.

32. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}\,, (x_0,y_0)=(0,0)$.

33. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса,}\end{cases}$$

$(x_0,y_0=(0,0)$.

34. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса,}\end{cases}$$

$(x_0,y_0)=(0,0)$.

34,а. Агар $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in M\subset R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

34,б. Агар $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in M\subset R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишини исботланг.

35. Агар $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in M\subset R^m$ нуқтанинг атрофида барча ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар шу нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишини исботланг.

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

36. $f(x,y)=x^2y^3,\ x=t,\ y=t^2.$

37. $f(x,y)=F,\ x=u^2+v^2,\ y=u\cdot v.$

38. $f(x,y)=F,\ x=au,\ y=bv.$

39. $f(x,y)=F,\ x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2.$

40. $F=f(x,y),\ x=u\sin v,\ y=u^2.$

41. $f(x,y)=\frac{x}{y},\ x=e^t,\ y=\ln t.$

42. $f(x,y)=x^y,\ x=\sin u,\ y=\cos v.$

43. $f(x,y)=x\sin y+y\sin x,\ x=\frac{u}{v},\ y=u\cdot v.$

44. $f(x,y)=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}},\ x=3t^2,\ y=\sqrt{t^2+1}.$

45. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ x=t,\ y=t^2.$

46. $f(x,y)=e^{xy}\ln(x+y),\ x=t^3,\ y=1-t^3.$

47. $f(x,y),=x^y+y^x,\ x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2.$

48. Ушбу $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$ функциянинг $(1;2)$ нуқтада Ox ўқи билан 60° ли бурчак ташкил этадиган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

49. Ушбу $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ функциянинг $(1;1)$ нуқтада Ox ўқи билан 45° ли бурчак ташкил этадиган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

50. Ушбу $f(x,y)=\frac{y^2}{x}$ функциянинг $2y^2+x^2=C^2$ эллипснинг ихтиёрий нуқтасидаги шу нуқта нормали йўналиши бўйича ҳосиласининг ноль бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг:

51. $f(x,y)=x^m y^n$.

52. $f(x,y)=\frac{y}{x}$.

53. $f(x,y)=y\sqrt[3]{x}$.

54. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

55. $f(x,y)=l^{-\frac{y}{x}}$.

56. $f(x,y)=l^{xy}$.

57. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

58. $f(x,y)=\ln^2(x-y)$.

59. $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$.

60. $f(x,y)=e^{\cos(xy)}$.

61. $f(x,y)=x\ln(xy)$.

62. $f(x,y)=\left(\frac{x}{y}\right)^y$.

63. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Қуйидаги миқдорларнинг тақрибий қийматларини ҳисобланг.

64. $\alpha=(0{,}97)^{1{,}05}$.

65. $\alpha=(1{,}08)^{3{,}96}$.

66. $\alpha=1{,}94^2\cdot e^{0{,}12}$.

67. $\alpha=2{,}68^{\sin 0{,}05}$.

68. $\alpha=\sin 1{,}59\cdot \operatorname{tg} 3{,}09$.

69. $\alpha=\sin 1{,}49\cdot \operatorname{arctg} 0{,}07$.

70. $\alpha=\sin 59°\cdot \operatorname{tg} 46°$.

71. $\alpha=\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.

2-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1°. Функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари.

$f(x_1,x_2,\dots, x_m)$ функция очиқ M $(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, унинг $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ нуқтасида f'_{x_1}, $f'_{x_2},\dots$, f'_{x_m} хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар x_1, $x_2,\dots$, x_mларга боғлиқ бўлади.

5-таъриф. *f'_{x_1}, $f'_{x_2}\dots$, f'_{x_m} ларнинг $x_к$ $(к=1,2,\dots, m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва*

$$f''_{x_1x_k},\ f''_{x_2x_k},\dots,f''_{x_mx_k}\ (k=1,2,\dots,m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_k},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_k},\dots,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_k}\ (k=1,2,\dots,m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_k}=f''_{x_1x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_k}=f''_{x_2x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_k}=f''_{x_mx_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right).$$

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар умумий ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}=f''_{x_ix_k}\ (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,m)$$

кўринишда ёзилади. Хусусан, $i=k$ бўлганда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

каби ёзилади. $i \neq k$ бўлганда қаралаётган иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_k}$$

хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* дейилади.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари ҳам худди шунга ўхшаш таърифланади.

20- мисол. Ушбу

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Иккинчи тартибли хусусий ҳосила таърифидан фойдаланиб $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2-x\cdot 2x)}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= -\frac{2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2-y\cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(Бу мисолда $\forall (x, y) \in R^2((x, y) \neq (0,0))$ да

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ бўлишини кўрамиз).

21-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топинг.

Аввало $(x,y)\neq(0,0)$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

бўлади.

Энди $(x,y)=(0,0)$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда функциянинг ҳосилаларини таърифга кўра ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(0,\Delta y)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(\Delta x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x^3}=1.$$

Демак, қаралаётган функциянинг $\forall(x,\ y)\in R^2$ нуқтада аралаш ҳосилалари

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\quad\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

лар мавжуд.

22 — мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ (a,\ b-\text{ўзгармас})\cdot$$

функция Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

ни қаноатлантиришини кўрсатинг.

$f(x,y)$ функциянинг иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\times$$

$$\times\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

бўлади.

Энди $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ларни топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)=$$

$$=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(x-a)2(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$$

эканлиги топилади.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}+\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=$$

$$=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2+(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=0.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

23- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, & \text{агар } (x,y)\neq(0,0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x,y)=(0,0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топинг.

$(x,y)\neq(0,0)$ ҳамда $(x,y)=(0,0)$ бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида қараймиз.

Аввало $(x,y)\neq(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-$$

$$-y^2\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y\right)=\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=$$

$$=\frac{x^3}{x^2+y^2}-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{x^2y}{x^2+y^2}=x-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x-2y\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=$$

$$=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad((x,y)\neq(0,0)).$$

Энди $(x,y)=(0,y)$ ва $y\neq0$ бўлсин. Ҳосила таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{\Delta x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{y}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\,\mathrm{arctg}\frac{y}{\Delta x}-y^2\mathrm{arctg}\frac{\Delta x}{y}\cdot\frac{1}{\Delta x}\right]=-y^2\cdot\frac{1}{y}=-y.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=y.$$

Худди шунга ўхшаш, $(x,y)=(x,0)$ ва $x\neq 0$ учун

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=x$$

бўлиши кўрсатилади. Булардан эса

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Яна ҳосила таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial f(0,\Delta y)\,\partial x-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(\Delta x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1.$$

Демак,

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=1.$$

Шундай қилиб, берилган функция $\forall(x,y)\in R^2$ да аралаш ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(x,y)\neq(0,0)$ да

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x},$$

$(x,y)=(0,0)$ да эса:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}.$$

2-эслатма. Юқорида келтирилган 21- ҳамда 23- мисоллардаги $f(x,y)$ функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги аралаш ҳосилаларининг бир-бирига тенг эмаслигини кўрдик. Бунга сабаб қаралаётган функция аралаш ҳосиларининг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир. 21- мисолдаги $f(x,y)$ функциянинг $(x,y)\neq(0,0)$ нуқтадаги аралаш ҳосилалари

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$(x,y)=(0,0)$ нуқтада эса

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=1$$

эди. Бу аралаш ҳосилаларнинг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмаслигини кўрсатиш учун $(0,0)$ нуқтага яқинлашадиган $\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликни қарайлик.

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ нинг $x=\frac{2}{n}$, $y=\frac{1}{n}$ даги қийматларидан иборат кетма-кетлик

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}\left(1+8\cdot\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^2}\right)=$$

$=\frac{3}{5}\left(1+8\cdot\frac{4}{25}\right)=\frac{171}{125}$ бўлиб,

$$\lim_{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)}\frac{\partial^2 f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{171}{125}\neq-1=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$$

бўлади. Бу эса $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ нинг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмаслигини билдиради.

Умумий ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

3-теорема. **$f(x,y)$ функция очиқ M $(M\subset R^2)$ тўпламда берилган бўлиб, шу тўпламда $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ҳамда $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ аралаш ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $(x_0, y_0)\in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада**

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$$

бўлади.

2°. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, унинг барча n-тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд бўлсин. Агар $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ нуқтада бу ҳосилалар узлуксиз бўлса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлади.

Маълумки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, унинг шу нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

бўлар эди.

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

6-таъриф. *$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтадаги дифференциали df нинг дифференциали берилган $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва у $d^2 f$ каби белгиланади:*

$$d^2 f = d(df)$$

Умуман, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$ нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлганда, шу нуқтадаги $(n-1)$-тартибли дифференциали $d^{n-1} f$ нинг дифференциали берилган функциянинг n-тартибли дифференциали дейилади ва $d^n f$ каби белгиланади. Демак,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Функциянинг n-тартибли дифференциал унинг хусусий ҳосилалари орқали символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Хусусан, $n=2$ бўлганда:

$$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}dx_m^2+$$

$$+\,2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+\ldots+$$

$$+\,2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_m}dx_1dx_m+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}dx_2dx_3+$$

$$+\,2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_4}dx_2dx_4+\ldots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_m}dx_2dx_m+\ldots+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}dx_m.$$

24-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$$

функциянинг учинчи тартибли дифференциалини топинг.

Функциянинг учинчи тартибли дифференциали қуйидагича бўлади:

$$d^3f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+$$

$$+\,3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2+y^2)=$$

$$=\cos(x^2+y^2)\cdot 2x=2x\cos(x^2+y^2)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x\cdot\cos(x^2+y^2))=$$

$$=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}(2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2))=$$

$$=12x\sin(x^2+y^2)-8x^3\cos(x^2+y^2)\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2))=$$

$$=-4y\sin(x^2+y^2)-8x^2y\cos(x^2+y^2)\,,$$

шунингдек,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -12y\sin(x^2+y^2) - 8y^3\cos(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^2} = -4x\sin(x^2+y^2) - 8xy^2\cos(x^2+y^2).$$

Натижада

$$\begin{aligned}
d^3 f = &[-12x\cdot\sin(x^2+y^2) - 8x^3\cos(x^2+y^2)]dx^3 + \\
&+3[-4y\sin(x^2+y^2) - 8x^2y\cos(x^2+y^2)]dx^2dy + \\
&+3[-4x\sin(x^2+y^2) - 8xy^2\cos(x^2+y^2)]dxdy^2 + \\
&+[-12y\sin(x^2+y^2) - 8y^3\cos(x^2+y^2)]dy^3 = \\
&= -12\sin(x^2+y^2)[xdx^3 + ydx^2dy + xdxdy^2 + \\
&+ ydy^3] - 8\cos(x^2+y^2)[x^3dx^3 + 3x^2ydx^2dy + \\
&+ 3xy^2dxdy^2 + y^3dy^3] = -12\sin(x^2+y^2)\times \\
&\times[dx^2(xdx+ydy) + dy^2(xdx+ydy)] - \\
&- 8\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy)^3 = -12\sin(x^2+y^2)\times \\
&\times(xdx+ydy)(dx^2+dy^2) - 8\cos(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^3
\end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\begin{aligned}
d^3 f = &-12\sin(x^2+y^2)(xdx+ydy)(dx^2+dy^2) - \\
&-8\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy)^3.
\end{aligned}$$

25- мисол. Ушбу

$$F = f(x,y),\ \ x = u^2 - v^2,\ \ y = uv$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Маълумки, функциянинг биринчи тартибли дифференциали

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

иккинчи тартибли дифференциали эса

$$d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$$

бўлади.

Аввало dx, dy, d^2x, d^2y ларни топамиз:

$$dx = d(u^2 - v^2) = 2udu - 2vdv,\ \ dy = d(u\cdot v) = vdu + udv,$$

$$d^2x=d(dx)=d(2udu-2vdv)=2du^2-2dv^2,\ d^2y=$$
$$=d(dy)=d(vdu+udv)=dudv+dudv=2dudv.$$

Натижада:

$$d^2F=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2udu-2vdv)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot(2udu-$$
$$-2vdv)(vdu+udv)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(vdu+udv)^2+$$
$$+2\frac{\partial f}{\partial x}(du^2-dv^2)+2\frac{\partial f}{\partial y}dudv=$$
$$=4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2du^2+v^2dv^2-2uvdudv)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\times$$
$$\times(uvdu^2-v^2dvdu+u^2dudv-uvdv^2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2dudv)^2+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}2(du^2-dv^2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2dudv)=$$
$$=\left(4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u^2+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}uv+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}v^2+2\frac{\partial f}{\partial x}\right)du^2+$$
$$+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}uv-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}v^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}u^2-4\frac{\partial f}{\partial x^2}uv+\frac{\partial f}{\partial y}\right)dudv+$$
$$+\left(4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v^2-4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}uv+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u^2-2\frac{\partial f}{\partial x}\right)dv^2.$$

3°. **Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция R^m фазонинг $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтаси атрофида $n+1$ марта дифференциалланувчи бўлсин. Ушбу формула

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)+\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)f+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_m}(x^m-x_m^0)\right)^2 f+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)\right)^n f+R_n(f),$$
$$R_n(f)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)\right)^{n+1} f$$

кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функциянинг Тейлор формуласи,* $R_n(f)$ эса *Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади* дейилади. Бу ерда $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо n- тартибли хусусий ҳосилалари (x_1^0, x_2^0, x_m^0) нуқтада, барча $(n+1)$- тартибли хусусий ҳосилалари эса

$$(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0), x_2^0+\theta(x_2-x_2^0), ..., x_m^0+\theta(x_m-x_m^0))$$

$$(0<\theta<1)$$

нуқтада ҳисобланган.

Хусусан, икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\times$$

$$\times(y-y_0)+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)\times\right.$$

$$\left.\times(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+...+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^n}\times\right.$$

$$\times(x-x_0)^n+C_n^1\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+...+$$

$$\left.+...+\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n\right]+R_n(f),$$

$$R_n(f)=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0, y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}+\right.$$

$$\left.+...+\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y^{n+1}}(y-y_0)^{n+1}\right].$$

26- мисол. Ушбу

$$f(x, y)=e^{\frac{x}{y}}$$

функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда $(x_0, y_0)=(0, 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

$n=2$ учун $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)\times\right.$$

$$\left.\times(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2+R_2(f)\right.$$

бўлади. Равшанки, $f(0, 1)=1$.

Энди $f(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ва уларнинг (0; 1) нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{x}{y}}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x}=\frac{1}{1}e^{\frac{0}{1}}=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}e^{\frac{x}{y}}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)=\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial x^2}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial x\partial y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)=\frac{x^2}{y^4}e^{\frac{x}{y}}+\frac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=1.$$

Натижада

$$f(x,y)=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_2(f)$$

бўлади. Бу берилган функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда (0, 1) нуқтадаги Тейлор формуласидир.

27-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^y$$

функциянинг $n=3$ бўлганда $(x_0, y_0)=(1, 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

Бу ҳолда $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)f+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^2 f+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^3 f+R_3(f)$$

Функциянинг (1; 1) даги қиймати $f(1, 1)=1$.

Энди $f(x, y)=x^y$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ва уларнинг (1; 1) нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-2},\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}(\ln x)^2,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=x^y(\ln x)^3,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}=0.$$

Натижада

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+$$
$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3+\right.$$
$$+3\cdot\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y}\cdot(x-x_0)^2(y-y_0)+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y^2}(x-x_0)\times$$
$$\left.\times(y-y_0)^2+\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3\right|+R_3(f)=$$
$$=1+1(x-1)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2}[0\cdot(x-1)^2+$$
$$+2\cdot 1(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2]+\frac{1}{6}[0\cdot(x-1)^3+$$
$$+3\cdot 1\cdot(x-1)^2(y-1)+3\cdot 0\cdot(x-1)(y-1)^2+$$
$$+0(y-1)^3]+R_3(f)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+$$
$$+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3(f)$$

бўлади. Бу берилган функциянинг Тейлор формуласидир.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг 2- тартибли хусусий ҳосилалари ва 2- тартибли дифференциалларини топинг:

72. $f(x,y)=xy-\frac{x}{y}$.

73. $f(x, y)=(x^2+y^2)^3$.

74. $f(x, y)=x-3\sin y$.

75. $f(x, y)=\frac{y}{x}e^{xy}$.

76. $f(x, y)=\operatorname{arctg} xy$.

77. $f(x, y)=y\sqrt[3]{x}$.

78. $f(x, y)=\sqrt{2xy+y^2}$.

79. $f(x, y)=\sin(xy)$.

80. $f(x, y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

81. $f(x, y)=2\cos^2\left(y-\frac{x}{2}\right)$.

82. $f(x, y)=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$.

83. $f(x, y)=\operatorname{arcctg}(x+2y)$.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги хусусий ҳосилаларини топинг:

84. $f(x, y)=y\ln(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}$.

85. $f(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

86. $f(x, y)=x\cos y+y\sin x$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.

87. $f(x, y)=\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^6\partial y^4}$.

88. $f(x, y)=(x^2+y^2)e^{x+y}$, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial x^n}$.

89. $f(x, y)=e^x\sin y$, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}$.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги дифференциалларини топинг:

90. $f(x, y)=x^3+y^3+3xy$, d^3f.

91. $f(x, y)=\cos(x^2+y^2)$, d^3f.

92. $f(x, y)=e^{xy}$, $d^{10}f$.

93. $f(x, y)=\ln(x\cdot y)$, d^4f.

94. $f(x, y)=e^{ax}y^n$, $d^{10}f$.

95. $f(x, y)=e^{ax}\cos by$, $d^{10}f$.

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини ҳамда иккинчи тартибли дифференциалларини топинг.

96. $F=f(x, y)$, $x=au$, $y=bv$.

97. $F=f(x, y)$, $x=u+v$, $y=u-v$.

98. $F=f(x, y)$, $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{v}{u}$.

99. $F=f(x, y)$, $x=ue^v$, $y=ve^u$.

100. $f(x, y)=x^y$, $x=\frac{u}{v}$, $y=u\cdot v$.

101. Ушбу

$$f(x, y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(-2; 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

102. Ушбу

$$f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

103. Ушбу

$$f(x, y)=e^x \sin y$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

104. Ушбу

$$f(x, y)=\cos x\cdot\cos y$$

функциянинг $n=3$ бўлган ҳолда $(0; 0)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

105. Ушбу

$$f(x, y)=y^x$$

функциянинг $n=2$ бўлган ҳолда $(1; 1)$ нуқта атрофида Тейлор формуласини ёзинг.

3-§. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМ ҚИЙМАТЛАРИ

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)\in M$ бўлсин.

7-таъриф. *Агар* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ *нуқтанинг шундай* U_δ *атрофи:*

$$U_\delta=\{(x_1, x_2, \dots, x_m)\in R^m:\rho=$$

$$=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_k^0)^2}<\delta\}\subset M\ (\delta>0)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall(x_1, x_2, \dots, x_m)\in U_\delta$ *учун*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)\leqslant f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функция* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ *нуқтада максимумга (минимумга) эга дейилади,* $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ *қиймат эса* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функциянинг максимум (минимум) қиймати дейилади. Уни*

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = \max_{(x_1, \ldots, x_m) \in U_\delta} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$$

$$(f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = \min_{(x_1, \ldots, x_m) \in U_\delta} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$$

каби белгиланади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* дейилади.

28-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функциянинг (0; 0) нуқтада максимумга эришишини кўрсатинг. Бу функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ да аниқланган (0; 0) нуқтанинг

$$U_\delta = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < \delta\} \qquad (0 < \delta < 1)$$

атрофини олайлик. Равшанки, $U_\delta \subset M$ бўлади.

$\forall (x, y) \in U_\delta$ учун

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqslant 1 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак, берилган функция (0; 0) нуқтада максимумга эга ва унинг максимум қиймати 1 га тенг.

4-теорема. **Агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада барча $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ бўлади.**

29-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x \cdot y$$

функция (0; 0) нуқтада экстремумга эришадими?

Равшанки, $f(0,0)=0$.

(0; 0) нуқтанинг

$$U_\delta=\{(x, y)\in R^2:x^2+y^2<\delta\}\ (0<\delta<1)$$

атрофини олайлик.

Бу атрофда $f(x, y)-f(0, 0)$ айирма ўз ишорасини сақлаймади. Масалан, координаталари бир хил ишорали бўлган нуқталар учун бу айирма мусбат, турли хил ишорали нуқталар учун манфийдир. Демак, берилган функция (0; 0) нуқтада экстремумга эга эмас.

Изоҳ. 29- мисолда келтирилган функция

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ бўлади. Демак, 4- теорема шартлари экстремум учун зарурий бўлиб, етарли эмаслигини кўрамиз.

3- эслатма. Юқорида келтирилган 4- теорема кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалайди.

30- мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

функция (0; 0) нуқтада экстремумга эга бўладими?

Равшанки,

$$f(0, 0)=0.$$

(0; 0) нуқтанинг

$$U_\delta=\{(x, y)\in R^2:x^2+y^2<\delta\}\qquad (\delta>0)$$

атрофини олайлик. Унда $\forall(x, y)\in U_\delta$ учун

$$f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0=f(0, 0)$$

бўлади. Демак, берилган функция (0; 0) нуқтада минимумга эришади ва

$$\min\{f(x, y)\}=0$$

бўлади.

Қаралаётган $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функция (0; 0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга эмас (қаранг, 3- мисол).

4- эслатма. Кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ $M\subset R^m$ тўпламнинг:

1) барча хусусий ҳосилалари нолга айланадиган, яъни

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}=0$$

тенгламаларни қаноатлантирадиган нуқталарда.

2) хусусий ҳосилалар мавжуд бўлмаган нуқталарда экстремумга эришиши мумкин.

Одатда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар шу функциянинг *стационар нуқталари* дейилади.

5-теорема. **$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^n$ нуқтанинг бирор U_δ атрофида $(\delta > 0)$ берилган ва ушбу шартларни бажарсин:**

1) $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция U_δ да барча ўзгарувчилари бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

2) $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқта $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг стационар нуқтаси;

3) коэффициентлари

$$a_{ik}=\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k=1, 2, \dots, m)$$

бўлган

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)=\sum_{i, k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган.

У ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада минимумга (максимумга) эришади.

Агар квадратик форма ишора сақламаса, f функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

Икки ўзгарувчили функциялар учун бу теорема қуйидагича бўлади:

$f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг атрофи

$$U_\delta=\{(x, y) \in R^2: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

$(\delta > 0)$ да берилган ва бу атрофда барча биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларига эга бўлсин. (x_0, y_0) нуқта $f(x, y)$ функциянинг стационар нуқтаси

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0$$

ва

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \; a_{12}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \; a_{22}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

бўлсин.

1°. Агар

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \quad \text{ва} \quad a_{11}>0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \quad \text{ва} \quad a_{11}<0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришиши ҳам, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириш талаб қилади.

31-мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^3+y^3-3axy \quad (a \neq 0)$$

функцияни экстремумга текширинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=3x^2-3ay,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=3y^2-3ax.$$

Уларни нолга тенглаб,

$$\begin{cases} 3x^2-3ac=0, \\ 3y^2-3ax=0 \end{cases}$$

системадан берилган функциянинг стационар нуқталари (0, 0) ҳамда (a, a) эканини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -3a.$$

(a, a) нуқтада

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial x^2} = 6a, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial y^2} = -3a, \quad \frac{\partial^2 f(a, a)}{\partial y^2} = 6a$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$$

бўлади.

Демак, $a > 0$ да $a_{11} > 0$ бўлиб, қаралаётган функция (a, a) нуқтада минимумга, $a < 0$ да $a_{11} < 0$ бўлиб, функция (a, a) нуқтада максимумга эришади.

(0, 0) нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 \cdot 0 - 9a^2 = -9a^2 < 0$$

бўлиб, бу нуқтада функция экстремумга эришмайди.

32- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3$$

функцияни экстремумга текширинг.

Равшанки,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - x) + 3(y + 2)^2$$

ва

$$\begin{cases} 2(x - y) = 0, \\ 2(y - x) + 3(y + 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2, \; y = -2.$$

Демак, (—2; —2) берилган функциянинг стационар нуқтаси.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларининг стационар нуқтадаги қийматлари

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial x^2} = 2,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial x \partial y} = -2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 f(-2, -2)}{\partial y^2} = 2$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлади. Демак, «шубҳали» ҳол. Бу ҳолда экстремумнинг бор-йўқлигини аниқлаш учун қуйидагича текшириш ўтказилиши керак. Стационар $(-2;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи $y=x$ тўғри чизиқ нуқталарини қараймиз. Бу тўғри чизиқда берилган функция

$$f(x,\ y)|_{y=x}=\varphi(y)=(y-y)^2+(y+2)^3=(y+2)^3$$

кўринишга эга бўлиб, $y<-2$ да $\varphi(y)<0$, $y>-2$ да эса $\varphi(y)>0$ бўлади. Берилган функция $(-2;\ -2)$ нуқта атрофида ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларга эга бўлганлиги сабабли у шу нуқтада экстремумга эришмайди.

33- мисол. Ушбу

$$f(x,\ y)=x^2-y^2+2a^2$$

функциянинг $D=\{(x,\ y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant a^2\}$ тўпламда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз:

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=-2y\ .$$

Демак, $(0;\ 0)$ нуқта функциянинг стационар нуқтаси экан. Бу нуқтада берилган функциянинг қиймати

$$f(0,\ 0)=2a^2$$

бўлади.

Энди $f(x,\ y)=x^2-y^2+2a^2$ функцияни D нинг чегараси $\{x^2+y^2=a^2\}$ айланада қараймиз. Бунда

$$x^2+y^2=a^2\ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

ва

$$f(x,\ y)=f_x(x,\pm\sqrt{a^2-x^2})=x^2-(a^2-x^2)+2a^2=2x^2+a^2$$

бўлади. Бу $f_x=2x^2+a^2$ функциянинг $[-a,\ a]$ даги энг катта ҳамда энг кичик қийматларини топамиз:

$$f'_x=4x,\quad 4x=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

$$f_{x=0}=2\cdot 0+a^2=a^2$$

$f_x=2x^2+a^2$ функциянинг $[-a,\ a]$ сегментнинг четки нуқталаридаги қиймати $2\cdot a^2+a^2=3a^2$ бўлади.

Демак, $f(x,\ y)$ функция энг кичик қиймати a^2, энг катта қиймати эса $3a^2$ бўлади. Бошқача айтганда берилган $f(x,\ y)$ функциянинг D тўплам чегарасидаги энг кичик қиймати a^2, энг катта қиймати эса $3a^2$ бўлади. Бу қийматларни $f(x,\ y)$ функциянинг стационар нуқтадаги қиймати $(f(0,\ 0)=$

$=2a^2$) билан солиштириб, берилган функциянинг D тўпламдаги энг катта қиймати $3a^2$, энг кичик қиймати эса a^2 бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни экстремумга текширинг:

106. $f(x,\ y)=x^2+xy+y^2-6x-9y$.
107. $f(x,\ y)=2xy-2x-4y$.
108. $f(x,\ y)=x^2+(y-1)^2$.
109. $f(x,\ y)=x^3+y^3-3xy$.
110. $f(x,\ y)=xy(1-x-y)$.
111. $f(x,\ y)=x^3+xy^2+3axy$.
112. $f(x,\ y)=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$.
113. $f(x,\ y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\ (x>0,\ y>0)$.
114. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.
115. $f(x,y)=(x^2+y)\sqrt{e^y}$.
116. $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.
117. $f(x,\ y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.
118. $f(x,\ y)=xy\ \ln(x^2+y^2)$.
119. $f(x,\ y)=x+y+4\sin x\cdot\sin y$.
120. $f(x,y)=xe^{y+x\sin y}$.
121. $f(x,\ y)=1-(x-2)^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{4}{5}}$.
122. $f(x,\ y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган D тўпламда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

123. $f(x,\ y)=x-2y-3$.
$D=\{(x,\ y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1\}$.
124. $f(x,\ y)=1+x+2y$.
$D\{(x,\ y)\in R^2:x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$.
125. $f(x,\ y)=x^2+3y^2-x+18y-4$.
$D=\{(x,\ y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.
126. $f(x,\ y)=x^2-y^2$.
$D=\{(x,\ y)\in R^2:x^2+y^2\leqslant 1\}$.
127. $f(x,\ y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$.
$D=\{(x,y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.
128. $f(x,\ y)=x^2+y^2$.

$$D=\{(x,\ y)\in R^2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b<a\}.$$

129. $f(x,\ y)=(x-y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}.$

$$D=\{(x,\ y)\in R^2: y^2\leqslant x\leqslant 2\}.$$

130. $f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$

$$D=\{(x,\ y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

4- §. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯЛАР

1°. x ва y ўзгарувчиларнинг $F(x,\ y)$ функцияси учун ушбу

$$F(x,\ y)=0$$

тенгламага эга бўлайлик. Энди x ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай X тўпламни қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир қийматда $F(x, y)=0$ тенглама (y га нисбатан тенглама) ягона ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан ихтиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y)=0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қоидага кўра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Одатда бундай аниқланган функция ошкормас кўринишда берилган функция (ошкормас функция) дейилади. Уни

$$x\to y: F(x,\ y)=0$$

каби белгиланади.

34-мисол. Ушбу

$$F(x, y)=y\sqrt{x^2-1}-2=0$$

тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси қилиб аниқлайдими?

x ўзгарувчининг $X=R\backslash\{x\in R: -1\leqslant x\leqslant 1\}$ тўпламдан олинган ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг

$$y=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$$

қиймати мос қўйилса, унда, равшанки,

$$F(x, y)=F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{x^2-1}-2=0$$

бўлади. Демак, қаралаётган тенглама ошкормас функция

$$x\to y=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$$

ни аниқлайди.

35- мисол. Ушбу

$$F(x, y)=x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

Берилган тенгламани

$$x=y-\frac{1}{2}\sin y$$

кўринишда ёзиб оламиз. Агар

$$\varphi(y)=y-\frac{1}{2}\sin y$$

дейилса, равшанки, бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$\varphi'(y)=1-\frac{1}{2}\cos y>0$$

ҳосилага эга. Унда $\varphi(y)$ нинг монотонлигидан, $x=\varphi(y)$ функцияга нисбатан тескари $y=\varphi^{-1}(x)$ функция мавжуд бўлади. Энди x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ дан олинган ҳар бир қийматига $y=\varphi^{-1}(x)$ ни мос қўямиз. Натижада, $x=\varphi(y)$ ва $y=\varphi^{-1}(x)$ эканини эътиборга олиб, $F(x, y)=$ $=F(x,\varphi^{-1}(x))=x-y+\frac{1}{2}\sin y=x-(y-\frac{1}{2}\sin y)=$ $=x-x=0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди.

36-мисол. Ушбу

$$F(x, y)=x^2+y^2-\ln y=0 \quad (y>0)$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

$y^2-\ln y$ айирма ҳар доим мусбат бўлади:

$$y^2-\ln y>0.$$

Шу сабабли x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ даги ҳеч бир қийматида

$$x^2+y^2-\ln y=0$$

тенглик бажарилмайди. Бинобарин, берилган тенглама ошкормас фукнцияни аниқламайди.

6-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0)\in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h,k}((x_0, y_0))=\{(x, y)\in R^2: x_0-h<x<x_0+h,\ y_0-k<y<y_0+k\}$ $(h>0,\ k>0)$ атрофида берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) x ўзгарувчининг (x_0-h, x_0+h) оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0, y_0)=0$.

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta\varepsilon}((x_0, y_0))=\{(x, y)\in R^2: x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ y_0-\varepsilon< <y<y_0+\varepsilon\}$$

атрофи $(0<\delta<h,\ 0<\varepsilon<k)$ топиладики,

1) $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ учун $F(x, y)=0$ тенглама ягона y ечимга $(y\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon))$ эга, яъни $F(x, y)=0$ тенглама ёрдамида

$$x\to y: F(x, y)=0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади.

2) $x=x_0$ бўлганда унга мос келган $y=y_0$ бўлади,

3) ошкормас кўринишда аниқланган

$$x\to y: F(x, y)=0$$

функция $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

7-теорема. $F(x, y)$ функция $(x_0, y_0)\in R^2$ нуқтанинг бирор атрофи $U(x_0, y_0)$да аниқланган бўлиб қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. $F(x, y)$ U да n марта узлуксиз дифференциалланувчи $(n=1,2,\ldots)$

2°. $F(x_0, y_0)=0$.

3°. $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$.

У ҳолда шундай $I\subset U(x_0, y_0)$ атроф ва бу атрофда $f(x)$ функция мавжуд бўлиб,

$$(I=I_x\times I_y;\ I_x=\{x\in R: |x-x_0|<\alpha\},$$
$$Iy=\{y\in R: |y-y_0|<\beta\})$$

ихтиёрий $(x, y)\in I$ ларда

1) $F(x, y)=0 <=> y=f(x)$

2) $f(x)$ функция I_x да n-марта узлуксиз дифференциалланувчи ва 1-тартибли ҳосила учун

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

тенглик ўринли бўлади.

37-мисол. Ушбу

$$F(x,\ y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама (2,0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайдими?

Берилган

$$F(x,\ y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$$

функцияни 7-теореманинг шартини бажаришини ёки бажармаслигини текширамиз.

Равшанки, $F(x,\ y)$ функция R^2 тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Бинобарин, у (2,0) нуқтанинг ихтиёрий атрофи $U_{h,\ k}((2,0))$ да узлуксиз. ($h > 0,\ k > 0$).

$F(x,\ y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^y + y \sin x - x^3 + 7) = y \cos x - 3x^2,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y + y \sin x - x^3 + 7) = e^y + \sin x.$$

Демак, $F(x,\ y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ лар R^2 тўпламда, жумладан $U_{h,k}((2,0))$ да узлуксиз. Сўнг

$$\frac{\partial F(2,0)}{\partial y} = e^y + \sin x \Big|_{\substack{x=2\\ y=0}} = 1 + \sin 2 \neq 0.$$

Ва ниҳоят,

$$F(2,0) = e^y + y \sin x - x^3 + 7 \Big|_{\substack{x=2\\ y=0}} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$F(x,\ y) = e^y + y \sin x - x^3 + 7$$

функция 7-теореманинг барча шартларини бажаришини аниқладик. Шу сабабли 7-теоремага кўра

$$F(x,\ y)=e^{y}+y\sin x-x^3+7=0$$

тенглама (2,0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди:

$$x\to y:\ F(x,\ y)=0$$

Бу функция узлуксиз ҳамда унинг ҳосиласи

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{y\cos x-3x^2}{e^y+\sin x}$$

бўлади.

38- мисол. Ушбу

$$F(x,\ y)=ye^x-x\ln y-1=0$$

тенглама (0,1) нуқтанинг атрофида y ва x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайдими?

$F(x,\ y)$ функция $D=\{(x,\ y)\in R^2: y>0\}$ тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Жумладан (0,1) нуқтанинг $U_{h,k}((0,1))$ атрофида $(0<h<1,\ 0<k)$ узлуксиз. Унинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(ye^x-x\ln y-1)=ye^x-\ln y,$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(ye^x-x\ln y-1)=e^x-\frac{x}{y}$$

$U_{h,k}((0,1))$ да узлуксиз ва

$$\frac{\partial F(0.1)}{\partial y}=e^x-\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=1\neq0$$

бўлади.

Функциянинг (0,1) нуқтадаги қиймати

$$F(0,1)=ye^x-x\ln y-1\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

бўлади.

Демак, $F(x,\ y)$ функция 7- теореманинг барча шартларини бажаради. Шу теоремага кўра

$$F(x,\ y)=ye^x-x\ln y-1=0$$

тенглама (0,1) нуқтанинг атрофида

$$x \to y: \ F(x, y) = 0$$

ошкормас функцияни аниқлайди.

Бу функция узлуксиз ва унинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{ye^x - \ln y}{e^x - \frac{x}{y}}$$

бўлади.

39- мисол. Агар $F(x, y)$ функция узлуксиз иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса,

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ёрдамида аниқланган

$$x \to y: \ F(x, y) = 0$$

ошкормас функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

$F(x, y) = 0$ ни дифференциаллаб

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \qquad (1)$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдан эса

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги (1) муносабатни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) y' +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0.$$

Равшанки,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y',$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'.$$

Шундай қилиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right]\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

Кейинги тенгликдан эса

$$y''=-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликда y' нинг ўрнига унинг қийматини қўйсак, унда

$$y''=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

бўлади.

2°. Икки

$$F_1=F_1(x,\ y,\ u,\ v),\ F_2=F_2(x,\ y,\ u,\ v)$$

функциялар $(x_0,\ y_0,\ u_0,\ v_0)\in R^4$ нуқтанинг бирор

$$U_{h_1h_2k_1k_2}=\{(x,\ y,\ u,\ v)\in R^4: x_0-h_1<x<x_0+h_1,\quad y_0-h_2<$$
$$<y<y_0+h_2,\ u_0-k_1<u<u_0+k_1,\ v_0-k_2<v<$$
$$<v_0+k_2\}$$

атрофида ($h_1>0$, $h_2>0$, $k_1>0$, $k_2>0$) берилган бўлсин.

Ушбу

$$\begin{cases} F_1=F_1(x,y,u,v)=0, \\ F_2=F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases}\qquad (2)$$

тенгламалар системасини қарайлик.

8-теорема. **$F_1(x, y, u, v)$ ва $F_2(x, y, u, v)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин:**

1) $U_{h_1h_2k_1k_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ да узлуксиз;

2) $U_{h_1h_2k_1k_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва узлуксиз;

3) хусусий ҳосилаларнинг (x_0, y_0, u_0, v_0) нуқтадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминанти нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) (x_0, y_0, u_0, v_0) нуқтада

$$F_1(x_0, y_0, u_0, v_0)=0,$$
$$F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)=0.$$

У ҳолда (x_0, y_0, u_0, v_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta_1\delta_2\varepsilon_1\varepsilon_2}((x_0, y_0, u_0, v_0))$ атрофи $(0<\delta_1<h_1,\ 0<\delta_2<h_2,$ $0<\varepsilon_1<k_1,\ 0<\varepsilon_1<k_1,\ 0<\varepsilon_2<k_2)$ топиладики, бу атрофда

1) (2) тенгламалар системаси ошкормас кўринишдаги

$$u=f_1(x, y, f_2(x, y)),\ v=f_2(x, y)$$

функцияларни аниқлайди;

2) (x_0, y_0) нуқтада, унга мос келадиган нуқта

$$u_0=f_1((x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)),\ v_0=f_2(x_0, y_0)$$

бўлади;

3) ошкормас кўринишда аниқланган f_1 ва f_2 функциялар

$$\{(x, y)\in R^2: x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1,\ y_0-\delta_2<y<y_0+\delta_2\}$$

тўпламда узлуксиз ва барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

40-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} xy+uv=1, \\ xv-yu=3 \end{cases}$$

система (1; — 1; 1;2) нуқтанинг атрофида ошкормас функцияларни аниқлайдими?

Бу ҳолда

$$F_1(x, y, u, v)=xy+uv-1,$$
$$F_2(x, y, u, v)=xv-yu-3$$

бўлади.

Равшанки, бу функциялар $(1; -1;\ 1; 2)$ нуқтанинг атрофида узлуксиз ҳамда барча

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=y,\ \frac{\partial F_1}{\partial y}=x,\ \frac{\partial F_1}{\partial u}=v,\ \frac{\partial F_1}{\partial v}=u,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=v,\ \frac{\partial F_2}{\partial y}=-u,\ \frac{\partial F_2}{\partial u}=-y,\ \frac{\partial F_2}{\partial v}=x$$

хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиздир.

$(1; -1;1; 2)$ нуқтада

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ҳамда

$$F_1(1,-1,1,2)=0,$$
$$F_2(1,-1,1,2)=0$$

бўлади. Демак, 8- теоремага кўра

$$\begin{cases} xy+uv=1, \\ xv-yu=3 \end{cases}$$

система u ва v ларни x, y ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди. Берилган тенгламалар системасини u ва v ларга нисбатан ечиб топамиз:

$$u=\frac{-3+\sqrt{9+4xy-4x^2y^2}}{2y},$$

$$v=\frac{2y(1-xy)}{-3+\sqrt{9+4xy-4x^2y^2}}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгламалар кўрсатилган нуқта атрофида ошкормас функцияни аниқлайдими?

131. $F(x, y)=x^4+xy+y^3-3=0,\ (1;1).$

132. $F(x, y)=(x-1)(x+y-1)=0,\ (1;0).$

133. $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0,\ (a\sqrt[3]{4},\ a\sqrt[3]{2}).$

134. $F(x, y)=x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2),\ (0,0).$

Қуйидаги тенгламалар системаси ошкормас функцияларни аниқлайдими?

135. $\begin{cases} x+y=u+v, \\ xy+yv=1. \end{cases}$

136. $\begin{cases} xu+yv=4, \\ yu-v=0. \end{cases}$

137. $\begin{cases} x+y=u+v, \\ y\sin u-x\sin v=0. \end{cases}$

Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

138. $F(x, y)=x-y+\ln y=0.$

139. $F(x, y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2=0.$

140. $F(x, y)=1-y+y^x=0.$

141. $F(x, y)=xe^{2y}-y\ln x-8=0.$

142. $F(x, y)=e^y+ax^2e^{-y}-2bx=0.$

143. $F(x, y)=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0.$

144. $F(x, y)=x^2\ln y-y^2\ln x=0.$

145. $F(x, y)=1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0.$

146. $F(x, y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-a\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ (a\neq 0).$

XIV боб

ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ВА ҚАТОРЛАР

1-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Фараз қилайлик, ҳар бир натурал $n\in N$ сонга X тўпламда аниқланган $f_n(x)$ функция мос келсин. У ҳолда

$$f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x),\dots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлиб, бу *кетма-кетлик функционал кетма-кетлик* дейилади. Функционал кетма-кетлик $\{f_n(x)\}$, унинг умумий ҳади эса $f_n(x)$ каби белгиланади.

1-мисол. φ — ҳар бир натурал n сонга $\sin\frac{\sqrt{x}}{n}$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$\varphi: n\to\sin\frac{\sqrt{x}}{n}.$$

Бу акслантиришдан

$$\sin\frac{\sqrt{x}}{1}, \sin\frac{\sqrt{x}}{n},...,\sin\frac{\sqrt{x}}{n},...$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. У $[0, +\infty)$ да берилган бўлиб, умумий ҳади $f_n(x)=\sin\frac{\sqrt{x}}{n}$ бўлади.

2-мисол. φ — ҳар бир натурал n сонга $nx^n(1-x)$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$\varphi: n \to nx^n(1-x).$$

Бу ҳолда

$$x(1-x), 2x^2(1-x),..., nx^n(1-x),...$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. Кетма-кетлик $X=$ $=R$ да берилган бўлиб, унинг умумий ҳади

$$f_n(x)=nx^n(1-x)$$

бўлади. X тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x),..., f_n(x),...$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин.

1-таъриф. *Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади, x_0 нуқта эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.*

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш нуқталаридан иборат тўплам *кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси* дейилади. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси M да аниқланган ушбу

$$f: x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in M)$$

функция, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг *лимит функцияси* дейилади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x \in M).$$

3-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=n\sin\frac{\sqrt{x}}{n}$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

Бу функционал кетма-кетлик $X=[0, +\infty)$ да берилган. Унинг лимит функцияси

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\sqrt{x}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{\sqrt{x}}{n}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

бўлади.

4-мисол. Қуйидаги

$$f_n(x)=x^n$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

Бу функционал кетма-кетлик $X=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Равшанки,

$$\forall x\in(1, +\infty) \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=+\infty,$$

$$\forall x\in(-1,1) \text{ да} \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0,$$

$$x=1 \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(1)=\lim_{n\to\infty} 1^n=1$$

бўлиб, $\forall\in(-\infty, -1]$ да $f_n(x)=x^n$ функционал кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас. Демак, $f_n(x)=x^n$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M=(-1,1]$, лимит функцияси эса

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } -1<x<1 \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } x=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\left(\frac{x+n}{2x+n}\right)^{2(x+n)}$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси қуйидаги топилади:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+n}{2x+n}\right)^{2(x+n)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+n}{2x+n}-1\right)^{2(x+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-x)}{2x+n}\right)^{\frac{2x+n}{-x}\cdot\frac{(-x)}{2x+n}\cdot 2(x+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{2x+n}\right)^{\frac{2x+n}{-x}\cdot(-2x)\cdot\frac{1+\frac{x}{n}}{2\frac{x}{n}+1}}=e^{-2x}$$

Демак, лимит функция

$$f(x)=e^{-2x}$$

бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}),\ (x>0)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty} n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\cdot x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}=\ln x.$$

Демак, $f(x)=\ln x$.

2-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x),\dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, M эса бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси ва $f(x)$ лимит функцияси бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in M).$$

2-таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон олинганда ҳам шундай* $n_0\in N$ *топилсаки, ихтиёрий* $n>n_0$ *учун бир йўла ҳамма* $x\in M$ *лар учун*

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ *функционал кетма-кетлик* M *тўпламда* $f(x)$ *га текис яқинлашади (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи) дейилади.*

Демак, бу ҳолда таърифдаги n_0 натурал сон фақат ε га боғлиқ бўлиб, x ларга боғлиқ бўлмайди.

Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ *учун ҳамма* x *лар учун умумий* n_0 топиш мумкин бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ олинганда *ҳам шундай* ε_0 *ва* $x_0 \in M$ *топилсаки,*

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилмаса, $\{f_n(x)\}$ *функционал кетма-кетлик* M *тўпламда* $f(x)$ *га нотекис яқинлашади дейилади.*

Бу ҳолда n_0 натурал сон ε га боғлиқ бўлиши билан бирга қаралаётган x га ҳам боғлиқ бўлади.

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашувчилиги

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in M)$$

каби белгиланади.

7-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

функционал кетма-кетликни $M = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

бўлиб, у $M = (-\infty + \infty)$ да яқинлашувчи бўлади.

Энди яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $n_0 = \left[\frac{1}{n}\right]$ дейилса, унда барча $n > n_0$ ва $\forall x \in M$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Юқоридаги таърифга биноан $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ кетма-кетлик лимит функция $f(x) = 0$ га текис яқинлашади:

$$\frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0 \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

(Юқорида айтилганлардан кўринадики, n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ: $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$).

8-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Аввало бу кетма-кетликнинг лимит функциясини топамиз:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n+x}=x.$$

Энди $f_n(x)$ кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)=x$ га яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall\varepsilon>0$ сонни ($\varepsilon<1$) олиб, n_0 натурал сон сифатида

$$n_0=\left[(1+x_0)\left(\frac{x_0}{\varepsilon}-1\right)\right]$$

ни олсак, унда $\forall n>n_0$, $x_0\in[0,1]$ учун

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=\left|\frac{nx_0}{1+n+x_0}-x_0\right|=\frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0}<\varepsilon$$

бўлади. Юқорида n_0 ни олинишидан унинг ε га ва x_0 нуқтага боғлиқлиги кўринади. Бироқ, $\bar{n}_0$ деб

$$\bar{n}_0=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} n_0=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left[(1+x)\left(\frac{x}{\varepsilon}-1\right)\right]=$$

$$=\left[2\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right]$$

олинса, унда $\forall n>\bar{n}_0$ ва $\forall x\in[0,1]$ учун

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг $M=[0,1]$ да лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

9-мисол. Қуйидаги

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

бўлади.

Энди берилган кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)=0$ га яқинлашиш характерини аниқлаймиз. $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам n_0 натурал сон сифатида

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon x}\right]\ (x\neq 0)$$

олинса, унда $\forall n>n_0$ учун

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=$$
$$=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{(n_0+1)x}<\varepsilon$$

бўлади.

(Равшанки, $x=0$ да $\forall n$ учун $f_n(0)=f(0)=0$.) Бу ҳолда n_0 нинг x га боғлиқлиги эвазига, ихтиёрий натурал n сон учун $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ ва $x=\frac{1}{n}\in(0,1]$ қилиб олсак,

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}\cdot n^2}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0$$

бўлади. Бу эса берилган $f_n(x)$ функционал кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)=0$ га нотекис якинлашишини билдиради.

1-теорема. **$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпламда лимит функция $f(x)$ га текис яқинлашиши учун**

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|=0$$

бўлиши зарур ва етарли.

10-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Аввало бу кетма-кетликнинг лимит функциясини топамиз:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{x^2}=|x|,$$

сўнгра $|f_n(x)-f(x)|$ ни қараймиз:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\left|\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}\right.\times$$

$$\times\left.\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)\right|=\left|\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}\right|=$$

$$=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2-|x|}}+|x|\right)}$$

Равшанки, $x\in(-\infty,\ +\infty)$ учун

$$\sup_{x\in R}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)}=\frac{1}{n}.$$

Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in R}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

бўлиши келиб чиқади. Юқоридаги 1-теоремага кўра берилган функционал кетма-кетлик $(-\infty,\ +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Бу кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}=1$$

бўлади. Энди

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}-1\right| = \left|\frac{nx}{x^2+n^2}\right| = \frac{nx}{x^2+n^2}$$

нинг супремумини топамиз. Равшанки, [0, 1] да

$$\sup |f_n(x)-f(x)| = \sup \frac{nx}{x^2+n^2} = \max \frac{nx}{x^2+n^2}$$

бўлади. Агар $x \in [0, 1]$ ва $n > 1$ да

$$\left(\frac{nx}{x^2+n^2}\right)' = \frac{n(x^2+n^2)-nx\cdot 2x}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n^3-nx^2}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n(n^2-x^2)}{(x^2+n^2)^2} > 0$$

эканлигини эътиборга олсак, унда [0, 1] да $\frac{nx}{x^2+n^2}$ нинг ўсувчи бўлишини ва у [0, 1] да ўзининг энг катта қийматини $x=1$ да қабул қилишини аниқлаймиз.

Демак,

$$\max \frac{nx}{x^2+n^2} = \frac{n}{1+n^2}.$$

Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик учун

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)-f(x)| = \frac{n}{1+n^2}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган кетма-кетлик [0,1] да текис яқинлашувчи.

12- мисол. Ушбу

$$f_n(x) = nx^n(1-x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни текис яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, $x=1$ да $f_n(1)=0$ ва $0\leqslant x<1$ да эса

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx^n(1-x) = 0$$

бўлади. Демак, берилган функционал кетма-кетлик [0,1] да яқинлашувчи, унинг лимит функцияси $f(x)=0$ бўлади. Бу яқинлашишнинг характерини аниқлаймиз.

$$|f_n(x)-f(x)| = |nx^n(1-x)-0| = nx^n(1-x),$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} nx^n(1-x) =$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant 1} nx^n(1-x).$$

Энди $nx^n(1-x)$ функциянинг $[0, 1]$ даги максимум қийматини топамиз. Равшанки,

$$(nx^n(1-x))' = n^2x^{n-1}(1-x) - nx^n = n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n$$

ва

$$n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = \frac{n}{n+1}.$$

$nx^n(1-x)$ функция $x = \frac{n}{n+1}$ да ўзининг максимум қийматига эришади. Бу максимум қиймат

$$n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

га тенг бўлади. Натижада

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетлик $[0, 1]$ да нотекис яқинлашади.

Фараз қилайлик, X тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

3-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай* $n_0 \in N$ *сон топилсаки,* $n > n_0$, $m > n_0$ *бўлганда* $\forall x \in X$ *учун бир йўла*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ *функционал кетма-кетлик* X *да фундаментал кетма-кетлик дейилади.*

2-теорема (Коши теоремаси). **$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X да фундаментал бўлиши зарур ва етарли.**

13-мисол. Ушбу

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчилигини Коши теоремасидан фойдаланиб кўрсатинг.

Бу кетма-кетликнинг [0, 1] да фундаментал бўлишини кўрсатамиз.

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|x^n-x^{n+1}-(x^m-x^{m+1})|\leqslant$$
$$\leqslant|x^n-x^{n+1}|+|x^m-x^{m+1}|=(x^n-x^{n+1})+$$
$$+(x^m-x^{m+1})\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}(x^n-x^{n+1})+$$
$$+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}(x^m-x^{m+1})\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

Агар $\forall\varepsilon>0$ сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$$

деб олинса, у ҳолда барча $n>n_0$ ва барча $m>n_0$ учун

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}=\frac{2}{n_0}<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай натурал сон мавжудки, $n>n_0$, $m>n_0$ ва $\forall x\in[0, 1]$ учун

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса берилган $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ функционал кетма-кетликнинг [0, 1] да фундаментал эканини билдиради. Коши теоремасига кўра кетма-кетлик [0, 1] да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функционал кетма-кетликларнинг лимит функцияларини топинг:

1. $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$, $-\infty<x<+\infty$.
2. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.
3. $f_n(x)=nx^2\sin\dfrac{x}{n}$, $-\infty<x<+\infty$.
4. $f_n(x)=\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$, $-\infty<x<+\infty$.
5. $f_n(x)=\dfrac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$, $-\infty<x<+\infty$.
6. $f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

7. $f_n(x)=\sqrt[n]{\sin x}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

8. $f_n(x)=n^2x^n(1-x)$, $-\infty<x<+\infty$.

9. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $-\infty<x<+\infty$.

10. $f_n(x)=n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$, $0<x<+\infty$.

11. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $1\leqslant x\leqslant 2$.

12. $f_n(x)=e^{-nx^2}$, $1\leqslant x<+\infty$.

13. $f_n(x)=(x-1)\operatorname{arctg}x^n$, $0<x<+\infty$.

14. $f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

15. $f_n(x)=\left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n$, $-\infty<x<+\infty$.

16. $f_n(x)=\left(\frac{\sqrt[n]{x}+1}{2}\right)^n$, $0<x<+\infty$.

17. $f_n(x)=n[\ln(x+n)-\ln n]$.

18. $f_n(x)=\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

19. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $0\leqslant x<+\infty$.

20. Агар $f_0(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)=0$ эканини исботланг.

Қуйидаги функционал кетма-кетликларнинг текис яқинлашувчилигини исботланг:

21. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $-\infty<x<+\infty$.

22. $f_n(x)=\frac{nx^2}{n+x}$, $1\leqslant x<+\infty$.

23. $f_n(x)=xe^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$.

24. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

25. $f_n(x)=\ln\left(x^2+\frac{1}{n}\right)$, $1\leqslant x<+\infty$.

26. $f_n(x)=\arcsin\frac{x^n}{1+x^n}$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

27. Агар $[0,\ 1]$ сегментда $f_0(x)=0$ бўлса, у ҳолда

$$f_n(x)=\sqrt{x\cdot f_{n-1}(x)}\ (n=1,2,3,\ldots)$$

функционал кетма-кетликнинг $[0,\ 1]$ да текис яқинлашувчилигини исботланг.

28. Агар $f(x)$ функция $[0,\ 1]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса,

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

функционал кетма-кетликнинг $[0,\ 1]$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

29. Агар $f(x)$ функция $[0,\ 1]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса, ушбу

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\left[1-\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]^n$$

функционал кетма-кетликнинг $(0,\ 1)$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

30. Агар $f(x)$ функция $(-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган узлуксиз ҳамда 2π даврли функция бўлса, у ҳолда

$$f_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right)dt$$

функционал кетма-кетликнинг $(-\infty,\ +\infty)$ да $f(x)$ га текис яқинлашишини исботланг.

Қуйидаги функционал кетма-кетликларни текис ҳамда нотекис яқинлашишга текширинг:

31. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$, $0<x<1$.

32. $f_n(x)=\sqrt[n]{x\cdot\sin x}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

33. $f_n(x)=\frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

34. $f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $-2\leqslant x\leqslant 2$.

35. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$, $0<x<1$.

36. $f_n(x)=x^n-x^{2n},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

37. $f_n(x)=nxe^{-nx^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

38. $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} n^2x}{\sqrt[3]{n+x}},\ 0\leqslant x<+\infty.$

39. $f_n(x)=\dfrac{\ln n^2x}{n^2x},\ 1<x<+\infty.$

40. $f_n(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x^n\right),\ \ 0<x<\dfrac{1}{2}.$

3-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИКЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

M тўпламда ($M\subset R$) бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in M)$$

1°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) ҳади M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик M да текис якинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

2°. Агар $x\to x_0$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) ҳади чекли

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

лимитга эга бўлиб, бу кетма-кетлик M да текис якинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи, унинг лимити $a\left(a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ эса $f(x)$ нинг $x\to x_0$ даги лимитига тенг:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

Бу ифодани

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

шаклда ҳам ёзиш мумкин.

3°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f_1(x)dx, \quad \int_a^b f_2(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b f_n(x)dx, \quad \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи, унинг лимити эса $\int_a^b f(x)dx$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Кейинги тенгликни

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]dx$$

каби ёзиш ҳам мумкин.

4°. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f_n'(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ҳосилага эга бўлиб бу ҳосилалардан тузилган

$$f_1'(x), \ f_2'(x), \ \ldots, \ f_n'(x), \ \ldots$$

функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда лимит функция $f(x)$ шу $[a, b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\{f_n'(x)\}$ кетма-кетликнинг лимити $f'(x)$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{d}{dx}f_n(x)\Big]=f'(x)=\frac{d}{dx}\Big[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big].$$

Мисол ва масалалар

41. Ушбу

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

функционал кетма-кетлик учун $x=0$ да

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{d}{dx}f_n(x)\Big]\neq\frac{d}{dx}\Big[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big]$$

эканини кўрсатинг.

42. Қуйидаги

$$f_n(x)=x^n$$

функционал кетма-кетлик [0, 1] да лимит функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } 0\leqslant x<1 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x=1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га нотекис яқинлашса ҳам

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]dx$$

бўлишини кўрсатинг.

43. Ушбу

$$f_n(x)=nx(1-x^2)n \ (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)$ [0,1] да узлуксиз бўлса ҳам

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1 f(x)dx$$

бўлишини кўрсатинг.

44. Агар $f(x)$ функция [0, 1] да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k(1-x)^{n-k}$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\frac{d}{dx}\, f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$$

бўлишини исботланг.

45. $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз, 2π даврли функция бўлиб, у узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда ушбу

$$f_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right)dt$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\frac{d}{dx} f_n(x)\rightrightarrows f(x)$$

бўлишини исботланг.

4-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

X тўпламда ($X \subset R$) бирор

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

ифода *функционал қатор* дейилади ва у $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

4-таъриф. *Агар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ $(x_0 \in X)$ *сонли қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қатор* x_0 *нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади,* x_0 *нуқта эса функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш нуқталаридан иборат тўплам бу функционал қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

(1) функционал қаторнинг дастлабки ҳадларидан тузилган ушбу

$$S_1(x)=u_1(x),$$
$$S_2(x)=u_1(x)+u_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

йиғиндилар функционал қаторнинг *қисмий йиғиндилари* дейилади. (1) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимити $S(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x).$$

функционал қаторнинг йиғиндиси дейилади. Агар ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)| \qquad (x_0 \in X)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада *абсолют яқинлашувчи* дейилади. Функционал қаторнинг барча абсолют яқинлашадиган нуқталаридан иборат тўплам *қаторнинг абсолют яқинлашиш соҳаси* дейилади.

14-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \qquad (0<x<+\infty)$$

қаторнинг йиғиндисини топинг.

Аввало берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{(x+1)(x+2)}+\frac{x}{(2x+1)(3x+1)}+\ldots+$$

$$+\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}.$$

энди $n\to\infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{nx+1}\right)=1.$$

Демак, берилган функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)=1$ бўлади.

15-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=1+x+\ldots+x^n=\begin{cases}\dfrac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x\neq 1 \text{ бўлса,}\\ n, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\forall x\in(-1,1) \text{ учун } \lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

$$\forall x\in[1,+\infty) \text{ учун } \lim_{n\to\infty} S_n(x)=\infty,$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$ учун $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M=(-1, 1)$ интервалдан иборат экан.

16-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \ldots$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг. Бу қаторга Даламбер аломатини қўллаймиз (бунда x ни параметр деб ҳисоблаймиз). Равшанки,

$$u_n(x) = \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}, u_{n+1}(x) = \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left| \frac{2(n+1)x^{2n+1}}{(2n-1)x^{2n-1}} \right| = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{x^2}.$$

Маълумки, $\frac{1}{x^2} < 1$ бўлганда, яъни $|x| > 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлади, $\frac{1}{x^2} > 1$, яъни $|x| < 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади. Энди $x=1$ ва $x=-1$ ҳолларни қараймиз. $x=-1$ бўлганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1},$$

$x=1$ бўлганда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

сонли қаторлар ҳосил бўлади. Равшанки, бу қаторлар узоқлашувчидир.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M=(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ эканлигини топамиз.

17-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

функционал қаторнинг яқинлашиш ҳамда абсолют яқинлашиш соҳаларини топинг.

Равшанки, x нинг

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$$

муносабатни қаноатлантирадиган қийматларида, Даламбер аломатига кўра, берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right|:\right.$$

$$\left.:\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=$$

$$=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Демак,

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{1-x}{1+x}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x>0,\ \text{яъни}\ M=(0,\ +\infty)$$

тўпламда берилган функционал қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

$x=0$ да берилган функционал қатор

$$-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n-1}+\ldots \qquad (2)$$

сонли қаторга айланади. Бу қатор Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Бироқ унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

қатор узоқлашувчи бўлганлиги сабабли (2) қатор шартли яқинлашувчидир. $(-\infty,\ 0)$ оралиқда қатор узоқлашувчи эканини равшан. Шундай қилиб, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[0,\ +\infty)$, абсолют яқинлашиш соҳаси эса $(0,\ +\infty)$ дан иборат.

5-§. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРНИНГ ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

X тўпламда $(X\subset R)$ бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

5-таъриф. *Агар X тўпламда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор X да текис яқинлашувчи дейилади.*

$\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик X да $S(x)$ га нотекис яқинлашса, унда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да нотекис яқинлашувчи дейилади.

3-теорема. **$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да $S(x)$ га текис яқинлашиши учун**

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|S_n(x)-S(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\Big| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

1-эслатма. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор учун

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|S_n(x)-S(x)| \neq 0 \qquad (x\in X)$$

бўлса, унда берилган қатор X да нотекис яқинлашувчи бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг. Берилган қаторнинг йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots$$

$$+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right) +$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Демак,

$$S(x)=\frac{1}{x+1}.$$

Натижада

$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x+n+1}$$

бўлиб,

$$\sup_{x\in(0,\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{n+1}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=0$$

бўлиши келиб чиқади. Юқоридаги 3- теоремага кўра берилган функционал қатор $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

19- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$$

функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Аввало бу қаторнинг йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x)=\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\ldots+$$
$$+\frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+2x}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+3x}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{1+nx}-\frac{1}{1+(n+1)x}\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(n+1)x},$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(n+1)x}\right)=\frac{1}{1+x}.$$

Демак,

$$S(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Унда

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=$$
$$=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(n+1)x}-\frac{1}{1+x}\right|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{1}{1+(n+1)x}$$

бўлиб, $x=\frac{1}{n+1}$ бўлганда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{2}\neq 0$$

бўлади. Демак, берилган қатор $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчи.

Вейерштрасс аломати. **Агар**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) ҳади X тўпламда

$$|u_n(x)|\leqslant c_n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор X да текис яқинлашувчи бўлади.

20- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}=\frac{\sin 1^2x}{1^2}+\frac{\sin 2^2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n^2x}{n^2}+\ldots$$

функционал қаторни Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Берилган қаторнинг ҳар бир

$$u_n(x)=\frac{\sin n^2x}{n^2} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

ҳади учун

$$|u_n(x)|=\left|\frac{\sin n^2x}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

бўлади ва равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сонли қатор яқинлашувчи. Вейерштрасс аломатига кўра берилган функционал қатор $(-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

21-мисол. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг ва текис яқинлашишга текширинг.

x ўзгарувчини параметр ҳисоблаб, Коши аломатидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)=x^2.$$

Демак, берилган қатор $x^2<1$, яъни $(-1,1)$ да яқинлашувчи, $|x|>1$ да узоқлашувчи. $x=\pm1$ да

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

сонли қаторга эга бўламиз. Бу қаторнинг умумий ҳади учун, $n\to\infty$ да

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\neq0$$

бўлганлиги сабабли у узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1,1)$ интервалдан иборат экан.

Ушбу $0<a<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a сонини олиб, $[-a,a]$ сегментни қараймиз. Равшанки, $[-a,a]\subset(-1,1)$. Унда $\forall x\in[-a,a]$ учун

$$\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(a^2+\frac{1}{n}\right)^n$$

бўлади. Натурал n_0 сонни шундай танлаб олиш мумкинки,

$$a^2+\frac{1}{n}\leqslant b,\ n\geqslant n_0\ (a^2<b<1)$$

бўлади. Натижада берилган функционал қаторнинг ҳар бир $\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n(n=1,2,...)$ ҳади учун $\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant b^n$ бўлишини ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b^n$ қаторнинг яқинлашувчилигини аниқлаймиз. Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб, берилган функционал қаторнинг $[-a, a]$ да $(0<a<1)$ текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Берилган қаторни $(-1,1)$ оралиқда нотекис яқинлашувчилигини кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

22- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

функционал қаторнинг, Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб, $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Бу қаторнинг ҳадлари учун

$$x=0 \text{ да } \quad u_n(0)=0, \quad (n=1,2,\ldots)$$
$$x>0 \text{ да } \quad u_n(x)>0, \quad (n=1,2,\ldots)$$

бўлади. Равшанки,

$$u_n'(x)=2xe^{-nx}-x^2ne^{-nx}=xe^{-nx}(2-nx)=nxe^{-nx}(\frac{2}{n}-x)$$

бўлиб, $x=\frac{2}{n}$ да $u_n'(\frac{2}{n})=0,$

$$0<x<\frac{2}{n} \text{ да } u_n'(x)>0,$$

$$\frac{2}{n}<x<\infty \text{ да } u_n(x)<0$$

бўлади. Демак, $u_n(x)$ функция $x=\frac{2}{n}$ да максимумга эришади:

$$\max_{0<x<+\infty} u_n(x)=u_n(\frac{2}{n})=\frac{4}{n^2}e^{-n\cdot\frac{2}{n}}=\frac{4}{n^2}e^{-2}.$$

Демак, берилган функционал қаторнинг ҳар бир ҳади учун

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant \frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

бўлади. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчи эканини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра, берилган функционал қаторнинг [0, $+\infty$) да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз.

4-теорема (Коши теоремаси). **$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг X да текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг X да фундаментал бўлиши зарур ва етарли.**

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топинг:

46. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin^n x}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}$.

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^n$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{nx}$.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (5-x^2)^n$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$.

Қуйидаги функционал қаторларнинг абсолют яқинлашиш соҳаларини топинг:

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi x}{n}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n$.

62. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n}+x\right)^n$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$.

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]^n$.

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда текис яқинлашувчилигини исботланг:

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$, $X=(1, +\infty)$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$, $X=[0, +\infty)$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{\sqrt{n}}$, $X=[0,1]$.

71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$, $X=(-1,1)$.

73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}$, $X=[0, +\infty)$.

74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right)$, $X=(-\infty, +\infty)$.

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда нотекис яқинлашувчилигини исботланг:

76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{-(n-1)^2x}-e^{-n^2x})$, $X=[0,1]$.

77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{1+nx}$, $X=(0, +\infty)$. 78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x\cdot\sqrt{n}}$, $X=(0,1)$.

79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\cdot\sin nx$, $X=[0,1]$.

81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{1}{2^n}$, $X=(-2,2)$. 82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3x}}$, $X=(0,1]$.

83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}\frac{x}{n})^2$, $X=(-\infty, +\infty)$.

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2}\cdot\sin\frac{x}{n}$, $X=(1, +\infty)$.

85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+x}{n}$, $X=(1, +\infty)$.

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб исботланг:

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $X=[-1,1]$.

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $X=(-2, +\infty)$.

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$, $X=[1, +\infty)$.

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $X=[0, +\infty)$.

91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}$, $X=[-1,3]$.

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{\sqrt{x}}{1+n^2x}$, $X=[0, +\infty)$.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+nx^3}\right)^3$, $X=[0, +\infty)$.

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(1+nx)}{x^n}$, $X=(2, +\infty)$.

Қуйидаги функционал қаторларнинг кўрсатилган оралиқларда текис ёки нотекис яқинлашувчилигини аниқланг:

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $X=[0, 2\pi]$.

97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$, $X=(-\infty, +\infty)$.

98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx)^4}$, $X=[0, +\infty)$.

99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^3x^3}$, $X=[0, +\infty)$.

100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^3x^3}$, $X=[0, +\infty)$.

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(x^n+1)}$, $X=[1, +\infty)$.

102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right)$, $X=[0, +\infty)$.

103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n \operatorname{tg} x}$, $X=(0, \frac{\pi}{2})$.

104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+\sin x}$, $X=(-\infty, +\infty)$

105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \operatorname{arctg} \frac{x}{2^n}$, $X=[-2,2]$

106. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

107. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

функционал қаторнинг ҳам шу $[a, b]$да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

108. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлишини исботланг.

6-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

X тўпламда $(X \subset R)$ яқинлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in X).$$

1°. Функционал қатор йиғиндисининг узлуксизлиги. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари X тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор X да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам X да узлуксиз бўлади.

2°. Функционал қаторларда ҳадлаб лимитга ўтиш. Агар $x \to x_0$ да $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ ҳади чекли

$$\lim_{x \to x_0} u_n(x) = c_n \quad (n = 1,\ 2,...)$$

лимитга эга бўлиб, бу қатор X да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йиғиндиси C эса $S(x)$ нинг $x \to x_0$ даги лимити

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

3°. Функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n=1,2,...)$ ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ...$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йиғиндиси эса $\int\limits_a^b S(x)dx$ га тенг бўлади:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади.

4°. Функционал қаторни ҳадлаб дифференциаллаш. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади $(n=1,2,...)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз $u_n'(x)$ $(n=1,2,...)$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ шу $[a, b]$ да $s'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

бўлади:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x).$$

23-**мисол.** Юқоридаги хоссалардан фойдаланиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

функционал қаторнинг йиғиндисини топинг.

Маълумки (18- мисол),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

функционал қатор $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $S(x)=\frac{1}{1+x}$ га тенг:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

(18- мисолга қаранг). Иккинчи томондан, бу қаторнинг ҳар бир ҳади қаралаётган оралиқда узлуксиз. Демак, уни ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}.$$

Равшанки,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+x),$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}=\int_0^x \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1+t}\right) dt=$$

$$=\ln(n+t)\Big|_0^x-\ln(n+1+t)\Big|_0^x=$$

$$=\ln(n+x)-\ln n-\ln(n+1+x)+\ln(n+1)=$$

$$=\ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}.$$

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}=\ln(1+x).$$

24-**мисол.** Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ қатор $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигидан, унинг йиғиндиси $s(x)$ нинг $x \to 0$ да лимити

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{x} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

эканлигини топамиз.

25- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1<x<1)$$

функционал қаторнинг йиғиндисини топинг.

Берилган функционал қаторнинг ҳар бир ҳади дифференциалланувчи бўлиб, уларнинг ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

қатор $[-a, a]$ $(0<a<1)$ да текис яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Демак, берилган қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Кейинги тенгликни интеграллаб топамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1<x<1).$$

26- мисол. Ушбу

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+x^2}} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{n}}$$

функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз бўладими?

Бу функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $(0, +\infty)$ да узлуксизлиги равшан. Агар функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатсак, унда

$f(x)$ функция (қатор йиғиндиси сифатида) шу $(0, +\infty)$ да рузлуксиз бўлади.

Энди $x>0$ да

$$\sqrt[4]{n+x^2} \geqslant \sqrt[4]{n}, \ |\sin x| < x \ \ 0 < \operatorname{arctg} x < x$$

эканлигини эътиборга олиб,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{n+x^2}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{nx}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{n}} \right| <$$

$$< \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \sqrt{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

бўлишини топамиз. Равшанки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ қатор яқинлашувчи. Вейерштрасс аломатига кўра қаралаётган қатор текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функционал қаторлар йиғиндисини узлуксизликка текширинг:

109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(1+x^{2n})}$.

110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $o \leqslant x \leqslant 1$.

111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

113. $\frac{1}{1+x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n+1)x](1+nx)}$.

114. $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n+1} - x^n)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

115. $\frac{1}{1+x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n} \right)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Қуйидаги функционал қаторларни яқинлашиш соҳаларида ҳадлаб интеграллаш мумкинми?

116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2x[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}]$.

118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$;

119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{2n}-x^{2n-2})$.

Қуйидаги функционал қаторларни яқинлашиш соҳасида ҳадлаб дифференциаллаш мумкинми?

120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$.

121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n\pi x}{3^n}$.

122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}]$.

123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$.

Қуйидаги лимитларни топинг:

124. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

125. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^{n-1}}$.

126. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}-\frac{\sin(n+1)x}{\sqrt{n+1}}\right)$.

127. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n+1}-x)$.

128. $\lim\limits_{x\to +0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

130. Ушбу

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

функциянинг $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз ҳосилага эга эканини исботланг.

131. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

функционал қатор йиғиндиси $[0, +\infty)$ да узлуксиз, $(0, +\infty)$ да эса дифференциалланувчи эканини исботланг.

132. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n+1}}\right)$$

функционал қаторни [0,1] да ҳадлаб, интеграллаш мумкинлигини кўрсатинг.

7-§. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

ёки умумийроқ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ a_n (x - x_0)^n + \dots$$

қаторлар (бунда a_0, a_1, $a_2, \dots$, $a_n, \dots$ ва x_0 — ўзгармас ҳақиқий сонлар) даражали қаторлар дейилади. Равшанки, даражали қаторлар функционал қаторларнинг хусусий ҳоли ($u_n(x) = a_n x^n$ ёки $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$; $n = 1,2 \dots$).

5-теорема (Абель теоремаси). **Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ қийматида яқинлашувчи бўлса, x нинг**

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

6-теорема. **Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг баъзи $(x \neq 0)$ қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона $r (r > 0)$ сон топиладики, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.**

6-таъриф. *6-теоремадаги r сони $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-r, r)$ интервал эса даражали қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.*

Берилган даражали қатор ҳамма $(x \neq 0)$ нукталарда узоқлашса, унда $r=0$ деб олинади, қатор ҳамма x ларда яқинлашса, унда $r=\infty$ деб олинади.

2-эслатма. $x=\pm r$ нуқталарда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор яқинлашиши ҳам мумкин, узоқлашиши ҳам мумкин.

7-теорема (Коши — Адамар теоремаси). **Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси**

$$r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3}$$

бўлади.

3-эслатма. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ бўлса, $r=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$ бўлса, $r=0$ бўлади.

Даражали қатор $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ нинг яқинлашиш радиусини

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

формула ёрдамида ҳам (агар бу лимит мавжуд бўлса) аниқлаш мумкин.

4-эслатма. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(x_0-r,\ x_0+r)$ бўлади. Бунда r ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ қаторнинг яқинлашиш радиуси.

27-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}}+\ldots+\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}+\ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг.

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (3) формулага кўра топамиз:

$$r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}=1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$, яқинлашиш интервали эса $(-1,1)$ бўлади. $x=\pm r=\pm 1$ да даражали қатор мос равишда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

сонли қаторларга айланади. Бу қаторларнинг яқинлашувчилиги равшан. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1,1]$ сегментдан иборат.

28-мисол. Ушбу

$$1+\frac{x}{2\cdot 5}+\frac{x^2}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)5^n}+\ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (*) формулага биноан топамиз:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)5^n}:\frac{1}{(n+2)5^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=5.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=5$, яқинлашиш интервали $(-5,5)$ бўлади. $x=-5$ да

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

сонли қатор ҳосил бўлади ва у яқинлашувчи.

$x=5$ да эса

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у узоқлашувчи бўлади.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-5{,}5)$ ярим интервалдан иборат.

29-мисол. Ушбу

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{x^4}{2^2}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{x^{2n}}{2^n}+\ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш интервалини ҳамда яқинлашиш соҳасини топинг.

Даламбер аломатидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}}\right):\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{x^{2n}}{2^n}\right)\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{(n+1)^4}{n^2(n+2)^2}=\frac{x^2}{2}.$$

Демак, $\frac{x^2}{2}<1$, яъни $x^2<2$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва $x^2>2$ да қатор узоқлашувчи бўлади. Бундан берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=\sqrt{2}$, яқинлашиш интервали эса $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ бўлиши келиб чиқади. $x=\pm\sqrt{2}$ да $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$ қатор ҳосил бўлиб, унинг умумий ҳади учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1\neq0$$

бўлганлиги сабабли, қатор узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси ҳам $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ интервалдан иборат экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси, яқинлашиш интервали ҳамда яқинлашиш соҳаларини топинг:

133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot x^{2n}$.

135. $\sum\limits_{n=1} n!x^n$.

136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$

139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) x^n.$

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+4)}{5n+7}\right)^n x^n.$

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$

142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}.$

143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^n.$

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}.$

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\ln n} \cdot x^n.$

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n.$

148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{n+1}{n}}}$

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n+1)} x^{n-1}.$

151. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})(x-1)^n$

152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n.$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топинг:

153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}.$

154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$

155. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2} e^{-nx}.$

156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cos^n x.$

157. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$

8- §. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

берилган бўлсин.

1°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси $r(r>0)$ бўлса, у ҳолда бу қатор $[-c, c]$ $(0<c<r)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

2°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, у ҳолда бу қаторнинг

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

йиғиндиси $(-r, r)$ да узлуксиз функция бўлади.

3°. Агар (4) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлиб, бу қатор $x=r$ $(x=-r)$ нуқталарда яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $x=r$ $(x=-r)$ нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлади.

4°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $[a, b]$ $([a, b]\subset(-r, r))$ оралиқда ҳадлаб интеграллаш мумкин.

5°. Агар (4) қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $(-r, r)$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

30-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

функционал қаторнинг йиғиндисини топинг.

Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

даражали қатор $(-1,1)$ да яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{x}{1-x}$ га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

31-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x)$$

тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

Равшанки, $(-1,1)$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}.$$

Кейинги тенгликни $[0,\ x]$ оралиқ $(0<x<1)$ бўйича интеграллаб топамиз:

$$\int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n]\,dt=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt=\ln(1+t)|_0^x\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x)$$

32- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

даражали қаторнинг йиғиндисини топинг ва ундан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

бўлишини кўрсатинг.

Равшанки, $(-1,1)$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Кейинги тенгликни $[0,\ x]$ $(0<x<1)$ оралиқ бўйича интеграллаб топамиз:

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\operatorname{arctg} x\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arctg} x.$$

$x=1$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

сонли қаторга айланади. Бу қатор (ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор) Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Унда $x=1$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arctg} x\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги даражали қаторларнинг йиғиндиларини ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш ёрдамида топинг:

158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

159. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

160. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

161. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

162. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

163. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

164. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиларини топинг:

165. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

166. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$.

167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

168. Ушбу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

функция

$$f^{(IV)}(x)=f(x)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

169. Ушбу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$$

функция

$$xf''(x)+f'(x)-f(x)=0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

9-§. ТЕЙЛОР ҚАТОРИ. ФУНКЦИЯЛАРНИ ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАРГА ЁЙИШ

$f(x)$ функция $x_0(x_0\in R)$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x_0)=\{x\in R: x_0-\delta<x<x_0+\delta;\ \delta>0\}$ атрофида берилган бўлиб, шу атрофда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

даражали қатор $f(x)$ функциянинг *Тейлор қатори* дейилади. Хусусан, $x_0=0$ да қатор қуйидагича бўлади:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

(одатда бу қаторни *Маклорен қатори* ҳам дейилади).

8-теорема. **$f(x)$ функция бирор $(-r,r)$ $(r>0)$ оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг $x=0$ нуқтадаги Тейлор қатори**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

бўлсин. Бу қатор $(-r, r)$ да $f(x)$ га яқинлашиши учун $f(x)$ функция Тейлор формуласи

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)$$

нинг қолдиқ ҳади барча $x\in(-r, r)$ да нолга интилиши

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

зарур ва етарли.

Маълумки, бу ҳолда Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади:

а) Лагранж кўринишида

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(c=\theta x, 0<\theta<1);$$

б) Коши кўринишида

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}(1-\theta)^n\quad(c=\theta x, 0<\theta<1);$$

в) Пеано кўринишида

$$r_n(x)=0(x^n)$$

бўлади.

Агар

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган дейилади.

9-теорема. **$f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Агар шундай ўзгармас $M>0$ сони топилсаки, барча $x\in(-r, r)$ ҳамда барча $n(n=1,2,\ldots)$ учун**

$$|f^{(n)}(x)|<M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $(-r, r)$ оралиқда $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади, яъни

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$$

бўлади.

Қуйида баъзи содда функцияларнинг Тейлор қаторларини келтирамиз:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \; (-\infty < x < +\infty).$ (5)

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \; (-\infty < x <$
$< +\infty).$ (6)

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \; (-\infty x < +\infty).$
(7)

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \; (-1 < x < 1).$
(8)

5. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$
$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \; (|x| < 1).$ (9)

33- мисол. Ушбу

$$f(x) = \mathrm{ch}\, x$$

функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Берилган функциянинг n-тартибли $(n = 1,2,\ldots)$ ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$\mathrm{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}\, x, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \mathrm{sh}\, x, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса.} \end{cases}$$

Бундан:

$$\mathrm{ch}^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг Тейлор қатори

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{10}$$

бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш интервалини топамиз. Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

бўлганлиги сабабли қаралаётган қаторнинг яқинлашиш интервали $(-\infty, +\infty)$ бўлишини аниқлаймиз. $f(x)=\operatorname{ch} x$ функция Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади (Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳад)

$$r_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{ch}\theta x, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,}\\[2mm] \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{ch}\theta x, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса}\end{cases}$$

$(0<\theta<1)$ бўлади.

Агар

$$|\operatorname{sh}\theta x|=\left|\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}\right|\leqslant e^{|x|},$$

$$|\operatorname{ch}\theta x|=\left|\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}\right|\leqslant e^{|x|}$$

ҳамда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

экани келиб чиқади. Демак, (10) қаторнинг йиғиндиси $\operatorname{ch} x$ га тенг:

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

34-мисол. Ушбу

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

Маълумки, $x\in(-1,1]$ да

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

бўлади. Бунда x ни $-x$ га алмаштириб, топамиз:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots.$$

Натижада

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^2}{3}+\ldots+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

бўлади. Кейинги каторнинг $(-1,1)$ да яқинлашувчилиги равшан. Демак,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^2}{3}+\ldots+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

35- мисол. Ушбу

$$f(x)=\sin^4 x$$

функцияни $x_0=\frac{\pi}{4}$ нуқта атрофида Тейлор каторига ёйинг.

Аввало $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ эканини эътиборга олиб,

$$f(x)=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

бўлишини топамиз. Сўнгра $x=t+\frac{\pi}{4}$ алмаштиришни бажарамиз:

$$f(x)=f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8}\cos 4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\cos 4t$$

Энди $\sin x$ ҳамда $\cos x$ ларнинг ёйилмаларидан фойдаланиб, ушбу

$$\sin 2t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1},$$

$$\cos 4t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!}t^{2n}$$

тенгликларга эга бўламиз. Натижада

$$f(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}.$$

36- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

йиғиндини ҳисобланг.

Равшанки,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = 2\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right]$$

Унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

бўлади. Агар (31, 32- мисолларга қаранг)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1) = \ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

эканини топамиз.

37- мисол. Ушбу

$$\alpha = \sqrt[3]{130}$$

миқдорни 0,0001 аниқликда ҳисобланг.

Буни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{5}{125}\right)} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Энди, бизга маълумки, ушбу

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$(-1 < x < 1)$ тенгликда $x = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{3}$ дейилса, унда

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3\cdot 5^2} - \frac{2}{3^2\cdot 2!5^4} + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!5^6} - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!\,5^8} + \ldots$$

ҳосил бўлади. Бу ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор бўлиб, Лейбниц теоремасига кўра

$$5\cdot\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}\approx5\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot5^2}-\frac{2}{3^2\cdot2!\,5^4}\right)$$

нинг хатоси кейинги ҳадидан, яъни $\frac{2\cdot5}{3^3\cdot4!5^6}$ дан кичик бўлади. Агар

$$\frac{2\cdot5}{3^3\cdot3!5^6}=\frac{1}{81\cdot625}<0{,}0001$$

ҳамда

$$5\left(1+\frac{1}{3\cdot5^2}-\frac{2}{3^2\cdot2!\,5^4}\right)=5+0{,}06667-0{,}00089=5{,}06578$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$\alpha=\sqrt[3]{130}\approx5{,}06578$$

эканини топамиз.

38- мисол. Ушбу

$$\int_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$$

интегрални тақрибий ҳисобланг.

Маълумки, $(-\infty,\ +\infty)$ да

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

бўлади. Бунда x ни $-x^2$ га алмаштириб, топамиз:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots.$$

Кейинги тенгликни $[0,\frac{1}{4}]$ оралиқ бўйича интеграллсак, унда

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!5} - \frac{1}{4^7 3!\,7} + \ldots$$

бўлади. Учта ҳадини олиб, топамиз:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!5} =$$

$$= 0{,}25 - 0{,}0052 + 0{,}00009 = 0{,}24489.$$

Демак,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0{,}24489.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

170. $a^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \ (a > 0).$

171. $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (-\infty < x < +\infty).$

172. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \ (-1 < x < 1).$

173. $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (-1 < x < 1).$

174. $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$(-1 < x < 1).$

Юқоридаги (5) — (9) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйинг:

175. e^{x^2}. **176.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$.

177. $\sin \frac{x^2}{3}$.

178. $e^{2x}+2e^{-x}$.

179. $\arccos x$.

180. $\cos^2 x$.

181. $x \cos^3 2x$.

182. $\ln(12-x-x^2)$.

183. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

184. $\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

185. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

186. $\frac{x}{9+x^2}$.

187. $\frac{1}{(x^2+2)^2}$.

188. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

189. $2x \operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$.

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган нуқта атрофида Тейлор қаторларига ёйинг ва бу қаторларнинг яқинлашиш радиусларини топинг:

190. $f(x)=\cos^4 x,\ x_0=-\frac{\pi}{2}$.

191. $f(x)=\ln(x^2+2x+2),\ x_0=-1$.

192. $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6},\ x_0=1$.

193. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}},\ x_0=2$.

194. $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=-2$.

195. $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$.

196. $f(x)=e^x,\ x_0=-2$.

197. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$.

Қуйидаги функцияларни турли усуллардан фойдаланиб, Маклорен қаторларига ёйинг ва бу қаторларнинг яқинлашиш радиусларини топинг:

198. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

199. $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

200. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

201. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

202. $f(x)=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

203. $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

204. $f(x)=\arccos(1-2x^2)$.

205. $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

206. $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$.

207. $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,dt$.

208. Ушбу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$$

функция

$$f'(x)-xf(x)=0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

209. Ушбу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

функция

$$xf'(x)=(x+1)\cdot f(x)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

210. Ушбу

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$$

тенгликлар маълум бўлган ҳолда

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2x+\cos^2x=1$$

тенгликларни исботланг.

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиларини топинг:

211. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n x}{2^n n!}$.

212. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$.

213. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$.

214. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

215. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^1x^n$.

216. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

Миқдорларни кўрсатилган аниқликда ҳисобланг:

217. $\alpha=\sqrt[5]{250}$, 0,001.

218. $\alpha=\sin 18°$, 0,001.

219. $\alpha=\ln 3$, 0,0001.

220. $\alpha=\operatorname{arctg} 0{,}2$, 0,0001.

221. $\alpha=\frac{1}{e}$, 0,0001.

Интеграл остидаги функцияларни даражали қаторларга ёйиб, интегралларни кўрсатилган аниқликда ҳисобланг:

222. $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$, 0,001.

223. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, 0,001.

224. $\int\limits_0^1\cos x^2dx$, 0,001.

225. $\int\limits_0^1\sin x^2dx$, 0,001.

226. $\int\limits_0^1 x^x dx$, 0,001.

XV боб

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ЧЕКСИЗ ОРАЛИҚ БЎЙИЧА ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ТУШУНЧАЛАРИ

$f(x)$ функция $[a, +\infty.)$ ораликда берилган бўлиб, бу ораликнинг исталган $[a, t]$ $(a<t<+\infty)$ қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий $t(t>a)$ учун ушбу

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

1-таъриф. *Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграли дейилади ва*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty} F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

2-таъриф. *Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (1) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади, $f(x)$ эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи дейилади.*

Агар $t\to+\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса ёки лимит мавжуд бўлмаса, (1) хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

$f(x)$ функциянинг $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари, уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги ҳам юқоридаги каби таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t' \to -\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)dx.$$

1-эслатма. Агар $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ва $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интеграллар мавжуд бўлса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегрални қуйидагича ҳам таърифласа бўлади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

1-мисол. Ушбу

$$I = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx$$

бўлиб,

$$F(t) = \int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx = \int_{0}^{t} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2}dx^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{0}^{t} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

бўлганлигидан эса

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}.$$

2- мисол. Ушбу

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t}\frac{dx}{x^2+x+1}$$

бўлади. Агар

$$F(t,t')=\int_{t'}^{t}\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{t'}^{t}\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{t'}^{t}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2t'+1}{\sqrt{3}}\right)$$

ва

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}F(t,t')=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2t'+1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи ва у

$$I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

эканини топамиз.

3- мисол. Ушбу

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\qquad(a>0,\alpha>0)$$

хосмас интегрални яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, $[a, t]$ ораликда $(a>0)$ $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ функция узлуксиз, демак $\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}$ интеграл мавжуд.

а) $\alpha>1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

бўлади. Демак, $\alpha>1$ бўлганда берилган интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1};$$

б) $\alpha<1$ ва $\alpha=1$ бўлганда, мос равишда

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=+\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty$$

бўлади. Демак, $\alpha\leqslant 1$ бўлганда берилган интеграл узоқлашувчи бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx$$

хосмас интегрални узоқлашувчи эканини кўрсатинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx$$

интеграл $t\to+\infty$ да

$$F(t)=\int_0^t x\sin x\,dx$$

функциянинг лимитидир. Равшанки,

$$F(t)=\int_0^t x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^t+\int_0^t \cos x dx=$$
$$=-t\cos t+\sin t$$

ва $t\to+\infty$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас. Демак, берилган интеграл узоқлашувчи.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчи эканини аниқланг ва қийматини топинг:

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^2}$.
2. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.
3. $\int\limits_1^{+\infty}e^{-3x}dx$.
4. $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.
6. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.
7. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-5x+7}$.
9. $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^x dx$.
10. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

11. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.
12. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x}$.
13. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$.
14. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$.

15. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}dx.$

18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}.$

16. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx.$

19. $\int\limits_{1}^{+\infty} x\cdot\cos x\,dx.$

17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x}dx.$

20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

2- §. ЯҚИНЛАШУВЧИ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ. АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

1°. Агар $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ хосмас интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} [\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} [\alpha\cdot f(x)\pm\beta\cdot g(x)]dx=\alpha\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx\pm\beta\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади, бунда α, β — ўзгармас сонлар.

2°. Агар $\forall x\in[a, +\infty)$ учун $f(x)\leqslant g(x)$ бўлиб, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx\leqslant\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

3°. **Ньютон-Лейбниц формуласи.** $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ эса унинг шу оралиқдаги бошланғич функцияси бўлсин ($F'(x)=f(x)$).

Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) \qquad (2)$$

бўлади. Бу ерда

$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

(Одатда (2) ни ҳам Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.)

4°. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз, $\varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta)$ да узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб,

$$a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = +\infty$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

бўлади.

5°. Бўлаклаб интеграллаш формуласи. Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty}(u\cdot v)$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$$

бўлади. Бу ерда

$$u\cdot v\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(u\cdot v) - u(a)v(a).$$

5- мисол. Ушбу

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$$

интегрални ҳисобланг. Равшанки

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

бўлиб,

$$F(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}$$

функция унинг бошланғич функциясидир. Унда Ньютон-Лейбниц формуласига кўра топамиз:

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{2}{3}\ln 2$$

6- мисол. Ушбу

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегрални қуйидагича ёзамиз:

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2}-2+2)}=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx,$$

сўнгра $t=x-\frac{1}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

бўлиши келиб чиқади.

7- мисол. Ушбу

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз. Берилган интегралда

$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad dv = \frac{1}{x^2} dx$$

дейилса, у ҳолда

$$du = \frac{1}{x^2+1} dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

8- мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{x\ln^3 x} \qquad (e \leqslant x < +\infty)$$

чизиқ ҳамда Ox ўқи билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Бундай шаклнинг юзи

$$S = \int_e^{+\infty} f(x) dx = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int_e^{+\infty} \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2}\Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$S = \frac{1}{2}.$$

9- мисол. Ушбу

$$0 < \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x+1} dx < 0,1$$

Равшанки, тенгсизликни исботланг.

$$[10, +\infty) \text{ да } 0<\frac{x^2}{x^4+x+1}<\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликни интеграллаб топамиз:

$$0<\int_{10}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x+1}<\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

Агар

$$\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{10}^{+\infty}=0{,}1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$0<\int_{10}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x+1}<0{,}1$$

тенгсизликка келамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

21. $$\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx.$$

22. $$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x})}.$$

23. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

24. $$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}dx.$$

25. $$\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx.$$

26. $$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^2}.$$

27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}.$

28. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}dx.$

29. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{10} \cdot e^{-x} dx.$

30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$

31. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

32. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$

33. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x} \cos 3x dx.$

34. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x dx.$

Қуйидаги функция графиклари ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклларнинг юзини топинг:

35. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

36. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}, \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

37. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}, \quad 1 \leqslant x < +\infty.$

38. $f(x) = x^4 e^{-x}, \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

39. $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$

40. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

Қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

41. $0{,}25 < \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1}dx < 0{,}35.$

42. $\left| \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4}dx \right| < \frac{\pi}{4}.$

43. $0 < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}dx < \frac{1}{10\sqrt{2}}.$

44. $0 < \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 0{,}01.$

45. $0 < \int\limits_{10}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{5\cdot 2^{102}}.$

3-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР. ИНТЕГРАЛНИНГ АБСОЛЮТ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, ихтиёрий $x\in[a, +\infty)$ да $f(x)\leqslant 0$ бўлсин.

1-теорема. **$f(x)$ функция хосмас интеграли $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall t\in(a, +\infty)$ да $F(t)=\int\limits_{a}^{t} f(x)dx\leqslant C$ $(C=\mathrm{const})$ бўлиши зарур ва етарли.**

2-теорема. **$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да берилган бўлиб, $\forall x\in[a, +\infty)$ да**

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

бўлсин. У холда $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади; $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

3-теорема. **$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ да $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$ бўлиб,**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k \qquad (0\leqslant k\leqslant+\infty)$$

бўлсин. Агар $k<+\infty$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ интеграл яқинла-

шувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k>0$ ва $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Демак, агар $0<k<+\infty$ бўлса, юқоридаги интеграллар бир вақтда *яқинлашади* ёки *узоқлашади.*

4-теорема. **Агар x нинг етарли катта қийматларида $(x>x_0>a)$**

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}$$

бўлса, у ҳолда $\forall x>x_0$ учун $\varphi(x)\leqslant C<+\infty$ ва $\alpha>1$ бўлганда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x)\geqslant C>0$ ва $\alpha\leqslant 1$ бўлганда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

5-теорема. **Агар $x\to+\infty$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{x}$ га нисбатан $\alpha(\alpha>0)$ тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\leqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.**

$f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

6-теорема (Коши теоремаси.) **Қуйидаги**

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0(t_0>a)$ сон топилиб, $t'>t_0$, $t''>t_0$ бўлган ихтиёрий t', t'' лар учун

$$|F(t'')-F(t')|=\left|\int_a^{t''} f(x)dx-\int_a^{t'} f(x)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

7-теорема. **Агар** $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ **интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.**

3-таъриф. *Агар* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *абсолют яқинлашувчи интеграл дейилади,* $f(x)$ *функция эса* $[a, +\infty)$ *да абсолют интегралланувчи функция дейилади.*

4-таъриф. *Агар* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интеграл яқинлашувчи бўлиб,* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.*

8-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ **ва** $g(x)$ **функциялар** $[a, +\infty)$ **оралиқда берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:**

1) $f(x)$ **функция** $[a, +\infty)$ **да узлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғич** $F(x)(F'(x)=f(x))$ **функцияси чегараланган,**

2) $g(x)$ **функция** $[a, +\infty)$ **да** $g'(x)$ **ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,**

3) $g(x)$ **функция** $[a, +\infty)$ **да камаювчи,**

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

У ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

10- мисол. Ушбу

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Бу интеграл учун

$$F(t)=\int_{\frac{2}{\pi}}^{t} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx=\cos\frac{1}{t}$$

бўлиб, $\forall\ t\in\left[\frac{2}{\pi},\ +\infty\right)$ да

$$F(t)=\cos\frac{1}{t}\leqslant 1$$

бўлади. Унда 1- теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

11- мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Равшанки, $\forall x\geqslant 1$ учун

$$e^{-x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$$

бўлади. Унда

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

нинг яқинлашувчи бўлишини эътиборга олиб, 2- теоремага биноан

$$\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

нинг ҳам яқинлашувчи эканини топамиз. Равшанки,

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int\limits_{0}^{1}e^{-x^2}dx+\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

12- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Бу хосмас интеграл билан бирга

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

интегрални қараймиз. Кейинги интегралнинг узоқлашувчи экани равшан.

Энди

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}}=\lim\frac{1}{\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}}=\frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, 3- теоремадан фойдаланиб, берилган хосмас интегралнинг узоқлашувчи эканини топамиз.

13- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+x}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+x}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}$$

бўлиб, $x \to +\infty$ да у $0\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)$, яъни

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+x}} = 0\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)$$

бўлади. 5- теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

14- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини исботланг.

Интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \sin x \cdot \frac{1}{x^\alpha} = f(x) \cdot g(x).$$

Бу ерда

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Бу $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар 8- теореманинг (Дирихле аломати) барча шартларини қаноатлантиради:

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва бошлангич функция $F(x) = -\cos x$ чегараланган,

2) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция $[1, +\infty)$ да $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ ҳосилага эга ва у узлуксиз,

3) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} (\alpha > 0)$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда камаювчи,

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$

Демак, 8- теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

15- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

хосмас интегралнинг шартли яқинлашувчилигини кўрсатинг. Бу интегралнинг яқинлашувчилиги юқорида келтирилган 14- мисолдан келиб чиқади.

Энди

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

интегрални қараймиз. Равшанки,

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Унда ихтиёрий $t > 1$ учун

$$\int_1^t \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^t \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx. \tag{3}$$

Маълумки,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}, \quad \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\cos 2x}{x}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Агар $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ нинг узоқлашувчилигини, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ нинг эса яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда (3) тенгликда $x \to +\infty$ да лимитга ўтиб, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ хосмас интегралнинг узоқлашувчилигини топамиз.

Демак, қаралаётган интеграл шартли яқинлашувчи.

16- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$$

интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Интеграл остидаги функция учун ихтиёрий $x \in [1, +\infty)$ да

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

бўлади. Равшанки,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

яқинлашувчи интегралдир. Унда 1- теоремага биноан

$$\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. 7- теоремадан эса

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

нинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, берилган интеграл абсолют яқинлашувчи.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни яқинлашувчилигини исботланг:

46. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

47. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx.$

48. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

49. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$

50. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}.$

51. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}.$

52. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$

53. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

54. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x\sqrt{x}} dx.$

55. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx.$

Қуйидаги интегралларнинг шартли яқинлашувчилигини исботланг:

56. $\int_{0}^{+\infty} \sin x^2 dx.$

57. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^3+1} dx.$

58. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

59. $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + \ln x} dx.$$

60. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx.$$

61. $$\int_2^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \ln x} dx.$$

62. $$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} \sin x}{\ln x} dx.$$

63. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

64. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$$

65. $$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{x^{2/3}} dx.$$

Қуйидаги интегралларнинг абсолют яқинлашувчилигини исботланг:

66. $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

67. $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1 + 2x)}{\sqrt{x} - \ln x)^3} dx.$$

68. $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1 + 2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^3} dx.$$

69. $$\int_1^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x \, dx.$$

70. $$\int_1^{+\infty} \frac{1 + x}{x^3} \sin x^3 \, dx.$$

71. $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x \sqrt{x}} dx.$$

Қуйидаги интегралларни абсолют ва шартли яқинлашувчиликка текширинг.

72. $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

73. $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^\alpha} \sin x \, dx.$$

74. $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(2x - \cos(\ln x))^\alpha}.$$

75. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sin \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha} dx.$$

76. $$\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^2 dx.$$

77. $$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)}.$$

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[t', t]$ $(-\infty < t' < t < +\infty)$ қисмида интегралланувчи бўлсин:

$$F(t', t) = \int_{t'}^{t} f(x) dx.$$

5- таъриф. *Агар* $t' = -t$ *бўлиб,* $t \to +\infty$ *да* $F(t', t) = \int_{t'}^{t} f(x)dx$ *функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$$

лимит эса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *хосмас интегралнинг бош қиймати дейилади.*

$\int^{+\infty} f(x)dx$ *хосмас интегралнинг бош қиймати*

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx$$

хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи:

$\forall t > 0$ учун $\int_{-t}^{t} \sin x\, dx \approx \varnothing$ ва, демак,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=0.$$

Бирок $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ интеграл яқинлашувчи эмас.

17- мисол. Қуйидаги

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

интегрални топинг.

Таърифга кўра

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$

бўлади. Энди $\int\limits_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ ни ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int\limits_{-t}^{t}\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\int\limits_{-t}^{t}\frac{dx}{1+x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}(-t)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1+t^2}.$$

Унда

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}(\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}(-t))=\pi$$

бўлади. Демак,

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\pi.$$

Қуйидаги интегралларни топинг:

78. $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xdx.$

79. $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xdx.$

80. $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}xdx.$

81. $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}dx.$

4-§. ЧЕГАРАЛАНМАГАН ФУНКЦИЯНИНГ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ТУШУНЧАЛАРИ

$f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция $[a, b)$ ярим интервалнинг исталган $[a, t]$ $(a<t<b)$ қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий $t(a<t<b)$ учун ушбу

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

Агар $t\to b\to 0$ да $F(t)$ функциянинг лимити

$$\lim_{t\to b-0} F(t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ бўйича хосмас интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0} F(t)=\lim_{t\to b-0}\int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

6-таъриф. *Агар $t\to b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (2) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади. $f(x)$ эса $[a, b)$ ва интегралланувчи функция дейилади.*

Агар $t\to b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса ёки лимит мавжуд бўлмаса, $(*)$ хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

Худди юқоридагидек, a нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл, a ва b нуқталар функциянинг махсус нуқталари бўлганда (a, b) оралиқ бўйича хосмас интеграл таърифланади:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{t\to a+0\\ V\to b-0}}\int_t^V f(x)dx.$$

18-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

бўлиб,

$$F(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(1+\sqrt{t})$$

бўлишидан эса

$$\lim_{t\to+0} F(t) = \lim_{t\to+0} 2(1-\sqrt{t}) = 2$$

келиб чиқади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

19- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини аниқланг ва қийматини топинг.

Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{t\to+0\\ v\to1-0}} \int_t^v \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

бўлади. Агар

$$\int_t^v \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1)\Big|_t^v =$$

$$= \arcsin(2v-1) - \arcsin(2t-1)$$

ва

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ v\to1-0}} [\arcsin(2v-1) - \arcsin(2t-1)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ҳамда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi$$

эканини топамиз.

20- мисол. Ушбу

$$I_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad J_2\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

хосмас интегралларни яқинлашувчиликка текширинг.

Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$I_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]\Bigg|_t^b=$$

$$=\lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-\alpha}[(b-a)^{1-\alpha}-(t-a)^{1-\alpha}] \qquad (\alpha\neq 1).$$

Бу лимит $\alpha<1$ бўлганда чекли, демак I_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha>1$ бўлганда эса чексиз, I_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади. $\alpha=1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}[\ln(x-a)]\Big|_t^b$$

бўлиб I_1 интеграл узоқлашувчи бўлади.

Демак,

$$I_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

хосмас интеграл $\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчидир.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$I_2=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

хосмас интеграл $\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

21-мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлишини исботланг ва қийматини топинг.

Равшанки, бу интеграл 20-мисолга кўра $\left(\alpha=\frac{2}{3}\right)$ яқинлашувчи. Энди унинг қийматини топамиз:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{t\to1-0}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{t\to1-0}(3\sqrt[3]{x-1})\Big|_{-1}^{t}=$$

$$=3\lim_{t\to1-0}\left(\sqrt[3]{t-1}-\sqrt[3]{-2}\right)=3\sqrt[3]{2},$$

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{t\to1+0}\int_{t}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{t\to1+0}(3\sqrt[3]{x-1})\Big|_{t}^{2}=$$

$$=3\lim_{t\to1+0}\left(\sqrt[3]{2-1}-\sqrt[3]{t-1}\right)=3.$$

Демак,

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг ва қийматини топинг:

82. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

83. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

84. $\int_{0}^{1}\ln x dx$.

85. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

86. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

87. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

88. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

89. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

90. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

91. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

92. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

93. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

94. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$.

95. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

96. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$.

97. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

98. $\int\limits_{0}^{e} \frac{dx}{e^x-1}$.

99. $\int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}$.

5-§. ЯҚИНЛАШУВЧИ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ. АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин.

1°. Агар $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ва $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ хосмас интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{b} [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)]dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b[\alpha\cdot f(x)\pm\beta\cdot g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$$

бўлади, бу ерда α, β — ўзгармас сонлар.

2°. Агар $\forall x\in[a, b)$ учун $f(x)\leqslant g(x)$ бўлиб, $\int_a^b f(x)dx$ ва $\int_a^b g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

3°. Ньютон — Лейбниц формуласи. $f(x)$ функция $[a, b)$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ эса унинг шу оралиқдаги бошланғич функцияси бўлсин $(F'(x)=f(x))$. Унда

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^{b-0}=F(b-0)-F(a) \tag{4}$$

бўлади. (Одатда (4) Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади). Бу ерда

$$F(b-0)=\lim_{t\to b-0}F(t)$$

4°. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. $f(x)$ функция $[a, b)$ да узлуксиз, $\varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta)$ да узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб,

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim_{t\to b-0}\varphi(t)=b$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

бўлади.

5°. Бўлаклаб интеграллаш формуласи. Агар $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар $[a, b)$ да узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{t\to b-0}(u\cdot v)$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b udv = u\cdot v|_a^b - \int_a^b vdu$$

бўлади. Бу ерда

$$u\cdot v|_a^b = \lim_{t\to b-0} u(t)v(t) - u(a)v(a).$$

22- мисол. Ушбу

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

интегрални ҳисобланг. Равшанки,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

функциянинг (1, 2] оралиқдаги бошлангич функцияси

$$F(x) = 2\cdot\sqrt{\ln x}$$

бўлади. Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = (2\sqrt{\ln x})\Big|_{1-0}^{2} = 2\ln 2 - 2\lim_{t\to 1-0}\sqrt{\ln t} = 2\ln 2.$$

23- мисол. Ушбу

$$\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз: $x = 2\sin t$. Бунда $x\in[0, 2)$ бўлганда $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, $dx = 2\cos tdt$ бўлади. Натижада берилган интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cdot\cos t}{\cos t}dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 tdt$$

Кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 tdt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t) = (\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{2}{3}.$$

Демак,

$$\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{16}{3}.$$

24- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

интегрални ҳисобланг. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз. Берилган интегралда

$$u=\ln x, \qquad dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

дейилса, у ҳолда

$$du=\frac{1}{x}dx, \qquad v=2\sqrt{2}$$

бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{+0}^{1}-2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=-2\lim_{t\to+0}\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\Big|_{+0}^{1}=-4.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги хосмас интегралларни ҳисобланг:

100. $\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx.$

101. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

102. $\int_{-2}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

103. $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}}dx.$

104. $\int_0^1 \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx.$

105. $\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}dx.$

106. $\int_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

107. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

108. $\int\limits_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 109. $\int\limits_a^k \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ $(a,\ b \in R,\ a<b).$

6-§. ХОСМАС ИНТЕГРАЛНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР. ИНТЕГРАЛНИНГ АБСОЛЮТ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

$f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

9-теорема. **[а,в) да манфий бўлмаган $f(x)$ функциянинг $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall t \in (a,\ b)$ да**

$$F(t)=\int\limits_a^t f(x)dx \leqslant C \quad (C=\text{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

10-теорема. **$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b)$ да берилган бўлиб, b шу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\forall x \in [a,b)$ да**

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

бўлса, у холда $\int\limits_a^b g(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилигидан $\int\limits_a^b f(x)dx$ нинг яқинлашувчилиги; $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчилигидан $\int\limits_a^b g(x)dx$ нинг узоқлашувчилиги келиб чиқади.

11-теорема. **$f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $[a,b)$ да аниқланган, $f(x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0$ бўлиб,**

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$$

бўлсин. Агар $k < +\infty$ ва $\int\limits_a^b g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^b f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k>0$ ва

$\int\limits_a^b g(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_a^b f(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

12-теорема. Агар x нинг b га етарли яқин қийматларида

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\alpha}}\,(\alpha>0)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)\leqslant C<+\infty$ ва $\alpha<1$ бўлганда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x)\geqslant C>0$ ва $\alpha\geqslant 1$ бўлганда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

13-теорема. Агар $x\to b-0$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{b-x}$ га нисбатан $\alpha(\alpha>0)$ тартибли чексиз катта бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл $\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\geqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

14-теорема (Коши теоремаси). Қуйидаги

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

хосмас интегралнинг (b — махсус нуқта) яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta>0$ топилиб, $b-\delta<t'<b$, $b-\delta<t''<b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий t' ва t'' лар учун

$$|F(t'')-F(t')|=\left|\int\limits_a^{t''} f(x)dx-\int\limits_a^{t'} f(x)dx-\right|=$$

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

15-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b)$ да берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)$ функция $[a,b)$ да узлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғич $F(x)$ $(F'(x)=f(x))$ функцияси чегараланган,

2) $g(x)$ функция $[a,b)$ да $g'(x)$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,

3) $g(x)$ функция $[a,b)$ да камаювчи,

4) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0.$

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

16-теорема. **Агар $\int_b^a |f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.**

7-таъриф. *Агар $\int_a^b |f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл деб аталади, $f(x)$ функция эса $[a,b)$ да абсолют интегралланувчи функция дейилади.*

25-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{x\ \mathrm{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Агар

$$F(t)=\int_0^t \frac{x\ \mathrm{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\leqslant\int_0^t \frac{\mathrm{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}(\mathrm{arc}\sin t)^2$$

ва $\forall t\in[0,1)$ да

$$F(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{arc}\sin t)^2\leqslant\frac{\pi^2}{8}$$

эканлигини эътиборга олсак, 9-теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлишини топамиз.

26- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Равшанки, $\forall x \in [0,1)$ да

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$$

бўлади. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 10-теоремадан фойдаланиб,

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx$$

интегралнинг яқинлашувчи эканини топамиз.

27- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x}\, dx$$

хосмас интегралнинг узоқлашувчилигини кўрсатинг.

Маълумки, $\forall x \in (0,1]$ да $e^x > 1$ бўлади. Демак,

$$\frac{e^x}{\sin^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \in (0,1])$$

Энди $\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ интегрални қараймиз. Таърифга кўра

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \lim_{t \to +0} \int_t^1 \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{t \to +0} (-\mathrm{ctg} x)\Big|_t^1 = \mathrm{ctg} 1 + \lim_{t \to +0} \mathrm{ctg} t = +\infty$$

бўлади. Демак, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ хосмас интеграл узоқлашувчи ва

10-теоремага биноан

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x} dx$$

интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

28- мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\ln x \; dx}$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Бу хосмас интеграл билан бирга

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

яқинлашувчи интегрални қараймиз. Равшанки,

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \to +0} \sqrt[3]{x \cdot \ln x} = 0.$$

11- теоремага кўра

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\ln x \; dx}$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

29- мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг. Интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$$

бўлиб, $x\to 1-0$ да

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=0\left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)$$

бўлади. 13-теоремага кўра берилган интеграл яқинлашувчидир.

30-**мисол.** Ушбу

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг, қийматини топинг.

Равшанки, $0<\alpha<1$ бўлганда

$$\mathop{\ln}\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ctg}\,x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{x}{\sin x}\,x^{\alpha}\cos x\right)=0$$

бўлади.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{\alpha}}\qquad\qquad(0<\alpha<1)$$

яқинлашувчи бўлгани учун 11-теоремага кўра қаралаётган интеграл яқинлашувчи бўлади. Энди бу интегралнинг қийматини топамиз:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2dx=\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt, \ \left(t = \frac{x}{2}\right).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \left(t = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

Демак,

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\mu}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

Кейинги тенгликдан

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

бўлиши келиб чиқади.

31- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Аввало

$$\left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

бўлишини аниқлаймиз. Равшанки,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи. Унда 10- теоремадан

$$\int_0^1 \left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right| dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчилиги келиб чиқади. Бу эса берилган интегралнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради.

32- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{dx}{1-x}$$

интегрални абсолют ва шартли яқинлашувчиликка текширинг.

Интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{1-x}=f(x)\cdot g(x).$$

Бу ерда

$$f(x)=\sin\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2},\quad g(x)=1-x.$$

Бу $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар 15-теореманинг (Дирихле аломати) барча шартларини қаноатлантиради.

1) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sin\frac{1}{1-x}$ функция $[0,1)$ да узлуксиз ва унинг бошлангич функцияси $F(x)=-\cos\frac{1}{1-x}$ чегараланган,

2) $g(x)=1-x$ функция $[0,1)$ да $g'(x)=-1$ ҳосилага эга ва у узлуксиз функция;

3) $g(x)=1-x$ функция $[0,1)$ да камаювчи,

4) $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)=0.$

Демак, 15-теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи.

Равшанки,

$$\left|\frac{1}{1-x}\cdot\sin\frac{1}{1-x}\right|\geqslant\frac{1}{1-x}\sin^2\frac{1}{1-x}. \tag{5}$$

Энди

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\cdot\sin^2\frac{1}{1-x}dx$$

интегралнинг узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $\delta>0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon=\frac{1}{4}$, t' ва t'' лар сифатида $1-\delta<t'<1$, $1-\delta<t''<1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи

$$t'=1-\frac{1}{n\pi},\ t''=1-\frac{1}{2n\pi}$$

лар олинса, у ҳолда

$$\left|\int_{t'}^{t''}\sin^2\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{1-x}\right|=\left|\int_{1-\frac{1}{n\pi}}^{1-\frac{1}{2n\pi}}\sin^2\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{1-x}\right|=$$

$$=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 t}{t}dt>\frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 t dt=\frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{1-\cos2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{\pi n}{2}=\frac{1}{4}=\varepsilon$$

бўлади. Бу эса, Коши теоремасига мувофиқ,

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\sin^2\frac{1}{1-x}dx$$

интегралнинг узоқлашувчилигини билдиради.

Юқоридаги (5) муносабатдан ва 10-теоремадан фойдаланиб,

$$\int_0^1\left|\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}\right|dx$$

интегралнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз.

Демак,

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}dx$$

хосмас интеграл шартли яқинлашувчи экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни яқинлашувчилигини исботланг:

110. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

111. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$.

112. $\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

113. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx$.

114. $\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^2}{16-x^2}}\,dx$.

115. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$.

116. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

117. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

118. $\int_0^\pi \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

119. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$.

Қуйидаги интегралларнинг узоқлашувчилигини исботланг:

120. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

121. $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3-2x^2+4}$.

122. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

123. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

124. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

125. $\int_0^\pi \frac{\ln \sin x}{x\sqrt{\sin x}}\,dx$.

Қуйидаги хосмас интегралларни яқинлашувчиликка текширинг:

126. $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

127. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

128. $\int_0^1 x^2\ln^2\frac{1}{x}\,dx$.

129. $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(x-1)}{x-\sqrt{x}}\,dx$.

130. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$.

131. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$.

132. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}dx.$ **134.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx.$

133. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^2+x^2-e^{\cos x}}}{x^2}dx.$ **135.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+\operatorname{arctg}x}}.$

Қуйидаги хосмас интегралларни абсолют яқинлашувчиликка текширинг:

136. $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}dx.$ **139.** $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}dx.$

137. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos^3\ln x}{x\ln x}dx.$ **140.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2}dx.$

138. $\int\limits_0^{0,5} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha\cos\frac{1}{\alpha^2}dx.$ **141.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{(\sqrt{x}-x)^\alpha}dx.$

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a, c-\eta_1]$ ва $[c+\eta_2, b)$ $(\eta_1>0,\ \eta_2>0)$ оралиқларда интегралланувчи бўлиб, c нуқта функциянинг махсус нуқтаси бўлсин:

Маълумки, $\eta_1\to 0$, $\eta_2\to 0$ да ушбу

$$F(\eta_1,\eta_2)=\int\limits_a^{c-\eta_1} f(x)dx+\int\limits_{c+\eta_2}^{b} f(x)dx$$

функциянинг лимити $f(x)$ функциянинг (a, b) даги хосмас интеграли дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}} F(\eta_1,\eta_2)=\int\limits_a^b f(x)dx \tag{6}$$

Агар $F(\eta_1,\eta_2)$ функциянинг лимити чекли бўлса, (4) хосмас интеграл яқинлашувчи, акс ҳолда интеграл узоқлашувчи дейилади.

8-таъриф. *Агар* $\eta_1=\eta_2=\eta$ *ва* $\eta\to 0$ *да*

$$F_0(\eta,\eta.)=\int\limits_a^{c-\eta} f(x)dx+\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx$$

функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{\eta\to 0} F_0(\eta,\eta).$$

лимит эса $\int\limits_a^b f(x)dx$ *хосмас интегралнинг бош қиймати дейилади. Уни*

$$\text{V.P.}\int\limits_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\text{V.P.}\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\eta} f(x)dx+\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx\right].$$

$\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$$

хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи:

$$\text{V.P.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\eta\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\eta}\frac{1}{x}dx+\int\limits_{\eta}^{1}\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\lim_{\eta\to 0}[\ln|x|\,\Big|_{-1}^{-\eta}+\ln|x|\,\Big|_{\eta}^{1}]=0.$$

Бироқ $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ хосмас интеграл яқинлашувчи эмас.

Қуйидаги интегралларни топинг:

142. $\text{V.P.}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x-c}\ (a<c<b).$

143. $\text{V.P.}\int\limits_{0,5}^{4}\frac{dx}{x\ln x}.$

144. $\text{V.P.}\int\limits_{0}^{\pi}x\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$

145. $\text{V.P.}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3-5\sin x}.$

XVI боб

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$f(x,y)$ функция R^2 фазодаги бирор

$$D=\{(x,y)\in R^2: a\leqslant x\leqslant b,\ \ y\in E\subset R\}$$

тўпламда берилган бўлсин. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайинланган қийматида $f(x,y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int\limits_{a}^{b}f(x,y)dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$I(y)=\int\limits_{a}^{b}f(x,y)dx. \tag{1}$$

Одатда (1) интеграл *параметрга боғлиқ интеграл,* y ўзгарувчи эса *параметр* дейилади. Параметрга боғлиқ интегралларда $I(y)$ функциянинг бир қатор хоссалари (лимити, узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги, интегралланувчилиги ва ҳ.к.) ўрганилади. Бу хоссаларни ўрганишда $f(x,y)$ функциянинг y бўйича лимити ва унга интилиш характери муҳим роль ўйнайди.

$f(x,y)$ функция D тўпламда берилган, y_0 эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, ($\forall x\in[a,b]$ учун шундай) $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$ топилсаки, $|y-y_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y\in E$ учун*

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b]$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x,y)$ функциянинг $y\to y_0$ даги лимит функцияси дейилади.

$f(x,y)$ функция D тўпламда берилган бўлиб, ∞ E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

2-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам ($x\in[a,b]$ учун) шундай $\Delta=\Delta(\varepsilon,x)>0$ топилсаки, $|y|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y\in E$ учун*

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

бўлса, *у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x,y)$ функциянинг $y\to\infty$ даги лимит функцияси дейилади.*

1-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=x\sin y$$

функцияни $D=\{(x,y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 1,\ y\in R\}$ тўпламда қарайлик. $y\to\frac{\pi}{2}$ даги лимит функция x эканлигини кўрсатинг.

Агар $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta=\varepsilon$ деб олинса, унда $|y-y_0|=\left|y-\frac{\pi}{2}\right|-\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y\in R$ ва $\forall x\in[0,1]$ учун

$$|f(x,y)-\varphi(x)|=|x\sin y-x|=|x|\,|\sin y-1|=$$
$$=|x|\left|\sin y-\sin\frac{\pi}{2}\right|=|x|\left|2\sin\frac{y-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{y+\frac{\pi}{2}}{2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|y-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $y\to\frac{\pi}{2}$ да $f(x,y)=x\sin y$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}f(x,y)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}x\sin y=x$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{yx}{1+y^2x^2}$$

функция $D=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\in R\}$ тўпламда берилган бўлсин. $y\to\infty$ даги лимит функцияни топинг.

$\varphi(x)=0$ эканлигини кўрсатамиз.

Агар $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\Delta=\frac{1}{x\varepsilon}$ деб олинса, унда $|y|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y\in R$ учун

$$|f(x,y)-\varphi(x)|=\left|\frac{yx}{1+y^2x^2}-0\right|<\frac{1}{yx}<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $0<x\leqslant 1$ учун $y\to\infty$ да $f(x,y)=\frac{yx}{1+y^2x^2}$ функциянинг лимит функцияси $\varphi(x)=0$ бўлади. $x=0$ да $\varphi(0)=0$ эканлиги равшандир.

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида, лимит функция таърифидаги $\delta=\varepsilon$ бўлиб, у фақат ε гагина боғлиқ, иккинчисида эса $\Delta=\frac{1}{x\varepsilon}$ бўлиб, у берилган $\varepsilon>0$ билан бирга қаралаётган x нуқтага ҳам боглиқ эканлигини кўрамиз.

Лимит функция таърифидаги $\delta>0$ нинг фақат $\varepsilon>0$ гагина боглиқ қилиб танланиши мумкин бўлган ҳол муҳимдир.

3-таъриф. *D тўпламда берилган $f(x,y)$ функциянинг $y\to y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)$ топилсаки, $|y-y_0|<\ <\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y\in E$ ва $\forall x\in[a,b]$ учун*

$$|f(x,\ y)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

бўлса, $f(x,y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га $[a,b]$ да текис яқинлашади дейилади.

4-таъриф. *D тўпламда берилган $f(x,y)$ функциянинг $y\to y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин.*

$\forall\delta>0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0>0$, $x_0\in[a,b]$ ва $|y_1-y_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y_1\in E$ топилсаки, ушбу

$$|f(x_0,y_1)-\varphi(x)|\geqslant\varepsilon_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x,y)$ функция $\varphi(x)$ га нотекис яқинлашади дейилади.

Юқорида келтирилган 1- мисолда $f(x,y)=x\sin y$ функция $y\to\frac{\pi}{2}$ да ўз лимит функцияси x га текис яқинлашиши равшандир. 2- мисолда эса $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2y^2}$ функция $y\to\infty$ да лимит функция $\varphi(x)=0$ га нотекис яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\Delta>0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$, y_1 сифатида $|y_1|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий y_1 ни ва $x_0=\frac{1}{y_1}$ деб олсак, у ҳолда

$$|f(x_0,y_1)-\varphi(x)|=\frac{y_1\cdot\frac{1}{y_1}}{1+y_1^2\cdot\frac{1}{y_1^2}}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0=\frac{1}{3}$$

бўлиб, бу 4- таърифга кўра $y\to\infty$ да $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2y^2}$ функция ўз лимит функциясига нотекис яқинлашишини билдиради.

3- мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{y}\right)^y}$$

функция $D=\{(x,y)\in R^2:0<x\leqslant 1,\ 0<y<+\infty\}$ тўпламда қаралаётган бўлсин. $y\to+\infty$ да лимит функцияни топинг ва яқинлашиш характерини текширинг.

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{y}\right)^y}=\frac{1}{1+e^x}$$

эканини кўриш қийин эмас.

$$|f(x,y)-\varphi(x)|=\left|\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{y}\right)^y}-\frac{1}{1+e^x}\right|-$$

$$\frac{\left|e^x-\left(1+\frac{x}{y}\right)^y\right|}{\left[1+\left(1+\frac{x}{y}\right)^y\right](1+e^x)}.$$

Агар $a=e^{\ln a}$ ва $x>0$ ларда $\ln(1+x)<x$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $|f(x,y)-\varphi(x)|$

$$<\frac{\left|e^x-e^{y\left(\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2y^2}\right)}\right|}{4}=\frac{\left|e^x-e^{x-\frac{x^2}{2y}}\right|}{4}=$$

$$=\frac{e^x\left(1-e^{-\frac{x^2}{2y}}\right)}{4}<\frac{e}{4}\left(1-e^{-\frac{1}{2y}}\right).$$

$\frac{e}{4}\left(1-e^{-\frac{1}{2y}}\right)<\varepsilon$ тенгсизликни ечиб топамиз:

$$y>\frac{1}{2\ln\left(1-\frac{4\varepsilon}{e}\right)}.$$

Агар $\Delta=\frac{1}{2\ln\left(1-\frac{4\varepsilon}{l}\right)}$ десак, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ га кўра

$$\Delta=\frac{1}{2\ln\left(1-\frac{4\varepsilon}{l}\right)}, \quad y>\Delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y$ лар учун ва $\forall x\in[0,1]$ учун

$$|f(x,y)-\varphi(x)|=\left|\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{y}\right)^y}-\frac{1}{1+e^x}\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса 3-таърифга кўра берилган $f(x,y)$ функцияни $y\to+\infty$ да лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашишини билдиради.

4-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$$

функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in R,\ 0<y<+\infty\}$ тўпламда берилган бўлсин. $y\to+\infty$ да лимит функцияни топинг ва интилиши характерини текширинг.

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\sin\frac{x}{y}=0$$ эканини кўриш

қийин эмас: $\varphi(x)=0$

$$|f(x,y)-\varphi(x)|=\left|\sin\frac{x}{y}\right|\leqslant\left|\frac{x}{y}\right|<\varepsilon\Rightarrow y>\frac{|x|}{\varepsilon}.$$

$\forall\varepsilon>0$ га кўра $\Delta=\frac{|x|}{\varepsilon}$ десак, у ҳолда $|y|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y$ учун $\left|\sin\frac{x}{y}\right|<\varepsilon$ бўлади. Бу ерда $\Delta=\frac{|x|}{\varepsilon}$ фақатгина ε га боғлиқ бўлмай x га ҳам боғлиқдир. Δ ни x га боғлиқмас қилиб олиб бўлмаслигини кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Демак, қаралаётган функция ўз лимит функциясига 4-таърифга кўра нотекис яқинлашади.

Теорема. **$f(x,y)$ функция $y\to y_0$ да лимит функция $\varphi(x)$ га эга бўлиб, унга текис яқинлашиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, $x(x\in[a,b])$ га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилиб, $|y-y_0|<\delta$, $|y'-y_0|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall y,y'\in E$ ҳамда $\forall x\in[a,b]$ учун**

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

2-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ

1-теорема. **$f(x,y)$ функция y нинг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x,y)$ функция $y\to y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлса ва унга текис яқинлашса, у ҳолда**

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx \tag{2}$$

бўлади.

2-теорема. **Агар $f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2:$ $:x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда**

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

3-теорема. **$f(x, y)$ функция $D=\{(x, y)\in R^2:x\in[a, b],$ $y\in[c, d]\}$ тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар**

$f(x,y)$ функция D тўпламда $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосилага эга бўлиб, у D да узлуксиз бўлса, у ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c,d]$ оралиқда $I'(y)$ ҳосилага эга ва ушбу

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{3}$$

муносабат ўринлидир.

4-теорема. Агар $f(x,y)$ функция 2-теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда $\int_c^d I(y)dy$ интеграл мавжуд ва

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx \tag{4}$$

муносабат ўринлидир.

$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг $[c,d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x,y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин.

$x=\alpha(y)$, $x=\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c,d]$ да берилган ва $\forall y\in[c,d]$ учун

$$a\leqslant\alpha(y)\leqslant\beta(y)\leqslant b \tag{5}$$

бўлсин. У ҳолда

$$\bar{I}(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{1}$$

интеграл мавжудлиги ва у параметр y га боғлиқлиги равшандир.

5-теорема. $f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,b],$ $y\in[c,d]\}$ тўпламда узлуксиз, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функциялар $[c,d]$ да узлуксиз ва (5) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\bar{I}(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

функция ҳам $[c,d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

6-теорема. **$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ тўпламда узлуксиз, $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосилага эга ва D да узлуксиз, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функциялар $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ ҳосилаларга эга ва улар (5) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $I'(y)$ функция ҳам $[c,d]$ оралиқда ҳосилага эга ва**

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y) \quad (6)$$

муносабат ўринлидир.

5-теорема шартлари бажарилган ҳолда $I'(y)$ функциянинг $[c,d]$ оралиқда интегралланувчи эканлиги келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$ ни топинг. Интеграл остидаги $f(x,\alpha)=$ $=x^2\cos\alpha x$ функция $x\in[0,2]$ $\alpha\in R$ ларда узлуксиз экани равшандир. Жумладан, у $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[0,2],\alpha\in[0,2]\}$ тўпламда узлуксиз.

$$\lim_{\alpha\to 0} f(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to 0} x^2\cos\alpha x=x^2,$$

$$|f(x,\alpha)-x^2|=|x^2\cos\alpha x-x^2|=|x^2(\cos\alpha x-$$

$$-1)|=x^2|\cos\alpha x-1|=x^2|1-\cos\alpha x|=$$

$$=x^2\left|2\sin^2\frac{\alpha x}{2}\right|\leqslant 2x^2\cdot\frac{|\alpha x|}{2}\cdot\frac{|\alpha x|}{2}=\frac{\alpha^2x^4}{2}\leqslant 8\alpha^2<\varepsilon.$$

Агар $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}}$ десак,

$|f(x,\alpha)-x^2|<\varepsilon$ бўлади. Бу эса $\alpha\to 0$ да $f(x,\alpha)=x^2\cos\alpha x$ функциянинг лимит функция x^2 га текис яқинлашишини билдиради. 1-теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx=\int_0^2 \lim_{\alpha\to 0} x^2\cos\alpha x dx=\int_0^2 x^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

6-мисол. Ушбу $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ ни топинг.

Юқорида келтирилган 3- мисолга кўра интеграл остидаги

$f(x,n)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ функция $n\to\infty$ да лимит функция

$\frac{1}{1+e^x}$ га текис яқинлашади. Демак, 1- теоремага кўра интеграл остида лимитга ўтиш мумкин, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+(1+\frac{\infty}{n})^n}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int_0^1\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}=$$

бўлади.

7- мисол. Ушбу

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$$

интегралда лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкинми?

Фараз қилайлик, лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкин бўлсин. Лопиталь қоидасини қўллаш билан $\lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}=0$ эканини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\int_0^1\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=0$$

бўлади.

Энди интегрални қийматини ҳисоблаб, сўнгра лимитга ўтамиз:

$$\int_0^1\frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Bigg|_1^0=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right),\quad \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Демак, лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкин эмас экан.

Нега? Шарҳлаб беринг!

8- мисол. Ушбу

$$I(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

функциянинг $y=0$ нуқтадаги ҳосиласининг мавжудлигини ҳамда (3) формула ўринлилигини текширинг.

Фараз қилайлик, $I(y)$ функциянинг $y_0\neq 0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиб, (3) формула ўринли бўлсин. У ҳолда

$$I'(y)=\int_0^1 \frac{y_0dx}{x^2+y_0^2}=\int_0^1 \frac{y_0dx}{\left(\left(\frac{x}{y_0}\right)^2+1\right)y_0^2}=$$

$$=\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y_0}\right)}{1+\left(\frac{x}{y_0}\right)^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}\Big|_0^1=\operatorname{arctg}\frac{1}{y_0}$$

бўлади.

Энди берилган интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, бевосита ҳисоблайлик:

$$I(y)=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx=$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-1+\int_0^1 \frac{y^2dx}{x^2+y^2}=$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

$I(0)=-1$ бўлгани учун

$$I'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{I(y)-I(0)}{y}=\lim\left(\frac{\ln\sqrt{1+y^2}}{y}+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right)=\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

Интеграл остидаги функциянинг y бўйича ҳосиласи $\frac{y}{x^2+y^2}$ бўлиб, у $y=0$ нуқтада нолга тенг.

Демак, қаралаётган интеграл учун (3) формула ўринли эмас. Маълумки, (3) формула ўринли бўлишининг асосий шартларидан бири $f'_y(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ функциянинг узлуксизлигидир. Бу функциянинг (0,0) нуқтада узлуксиз эмаслиги равшандир.

9- мисол. Ушбу

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$$

интегрални ҳисобланг.

Фараз қилайлик, $x\neq a\geqslant\varepsilon>0$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x,a)=\begin{cases}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}, \text{ агар } x\neq0, x\neq\frac{\pi}{2} \text{ бўлса,}\\ a, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x=\frac{\pi}{2} \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция ҳамда

$$f'_a(x,a)=\begin{cases}\frac{1}{1+a^2tg^2x}, \text{ агар } x\neq\frac{\pi}{2} \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } x=\frac{\pi}{2} \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциялар $D=\{(x,a)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0<\varepsilon\leqslant a\}$ тўртбурчакда узлуксиз экани равшандир.

Демак, (3) формулани қўллаш мумкин.

Натижада

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

бўлади.

Бу интегралда $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни бажариш натижасида

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$$

интегралга келамиз.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{1}{1-a^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{a}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{d(ta)}{1+t^2a^2} =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{a^2-1} \operatorname{arctg}(at) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}.$$

Энди

$I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ ифодани интеграллаб, топамиз:

$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C$, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

$A \to +0$ да лимитга ўтиб, охирги муносабатдан қуйидагини оламиз:

$$\lim_{a \to +0} I(a) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + C,$$

яъни:

$$C = \lim_{a \to +0} I(a).$$

Интеграл остидаги функция узлуксиз бўлгани учун 2-теоремадан фойдаланиб

$$I(0) = \lim_{a \to +0} I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a \to +0} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = 0$$

эканини, яъни $C = 0$ эканини топамиз.

Шундай қилиб, $a > 0$ ларда

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$$

бўлади.

Худди юқоридагига ўхшаш $a < 0$ бўлганда

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$$

эканини кўрсатиш қийин эмас. Демак, қаралаётган интеграл $\forall a$ да

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)$$

га тенг.

10-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (a>0,\ b>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $x>0$ да

$$\int_a^b x^y dy=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$$

бўлади.

Демак, $I=\int\limits_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^y dy.$

Интеграл остидаги $f(x,y)=x^y$ — функция $D=\{(x,y)\in R^2: :x\in[0,1],\ y\in[a,b]\}$ тўпламда узлуксизлигидан (4) формулани қўллаш натижасида топамиз:

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b \frac{dy}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Шундай қилиб, қаралаётган интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\ln\frac{1+b}{1+a}$$

экан.

11-мисол. Ушбу

$$F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

интеграл учун $F'(\alpha)$ ни топинг.

Юқорида келтирилган 6- теорема шартларини текширамиз.

$f(x,\alpha)=\frac{\sin\alpha x}{x}$ функция $x\neq 0$ ларда узлуксиз,

$f'(x,\alpha)=\cos\alpha x$ эса R да узлуксиздир.

$(a+\alpha)'=(b+\alpha)'=1.$

(6) формулани қўллаб, топамиз:

$$F'(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\ dx+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{\alpha}+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}=$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha).$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпламда лимит функцияларини топинг:

1. $f(x,y)=x^4\cos\frac{1}{xy}$;

   $D=\{(x,y)\in R^2:0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty\},\ y_0=+\infty.$
2. $f(x,y)=(x-1)\mathrm{arctg}\,x^y$;

   $D=\{(x,y)\in R^2:0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty\},y_0=+\infty.$
3. $f(x,y)=\sqrt{x^2+\frac{1}{\sqrt{y}}}$;

   $D=\{(x,y)\in R^2:x\in R,\ 0<y<+\infty\},\ y_0=+\infty.$
4. $f(x,y)=x^y$;

   $D=\{(x,y)\in R^2:0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\},\ y_0=0.$
5. $f(x,y)=x^2\sin y$;

   $D=\{(x,y)\in R^2:x\in R,\ 0<y<\pi\},\ y_0=\frac{\pi}{3}.$
6. $f(x,n)=\sqrt[n]{1+x^n}$,

   $D=\{(x,n)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 2,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$
7. $f(x,n)=n\,\mathrm{arctg}\,nx^2$,

   $D=\{(x,n)\in R^2:0\leqslant x<+\infty,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

8. $f(x,n)=n^3x^2e^{-nx}$,

$D=\{(x,n)\in R^2:0\leqslant x<+\infty,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

9. $f(x,n)=\sqrt{n}\sin\frac{x}{n\sqrt{n}}$;

$D=\{(x,n)\in R^2:0\leqslant x<+\infty,\ n\in N\}.$

10. $f(x,n)=\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)$;

$D=\{(x,n)\in R^2:0<x<+\infty,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпламда лимит функцияларини топинг ва уни текис яқинлашишини исботланг:

11. $f(x,y)=e^{-yx^2}$,

$D=\{(x,y)\in R^2:1\leqslant x<+\infty,\ 0<y<+\infty\},\ y_0=+\infty.$

12. $f(x,y)=\sqrt{y}\sin\frac{x}{y\sqrt{y}}$,

$D=\{(x,y)\in R^2:x\in R^2,\ 0<y<+\infty\},\ y_0=+\infty.$

13. $f(x,n)=x^{2n}$,

$D=\{(x,n)\in R^2:0\leqslant x\leqslant\delta,\ 0<\delta<1,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

14. $f(x,n)=\frac{nx}{1+n^3x^2}$,

$D=\{(x,n)\in R^2:1\leqslant x<+\infty,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

15. $f(x,n)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\sin\frac{x^2}{\sqrt{n}}$.

$D=\{(x,n)\in R^2:1\leqslant x<+\infty,\ n\in N\},\ n_0=\infty.$

Қуйидаги функцияларнинг берилган тўпламда лимит функцияларини топинг ва уни текис яқинлашишга текширинг:

16. $f(x,n)=\frac{\cos\sqrt{nx}}{\sqrt{n+2x}}$,

$x\in[0,+\infty),\ n\in N,\ n_0=\infty.$

17. $f(x,n)=\frac{\ln nx}{nx^2}$, $x\in[1,+\infty)$,

$n\in N,\ n_0=\infty.$

18. $f(x,n)=n^{\frac{3}{2}}\left(1-\cos\frac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)$, $x\in[0,+\infty)$

$n\in N$, $n_0=\infty$.

19. $f(x,n)=n\int\limits_0^x \sin\frac{\pi t^n}{2}\,dt$,

$x\in[0,2]$, $0<\alpha<1$, $n\in N$, $n_0=\infty$.

20. $f(x,y)=\frac{1}{x^3}\cos\frac{x}{y}$, $0<x<1$,

$0<y<+\infty$, $y_0=\infty$.

21. Ушбу.

$$F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx, f(x)\in C[0,1], \ f(x)\geqslant 0.$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

22. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$\text{а) } \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2},$$

$$\text{б) } \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

23. $F(x)=\int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy$.

24. $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

25. $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx$.

26. $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$.

27. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$

28. $F(x)=\int\limits_{0}^{x}(x+y)f(y)dy$, $f(x)$— дифференциалланувчи функция бўлса, $F''(x)$ни топинг.

29. $F(x)=\int\limits_{a}^{b} f(y)|x-y|dy$, $a<b$, $f(y)\in C[a,b]$ $F''(x)$ни топинг.

30. $F(x)=\int\limits_{0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt$, $F^{(n)}(x)$ ни топинг.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

31. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx.$

32. $\int\limits_{0}^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)dx.$

33. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1).$

34. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Кўрсатма: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{1+x^2y^2}$ муносабатдан фойдаланинг.

35. а) $\int\limits_{0}^{1} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx;$ $a>0,$ $b>0$

б) $\int\limits_{0}^{1} \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,$ $a>0,$ $b>0.$

3- §. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,+\infty),\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган бўлиб, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,+\infty)$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx,\ (y\in E)$$

хосмас интеграл мавжуд ва чекли бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқ бўлиб,

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл параметрга боғлиқ (чегараси чексиз) хосмас интеграл деб аталади.

Ушбу

$$\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интеграллар ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,b],\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган, b — махсус нуқта бўлиб, E тўпламдан олинган y нинг ҳар бир тайин қийматида $[a,b)$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x,y)dx\ (y\in E)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин.

Бу интеграл ҳам y нинг қийматига боғлиқ бўлиб,

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интеграл параметрга боғлиқ, *чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли* деб аталади.

a нуқта махсус, a ва b нуқталар махсус, умуман параметрга боғлиқ чегараланмаган, чегараси чексиз хосмас интеграллар тушунчаси ҳам юқоридаги каби киритилади.

Масалан,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \ (\alpha>0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2+x^2}dx, \ a\in R$$

интеграллар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2: x\in[a,+\infty),\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,+\infty)$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда чегараси чексиз бўлган хосмас интеграл таърифига кўра ихтиёрий $[a, A]$ да $(a<A<+\infty)$

$$I(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx \qquad (7)$$

интеграл мавжуд ва

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\lim_{A\to+\infty} I(A,y). \qquad (8)$$

Демак, $I(y)$ ва $I(A,y)$ функциялар (8) ва (7) интеграллар орқали аниқланган бўлиб, $I(y)$ $I(A,y)$ функциянинг $A\to+\infty$ даги *лимит функциясидир.*

5-таъриф. *Агар $A\to+\infty$ да $I(A,y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E тўпламда текис яқинлашса, y ҳолда*

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи деб аталади.

6-таъриф. *Агар $A\to+\infty$ да $I(A,y)$ функция ўз лимит функцияси $J(y)$ га E тўпламда нотекис яқинлашса, y ҳолда*

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл E тўпламда нотекис яқинлашувчи деб аталади.

(8) интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши қуйидагидан иборатдир:

1) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи,

2) $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall A > \Delta$ ва $y \in E$ учун

$$\left| \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ интеграл E тўпламда яқинлашувчи, аммо у шу тўпламда нотекис яқинлашувчилиги эса қуйидагидан иборатдир:

1) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи.

2) $\forall \Delta > 0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in E$ топилсаки,

$$\left| \int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \geqslant \varepsilon_0$$

бўлади.

12- мисол. Ушбу

$$I(y) = \int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx, \; y \in (0, +\infty)$$

интегралнинг яқинлашиш характерини текширинг.

Аввало

$$I(A,y) = \int\limits_{A}^{+\infty} ye^{-xy}dx \; (0 \leq A < +\infty)$$

интегрални қараймиз.

$$I(A,y) = \int\limits_{0}^{A} ye^{-xy}dx = -e^{-xy} \Big|_{x=0}^{x=A} = 1 - e^{-Ay}.$$

Сўнгра

$$\lim_{A\to+\infty} I(A,y)=\lim_{A\to+\infty}(1-e^{-Ay})=1$$

бўлишини топамиз.

Демак, қаралаётган интеграл таърифга кўра яқинлашувчи.

Энди интегрални текис яқинлашувчиликка текширамиз.

$\left|\int\limits_A^{+\infty} e^{-xy}d(xy)\right|=e^{-Ay}$ эканини ҳисобга олинган ҳолда $\forall\Delta>0$ деб олиб $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$, $A_0>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall A_0$ учун $y_0=\frac{1}{A_0}$ деб олсак, у ҳолда

$$\left|\int\limits_{A_0}^{+\infty} y_0e^{-xy_0}dy\right|=e^{-A_0y_0}=e^{-1}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0$$

бўлади.

Бу эса $I(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$ интеграл $(0,+\infty)$ ораликда нотекис яқинлашувчилигини билдиради.

E тўплам сифатида $(a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ оралиқни қарайлик (бунда a — ихтиёрий мусбат сон), у ҳолда барча $y\in[a,+\infty)$ ларда

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-xy}d(xy)=e^{-Ay}=\frac{1}{e^{Ay}}<\frac{1}{e^{aA}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам $(0<\varepsilon<1)$ $\Delta=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ дейилса, $\forall A>\Delta$ ва $\forall y\in[a,+\infty)$ учун

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Демак, $I(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$ интеграл $[a,\ +\infty)\subset(0,+\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчи.

$f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a, +\infty), \ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган ва

$$I(y)=\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad (8)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

7-теорема (Коши теоремаси). **(8) интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$ топилсаки, $A'>\Delta$, $A''>\Delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи A', A'' ва $\forall y\in E$ учун**

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу теоремадан мисол ва масалалар ечишда фойдаланиш мураккаброқ бўлгани сабабли текис яқинлашишга текшириш учун қулайроқ аломатларни келтирамиз.

Вейерштрасс аломати: $f(x,y)$ функция $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a, +\infty), \ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган.

$$I(y)=\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл мавжуд бўлсин.

Агар шундай $\varphi(x)$ функция топилиб ($x\in[a, +\infty)$),

1) $\forall x\in[a, +\infty)$ ва $\forall y\in E$ учун $|f(x,y)\leqslant\varphi(x)$ бўлса,

2) $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса,

у ҳолда

$$J(y)=\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

13-мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} xy}{1+x^2}dx, \ y\in R$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2(1+x^2)}$$

эканини ҳисобга олсак ва $\varphi(x)=\frac{\pi}{2(1+x^2)}$ дейилса, у ҳолда

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

бўлгани учун Вейерштрасс аломатига кўра берилган интеграл R да текис яқинлашувчи бўлади.

14- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} sinxydx,\ y\in R$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$|f(x,y)|=|xe^{-x^2} sinxy|\leqslant xe^{-x^2}$$

эканини эътиборга олсак, $\varphi(x)=xe^{-x^2}$ дейилса; у ҳолда

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

яқинлашувчилигидан, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Абель аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $D=\{(x, y)\in R^2: x\in[a, +\infty), y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $g(x, y)$ функция x нинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да монотон функция бўлсин.

Агар

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи ва $\forall(x, y)\in D$ учун

$$|g(x, y)|\leqslant C\ (C=\mathrm{const})$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

14- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2} e^{-xy} dx, \quad y \in [0, +\infty)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2}, \quad g(x, y) = e^{-xy}$$

деб олинса,

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\int_0^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} xy \cdot \operatorname{arctg} xy^2}{1+x^2} dx$$

интегралнинг Вейерштрасс аломатига кўра текис яқинлашувчи эканини топамиз.

$g(x, y) = e^{-xy}$ ва y нинг $[0, +\infty)$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг камаювчи функцияси бўлиб, $\forall x \in [0, +\infty)$ ва $\forall y \in [0, +\infty)$ ларда

$$|g(x, y)| = e^{-xy} \leqslant 1$$

бўлади. Демак, Абель аломатига кўра, берилган интеграл $[0, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчи.

Дирихле аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар D тўпламда берилган бўлиб, $\forall A \geqslant a$ ҳамда $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_a^A f(x, y)dx \right| \leqslant C \quad (C = \mathrm{const})$$

бўлса ва $g(x, y)$ x бўйича монотон, $x \to +\infty$ да ўз лимит функцияси $\varphi(y)$ га текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

15- мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cdot\sin\beta x}{x}dx \ (\alpha,\ \beta\in[a,\ b],\ 0<a<b)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар

$$f(x, \alpha, \beta)=\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$g(x, y)=\frac{1}{x}$ деб олинса, у ҳолда

$$\int_{0}^{A} f(x, \alpha, \beta)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{A}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right]\Bigg|_{0}^{A}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)A}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)A}{\alpha+\beta}\right]$$

бўлиб, $\forall A>0,\ \forall\alpha,\ \beta\in[a,\ b]$ лар учун

$$\left|\int_{0}^{A} f(x, \alpha, \beta)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(\alpha-\beta)A}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)A}{\alpha+\beta}\right|\leqslant\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

булади. $x\to+\infty$ да $g(x, y)=\frac{1}{x}$ функция $[a,\ b]$ ораликда нолга текис яқинлашади. Демак, Дирихле аломатига кўра, қаралаётган интеграл $[a,\ b]$ ораликда текис яқинлашувчи.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг текис (нотекис) яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам юқоридагидек киритилади.

5-§. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ФУНКЦИОНАЛ ХОССАЛАРИ

$f(x,\ y)$ функция $D=\{(x,\ y)\in R^2: x\in[a,\ +\infty),\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган y_0 — E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

5- теорема. $f(x,\ y)$ функция

1) y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин

қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да узлуксиз.

2) $y \to y_0$ да $\forall [a, A]$ $(a < A < +\infty)$ оралиқда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \to y_0$ да $I(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

муносабат ўринли.

$f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

9- теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

10- теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам D да узлуксиз бўлиб, $y \in [c, d]$ да

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $I'(y)$ ҳосилага эга бўлади ва

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$$

муносабат ўринли.

11- теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз ва

$$I(y)=\int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_{c}^{d} I(y)dy=\int_{c}^{d}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx\right]dy=\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{c}^{d} f(x, y)dy\right]dx$$

муносабат ўринли.

$f(x, y)$ функция $D=\{(x, y)\in R^2 : x\in[a, +\infty), y\in(c, +\infty)\}$ тўпламда берилган бўлсин.

12- теорема. $f(x, y)$ функция D тўпламда узлуксиз $\int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x, y)dy$ интеграллар мос равишда $[c, +\infty)$, $[a, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_{c}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx\right]dy \left(\text{ёки } \int_{a}^{+\infty}\left[\int_{c}^{+\infty} f(x, y)dy\right]dx\right)$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{c}^{+\infty} f(x, y)dy\right]dx \left(\text{ёки } \int_{c}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx\right]dy\right)$$

интеграллар яқинлашувчи ва ўзаро тенг бўлади.

16- мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$$

интегрални текис яқинлашишига текширинг.

Агар $f(x, \alpha)=\sin x$, $g(x, \alpha)=e^{-\alpha x}$ дейилса, у ҳолда $\forall A>0$, $\forall\alpha\in[\alpha_0, +\infty)$ учун

$$\left|\int_{0}^{A}\sin x\, dx\right|=\left|\cos x\Big|_{A}^{0}\right|=|1-\cos A|\leqslant 2$$

бўлади.

Равшанки, $x \to +\infty$ да

$$g(x, \alpha) \to 0.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\Delta = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha_0}$ дейилса, $\forall x > \Delta$ ларда

$$|g(x, \alpha)| = \left|\frac{1}{e^{\alpha x}}\right| < \varepsilon$$

бўлади.

Шундай қилиб, $g(x, \alpha)$ $x \to +\infty$ да ўз лимит функцияси нолга текис яқинлашади. Бу эса, Дирихле аломатига кўра, берилган интегрални текис яқинлашувчилигини билдиради.

17- мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \quad (0 \leqslant p \leqslant 10)$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Агар $0 \leqslant p \leqslant 10$ тенгсизликни эътиборга олсак, у ҳолда

$$f(x, p) = \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}}$$

муносабат ўринли бўлишини топамиз.

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} dx$ интеграл эса яқинлашувчи бўлади, чунки

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{10}}{e^{\frac{t}{2}}} dt < \infty \quad (t = \ln x).$$

Демак, қаралаётган интеграл, Вейерштрасс аломатига кўра, текис яқинлашувчидир.

18- мисол. Ушбу

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \; p \geqslant p_0 > 0$$

интегрални текис яқинлашишга текширинг.

Ушбу $x = e^{-t} (t < 0)$ алмаштириш натижасида интеграл $\int_0^{+\infty} t^q \cdot e^{-pt} dt$ кўринишга келади.

$$|t^q \cdot e^{-pt}| \leqslant \frac{t^q}{e^{p_0 t}}$$

бўлиб, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^q}{e^{p_0 t}}\, dt$ интегралга яқинлашувчи эканини кўриш қийин эмас. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра, берилган интеграл текис яқинлашувчи.

19- мисол. Агар $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да интегралланувчи бўлса, ушбу

$$\lim_{\alpha \to +0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$$

муносабатни исботланг.

Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)dx;$$

$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлгани учун $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\exists \Delta > 0$ топилиб, $\forall A' > \Delta$, $A'' > \Delta$ лар учун $\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ бўлади.

Равшанки, $e^{-\alpha x} - 1$ функция $x \geqslant 0$ ларда монотон ва чегараланган. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{A'}^{A''} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)dx = (e^{-\alpha x_0} - 1) \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx,$$

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Демак, $\int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)dx$ интеграл текис яқинлашувчи.

Бундан, таърифга кўра, етарлича катта A учун

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

эканини топамиз.

Энди берилган $\varepsilon>0$ га кўра, A нинг тайинланган қийматида α ни шундай танлаймизки,

$$\left|\int_0^A (e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлсин.

У ҳолда

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx - \int_0^{+\infty} f(x)dx\right| = \left|\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^A(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx + \int_A^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^A(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| + \left|\int_A^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

бўлади.

20- мисол. Агар $f(x)$ функция $[0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва чегараланган бўлса, ушбу

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx = f(0)$$

муносабатни исботланг.

Аввало $x=ty$ алмаштиришни бажарамиз ($t>0$, $y>0$), у ҳолда

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt.$$

Энди $\left|\frac{f(ty)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{M}{1+t^2}$ ва $\int_0^{+\infty}\frac{M}{1+t^2}dt=\frac{\pi M}{2}$

бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра,

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ интеграл текис яқинлашувчидир.

Равшанки,

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(ty)}{1+t^2}=\frac{f(0)}{1+t^2}$$

$\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta>0$, $\forall|y|<\delta$ учун ва $\forall t\in(a,\ b)$ ларда

$$\left|\frac{f(ty)}{1+t^2}-\frac{f(0)}{1+t^2}\right|=\left|\frac{f(ty)-f(0)}{1+t^2}\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринлидир.

8- теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx=\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\lim_{y\to 0}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(0)}{1+t^2}dt=$$

$$=f(0)\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=f(0)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=f(0).$$

21- мисол. Ушбу

$$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx\quad(\alpha>0)$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

$f(x,\alpha)=\frac{\cos x}{x^\alpha}$ функцияни

$$D_\varepsilon=\{(x,\ \alpha)\in R^2: 1\leqslant x<+\infty,\ \alpha\geqslant\varepsilon>0\}$$

тўпламда узлуксиз экани равшан.

Энди интегрални текис яқинлашишга текширамиз.

$$\int_1^A\cos x\,dx=\sin x\Big|_1^A=\sin A-\sin 1$$ бўлиб,

$\left|\int_1^A\cos x\,dx\right|\leqslant 2$ бўлади. $\forall\varepsilon>0$ учун $\exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>$ >0 топиладики $\forall|x|$, $\forall\alpha\geqslant\varepsilon>0$ лар учун $\frac{1}{x^\alpha}<\varepsilon$ бўлади ($\Delta(\varepsilon)=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon}$ қилиб олсак бўлади). Бу эса $\frac{1}{x^{\alpha}}$ функцияни $x\to+\infty$ да лимит функция 0 га текис яқинлашишини билдиради. Дирихле аломатига кўра берилган интеграл текис яқинлашувчи бўлиб, 9-теоремага асосан $F(\alpha)$ функцияни узлуксизлиги келиб чиқади.

22- мисол. Агар $f(x)$ $[0,+\infty)$ оралиқда узлуксиз ва $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, ушбу

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,\ b>0)$$

Фруллани формуласини исботланг.

Фараз қилайлик,

$$F(x)=\int\frac{f(x)}{x}dx$$

бўлсин, у ҳолда $A>0$ учун

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int\limits_{aA}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=F(+\infty)-F(aA)$$

ва

$$\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx=F(+\infty)-F(Ab)$$

бўлади. Демак,

$$\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=F(Ab)-F(Aa)=\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx.$$

Охирги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int\limits_{aA}^{bA}\frac{f(x)dx}{x}=f(c)\int\limits_{aA}^{bA}\frac{dx}{x}=$$

$$=f(c)\ln\frac{b}{a}\quad(Aa\leqslant c\leqslant Ab)$$

$$\lim_{A\to+0}\int_{A}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Шундай қилиб, $\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

23- мисол. Фруллани формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx\quad(a>0,\ b>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Қаралаётган интегралда $f(x)=\cos x$ бўлиб, $f(0)=1$ га тенг. Демак,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}.$$

24- мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(m)=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

интегралга нисбатан 10-теорема шартлари бажарилишини текширамиз:

$$f(x,m)=\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx,$$

$x=0$ да $f(0,\ m)=0$ десак, $f(x,\ m)$ функция $D=\{(x,\ m)\in R^2:0\leqslant x<+\infty,\ m\in R\}$ тўпламда узлуксиз бўлади.

$$f'_m(x,m)=(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x})\cos mx$$

бўлиб, бу функциянинг D тўпламда узлуксизлиги равшандир.

Энди

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx\, dx$$

интегрални текис яқинлашишга текширамиз:

$$|(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx| \leqslant e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}$$ бўлиб,

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})dx = \left(\frac{e^{-\beta x}}{\beta} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

бўлади. Бу эса Вейерштрасс аломатига кўра

$$\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx\, dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини билдиради.

Демак,

$$I'_m(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + m^2}.$$

Бундан:

$$I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{m}{\beta} + C$$

(C — ихтиёрий ўзгармас сон) экани келиб чиқиб, $0 = I(0) = C$ муносабатдан $C = 0$ дир. Демак,

$$I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx = \operatorname{arctg}\frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta - m^2}.$$

25-мисол. Ушбу

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx \quad (\alpha \geqslant 0)$$

Агар

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \dfrac{\sin \beta x}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ \beta, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Демак $f(x, \alpha)$ функция чекли $\alpha \geqslant 0$ ва $0 \leqslant x < +\infty$ ларда узлуксиз бўлади. Худди 19-мисолдагидек, қаралаётган интегралнинг текис яқинлашувчилиги кўрсатилади.

Энди

$$I_\beta = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx$$

интегрални қараймиз.

$$|e^{-\alpha x}\cos\beta x| \leqslant e^{-\alpha x}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, $I_\beta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx$ интеграл текис яқинлашувчи. У холда, 10-теоремадан фойдаланиб, топамиз:

$$I_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

$I(\alpha, 0) = 0$ бўлгани учун $C(\alpha) = 0$ бўлиб, $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ бўлади. Берилган интеграл текис яқинлашувчи, интеграл остидаги функция эса узлуксиз бўлгани учун 8-теоремадан

$$\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to+0} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\, dx$$

эканлигини ва

$$\lim_{\alpha\to+0} \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$$

эканини хисобга олсак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$$

га эга бўламиз.

Одатда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\, dx$ интеграл *Дирихле интеграли* дейилади.

26-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx \quad (\alpha,\ \beta>0)$$

интегрални ҳисобланг:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx\right\}$$

муносабатдан ва Дирихле интегралининг қийматидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{агар } \beta<\alpha \text{ бўлса,}\\ \frac{\pi}{4}, & \text{агар } \alpha=\beta \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } \beta>\alpha \text{ бўлса.}\end{cases}$$

27-мисол. Ушбу

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x^2}dx$$

интегралга бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб топамиз:

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\left\{[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_0^{+\infty}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{(\beta-\alpha)\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx\right\}=$$

$$\frac{(\beta-\alpha)}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx+\frac{(\alpha+\beta)}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx=$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\beta, \text{ агар } \beta\leqslant\alpha \text{ бўлса,}\\ \frac{\pi}{2}\alpha, \text{ агар } \beta\geqslant\alpha \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Демак,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\beta, \text{ агар } \beta\leqslant\alpha \text{ бўлса,}\\ \frac{\pi}{2}\alpha, \text{ агар } \beta\geqslant\alpha \text{ бўлса.}\end{cases}$$

28- мисол. Ушбу

$$I(a, b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx \ (a>0, \ b>0)$$

интегрални ҳисобланг:

$$I(a, b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx+(a-b)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx.$$

$I_1(a, b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx$ интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$I_1(a, b)=(e^{-ax}-e^{-bx})\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}dx=$$

$$=b\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx-a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}dx+(b-a).$$

$$I(a, b)=a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx-b\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx+b\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx-$$

$$a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}dx+(b-a)=a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx+(b-a).$$

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ Фруллани интеграли бўлиб, у $\ln\frac{a}{b}$ га тенг.

Демак,

$$I(a, b)=(b-a)+a\ln\frac{a}{b}.$$

29- мисол. Ушбу

$$I(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

интегрални ҳисобланг.

$a<1$ да $x=0$ махсус нуқта бўлади.

$$I(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\int\limits_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=$$
$$=I_1(a)+I_2(a).$$

$\int\limits_0^1 x^{a-1}dx$ интеграл $a>0$ да яқинлашувчи, $a\leqslant 0$ да узоқлашувчи, $0<x<1$ да

$$\frac{1}{2}x^{a-1}<\frac{x^{a-1}}{1+x}<x^{a-1}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$I_1(a)=\int\limits_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

интеграл $a>0$ да яқинлашувчи, $a\leqslant 0$ да узоқлашувчи бўлади.

$x\geqslant 1$ да эса

$$\frac{1}{2}x^{a-2}\leqslant\frac{x^{a-1}}{1+x}<x^{a-2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$I_2(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

интеграл $a<1$ да яқинлашувчи, $a\geq 1$ да узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган интеграл $0<a<1$ да яқинлашувчи.

Энди $I(a)$ интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $0<x<1$ да

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{a+k-1}$$

бўлиб, бу қатор $[a_0, b_0]$ $(0<a_0\leqslant x\leqslant b_0<1)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Бу қаторнинг хусусий йиғиндиси

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{a+k-1}=\frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x}$$

бўлиб, $\forall n\in N$ ва $\forall x\in(0,1)$ лар учун

$$\frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x}<x^{a-1}$$

тенгсизлик ўринлидир.

$0<a<1$ ларда $\int\limits_0^1 x^{a-1}dx$ интеграл яқинлашувчи бўлгани учун, Вейерштрасс аломатига кўра, $\int\limits_0^1 s_n(x)dx$ интеграл текис яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}s_n(x)dx=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

бўлиб, бу тенгликдан

$$I_1(a)=\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1(-1)^k x^{a+k-1}dx\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1(-1)^k x^{a+k-1}dx\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}$$

эканини топамиз.

Шундай қилиб,

$$I_1(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Агар

$$I_2(a)=\int_1^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

интегралда $x=\frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I_2(a)=\int_0^1\frac{t^{-a}}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^{(1-a)-1}}{1+t}dt$$

бўлади. Худди юқоридагига ўхшаш

$$I_2(a)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$I(a)=I_1(a)+I_2(a)=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right).$$

Энди $f(x)=\cos ax$ $(0<a<1)$ функцияни Фурье қаторига ёямиз

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=2\frac{\sin a\pi}{a\pi}\quad a_n=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(a+n)x+\cos(a-n)x)dx=(-1)^n\cdot$$

$$\cdot\frac{2a}{a^2-n^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{\pi};\quad b_n=0$$

($\cos ax$ — жуфт функция бўлгани учун)

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\cos kx.$$

Бу тенгликда $x=0$ десак,

$$1=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2},$$

бўлиб,

$$1=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}$$

яъни

$$1=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\right],$$

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}$$

ёки

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)$$

бўлади. Бундан эса

$$I(a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

экани келиб чиқади.

Демак,

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}\quad(0<a<1)$$

30- мисол. Ушбу

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{A_1\cos a_1x+A_2\cos a_2x+\dots+A_k\cos a_kx}{x}dx$$

$$(a_1,\ a_2,\dots,\ a_k>0,\ A_1+A_2+\dots+A_k=0)$$

интегрални ҳисобланг.

$A_1+A_2+\dots+A_k=0$ муносабатдан A_k ни топамиз. Натижада

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{A_1\cos a_1x-A_1\cos a_kx+\dots+A_{k-1}\cos a_{k-1}x-A_{k-1}\cos a_kx}{x}dx$$

бўлиб,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x - A_1 \cos a_k x}{x} dx$$

интегралга Фруллани формуласини қўллаб, топамиз:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{A_1 \cos a_1 x - A_1 \cos a_k x}{x} dx = -A_1 \ln \frac{a_1}{a_k} = -A_1 \ln a_1 + A_1 \ln a_k.$$

Худди шунга ўхшаш қолган интегралларни ҳисоблаб,

$$I = -(A_1 \ln a_1 + A_2 \ln a_2 + \ldots + A_k \ln a_k)$$

га эга бўламиз.

31-мисол. Ушбу

$$I_1 = \int_{0}^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ ва } I_2 = \int_{0}^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

Френель интегралларини ҳисобланг.

$x^2 = t$ алмаштириш натижасида бу интеграллар қуйидаги кўринишга келади:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-tx^2} dx$$

тенгликни ҳисобга олиб, қуйидаги интегралга келамиз:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-kt} dt \int_{0}^{+\infty} e^{-tx^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{+\infty} e^{-(k+x^2)t} \sin t \, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+(k^2+x^2)^2}.$$

Охирги муносабатда $k \to 0$ да лимитга ўтамиз (25- мисолга қаранг).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

I_2 нинг қиймати ҳам I_1 га тенг бўлади.

32- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x^2 = t$ алмаштириш бажариш натижасида у қуйидаги $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ кўринишга келади. Бу эса Дирихле интеграли бўлиб, унинг қиймати $\frac{\pi}{4}$ га тенг. Демак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

33- мисол. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a>0,\ b>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Дирихле интегралидан фойдаланамиз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (y>0).$$

Энди $\int_a^b \frac{\sin xu}{x} dy = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ эканини ҳисобга олсак у ҳолда

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin xu}{x} dy = \int_a^b dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dy = \frac{\pi}{2}(b-a) =$$

$=\frac{\pi}{2}(b-a)$ бўлади. (Интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкинлигини асослашни ўқувчига ҳавола қиламиз).

Мисол ва масалалар

36. Параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли учун текис яқинлашиш тушунчасини келтиринг.

37. Параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли учун:

а) Коши критерияси;

б) Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш ҳақидаги теорема;

в) Интегралнинг параметр бўйича узлуксизлиги ҳақидаги теорема;

г) Интегрални параметр бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теорема;

д) Интегрални параметр бўйича интеграллаш ҳақидаги теоремаларни келтиринг.

Қуйидаги интегралларни текис яқинлашишга текширинг:

38. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x}\, dx,\ 0 \leqslant \alpha < +\infty.$

39. $\int\limits_{1}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx,\ (a \leqslant \alpha \leqslant b).$

40. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx,\ \alpha \in R.$

41. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty,\ p > 0$ тайинланган$).$

42. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}\ \ (0 \leqslant \alpha < +\infty).$

43. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx,\ \alpha \in R.$

44. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy,\ x \in R.$

45. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, \ (p \geqslant 0).$

46. $\int\limits_{0}^{1} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \ (p > 0, \ q > -1).$

47. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \ (0 \leqslant n < +\infty).$

48. $\int\limits_{0}^{1} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}, \ 0 < n < 2.$

49. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \ (|\alpha| < \frac{1}{2}).$

50. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx, \ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$

51. $\lim\limits_{\alpha \to +0} \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ муносабатда лимит белгисини интеграл остига киритиш мумкинми?

52. $f(x)$ функция $(0, +\infty)$ да абсолют интегралланувчи бўлса,

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

эканини исботланг.

53. $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$ ни топинг.

54. $F(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ функциянинг узлуксизлигини исботланг.

55. $f(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ функциянинг $0 < \alpha < 1$ да узлуксизлигини исботланг.

56. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}dx$ функцияни узлуксизликка текширинг ва графигини чизинг.

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг:

57. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^{\alpha}}, \ (\alpha>2).$

58. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx, \ (0<\alpha<2).$

59. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx, \ (0<\alpha<1).$

60. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x^2}dx, \ \alpha\in R.$

61. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ функция $-\infty<\alpha<+\infty$ да узлуксиз ва дифференциалланувчилигини исботланг.

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

62. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx, \ (a>0, \ b>0).$

63. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx, \ (a>0, \ b>0).$

64. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx. \ (\alpha>0, \ \beta>0).$

65. $\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx, \ (\alpha>0, \ \beta>0).$

66. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx, \ (\alpha>0, \ \beta>0).$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx, \ (|\alpha| \leqslant 1).$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ (|\alpha| \leqslant 1).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x \cdot \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx, \ (a>0, \ ac-b^2>0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\, dx, \ (a>0).$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx, \ (a>0).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx, \ (\alpha>0, \ \beta>0).$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\, dx, \ (a>0).$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\, dx, \ (a>0).$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\, dx, \ (n \in N).$$

80. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx.$

81. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2} dx.$

82. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x} dx.$

83. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx.$

84. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$

85. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x}{x} dx.$

86. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin\alpha x \cdot \sin\beta x}{x^2} dx, \ (k \geqslant 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0).$

87. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1 + x^2} dx.$

88. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin\alpha x}{1 + x^2} dx.$

89. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2} dx.$

90. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1 + x^2)^2} dx.$

91. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \ (a \neq 0).$

92. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax \, dx.$

93. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax\, dx.$

94. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 - x^2}\, dx.$

95. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2 - x^2}\, dx.$

96. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x}\, dx \ (a > 0,\ b > 0).$

97. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{a \cos x} \sin(a \sin x) \frac{dx}{x}.$

98. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax} \cos bx - e^{-a_1 x} \cos b_1 x}{x}\, dx.\ (a,\ a_1 > 0).$

99. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx.$

100. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx.$

101. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} x\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + a^2} \ (a > 0)$

тенгликни исботланг.

102. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{1 + x^2}\, dx = \int\limits_{k}^{+\infty} \frac{\sin(x - k)}{x}\, dx \ (k > 0).$ тенгликни исботланг.

103. $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ва α, β, γ лар ичида γ катта бўлса,

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{агар } \alpha < \beta + \gamma \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{\gamma}, & \text{агар } \alpha = \beta + \gamma \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \alpha > \beta + \gamma \text{ бўлса} \end{cases}$$

тенгликни исботланг.

104. Агар $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ лар мусбат бўлиб, $\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ бўлса,

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} \cdot \frac{\sin\alpha_1 x}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$$

тенгликни исботланг.

105. $\int\limits_0^{+\infty} (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} |a-b|$

эканини исботланг.

5-§. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ

I. Бета функция (I тур Эйлер интеграли). Ушбу $B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad (a>0, \quad b>0)$ интеграл *бета функция* ёки I *тур Эйлер интеграли* деб аталади.

Бета функциянинг хоссалари:

1. $B(a, b) = B(b, a)$.
2. $B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \ (b>1)$.

2'. $B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a+1} B(a, 1), \ n \in N$.

3. $B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1)$.
4. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

II. Гамма функция (II тур Эйлер интеграли). Ушбу

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \ (a>0)$$

интеграл *гамма функция* ёки II *тур Эйлер интеграли* деб аталади.

Гамма функциянинг хоссалари:

1. $\Gamma(a) = \lim\limits_{n\to\infty} n^a \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$.
2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

2′. $\Gamma(n+1)=n!$.

3. $\Gamma(a)$ $(0, +\infty)$ да узлуксиз ва барча тартибдаги узлуксиз хосилаларга эга ва

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^{n}dx \ (n=1,2,\ldots).$$

4. $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

5. $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$.

Хусусан, $a=\frac{1}{2}$ да $(0<a<1)$.

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

6. $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ (Лежандр формуласи).

34- мисол. Ушбу

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}}dx$$

интегрални хисобланг.

$x^{2}=t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}).$$

Юқоридаги (5) муносабатдан фойдаланиб $I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ эканини топамиз. Демак,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

35- мисол. Ушбу

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{6}x\cos^{4}x\,dx$$

интегрални хисобланг.

$\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^3 (1 - \sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{5}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{5}{2}-1} t^{\frac{7}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \cdot \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{120} = \frac{3\pi}{512}.$$

36- м и с о л. Ушбу

$$I = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in N)$$

интегрални ҳисобланг.

$x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

(Бу ерда $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ учун Лежандр формуласидан фойдаландик).

37- м и с о л. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} dx$$

$$(\alpha,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma,\ p,\ q > 0)$$

интегрални Эйлер интеграллари орқали ифодаланг.

$\frac{(\alpha + \gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=$$

$$=\frac{B(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}.$$

38-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}x\cdot\cos^{b-1}x\,dx\ \ (a>0,\ b>0).$$

интегрални Эйлер интеграллари орқали ифодаланг.

$\sin x=t$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$I=\int_0^1 t^{a-1}(1-t^2)^{\frac{b}{2}-1}dt.$$

Бу интегралда эса $t^2=y$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{b}{2}-1}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{a}{2}-1}\cdot$$

$$(1-y)^{\frac{b}{2}-1}dy=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

бўлади.

Хусусан, агар $b=1$ бўлса,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\text{ бўлади.}$$

Агар $a=1+\alpha$, $b=1-\alpha(|\alpha|<1)$ бўлса, у ҳолда

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}x\cdot\cos^{b-1}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cdot\cos^{-\alpha}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^{\alpha}xdx$$

бўлиб,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\alpha} x dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$$

бўлади.

Демак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{\alpha} x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$$

39- мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} x^{q-1}}{(1+x)\ln x} dx \qquad (0<p<1,). \quad 0\leqslant q<1$$

интегрални ҳисобланг.

$$I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)\ln x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)\ln x} dx.$$

$$I^{(1)}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)\ln x} dx,$$

$$I^{(2)}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)\ln x} dx$$

бўлсин, у ҳолда:

$$(I^1(p, q))'_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = B(p, 1-p).$$

Худди шунга ўхшаш

$$(I^2(p, q))'_q = \int_0^{+\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = B(q, 1-q)$$

бўлиб,

$$I(p, q)=\pi\int\frac{dp}{\sin\pi p}-\pi\int\frac{dq}{\sin\pi q}+c=$$

$$=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|+C$$ га эга бўламиз.

$p=q$ учун $I(p, q)=0$ муносабатдан $C=0$ экани келиб чиқади.

Демак,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right| \quad (0<p<1,\ 0<q<1).$$

40- мисол. Ушбу

$$\rho^4=\sin^3\varphi\cos\varphi$$

эгри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг.

Маълумки, изланаётган юза

$$s=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$ бўлиб,

берилган чизиқ биринчи ва учинчи чоракларда иккита япроқни ифодалайди. Шунинг учун

$$s=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\cdot\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi$$

изланаётган юзани аниқлайди.

38- мисолдан фойдалансак,

$$s=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\cdot d\varphi=\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(2)}=\frac{1}{8}\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{3}{4})=$$

$=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв.бирлик) га эга бўламиз.

Демак,

$$s=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Мисол ва масалалар

Эйлер интегралларидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

106. $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$

107. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \ (a>0).$

108. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}.$

109. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}. \ (n>1).$

110. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

111. $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}.$

112. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1+x^2}\,dx \ (0<n<1).$

113. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$

114. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}x}{(1-k\cos x)^n}\,dx \ (1<k<0, \ n>0).$

115. $\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx, \ (0<a<1).$

116. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a\ln^2 x}{1+x^2}\,dx \ (a^2<1).$

117. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,dx \ (\alpha>0, \ \beta>0).$

118. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx.$

119. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\nu x}dx\ (\nu>\mu>0).$

120. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)dx.$

121. $x^n+y^n=a^n$ $(x>0,\ y>0,\ n>0)$ эгри чизиқ билан чегараланган юзани ҳисобланг.

122. $x^n+y^n+z^n=a^n$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ сирт билан чегараланган ҳажмини ҳисобланг.

Қуйидаги тенгликларни исботланг:

123. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$

124. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}.$

125. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\cos ax\,dx=\frac{1}{a^p}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}\ (0<p<1).$

126. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\sin ax\,dx=\frac{1}{a^p}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}\ (-1<p<1).$

127. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{(x^2+ax+b)^p}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}\,(a+2\sqrt{b})}\cdot\frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p)}$

$(b>0,\ a+2\sqrt{b}>0,\ p>\frac{1}{2}).$

128. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^ndx}{\sqrt{1-x^{2n}}}=\frac{\pi}{2n}\ (n\in N).$

129. $\int\limits_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\sqrt{3}\int\limits_1^{\infty}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}dx.$

130. $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\dots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na)$

$(n\in N).$

XVII боб

ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. ИККИ ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Икки каррали интеграл таърифлари. Бирор чегараланган $(D)\subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. Бу соҳани бўлакларга ажратувчи чекли сондаги l чизиқлар системаси $\{l{:}l\subset(D)\}$ (D) соҳанинг *бўлиниши* деб аталади ва у $P=\{l{:}l\subset(D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлакларга ажратувчи ҳар бир l чизиқ, P бўлинишнинг бўлувчи чизиғи, (D) соҳанинг бўлаги эса P бўлинишнинг бўлаги дейилади. P бўлиниш бўлаклари диаметрининг энг каттаси унинг *диаметри* деб аталади ва у λ_p каби белгиланади. (D) соҳанинг бўлинишлар тўпламини $\mathscr{P}=\{p\}$ орқали белгилаймиз.

$f(x, y)$ функция $(D)\subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу соҳанинг $P\in\mathscr{P}$ бўлиниши ва бу бўлинишларнинг ҳар бир квадратланувчи (D_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$ бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб,

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)D_k \tag{1}$$

йиғиндини тузайлик, бунда D_k — (D_k) соҳанинг юзи.

Одатда (1) $f(x, y)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* ёки *Риман йиғиндиси* деб аталади.

1-таъриф. *$\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta>0$ топилсаки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p<\delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлакдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқталар учун*

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда функция интегралланувчи ва I сонга $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интеграли (Риман интеграли) дейилади ва у

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD \qquad \Big(\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy\Big)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)D_k$$

$f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ сохада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бирор P бўлинишини қарайлик.

$$m_k = \inf_{(x, y) \in D_k} \{f(x, y)\}, \quad M_k = \sup_{(x, y) \in (D_k)} \{f(x, y)\}$$

лар ёрдамида

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k D_k, \qquad S = \sum_{k=1}^{n} M_k D_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Одатда бу йиғиндилар мос равишда Дарбунинг *қуйи* ҳамда *юқори* йиғиндилари деб аталади. (D) соҳанинг ҳар бир бўлинишига нисбатан $\{s\}, \{S\}$ тўпламларнинг чегараланганлигини ва $s \leqslant \sigma \leqslant S$ муносабат ўринлилигини кўриш қийин эмас.

2- таъриф.

$$\sup\{s\} = \underline{I}, \qquad \inf\{S\} = \overline{I}$$

миқдорлар мос равишда $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги қуйи икки каррали ҳамда юқори икки каррали интеграли деб аталади.

3- таъриф. *Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи, уларнинг умумий қиймати*

$$I = \underline{I} = \overline{I}$$

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги икки каррали интеграли (Риман интеграли) дейилади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \qquad \left(\iint_{(D)} f(x, y) dx dy\right)$$

каби белгиланади.

2. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функциялар синфи.

1- теорема. **$f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлинишга нисбатан Дарбу йиғиндилари**

$$S(f) - s(f) < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

2- теорема. **Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ $(D)\subset R^2$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.**

3- теорема. **Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги ноль юзали чизиқларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.**

Икки каррали интеграллар ёрдамида текис шаклнинг юзи, жисмнинг ҳажмларини топиш мумкин. Интеграл таърифидан бевосита (D) шаклнинг юзи

$$D=\iint\limits_{(D)} dxdy$$

бўлиши келиб чиқади.

1- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} xydD, \quad (D)=\{(x, y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

интегрални 1- таъриф ёрдамида ҳисобланг.

Равшанки, $f(x, y)=xy$ функция (D) да узлуксиз, демак, 2- теоремага кўра, у (D) да интегралланувчи бўлади. (D) соҳани $x=\frac{i}{n}$, $y=\frac{j}{n}$ $(i, j=\overline{1, n-1})$ чизиқлар ёрдамида бўлакларга ажратамиз ва ҳар бир (D_{ij}) да $(\xi_i, \eta_i)=\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ деб қараймиз. У ҳолда

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_j)D_{ij}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i\sum_{j=0}^{n-1} j=$$

$$=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

бўлади.

Бундан эса $n\to\infty$ да $\lambda\to 0$ бўлса, $\sigma\to\frac{1}{4}$.

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} xydD=\frac{1}{4}.$$

2- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} xydD$$

интегрални 3- таъриф ёрдамида ҳисобланг, бунда $D=\{(x, y)\in R^2:$
$$\left.\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1\leqslant y\leqslant 3\end{matrix}\right\}$$

(D) соҳани $x=1+\frac{i}{n}$, $y=1+\frac{2i}{n}$ $(i=1,\ n-1)$ чизиқлар ёрдамида бўлакларга ажратамиз.

$$(D_{ij})=\left\{(x, y)\in R^2: \frac{n+i-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{n+i}{n},\right.$$
$$\left.\frac{n+2(j-1)}{n}\leqslant y\leqslant\frac{n+2j}{n}\right\}$$
$$D_{ij}=\frac{1}{n^2};$$
$$M_{ij}=\sup_{(x, y)\in(D_{ij})}(x\cdot y)=\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{2j}{n}\right);$$
$$m_{ij}=\inf_{(x, y)\in(D_{ij})}(x\cdot y)=\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right);$$
$$S(f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{2j}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}=$$
$$=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j}{n}\right)=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[n+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{2(2n+1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)=$$
$$=\frac{2(2n+1)}{n^2}\left(n+\frac{n(n+1)}{2n}\right)=\frac{(2n+1)(3n+1)}{n^2};$$
$$s(f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right)=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\left(n+\frac{2n(n-1)}{2n}\right)=$$
$$=\frac{2}{n^2}(2n-1)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)=\frac{2}{n^2}(2n-1)\left(n+\frac{n(n-1)}{2}\right)=$$
$$=\frac{(2n-1)(3n-1)}{n^2};$$
$$\sup\{s(f)\}=6,$$
$$\inf\{S(f)\}=6$$

эканлигидан

$$\iint\limits_{(D)} xy dD = 6$$

муносабатга эга бўламиз.

3. Икки каррали интегралнинг хоссалари. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш.

1°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг (D) соҳага тегишли бўлган ноль юзали L чизиқдаги $(L \subset (D))$ қийматларинигина ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) dD = \iint\limits_{(D)} F(x, y) dD$$

бўлади.

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа ноль юзали L чизиқ билан (D_1) ва (D_2) соҳаларга ажралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади ва

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) dD = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y) dD_1 + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y) dD_2$$

муносабат ўринли. (Бу хоссанинг тескариси ҳам ўринлидир).

3°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x, y)$ $(c - \mathrm{const})$ ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint\limits_{(D)} c \cdot f(x, y) dD = c \iint\limits_{(D)} f(x, y) dD$$

формула ўринли.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint\limits_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint\limits_{(D)} g(x, y) dD$$

формула ўринли.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) dD \geqslant 0$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left|\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD\right| \leqslant \iint\limits_{(D)} |f(x, y)|dD$$

тенгсизлик ўринли.

7°. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. **Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас сон**

$$\mu\ (m \leqslant \mu \leqslant M,\ M = \sup_{(x, y)\in(D)} \{f(x, y)\},\ m = \inf_{(x, y)\in(D)} \{f(x, y)\})$$

мавжудки,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD = \mu D$$

формула ўринли, бу ерда D (D) **соҳанинг юзи.**

Натижа. **Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,**

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD = f(a, b)D$$

бўлади.

8°. Ўрта қиймат ҳақидаги умумлашган теорема. **Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз ишорасини сақласа ва $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,**

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)g(x, y)dD = f(a, b)\iint\limits_{(D)} g(x, y)dD$$

бўлади.

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функция (D) соҳанинг юзага эга бўлган ҳар қандай (d) қисмида интегралланувчи ва

$$\iint\limits_{(d)} f(x, y)dD$$

интеграл d га боғлиқ бўлади.

Одатда бу

$$\Phi((d)) = \iint\limits_{(d)} f(x, y)dD$$

функция *соҳанинг функцияси* деб аталади. (D) соҳада бирор (x_0, y_0) нуқтани олайлик. (d) эса шу нуқтани ўз ичига олган $(d)\subset(D)$ соҳа бўлсин.

Агар $\lambda\to0$ да $\frac{\Phi((d))}{d}$ нисбатнинг лимити $\lim\limits_{\lambda\to0}\frac{\Phi((d))}{d}$ мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги *соҳа бўйича ҳосиласи* деб аталади. (Бу ерда d — (d) соҳанинг юзи, λ эса унинг диаметри).

Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи $f(x_0, y_0)$ га тенг бўлади.

4-теорема. **$f(x, y)$ функция $D=\{(x, y)\in R^2: a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин.**

Агар $x\in[a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y)dD=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx$$

ўринли.

5-теорема. **$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x\in[a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_c^d f(x, y)dy$ интеграл мавжуд бўлса,**

$y\in[c, d]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_a^b f(x, y)dx$ **интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда**

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx,\quad \int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy$$

интеграллар ҳам мавжуд ва

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)dy \right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)dx \right] dy$$

формула ўринли.

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\},$$

$$(\varphi_i(x) \in C[a, b],\ i = 1, 2)$$

ринишда бўлсин.

6-теорема. **$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида**

$$I(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dD = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

ринли.

Қуйидаги 3—5 мисолларда $f(x, y)$ функция 6-теорема шартларини қаноатлантиради, деб қаралади.

3-мисол. Ушбу

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9,\ x^2 + (y+4)^2 > 25\}$$

ринишда бўлса,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy$$

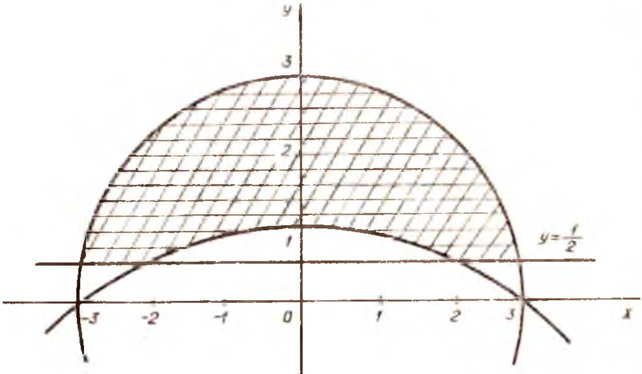
интегрални такрорий интегралга келтиринг ва интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

6-теоремадан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{\sqrt{25 - x^2} - 4}^{\sqrt{9 - x^2}} f(x, y)dy.$$

Интеграллаш тартибини ўзгартириш учун (D) соҳани қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$(D)=(D_1)\bigcup(D_2)\bigcup(D_3),\ \text{(2- чизмага қаранг)}$$



2- чизма.

$$(D_1)=\{(x,y)\in R^2:1\leqslant y\leqslant 3,\ -\sqrt{9-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{9-y^2}\},$$

$$(D_2)=\{(x,y)\in R^2:0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$-\sqrt{9-y^2}\leqslant x\leqslant-\sqrt{9-8y-y^2}\},$$

$$(D_3)=\{(x,y)\in R^2:0\leqslant y\leqslant 1,\ \sqrt{9-8y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{9-y^2}\}.$$

6- теоремадан ва икки каррали интеграл хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

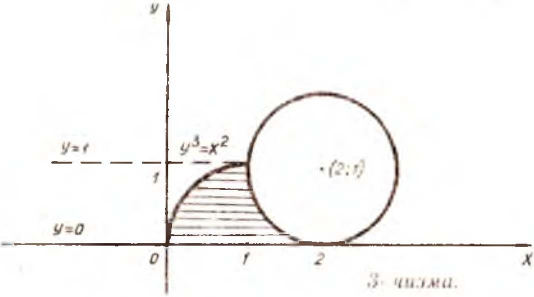
$$\iint\limits_{(D)}f(x,y)dD=\int\limits_1^3 dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)dx+$$

$$+\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{9-8y-y^2}}f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{9-8y-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)dx.$$

4- мисол. Ушбу

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^{2/3}}f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}}f(x,y)dy$$

интегралда интеграллаш тартибини ўзгартиринг. Қаралаётган соҳаларни чегаралаб турган эгри чизиқлар $y^3=x^2$ (Oy ўқига нисбатан симметрик кубик парабола) ва $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ (маркази (2, 1) нуктада радиуси 1 га тенг айлана) лардан иборатдир (3- чизма).



3- чизма.

Чизмадан кўринадики, y 0 дан 1 гача узгарганда x ўзгарувчи $x=y^{3/2}$ дан $x=2-\sqrt{2y-y^2}$ гача ўзгаради. Демак,

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx.$$

5- мисол. Агар

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2:|x|+|y|\leqslant 1\}$$

кўринишда бўлса,

$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD$ интегрални такрорий интегралга келтиринг ва интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

Интеграллаш соҳасини координата ўқларига нисбатан симметрик эканлигини кўриш қийин эмас (4- чизма).

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2:-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1+|x|\leqslant y\leqslant 1-|x|\}=$$

$$=\{(x,\ y)\in R^2:-1\leqslant y\leqslant 1,\ -1+|y|\leqslant x\leqslant 1-|y|\}.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD=\int_{-1}^{1} dx\int_{-1+|x|}^{1-|x|} f(x,y)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1} dy\int_{-1+|y|}^{1-|y|} f(x,y)dx$$

6- мисол. Ушбу

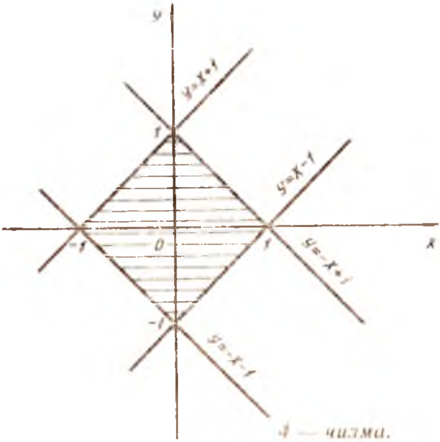
$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy$$

интегрални ҳисобланг. Бу ерда (D) томонлари $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$ бўлган параллелограмм.

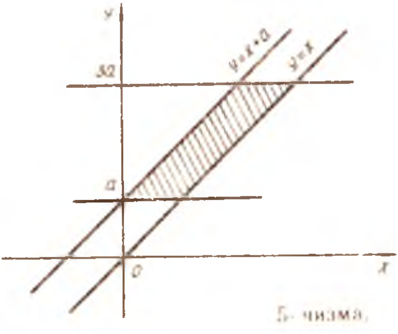
Чизмадан кўринадики, интегрални такрорий интегралга келтиришда, уни

$$\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$$

кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқдир (5- чизма).



4 — чизма.



5- чизма.

Демак,

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{a}^{3a}dy\int\limits_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx=$$

$$=\int\limits_{a}^{3a}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{(y-a)^3}{3}+y^3-y^2(y-a)\right]dy=\frac{81a^4}{12}-\frac{16a^4}{12}+$$

$$+\frac{27a^4}{3}-\frac{a^4}{12}-\frac{a^4}{3}=\frac{168}{12}a^4=14\,a^4$$

7- **мисол.** Ушбу

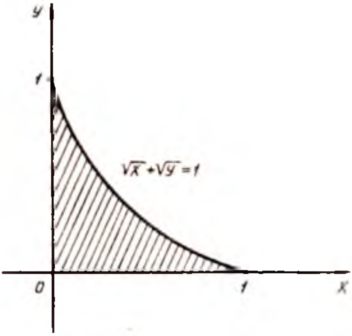
$$I=\iint\limits_{(D)}xydxdy$$

интегрални хисобланг. Бу ерда (D) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ парабола ва координата ўқлари билан чегараланган соҳа.

Чизмадан интегрални

$$\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$

кўринишда ҳисоблаш мақсадга мувофиқ эканлигини кўрамиз (6- чизма).



6- чизма.

Демак,

$$I=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{(1-\sqrt{x})^2}ydy=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x(1-\sqrt{x})^4dx=\frac{1}{280}.$$

4. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш.

Oxy ҳамда Ouv координаталар системасида мос равишда (D) ва (Δ) соҳаларни қарайлик. Бу соҳаларнинг чегаралари содда, бўлакли-силлиқ чизиқлардан иборат бўлсин.

$f(x,\ y)$ функция (D) соҳада берилган ва унинг чекли каррали интеграли

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)dxdy$$

мавжуд бўлсин. Бу интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,\ v) \\ y=\psi(u,\ v), \end{cases} \qquad (u,\ v)\in\Delta\in R^2. \tag{2}$$

(2) акслантириш қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. (Δ) ни (D) га ўзаро бир қийматли акслантиради.

2°. $\varphi(u,\ v)$, $\psi(u,\ v)$ функциялар (Δ) соҳада узлуксиз, барча хусусий ҳосилаларга эга ва бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз.

$f(x,\ y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (2) акслантириш 1° — 2° шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v))\,|I(u,\ v)|\,dudv \tag{3}$$

формула ўринли, бу ерда $I(u,\ v)=\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$

(2) системанинг Якобианидир.

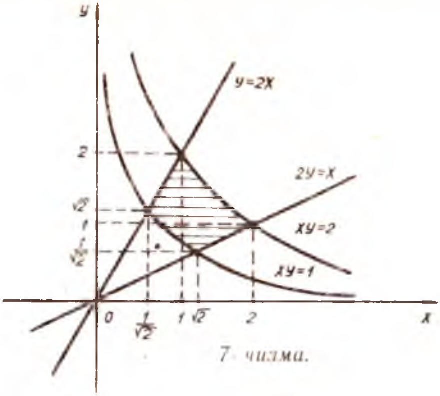
(3) формула *икки каррали интегралларда ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.*

8- мисол. Ушбу

$$I=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dxdy$$

интегрални ҳисобланг.

Бунда $(D)=\{(x,\ y)\in R^2{:}\,1\leqslant xy\leqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant 2y\leqslant 4x\}$ интеграллаш соҳасини чизмада ифодалаймиз (7- чизма).



7- чизма.

$$u = xy, \ v = \frac{y}{x}, \ x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \ y = \sqrt{uv}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада берилган соҳанинг образи

$$(\Delta) = \{(u, v) \in R^2 : 1 \leqslant u \leqslant 2, \ \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2\}$$

бўлиб, Якобиан эса

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

га тенг бўлади.

Демак,

$$I = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2) dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{u}{v} + uv\right) \frac{1}{2v} dudv =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^2 udu \int\limits_{1/2}^2 \left(\frac{1}{v^2} + 1\right) dv = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4}\right) udu = \frac{63}{16}.$$

9- мисол. Ушбу

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$$

интегралда қутб координаталари системасига ўтиб, уни такрорий интегралга келтиринг.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

алмаштириш натижасида топамиз:

$$I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho.$$

10- мисол. Ушбу

$$I = \iint\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

интегрални ҳисобланг.

9- мисолдан фойдаланган ҳолда, интеграллаш соҳаси ҳалқа эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$I = 2\pi \int_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho d\rho = 2\pi\left(\rho\cos\rho\Big|_{2\pi}^{\pi} + \int_\pi^{2\pi} \cos\rho d\rho\right) = -6\pi^2$$

11- мисол. Ушбу

$$I = \iint\limits_{(D)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{b}\right)^3\right] dxdy,$$

интегрални ҳисобланг. Бу ерда

$$(D) = \{(x, y) \gg R^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^3 \leqslant 1\}.$$

Қуйидаги

$$\frac{x}{a} = u^{2/3}, \quad \frac{y}{b} = v^{1/3}$$

алмаштиришни бажарамиз. Қаралаётган соҳанинг образи қуйидагича бў.

$$(\Delta) = \{(u, v) \in R^2 : u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u + v \leqslant 1\}.$$

бўлади. Якобиан эса:

$$I(u, v) = \frac{2ab}{9} u^{1/3} v^{-2/3}$$

бўлади.

$$I=\iint\limits_{(D)}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}-\left(\frac{y}{b}\right)^{3}\right)dxdy=\iint\limits_{(\Delta)}\frac{2ab}{9}(1-u-$$

$$-v)u^{-1/3}v^{-2/3}dudv=\frac{2ab}{9}\int\limits_{0}^{1}u^{-1/3}du\int\limits_{0}^{1-u}(1-u-$$

$$-v)v^{-2/3}dv=\frac{2}{9}ab\int\limits_{0}^{1}\frac{9}{4}(1-u)^{4/3}u^{-1/3}du=$$

$$=\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi ab.$$

12- мисол. Ушбу

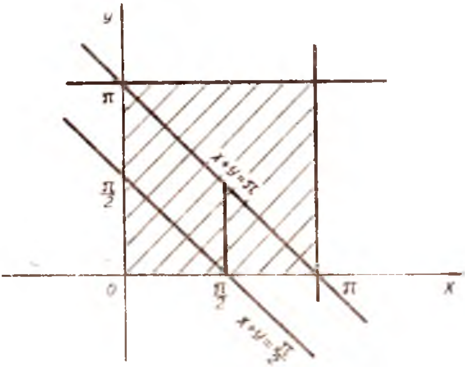
$$I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|dxdy$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функциянинг хоссасидан фойдаланиб, интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$I=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi-x}}|\cos(x+y)|dxdy.$$

Бу интегралда қаралаётган соҳани $x+y=\frac{\pi}{2}$ чизиқ ёрдамида икки бўлакка ажратамиз, уларнинг бирида $\cos(x+y)$ мусбат, иккинчисида эса манфий бўлади (8- чизма).



8- чизма.

Демак,

$$I=2\left(\int_{0}^{\pi/2}dx\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x}\cos(x+y)dy-\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{0}^{\pi-x}\cos(x+y)dy\right)=2\int_{0}^{\pi/2}(1-\sin x)dx+\int_{0}^{\pi/2}dx+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x dx=2\pi.$$

13- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dxdy$$

интеграл ҳисоблансин.

Интеграллаш соҳаси Oxy текисликда $y=x^2$ парабола ва $y=4$ тўғри чизиқ билан чегаралангандир. 3- теоремага кўра қаралаётган интеграл мавжуд бўлиб,

$$f(x,y)=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ агар } (x,y)\in D_1=\{(x,y):x^2\leqslant y<1+x^2\} \text{ бўлса,}\\ 1, \text{ агар } (x,y)\in D_2=\{(x,y):1+x^2\leqslant y<2+x^2\} \text{ бўлса,}\\ \sqrt{2}, \text{ агар } (x,y)\in D_3=\{(x,y):2+x^2\leqslant y<3+x^2\} \text{ бўлса,}\\ \sqrt{3}, \text{ агар } (x,y)\in D_4=\{(x,y):3+x^2\leqslant y<4\} \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади (9- чизма). Соҳа Oy ўқига нисбатан симметрикдир.

Демак,

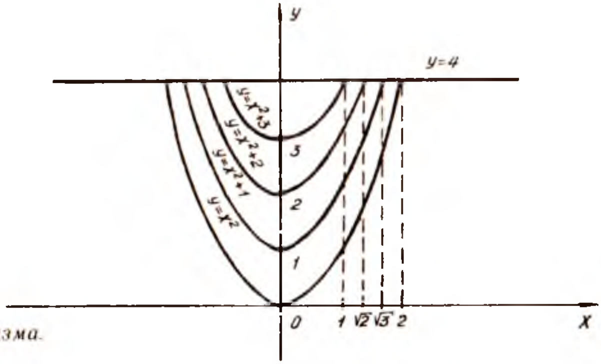
$$I=\iint\limits_{(D_2)}dxdy+\sqrt{2}\iint\limits_{(D_3)}dxdy+\sqrt{3}\iint\limits_{(D_4)}dxdy$$

$\iint\limits_{(D_1)}dxdy$ (D_1) соҳанинг юзасига тенглигини ҳисобга олиб, топамиз:

$$S_4=\iint\limits_{(D_4)}dxdy=2\int_{0}^{1}dx\int_{3+x^2}^{4}dy=\frac{4}{3},$$

$$S_3=\iint\limits_{(D_3)}dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{2+x^2}^{4}dy-S_4=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3},$$

$$S_2=\iint\limits_{(D_2)}dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx\int\limits_{1+x^2}^{4}dy-(S_3+S_4)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$



9- чизма.

Шундай қилиб,

$$I=S_2+\sqrt{2}\,S_3+\sqrt{3}\,S_4=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

14- мисол. Ушбу

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграллаш соҳаси координата ўқларига нисбатан симметрикдир. Иккинчи томондан, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)$ функцияси координата текислигининг ҳар бир чорагида жойлашган соҳада тенг қиймат қабул қилади (10- чизма). Демак,

$$I=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 4\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy.$$

$$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & \text{агар } x^2-y^2+2>0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x^2-y^2+2=0 \text{ бўлса},\\ -1, & \text{агар } x^2-y^2+2<0 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

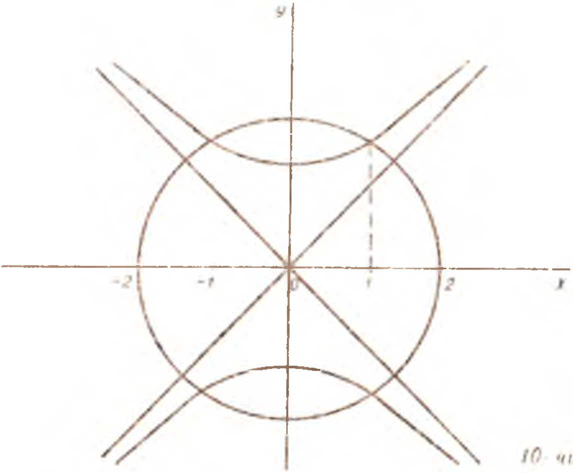
$$I=4\left(\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)=4\left(\int_0^1\left(2\sqrt{x^2-2}-\sqrt{4-x^2}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx\right)=4[(x\sqrt{x^2+2}+2\ln(x+$$

$$+\sqrt{x^2+2})]\Big|_0^1+\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_1^2=$$

$$=8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{4\pi}{3}$$



10- чизма.

15- мисол. Ушбу

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

лимитни топинг. Бу ерда $f(x, y)$ қаралаётган $D=\{(x, y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant\rho^2\}$ сохада узлуксиз.

$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$ интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Натижада:

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x, y)dxdy = \frac{1}{\pi\rho^2}f(\overline{x}, \overline{y})\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} dxdy =$$

$$\frac{1}{\pi\rho^2}f(\overline{x}, \overline{y})\pi\rho^2 = f(\overline{x}, \overline{y}), \quad (\overline{x}, \overline{y})\in(D).$$

$$\rho\to 0 \text{ да } x\to 0, \ y\to 0.$$

$f(x, y)$ функция (D) да узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x, y)dxdy = \lim_{\rho\to 0}f(\overline{x}, \overline{y}) = f(0, 0)$$

экани келиб чиқади.

16- мисол. Ушбу

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x>0, \ y>0)$$

чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

$x = a\rho\cos^3\varphi$, $y = b\rho\sin^3\varphi$ $(\rho\geqslant 0)$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \text{ да } \rho = 1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4 \text{ да } \rho = 8,$$

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ да $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ да $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ бўлиб, $I(\rho, \varphi) = 3ab\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган юза қуйидагига тенг:

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy = 3ab\int_1^8 \rho d\rho \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{189}{16}ab\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_{\pi}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right)$$

(юз бир.).

(Юқорида $\sin 4\varphi = \frac{4\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2}$ формуладан фойдаланилди).

(V) жисм юқоридан $z = f(x, y)$ сирт, ён томондан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт ҳамда қуйидан Oxy текисликдаги (D) соҳа билан чегараланган бўлсин. (V) жисмнинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интеграли орқали қуйидагича топилади:

$$v = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy.$$

17- мисол. Ушбу

$$z = c\sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) \left(k \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k + 1,\ k \in N\right)$$

ва $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

$V = \iint\limits_{(D)} |z(x, y)|dxdy$ интегрални ҳисоблаймиз. Бунда

$(D) = \{(x,\ y) \in R^2\colon\ k \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant k + 1\}$ $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ алмаштиришни бажарамиз.

$z = \left|c\sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right)\right|$ функциянинг жуфтлигини, қаралаётган соҳанинг координата ўқларига нисбатан симметриклигини ҳисобга олсак, у ҳолда:

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} \rho abc|\sin \pi\rho^2|a\rho = 4abc \times$$

$$\times \frac{\pi}{2}\int\limits_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} \rho|\sin \pi\rho^2|d\rho = 2\pi abc\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}(\cos\pi r^2)\Big|_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} =$$

$$= abc(-1)^{k+1}(\cos(k+1)\pi - \cos k\pi) =$$

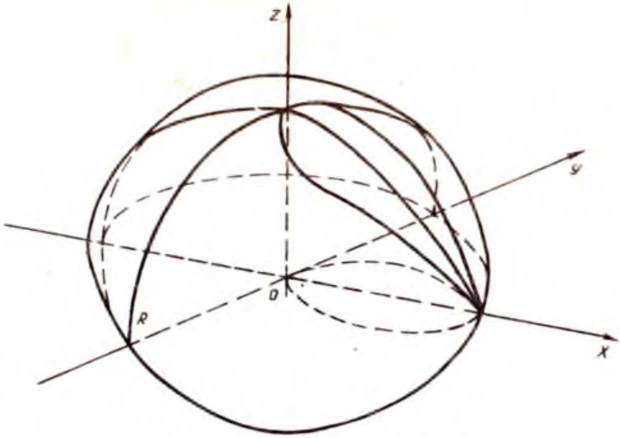
$$2abc(-1)^{k+2}\cos k\pi = 2abc$$

бўлади.

18- мисол. Ушбу $x^2 + y^2 = Rx$ цилиндр билан $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферадан ажратилган жисм ҳажмини топинг.

Интеграллаш соҳаси симметриклигини ҳисобга олган ҳолда топамиз:

$V = 4\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, бу ерда (D) Oxy текислигининг биринчи чорагида жойлашган $x = 0$ ва $x^2 + y^2 = Rx$ чизиқлар билан чегараланган ярим доирадир (11- чизма).



11- чизма.

Демак,

$$V=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy=\frac{4}{2}\int_0^R[(R^2-x^2)\cdot$$

$$\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}+\frac{4}{2}\sqrt{R}(R-x)\sqrt{x}\Big]dx=\frac{\pi R^3}{3}-$$

$$-\frac{\sqrt{R}}{3}\left(2R^2\sqrt{R}\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{8}{15}R^3=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3.$$

19- мисол. Ушбу $z^2=xy$, $xy=1$, $xy=4$, $y^2=x$, $y^2=3x$, $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

Жисм қуйидан $Oxy(z=0)$ текислик билан, юқоридан эса $z=\sqrt{xy}$ конус сирти билан қопланган. Ён томондан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган гиперполик ($xy=c_1$), параболик ($y^2=c_2x$) цилиндрлар билан чегаралангандир.

Ўзгарувчиларни $xy=u$, $y^2=vx$ алмаштириш натижасида топамиз:

$$I(u,v)=\frac{1}{3v},\ (\Delta)=\{(u,v)\in R^2: u\in[1,4|v\in[1,3]\}.$$

Демак,

$$V=\iint\limits_{(D)}\sqrt{x}\,y\ \ dxdy=\iint\limits_{(\Delta)}|I(u,v)|\sqrt{u}\,dudv=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{4}\sqrt{u}\,du\int\limits_{1}^{3}\frac{dv}{v}=$$

$$=\frac{19}{4}\ln 3.$$

Биз аник интеграл ёрдамида баъзи бир лимитларни хисоблашни кўрган эдик. Каррали интеграллар ёрдамида ҳам бу масалани ҳал этиш мумкин.

20- мисол. $f(x,y)$ функция

$$(D)=\{(x,y)\in R^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

соҳада интегралланувчи бўлса, икки каррали интеграл таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{n^2}\left[f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n},\frac{k}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n},\frac{k}{n}\right)\right]\right\}$$

кўпайтманинг $n\to\infty$ даги лимитини топинг. Бу ерда $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{n^2}\left[f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n},\frac{k}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n},\frac{k}{n}\right)\right]\right\}=\prod\nolimits_n$$

белгилашни киритамиз.

$x\leqslant\frac{1}{2}$ лар учун $|\ln(1+x)-x|\leqslant x^2$ тенгсизликдан фойдалансак,

$$\left|\ln\prod\nolimits_n-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]^2$$

бўлади.

$$\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]^2<\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}n\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]^2$$

эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\left|\ln\prod\nolimits_n-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}n\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} n\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right]^2=0$$

муносабатдан

$$\lim_{n\to\infty}\ln\prod{}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)$$

га эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода $f(x,y)$ функция учун (D) соҳада қаралаётган бўлинишга нисбатан интеграл йиғинди эканини кўриш қийин эмас. $\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy$ интеграл мавжудлигидан

$$\lim_{n\to\infty}\prod{}_n=e^{\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy}$$

бўлади.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{n^2}\left[f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n},\frac{k}{n}\right)+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+f\left(\frac{n}{n},\frac{k}{n}\right)\right]\right\}=e^{\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

8—10- мисолларда r ва φ қутб координаталаридир.

1. $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{x}^{2x}f(x,y)dy.$
2. $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy.$
3. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy.$
4. $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$
5. $\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy.$
6. $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{0}^{\ln x}f(x,y)dy.$
7. $\int\limits_{0}^{2\pi}dx\int\limits_{0}^{\sin x}f(x,y)dy.$
8. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{a\cos\varphi}f(\varphi,r)dr\ (a>0).$

9. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)dr \ (a>0).$ **10.** $\int\limits_0^{a} d\varphi \int\limits_0^{\varphi} f(\varphi,r)dr.$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

11. $\iint\limits_{(D)} (x^3y + xy^3)dxdy.$

$(D)=\{(x,y)\in R^2 : x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 4x^2-3y^2\leqslant 4,\ 4y^2-3x^2\leqslant$ $\leqslant 4\}.$

12. $\iint\limits_{(D)} \frac{x^3-3xy^2+2y^3}{xy}dxdy.$

(D) соҳа $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{4}{x^2}$, $y=x-1$, $y=x+1$ чизиқлар билан чегараланган.

13. $\iint\limits_{(D)} xy^2dxdy$, (D) соҳа $y^2=2px$ парабола ва $x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$ чизиқ билан чегараланган.

14. $\iint\limits_{(D)} |xy|\,dxdy,\ (D)=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leqslant a^2\}.$

15. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ (D)=\{(x,y)\cup R^2 : x^2+y^2\leqslant a^a\}.$

16. $\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy$, (D) соҳа $x^2+y^2=x+y$

чизиқ билан чегараланган.

17. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (|x|+|y|)dxdy.$

18. $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)dxdy.$

19. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy.$

20. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]dxdy.$

21. $\iint\limits_{(D)} \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right)^2dxdy$, (D) соҳа $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right)^4=\frac{x^2}{9}+y^2$

чизиқ ва координата ўқлари билан чегараланган ($x > 0$, $y > 0$).

22. $\iint\limits_{(D)} \frac{x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} dxdy$,

(D) соҳа $(x^6 + y^6)^2 = (x - y)^3$ чизиқ билан чегараланган.

23. $\iint\limits_{|x| + |y| \leqslant 1} x^3 y^5 dxdy$.

24. $\iint\limits_{(D)} ([x] + [y]) dxdy$, (D)— соҳа учлари $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ бўлган квадрат.

25. $\iint\limits_{\substack{x + y \leqslant 3 \\ x \geqslant 0,\, y \geqslant 0}} [x^2 + y^2] dxdy$.

26. $\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant a^2} \ln(1 + x^2 + y^2) dxdy$.

27. $\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant R^2} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dxdy$.

28. $\iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant ax} \frac{x\, dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

29. $\iint\limits_{(D)} \frac{(x + y)^2}{x} dxdy$.

$(D) = \{(x,y) \in R^2 : 1 - x \leqslant y \leqslant 3 - x,\ \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2x\}$.

30. $\iint\limits_{(D)} (x^3 + y^3) dxdy$

$(D) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 3x^2,\ \frac{1}{x} \leqslant 2y \leqslant \frac{3}{x}\}$.

31. $\iint\limits_{(D)} xy dxdy$.

$(D) = \{(x,y) \in R^2 : ax^3 \leqslant y \leqslant bx^3,\ px \leqslant y^2 \leqslant qx\}$.

32. $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2 \sin xy}{y} dxdy$,

$(D) = \{(x,y) \in R^2 : ay \leqslant x^2 \leqslant by,\ px \leqslant y^2 \leqslant qx\}$.

33. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\, dxdy$, (D) соҳа $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

чизиқ ва координата ўқлари билан чегараланган.

34. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \cos(x^2+y^2)\,dxdy.$

35.
$\displaystyle\iint\limits_{(D)} \sqrt{|x-y^2|}\,dxdy,\ (D)=\{(x,y)^{\alpha}R^2: |y|\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 2\}.$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган соҳалар юзаларини ҳисобланг:

36. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2=a^2.$

37. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

38. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy,\ (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2,\ a>0.$

39. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{k}.$

40. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^5=\dfrac{xy^2}{c^4}.$

41. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0.$

42. $x+y=a,\quad x+y=b,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x,\quad (0<a<b,$
$0<\alpha<\beta).$

43. $y^2=2px,\ y^2=2qx,\ x^2=2ry,\ x^2=2sy$
$(0<p<q,\ 0<r<s).$

44. $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1,$

$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=2,$

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b},\ 4\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\ (a>0, b>0).$

45. $(x^2+y^2)^3=a^4(x^4+y^4).$

46. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2.$

47. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[n]{\dfrac{y}{b}}=1,$

$x=0,\ y=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$

48. $y=\dfrac{x^4}{a^3},\ y=\dfrac{x^4}{b^3},$

$xy=c^2,\ xy=d^2.$
$(x>0,\ y>0,\ 0<a<b,\ 0<c<d).$

49. $x^2+y^2=ay,\ x^2+y^2=by,\ x=\alpha y,\ x=\beta y.$
$(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta).$

50. $(x+2y-1)^2+(2x+y-2)^2=9.$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмларини топинг:

51. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
$(a>R\sqrt{2}).$

52. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

53. $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$

54. $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0.$

55. $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2.$

56. $z=x^2+y^2.\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$

57. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\geqslant a|x|\ (a>0).$

58. $z=e^{-(x^2+y^2)},\ z=0,\ x^2+y^2=R^2.$

59. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a},\ z=0.$

60. $z=x^2+y^2,\ z=x+y.$

61. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

Қуйидаги жисмларнинг ҳажмларини топинг:

62. $z^2\leqslant 2px,\ y\leqslant x\leqslant a,\ y\geqslant 0.$

63. $z^2\geqslant 2px,\ z^2\geqslant 2qy,\ 0\leqslant z\leqslant a,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

64. $x^2+y^2\leqslant a^2,\ 0\leqslant az\leqslant a^2-2y^2.$

65. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leqslant 1.$

66. $4x\geqslant y^2,\ 4y\geqslant x^2,\ 0\leqslant z\leqslant y.$

67. $x^2+y^2\leqslant az\leqslant h^2.$

68. $0\leqslant z\leqslant ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant R^2.$

69. $0\leqslant z\leqslant c\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b},\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b.$

70. $0\leqslant z\leqslant y\sin\left(\pi\left(\frac{x}{y}\right)^4\right),\ nx\leqslant y^2\leqslant mx.$
$\beta y\leqslant x\leqslant\alpha y,\ (m>n>0,\ 0<\beta<\alpha<1).$

2-§. УЧ КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

$f(x,y,z)$ функция R^3 фазодаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. Бу функциянинг (V) соҳа бўйича уч каррали интеграли тушунчаси 1- § да келтирилган икки каррали интегралга ўхшаш киритилади. (V) соҳанинг p бўлинишини карайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (V_k) $(k=1,2,...,n)$ бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта олиб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k.$$

интеграл йиғиндини тузамиз, бунда V_k—(V_k) нинг ҳажми.

4-таъриф. $\forall \varepsilon > 0$ *олинганда ҳам, шундай* $\delta > > 0$ *топилсаки,* (V) *соҳанинг диаметри* $\lambda < \delta$ *бўлган ҳар қандай бўлинишда ҳамда ҳар бир* (V_k) *бўлакдаги ихтиёрий* (ξ_k, η_k, ζ_k) *нуқталар учун*

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I *га* $f(x,y,z)$ *функциянинг* (V) *бўйича уч каррали интеграли дейилади ва у*

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV \quad \left(\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\right)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k .$$

Уч каррали интегралларнинг мавжудлиги, интегралланувчи функциялар синфи ва интеграл хоссаларига оид теоремалар худди икки каррали интеграллардаги каби бўлади.

$f(x,y,z)$ функция

$$(V) = \{(x, y, z) \in R^3 : a \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ e \leqslant z \leqslant l\}$$

соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^l f(x, y, z)dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

Энди (V) соҳа — пастдан $z=\psi_1(x,y)$, юқоридан $z_2=\psi_2(x,y)$ сиртлар билан, ён томондан Oz ўқига параллел цилиндрик сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текислигига проекцияси (D) бўлсин.

Агар $f(x,y,z)$ функция шундай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z=\psi_i(x,y)$ $(i=1,2)$ функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{(D)}\left(\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

бўлади.

Агар

$$(D)=\{(x,y)\in R^2: a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)\}$$

бўлиб, $\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ функциялар $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

бўлади.

$f(x,y,z)$ функция (V) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (V) соҳа — силлиқ ёки бўлакли силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ интегралда ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v,w), \\ y=\psi(u,v,w), \\ z=\chi(u,v,w),\ (u,v,w)\in\Delta\subset R^3 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) акслантириш 1-§ 4-пунктда келтирилган 1°—2° каби шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz= =\iiint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(u,v,w),\ \psi(u,v,w),\ \chi(u,v,w))$$
$$|I(u,v,w)|dudvdw \qquad (5)$$

бўлади, бунда

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(5) формула уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидир. Кўпчилик ҳолларда уч каррали интегралларни ҳисоблаш учун ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштириш мақсадга мувофиқ бўлади:

а) Қуйидаги

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=z \tag{6}$$

алмаштиришни қарайлик $(0\leqslant r<+\infty)$, $(0\leqslant\varphi<2\pi)$, $(-\infty<z<+\infty)$.

Натижада (5) формула ушбу

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(\Delta)} f(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz$$

кўринишни олади.

Одатда (6) алмаштириш цилиндрик алмаштиришлар (r,φ,z) эса нуқтанинг цилиндрик координаталари дейилади.

Ушбу

$$x=\rho\sin\Theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\Theta\sin\varphi,\ \ z=\rho\cos\Theta \tag{7}$$

алмаштиришни қарайлик $(0\leqslant\rho+\infty)$, $(0\leqslant\Theta\leqslant\pi)$, $(0\leqslant\leqslant\varphi<2\pi)$. У ҳолда (5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(\Delta)} f(\rho,\Theta,\varphi)\rho^2\sin^2\Theta d\rho d\Theta d\varphi.$$

Одатда (7) алмаштириш сферик алмаштиришлар, (ρ, Θ, φ) эса нуқтанинг сферик координаталари дейилади.

21-мисол. Ушбу

$$\iiint\limits_{(V)} x^2dv$$

интегрални таъриф бўйича ҳисобланг. Бунда (V) соҳа $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ цилиндрлар, $y=x\mathrm{tg}\alpha$, $y=x\mathrm{tg}\beta$ ярим текисликлар ва иккита $z=c$ ва $z=d$ текисликлар билан чегараланган $(0<a<b,\ c<d,\ 0<\alpha<\beta)$.

Цилиндрик (r,φ,z) координаталар системасида цилиндрлар $r=a$, $r=b$, ярим текисликлар $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, текисликлар эса $z=c$ ва $z=d$ кўринишга эга бўлади. Қаралаётган интегралда функциянинг узлуксизлигини ҳисобга олиб, яъни интегрални мавжудлигидан фойдаланган ҳолда интеграл йиғинди тузамиз. (V) соҳани қуйидаги бўлинишини қараймиз:

1) $r=r_i$, $r_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ёки

$$r_i=a+i\Delta r,\ \Delta r=\frac{b-a}{n},\ i=\overline{1,n-1}$$

2) $\varphi=\varphi_k$, $\varphi_k=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\cdot k$ ёки

$$\varphi_k=\alpha+k\cdot\Delta\varphi,\ \Delta\varphi=\frac{\beta-\alpha}{n},\ k=\overline{1,n-1}.$$

3) $z=z_j$, $z_j=c+\frac{d-c}{n}\cdot j$ ёки

$$z_j=z+j\cdot\Delta z,\ \Delta z=\frac{d-c}{n},$$

$j=\overline{1,n-1}$, (V_{ijk}) соҳачанинг ҳажми

$$V_{ijk}=\frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta z\cdot(r_i+z_{i-1})=\frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot\Delta r.$$

$$\Delta z[2a+\Delta r(2i-1)]=\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)\Delta\varphi\cdot\Delta z\cdot\Delta r$$

бўлади.

$f(x,y,z)=x^2$ функция (r,φ,z) системада
$f(r,\varphi,z)=\frac{1}{2}r^2(1+\cos2\varphi)$ кўринишни олади.

Энди интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)V_{ijk}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)\times$$

$$\times r_i^2\Delta r\sum_{j=1}^{n}\Delta z\sum_{k=1}^{n}(1+\cos2\varphi_k)\Delta\varphi.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^{n}\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)(a+\Delta r\cdot i)^2\Delta r=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a+\Delta r\cdot\frac{2i-1}{2}\right)\cdot(a^2+2ai\Delta r+i^2\Delta r^2)\Delta r=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[a^3+a^2\Delta r\left(3i-\frac{1}{2}\right)+a\Delta r^2(3i^2-i)+\frac{1}{2}\Delta r^3\cdot(2i^3-i^2)\right]$$

$$\Delta r=\left\{na^3+a^2\cdot\frac{b-a}{n}\left[\frac{3n(n+1)}{2}-n\cdot\frac{1}{2}\right]+\right.$$

$$+a\cdot\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\left[3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right]+$$

$$\left.+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\}\frac{b-a}{n}=$$

$$=(b-a)\cdot\left\{a^3+a^2(b-a)\left[\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}\right]+\right.$$

$$+a(b-a)^2\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]+$$

$$\left.+(b-a)^3\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{12n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]\right\};$$

$$\sigma_\varphi=\sum_{k=1}^{n}(1+\cos 2\varphi_k)\Delta\varphi=\left[n+\sum_{k=1}^{n}\cos(2\alpha+k\cdot 2\Delta\varphi)\right]\Delta\varphi=$$

$$=\left[n\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}+\frac{\sin n\cdot\Delta\varphi\cos\left(2\alpha+\frac{n+1}{2}\cdot 2\Delta\varphi\right)}{\sin\Delta\varphi}\cdot\Delta\varphi\right]=$$

$$=\left[\beta-\alpha+\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi}\sin(\beta-\alpha)\cos\left[2\alpha+\left(1+\frac{1}{n}\right)(\beta-\alpha)\right]\right]$$

$$\sigma_z=\sum_{j=1}^{n}\Delta z=d-c.$$

Энди $n\to 0$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(n)=\frac{1}{8}(b^4-a^4)\left[(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)\right](d-c).$$

Демак,

$$\iiint\limits_{(V)}x^2dv=\frac{1}{8}(b^4-a^4)\left[(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)\right](d-c).$$

22- мисол. Ушбу

$$I=\iiint\limits_{(V)} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$$

интегрални ҳисобланг. Бунда (V) соҳа $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган, $p,q,r,s>0$.

Қаралаётган интегралда

$$x+y+z=u,\ y+z=uv,\ z=uvw$$

алмаштиришни бажарамиз.

x,y ва z ларнинг энг кичик қийматлари 0 бўлгани учун $x+y+z=1$, $x+y+z=u$ муносабатлардан, $u\leqslant 1$ эканини топамиз. Демак, u нинг тайинланган қийматида $y+z$ нинг энг катта қиймати u га тенг, бундан $v\leqslant 1$. Худди шунга ўхшаш $w\leqslant 1$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$(\Delta)=\{(u,v,w):0\leqslant v\leqslant 1,\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant w\leqslant 1\}.$$

$$x=u(1-v),\ y=uv(1-w),\ z=uvw$$

бўлиб, Якобиан эса

$$\left|\begin{matrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{matrix}\right| 00=u^2v,$$

$$I=\iiint\limits_{(\Delta)} u^p(1-v)^p u^q v^q (1-w)^q u^r v^r w^r\cdot(1-u)^s\cdot u^2v\ dudvdw=$$

$$=\int_0^1 u^{r+q+r+2}(1-u)^s du\int_0^1 v^{q+r+1}\cdot(1-v)^p dv\int_0^1 w^r(1-w)^q dw=$$

$$=\int_0^1 u^{p+q+r+2}\cdot(1-u)^s du\int_0^1 B(r+1,\ q+1)v^{q+r+1}(1+v)^p dv=$$

$$=B(r+1,\ q+1)\int_0^1 u^{r+q+r+2}(1-u)^s B(q+r+2,\ p+1)du=$$

$$=B(r+1,\ q+1)\ B(q+r+2,\ p+1)\ B(p+q+r+3,\ s+1)=$$

$$=\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+q+2)\Gamma(q+r+p+3)\Gamma(p+q+r+s+4)}=$$

$$=\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

23- мисол. Ушбу

$$I=\iiint\limits_{(V)} z(x^2+y^2)dxdydz$$

интегрални ҳисобланг. Бунда (V) — соҳа x^2+y^2az, $(x^2+y^2)^2az^3$ сиртлар билан чегараланган.

(V) ни чегаралаб турган сиртлар OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртлар бўлгани учун меридиан кесимнинг чизмасини қараймиз (12- чизма).

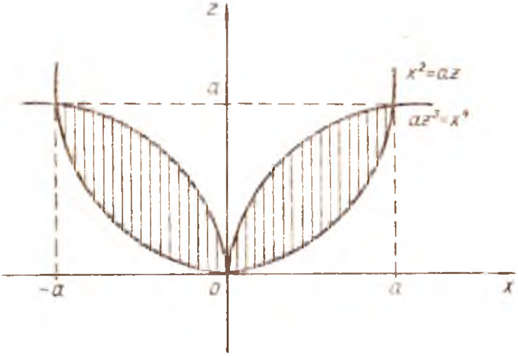
$x^2+y^2=az$ ва $(x^2+y^2)^2=az^3$ сиртлар ушбу $z=a$, $x^2+y^2=a^2$ айлана бўйича кесишади.

(V) соҳанинг OZ ўқига проекцияси $(0, a)$ интервалдан иборат, $x0y$ текислигига проекцияси эса $x^2+y^2<a^2$ доирадан иборатдир. $z=z_0$, $(z_0\in(0, a))$ текислик (V) ни ички радиуси $\sqrt[4]{az_0^3}$, ташқи радиуси $\sqrt{az_0}$ бўлган доиравий ҳалқа бўйлаб кесади.

Демак,

$$(V)=\left\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2<a^2, \frac{x^2+y^2}{a}<z<\sqrt[3]{\frac{(x^2+y^2)^2}{a}}\right\}$$

$$\iiint\limits_{(V)} z(x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_{(D_0)}(x^2+y^2)dxdy\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{a^2}}^{\sqrt[3]{\frac{(x^2+y^2)^2}{a}}} zdz.$$



12- чизма

Бу ерда

$$(D_0)=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2<a^2\}.$$

Цилиндрик координаталарга ўтиб, топамиз:

$$I=\int_0^a hdh\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt[4]{ah^3}}^{\sqrt{ah}} r^3dr,$$

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^3dr \int_{\frac{r^2}{a}}^{\sqrt[3]{\frac{r^4}{a}}} hdh=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\int_0^a h(a^2h^2-ah^3)dh=$$

$$=\frac{\pi}{2}a^6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi a^6}{40}.$$

Демак,

$$I=\frac{\pi a^6}{40}.$$

24- мисол. Ушбу

$$x^2+y^2+z^2=2az,\ \ x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$$

сиртлар билан чегараланган соҳа ҳажмини топинг.

Маълумки, изланаётган ҳажм

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

формула орқали топилиб, бунда (V) юқорида берилган сиртлар билан чегаралангандир.

Сферик координаталар системасидан фойдаланамиз:

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\iiint\limits_{(\Delta)}\rho^2\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta$$

$$(\Delta)=\left\{(\rho,\varphi,\Theta): 0\leqslant\varphi<2\pi,\ \frac{\pi}{6}\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\Theta\right\}$$

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\Theta d\Theta\int_0^{2a\cos\Theta}\rho^2d\rho=16\frac{\pi a^3}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^3\Theta\sin\Theta d\Theta=$$

$$=16\frac{\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/6}\cos^3\Theta d(\cos\Theta)=\frac{5}{12}\pi a^3\ \text{(куб.бир.)}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги уч каррали интегралларни ҳисобланг:

71. $\iiint\limits_{(V)} xy^2z^3dxdydz,$

бунда (V) $z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0$ сиртлар билан чегараланган.

72. $\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$

бунда (V) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ сирт билан чегараланган.

73. $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz,$

бунда (V) $x^2+y^2=2z,\ z=2$ сиртлар билан чегараланган.

74. $\iiint\limits_{(V)} xyz\ dxdydz,$

бунда (V) $z=\frac{x^2+y^2}{m},\ z=\frac{x^2+y^2}{n},$

$$xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=\alpha x,\ y=\beta x$$

сиртлар билан чегараланган ($x>0,\ y>0,\ z>0,$ $0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ 0<m<n$)

75. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^my^nz^pdxdydz,$

$m,\ n,\ p$ лар бутун, манфий бўлмаган сонлар.

76. $\iiint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}} 1(x^2-4xy+y^2)dxdydz.$

77. $\iiint\limits_{(V)} xyz\ dxdydz,$

78. $\iiint\limits_{(V)} zdxdydz, (v)=\left\{(x,y,z)\in R^3: z^2\geqslant\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2),\ 0\leqslant z\leqslant h\right\}.$

79. $\iiint\limits_{(V)} z^2dxdydz, (V)=\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2+z^2\geqslant R^2,$

$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}.$

80. $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2dxdydz,\ (V)=\{(x,y,z)\in R^3:$

$:x^2+y^2\leqslant 2az,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2\}$.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмларини топинг:

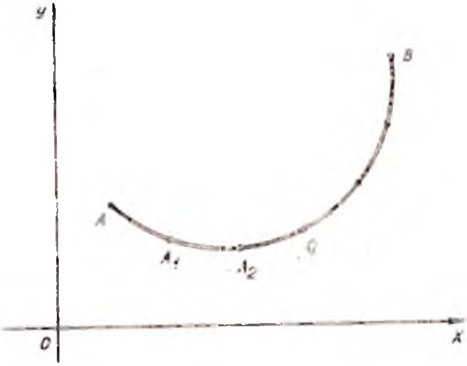
81. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.
82. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$.
83. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.
84. $(x^2+y^2+z^2)^2=az(x^2+y^2)$.
85. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$.
86. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2$.
87. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3)$.
88. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3z(x^2-y^2)$.
89. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.
90. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^6\sin^2\left[\frac{\pi z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$.
91. $(x^2+y^2)^2+z^4=za^3$.
92. $(x^2+y^2)^3+z^6=a^3xyz$.
93. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^4}=\frac{x}{k}$.
94. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{k}\sin\left(\frac{\pi z}{c\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\right)$.
95. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (z>0)$.
96. $x+y+z=a,\ x+y+z=2a,\ x+y=z,\ x+y=$ $=2z,\ x=y,\ y=3x$.
97. $a^2\leqslant xy\leqslant b^2,\quad pz\leqslant xy\leqslant qz,\quad \alpha x\leqslant y\leqslant \beta x,\quad (0<a<b,$ $0<p<q,\ 0<\alpha<\beta)$.
98. $r=a\sin\varphi\cdot(1+\cos\varphi)$.
99. $r=a\sin\varphi\cdot(a\sin^2\psi+b\cos^2\psi)$.
100. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.

XVIII боб

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. БИРИНЧИ ТУР ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Интеграл таърифи. Текисликда бирор тўғриланувчи $\breve{AB}$ ($A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$) эгри чизиқни (ёйни) олайлик. Бу эгри чизиқда икки йўналишдан бирини (масалан, A нуқтадан B нуқтага қараб йўналишни) мусбат, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик (13- чизма).



13- чизма.

AB эгри чизиқни A дан B га қараб A_0 $(A_0=A)$, $A_1, A_2, \ldots, A_n (A_n=B)$ нуқталар ёрдамида

$(A_k=(x_k,y_k)\in\breve{AB},\ k=\overline{0,n}, (x_0,y_0)=$
$=(a_1,a_2),\ (x_n,y_n)=(b_1,b_2))$ n та бўлакка бўламиз. Бу

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

нуқталар системаси $\breve{AB}$ ёйининг *бўлиниши* дейилади ва

$$P=\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$$

каби белгиланади. A_kA_{k+1} ёй узунликлари

Δs_k $(k=0,1, \ldots, n)$ нинг энг каттаси P бўлинишнинг параметри дейилади ва λ_p билан белгиланади:

$$\lambda_p = \max_k\{\Delta s_k\}.$$

AB эгри чизиқда $f(x,y)$ функция аниқланган бўлсин. эгри чизиқнинг

$$p=\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\breve{A_kA}_{k+1}$ ёйида ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта $(k=0,1,2, \ldots, n-1)$ оламиз. Сўнг қуйида-

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k \tag{1}$$

йиғиндини тузамиз. Одатда (1) интеграл йиғинди дейила-

AB эгри чизиқни шундай

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots \tag{2}$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг мос параметрларидан ташкил топган $\{\lambda_{p_m}\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{p_m} = 0$$

бўлсин. Бундай бўлинишларнинг ҳар бирига нисбатан (1) каби йиғиндилар тузиб

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

Агар AB эгри чизиқнинг ҳар қандай (2) кўринишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу сон σ йиғиндининг лимити иклади:

$$\lim_{\lambda_p\to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = I$$

1-таъриф. *Агар $\lambda_p\to 0$ да σ йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x,y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи, бу лимит эса $f(x,y)$ функциянинг биринчи тур эгри чизиқли интеграли дейилади ва*

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds$$

каби белгиланади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\ \eta_k)\Delta s_k.$$

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=x(s)\\ y=y(s)\end{array}\right\}(0\leqslant s\leqslant S) \qquad (3)$$

система билан берилган бўлсин. Бунда s — $\overset{\smile}{AQ}$ ёйнинг узунлиги ($Q=(x,y)\in\overset{\smile}{AB}$), S эса $\overset{\smile}{AB}$ нинг узунлиги.

1-теорема. **Агар $f(x,y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\smile}{AB}$ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли мавжуд ва**

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds=\int\limits_0^{s} f(x(s),\,y(s))ds \qquad (5)$$

бўлади.

Энди $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \qquad (4)$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha,\beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга ва $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta),\psi(\beta))=B$ бўлсин.

2-теорема. Агар $f(x,y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\smile}{AB}$ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли мавжуд ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (5)$$

бўлади.

Бу теоремалар биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг мавжудлигини аниқлаб бериши билан бирга унинг Риман интеграли орқали ифодаланишини ҳам кўрсатади.

3. Интегралнинг хоссалари. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга.

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ (3) ёки (4) система билан аниқланган бўлиб, $f(x,y)$ ва $g(x,y)$ шу эгри чизиқда берилган ва узлуксиз функциялар бўлсин.

1°. Агар $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{AC}\cup\overset{\smile}{CB}$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds=\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} f(x,y)ds+\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} f(x,y)ds$$

бўлади.

2°. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} C\cdot f(x,y)ds=C\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds \qquad (C-\text{const})$$

тенглик ўринли.

3°. Қуйидаги

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} [f(x,y)\pm g(x,y)]ds=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds\pm\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} g(x,y)ds$$

тенглик ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall(x,\ y)\in AB$ да $(fx,\ y)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds\geqslant 0$$

бўлади.

5°. $|f(x,y)|$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да интегралланувчи ва

$$\left|\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds\right| \leqslant \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |f(x,y)|ds$$

бўлади.

6°. Шундай $(c_1,\ c_2)\in\overset{\smile}{AB}$ нуқта топиладики,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds = f(c_1,\ c_2)\cdot S$$

бўлади, S бунда $\overset{\smile}{AB}$ нинг узунлиги.

4. **Интегрални ҳисоблаш.** Эгри чизиқли интеграллар Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади. Бунда кўпинча

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{5}$$

формуладан ҳамда қуйида келтириладиган формулалардан фойдаланилади.

Айтайлик, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$y=y(x)\ \ (a\leqslant x\leqslant b,\ \ y(a)=A,\ \ y(b)=B)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $y'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x,y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{6}$$

бўлади.

Энди $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\rho=\rho(\Theta)\ \ (\Theta_0\leqslant\Theta\leqslant\Theta_1)$$

тенглама билан (қутб координата системасида) берилган бўлиб, $\rho(\Theta)$ функция $[\Theta_0,\ \Theta_1]$ да узлуксиз $\rho'(\Theta)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x,y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\;d\theta \quad (7)$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds$$

интегрални хисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ текисликнинг $A=(-1,0)$, $B=(0,1)$ нукталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

Равшанки, A ва B нукталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси

$$y=x+1$$

бўлиб, берилган интеграл эса

$$y=x+1,\quad -1\leqslant x\leqslant 0$$

кесма бўйича олинган интеграл бўлади.

Унда (6) формулага кўра

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds =$$

$$= \int_{-1}^{0} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{1+(x+1)'^2}\,dx$$

бўлади. Кейинги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-1}^{0} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\left[3\cdot x^{\frac{4}{3}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} = -5\sqrt{2}.$$

Демак,

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds = -5\sqrt{2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{x}{y}\,ds$$

интегрални ҳисобланг, $\overset{\smile}{AB}$ бунда $y^2=2x$ параболанинг $(1, \sqrt{2})$ ва $(2,2)$ нуқталари орасидаги бўлаги.

Юқоридаги (6) формулага кўра ($y=\sqrt{2x}$):

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{x}{y}\,ds=\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+(\sqrt{2x}\,)'^2}\;dx$$

бўлади.

Энди

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+(\sqrt{2x}\,)'^2}\,dx$$

интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$1+(\sqrt{2x}\,)'^2=\frac{2x+1}{2x}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+(\sqrt{2x}\,)'^2}\;dx=\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1+2x}\;dx=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\,)$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{x}{y}\,ds=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\,).$$

3-мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xy\;ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг биринчи квадрантдаги қисми.

Аввало

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипснинг параметрик тенгламасини ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

Демак, берилган интеграл ушбу

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$$

эгри чизиқ бўйича олинади.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xyds=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

Кейинги интегралда

$$\cos 2t=u$$

деб оламиз. Унда

$$\sin 2t dt=-\frac{1}{2}du,\ u\in[-1,1]$$

бўлиб,

$$I=\frac{ab}{4}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u}\,du=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{b^2-a^2}{2}u\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

бўлади. Демак,

$$\int\limits_{\breve{AB}} xyds=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

4-мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} xyds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t, \\ y=a\operatorname{sh}t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant t_0)$$

гипербола ёйидан иборат.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{\breve{AB}} xyds=\int\limits_{0}^{t_0} a\operatorname{ch}t\cdot a\operatorname{sh}t\sqrt{(a\operatorname{ch}t)'^2+(a\operatorname{sh}t)'^2}\,dt=$$

$$=a^2\int\limits_{0}^{t_0}\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t\sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t)}\ \ dt.$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{0}^{t_0}\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t\sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t)}\,dt=\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{t_0}\operatorname{sh}2t\sqrt{\operatorname{ch}2t}\,dt=$$

$$=\frac{a}{4}\int\limits_{0}^{t_0}\sqrt{\operatorname{ch}2t}\,d(\operatorname{ch}2t)=\frac{a}{4}\cdot\frac{2}{3}(\operatorname{ch}2t)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{t_0}=$$

$$=\frac{a}{6}\left(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1\right).$$

Демак,

$$\int\limits_{\smile{AB}} xyds = \frac{a^3}{6}\left(\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}} 2t_0 - 1\right).$$

5- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\smile{AB}} |y|ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги (қутб координаталар системасида)

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

тенглама билан берилган эгри чизиқ (лемниската ёйи).

Юқорида келтирилган (7) формулага кўра

$$\int\limits_{\smile{AB}} |y|ds = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} |\rho\sin\varphi| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\; d\varphi$$

бўлади.

Агар

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$|\rho\cdot\sin\varphi|\cdot\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a^2|\sin\varphi|$$

бўлиб,

$$\int\limits_{\smile{AB}} |y|ds = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2|\sin\varphi|d\varphi = 2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin\varphi d\varphi = a^2(2 - \sqrt{2}\,)$$

бўлади.

6- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\smile{AB}} (x + y)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ учлари $O(0,0)$, $O_1(1,0)$ ва $O_2(0,1)$ нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(x+y)ds=\int\limits_{O_1O_2}(x+y)ds+\int\limits_{O_2O}(x+y)ds+$$

$$+\int\limits_{OO_1}(x+y)ds$$

бўлади.

Равшанки,

O_1O_2 нинг тенгламаси $y=1-x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,
O_2O нинг тенгламаси $x=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$,
OO_1 нинг тенгламаси $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, топамиз:

$$\int\limits_{O_1O_2}(x+y)ds=\int\limits_0^1(x+1-x)\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2},$$

$$\int\limits_{O_2O}(x+y)ds=\int\limits_0^1 ydy=\frac{1}{2},$$

$$\int\limits_{OO_1}(x+y)ds=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(x+y)ds=1+\sqrt{2}.$$

7-мисол.

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ

$$\rho=a,\quad \varphi=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

(кутб координаталар системасида) чизиқлар билан чегараланган қаварик ёпиқ контурдан иборат (14- чизма).

14- чизма.

Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int\limits_{MN} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int\limits_{NP} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+$$

$$+\int\limits_{PM} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

MP чизикда

$$\varphi=0,\ 0\leqslant\rho\leqslant a$$

бўлганлиги сабабли

$$\int\limits_{MN} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int\limits_0^a e^{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^a e^{\rho}d\rho=e^a-1$$

бўлади.

NP чизикда

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \rho=a$$

бўлганлиги сабабли

$$\int\limits_{NP} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int\limits_0^{\pi/4} e^{\rho}\rho d\varphi = ae^a\frac{\pi}{4}$$

бўлади.

PM чизиқда

$$0 \leqslant \rho \leqslant a, \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

бўлганлиги сабабли

$$\int\limits_{PM} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int\limits_0^a e^{\rho}d\rho = e^a - 1$$

бўлади.

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = e^a - 1 + ae^a\cdot\frac{\pi}{4} + e^a - 1 = 2(e^a - 1) + \frac{\pi ae^a}{4}.$$

5. Интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл ёрдамида ёй узунлигини, жисмнинг массасини, оғирлик марказларини, инерция моментларини ҳисоблаш мумкин.

1°. Текисликда тўғриланувчи $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлсин. Унинг узунлиги ушбу

$$S = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} ds \tag{8}$$

формула билан топилади.

2°. Текисликда тўғриланувчи $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиғи бўйича масса тарқатилган бўлиб, унинг зичлиги $\rho = \rho(x, y)$ бўлсин. Бу эгри чизиқнинг массаси

$$m = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \rho(x, y)ds, \tag{9}$$

оғирлик марказининг координаталари эса

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x\cdot\rho(x, y)ds, \qquad y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y\cdot\rho(x, y)ds \tag{10}$$

бўлади.

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг OX ва OY координата ўқларига нисбатан статик моментлари

$$S_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y\,ds, \qquad S_y = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x\,ds \qquad (11)$$

формулалар билан, шу ўқларга нисбатан инерция моментлари эса

$$I_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y^2 ds, \qquad I_y = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x^2 ds \qquad (12)$$

формулалар орқали ифодаланади.

8-мисол. Ушбу

$$x(t) = a\cos^3 t,$$

$$y(t) = a\sin^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

система билан берилган $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ (астроида) нинг узунлигини топинг.

Астроида координата ўқларига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олиб, (8) формуладан топамиз:

$$S = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} ds = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{9a^2}{4}\sin^2 2t}\,dt = 6a\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = 6a.$$

Демак,

$$S = 6a.$$

9- мисол. Чизиқли зичлиги $\rho(x, y)=|y|$ бўлган

$$y^2=2px \ \left(0\leqslant x\leqslant \frac{p}{2}\right)$$

параболанинг массасини ҳамда огирлик марказини топинг.

(9) формуладан фойдаланиб, параболанинг массаси

$$m=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |y|ds$$

бўлишини аниқлаймиз. Бу эгри чизиқли интеграл (6) формулага кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |y|ds=\int\limits_{-p}^{p} |y|\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy$$

бўлади. Демак,

$$m=\int\limits_{-p}^{p} |y|\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy.$$

Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{-p}^{p} |y|\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy=2\cdot\frac{1}{p}\int\limits_{0}^{p} y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{p}\int\limits_{0}^{p}\sqrt{p^2+y^2}\,d(p^2+y^2)=\frac{1}{p}\left[(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right|_0^p=$$

$$=\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1).$$

Демак,

$$m=\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1).$$

Параболанинг оғирлик марказининг координаталари (10) формулага кўра

$$x_0=\frac{1}{m}\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x\cdot|y|ds,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int\limits_{\breve{AB}} y\cdot|y|ds$$

бўлади. Энди бу эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{\breve{AB}} x\cdot|y|ds=\int\limits_{\breve{AB}}\frac{y^2}{2p}|y|ds=\frac{2}{1}\int\limits_0^p y^3\cdot\frac{1}{2p}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy=\frac{1}{p^2}\int\limits_0^p y^3\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

Кейинги интегрални бўлаклаб, интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Агар

$$y^2=u,\ y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=dv$$

дейилса, унда

$$du=2ydy,\ v=\frac{1}{3}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

бўлиб,

$$\int\limits_0^p y^3\sqrt{p^2+y^2}\,dy=\frac{1}{3}y^2(p^2+y^2)\Big|_0^p-\frac{1}{3}\int\limits_0^p 2y(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\,p^5}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(p^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^p=\frac{2p^5(1+\sqrt{2})}{15}$$

бўлади. Демак,

$$x_0=\frac{1}{m\cdot p^2}\cdot\frac{2p^5(1+\sqrt{2})}{15}=\frac{(5+3\sqrt{2})p}{35}.$$

Худди шунга ўхшаш

$$y_0=\frac{1}{m}\int\limits_{\breve{AB}} y|y|ds=\frac{3(2\sqrt{2}+p)}{28}(3\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$$

бўлиши топилади.

10- мисол. Ушбу

$$\breve{AB}: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ \ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$$

астроиданинг OX ва OY координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

Аввало берилган астроиданинг параметрик кўринишдаги тенгламасини топамиз. У қуйидагича

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned} \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади. Сўнгра ёй дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{3a\cos^2 t(-\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cdot\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 3a\cos t\cdot\sin t dt.$$

(11) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y ds = \int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\cdot\sin t dt =$$

$$= 3a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{3a^2}{5},$$

$$S_y = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x ds = \int\limits_0^{\pi/2} a\cos^3 t\cdot 3a\cos t\cdot\sin t dt =$$

$$= -3a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) = \frac{3a^2}{5}.$$

Демак, астроиданинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари

$$S_x = \frac{3a^2}{5},\ S_y = \frac{3a^2}{5}$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\overset{\smile}{AB} : x^2 + y^2 = a^2$$

айлананинг диаметрига нисбатан инерция моментини топинг.

Равшанки, берилган айлананинг параметрик кўринишидаги тенгламаси

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t \end{aligned} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

бўлади.

Айлана диаметрини OX ўқига жойлаштириб, сўнг (12) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t \cdot \sqrt{(a\cos t)'^2 + (a\sin t)'^2}\, dt =$$

$$= a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi a^3.$$

Демак, берилган айлананинг диаметрига нисбатан инерция моменти

$$I_x = \pi a^3$$

бўлади.

1- эслатма. Айтайлик, $\overset{\smile}{AB}$ фазовий эгри чизиқ бўлиб, бу чизиқда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек $f(x, y, z)$ функциянинг $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли тушунчаси киритилади ва ўрганилади.

12- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= bt \end{aligned} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

система билан берилган эгри чизиқ.

Равшанки, бу ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^2+y^2+z^2)ds = \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + bt^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

бўлади. Аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + bt^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}(6\pi a^2+8\pi^3 b^2).$$

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}(6\pi a^2+8\pi^3 b^2).$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги биринчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

1. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x+y)ds$, бунда AB чизиқ текисликнинг (0,2) ва (2,0) нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

2. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ текисликнинг (0,0) ва (1,2) нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

3. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{1}{x+y}ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ ушбу $y=x+2$ тўғри чизиқнинг (2,4) ва (1,3) нуқталари орасидаги қисми.

4. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} yds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги $y^2=2x$ параболанинг (0,0) ва $(1,\sqrt{2})$ нуқталари орасидаги ёйи.

5. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xy\,ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ ушбу $|x|+|y|=a$ тенглама билан берилган чизик.

6. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x^2 ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик ушбу $x^2+y^2=a^2$ айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми.

7. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\cdot\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

система билан берилган эгри чизиқ.

8. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x+y)ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ ушбу

$$\rho^2=a^2\cos 2\varphi$$

тенглама билан берилган чизиқ.

9. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{1}{y^2}ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ тенглама билан берилган чизиқ.

10. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ ушбу

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

астроидадан иборат.

11. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ ушбу $x^2+y^2=ax$ айланадан иборат.

12. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |y|ds$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ лемниската ёйидан иборат.

13. Айтайлик, фазовий $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant \beta)\\ z&=z(t) \end{aligned}$$

система билан берилган бўлиб, $x(t)$, $y(t)$ ва $z(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ва $z'(t)$ хосилаларга эга бўлсин. Агар $f(x, y, z)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да аниқланган ва узлуксиз бўлса, унда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)\times$$

$$\times\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t))}\ dt$$

бўлишини исботланг.

14. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ қуйидаги

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$$

винт чизиғидан иборат.

15. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x+z)\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ қуйидаги

$$x=t,\ y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z=t^3\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

чизиқдан иборат.

Қуйидаги чизиқларнинг ёй узунликларини топинг:

16. $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

17. $ay^2=x^3,\ 0\leqslant x\leqslant 5a$.

18. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$

19. $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

20. $y=1-\ln\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4})$.

21. Чизиқли зичлиги $\rho(x, y)=|x|$ бўлган ушбу

$$x^2=4y \quad (0\leqslant y\leqslant 1)$$

параболанинг массасини ҳисобланг.

22. Чизиқли зичлиги $\rho(x, y)=|y|$ бўлган ушбу

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

эллипснинг массасини топинг.

23. Чизиқли зичлиги $\rho(x, y)=xy$ бўлган ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипснинг биринчи квадратида жойлашган қисмининг массасини топинг.

24. Чизиқли зичлиги $\rho(x, y)=\frac{1}{y^2}$ бўлган ушбу

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})$$

занжир чизигининг массасини топинг.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг огирлик маркази координаталарини топинг:

25. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$.

26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

27. $y^2=ax^3-x^4$

28. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$.

29. Ушбу

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{5}\cos^3 t, \\ & \qquad\qquad (0\leqslant t\leqslant \tfrac{\pi}{2}) \\ y&=\sqrt{5}\sin^3 t \end{aligned}$$

система билан берилган AB чизиқнинг OX ва OY ўқларга нисбатан статик моментларини топинг.

30. Ушбу

$$x=\sqrt[3]{2}\cos t,$$

$$y=\sqrt[3]{2}\sin t$$

система билан берилган $\overset{\smile}{AB}$ чизиқнинг OX ва OY ўқларга нисбатан инерция моментларини топинг.

2-§. ИККИНЧИ ТУР ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1. Интеграл таърифи. Текисликда бирор тўғриланувчи AB эгри чизиқ берилган бўлиб, бу чизиқда $f(x, y)$ функция аниқланган бўлсин. AB эгри чизиқнинг $P=\{A_0, A_1,\dots, A_n\}$ бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overset{\smile}{A_kA_{k+1}}$ $(k=0,1,\dots, n-1)$ ёйида ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни $\overset{\smile}{A_kA_{k+1}}$ нинг OX (OY) ўқидаги $\Delta x_k(\Delta y_k)$ проекциясига кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma'=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \left(\sigma''=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right) \tag{13}$$

Энди AB эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2,\dots, P_m,\dots \tag{14}$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган $\{\lambda_{P_m}\}$ кетма-кетлик 0 га интилсин:

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{P_m}=0.$$

Бундай бўлинишларга нисбатан (13) каби йиғиндиларни тузиб, ушбу

$$\sigma_1', \sigma_2',\dots, \sigma_m',\dots, (\sigma_1'', \sigma_2'',\dots, \sigma_m'',\dots)$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

Агар $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг ҳар қандай (14) кўринишдаги бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma_m'\}$ $(\{\sigma_m''\})$ кетма-кетлик

(ξ_k, η_k) нуқталарнинг ((ξ_k, η_k)$\in \overset{\smile}{A_kA_{k+1}}$) танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I_1 сонга (I_2 сонга) интилса, бу сон σ' (σ'') йиғиндиларнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma' = I_1 \quad (\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma'' = I_2)$$

каби белгиланади.

2- таъриф. *Агар $\lambda_p \to 0$ да σ' йиғинди (σ'' йиғинди) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи дейилади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграли дейилади ва*

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx \quad \Big(\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy \Big)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k ,$$

$$\Big(\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \Big) .$$

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқда $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y)dy$$

лар иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари бўлсин. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y)dy$$

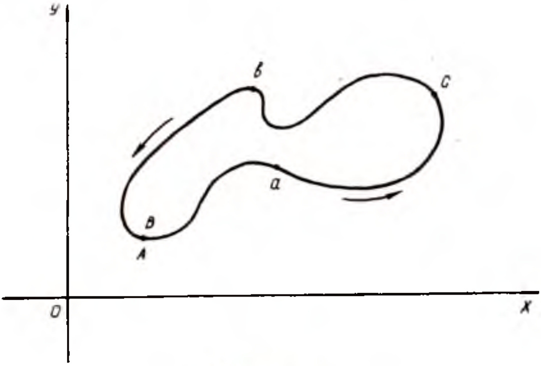
йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби ёзилади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Энди $\overset{\smile}{AB}$ тўғриланувчи ёпиқ эгри чизиқ, яъни A ва B нуқталар устма-уст тушсин. Уни K билан белгилайлик. Бу ёпиқ эгри чизиқда шундай йўналишни мусбат деб қабул қиламизки, кузатувчи ёпиқ чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, ёпиқ чизиқ билан чегараланган соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда ётсин (15- чизма).



15- чизма.

$P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функцияларнинг ёпиқ эгри чизиқ K бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интегралларининг умумий кўриниши қуйидагича

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AaC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int\limits_{\overset{\smile}{CbA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

аниқланади ва

$$\int\limits_{K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ ёки } \oint\limits_{K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

каби белгиланади.

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизик ушбу

$$\begin{aligned} &x=\varphi(t), \\ &y=\psi(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \end{aligned} \tag{15}$$

система билан (параметрик кўринишда) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ хосилага эга, $\Psi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз бўлиб, $(\varphi(\alpha)), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=B$ бўлсин.

3-теорема. **Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграли мавжуд ва**

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt$$

бўлади.

Энди $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ (15) система билан берилган бўлиб, бунда $\psi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\psi'(t)$ хосилага эга, $\varphi(t)$ эса шу ораликда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=B$ бўлсин.

4-теорема. **Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграли**

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy$$

мавжуд ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\cdot\psi'(t)dt$$

бўлади.

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ (15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ хосилаларга эга ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))=A$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))=$ $=B$ бўлсин.

5-теорема. Агар $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари мавжуд ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)+$$

$$+Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар қатор хоссаларга эга. Қуйида интегралнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1°. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар интеграллаш эгри чизиғининг йўналишига боғлиқ бўлади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x, y)dx=-\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx; \quad \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x, y)dy=-\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x, y)dy.$$

2°. Агар $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ OX ўқига (OY ўқига) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ кесмасидан иборат бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy=0 \quad \Big(\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy=0\Big).$$

3°. Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да интегралланувчи бўлиб, $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{AC}+\overset{\smile}{CB}$ бўлса,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx=\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} f(x, y)dx+\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} f(x, y)dx$$

бўлади.

4°. Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} kf(x, y)dx=k\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx$$

бўлади, бунда k — const

5°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $\overset{\smile}{AB}$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)]dx = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx \pm \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} g(x, y)dx$$

бўлади.

4. *Интегралларни ҳисоблаш.* Юқорида келтирилган теоремалардан кўринадики, $\overset{\smile}{AB}$ чизиқ (15) система билан берилганда иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар Риман интегралларига келтирилиб, қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt.$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) +$$

$$+ Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\, dt. \tag{17}$$

Хусусан, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ

$$y = y(x) \ (a \leqslant x \leqslant b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, $y'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\, dx \tag{17'}$$

бўлади.

Агар $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ

$$x = x(y) \ (c \leqslant y \leqslant d)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $x(y)$ функция $[c, d]$ да узлуксиз $x'(y)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dy = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y)dy,$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

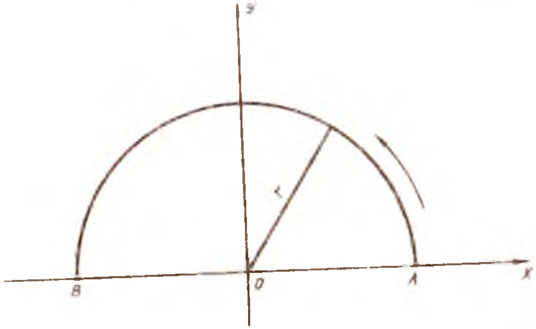
$$= \int\limits_{c}^{d} [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy \qquad (17'')$$

бўлади.

13- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (2xy - y^2)dx$$

интегрални хисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ — маркази координата бошида, радиуси r бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми; йўналиши 16-чизмада кўрсатилган.



16- чизма.

Равшанки, айлананинг параметрик тенгламаси

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t$$

бўлади. Бунда t параметр o дан π гача ўзгарганда (x, y) нуқта A дан B га қараб $\overset{\smile}{AB}$ — ярим айланани чизади. Унда (16) формулага кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (2xy - y^2)dx = -\int\limits_0^{\pi}(2r^2\sin t\cdot\cos t - r^2\sin^2 t)r\sin t dt$$

бўлади. Энди аниқ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^{\pi}(2r^2\sin t\cdot\cos t - r^2\sin^2 t)r\sin t\, dt = 2r^3\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t d(\sin t) -$$

$$r^3\int\limits_0^{\pi}\sin^3 t dt = \left[2r^3\cdot\frac{\sin^3 t}{3} - r^3\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}r^3.$$

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (2xy - y^2)dx = \frac{4}{3}r^3.$$

14- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (xy - y^2)dx + xdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $y = 2x^2$ параболанинг (0,0) ва (1,2) нуқталари орасидаги қисми, йўналиши эса (0,0) нуқтадан (1,2) нуқтага қараб олинган.

Равшанки, $P(x,\ y) = xy - y^2$, $Q(x,\ y) = x$ функциялар қаралаётган $\overset{\smile}{AB}$ да узлуксиз. Юқоридаги (17′) формулага кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (xy - y^2)dx + xdy = \int\limits_0^1 [x\cdot 2x^2 - (2x^2)^2 + x\cdot(2x^2)']dx$$

бўлади. Кейинги интеграл эса

$$\int\limits_0^1 (2x^3 - 4x^4 + 4x^2)dx = \frac{31}{30}$$

га тенг. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (xy - y^2)dx + xdy = \frac{31}{30}.$$

15- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y^2dx+x^2dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмидан иборат.

Бу эллипснинг параметрик тенгламасини ёзамиз:

$$\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t \end{aligned}$$

$A=(a,\ 0)$ нуқтага параметрнинг $t=0$ қиймати $B=(-a,0)$ нуқтага эса $t=\pi$ қиймати мос келиб, t параметр 0 дан π гача ўзгарганда $(x,\ y)$ нуқта A дан B га қараб эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизади.

$$P(x,\ y)=y^2,\ Q(x,\ y)=x^2$$

функциялар эса $\overset{\smile}{AB}$ да узлуксиз. Берилган интегрални (17) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y^2dx+x^2dy=\int\limits_0^\pi[b^2\sin^2t\cdot(-a\sin t)+a^2\cos^2t\cdot b\cos t]dt=$$

$$=ab\int\limits_0^\pi(a\cos^3t-b\sin^3t)dt=-\frac{4}{3}ab^2.$$

16- мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ (0,0) нуқтадан чиқиб (0,0), (1,0), (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқ.

Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy=\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy+$$

$$+\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy$$

бўлади. $\overset{\smile}{AC}$ бунда (0,0) ва (1,0) нуқталарни, $\overset{\smile}{CB}$ эса (1,0) ва (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаларидан иборат.

$\overset{\smile}{AC}$ да $y=0$ ва $\overset{\smile}{AC}$ кесма OY ўқига перпендикуляр бўлганлиги сабабли

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AC}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy=0$$

бўлади.

$\overset{\smile}{CB}$ кесмада $x=1$ ва y эса OX ўқига перпендикуляр бўлганлиги сабабли

$$\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy=\int\limits_0^1 2dy=2$$

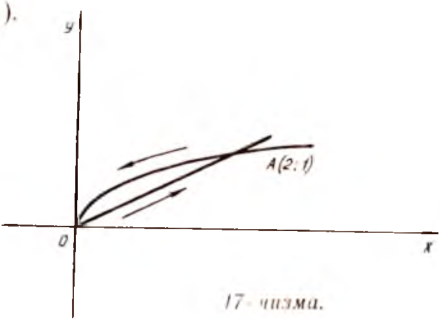
бўлади. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 3x^2ydx+(x^2+1)dy=2.$$

17- мисол. Ушбу

$$\oint\limits_k 2xydx-x^2dy$$

интегрални ҳисобланг. k бунда $O=(0,0)$, A—(2,1) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси ҳамда $y^2=\frac{1}{2}x$ парабола ёйидан ташкил топган ёпиқ эгри чизиқ (17- чизма).



17- чизма.

Интеграл хоссасига кўра:

$$\oint_{k} 2xydx + x^2dy = \int_{\breve{OA}} 2xydx + x^2dy + \int_{\breve{AO}} 2xydx + x^2dy.$$

$\breve{OA}$ кесмада $x=2y$ бўлиб, (17) формулага кўра

$$\int_{\breve{OA}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2\cdot 2y^2\cdot 2 - 4y^2]dy = \frac{4}{3}$$

бўлади.

$\breve{AO}$ ёйида эса $x=2y^2$ бўлиб, яна (17) формулага кўра

$$\int_{\breve{AO}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2\cdot 2y^2\cdot y\cdot 4y - 4y^4]dy = -\frac{12}{5}$$

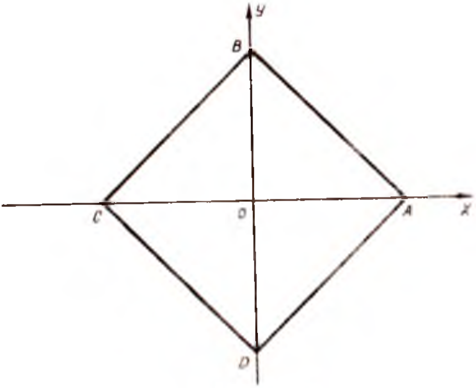
бўлади. Демак,

$$\oint_{k} 2xydx - x^2dy = \frac{4}{3} - \frac{12}{5} = -\frac{16}{15}.$$

18- мисол. Ушбу

$$\oint_{k} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy)$$

интегрални ҳисобланг, бунда k — учлари $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(0,\ -1)$ нуқталарда бўлган квадратнинг контуридан иборат (18- чизма).



18- чизма.

Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, топамиз:

$$\oint_{K} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) = \int_{\overset{\smile}{AB}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) +$$

$$+ \int_{\overset{\smile}{BC}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) = \int_{\overset{\smile}{CD}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) +$$

$$+ \int_{\overset{\smile}{DA}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy).$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз.

AB да $x+y=1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ бўлиб, $dx+dy=0$ бўлади.

Шунинг учун юқоридаги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл 0 га тенг:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) = 0.$$

BC да $y-x=1$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$ бўлиб, $dy=dx$ ҳамда $|x|=-x$, $|y|=x+1$ бўлади. B дан C нуқтагача BC бўйича келишда x ўзгарувчи 0 дан -1 гача ўзгаради. Шуни эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_{\overset{\smile}{BC}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) = \int_{0}^{-1} \frac{1}{-x+x+1} \cdot 2dx = -2.$$

CD да $x+y=-1$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$ бўлиб, $dx+dy=0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\int_{\overset{\smile}{CD}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy) = 0$$

бўлади.

$\breve{DA}$ да $y-x=-1$, $0\leqslant x\leqslant 1$ бўлиб, $dy=dx$ ҳамда $|x|=x$, $|y|=1-x$ бўлади. D нуқтадан A нуқтага DA бўйича келишда x 0 дан 1 гача ўзгаради. Шунинг учун

$$\int\limits_{\breve{DA}} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy)=\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x+1-x}\cdot 2dx=2$$

бўлади. Демак,

$$\oint\limits_{k} \frac{1}{|x|+|y|}(dx+dy)=0$$

4. **Интегралнинг баъзи бир татбиқлари.** Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллардан текис шаклларнинг юзини ҳисоблашда, куч таъсирида бўлган майдонда бажарилган ишни топишда фойдаланилади.

1°. **Текис шаклнинг юзи.** Текисликда бирор юзага эга бўлган шакл берилган бўлсин. Унинг чегараси тўғриланувчи ёпиқ $\partial(D)$ чизиқдан иборат. Бу шаклнинг юзи D иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида қуйидаги формулалар билан топилади:

$$D=\oint\limits_{\partial(D)} xdy,\ D=-\oint\limits_{\partial(D)} ydx\,,$$

$$D=\frac{1}{2}\oint\limits_{(D)} xdy-ydx. \tag{18}$$

2°. **Бажарилган ишни топиш.** Текисликда тўғриланувчи бирор $\breve{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу эгри чизиқдаги моддий нуқтани ушбу

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

ўзгарувчи куч таъсирида A нуқтани B нуқтага ўтказишда бажарган иши

$$W=\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{19}$$

бўлади.

19- **мисол.** Ушбу

$$\begin{aligned} x&=a\cos t\,, \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \\ y&=b\sin t \end{aligned} \tag{20}$$

эллипс билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу шаклнинг юзи (18) формулага кўра

$$D=\frac{1}{2}\oint_{\partial(D)} xdy-ydx$$

бўлади, бунда $\partial(D)$ — эгри чизиқ (20) эллипсдан иборат.

Энди эгри чизиқли интегрални (17) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

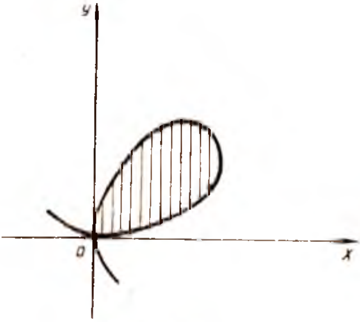
$$D=\frac{1}{2}\oint_{\partial(D)} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+$$

$$+b\sin t\cdot a\sin t)dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\pi ab.$$

20- мисол. Ушбу

$$x^3+y^3=3axy\ (a>0)$$

чизиқ (Декарт япроғи) билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (19- чизма).



19- чизма.

Аввало берилган чизиқнинг параметрик кўринишидаги тенгламасини ёзамиз. Бунинг учун

$$y=tx$$

белгилаш киритамиз, бунда t — параметр. Унда

$$x^3+y^3=3axy\Rightarrow x^3+t^3x^3=3ax^2t\Rightarrow x=\frac{3at}{1+t}$$

бўлади. Натижада чизиқнинг ушбу

$$x=\frac{3at}{1+t},\ y=\frac{3at^2}{1+t}\qquad (0\leqslant t\leqslant +\infty)$$

параметрик кўринишдаги тенгламаларига келамиз. Изланаётган шаклнинг юзи (18) формулага кўра

$$D=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial(D)} xdy-ydx$$

бўлади. Бунда $\partial(D)$

$$x=\frac{3at}{1+t},\ y=\frac{3at^2}{1+t}\qquad (0\leqslant t\leqslant +\infty)$$

чизиқдан иборат.

(17) формуладан фойдаланиб, эгри чизиқли интегрални ҳисоблаймиз:

$$D=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial(D)} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{3at}{1+t}d\left(\frac{3at^2}{1+t}\right)-$$

$$-\frac{3at^2}{1+t}d\left(\frac{3at}{1+t}\right)=\frac{9a^2}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t(2t-t^4)-t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{3}{2}a^2.$$

21-мисол. $\breve{AB}$ эгри чизиги ушбу $y=x^3$ параболадан иборат. Унинг (0,0) ҳамда (1,1) нуқталар орасидаги қисмини қараймиз. Шу ораликда

$$\vec{F}(x,y)=4x^6\vec{i}+xy\vec{j}$$

куч таъсирида бажарилган ишни топинг.

Равшанки,

$$P(x,\ y)=4x^6,\ Q(x,\ y)=xy.$$

Изланаётган ишни (19) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$W=\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\breve{AB}} 4x^6dx+xydy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(4x^6+x\cdot x^3\cdot 3x^2)dx=1.$$

2-эслатма. $\overset{\smile}{AB}$ фазовий эгри чизиқ бўлиб, бу чизиқда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек, $f(x, y, z)$ функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари таърифланади ва улар

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dx, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dy, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dz$$

каби белгиланади. Умумий ҳолда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z), \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y, z)dy, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} R(x, y, z)dz$$

интеграллар мавжуд бўлсин. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)dx + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y, z)dy + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} R(x, y, z)dz$$

йиғиндининг иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

каби ёзилади:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)dx + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y, z)dy + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги иккинчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

31. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xydx$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $y = \sin x$ синусоида чизигининг $(0,0)$ ҳамда $(\pi, 0)$ нуқталар орасидаги қисми.

32. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} x\,dy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқнинг $(a,\ 0)$ ва $(0,\ b)$ нуқталари орасидаги қисми.

33. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (xy-1)dx+x^2ydy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $4x+y^2=4$ параболанинг биринчи квадрантдаги қисми.

34. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^2+y^2)dx+xydy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $y=e^x$ тенглама билан берилган чизиқнинг $(0,1)$ ҳамда $(1,e)$ нуқталари орасидаги қисми.

35. $\oint\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдан иборат.

36. $\oint\limits_{\overset{\smile}{AB}} 2xdx-(x+2y)dy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ учлари $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

37. $\oint\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ $x^2+y^2=a^2$ айланадан иборат.

38. $\oint\limits_{\overset{\smile}{AB}} y\cos xdx+\sin xdy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ учлари $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

39. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 4x\sin^2 ydx+y\cos^2 2xdy$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ текисликнинг $(0,0)$, $(3,6)$ нуқталаридан ўтувчи тўғри чизиқнинг шу нуқталар орасидаги қисми.

40. $\oint\limits_{\overset{\smile}{AB}} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=a\sin t \end{aligned} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

айланадан иборат.

41. $\int\limits_{\breve{AB}} xydx+y^2dx$, бунда $\breve{AB}$ ушбу

$$x=t^2,\ y=t\ (1\leqslant t\leqslant 2)$$

эгри чизиқ.

42. $\int\limits_{\breve{AB}} ydx-xdy$, бунда $\breve{AB}$ қуйидаги

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

астроида қисмидан иборат.

43. $\int\limits_{\breve{AB}} (2a-y)dx+xdy$, бунда $\breve{AB}$ ушбу

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

циклоидадан иборат.

44. $\int\limits_{\breve{AB}} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, бунда $\breve{AB}$ эгри чизиқ қуйидаги

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипснинг биринчи квадрантдаги қисми.

45. $\breve{AB}$ фазовий эгри чизиқ ушбу

$$\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\\ z&=z(t) \end{aligned} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant \beta)$$

система билан берилган бўлиб, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ ҳосилаларига эга бўлсин

$$(x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha))=A,\ (x(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta))=B.$$

Агар $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$ функциялар $\breve{AB}$ да узлуксиз бўлса,

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]dt$$

бўлишини исботланг.

46. Ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$ эгри чизиқ фазодаги (1,0,2) ҳамда (3,1,4) нуқталардан ўтувчи тўгри чизиқнинг шу нуқталар орасидаги қисми.

47. Ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$ қуйидаги

$$x = t,$$
$$y = 2\cos t, \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$$
$$z = 2\sin t$$

винт чизигидан иборат.

48. Ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} x^2dx + (x + z)dy + xydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$ қуйидаги

$$x = \sin t,$$
$$y = \sin^2 t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$$
$$z = \sin^3 t$$

система билан берилган эгри чизиқ.

49. Ушбу

$$\oint\limits_{\breve{AB}} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

интеграл учун, бунда $\breve{AB}$ эгри чизиқ $x^2+y^2=r^2$ айланадан иборат,

$$\lim_{r\to 0} \oint\limits_{\breve{AB}} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0$$

бўлишини исботланг.

Қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган текис шаклнинг юзини топинг:

50. $x^2+y^2=25$ айлана билан чегараланган шакл (доира).

51. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроида билан чегараланган шакл.

52. $x=a(2\cos t - \cos 2t)$, $y=a(2\sin t - \sin 2t)$ кардионда билан чегараланган шакл.

53. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ лемниската билан чегараланган шакл.

55. $(x+y)^2=ax (a>0)$ парабола ҳамда OX ўқи билан чегараланган шакл.

3- §. ГРИН ФОРМУЛАСИ

Юқоридан ҳамда пастдан $[a, b]$ да узлуксиз бўлган $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_0(x)$ функция графиклари, ён томонлардан эса $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган (D) соҳани — эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Унинг чегарасини (контурини) ∂D билан белгилайлик. Маълумки, бу ҳолда $\bar{D}=D\cup\partial D$ (20- чизма).

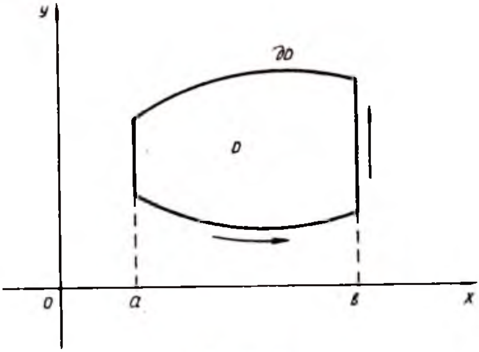
6-теорема. ***P(x, y)* функция $\bar{D}$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция *D* соҳада узлуксиз $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда**

$$\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \tag{21}$$

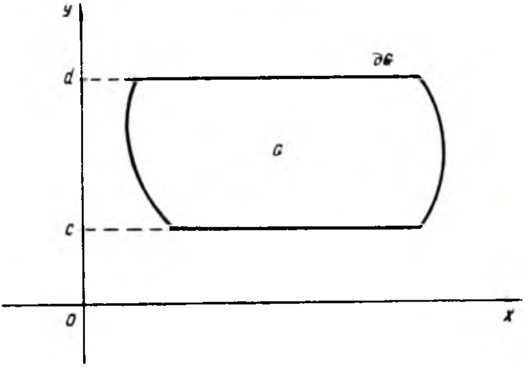
бўлади.

Энди юқоридан $y=d$, пастдан $y=c$ горизонтал чизиқлар билан, ён томонларидан $[c, d]$ да узлуксиз бўлган

$x=\Psi_1(y)$, $x=\Psi_2(y)$ функция графиклари билан чегараланган G соҳани — эгри чизиқли трапецияни қараймиз. Унинг контурини ∂G билан белгилаймиз (21- чизма).



20- чизма.



21- чизма.

7- теорема. **$Q(x, y)$ функция $\overline{G}$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция G соҳада узлуксиз $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда**

$$\int_{\partial G} Q(x, y)dy=\iint_{\overline{G}} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}dy \tag{22}$$

бўлади.

Энди текисликдаги F соҳа юқоридаги икки ҳолда қаралган соҳанинг ҳар бирининг хусусиятига эга бўлсин. $P(x, y)$ ҳамда $Q(x, y)$ функциялар $\bar{F}$ да берилган ва узлуксиз. Агар бу функциялар F да узлуксиз $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\int_{\partial F} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_F \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \quad (23)$$

бўлади.

Одатда (21), (22) ва (23) формулалар Грин формулалари дейилади. Кўпинча Грин формуласининг (23) кўринишидан фойдаланилади.

Айтайлик, текисликда чегараланган ёпиқ бир боғламли F соҳада $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ формулалар берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциялар F соҳада узлуксиз, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1°. Агар F соҳада

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

бўлса, у ҳолда F соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган интеграл

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

бўлади.

2°. Агар F соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган интеграл учун

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\breve{AB} \subset F)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмайди (интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди).

3°. Агар ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\breve{AB} \subset F)$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмаса (интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаса), у ҳолда

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ифода F соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади.

4°. Агар

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ифода F соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Демак, юқорида келтирилган тасдиқлар орасида

$$1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 4° \Rightarrow 1°$$

муносабатлар ўринли экан.

22- мисол. Грин формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\oint\limits_{\breve{AB}} x^2dy - x^2y\,dx$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$ эгри чизиқ $x^2 + y^2 = r^2$ айланадан иборат.

Равшанки,

$$P(x, y) = -x^2y, \; Q(x, y) = xy^2,$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -x^2, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Грин формуласи (23)га кўра

$$\oint\limits_{\breve{AB}} xy^2dy - x^2y\,dx = \iint\limits_{F} (x^2 + y^2)dxdy$$

бўлади, бунда F ушбу $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ доирадан иборат.

Шундай қилиб, берилган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш содда икки каррали интегрални ҳисоблашга келади.

Икки каррали интегралда

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\iint_F (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^r \rho^3 d\rho=\frac{\pi r^4}{2}$$

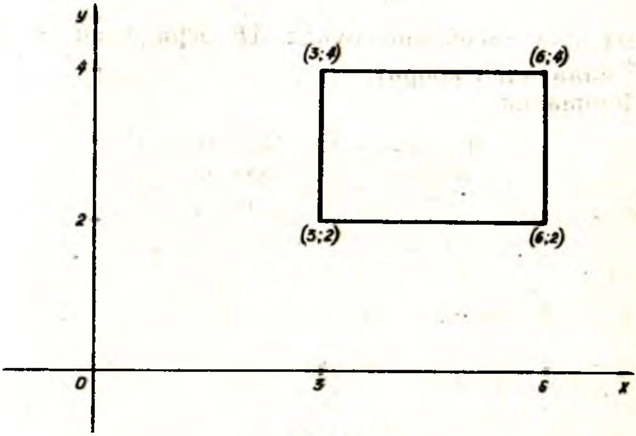
бўлади. Демак,

$$\oint_{\breve{AB}} xy^2dy-x^2\cdot y\,dx=\frac{\pi r^4}{2}.$$

23- мисол. Грин формуласидан фойдаланиб, ушбу

$$\oint_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\breve{AB}$ эгри чизиқ учлари (3,2), (6,2), (6,4), (3,4) нуқталарда бўлган тўғри тўртбурчакнинг контуридан иборат (22- чизма). Бу ҳолда



22- чизма.

$$P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ Q(x,y)=y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})])}{\partial x}=y\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=y\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-y\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2$$

бўлади. Грин формуласи (23) дан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\breve{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy=\iint_{F}y^2dxdy,$$

бунда $\breve{AB}$ — юқорида — чизмада тасвирланган тўғри тўртбурчак контуридан иборат.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\iint_{(F)}y^2dxdy=\int_3^6dx\int_2^4y^2dy=\frac{56}{3}\int_3^6dx=56.$$

Демак,

$$\oint_{\breve{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy=56.$$

24-мисол. Ушбу

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$$

эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини кўрсатинг, сўнг уни ҳисобланг. Бу интегралда

$$P(x,\ y)=x+y,\ Q(x,\ y)=x-y$$

бўлади. Равшанки, бу функциялар узлуксиз ҳамда узлуксиз

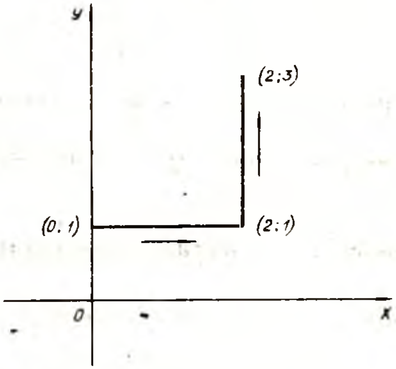
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1$$

хусусий ҳосилаларга эга. Иккинчи томондан,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади. Демак, берилган интеграл интеграллаш йўлига боглиқ бўлмайди. Шу имкониятдан фойдаланиб, интеграллаш йўлини шундай танлаймизки, берилган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш осон бўлсин. Интеграллаш эгри чизиги сифатида 23- чизмада кўрсатилган синиқ чизиқни оламиз.

Интеграл хоссасига кўра



23- чизма.

$$\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy = \int\limits_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx+(x-y)dy +$$

$$+ \int\limits_{(2,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$$

бўлади. Равшанки,

$$\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx+(x-y)dy = \int\limits_{(0,1)}^{(2,1)} (x+y)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} (x+1)dx = 4,$$

$$\int\limits_{(2,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy = \int\limits_{(2,1)}^{(2,3)} (x-y)dy =$$

$$= \int\limits_{1}^{3} (2-y)dy = 0.$$

Демак,

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy=4+0=4.$$

25- мисол. Ушбу

$$\oint_{\breve{K}} (3x^2+y)dx+(x-2y^2)dy=0$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг, бунда $\breve{K}$ эгри чизиқ учлари (0,0), (1,0), (0,1) нуқталарда бўлган учбурчак контуридан иборат.

Берилган интегралда

$$P(x,\ y)=3x^2+y,\ Q(x,\ y)=x^2-2y^2$$

бўлади.

Бу функциялар текисликда узлуксиз ҳамда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1$$

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

бўлади. Унда юқоридаги 1°-тасдиққа биноан $P(x,y)dx+$ $+Q(x,\ y)dy$ нинг ёпиқ контур бўйича (берилган учбурчак контури бўйича) интеграли нолга тенг бўлади:

$$\oint_{K} (3x^2+y)dx+(x-2y^2)dy=0.$$

26- мисол. Ушбу

$$\left(3x^2y-\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^3-xy^2)dy$$

ифоданинг бирор $F(x,\ y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлишини кўрсатинг, сўнг шу функцияни топинг.

Бу ифодада

$$P(x,y)=3x^2y-\frac{y^3}{3},\ Q(x,\ y)=x^3-xy^2$$

бўлади. Уларнинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=3x^2-y^2,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=3x^2-y^2$$

дан иборат. Демак, $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}.$$

Унда қаралаётган ифода 3°-тасдиққа биноан бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади:

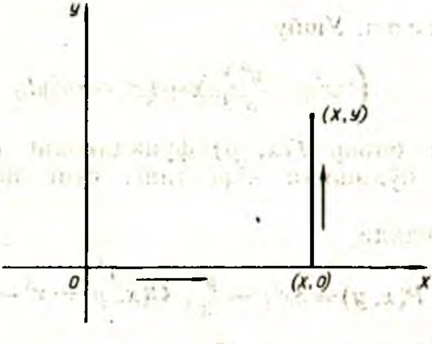
$$dF(x,y)=\left(3x^2y-\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^3-xy^2)dy.$$

Энди $F(x, y)$ функцияни топамиз. Уни

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{24}$$

деб оламиз. Бунда (x_0, y_0) текисликда тайинланган нуқта, (x, y) эса ўзгарувчи нуқта. Интеграл эса шу нуқталарни бирлаштирувчи бирор эгри чизиқ бўйича олинган.

Модомики, (24) интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас экан, унда (x_0, y_0) нуқта сифатида (0,0) ва интеграллаш эгри чизиғи сифатида 24-чизмада тасвирланган синиқ чизиқни оламиз.



24- чизма.

Интеграл хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$F(x, y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y-\frac{y^3}{3})dx+(x^3-xy^2)dy=$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(3x^2y-\frac{y^3}{3})dx+(x^3-xy^2)dy+$$

$$+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(3x^2y-\frac{y^3}{3})dx+(x^3-xy^2)dy=$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(3x^2y-\frac{y^3}{3})dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x^3-xy^2)dy=x^3y-\frac{xy^3}{3}.$$

Демак,

$$F(x, y)=x^3y-\frac{xy^3}{3}$$

Мисол ва масалалар

Грин формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

56. $\oint\limits_K (x+y)^2dx-(x^2+y^2)\,dy$, бунда K — учлари (1,1), (3,2), (2,5) нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури.

57. $\oint\limits_K (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, бунда K ушбу $x^2+y^2= \; =r^2$ айланадан иборат.

58. $\oint\limits_K (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, бунда K ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдан иборат.

59. $\oint\limits_K e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, бунда K ушбу $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\sin x$ соҳанинг контуридан иборат.

60. $\oint\limits_K 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, бунда K — учлари (1,1), (2,2), (1,3) нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури.

61. $\oint\limits_K \frac{dx-dy}{x+y}$, бунда K — учлари (1,0), (0,1),

$(-1{,}0)$, $(0, -1)$ нуқталарда бўлган квадрат контуридан иборат.

Қуйидаги эгри чизиқли интегралларни интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини аниқланг, сўнг уларни ҳисобланг.

62. $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx.$

63. $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy.$

64. $\displaystyle\int\limits_{(0,2)}^{(1,3)} (4xy-15x^2y)dx+(2x^2-5x^3+7)dy.$

65. $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (4x^3-3y^2+5y)dx+(5x-6xy-4y)dy.$

66. $\displaystyle\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx-xdy}{x^2}.$

67. $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$

Қуйидаги ифодаларнинг бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг. Агар у тўлиқ дифференциал бўлса, $F(x, y)$ функцияни топинг:

68. $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy.$

69. $(e^{2y}-5y^3e^x)dx+(2xe^{2y}-15y^2e^x)dy.$

70. $\left(12x^2y+\frac{1}{y^2}\right)dx+\left(4x^3-\frac{2x}{y^2}\right)dy.$

71. $(3x^2y^2-y^3+4x)dx+(2x^3y-3xy^2+5)dy.$

72. $\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx-\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,.$

73. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dx\,.$

74. $\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}.$

75. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dx+2xydy\,.$

XIX боб

СИРТ ИНТЕГРАЛИ

Фазода ушбу

$$z=z(x, y) \qquad (1)$$

тенглама билан аниқланган (S) сирт берилган бўлсин. Бунда $Z(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D)\subset R^2$) берилган функция бўлиб, у шу соҳада узлуксиз $Z'_x(x, y)$, $Z'_y(x, y)$ ҳосилаларга эга.

Маълумки, бундай сирт юзага эга бўлиб, у қуйидаги

$$S=\iint_{(D)}\sqrt{1+z'^2_x(x, y)+z'^2_y(x, y)}\,dxdy$$

формула орқали ҳисобланади.

1-§. БИРИНЧИ ТУР СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1. Интеграл таърифи. Юқорида айтилган (S) сирт берилган бўлсин. Бу сиртнинг бўлиниши, бўлиниш бўлаклари ва диаметри тушунчалари аввал қаралган $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши, (D) соҳанинг бўлиниши каби киритилади ва ўхшаш хоссаларга эга бўлади.

Айтайлик, $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда ($(S)\subset R^3$) берилган бўлсин. Бу сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагида ($k=1,2,\ldots, n$) ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k; \zeta_k)$ нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги қиймати $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ни (S_k) сиртнинг S_k юзига кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cdot S_k \qquad (2)$$

Одатда (2) интеграл йиғинди дейилади.

(S) сиртнинг шундай

$$P_1P_2,\ldots, P_m\ldots \qquad (3)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{p1}, \lambda_{p}, \lambda_{p2},\ldots, \lambda_{pm},\ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{pm}=0$. Бундай P_m

($m=1,2,\ldots$) бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг (2) кўринишдаги йиғиндиларини тузсак, ушбу

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots \tag{4}$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (3) бўлинишлари кетма-кетлиги олинганда ҳам, унга мос (4) кетма-кетлик (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити дейилади.

1-таъриф. *Агар $\lambda_p \to 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи дейилади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y, z)$ функциянинг биринчи тур сирт интеграли дейилади ва у*

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds$$

каби белгиланади:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k .$$

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фараз қилайлик, R^3 фазода (S) сирт $z=z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлиб, $z(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада узлуксиз ва (D) да узлуксиз $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

1-теорема. **Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интеграли**

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds$$

мавжуд ва

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \times$$

$$\times \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}\, dxdy$$

бўлади.

Энди R^3 фазода (S) сирт $x=x(y, z)$ тенглама билан берилган бўлиб, $x(y, z)$ функция чегараланган ($\bar{D}$) соҳада узлуксиз ва (D) да узлуксиз $x'_y(y, z)$, $x'_z(y, z)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

2-теорема. **Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича биринчи тур сирт интеграли**

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x'^2_y(y, z) + x'^2_z(y, z)}\, dydz$$

мавжуд ва

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Биринчи тур сирт интеграллари икки каррали интеграл хоссалари каби хоссаларга эга. Биз уларнинг айримларини келтирамиз.

1°. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлиб, $(S) = (S_1) \mathrm{U} (S_2)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{(S_1)} f(x, y, z)ds + \iint\limits_{(S_2)} f(x, y, z)ds$$

бўлади.

2°. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x, y, z)$ ҳам (c — const) шу сирт бўйича интегралланувчи бўлади ва

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot f(x, y, z)ds = c \cdot \iint\limits_{(S)} f(x. y, z)ds$$

тенглик ўринли бўлади (c — const).

3°. Агар $f(x, y, z)$ ва $g(x, y, z)$ функцияларнинг ҳар бири (S) сирт бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ ҳам шу сирт бўйича интегралланувчи бўлиб,

$$\iint\limits_{(S)} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]ds = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds \pm \iint\limits_{(S)} g(x, y, z)ds$$

бўлади.

4. Интегрални ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалар функциянинг биринчи тур сирт интегралларининг мавжудлигини тасдиқлаш билан бир қаторда уларни икки каррали интеграллар орқали ифодаланишини ҳам кўрсатади. Бинобарин, сирт интеграллари икки каррали интегралга келтириб ҳисобланади. Унда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\iint\limits_{(S)} (f x, y, z) ds = \iint\limits_{(D)} (f x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}\, dxdy ,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'^2_y(y, z) + x'^2_z(y, z)}\, dydz ,$$

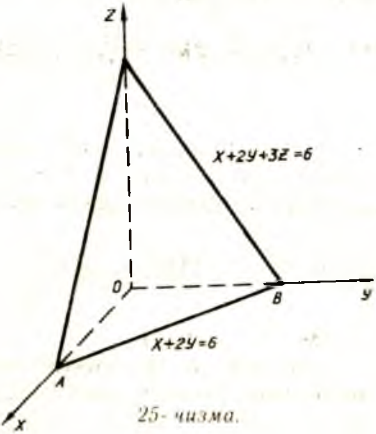
$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z, x), z) \sqrt{1 + y'^2_z(z,x) + y'^2_x(z,x)}\, dzdx . \qquad (5)$$

1-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} (6x + 4y + 32) ds$$

сирт интегралини ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$$x + 2y + 3z = 6$$



25- чизма.

текисликнинг биринчи октантдаги қисми (25- чизма).

Равшанки, (S) сирт

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$$

тенглама билан аниқланган.

(D) соҳада эса AOB учбурчакдан иборатдир. Бу соҳада z функция узлуксиз ҳамда

$$z'_x = -\frac{1}{3}, \quad z'_y = -\frac{2}{3}$$

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга.

(S) сирт берилган

$$f(x,\ y,\ z)=6x+4y+3z$$

функция эса шу сиртда узлуксиз. Унда (5) формулага кўра

$$\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)ds=\iint\limits_{(D)}(6x+4y+3\cdot\frac{1}{3}(6-$$

$$-x-2y))\cdot\sqrt{1+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}\,dxdy$$

бўлади.

Энди икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{(D)}[6x+4y+(6-x-2y)]\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{(D)}(2x+2y+6)dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}(5x+$$

$$+2y+6)dx=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3[\frac{5}{2}x^2+2xy+6x]\Big|_{x=0}^{x=6-2y}dy=$$

$$=2\sqrt{14}(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y)\Big|_0^3=54\sqrt{14}.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)}(6x+4y+3z)ds=54\sqrt{14}.$$

2- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2+y^2+z^2=r^2$ сферанинг $z=0$ текисликнинг юқорисида жойлашган қисми.

Қаралаётган (S) сирт

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

тенглама билан ифодаланади. Бунда $Z=Z(x,\ y)$ функция $(D)=\{(x,\ y)\in R^2: x^2+y^2<r^2\}$ да узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},\qquad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

хусусий ҳосилаларга эга. Бу (D) соҳа $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ сиртнинг x_0y текисликдаги проекциясидир.

(S) сиртда $f(x,\ y,\ z)=x+y+z$ функция узлуксиз. Унда (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds=\iint\limits_{(D)}(x+y+\sqrt{r^2-x^2-y^2})\times$$

$$\times\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

Агар

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}=$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds=r\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy$$

бўлади.

Энди икки каррали интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегралда ушбу

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$$

алмаштиришларини бажарамиз. Натижада

$$\iint\left(\frac{x+y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}+1\right)\times dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^r\left(\frac{\rho\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}+1\right)\rho d\rho\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^r\frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho d\rho\right]d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^r\rho d\rho)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int\limits_0^r\frac{\rho^2d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}+2\pi\cdot\frac{r^2}{2}=\pi r^2$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds=\pi r^3.$$

3-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}x(y+z)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x=\sqrt{b^2-y^2}$ цилиндрик сиртнинг $z=0$, $z=c$ $(c>0)$ текисликлар орасидаги қисми.

(S) сирт $x=\sqrt{b^2-y^2}$ тенглама билан берилган. Бу $x=\sqrt{b^2-y^2}$ функция $[-b, b]$ да узлуксиз бўлиб, $(-b, b)$ да узлуксиз.

$$x'_y=-\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}},\quad x'_z=0$$

хусусий ҳосилаларга эга. (S) сиртнинг OyZ текисликдаги проекцияси

$$(D)=\{(y, z)\in R^2: x=\sqrt{b^2-y^2},\ z=0,\ z=c\}=$$
$$=\{(y, z)\in R^2: -b\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c\}$$

бўлади.

$f(x, y, z)=x(y+z)$ функция (S) сиртда узлуксиз. (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}x(y+z)ds=\iint\limits_{(D)}\sqrt{b^2-y^2}\,(y+z)\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}\,dydz=$$
$$=b\iint\limits_{(D)}(y+z)dydz.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

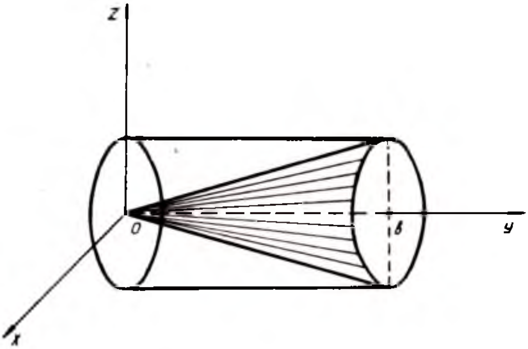
$$b\iint\limits_{(D)}(y+z)dydz=b\int\limits_{-b}^{b}\Big(\int\limits_{0}^{c}(y+z)dz\Big)dy=$$
$$=b\int\limits_{-b}^{b}\Big(yz+\frac{z^2}{2}\Big)\Big|_{z=0}^{z=c}dy=b\int\limits_{-b}^{b}\Big(cy+\frac{c^2}{2}\Big)dy=$$
$$=\frac{bc}{2}\cdot y^2\Big|_{-b}^{b}+\frac{bc^2}{2}y\Big|_{-b}^{b}=b^2c^2.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)} x(y+z)ds = b^2c^2.$$

4- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} (3x^2+5y^2+3z^2-2)ds$$



26- чизма.

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y=\sqrt{x^2+y^2}$ конус сиртнинг $y=0$, $y=b$ $(b>0)$ текисликлар орасидаги қисми (26- чизма).

(S) сирт $y=\sqrt{x^2+z^2}$ тенглама билан берилганини эътиборга олиб, интегрални ҳисоблашда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x, y(z,x), z)\ \sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dzdx$$

формуладан фойдаланамиз. Бу ҳолда (D) соҳа (S) сиртнинг xOz текисликдаги проекцияси бўлиб, у $(D)=\{(x,z)\in \in R^2 : x^2+z^2 \leqslant b^2\}$ доирадан иборат бўлади. $y=\sqrt{x^2+z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилалари эса

$$y'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\quad y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

ларга тенг. Натижада

$$\iint\limits_{(S)}(3x^2+5y^2+3z^2-2)ds=\iint\limits_{(D)}[3x^2+5(x^2+z^2)+3z^2-2]\times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2}\,dzdx=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}[3(x^2+z^2)-2]dzdx$$

бўлади.

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегралда ўзгарувчини қуйидагича

$$x=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant b)$$

алмаштириб ҳисоблаймиз:

$$\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}[8(x^2+z^2)-2]dzdx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^b(8\rho^3-2\rho)d\rho)d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(2\rho^4-\rho^2)|_0^b d\varphi=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot b^2(2b^2-1).$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)}(3x^2+5y^2+3z^2-2)ds=2\sqrt{2}\,\pi b^2(2b^2-1).$$

5-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\ (0\leqslant z\leqslant b)$$

конуснинг ён сиртидан иборат.

(S) сирт

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, унинг Oxy текисликдаги проекцияси $(D)=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant a^2\}$ бўлади.

$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ функция узлуксиз ҳамда узлуксиз хусусий ҳосилалар

$$z'_x=\frac{bx}{a\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{by}{a\sqrt{x^2+y^2}}$$

га эга. Бу сиртда берилган $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функция узлуксиз. Шуларни эътиборга олиб, (5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\iint\limits_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\,dxdy.$$

Энди икки каррали интеграл

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ни ҳисоблаймиз. Бу интегрални ҳисоблашда ушбу

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$$

алмаштиришларни бажарамиз. Натижада

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^a\rho^2d\rho)d\varphi=\frac{a^3\cdot 2\pi}{3}$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a^3\cdot 2\pi}{3}=\frac{2\pi a^2}{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

6-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}|xyz|\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $z=x^2+y^2$ айланма параболоиднинг $z=0$, $z=1$ текисликлар орасидаги қисми.

Равшанки, бу (S) сиртнинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2:x^2+y^2\leqslant 1\}$$

доирадан иборат бўлади.

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}|xyz|ds=\iint\limits_{(D)}|xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)|xy|\sqrt{1+4(x'^2+y'^2)}\,dxdy\,.$$

Икки каррали интегрални ҳисоблашда юқоридагидек

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi\ (0\leqslant\rho\leqslant 1{,}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)|xy|\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}(\int\limits_0^1(\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,)\rho d\rho)d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^1\rho^5\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\cdot d\rho=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)}|xyz|ds=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

7-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $z=\sqrt{x^2+y^2}$ конус сиртнинг $x^2+y^2=2ax$ цилиндрик сирт билан кесишган қисми.

(S) сиртнинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2:(x-a)^2+y^2\leqslant a^2\}$$

доирадан иборат бўлади.

(5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}(xy+yz+zx)ds=\iint\limits_{(D)}(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+$$

$$+x\sqrt{x^2+y^2}\,)\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy.$$

Агар

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги икки каррали интеграл ушбу

$$\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}(xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

кўринишга келади. Бу интегралда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

алмаштириш бажариб ҳисоблаймиз:

$$\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}(xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^{2a\cos\varphi}(r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi + r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi)rdr)d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}\,a^4\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 8\cdot\sqrt{2}\cdot a^4\int\limits_0^1(1-t^2)^2dt = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)}(xy + yz + zx)ds = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

5. **Интегралнинг баъзи бир татбиқлари.** Биринчи тур сирт интегралларидан сиртнинг юзини, массасини ҳисоблашда, оғирлик марказининг координаталарини, шунингдек инерция моментларини топишда фойдаланилади.

1°. (S) сиртнинг юзи

$$S = \iint\limits_{(S)}ds$$

формула билан топилади.

2°. Агар (S) сирт бўйича зичлиги $\rho(x, y, z)$ бўлган масса тарқатилган бўлса, унда (S) сиртнинг массаси

$$m = \iint\limits_{(S)}\rho(x, y, z)ds \qquad (6)$$

бўлади.

3°. (S) сиртнинг оғирлик марказининг координаталари

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}x\rho(x, y, z)ds, \quad y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}y\rho(x, y, z)ds,$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}z\rho(x, y, z)ds$$

бўлади.

4°. (S) сиртнинг Ox, Oy, Oz координата ўқларига нисбатан инерция моментлари мос равишда ушбу

$$I_x=\iint\limits_{(S)}(z^2+y^2)\cdot\rho(x, y, z)ds, \quad I_y=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\cdot\rho(x, y, z)ds,$$

$$I_z=\iint\limits_{(S)}(z^2+x^2)\cdot\rho(x, y, z)ds$$

формулалар билан топилади.

(S) сиртнинг Oxy, Oxz, Oyz координата текисликларига нисбатан инерция моментлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$I_{xy}=\iint\limits_{(S)}z^2\rho(x, y, z)ds, \qquad I_{xz}=\iint\limits_{(S)}y^2\rho(x, y, z)ds,$$

$$I_{yz}=\iint\limits_{(S)}x^2\rho(x, y, z)ds.$$

8-мисол. Ушбу $z^2=2xy$ тенглама билан берилган конуснинг биринчи октантдаги ҳамда $x=2$, $x=4$ текисликлар орасида бўлган қисмининг юзини топинг.

Изланаётган сиртнинг юзи

$$S=\iint\limits_{(S)}ds$$

формула билан топилади. Бу сирт интеграли (5) формулага кўра

$$S=\iint\limits_{(S)}ds=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+z'^2_y+z'^2_y}\,dxdy$$

бўлади, бунда (D) соҳа (S) сиртнинг Oxy текислигидаги проекцияси:

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 4\}.$$

Энди

$$z'_x=(\sqrt{2xy})'_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}},\ z'_y=(\sqrt{2xy})'_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}\,dxdy=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{(D)}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dxdy$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки каррали интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{(D)}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left[\int_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^2(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}})dx=16.$$

Демак, $S=16$.

9-мисол. Ҳар бир нуқтасидаги зичлиги шу нуқталардан координата бошигача бўлган масофа квадратига пропорционал бўлган ушбу

$$x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}$$

ярим сферанинг массасини топинг.

Шартга кўра

$$\rho(x,\ y,\ z)=k\cdot(x^2+y^2+z^2)$$

бўлиб, бунда k пропорционаллик коэффициентидир.

Массани топиш формуласи (6) га кўра

$$m=\iint\limits_{(S)}k(x^2+y^2+z^2)ds$$

бўлади. Бу ерда (S) сирт $x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}$ ярим сферадан иборат бўлиб, унинг Oyz текисликдаги проекцияси

$$(D)=\{(x,y)\in R^2: y^2+z^2\leqslant r^2\}$$

доирадан иборат.

(5) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$m=\iint\limits_{(S)}k(x^2+y^2+z^2)ds=k\iint\limits_{(D)}(r^2-y^2-z^2+y^2+z^2)\times$$

$$\times\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}\,dydz.$$

Равшанки,

$$1+x_y^2+x_z^2=1+(\sqrt{r^2-y^2-z^2})'^2_y+$$

$$+(\sqrt{r^2-y^2-z^2})'^2_z=\frac{r^2}{r^2-y^2-z^2}.$$

Натижада

$$m=kr^3\iint\limits_{(D)}\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}dydz$$

тенгликка келамиз. Бу икки каррали интегрални ҳисоблаш учун

$$y=\alpha\sin\varphi,\quad z=\alpha\cos\varphi$$

алмаштиришни бажарамиз. Бунда $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\alpha\leqslant r$ бўлади:

$$\iint\limits_{(D)}\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}dydz=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^r\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)d\varphi=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^r(r^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}d(r^2-\alpha^2))d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(r^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\cdot 2\pi=2\pi r.$$

Демак,

$$m=mr^3\iint\limits_{(D)}\frac{dydz}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}=2\pi r^4k$$

10-мисол. Ушбу $x^2+y^2+z^2=r^2$ тенглама билан берилган бир жинсли сферанинг биринчи октантда жойлашган бўлагининг Oz ўққа нисбатан инерция моментини топинг.

Сфера бир жинсли бўлганлиги сабабли тарқатилган массанинг зичлиги ўзгармас бўлади. Уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин: $\rho(x, y, z)=1$.

Изланаётган инерция моменти

$$I_z=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)ds$$

формула билан топилади, бунда (S) сирт

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$$

тенглама билан аниқланади. Юқоридаги сирт интеграли (8) формулага кўра

$$I_z=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)ds=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$$

бўлади, бунда (D) соҳа (S) сиртнинг OXY текислигидаги проекцияси:

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant r^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

Равшанки,

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Унда

$$I_z=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}dxdy$$

бўлади. Энди икки каррали интегрални $x=\alpha\cos\varphi$, $y=\alpha\sin\varphi$ алмаштириш ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{(D)}\frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^r\frac{\alpha^3d\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)d\varphi=\frac{\pi r^3}{3}$$

Демак,

$$I_z=r\cdot\frac{\pi r^3}{3}=\frac{\pi r^4}{3}.$$

Мисол ва масалалар

1. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x,y,z)\in R^3:0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$$

кубнинг ташқи қисмидан иборат.

2. Ушбу $\iint\limits_{(S)}ds$ интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x+y+z=a$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисми.

3. Ушбу $\iint\limits_{(S)}xds$ интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ярим сферадан иборат.

4. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2+3z^2)\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z=\sqrt{x^2+y^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z=0$, $z=1$ текисликлар орасидаги қисми.

5. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(y+z+\sqrt{a^2-x^2})\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $x^2+y^2=a^2$ цилиндрнинг $z=0$, $z=1$ текисликлар орасидаги қисми.

6. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(z^2+x^2+y^3)\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y=\sqrt{r^2-x^2-z^2}$ ярим сферадан иборат.

7. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(5x^2+3y^2+3z^2+4)\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги

$x=\sqrt{y^2+z^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $x=0$, $x=$ $=2$ текисликлар орасидаги қисми.

8. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(x^2+2y^2z^2+y^4+z^4)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x+y+z=2$ текисликнинг $y^2+z^2=1$ цилиндрдан ажратган қисми.

9. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}y(x+z)ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y=\sqrt{c^2-z^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $x=a$ текисликлар орасидаги қисми.

10. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z=xy$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant$ $\geqslant0)$ тенглама билан берилган сиртнинг $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ цилиндрдан ажратган қисми.

11. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+9x^2+9z^2}\,ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт қуйидаги $y=3xz$ тенглама билан берилган сиртнинг $(x^2+y^2)^2=8xz$ цилиндрдан ажратган қисми.

12. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\frac{1}{(1+x+y+z)^2}ds$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x+y+z=1$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0)$ текисликдан иборат.

13. Ушбу

$$2x+2y+z=8a$$

текисликнинг $x^2+y^2=z^2$ цилиндр ичида жойлашган қисмининг юзини топинг.

14. Ушбу

$$x^2+y^2=r^2$$

цилиндрнинг $y+z=0$ ва $z=0$ текисликлар орасидаги юзини топинг.

15. Ушбу

$$x^2+y^2+z^2=3a^2$$

сферанинг $x^2+y^2=2az$ параболоид ичида жойлашган қисмининг юзини топинг.

16. Зичлиги $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ бўлган ушбу

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

ярим сферанинг массасини топинг.

17. Зичлиги $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z-2$ бўлган ушбу

$$2z=9-x^2-y^2$$

сиртнинг $z=0$ текислик билан кесишган қисмининг массасини топинг.

18. Зичлиги $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+1$ бўлган ушбу

$$y+\sqrt{x^2+z^2}$$

сиртнинг $y=0$ ва $y=1$ текисликлар орасидаги қисмининг массасини топинг.

Зичлиги ўзгармас бўлган қуйидаги сиртларнинг огирлик марказини топинг:

19. $x^2+y^2+\alpha^2=r^2$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0)$.

20. $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ x+y\leqslant r)$.

21. $a^2z^2=b^2(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant b$.

Зичлиги ўзгармас бўлган қуйидаги сиртларнинг OZ ўқига нисбатан инерция моментларини топинг:

22. $x^2+y^2=a^2z^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

23. $x^2+y^2=2az$ $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2-§. ИККИНЧИ ТУР СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Фазода (S) сирт $z=z(x,y)$ тенглама билан аниқланган. Бунда $z(x,y)$ функция (D) соҳада $((D)\subset\subset R^2)$ берилган, узлуксиз ҳамда узлуксиз хусусий ҳосилалар $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ га эга. (D) соҳанинг чегараси эса бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўлсин.

(S) сиртда унинг чегараси билан кесишмайдиган k ёпиқ чизиқни олайлик. $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқта сиртнинг k ёпиқ чизиқ билан чегараланган қисмига тегишли ва K_n шу ёпиқ чизиқ k нинг xOy текисликдаги проекцияси бўлсин.

Сиртнинг $(x_0,\ y_0z_0)$ нуқтасидаги уринма текисликка шу нуқтада перпендикуляр ўтказайлик. Бу перпендикуляр нинг мусбат йўналиши деб шундай йўналишни оламизки, унинг учидан қаралганда иккала k ва $k_п$ ёпиқ чизиқларнинг йўналишлари мусбат бўлади. Унинг манфий йўналиши эса шундай йўналишки, унинг учидан қаралганда k_n нинг мусбат йўналишига k нинг манфий йўналиши мос келади. Перпендикулярнинг мусбат йўналиши бўйича олинган бирлик кесма сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтадаги нормали дейилади. Нормалнинг O_x, O_y ва O_z ўқларнинг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларни мос равишда α, β, γ дейилса, унда

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$
$$\cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \qquad (9)$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

бўлади. Булар нормалнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

Сиртнинг устки томони деб унинг шундай томони олинадики, бу томондан қаралганда иккала k ва k_n ёпиқ чизиқларнинг йўналишлари мусбат бўлади.

Сиртнинг устки томони қаралганда k_n билан чегараланган текис шаклнинг юзи мусбат ишора билан, пастки томони (иккинчи томони) қаралганда манфий ишора билан олинади.

1. Интеграл таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томонини (ёки устки, ёки остки томонини) қарайлик. Сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагида ($k=1, 2, ..., n$) ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k;, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (Oxy, Oyz, Ozx) текисликдаги проекцияси (D_k) ((D'_k), (D''_k), (D''_k)) нинг юзига кўпайтирилиб, қуйидаги интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cdot D_k \qquad (10)$$

$$\left(\sigma' = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D\rho_k,\ \sigma'' = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\cdot D''_k\right)$$

(S) сиртнинг шундай

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m,\ \ldots \qquad (11)$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрлаларидан ташкил топган

$$\lambda_{p_1},\ \lambda_{p_2},\ \ldots,\ \lambda_{p_m},\ \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_{p_m}=0.$

Бундай P_m $(m=1,2,\ \ldots)$ бўлинишларга нисбатан

$f(x,y,z)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз.

Натижада

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_m,\ \ldots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (11) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, $(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)$ нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити дейилади ва у

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sigma=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\cdot D_k=I$$

каби белгиланади.

2-таъриф. Агар $\lambda_p\to 0$ да $f(x,y,z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси $\sigma(\sigma',\ \sigma'')$ чекли лимитга эга бўлса, $f(x,y,z)$ функция (S) сиртнинг танланган томони бўйича интегралланувчи функция дейилади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса $(I',\ I'')$, $f(x,y,z)$ функциянинг (S) сиртнинг танланган томони бўйича иккинчи тур интеграли дейилади ва у

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dxdy\left(\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dydz,\ \iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dzdx\right)$$

каби белгиланади:

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dxdy=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\cdot D_k.$$

$$\left(\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dydz=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)D'_k,\right.$$

$$\left.\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dzdx=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)D''_k\right)$$

Умумий ҳолда (S) сиртда $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ва $R(x,y,z)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dxdy,\ \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dydz, \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dzdx$$

интеграллар бор бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dydz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dzdx$$

йиғинди иккинчи тур сирт интегралининг умумий кўриниши дейилади ва у

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dxdy + Q(x,y,z)\,dydz + R(x,y,z)\,dzdx$$

каби белгиланади:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dxdy + Q(x,y,z)\,dydz + R(x,y,z)\,dzdx =$$

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dydz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dzdx.$$

Фазода бирор (V) жисм берилган бўлсин. Бу жисмни ўраб турган ёпиқ сирт силлиқ сирт бўлиб, уни (S). дейлик. $f(x,y,z)$ функция (V) да берилган. Oxy текисликка параллел бўлган текислик билан (V) ни икки қисмга ажратамиз: $(V)=(V_1)+(V_2)$. Натижада уни ўраб турган (S) сирт ҳам икки (S_1) ва (S_2) сиртларга ажралади.

Ушбу

$$\iint\limits_{(S_1)} f(x,y,z)\ dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y,z)\ dxdy$$

интеграл $f(x,y,z)$ функциянинг ёпиқ сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли дейилади ва

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\ dxdy$$

каби белгиланади. Бунда биринчи интеграл (S_1) сиртнинг устки томони, иккинчи интеграл эса (S_2) сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Худди шунга ўхшаш

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\ dydz,\ \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\ dzdx$$

ҳамда, умумий ҳолда,

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)\ dydz + Q(x,y,z)\ dydz + R(x,y,z)\ dzdx$$

интеграллар таърифланади.

Эслатма. Иккинчи тур сирт интегралларда сиртнинг қайси томони (устки ёки пастки томони; ташқи томони ёки ички томони) бўйича интеграллана-ётганлиги таъкидлаб борилади.

2. Интегралнинг мавжудлиги. Фазода (S) сирт $z=z(x,\ y)$ тенглама билан берилган. Бунда $z=z(x,\ y)$ функция чегараланган (D) соҳада $((D)\subset R^2)$ узлуксиз ва (D) да узлуксиз $z'_x(x,\ y)$, $z'_y(x,\ y)$ хусусий ҳосилаларга эга.

3-теорема. **Агар $f(x,y,z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли**

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\ dxdy$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S')} f(x,y,z)\ dydz = \iint_{(D')} f(x(y,z),\ y,z)\ dydz$$

бўлади.

Фазода (S') сирт $x=x(y,z)$ тенглама билан берилган. Бунда $x=x(y,z)$ функция чегараланган ёпиқ (D') соҳада $((D')\subset R^2)$ узлуксиз ҳамда узлуксиз $x'_y(y,z)$, $x'_z(y,z)$ хусусий ҳосилаларга эга.

4-теорема. **Агар $f(x,y,z)$ функция (S') сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S') сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли**

$$\iint_{(S')} f(x,y,z)\ dydz$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S')} f(x,y,z)\ dydz = \iint_{(D')} f(x,y,z),\ y,z)\ dydz$$

бўлади.

Фазода (S'') сирт $y=y(z,x)$ тенглама билан берилган. Бунда $y=y(z,x)$ функция чегараланган (D'') соҳада $((D'')\subset R^2)$ узлуксиз ва (D) да узлуксиз $y'_z(z,x)$, $y'_x(z,x)$ хусусий ҳосилаларга эга.

5-теорема. **Агар $f(x,y,z)$ функция (S'') сиртда**

берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S'') сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint\limits_{(S'')} f(x,y,z)\ dzdx$$

мавжуд ва

$$\iint\limits_{(S'')} f(x,y,z)\ dzdx = \iint\limits_{(D'')} f(x,y(z,x),z)\ dzdx$$

бўлади.

3. Интегралнинг хоссалари. Иккинчи тур сирт интеграллари икки каррали интегралларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

Қуйида иккинчи тур сирт интегралларига хос иккита хоссасини келтириш билан кифояланамиз.

1°. Функциянинг (S) сиртнинг бир томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли, функциянинг шу сиртнинг иккинчи томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интегралидан фақат ишораси билан фарқ қилади.

2°. $f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy$$

учун

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy = 0$$

бўлади.

$f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Ox ўқига параллел бўлган цилиндрнинг (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz$$

учун

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz = 0$$

бўлади.

$f(x,y,z)$ функциянинг ясовчилари Oy ўқига параллел бўлган цилиндрнинг (S) сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdz$$

учун

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdz = 0$$

бўлади.

4. **Интегрални ҳисоблаш.** Иккинчи тур сирт интеграллари икки каррали интегралларга келтириб ҳисобланади:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy, \qquad (12)$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz = \iint\limits_{(D)} f(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (13)$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dzdx = \iint\limits_{(D)} f(x,y(z,x),z)dzdx. \qquad (14).$$

5. **Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш.** (S) сирт ва бу сиртда берилган $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ва $R(x,y,z)$ функциялар 1- пунктдаги шартларни қаноатлантирсин. Унда ушбу

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

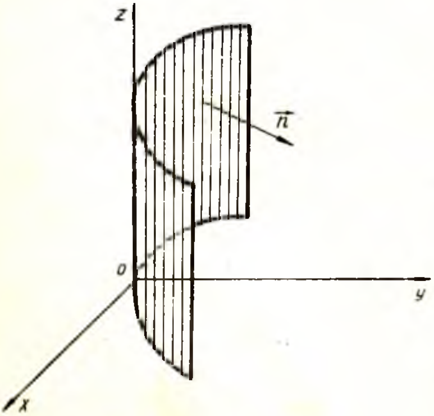
$$= \iint\limits_{(S)} [R(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{ds} \qquad (15)$$

формула ўринли бўлади.

11- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} (ax^2 + by + cz^2)\, dxdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ сиртнинг $y = 2p$, $z = 0$, $z = q$ текисликлар орасидаги қисмининг ички томони (27- чизма).



27- чизма.

(S) сиртнинг Oxz текислигидаги проекцияси $(D)=$ $=\{(x,z)\in R^2\colon -2p\leqslant x\leqslant 2p,\ 0\leqslant z\leqslant q\}$ бўлади.

(S) сиртнинг ихтиёрий нуқтасига ўтказилган нормал Oy ўқи билан ўткир бурчак ташкил қилганлиги сабабли сирт интеграли мусбат ишора билан олинади. Юқоридаги (14) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\iint\limits_{(S)}(ax^2+by+cz^2)\,dxdz=\iint\limits_{(D)}\left(ax^2+b\cdot\frac{x^2}{2p}+cz^2\right)dxdz.$$

Энди икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{(D)}\left(ax^2+\frac{b}{2p}x^2+cz^2\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-2p}^{2p}\left(\int\limits_{0}^{q}\left[(a+\frac{b}{2p})x^2+cz^2\right]dz\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2p}^{2p}\left[q\left(a+\frac{b}{2p}\right)x^2+\frac{cq^3}{3}\right]dx=\frac{16}{3}p^3q\left(a+\frac{b}{2p}\right)+\frac{4}{3}pcq^3.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)}(ax^2+by+cz^2)dxdz=\frac{16}{3}p^3q\left(a+\frac{b}{2p}\right)+\frac{4}{3}pcq^3.$$

12-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоиднинг $z=0$ текисликдан пастда жойлашган қисми бўлиб, интеграл шу сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Равшанки, (S) сиртнинг тенгламаси

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

ва унинг Oxy текисликдаги проекцияси

$$(D)=\left\{(x,y)\in R^2\colon\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$$

бўлади.

(S) сирт ва бу сиртда берилган

$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz$ функция ҳам 5- теореманинг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда (12) формуладан фойдаланиб,

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$$

бўлишини топамиз. Интеграл (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли сирт интеграли минус ишора билан олинади.

Энди

$$-\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}\left(kc\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

икки каррали интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегралда ўзгарувчиларни

$$x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi$$

каби алмаштириб топамиз:

$$\iint\limits_{(D)}\left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(kc\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)ab\rho d\rho\right)d\varphi=$$

$$=ab\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1 kc\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^3\right)d\rho d\varphi=$$

$$=2\pi ab\left[-\frac{kc}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2}-\frac{\rho^4}{4}\right]\Big|_0^1=2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy=2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

13- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$$

ярим сферанинг ташқи қисми.

Равшанки, (S) сиртнинг тенгламаси

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

кўринишга эга. Бу функциянинг хусусий ҳосилалари

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

бўлиб,

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

бўлади.

Берилган иккинчи тур сирт интегралини (15) формуладан фойдаланиб биринчи тур сирт интегралига келтирамиз:

$$\iint\limits_{(S)}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(S)}[x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma]ds.$$

Агар

$$\cos\alpha=-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}=\frac{x}{a},$$

$$\cos\beta=-\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}=\frac{y}{a},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a}=\frac{z}{a}.$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи тур сирт интеграли

$$\frac{1}{a}\iint\limits_{(S)}(x^3+y^3+z^3)\,ds$$

кўринишга келади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{1}{a}\iint\limits_{(S)}(x^3+y^3+z^3)ds.$$

Энди (5) формуладан фойдаланиб, биринчи тур сирт интегралини ҳисоблаймиз:

$$\frac{1}{a}\iint\limits_{(S)}(x^3+y^3+z^3)ds=\frac{1}{a}\iint\limits_{(D)}[x^3+y^3+(\sqrt{a^2-x^2-y^2})^3]\times$$

$$\times\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\iint\limits_{(D)}\frac{x^3+y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+$$

$$+\iint\limits_{(D)}(a^2-x^2-y^2)dxdy, \tag{16}$$

бунда $D=\{(x,\ y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant a^2\}$. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи турган икки каррали интегрални ҳисоблаш учун

$$x=a\rho\cos\varphi,\ y=a\rho\sin\varphi\ (0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$\iint\limits_{(D)}\frac{x^3+y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a^4\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}d\varphi\right)d\rho=$$

$$=a^4\int\limits_0^1\rho^4\left(\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi\right)\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=0$$

(чунки $\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi=0$ бўлади).

Энди (16) муносабатдаги $\iint\limits_{(D)}(a^2-x^2-y^2)\,dxdy$ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{(D)}(a^2-x^2-y^2)dxdy=a^4\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)\rho d\varphi\right)d\rho=$$

$$=2\pi a^4\int\limits_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=\frac{1}{2}a^4\pi.$$

Шундай қилиб, берилган иккинчи тур сирт интегралини $\frac{1}{2}a^4\cdot\pi$ га тенг эканини топдик:

$$\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{1}{2}a^4\pi.$$

14- мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c\}$$

параллелепипеднинг ташқи сирти, f, g, h лар шу сиртда аниқланган узлуксиз функциялардир.

Равшанки,

$$(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)$$

бунда (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), (S_5), (S_6)лар параллелепипеднинг томонларидир:

$$\begin{aligned}
(S_1)&=\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ z=0\},\\
(S_2)&=\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ z=c\},\\
(S_3)&=\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ y=0,\ 0\leqslant z\leqslant c\},\\
(S_4)&=\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ y=b,\ 0\leqslant z\leqslant c\},\\
(S_5)&=\{(x,y,z)\in R^3: x=0,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c\},\\
(S_6)&=\{(x,y,z)\in R^3: x=a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c\}.
\end{aligned}$$

Интеграл хоссасига кўра

$$\iint\limits_{(S)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=$$

$$=\sum_{h=1}^{6}\iint\limits_{(S_k)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги сирт интегралларни ҳисоблашда, (S_1), (S_3), (S_5) сиртлар бўйича интеграллар манфий ишора билан, (S_2), (S_4), (S_6) сиртлар бўйича интеграллар эса мусбат ишора билан олинишини эътиборга оламиз. Шунингдек, интегралнинг 2°- хоссасидан фойдаланамиз. Натижада

$$\iint\limits_{(S_1)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=\iint\limits_{(S_1)} h(z)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^b h(0)dy\right)dx=-h(0)\cdot ab,$$

$$\iint\limits_{(S_2)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=\iint\limits_{(S_2)} h(z)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^b h(c)dy\right)dx=h(c)\cdot ab$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш

$$\iint\limits_{(S_3)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=-g(0)ac,$$

$$\iint\limits_{(S_4)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dydx=g(b)ac,$$

$$\iint\limits_{(S_5)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dydx=-f(0)bc,$$

$$\iint\limits_{(S_6)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=f(a)bc$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\iint\limits_{(S)} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy=$$

$$=\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]\cdot abc.$$

Мисол ва масалалар

24. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} x^2y^2zdxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2+y^2+z^2=$ $=z^2$ сферанинг $z=0$ текисликдан пастда жойлашган қисмининг устки томони.

25. Ушбу

$$I_1=\iint\limits_{(S)} x^2dydz,\quad I_2=\iint\limits_{(S)} y^2dzdx$$

интегралларни ҳисобланг, бунда (S) сирт $(x-1)^2+(y-$ $-1)^2+(z-1)^2=1$ сферанинг ташқи томони.

26. Ушбу

$$I_1=\iint\limits_{(S)}dxdy,\ I_2=\iint\limits_{(S)}zdxdy,\ I_3=\iint\limits_{(S)}z^2dxdy$$

интегралларни ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоиднинг ташқи томони.

27. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}2dxdy+ydxdz-x^2zdydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $4x^2+y^24z^2=4$ эллипссоиднинг биринчи октантда жойлашган қисмининг ташқи томони.

28. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(y^2+z^2)dydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x=a^2-y^2-$ $-z^2$ параболоиднинг Oyz текислик ажратган қисмининг ташқи томони.

29. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}zdxdy+ydxdz+zdydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$$

кубнинг ташқи сирти.

30. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2+3z^2)dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z=\sqrt{x^2+y^2}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z=0$, $z=2$ текисликлар орасидаги қисмининг ташқи томони.

31. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$ тенглама билан берилган сиртнинг $z=0$ текислик ажратган қисмининг ички (пастки) томони.

32. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} (2x^2+y^4+z^4)dydz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x=yz$ ($y\geqslant 0$, $z\geqslant\geqslant 0$) сиртнинг $(y^2+z^2)^2=2b^2yz$ цилиндр ажратган қисмининг ташқи томони.

33. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $y=b^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$ сиртнинг $y=0$ текислик ажратган қисмининг ички қисми.

34. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} yzdydz+xzdzdx+xydxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт тетраэдр сиртининг $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ текисликлар билан чегараланган қисмининг ташқи томони.

3-§. СТОКС ҲАМДА ОСТРОГРАДСКИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

1. Стокс формуласи. Стокс формуласи сирт бўйича олинган интеграл билан шу сиртнинг чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интегрални боғловчи формуладир.

Фазода икки томонли силлиқ (S) сирт берилган бўлиб, унинг чегараси $\partial(S)$ эса бўлакли — силлиқ эгри чизиқдан иборат бўлсин. (S) сиртда $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар аниқланган. Бу функциялар (S) да узлуксиз ҳамда барча аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларига эга. У ҳолда ушбу

$$\oint\limits_{\partial(S)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right]dxdy+$$

$$+\left[\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right]dydz+\left[\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right]dzdx \qquad (17)$$

формула ўринли бўлади. Одатда (17) Стокс формуласи дейилади.

Хусусан, (S) сирт сифатида Oxy текисликдаги (D) соҳа олинса, унда $z=0$ бўлиб, (17) формуладан

$$\oint\limits_{\partial(D)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right]dxdy.$$

Грин формуласи келиб чиқади.

Биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро богловчи формуладан фойдаланиб, Стокс формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\oint\limits_{\partial(S)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds. \tag{18}$$

15-мисол. Ушбу

$$\oint\limits_{K} e^x dx+z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy+yz^3dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K эгри чизиқ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ сиртнинг $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$ текисликлар билан кесишган чизиқларидан ташкил топган ёпиқ чизиқдир. Бу интегрални ҳисоблашда Стокс формуласидан фойдаланамиз. Берилган интегралда

$$P=e^x,\ Q=z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\ R=yz^3$$

бўлиб,

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\ \frac{\partial p}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3xz\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\frac{\partial R}{\partial x}=0,\ \frac{\partial R}{\partial y}=z^3$$

эканини топамиз.

(17) формулага кура

$$\oint\limits_{K} e^x dx+z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy+yz^3dz=$$

$$= \iint\limits_{(S)} (3xz\sqrt{x^2+y^2} - 0)dxdy + (z^3 - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}) \times$$

$$\times\, dydz + (0-0)dzdx = \iint\limits_{(S)} 3xz\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy +$$

$$+\left[(\sqrt{x^2+y^2})^3 - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]dydz = 3\iint\limits_{(S)} xz\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

бўлади, бунда (S) сирт K чизиқ билан чегараланган конус сирт ($z=\sqrt{x^2+y^2}$).

(S) сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси

$$(D)=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

бўлади.

Сирт интеграли (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли

$$3\iint\limits_{(S)} xz\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = -3\iint\limits_{(D)} x\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

бўлади. Натижада

$$\oint\limits_{K} e^x dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy + yz^3dz = -3\iint\limits_{(D)} x(x^2+y^2)dxdy =$$

$$= -3\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^2 (x^3+xy^2)dx\Big)dy = -14.$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\oint\limits_{k} (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K ёниқ чизиқ

$$x=a\sin^2 t,\ y=2a\sin t\cos t,\ z=a\cos^2 t\ \ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

эллипсдан иборат.

Бу интегрални Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

Равшанки,

$$P=y+z,\ Q=z+x,\ R=x+y$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial P}{\partial z}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1, \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\ \frac{\partial R}{\partial x}=1,\ \frac{\partial R}{\partial y}=1$$

бўлади. (18) формулага биноан

$$\oint_K (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=$$

$$=\iint_{(S)}[(1-1)\cos\alpha+(1-1)\cos\beta+(1-1)\cos\gamma]ds=0$$

бўлади.

17-мисол. Ушбу

$$\oint_K ydx+zdy+xdz$$

интегрални ҳисобланг, бунда K ёпиқ чизиқ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

айланадан иборат бўлиб, йўналиши эса соат стрелкасига қаршидир.

Бу интегрални ҳисоблашда ҳам Стокс формуласидан фойдаланамиз. Бу ҳолда

$$P=y,\ Q=z,\ R=x$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial P}{\partial z}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\ \frac{\partial R}{\partial x}=1,\ \frac{\partial R}{\partial y}=0$$

бўлади.

(18) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_K (ydx+zdy+xdz)=\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds=$$

$$=-\iint_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds.$$

Бу ерда (S) сирт $x+y+z=0$ текисликнинг берилган айлана билан чегараланган қисми.

Энди $x+y+z=0$ текислик тенгламасини нормал ҳолга келтириб,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

бўлишини аниқлаймиз. Натижада

$$\oint\limits_{K} ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)} ds$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\iint\limits_{(S)} ds=\pi a^2.$$

Демак,

$$\oint\limits_{K} ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\pi a^2=-\sqrt{3}\cdot\pi a^2.$$

2. **Остроградский формуласи.** Фазода, пастдан $z=\varphi_1(x,y)$ тенглама билан аниқланган силлиқ (S_1) сирт билан, юқоридан $z=\varphi_2(x,y)(\varphi_1(x,y)\leqslant \leqslant\varphi_2(x,y)$ тенглама ёрдамида аниқланган силлиқ (S_2) сирт билан, ён томонларидан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S_3) сирт билан чегараланган (V) соҳани (жисмни) қарайлик. (V) да $R(x,y,z)$ функция аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (V) да узлуксиз

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(S)}R(x,y,z)dxdy \tag{19}$$

бўлади, бунда (S) сирт (V) жисмни ўраб турувчи сирт.

Худди шунга ўхшаш (V) жисм ҳамда $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)dxdz, \tag{20}$$

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}dxdydz=\iint\limits_{(S)}Q(x,y,z)dxdz \tag{21}$$

формулалар ўринли бўлади.

Айтайлик, (V) жисм юқоридаги (19), (20), (21) формулаларни ўринли бўлишида қўйилган шартни бажарган бўлиб, унда $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар

(V) да узлуксиз ва (V) да узлуксиз $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy \qquad (22)$$

бўлади. Буни Остроградский формуласи дейилади.

Биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро боғловчи формуладан фойдаланиб, Остроградский формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}[P(x,y,z)\cos a+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]ds \qquad (23)$$

18-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)}4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт $x^2+y^2=a^2$ цилиндрнинг $z=0$, $z=h$ текисликлар орасидаги қисмининг тўлиқ сиртидан иборат (28- чизма).

Берилган интегрални ҳисоблашда Остроградский формуласидан фойдаланамиз. Бу интеграл учун

$$P=4x^3,\ Q=4y^3,\ R=-6z^4$$

бўлиб,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=12x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2,\ \frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3$$

эканлигини топамиз.

(22) формулага кўра

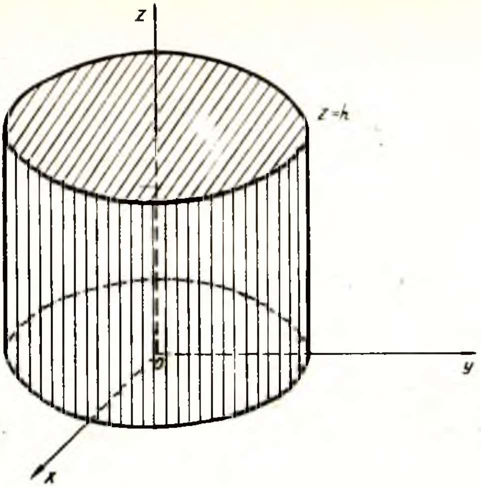
$$\iint\limits_{(S)}4x^3dydz+4y^3dzdx-6z^4dxdy=$$

$$=12\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2-2z^3)dxdydz$$

бўлади, бунда

$$(V)=\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2=a^2,\ 0\leqslant z\leqslant h\}.$$

Кейинги тенгликдаги уч каррали интегрални ҳисоблаймиз.



28- чизма.

Равшанки,

$$12\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2-2z^3)dxdydz=$$

$$=12\iint\limits_{(D)}\left[\int\limits_0^h(x^2+y^2-2z^3)dz\right]dxdy=$$

$$=12\iint\limits_{(D)}\left[(x^2+y^2)h-\frac{h^4}{2}\right]dxdy,$$

бунда

$$(D)=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

Агар ўзгарувчиларни

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi\quad (0\leqslant\rho\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

деб алмаштирсак, унда

$$12\iint\limits_{(D)}\left[(x^2+y^2)h-\frac{h^4}{2}\right]dxdy=$$

$$=12\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^a\left(\rho^3-\frac{h^3}{2}\rho\right)d\rho\right]d\varphi=6\pi a^2h(a^2-h^3)$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\iint\limits_{(S)}4x^3dydz+4y^3dzdx-6z^4dxdy=6\pi a^2h(a^2-h^3).$$

19-мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

интегрални ҳисобланг, бунда (S) сирт

$$\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a\}$$

кубнинг ташқи томони. Бу интегрални Остроградский формуласи билан таққослаб

$$P=x^2,\ Q=y^2,\ R=z^2$$

бўлишини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial R}{\partial z}=2z.$$

Остроградский формуласига кўра:

$$\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy =$$

$$=2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz.$$

Энди $(V)=\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a\}$ эканини эътиборга олиб, уч каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz = 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz =$$

$$=2\left[\int_0^a dx\int_0^a\left[(x+y)a+\frac{a^2}{2}\right]dy\right]=$$

$$=2\left[\int_0^a\left[a^2x+\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}\right]dx\right]=3a^4.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 3a^4.$$

20-мисол. Фазодаги (V) жисмнинг ҳажми

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$$

бўлишини исботланг, бунда (S) сирт (V) жисмни ўраб турган сирт, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар (S) сирт ташқи нормалининг йўналтирувчи косинуслари.

Остроградский формуласининг (23) кўринишидан фойдаланиб топамиз:

$$\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz = 3\iiint\limits_{(V)} dxdydz.$$

Маълумки,

$$\iiint\limits_{(V)} dxdydz = V$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, юқоридаги тенгликдан

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизиқли интегралларни сирт интеграллари орқали ифодаланг:

35. $\oint\limits_{K} ydx + zdy + xdz.$

36. $\oint\limits_{K} x^2y^3dx + dy + dz.$

37. $\oint\limits_{K} (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz.$

38. $\oint\limits_{K} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz.$

39. Ушбу $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$ функциялар учун Стокс формуласи (17) нинг ўринли бўлишини текширинг, бунда K эгри чизиқ $x^2 + y^2 + a^2$, $z = 0$ айланадан иборат бўлиб, (S) сирт эса $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ ярим сферанинг устки томони.

40. Ушбу $P=y$, $Q=z$, $R=x$ функциялар учун Стокс формуласи (17) нинг ўринли бўлишини текширинг, бунда k эгри чизиқ

$$x=a\cos^2 t,\ y=a\sqrt{2}\sin t\cos t,\ z=a\sin^2 t\ \ (0\leqslant t\leqslant\pi)$$

айлана бўлиб, (S) сирт эса шу айлана билан чегараланган доирадир.

Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг:

41. $\oint\limits_K (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, бунда K эгри чизиқ ушбу $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ айланадан иборат.

42. $\oint\limits_K (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, бунда K эгри чизиқ $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ $(a>0,\ c>0)$ эллипсдан иборат.

43. $\oint\limits_K xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$, бунда K ушбу $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=a(\sin t+\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ эгри чизиқдан иборат.

Остроградский формуласидан фойдаланиб, қуйидаги сирт интегралларини уч каррали интеграл орқали ифодаланг (S сирт (V) жисмни ўраб турувчи сирт).

44. $\iint\limits_{(S)} xydxdy+yzdydz+zxdzdx.$

45. $\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy.$

46. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds.$

Остроградский формуласидан фойдаланиб, қуйидаги сирт интегралларни ҳисобланг:

47. $\iint\limits_{(S)} xdydz+ydzdx+zdxdy$, бунда (S) сирт $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ташқи томони.

48. $\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, бунда (S) сирт

$\{(x,y,z)\in R^3: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a\}$ куб сиртининг ички томони.

49. $\iint\limits_{(S)} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, бунда (S) сирт ушбу $x^2+y^2+z^2=r^2$ сферанинг ташқи томони.

50. $\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, бунда (S) сирт ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$ конус тўла сиртининг ташқи томони.

XX боб

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

1-§. ФУРЬЕ ҚАТОРИ ТУШУНЧАСИ

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки,

$f(x)\cdot\cos nx$, $f(x)\cdot\sin nx$ $(n=1,2,3,\ldots)$ функциялар ҳам $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ (n=1,2,3,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx,\ (n=1,2,3,\ldots). \qquad (1)$$

1-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

функционал қатор $[-\pi, \pi]$ *да берилган* $f(x)$ *функциянинг Фурье қатори дейилади.* a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... , a_n, b_n, ... *сонлар* $f(x)$ *функциянинг Фурье коэффициентлари дейилади.*

(1) қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлиши қуйидагича ёзилади:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Агар $f(x)$ жуфт функция бўлса, у ҳолда унинг Фурье коэффициентлари

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx dx,\ (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=0\ (n=1,2,\ 3,\ \ldots)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx$$

бўлади.

Агар $f(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда унинг Фурье коэффициентлари

$$a_n=0\ (n=0,1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-0}^{\pi}f(x)\sin nx dx\ (n=1,2,\ldots)$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin nx$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-l,\ l]$ да $(l>0)$ берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\ (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\,(n=1,2,3,\ldots)$$

2-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

функционал қатор $[-l,\ l]$ *да берилган* $f(x)$ *функциянинг Фурье қатори дейилади.* $a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \dots,\ a_n,\ b_n,\ \dots$ сонлар *Фурье коэффициентлари дейилади.*

(2) қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлиши қуйидагича ёзилади:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=e^{\alpha x}\ \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi,\ \alpha=0)$$

функциянинг Фурье қаторини тузинг.

Юқорида келтирилган (1) формуладан фойдаланиб, бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\pi}(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})=\frac{2}{\alpha\pi}\operatorname{sh}\alpha\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cdot\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha\cdot\cos nx+n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\,e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^n\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}\operatorname{sh}\alpha\pi,\ (n=1,2,3,\dots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha\sin nx-n\cos nx}{\alpha^2+n^2}\cdot e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\operatorname{sh}\alpha\pi\ \ (n=1,2,3,\dots)$$

Унда берилган функциянинг Фурье қатори

$$e^{\alpha x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{2\operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cdot(\alpha\cos nx-n\sin nx)\right]$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^2 \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

жуфт функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Юқоридаги (1) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=-\frac{4}{n\pi}\left[\left(-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=(-1)^n\frac{4}{n^2} \ (n=1,2,3,...)$$

Демак, $f(x)=x^2$ функциянинг Фурье қатори

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x)=x$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

(1) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Bigg|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=-\frac{2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad (n=1, 2, ...)$$

Демак, $f(x)=x$ функциянинг Фурье қатори

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$f(x)=e^x \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

(3) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз. Равшанки, бу ҳолда $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1} e^x dx=e-e^{-1},$$

$$a_n=\int_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x dx=\frac{n\pi\sin n\pi x+\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}\cdot e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\cdot(e\cdot\cos n\pi-e^{-1}\cos n\pi)=(-1)^n\cdot\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}$$

$$(n=1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1} e^x\sin n\pi x dx=\frac{\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}(en\pi\cos n\pi+e^{-1}n\pi\cos n\pi)=$$

$$=\frac{n\pi\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}(e^{-1}-e)=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}n\pi \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

Демак, $f(x)=e^x$ функциянинг $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ Фурье қатори

$$e^x \infty \frac{e-e^{-1}}{2}+(e-e^{-1})\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}n\pi\sin n\pi x\right]$$

бўлади.

5- мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{агар } -\pi\leqslant x\leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{\pi}x^2, & \text{агар } 0< x\leqslant\pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Бу функциянинг Фурье қаторини ёзиш учун, аввало унинг Фурье коэффициентларини (1) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{5}{6}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}-x\cos nxdx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{3(-1)^n-1}{\pi n^2},$$

$$b_n=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}-x\sin nxdx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi^2n^3}.$$

Қаралаётган функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$f(x)\sim\frac{5}{12}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3\cdot(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^3}\cdot\sin nx\right]$$

6-мисол. $[-\pi,\ \pi]$'да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи $f(x)$ функция Фурье қатори

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

нинг қисмий йиғиндиси

$$T_n(f;x)=T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

учун

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

Берилган функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$T_n(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ни олиб, ундаги a_0, a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодалари

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt, \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt, \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

ни қўйиб топамиз:

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\cos kt\cdot\cos kx+$$

$$+\sin kt\cdot\sin kx]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big[\frac{1}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big]dt.$$

Равшанки,

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ky=2\sin\frac{y}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right]\cdot\frac{2}{2\sin\frac{y}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}\left[\sin\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)y-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y.$$

Кейинги тенгликда $y=t-x$ дейилса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}$$

муносабатга эга бўламиз. Натижада исботланиши лозим бўлган

$$T_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

тенгликка келамиз.

Одатда (4) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихле интеграли дейилади.

2-§. ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ ЯҚИНЛАШУВЧИЛИГИ

Фурье қаторининг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремаларни келтиришдан аввал функциянинг бўлакли-дифференциалланувчи тушунчасини эслатиб ўтамиз.

$[a, b]$ оралиқни

$$[a, b]=[a_0, a_1]\cup[a_1, a_2]\cup\ldots\cup[a_{n-1}, a_n]$$
$$(a_0=a,\ a_n=b)$$

бўладиган шундай

$$[a_0, a_1],$$
$$[a_1, a_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[a_{n-1}, a_n]$$

бўлакларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлса ҳамда $x=a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(a_k+0)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ва чап $f'(a_k-0)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи дейилади.

1-теорема. **2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье қатори**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$[-\pi,\ \pi)$ да яқинлашувчи бўлиб, $x\in(-\pi,\ \pi)$ да $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ бўлади.

$x=\pm\pi$ бўлганда $f(x)$ функция Фурье қаторининг йиғиндиси

$$\frac{1}{2}|f(-\pi+0)+f(\pi-0)|$$

га тенг бўлади.

2-теорема. **Агар 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да узлуксиз, бўлакли-дифференциалланувчи ва $f(-\pi)=f(\pi)$ бўлса, бу функциянинг Фурье қатори $[-\pi,\ \pi]$ да яқинлашувчи бўлиб,**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

бўлади.

Бу ҳолда $f(x)$ функция Фурье қаторига ёйилади дейилади.

7-мисол. $[-\pi,\ \pi]$ да берилган ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } -\pi\leqslant x<0 \text{ бўлса,}\\ -1, & \text{агар } 0\leqslant x<\pi \text{ бўлса}\end{cases}$$

2π даврли функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Берилган функция юқорида келтирилган 1-теореманинг шартларини қаноатлантиради. Бинобарин, бу функция Фурье қаторига ёйилади. Бу ёйилмани топиш учун $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини тузамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}(-1)dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-\cos nx)dx=0\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

$$-b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-\sin nx)dx=\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1], \qquad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Демак,

$$a_n=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$
$$b_{2n}=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$$
$$b_{2n-1}=-\frac{4}{(2n-1)\cdot\pi}.$$

Барча $x\in(-\pi, \pi)$, $x\neq 0$ нуқталарда

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

бўлади.

$x=0$ нуқтада берилган функциянинг Фурье қатори йиғиндиси

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

га тенг.

$x=-\pi$, $x=\pi$ нуқталарда қатор йиғиндиси мос равишда

$$\frac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=0,$$
$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=0$$

бўлади.

8- мисол. Ушбу

$$f(x)=\cos ax \qquad (0<a<1)$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Бу функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos axdx=2\cdot\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cdot\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)x+$$
$$+\cos(a-n)x]\,dx=(-1)^n\cdot\frac{2a}{a^2-\pi^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{\pi}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$
$$b_n=0\ (n=1,\ 2,\ \dots).$$

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$\cos ax \sim \frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx$$

бўлади. Қаралаётган функция 2- теореманинг шартларини бажаради. Шунинг учун $f(x)=\cos ax$ функция Фурье қаторига ёйилади:

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx$$

Агар кейинги тенгликда $x=0$ дейилса, унда

$$1=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right]$$

бўлиб, ушбу

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Мисол ва масалалар

$(-\pi,\ \pi)$ да берилган қуйидаги функцияларнинг Фурье қаторларини тузинг:

1. $f(x)=2x+3$.
2. $f(x)=\sin x+\sin 2x$.
3. $f(x)=|x|$.
4. $f(x)=x+x^2$.
5. $f(x)=|\cos x|$.

$(-1,\ 1)$ оралиқда берилган қуйидаги функцияларнинг Фурье қаторларини ёзинг:

6. $f(x)=x^2$.
7. $f(x)=|2x|$.
8. $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар } -1\leqslant x<0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } 0\leqslant x<1 \text{ бўлса.}\end{cases}$
9. $f(x)=x^4$.
10. $f(x)=e^{2x}$.

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган оралиқларда Фурье қаторларига ёйинг:

11. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$.

12. $f(x)=\pi^2-x^2$, $-\pi<x<\pi$.

13. $f(x)=\sin ax$, $-\pi<x<\pi$, $a\notin Z$.

14. $f(x)=\operatorname{sh} ax$, $-\pi<x<\pi$.

15. $f(x)=x\sin x$, $-\pi<x<\pi$.

Қуйидаги функцияларни Фурье қаторларига ёйинг:

16. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$

17. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } -\pi<x<0 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } 0\leqslant x<\pi \text{ бўлса.}\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{агар } -\pi\leqslant x<0 \text{ бўлса,}\\ \pi, & \text{агар } 0<x\leqslant\pi \text{ бўлса.}\end{cases}$

19. $f(x)=|\sin x|$

20. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } -2<x<0 \text{ бўлса,}\\ 2, & \text{агар } 0<x<2 \text{ бўлса.}\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}x, & \text{агар } -\pi\leqslant x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \frac{\pi}{4}(\pi-x), & \text{агар } 0<x\leqslant\pi \text{ бўлса.}\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right), & \text{агар } -\pi\leqslant x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right), & \text{агар } 0\leqslant x\leqslant\pi \text{ бўлса.}\end{cases}$

Функцияларнинг Фурье қаторларига ёйилмаларидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

(Кўрсатма, $f(x)=x^2$ функцияни $[-\pi,\pi]$ да Фурье қаторига ёйинг, сўнг $x=0$ деб олинг).

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi}\right)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^2} = \frac{7}{12}\pi^2$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$.

ЖАВОБЛАР

XII боб

Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити ва узлуксизлиги

10. $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$. **11.** $\left(27, -\frac{15}{2}\right)$. **12.** $(1, 1)$. **13.** $(3, 4)$. **14.** $(11, 1)$. **15.** $(1, 1)$. **16.** $(1, 1)$. **17.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **18.** $(0, 0)$. **19.** $(0, 0)$. **20.** $(1, 2)$. **21.** $R^2 \setminus \{(x, y): x+y=0\}$. **22.** $y=-x$ чизиқ нуқталари ва бу чизиқдан юқорида жойлашган барча нуқталар тўплами. **23.** Текисликнинг биринчи чоракдаги барча нуқталари тўплами. **24.** Текисликнинг иккинчи чоракдаги нуқталари тўплами. **25.** $\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$. **26.** $\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant 9\}$. **27.** $2k\pi \leqslant x < (2k+1)\pi$, агар $y \geqslant 0$ бўлса $(2k+1)\pi \leqslant x \leqslant (2k+2)\pi$, агар $y<0$ бўлса $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **28.** $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \geqslant \sqrt{y}$. **29.** $\{(x, y): x+y>0\}$. **30.** Бутун текислик (Oxy). **31.** $y=x$. **32.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гипербола тармоқлари орасидаги текислик қисми. **33.** $R \setminus \{(x, y): x=1, y=0\}$. **35.** $\{(x, y): -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. **36.** $\{(x, y): x \leqslant x^2+y^2 < 2x\}$. **37.** $\{(x, y): 2k\pi \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi(2k+1)\}$, $k \in Z$. **38.** $\{(x, y): x+y<0\}$. **39.** $\{(x, y): x^2+y^2=9\}$. **40.** $y^2=x$, $y^2=-x$, $y=2$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчак. ($O(0, 0)$ нуқта кирмайди). **41.** $\{(x, y): 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$. **43.** $\frac{1}{2a}$. **44.** 3. **45.** 0. **46.** 0. **47.** e^a. **48.** 0. **49.** 0. **50.** 1. **51.** 0. **52.** 1. **53.** e. **54.** 0. **55.** 1. **56.** 1. **57.** 0. **58.** 0. **59.** 0. **60.** 1. **61.** 1. **62.** $\ln 2$. **73.** 1, -1. **74.** 1, 1. **75.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **76.** $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. **77.** 1, -1. **78.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$. **79.** 0, 1. **80.** $\frac{1}{2}$, 1. **81.** 0, 1. **82.** 1, 1. **83.** 0, 1. **84.** 1, ∞. **85.** 0, 1. **86.** 0, 0. **87.** $(1, 1)$ да узилади. **88.** $y=2x$ да узилади. **89.** узлуксиз. **90.** $y=-x$ да узилади. **91.** $x^2+y^2=4$ да узилади. **92.** $y^2=-x$ да узилади. **93.** $y=x$ да узилади. **94.** $x^2+y^2=5$ да узилади. **95.** $(0, 0)$ да узилади. **96.** $(0, 0)$ да узилади. **97.** $y=-x$ да узилади. **98.** $x=0$, $y=0$ координата ўқларида узилади. **99.** $x=n\pi$, $n \in Z$, $y=m\pi$, $m \in Z$ да узилади. **100.** $x^2+y^2=9$ да узилади.

XIII боб

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. **5.** $dz=\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dx+\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2y\sqrt{y}}\right)dy$. $d^2z=-\frac{y}{4x\sqrt{x}}dx^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{y\sqrt{y}}\right)dxdy+$ $+\frac{3x}{4y^2\sqrt{y}}dy^2$. **6.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)$. 7. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$. **9.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **12.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$ **13.** $dz=-\frac{zy}{x^2\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}dx+\frac{2}{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}dy$. **14.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. **16.** $dz=\frac{ydx+xdy}{2\sqrt{xy}(1+xy)}$, $d^2z=-\frac{1}{4(1+xy)\sqrt{xy}}$ $\times\left[\frac{3xy+1}{xy(1+xy)}(y^2dx^2+x^2dy^2)-\frac{3xy-1}{1+xy}dxdy\right]$. **17.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2-y^2)^2\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}$ $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$. **18.** $dz=\left[\left(\frac{y}{x}\right)^x\ln\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^x\right]dx+\left(\frac{y}{x}\right)^{x-1}dyd^2z=$ $=\left[\left(\frac{y}{x}\right)^x\left(\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]dx^2+2\left(\frac{y}{x}\right)^{x-1}\left(\ln\frac{y}{x}-\right.$ $\left.-\frac{x-1}{x}\right)dxdy+\frac{x-1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{x-2}dy^2$. **20.** $f'_x(1,0)=0$, $f''_{y^2}(1,0)=1$, $f'''_{xy}(1,$ $0)=1$, $df(1,0)=-dy$. **21.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+1}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+1}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+1}{\sqrt{y}}$. **22.** $dz=e^{xy}\left[\left(\frac{1}{y}+x\right)dx+\frac{x}{y}\left(x-\frac{1}{y}\right)dy\right]$, $d^2z=e^{xy}\left[(1+xy)dx^2+2\left(\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y^2}\right)dxdy+\left(x^2-\frac{2x}{y}+\frac{2}{y^2}\right)\frac{x}{y}dy^2\right]$.

24. $du=\frac{x\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}(ydx-xdy)$,

$$d^2u=\frac{\sqrt{2}\,|y(x^1+2x^3-y^4)dx^2+x(x^4-2y^3-y^4)dxdy-2x^2y^2dy^2|}{(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)^{3/2}}.$$

38. $du=af'_1dx+bf'_2dy$, $d^2u=a^2f''_{11}dx^2+2abf''_{12}dxdy+b^2f''_{22}dy^2$.

40. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\sin v+\frac{\partial z}{\partial y}2u$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}u\cos v$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2 v+$ $+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}4u\sin v+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}4u^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}u\sin v\cos v+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}u^2\cos v+$ $+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos v$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial z}{\partial x^2}u\,{}^2\cos^2 v-\frac{\partial z}{\partial x}u\sin v$. **41.** $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

42. $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg} x-\sin\ln\sin x)$. **43.** $dz=\left(\frac{\sin uv}{v}-u\sin\frac{u}{v}+\right.$ $\left.+u\cos uv+v\cos\frac{u}{v}\right)du+\left(\frac{u^2}{v}\sin\frac{u}{v}\cdot\frac{u}{v^2}\sin uv+\frac{u^2}{v}\cos uv+\right.$ $\left.+u\cos\frac{u}{v}\right)dv$ **44.** $\frac{du}{dt}=\frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6-\frac{x}{2y^2}\right)$. **45.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$. **46.** $dz=0$. **48.** $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

51. $du=x^{m-1}y^{n-1}(mydx+nxdy)$, $d^2u=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+$ $+2mnxydxdy+n(n-1)x^2dy^2]$. **52.** $du=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, $d^2u=-\frac{2}{y^3}dy\,(ydx-xdy)$. **54.** $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2u=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

56. $du=e^{xy}(ydx+xdy)$, $d^2u=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2]$. **59.** $dz=$ $=6(x^2+y^2)(xdx+ydy)$, $d^2z=6(x^2+y^2)[(5x^2+y^2)dx^2+4xydxdy+(x^2+$ $+5y^2)dy^2]$. **63.** $dz=0$. **64.** 0,97. **65.** 1, 32. **67.** 1,05. **70.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{180}(\sqrt{3}-0{,}5)$.

72. $dz=\left(y+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(x-\frac{1}{x}\right)dy$. $d^2z-\frac{2y}{x^2}dx^2+2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dxdy$.

74. $dz=dx-3\cos y\,dy$, $d^2z=3\sin y d^2y$. **78.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$

80. $f''_{xx}(0,0)=m(m-1)$. **87.** $\frac{2\cdot 9!(4x+6y)}{(x+y)^{11}}$. **88.** $e^{x+y}[x^2+y^2+2(mx+$ $+ny)+m(m-1)+n(n-1)]$. **89.** $\sin\frac{n\pi}{2}$. **96.** $d^2z=a^2 f''_{uu}(u,v)dx^2+$ $+2abf''_{uv}(u,v)dxdy+b^2f''_{vv}(u,v)dy^2$. **97.** $du=f'_1(dx+dy)+f'_2(dx-dy)$, $d^2u=f''_{11}(dx+dy)^2+2f''_{12}(dx^2-dy^2)+f''_{22}(dx-dy)^2$.

99. $d^2z=(ye^x f'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})_{dz}{}^2+2(e^y f'_u+e^x f'_v+$ $+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}(1+xy)f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})dxdy+(xe^y-f'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+$ $+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})dy^2$. **100.** $dz=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left(y\ln\frac{ex}{y}dx+x\ln\frac{x}{ey}dy\right)$.

$d^2z=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\cdot\cdot\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\right)dxdy+\right.$

$+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2\Big]$. **102.** $1-\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2$. **103.** $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$. **104.** $1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$. **105.** $1+(y-1)+\ +(x-1)(y-1)$. **106.** $f_{\min}=-21$. **107.** Экстремум йўқ. **108.** $z_{\min}=0$ (0, 1) да. **109.** $z_{\min}=-1$ (1, 1) да. **110.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ да max. **111.** $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},-\frac{3a}{2}\right)$. $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2},-\frac{3a}{2}\right)$ ларда. **112.** $(-1,\ 1)$ да max. **113.** $z_{\min}=30$ (5, 2) да. **115.** $z_{\min}=-\frac{2}{e}$. **117.** $z_{\max}=8e^{-2}$ $(-1,\ -2)$ да; (0, 0) да экстремум йўқ. **118.** $z_{\min}=-\frac{1}{2e}$, $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$ ларда. **121.** $z_{\max}=1$. **123.** $z=-2$, $z=-5$. **124.** $z=17$ (0, 1) ва (1, 1) да $z=-\frac{17}{4}$ $\left(\frac{1}{2},0\right)$ да. **127.** max $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ да. **128.** $z=128$ (4, 4) да. $z=-4$ (0, 0) да. **133.** Йўқ. **134.** Йўқ. **135.** Аниқлайди. **141.** $y'_x=\frac{e^{2y}-\frac{y}{x}}{\ln x-2xe^{2y}}$. **142.** $y'_x=\frac{2b-2axe^{-y}}{e^y-ax^2e^{-y}}$. **143.** $y'_x=\frac{x+y}{x-y}$. **144.** $y'_x=\frac{y^2-2x^2\ln y}{x^2-2y^2\ln x}\cdot\frac{y}{x}$. **145.** $y'_x=-\frac{y}{x}$. **146.** $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$

XIV боб

Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар

1. $f(x)=0$. **2.** $f(x)=0$. **3.** $f(x)=x^3$. **4.** $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **6.** $f(x)=0$. **8.** $f(x)=0$. **9.** $f(x)=e^x$. **10.** $f(x)=\ln x$. **13.** $f(x)=\sqrt{x}$. **14.** $f(x)=0$. **15.** $f(x)=e^{2x}$. **16.** $f(x)=\sqrt{x}$. **17.** $f(x)=x$. **18.** $f(x)=x$, агар $x<0$ бўлса; $f(x)=\frac{1}{2}$, агар $x=0$ бўлса; $f(x)=1$, агар $x>0$ бўлса. **19.** $f(x)=1$, агар $0\leqslant x\leqslant 1$ бўлса; $f(x)=2$, агар $1<x<2$ бўлса; $f(x)=\frac{x^2}{2}$, агар $x\geqslant 2$ бўлса. **31.** Нотекис яқинлашади. **32.** Нотекис яқинлашади. **33.** Нотекис яқинлашади. **35.** Текис яқинлашади. **36.** Нотекис яқинлашади. **37.** Нотекис яқинлашади. **38.** Текис яқинлашади. **39.** Текис яқинлашади. **40.** Текис яқинлашади. **46.** $X=(-\infty,\ +\infty)$. **47.** $X=(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$. **48.** $X=(-\infty,\ -3]\cup(-1,\ +\infty)$. **49.** $X=(-\infty,\ +\infty)$ $\{x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\}$. **50.** $X=(-1,\ 1)$. **51.** $X=[0,\ +\infty)$.

52. $X=(-\infty, 0)$. **53.** $X=\left[\frac{1}{e}, e\right)$. **54.** $X=\{x\in R:2<|x|<\sqrt{6}\}$. **55.** $X=$ $=(-\infty, +\infty)\backslash\{x=2k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. **56.** $X=(-\infty, +\infty)$. **57.** $X=(-\infty, +\infty)\backslash\{0\}$. **58.** $X=(-3{,}3]$. **59.** $X=\{x\in R:|x|>\sqrt{e}\}$. **60.** $X=(e, +\infty)$. **61.** $X=\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. **62.** $X=\{x\in R:2k\pi<x<(2k+1)\pi,$ $k=0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. **63.** $X=(-1{,}1)$. **64.** $X=(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. **65.** $X=(-3, 3)$. **96.** Нотекис яқинлашади. **97.** Текис яқинлашади **98.** Текис яқинлашади. **99.** Текис яқинлашади. **100.** Нотекис яқинлашади. **101.** Текис яқинлашади. **102.** Текис яқинлашади. **103.** Нотекис яқинлашади. **104.** Текис яқинлашади. **105.** Текис яқинлашади. **109.** Узлуксиз. **110.** Узлуксиз. **111.** Узлуксиз. **112.** $x=0$ да узилади. **113.** $x=0$ да узилади. **114.** $x=1$ да узилади. **115.** Узлуксиз. **116.** Мумкин. **117.** Мумкин эмас. **118.** Мумкин эмас. **119.** Мумкин. **120.** Мумкин. **121.** Мумкин эмас. **122.** Мумкин эмас. **123.** Мумкин. **124.** 2. **125.** $\frac{2}{3}$. **126.** 1. **127.** -1. **128.** 1. **129.** $\frac{\pi^2}{6}$. **133.** $r=1$, $(-1, 1)$, $[-1, 1)$. **134.** $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **135.** $x=0$ нуқтадагина яқинлашади. **136.** $r=\frac{1}{3}$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **137.** $r=4$, $(-4, 4)$. **138.** $r=1$, $(-1, 1)$, $(-1, 1]$. **139.** $r=1$, $(-1, 1)$, $[-1, 1)$. **140.** $r=\frac{5}{2}$, $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. **141.** $r=1$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$. **142.** $r=4$, $(3, 5)$, $[3, 5]$. **143.** $r=3$, $(-2, 4)$, $[-2, 4)$. **144.** $r=e$, $(-e, e)$. **145.** $r=1$, $(-4, -2)$, $[-4. -2]$. **146.** $r=1$, $(-1, 1)$. **147.** $r=3$, $(-3, 3)$. **148.** $r=1$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$. **149.** $r=1$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$. **150.** $r=1$, $[-1, 1]$. **151.** $r=1$, $(0, 2)$. **152.** $x=0$ нуқтадагина яқинлашади. **153.** $X=[0{,}1;\ 10]$. **154.** $X=(0, +\infty)$. **155.** $X=(-1, +\infty)$. **156.** $X=\{x{:}x\in R, \frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi, k=0,$ $\pm1, \ldots\}$. **157.** $x=\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **158.** $S(x)=-\ln(1-x)$. **159.** $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **160.** $S(x)=\operatorname{ch} x$, $|x|<+\infty$. **161.** $S(x)=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x|<1$. **162.** $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **163.** $S(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$. **164.** $S(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **165.** $S(x)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$, $|x|<1$. **166.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **167.** 3.

175. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $(-\infty<x<+\infty)$. **176.** $x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+3}\times$

$\times\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$. **177.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$; $(-\infty<x<+\infty)$.

178. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}(2^{n-1}+(-1)^n)\cdot x^n$ $(-\infty<x<+\infty)$.

179. $\frac{\pi}{2}-x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1<x<1)$.

180. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{2n!}x^{2n}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n\cdot 2^{2(n-1)}}{(2n)!}(1+3^{2n-1})\cdot x^{2n+1}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

182. $\ln 12+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4^{-n}-3^{-n}}{n}\cdot x^n$ $(-3<x<3)$.

183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1<x<1)$. **184.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$ $(-1<x<1)$.

185. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n(-1<x<1)$.

186. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, $(-3<x<3)$.

187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^{2n}$, $(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$. **188.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}\times$
$\times x^n$, $(-1<x<1)$. **189.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$, $(-1<x<1)$.

190. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!}(2^{2n-2}-1)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$, $r=\infty$.

191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{2n}$, $r=1$. **192.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-2^{-(n+1)})(x-1)^n$,
$r=1$. **193.** $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}\cdot n!}(x-2)^{2n}$, $r=2$.

194. $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$, $r=2$.

195. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\ldots\right)$, $r=\infty$.

196. $e^{-2}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$, $r=\infty$.

197. $2\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\,2^{3n}}(x-4)^n\right]$, $r=4$.

199. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!!}$, $r=\infty$. **200.** $\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^{n}$, $r=2$. **201.** $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $r=1$. **202.** $\frac{\pi}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}$, $r=2$. **203.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{2n+1}$, $r=1$.

204. $2|x|\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]$, $r=1$.

205. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $r=\infty$. **206.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$ $r=\infty$.

207. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^{2}}$, $r=1$. **211.** $S(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x>0)$.

212. $S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^{2}}$ $(-1<x<1)$. **213.** $S(x)=(1+3x^{3})e^{x^{3}}$.

214. $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$. **215.** $\frac{x(x+1)(x^{2}+10x+1)}{(1-x)^{5}}$, $(-1<x<1)$. **216.** $S(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$. **217.** $\alpha\approx3{,}017$. **218.** $\alpha\approx$ $\approx0{,}309$. **219.** $\alpha\approx1{,}0986$. **220.** $\alpha\approx0{,}1973$. **221.** $\alpha\approx0{,}6065$. **222.** 0,946 **223.** 0,747. **224.** 0,905. **225.** 0,310. **226.** 0,783.

XV боб.

Хосмас интеграллар

1. $\frac{1}{2}\ln2$. **2.** $\frac{\pi}{4}$. **3.** $\frac{1}{3e^{3}}$. **4.** 1. **5.** π. **6.** $\pi^{2}8$. **7.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **8.** $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$. **9.** -1. **10.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **21.** $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\ln3$. **22.** $\frac{5-\ln64}{3}$. **23.** π. **24.** 1. **25.** $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha>0)$. **26.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln3$. **27.** $2(1-\ln2)$. **28.** $\frac{13\pi}{4}$. **29.** 10!. **30.** 0. **31.** 0. **32.** $\frac{\pi}{2}-1$. **33.** $\frac{2}{13}$. **34.** $\frac{3}{13}$. **35.** π. **36.** $2\ln(1+\sqrt{2})$. **37.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **38.** 24. **39.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **40.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **72.** $0<\alpha\leqslant1$ да шартлик яқинлашувчи, $\alpha>1$ да абсолют яқинлашувчи. **73.** $0<\alpha\leqslant1$ да шартли яқинлашувчи, $\alpha>1$ да абсолют яқинлашувчи. **74.** $0<\alpha\leqslant1$ да шартли яқинлашувчи, $\alpha>1$ да абсолют яқинлашувчи. **75.** $1\leqslant\alpha<2$ да шартли яқинлашувчи, $0<\alpha<$ <1 да абсолют яқинлашувчи. **76.** $-3<\alpha<-1$ да абсолют яқинлашувчи, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ да шартли яқинлашувчи. **77.** $\alpha<-1$ да абсолют яқинлашувчи, $-1\leqslant\alpha<0$ да шартли яқинлашувчи. **78.** 0. **79.** Мавжуд эмас. **80.** 0. **81.** 0. **82.** 2. **83.** $\frac{\pi}{2}$. **84.** -1. **85.** $2\ln 3$. **86.** $\frac{1}{\ln 2}$. **87.** $\frac{\pi}{2}$. **88.** $\frac{9\pi}{4}$. **89.** $\frac{\pi^2}{8}$. **90.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **91.** $6\sqrt[3]{2}$. **100.** $\frac{31}{5}$. **101.** 4. **102.** 2π. **103.** $-\frac{4}{3}$. **104.** $\frac{21}{4}$. **105.** $\frac{(e-1)^2}{e}$. **106.** $2\ln(\sqrt{2}-1)$. **107.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **108.** $\frac{7}{9}$. **109.** π. $(a, b\in R,\ a<b)$. **126.** Яқинлашувчи. **127.** Узоқлашувчи. **128.** Яқинлашувчи. **129.** Яқинлашувчи. **130.** Узоқлашувчи. **131.** Яқинлашувчи. **132.** Узоқлашувчи. **133.** Яқинлашувчи. **134.** Узоқлашувчи. **135.** Яқинлашувчи. **136.** $\alpha>-1$ да абсолют яқинлашувчи. **137.** Абсолют яқинлашувчи эмас. **138.** $\alpha>1$ да абсолют яқинлашувчи. **139.** $\alpha>0$ да абсолют яқинлашувчи. **140.** $\alpha>0$ да абсолют яқинлашувчи. **141.** $\alpha<1$ да абсолют яқинлашувчи. **142.** $\ln\frac{b-c}{c-a}$. **143.** $\ln 2$. **144.** $-\pi\ln 2$. **145.** $-\frac{\ln 3}{4}$.

XVI боб

Параметрга боғлиқ интеграллар

1. $f(x)=x^4$. **2.** $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } 0<x<1 \text{ бўлса,} \\ \frac{\pi}{2}(x-1), \text{ агар } x\geqslant 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$ **3.** $f(x)=|x|$.

4. $f(x)=x^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ агар } 0<x<1 \text{ бўлса,} \\ , \text{ агар } x=0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ агар } 0\leqslant x<1 \text{ бўлса,} \\ x, \text{ агар } 1\leqslant x<2 \text{ бўлса.} \end{cases}$ **7.** $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

8. $f(x)=0$. **9.** $f(x)=0$. **10.** $f(x)=0$. **16.** $f(x)=0$ га текис яқинлашади. **17.** $f(x)=0$ га текис яқинлашади. **18.** $f(x)=0$ га текис яқинлашади. **19.** $f(x)=0$ га текис яқинлашади. **20.** $f(x)=\frac{1}{x^3}$ га нотекис яқинлашади. **21.** $y=0$ нуктада узилишга эта. **22.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) 1.

23. $F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int\limits_{x}^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy$. **24.** $F'(\alpha)=-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+$ $+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$. **25.** $F'(\alpha)=f(\alpha, -\alpha)+$ $+2\int\limits_{0}^{\alpha} f'_u(u, v)dx,\quad (u=x+\alpha,\quad v=x-\alpha)$. **26.** $F'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$.

27. $F^1(\alpha)=2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)\,dy+2\int\limits_{0}^{\alpha^2}\sin 2x^2\cdot\cos 2\alpha x\,dx-$

$-2\alpha\int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$. **28.** $F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

29. $F''(x)=2f(x)$, агар $x\in(a, b)$ бўлса, $F''(x)=0$, агар $x\in(a, b)$ бўлса. **30.** $F^{(n)}(x)=(n-1)!\ f(x)$. **31.** $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$. **32.** 0, агар $|a|\leqslant 1$ бўлса; $\pi\ln a^2$, агар $|a|>1$ бўлса. **33.** $\pi\arcsin a$. **34.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

35. а) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. Кўрсатма: $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_a^b x^y dy$ $(a>0,\ b>0)$ муносабатдан фойдаланинг ва $x=e^{-t}$ алмаштириш бажаринг. **38.** Нотекис яқинлашади. **39.** Текис яқинлашади. **40.** Текис яқинлашади. **41.** Текис яқинлашади. **42.** Нотекис яқинлашади. **43.** Нотекис яқинлашади. **44.** Нотекис яқинлашади. **45.** Текис яқинлашади. **46.** Текис яқинлашади. **47.** Текис яқинлашади. **48.** Нотекис яқинлашади. **49.** Текис яқинлашади. **50.** Текис яқинлашади. **51.** Мумкин эмас. **53.** 1. **56.** $\alpha=\pm 1$. **57.** Узлуксиз. **58.** Узлуксиз. **59.** Узлуксиз. **60.** $\alpha=0$ да узилишга эга.

62. 0. **63.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. **64.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{\alpha}$. **65.** $\frac{\ln(2\alpha)^{2\alpha}\cdot(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha}+2\beta}$. **66.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^{\alpha}+m^2}{\alpha^2+m^2}$. **67.** $-\pi(1-\sqrt{1-a^2})$. **68.** $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. **69.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})$.

70. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)(\beta\neq 0)$. **71.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{a^{\alpha}\beta^{\beta}}$, $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

72. $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(a^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha>0,\ \ \beta>0)$.

73. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-ac}{a}}$. **74.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}}$. **75.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. **76.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

77. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$. **78.** $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. **79.** $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2})$.

80. $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. **81.** $\frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi}\,\alpha$. **82.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$. **83.** $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. **84.** $\frac{\pi}{4}$.

85. $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. **86.** $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+$ $+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. **87.** $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. Кўрсатма: $\frac{1}{1+x^2}=$ $=\int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}dy$ муносабатдан фойдаланинг. **88.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$.

89. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$. **90.** $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. **91.** $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\right.$

$+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\Big)$. **92.** $\sqrt{\pi}\cos(a^2+\frac{\pi}{4})$. **93.** $\sqrt{\pi}\sin(a^2+\frac{\pi}{4})$. **94.** $\frac{\pi}{2a}\sin ay$.

95. $-\frac{\pi}{2}\cos ay$. **96.** $\pi(\operatorname{ctg}\pi a-\operatorname{ctg}\pi b)$. **97.** $\frac{\pi}{2}(e^a-1)$. **98.** $\frac{1}{2}\ln\frac{a_1^2+b_1^2}{a^2+b^2}$.

99. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$. **100.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}$. **106.** $\frac{\pi}{8}$. **107.** $\frac{\pi a^4}{16}$.

108. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **109.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. **110.** $\frac{\pi}{2}$. **111.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1\cdot4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)}$.

112. $\frac{\pi}{2\sin n\pi}$. **113.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$. **114.** $\frac{2^{n-1}\Gamma^2(\frac{n}{2})}{(1-k^2)^{n/2}\Gamma(n)}$. **115.** $\pi\operatorname{ctg}\pi a$.

116. $\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1+\sin^2\frac{\pi a}{2}}{\cos^3\frac{\pi a}{2}}$. **117.** $\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **118.** $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$.

119. $\frac{\pi}{2\nu\cos\frac{\pi\mu}{2\nu}}$. **120.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **121.** $\frac{a^2}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. **122.** $\frac{a^3}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{3}{n})}$.

XVII боб

Каррали интеграллар

1. $\int_0^2 dy\int_{y-2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y-2}^{2} f(x,y)dx$. **2.** $\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx+$ $+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)dx$. **3.** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$. **4.** $\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$ $+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$. **5.** $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. **6.** $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

7. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^{0} dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$. **8.** $\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)d\varphi$.

9. $\int_0^a dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{\varepsilon^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\varepsilon^2}{a^2}} f(\varphi,r)d\varphi$. **10.** $\int_0^a dr\int_r^a f(\varphi,r)d\varphi$. **11.** 3. **12.** $\frac{2}{3}\ln 4$. **13.** $\frac{P^5}{21}$.

14. $\frac{a^4}{2}$. **15.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **16.** $\frac{\pi}{2}$. **17.** $\frac{4}{3}$. **18.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **19.** $\frac{9}{16}\pi$. **20.** 6. **21.** $\frac{50941}{162}$.

22. $\frac{2\sqrt[6]{632}}{3}$. **23.** 0. **24.** 4. **25.** $9-\frac{5\pi}{4}$. **26.** $\pi((1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2)$.

27. $\frac{32}{45}R^5$. **28.** $\frac{2}{3}a^2$. **29.** $\frac{26\ln 2}{3}$. **30.** $\frac{17}{18}$. **31.** $\frac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}}-b^{\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)$.

32. $\frac{\sin pb-\sin pa}{q}-\frac{\sin qb-\sin qa}{q}$. **33.** $\frac{2}{15}$. **34.** $\pi\sin a^2$. **35.** $4+\pi$.

36. $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)a^2}{3}$. **37.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. **38.** $a^2\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$.

39. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **40.** $\frac{1}{1260}\cdot\frac{(ab)^5}{c^8}$. **41.** $\frac{ab}{70}$.

42. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. **43.** $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$. **44.** $\frac{65}{108}ab$. **45.** $\frac{3}{4}\pi a^2$.

46. $\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$. **47.** $\frac{ab(n!)^2}{(2n)!}$. **48.** $\frac{3}{5}(c^2-d^2)\ln\frac{a}{b}$. **49.** $\frac{1}{4}(a^2-b^2)\times$
$\times\left[\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}+\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right]$. **50.** 3π. **51.** $\frac{\pi R^2a}{4}-\frac{2}{3}R^3$. **52.** $\frac{88}{105}$.

53. π. **54.** $\frac{17}{12}-2\ln 2$. **55.** $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. **56.** $\frac{45}{32}\pi$. **57.** $\frac{16}{9}a^3$.

58. $\pi(1-e^{-R^2})$.**59.** $2a^2c\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. **60.** $\frac{\pi}{8}$. **61.** $\frac{2}{9}abc(3\pi+$
$+20-16\sqrt{2})$. **62.** $\frac{2}{5}a^2\sqrt{2ap}$. **63.** $\frac{1}{20}\cdot\frac{a^5}{pq}$. **64.** $a^3\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$. **65.** $\frac{16ab^2}{3}$.

66. $\frac{88}{5}$. **67.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **68.** πabc. **69.** $\frac{4}{\pi^2}abc$. **70.** $\frac{m^3-n^3}{12\pi}[\cos\pi\beta^4-\cos\pi\alpha^4]$.

71. $\frac{1}{364}$. **72.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **73.** $\frac{16\pi}{3}$. **74.** $\frac{1}{32}\times$
$\times\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$.

75. 0, агар m, n, p ларнинг бирортаси ток бўлса,
$\frac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, агар m, n, p лар жуфт бўлса.

76. $-\frac{1}{3}$. **77.** $\frac{9a^6}{1280}$. **78.** $\frac{\pi R^2h^2}{4}$. **79.** $\frac{51}{64}\pi R^5$. **80.** $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-$
$-\frac{97}{6})$. **81.** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **82.** $\frac{a^3}{6}$. **83.** $\frac{a^3}{360}$. **84.** $\frac{\pi a^3}{60}$. **85.** $\frac{4\pi a^3}{21}$. **86.** $\frac{32}{315}a^3$.

87. $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. **88.** $\frac{a^3}{3}$ **89.** $\frac{\pi}{3}(1-e^{-1})a^3$. **90.** $\frac{8}{3}a^3$. **91.** $\frac{\pi^2a^3}{6}$.

92. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$. **93.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{a^2bc}{k}$. **94.** $\frac{4}{3}\frac{abc^2}{k}$. **95.** $\frac{1}{18}abc$. **96.** $\frac{49}{864}a^3$.

97. $\frac{1}{4}(b^4-a^4)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q}\right)\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **98.** $\frac{5\pi^2a^3}{8}$. **99.** $\frac{\pi^2}{64}(a+b)(5a^2-2ab+5b^2)$.

100. $\frac{45}{35}abc$.

XVIII боб

Эгри чизиқли интеграллар

1. $2\sqrt{2}$. **2.** $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$. **4.** $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **5.** 0. **6.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **7.** $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{3/2}-1]$. **8.** $\sqrt{2}\,a^2$. **9.** $\frac{\pi}{a}$. **10.** $4a^{\frac{7}{3}}$. **11.** $2a^2$. **12.** $(-2\sqrt{2})\cdot 2a^2$. **14.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. **15.** $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. **16.** $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{335}{27}a$. **18.** $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{x_0}{a}}\right)$. **19.** $\frac{3\pi}{2}a$. **20.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **21.** $\frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **22.** $2b(b+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon})$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. **23.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$ **24.** $\frac{\pi}{a}$. **25.** $\left(\frac{4a}{3};\ \frac{4a}{3}\right)$. **26.** $\left(\frac{a}{5};\ \frac{a}{5}\right)$. **27.** $\left(\frac{5a}{8};\ 0\right)$. **28.** $(0,\ \frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)})$. **29.** $S_{ox}==S_{oy}=3$. **30.** $\Gamma_{ox}=\Gamma_{oy}=2\pi$. **31.** π. **32.** $\frac{ab}{2}$. **33.** $\frac{17}{15}$. **34.** $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$. **35.** 0. **36.** 3. **37.** -2π. **38.** 0. **39.** 18. **40.** 2π. **41.** $\frac{221}{15}$. **42.** $-\frac{3}{16}\pi a^2$. **43.** $-2\pi a^2$. **44.** $\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+a^2}$. **46.** $55\frac{2}{3}$. **47.** $\frac{2(3\pi+1)}{3}$. **48.** 1,9. **50.** 25π. **51.** $\frac{3\pi}{8}a^2$. **53.** $6\pi a^2$. **54.** a^2. **55.** $\frac{a^2}{3}$. **56.** $-46\frac{2}{3}$. **57.** $\frac{\pi r^4}{2}$. **58.** 0. **59.** $-\frac{1}{5}(\pi-1)$. **60.** $-\frac{4}{3}$. **61.** -4. **62.** 8. **63.** $\frac{5}{8}$. **64.** -2. **66.** $-\frac{3}{2}$. **67.** $\pi+1$. **68.** $F(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^2+C$. **69.** $F(x,y)=xe^{2y}-5y^3e^x+C$. **70.** $F(x,y)=4x^3y+\frac{x}{y^2}+C$. **71.** $F(x,y)=x^3y^2-y^3x+2x^2+5y+C$. **72.** $F(x,y)=\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{y}+C$. **73.** $F(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$. **74.** $F(x,y)=\ln(x+y)-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C$. **75.** Функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмайди.

XIX боб

Сирт интеграллари

1. 9. **2.** $\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$. **3.** 0. **4.** $2\sqrt{2}\,\pi$. **5.** $\frac{(4a+\pi)a}{2}$. **6.** $\pi\left(\frac{4r^4}{3}+\frac{r^5}{2}\right)$. **7.** $80\sqrt{2}\,\pi$.

8. $\frac{36\pi-29}{12}$. **9.** a^2c^2. **10.** $\frac{(8+\pi a^2)a^2}{16}$. **11.** $2(2+9\pi)$. **12.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+$ $+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. **13.** $3\pi r^2$. **14.** $4r^2$. **15.** $2(3-\sqrt{2})\pi a^2$. **16.** $\frac{4\pi}{3}r^4+\frac{\pi}{2}r^5$. **17.** $\frac{\pi}{15}(500\sqrt{10}-23)$. **18.** $2\sqrt{2}\pi$. **19.** $\left(\frac{r}{2};\ \frac{r}{2};\ \frac{r}{2}\right)$. **20.** $\left(\frac{r}{2\sqrt{2}};\ \frac{r}{2\sqrt{2}};\ \frac{r}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$. **21.** $(0,0,\ \frac{2b}{3})$. **22.** $\frac{\pi a^3}{2}\sqrt{a^2+1}$. **23.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}a^2\cdot S$, бунда S сирт юзи. **24.** $-\frac{\pi a^7}{420}$. **25.** $J_1=J_2=\frac{8\pi}{3}$. **26.** $J_1=\pi ab$, $J_2=\frac{4abc\pi}{3}$, $J_3=\pi abc$. **27.** $\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{15}\right)$. **28.** $\frac{\pi a^4}{2}$ **29.** -3. **30.** 32π. **31.** -96π. **32.** $\frac{b^6}{9}$. **33.** $-\frac{\pi ab^4c}{2}$. **34.** 0. **35.** $-\iint\limits_{(s)}dxdy+dydz+dzdx$. **36.** $-3\iint\limits_{(s)}x^2y^2dxdy$. **37.** 0. **38.** $-2\iint\limits_{(s)}xdydz+ydzdx+zdxdy$. **41.** 0. **42.** $-2\pi a(a+c)$. **43.** $-\pi a^2$. **44.** 0. **45.** $2\iiint\limits_{(v)}(x+y+z)dxdydz$. **46.** $2\iiint\limits_{(v)}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **47.** $4\pi abc$. **48.** $3a^4$. **49.** $\frac{12}{5}\pi r^5$. **50.** $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

XX боб

Фурье қаторлари

1. $f(x)\sim 3+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$. **3.** $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **4.** $f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}+\right.$ $\left.+\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{2n}\right]$. **5.** $f(x)\sim\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$. **6.** $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$. **7.** $1-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **8.** $1+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$. **9.** $\frac{1}{5}+\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(1-\frac{3}{2n^2\pi^2})\frac{\cos 2n\pi x}{4n^2}+\right.$ $\left.\left(\frac{6}{(2n-1)^2\pi^2}-1\right)\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)}\right]$. **10.** $2sh2\left[\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\right.$ $\left.\times\frac{2\cos n\pi x-n\pi\sin n\pi x}{n^2\pi^2+4}\right]$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **12.** $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. **13.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+a^2}\sin nx$. **14.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2+a^2}$. **15.** $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. **16.** $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

17. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n\pi-1}{\pi n^2}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]$ **18.** $\frac{\pi}{2}+$ $+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{\pi}{n}\sin nx\right]$ **19.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **20.** $1+$ $+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})\pi x}{(2k+1)}$. **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]$.

22. $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

АДАБИЁТ

1. Азларов Т. А. Мансуров Х. Математик анализ, 2- қисм,— Т. «Ўқитувчи», 1989.

2. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Ғуломов. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1, —Т. «Ўзбекистон», 1993.

3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М., Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, Ряды. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.— М. Наука, 1986.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

Азимбой Саъдуллаев, Хожиакбар Мансуров, Гулмирза Худойберганов,
Азизжон Ворисов, Рустам Гуломов

СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

II

Учебное пособие для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон» — 1995,
700129, Ташкент, Навои, 30.

Мухаррир *И. Аҳмаджонов*
Муқова рассоми *Д. Собирова*
Бадиий муҳаррир *И. Кученкова*
Техник муҳаррир *А. Горшкова*
Мусаҳҳих *М. Раҳимбекова*

Теришга берилди 27.04.94. Босишга рухсат этилди 17.05.95. Бичими $84\times108^1/_{32}$ «Таймс» гарнитура офсет босма усулида босилди. Шартли бос. т. 21,42. Нашр т. 20,17. 5000 нусхада чоп этилди. Буюртма № 527. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кучаси, 30.
Нашр № 284—93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қумитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кучаси, 30.

М12 **Математик** анализ курсидан мисол ва масалала
тўплами: Олий ўқув юртлари талабалари учун ўқу
қўлланмаси/А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худой
берганов Қ. 2.— Т.: Ўзбекистон, 1995.— 406 б.
1. Саъдуллаев А. ва бошқ.

ISBN 5-640-01508-X

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математик чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалар учун мўлжалланган.

Мазкур китоб кўп ўзгарувчили функциялар, функциона кетма-кетликлар ва қаторлар, хосмас интеграллар, параметрг боғлиқ хос ҳамда хосмас интеграллар, каррали интеграллар, эгр чизиқли ва сирт интеграллари, Фурье қаторлари мавзуларин ўз ичига олади. Қўлланмада 1300 га яқин мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг 250 дан ортиги батафсил ечим билан таъминланган.

22.16я7

$$\text{С}\ \frac{1602070000-66}{\text{М}351(04)-95}\ 95$$

ЎЗБЕКИСТОН